2.8 LA SUPERACIÓN DE LA ADVERSIDAD EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Alberto Mallart Solaz
Profesor Facultad Formación del Profesorado - UB
a_mallart@yahoo.es.

RESUMEN

Superar la adversidad en el ámbito de la formación matemática tiene una traducción inmediata: la resolución de problemas. Un problema es un obstáculo a superar sin conocer una estrategia de antemano. Su resolución requiere de la creatividad una combinación adecuada de propiedades, relaciones y datos. A pesar de que la argumentación se rija por la lógica, ésta no sirve para llegar a la solución, no es suficiente.

Para mejorar esta capacidad de superar adversidades, sería necesario programar una serie de actividades pero siempre respetando los diferentes ritmos de aprendizaje, en función del conocimiento, actitud e implicación. Si se consigue motivar al alumnado, se conseguirá una mayor implicación por parte de éste. Consecuentemente, aumentará el aprendizaje en estrategias de resolución. Estas estrategias solucionarán problemas particulares, pero aportarán un importante bagaje de cara a nuevos problemas.

1. LA CREATIVIDAD NO SE RIGE POR LA LÓGICA

Todo aquello que es matemático está ligado a la idea de exactitud, precisión y rigor, no teniendo cabida ni el error ni la indecisión. La lógica es quien gobierna pues es la que se encarga de justificar la veracidad de los resultados a partir de un determinado razonamiento basado en postulados. En la obra de los Elementos de Euclides ya se procedía de este modo y a lo largo del tiempo también se ha seguido procediendo según este modelo.

Pero las matemáticas no pueden reducirse a la lógica. A pesar de que se suelen mostrar resultados ya acabados y demostrados, no se puede mirar hacia otro lado y olvidar que éstos han sido producto de errores y pruebas. La lógica no se preocupa por crear resultados originales, más bien es propio de la intuición, la analogía, la experimentación y la conjetura.

Por otro lado, aunque para demostrar un teorema se tengan que aplicar reglas lógicas, esto no significa que no haya creatividad matemática. La creatividad se halla en elegir entre las diferentes opciones que se pueden estudiar. Es decir, se parte de unas hipótesis en base a una experimentación, analogía o intuición. Tampoco la lógica determina el camino a seguir, aunque sí sea ella quien lo juzgará. Así pues, el mérito creativo está en ser capaz de combinar ciertas reglas lógicas que conduzcan al resultado deseado.

La lógica, a pesar de ser imprescindible en matemáticas, no genera nada por sí misma. Es a través de pruebas y refutaciones como el matemático elabora sus teoremas, buscando contraejemplos (Lakatos, 1994).

La perspectiva psicológica sobre el pensamiento también apunta diferencias entre un pensamiento lógico y un pensamiento creador. La actividad mental creadora es una capacidad diferente a la de ir deduciendo a partir de ciertas reglas. Esta actividad creadora se rige por una zona distinta del cerebro: predominio del hemisferio derecho (creativo) frente al izquierdo (lógico).

2. LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA

Vivir experiencias poco frecuentes contribuye a hacer creativas a las personas porque les abre las mentes y les hace entender cosas nuevas a partir de lo que ya conocen. Se podría particularizar en el hecho de que hacer matemáticas significa vivir experiencias matemáticas, y para tener tales experiencias es necesario tener la voluntad de comprender y explicar el entorno desde un enfoque matemático. Plantearse cuestiones matemáticas relacionadas con los fenómenos cotidianos del ámbito escolar o extraescolar que atañen a la persona sí es creativo. Crear matemáticas es principalmente tener buenas ideas para descubrir resultados y procedimientos que ayudan a comprender los fenómenos que rodean al individuo. El objetivo de la creación matemática consistiría básicamente en explicar los fenómenos circundantes. Obsérvese que la lógica validaría la explicación, pero no en todos los casos serviría de explicación.

