

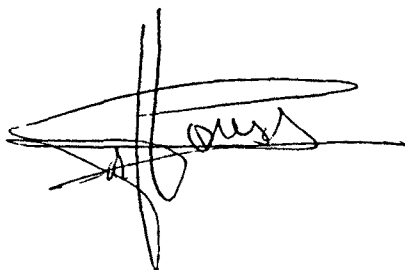
**MODELITZACIÓ D'ESTRUCTURES BIDIMENSIONALS PER  
PROSPECCIÓ ELÈCTRICA EN CORRENT CONTINU.**

**Pilar Queralt i Capdevila**

Memòria presentada al Departament de Geologia Dinàmica,  
Geofísica i Paleontologia de la Universitat de Barcelona per  
optar al grau de Doctor en Física.

Barcelona, novembre del 1989

Vist-i-plau

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'J. Pous', with a large, sweeping horizontal stroke underneath.

Dr. Jaume Pous i Fàbregas  
Director de la tesi

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'P. Queralt', with a long, sweeping horizontal stroke underneath.

Pilar Queralt i Capdevila

Vull agrair l'ajut i el recolçament que he rebut en tot moment del director de la tesi, Dr. Jaume Pous, així com de l' Alex Marcuello. Tot el que he après treballant amb ells. Faig extensiu aquest reconeixement a tots els membres del Departament de Geologia Dinàmica, Geofísica i Paleontologia de la Universitat de Barcelona.

Vull expressar també el meu agraïment al Servei Geològic de Catalunya, que va donar suport a l'inici d'aquest treball. De manera particular vull agrair l'interès i l'ajut d'en Pere Martínez.

Al llarg d'aquest treball, moltes altres persones m'han ajudat en aspectes molt diversos. A totes elles voldria donar-los les gràcies, de manera especial a la família i els amics.

## ÍNDIX

PRESENTACIÓ.....	1
Capítol 1. INTRODUCCIÓ.....	5
1.1. Antecedents .....	5
1.2. Introducció al mètode dels elements finits .....	17
Capítol 2. ALGORISME DE MODELITZACIÓ PER LA PROSPECCIÓ ELÈCTRICA	27
2.1. Introducció.....	27
2.2. Relacions fonamentals.....	28
2.3. El problema bidimensional.....	32
2.4. El problema tridimensional.....	40
2.4.1 Desenvolupament en l'espai transformat.....	41
2.4.2 Transformada inversa.....	43
2.5. Resolució dels sistemes d'equacions.....	55
2.6. Discussió de les condicions de contorn.....	57
Capítol 3. IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORISME.....	65
3.1. Introducció.....	65
3.2. Implementació de l'algorisme.....	66
3.3. Necessitats informàtiques.....	79

Capítol 4. ANÀLISI DELS ERRORS I CONTROL DE LES SOLUCIONS.....	83
4.1. Introducció.....	83
4.2. Càlcul de l'antitransformada.....	86
4.2.1. Errors en la interpolació i selecció del conjunt òptim dels nombres d'ona.....	87
4.2.2. El potencial en $y = 0$ .....	88
4.2.3. El potencial en $y \neq 0$ i en $x = 0$ .....	89
4.2.4. Càlcul de la resistivitat aparent.....	92
4.3. Errors de discretització.....	97
4.4. Errors d'arrodoniment.....	111
4.5. Criteris en l'elecció de la malla.....	112
 Capítol 5. APLICACIONS.....	 115
5.1. Introducció.....	115
5.2. Modelització per dispositiu gradient.....	116
5.2.1. Estudi de l'anomalia creada per un cilindre.	122
5.3. Modelització per dispositiu dipol-dipol.....	131
5.3.1. Estudi de l'anomalia creada per un dic.....	132
5.4. Modelització per dispositiu Schlumberger.....	136
5.4.1. Efectes d'inhomogeneïtats a l'entorn dels elèctrodes de potencial.....	136
5.4.2. Efectes d'un esglaó en la superfície.....	140
5.4.3. Efectes laterals produïts per contactes verticals i desnivells.....	145
5.4.4. Efectes laterals produïts per un horst en el basament.....	154
5.4.5. Efectes topogràfics sobre medis estratificats.....	160
5.4.6. Interpretació unidimensional d'un model bidimensional.....	164