Así, se podría considerar que crear matemáticas consiste en resolver problemas. Primero existe una pregunta planteada para ser resuelta matemáticamente. Después se deben buscar patrones comunes. La actividad creadora consiste en resolver problemas de manera no convencional y persistente.

La creación matemática puede educarse pero no es una capacidad característica que tengan todos desarrollada de la misma manera. La iluminación que surge de repente y de la nada (ni del enunciado del problema ni de los datos) que se conoce como "idea feliz" no está restringida a las mentes brillantes. El Eureka de Arquímedes saliendo de la bañera, o la inspiración súbita de Poincaré o la "idea feliz" es una creación matemática. Pero no es fruto del azar sino del trabajo continuado que la psicología ubica en una fase del proceso creativo conocida como iluminación. Surge tras un trabajo intenso y continuo, como la búsqueda exhaustiva de todas las relaciones que existen entre los datos de un problema. La creatividad matemática sería la responsable de escoger una determinada y acertada relación.

Se podría considerar que la creatividad equivale a la fluidez mental con que se efectúan estas combinaciones de ideas y relaciones. Pero siempre teniendo en cuenta que lo verdaderamente creativo es el criterio que permite distinguir las relaciones triviales de las buenas, y no solamente efectuar combinaciones.

3. APRENDIZAJE Y CREATIVIDAD MATEMÁTICOS

Cuando las matemáticas se enseñan bien, interesan a todos, como mínimo para adquirir la cultura básica que necesitan diariamente. Si los alumnos tienen a su alcance contenidos que se ajustan a sus capacidades, el interés y el aprendizaje mejoran.

Las dificultades que aparecen en el aprendizaje de las matemáticas se relacionan con factores personales del individuo como procesos de pensamiento matemático, actitudes afectivas y emocionales o con factores propios de la enseñanza como la complejidad de los objetivos y procesos de enseñanza. Las dificultades pueden aumentar o incluso puede haber un bloqueo en el aprendizaje si existe tensión o miedo cuando se trabaja con matemáticas (Mallart, 2008).

La aptitud para el aprendizaje de las matemáticas contempla la comprensión verbal, la experiencia educativa anterior, el rendimiento previo en lenguaje y matemáticas, la implicación en el estudio y actitud positiva hacia las matemáticas (Arteaga y García, 2010).

Si lo que se pretende es mejorar el rendimiento y la actitud en matemáticas, lo más adecuado es diseñar actividades variadas para cada objetivo de las unidades programadas que satisfagan una serie de características. Por ejemplo que se cuide la claridad del lenguaje en el planteamiento de los materiales, que se centren en el dominio de los conceptos y competencias, que respeten diferentes ritmos de aprendizaje en función del conocimiento, actitud e implicación de los estudiantes. También es conveniente que ofrezcan actividades de refuerzo y de ampliación. Y por último las actividades tendrán que potenciar el trabajo independiente, la cooperación y la iniciativa personal (Arteaga y García, 2010).

Como crear significa producir algo diferente a lo ya conocido, la idea de creación es inseparable de la idea de aprendizaje. La creación matemática se basa en plantear buenas preguntas y resolver problemas, pero lo que hay que prever es que un nuevo resultado creado genera nuevos interrogantes o incluso puede ayudar a resolver otros problemas.

A lo largo de la historia se han dado dos tipos fundamentales de creación: las de expansión y las de asimilación. Muchas grandes creaciones matemáticas han estado ligadas a grandes crisis en el desarrollo matemático: a veces la creación solucionaba un problema, pero otras, creaba un conflicto con las ideas preexistentes. Por ejemplo es el caso de los números complejos, donde el cuadrado de un número podría ser negativo (Albertí, 2010).

4. FASES DE LA CREACIÓN MATEMÁTICA

Los psicólogos distinguen cuatro fases que tienen lugar durante todo proceso creativo (Albertí, 2010): a) preparación (donde se hacen con el problema concretando la pregunta, recolectando los datos y tanteando posibles salidas, estrategias, relaciones); b) incubación (fase inconsciente donde se producen asociaciones imprevistas que pueden apartarnos de los caminos más frecuentes); c) iluminación (aparece como de forma espontánea, se enciende una luz llamada “idea feliz” que resuelve el problema); d) verificación.

Pero dentro del ámbito matemático y científico los investigadores Pólya (1988), Davis y Hersh (1989) y Lakatos (1994) coinciden en señalar que el proceso creativo contempla: la observación, la intuición, la experimentación, la analogía, la imaginación, la generalización, la razón, la estrategia, la suerte.

La observación depende de quien la lleva a cabo, y sólo puede reconocerse lo que ya se conoce. Si realmente se desea percibir algo desconocido, es necesario estar atento a las cosas que sorprenden. La observación invita a intuir un patrón de formación que la experimentación puede confirmar. Pero es necesario gobernar el control de la experimentación pudiendo reproducir el experimento cuando se desee.

No es posible una experimentación exhaustiva que alcance todo el infinito para confirmarlo. Por ello es necesario hacer conjeturas, es decir, pasar de lo finito a lo infinito, de lo particular a lo general, a pesar de que los cálculos digan que la realidad numérica obedece a una pauta. Pero ésta tal vez no se comprende pues los cálculos están expresados en los parámetros de la lógica. Aunque se acepten los resultados, a veces cuesta ver el trasfondo del fenómeno estudiado. La analogía puede ayudar a comprender las causas del suceso.

Para finalizar, está la verificación. Se pretende dar una prueba definitiva de la propia conjetura que ni la experimentación numérica sobre cada número natural ni la experimentación analógica ofrecen. Ambas sirven para plantear el problema, para comprender el fenómeno y convencernos de él. Sin embargo, no podemos deducir de ellas la veracidad del resultado para todos los casos. Quizá sea bueno volver a la observación para tratar de encontrar un argumento lo suficientemente convincente.

Hersh (1997) opina que se puede deducir fácilmente que dos y dos son cuatro a partir de la axiomática y de la lógica formal, pero que la comprensión y la convicción del resultado provienen de “recolectar guijarros”.

5. LA COMPRENSIÓN

La comprensión es un factor de vital importancia en las matemáticas pues aquel que no comprende un problema no puede resolverlo. Ciertamente ha de existir la voluntad de querer comprender, y es con la perseverancia que la iluminación súbita puede surgir y acabar por ayudar a comprender la situación. En este sentido, la comprensión puede considerarse como una pieza básica de la analogía, la experimentación y el planteamiento de problemas. Estos son componentes que junto a la lógica son fundamentales en la heurística, un referente del proceso creativo matemático.

La heurística es una técnica de desarrollo matemático rescatada por Polya en la primera mitad del s. XX. Es el arte de crear vías de solución a un problema matemático. Con la práctica se puede desarrollar la capacidad de detectar relaciones adecuadas porque conviene probar diferentes alternativas, ensayar y equivocarse para aprender a seleccionar caminos útiles y descartar los que no lo son sin necesidad de recorrerlos completamente.

Para crear matemáticas conviene contemplarlas, no según las presentaba Euclides como una ciencia sistemática y deductiva, sino como una ciencia experimental e inductiva. La educación matemática constructiva muestra que es posible resolver problemas con conocimientos previos y gestionando bien la información. Se aprende creando las matemáticas útiles para cada uno, no exclusivamente las trascendentales para toda la humanidad.

Así, todos somos capaces de crear matemáticas. Lo verdaderamente difícil es aprender a plantearse preguntas y después aprender a buscar respuestas.

Pólya (1988) en su libro Cómo resolverlo propone 4 pasos fundamentales para solventar todo problema matemático subrayando como primer paso la comprensión y destacando la importancia de probar diversos caminos: 1. Comprender el problema; 2. Elaborar un plan para resolverlo; 3. Llevar a cabo el plan; 4. Examinar la solución obtenida y revisar el proceso.
Entre un creador y un no creador existe una gran diferencia (Albertí, 2010). El creador no cesa de pensar y el no creador, habiendo encontrado una idea, es reacio a abandonarla sintiéndose satisfecho por no tener que seguir pensando. Le cuesta pasar de una representación a otra. En cambio, en un creador, las ideas pasan de un campo a otro fácilmente e incluso pueden seguir diversos planteamientos de manera simultánea.