CONCLUSIONS.....	173
REFERÈNCIES.....	179
APÈNDIX.....	185



## PRESENTACIÓ.

Tradicionalment la quantificació de la prospecció elèctrica en corrent continu ha estat restringida a aquelles estructures geològiques senzilles que presenten una solució analítica de l'anomenat problema directe. Altrament, la interpretació de les mesures era purament qualitativa, i en la pràctica, sovint, el dilema és delimitar en quina de les dues situacions ens trobem. La modelització numèrica és el recurs per superar aquestes limitacions i, per tant, ampliar el camp d'aplicació de la prospecció elèctrica i aprofitar els seus avantatges davant d'altres mètodes d'exploració.

L'objectiu d'aquest treball és el disseny d'un algorisme de modelització d'estructures bidimensionals basat en el mètode dels elements finits. En la prospecció elèctrica en corrent continu les fonts són puntuals i d'aquest fet se'n deriva una problemàtica específica de manera que en una estructura bidimensional el



potencial elèctric creat per un elèctrode depèn de les tres variables espacials i, per tant, el problema és tridimensional. Aquest fet augmenta el grau de complexitat d'aquesta modelització.

Donat el caràcter intrínsecament aproximat dels mètodes numèrics, els algorismes de modelització estan en constant revisió i són objecte d'una línia actual de recerca. Els treballs previs de modelització per elements finits en prospecció elèctrica es refereixen bàsicament a models concrets que moltes vegades representen una excessiva simplificació de les estructures geològiques. Hi ha un buit tant en l'estudi de models més complexos com en l'estudi de diferents dispositius electròdics (per exemple, el sondatge elèctric vertical) i l'estudi d'aquests sondatges en direcció paral·lela a l'estructura.

El present treball intenta completar aquesta línia de recerca amb el disseny d'un algorisme de modelització bidimensional que, de forma generalitzada, ens permet abordar models bidimensionals més generals. L'algorisme que hem elaborat utilitza, per primera vegada en el mètode dels elements finits, unes condicions de contorn mixtes que generalitzen les clàssiques de Dirichlet i Neumann. S'ha trobat una solució particular al problema dels sondatges en qualsevol direcció respecte a la de l'estructura bidimensional, particularment en la direcció paral·lela. S'ha realitzat un estudi

exhaustiu de les fonts d'error, intrínseques a tot algorisme de simulació numèrica, la qual cosa ens permet de controlar les solucions obtingudes. Amb aquestes característiques queda constituïda la base sòlida per les posteriors aplicacions. D'entre les que s'han abordat destaquen, per la seva importància, l'estudi dels efectes topogràfics i laterals en el sondatge elèctric vertical amb dispositiu Schlumberger i la seva influència en una interpretació unidimensional.

La present memòria està estructurada en cinc capítols.

El primer és una introducció on és fa un repàs dels antecedents i dels aspectes bàsics del mètode dels elements finits. En el segon, partint dels fonaments físics de la prospecció elèctrica en corrent continu, es construeix l'algorisme de modelització i, en el tercer capítol, es descriu la seva implementació. En el quart s'estudien les fonts d'error de l'algorisme conclouent amb uns criteris o recomanacions pel control de les solucions numèriques. En el cinquè es presenten els resultats dels diferents exemples de modelitzacions i de dispositius, dedicant especial atenció al sondatge elèctric vertical. Finalment, es presenten les conclusions principals d'aquest treball.



## Capítol 1. INTRODUCCIÓ.

En aquest primer capítol es fa un repàs dels antecedents, situant la modelització numèrica dins de l'evolució de la metodologia de la prospecció elèctrica en corrent continu; es presenta l'estat actual dels diferents mètodes de modelització i es repassa els aspectes bàsics del mètode dels elements finits en el que es basa el nostre algorisme.