En la fase del proceso creativo que los psicólogos llaman incubación resulta complicado explicar cómo funciona el cerebro cuando se está resolviendo un problema. Tampoco es fácil describir lo que sucede en el instante en el que aparece la iluminación pues se produce espontáneamente y de manera inconsciente. Pero sí que se puede incidir en el periodo de preparación y en el de verificación. Es en la fase de preparación o de comprensión del problema (en terminología de Pólya) donde convendría trabajar intensamente para dar pie al alumbramiento de nuevas ideas.

6. ACTITUD

La actitud en la didáctica de las matemáticas puede considerarse causa y efecto del aprendizaje (Gairín, 1990). Actitudes negativas dificultan el aprendizaje y hay que estar alerta porque enseñar mal genera actitudes negativas. La conducta del profesor incide en la del alumno, y por ello, cuanto más positivas sean las percepciones de los alumnos sobre las expectativas y sentimientos de su profesor, mejor será su rendimiento.

A pesar de que las actitudes básicas se forman con pocos años de edad, siempre pueden cambiarse. Para que se produzca el cambio se han de dar ciertas características favorables como pueden ser: la oportunidad de actuar según sus creencias o el propio descubrimiento de nueva información proveniente de fuentes fiables que aconsejen un cambio. La necesidad práctica puede ayudar en el cambio de actitudes o incluso en su formación.

Por otro lado, cuando el individuo sufre una crisis, ya sea motivada por experiencias personales o por el profesor que hiere su orgullo, puede suceder un cambio de actitud.

De todas maneras, el alumno modificará su actitud cuando sea capaz de aceptar cambios y ello sucede de manera fluida y nada traumática cuando tiene seguridad en sí mismo. Es en ese momento cuando el alumno también puede formarse actitudes positivas y reforzarlas. Si se pretende aumentar la satisfacción y el interés del estudiante por la materia mejorando su autoestima (para aceptar cambios), su creatividad (para arriesgarse y aventurarse en el mundo del conocimiento) y su independencia (para aprender autónomamente) conviene orientar las clases hacia la motivación.

7. Motivación

Cualquier actividad docente y especialmente si se trabaja con niños requiere de la motivación, que les predispone para descubrir y aprender. Se puede enfocar de dos maneras no excluyentes: a) haciendo juegos o creando situaciones de clase para trabajar aspectos concretos; b) utilizando la realidad próxima a ellos.

La tarea del docente ha de consistir en prestar atención a sus alumnos y captar y canalizar toda la curiosidad que muestran. Es decir, su actitud debe propiciar que los alumnos se formulen preguntas.

La motivación en clase abarca dos grandes niveles: el primero consiste en conquistar la atención del alumno y el segundo va más allá y requiere que los alumnos participen en el desarrollo de la clase (Vidal Raméntol, 2005).

Por otro lado, existen factores motivacionales pedagógicos que se pueden modificar desde la misma institución escolar: el interés, el gusto por la asignatura, la independencia, el rendimiento, la interacción pedagógica, la estructuración sugestiva de la materia e incentivos del profesor y la utilidad del estudio.

Maslow (1987) considera cinco estadios generadores de la motivación que se deben fomentar entre los alumnos: las necesidades fisiológicas (una escuela, una mesa, una libreta, una alimentación básica), necesidades de seguridad (seguridad en sí mismos, en el grupo, en la actuación del maestro), necesidades sociales (de pertenecer a un grupo, tener amistades), necesidades del yo (autoestima) y necesidades de autorrealización (desarrollo del propio potencial y planteamiento de retos). Las dos últimas fases son de tipo psíquico que cuestan más de conseguir pero su efecto es de mayor duración.

Para mejorar la motivación de los alumnos, Herzberg (1967) aconseja enriquecer su trabajo con: innovación, variedad (en la presentación de los temas), éxito (debe experimentar el placer del éxito), reconocimiento (según la capacidad de cada alumno), reto y responsabilidad (implicación en las tareas escolares).

La teoría Y de McGregor (1966) trata de aprovechar los recursos humanos y creer en los alumnos y en el grupo como estrategia de acción positiva. Algunos de los recursos son los juegos y aspectos lúdicos, el reconocimiento, la autoestima, la responsabilidad, el respeto, la creatividad, la autorrealización, la libertad, estimulación y ayuda.

La teoría de la expectativa de Vroom (1964) se basa en la idea de que todo esfuerzo humano se realiza con la expectativa de conseguir éxito. Para satisfacer las necesidades de autoestima y de autorrealización deberán alcanzar el éxito y el reconocimiento de los demás.

8. AUTOESTIMA

La opinión de nosotros mismos que tenemos es la autoestima. Es un tipo de motivación intrínseca que orienta la propia conducta y que permite ejecutar las diferentes tareas con la seguridad de aquel que sabe que va a tener éxito (Lindelfield, 2001). De hecho, existe una correlación positiva entre la alta autoestima y el rendimiento escolar (McKay y Fanning, 2002).

El profesor puede mejorar la autoestima de los alumnos cuando propone retos alcanzables porque el éxito es motivador por sí mismo. Pero debe estar vigilante frente alumnos con autoestima baja corrigiendo normas y deberes inflexibles y sobre todo su vulnerabilidad a la crítica.

Gairín (1990) destaca que los alumnos con una buena autoestima hacen mejor las tareas escolares. También afirma que su capacidad de trabajo depende de las percepciones que tuvieron de experiencias anteriores de éxito y fracaso escolar. Los niños y adolescentes aprenden que son capaces o incapaces con los resultados de sus prácticas académicas.

El centro escolar podría preocuparse por mejorar la autoestima creando un clima positivo y fomentando el trabajo en grupo, estableciendo normas de trabajo y conveniencia y planteándose expectativas y retos.

9. Actividades

Actividad 1: Salto de longitud

La creatividad en la actividad está en diseñar una estrategia para solucionar el enigma lógico. Una posible estrategia consiste en diseñar una tabla que debe ser cumplimentada a medida que se va leyendo. Todo ello favorece la comprensión del enunciado, una etapa de la resolución de problemas que en el futuro abonará el terreno donde crecen las ideas felices y las ideas clave para solucionar los diferentes problemas futuros.

El enunciado dice así:

Albert es invitado a tomar asiento en el club deportivo de Alemania y a disfrutar de la comprensión deportiva de salto de longitud. Debe relacionar correctamente los datos de todos los participantes a partir de las pistas facilitadas.

1. *D. Brito* y el atleta de *21 años* hicieron mejor marca que *R. Double*.
2. *M. Marchais* y el *francés* se saludaron durante la entrega de premios.
3. El atleta de *20 años* saltó dos centímetros menos que el *finlandés*.
4. El *alemán* tiene un hermano al que no le gusta nada el deporte.
5. Para saltar *8m 30cm* uno de los atletas sudó demasiado.
6. *R. Double* saltó dos centímetros más que el de *22 años*.
7. El atleta *francés* es amigo del que hizo de marca *8m 28 cm*.
8. El *inglés* comió con el atleta que saltó *8m 26cm* el día de la prueba.
9. *L. Kurtz* tiene una hermana novelista.
10. El atleta que saltó *8m 35cm* y el de *21 años* viven del salto.
11. El atleta de *24 años* es muy atractivo.