### 1.1. ANTECEDENTS.

Hom acostuma a associar el naixement de la prospecció elèctrica amb l'èxit important de la primera troballa d'un mineral no magnètic . Al 1912, l'enginyer francès C.Schlumberger trobà un jaciment de sulfurs a Bor (Servia) mitjantçant la polarització espontània. Tot i això, al 1830 Fox ja havia observat aquest fenomen de presència de dèbils corrents elèctrics prop de jaciments d'alguns minerals i fins als treballs de Schlumberger hi ha tot un seguit d'intents i d'estudis. Destaca, entre altres, l'americà Brown que al 1883 patentà un sistema basat en camps artificials. També al 1912 el mateix C. Schlumberger realitzà un estudi tectònic de la conca silúrica de Calvados (França) mesurant el potencial creat per corrents artificials. Des d'aleshores es desenvolupà amb èxits importants el mètode de resistivitat en corrent

continu (c.c.).

Als volts del 1915 , de manera independent, Wenner a Amèrica i Schlumberger a França donen a conèixer els dispositius electròdics quadrupolars que porten el seus noms i que encara avui s'utilitzen en els treballs rutinaris de prospecció elèctrica. Per les mateixes dates, Wenner introdueix el concepte de resistivitat aparent ( $\rho_a$ ) que permet interpretar les mesures de la distribució de potencial sobre la terra comparant-les amb les mesures que correspondrien a un medi homogeni.

Per la correcta interpretació de les mesures van ser imprescindibles els treballs teòrics en la solució del problema directe - calcular la  $\rho_a$  per un model donat -. El treball fonamental en aquesta línia és el de Stefanescu (1930) que presenta la solució de la distribució del potencial en un medi horitzontalment estratificat (integral de Stefanescu). Cal destacar també els treballs de Maillet i Doll (1933) sobre l'anisotropia i de Maillet (1947) sobre les equacions fonamentals de la prospecció elèctrica.

Entre els anys 40 i els anys 60 es produeixen molts treballs aportant diferents estratègies, recurrències i tècniques numèriques per obtenir la solució desenvolupada del problema directe en medis

unidimensionals (1D) (Pekeris 1940, Sunde 1949, Mooney et al. 1966, Kunetz 1966 entre altres). Aquests treballs culminen amb la publicació de col·leccions de corbes teòriques de  $\rho_a$  (CGG 1955, Orellana i Mooney 1966, Rijswaterstaat EAEG, 1969) ja que, donada la complexitat del problema i el cost de les solucions, la interpretació de les dades s'havia de realitzar per tècniques de superposició gràfica.

Els treballs de Koefoed (1968) faciliten que als anys 70 es produeixi un avenç important amb l'aplicació de la teoria de filtres per Ghosh (1971a i 1971b). Van publicar-se nombrosos treballs en aquesta línia (O'Neill 1975, Johansen 1975, Kumar i Das 1977, Koefoed 1979 entre altres) construint filtres amb diferents característiques i per diferents dispositius electrònics. L'èxit d'aquesta etapa fou que el problema directe quedava operativament resolt per medis estratificats. A més, de forma natural, s'obria una nova línia de recerca: l'interpretació automàtica i la construcció d'algorismes d'inversió (Inman et al. 1973, Jupp i Vozoff 1975, Bichara i Lakshmanan 1976, Pous 1983 entre altres).

Clàssicament les mesures per mètodes de resistivitat en c.c. s'interpreten amb models unidimensionals (medis horitzontalment estratificats). L'èxit aconseguit és fruit de respectar les limitacions del mètode. S'ha de tenir cura d'aplicar-lo en les

estructures geològiques on el model unidimensional és una aproximació suficient i assegurar que el dispositiu utilitzat és poc sensible als canvis laterals de resistivitat (sondatges verticals amb dispositiu Schlumberger o Wenner, per exemple). La relació entre els paràmetres del model i les observacions ja és complicada en aquest cas tan senzill; allunyar-se d'aquest model només permet, generalment, una interpretació qualitativa.

Altres models no estratificats van ser estudiats per: Logn 1954, Maeda 1955, Alfano 1959... Però és només quan es van començar a aplicar les tècniques numèriques, que va iniciar-se l'estudi de models més complexos i realistes. Corresponen a: el mètode de les diferències finites (MDF), el mètode de l'equació integral (MEI) i el mètode dels elements finits (MEF). Els treballs pioners en aquesta direcció foren: Mufty 1976 (MDF), Coggon 1971 (MEF) per models bidimensionals (2D) i Dieter et al 1969 (MEI), Dey i Morrison 1979b (MDF) i Pridmore et al. 1981 (MEF) per models tridimensionals (3D), desenvolupats principalment en la Universitat de California i d' Utah.