Posible estrategia:

Atleta	Edad	Nacionalidad	Marca
R. Double	20	inglés	8m 28 cm
M. Marchais	21	finlandés	8m 30 cm
L. Kurtz	22	alemán	8m 26 cm
D. Brito	24	francés	8m 35 cm

Actividad 2: Un asesinato en la nieve

Para aprender matemáticas es necesario tener la voluntad de comprender y explicar el entorno desde un enfoque matemático. Esta voluntad puede verse fortalecida y motivada con preguntas matemáticas sobre procesos cotidianos o situaciones propias del ámbito no escolar. En esta actividad la parte creativa se desarrolla en buscar buenas ideas para descubrir resultados y procedimientos que ayudan a comprender el fenómeno ocurrido. En este caso la lógica valida el resultado pero no resuelve el problema.

El enunciado dice así:

Después de una gran nevada se produce un crimen. Avisan a un detective y la única pista que encuentra son las marcas de los neumáticos. Sigue las marcas y se encuentra en una gran mansión. Dentro hay cuatro hombres sentados. No hay ninguno que lleve nieve en los zapatos ni ninguno que tenga coche, pero el detective sabe al momento quien es el asesino. ¿Cómo lo ha descubierto? *Respuesta: El asesino iba en silla de ruedas.*

Actividad 3: Resolución de una integral mediante una ecuación

Durante la fase del proceso creativo que la psicología denomina iluminación es cuando se puede escoger una determinada relación que ayuda a resolver la integral de manera muy rápida. Se puede resolver aplicando dos veces el método de integración por partes y luego aplicando conocimientos adquiridos años anteriores sobre ecuaciones. El hecho de recurrir a conocimientos adquiridos también es fuente de motivación al abordar nueva materia, se sienten más seguros, como si tuvieran una linterna en plena oscuridad.

$$\int e^x \cdot Sin\ x\ dx = e^x \cdot Sin\ x - \int e^x \cdot Cos\ x\ dx =$$
$$= e^x \cdot Sin\ x - \left(e^x \cdot Cos\ x + \int e^x \cdot Sin\ x\ dx\right) =$$
$$= e^x \cdot Sin\ x - e^x \cdot Cos\ x - \int e^x \cdot Sin\ x\ dx$$

Sea $I = \int e^x \cdot Sin\ x\ dx$, dando lugar a la ecuación que se resuelve trivialmente:

$$I = e^x \cdot Sin\ x - e^x \cdot Cos\ x - I$$
$$2I = e^x \cdot Sin\ x - e^x \cdot Cos\ x$$
$$I = \frac{e^x \cdot Sin\ x - e^x \cdot Cos\ x}{2}$$

BIBLIOGRAFÍA

Albertí, M. (2010). *La creatividad en matemáticas. Como funciona una mente maravillosa*. Madrid: RBA.

Arteaga, B. y García García M. (2010). Diseño y evaluación de estrategias adaptativas para la mejora del rendimiento en matemáticas en educación secundaria. *Bordón 62 (4)*, p.25-35.

Davis, P. y Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática.* Barcelona: Labor.
Gairín, J. (1990). *Las actitudes en educación.* Barcelona: Boixareu Universitaria.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

Herzberg, F. (1967). *The Motivation to work*. New York: Wiley.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad.

Lindelfield, G. (2001). *Autoestima*. Barcelona: Plaza&Janés.

Mallart, A. (2008). *Estratègies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'ESO: ús de la matemàtica recreativa a les fases d'abordatge i de revisió*. Tesis doctoral. Bellaterra, Barcelona: Universitat Autònoma Barcelona.

Maslow, A. (1987). *Motivation and Personality*. New York: HarperCollins Publishers

McGregor, D. (1966). Leadership and Motivation. Cambridge, MA: MIT Press.
McKay, M. y Fanning, P. (2002). Autoestima: evaluación y mejora. Barcelona: Martínez Roca.

Pólya, G. (1988). *How to Solve It: A new aspect of Mathematical Method.* New Jersey: Princeton University Press.

Vidal Raméntol, S. (2005). *Estrategias para la enseñanza de las matemáticas en secundaria.* Barcelona: Laertes.

Vroom, V. (1964). Work and Motivation