Lee, al 1975, tot presentant un algorisme basat en el mètode de l'equació integral, es queixa que malgrat hi ha hagut un avenç en els ordinadors, s'han desenvolupat pocs algorismes per a resoldre el problema directe. Al 1980 Ward, en un article de resum històric,

preveu sis línies principals pel futur de la recerca en els mètodes elèctrics, posant en primer lloc el major desenvolupament de la modelització en 2D i 3D. En efecte, en aquests últims deu anys s'hi estan dedicant molts esforços donades les possibilitats que es desprenen: l'estudi de models, d'efectes topogràfics, implementació d'algorismes d'inversió, comparació de dispositius, etc.

Comentem tot seguit els diferents mètodes utilitzats fins a l'actualitat en la resolució del problema directe per a medis no estratificats.

#### MÈTODES DE RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA DIRECTE.

En el mètode de resistivitats, com en molts mètodes geofísics, la relació entre els paràmetres del model (distribució de resistivitats en el subsòl) i les observacions (mesures de potencial o de resistivitat aparent) ve donada per una equació diferencial en derivades parcials. La resolució del problema directe consistirà en resoldre-la per cada model concret.

1- Els mètodes analítics. A diferència d' altres mètodes, els mètodes analítics afronten directament l'equació diferencial trobant la solució exacta. Logn (1954) resol el problema per capes



verticals, Maeda (1955) per capes inclinades, Mundry i Homilius (1972) per seccions el·líptiques, Cecchi i Rocroi (1980) per determinats efectes topogràfics simulats per díedres i Dasgupta (1987) per seccions parabòliques. Cal destacar també, els exemples que presenten Grant i West (1961) utilitzant coordenades esfèriques, biesfèriques i el·líptiques. Ara bé, al temps que augmenta la complexitat del model resulta molt difícil, fins i tot de vegades impossible, utilitzar tècniques analítiques. Cal trobar un sistema de coordenades que permeti la separació de variables i, a més a més que la superfície del terra i les interfícies (separació de zones de diferents resistivitats) siguin superfícies de nivell (superfícies equi-coordenades) per poder aplicar les condicions de contorn. Si s'ha tingut la sort de trobar aquest sistema de coordenades, la solució general vindrà donada, normalment, en termes de funcions especials. El maneig d'aquestes funcions no és senzill i exigeix tècniques numèriques o aproximacions asimptòtiques perdent el caràcter de solució exacta.

2- Mètode de les imatges. Gràcies a l'analogia existent entre els camps de corrents continus i els camps electrostàtics (Orellana 1959), el mètode de les imatges va utilitzar-se com a camí alternatiu a la resolució de l'equació diferencial. Ja al 1929, Hummel resol el problema per un medi estratificat, solució equivalent a la integral de Stefanescu. Aquest mètode, però, només

és còmode quan no hi ha moltes interfícies i aquestes són plans paral·lels. A més, cal anar amb compte perquè les imatges poden fer aparèixer punts singulars en llocs on no corresponen (Orellana 1982).

3- Mètodes d'assaig en models reduïts. Els mètodes basats en l'assaig en models reduïts representen una manera hàbil d'afrontar el problema directe en estructures complexes, ja que realitzant mesures en cubetes electrolítiques, papers conductors, xarxes de resistències, etc., s'obté una solució exacta a escala (amb la excepció d'errors experimentals). Aquestes solucions han estat durant molt temps el punt de referència per la interpretació qualitativa de determinades heterogeneïtats (Kalenov 1957, Kunetz 1966, Orellana 1982...) i també s'han utilitzat per validar els models numèrics. De totes maneres, els mètodes analògics presenten inconvenients: costa trobar materials que puguin representar valors realistes de la resistivitat del subsòl i l'efecte de les fronteres no té símil real.

4- Els mètodes numèrics. Els mètodes numèrics van representar l'alternativa a aquests mètodes tradicionals anteriorment comentats. Però no van aconseguir una implantació important fins que es va disposar d'ordinadors amb gran capacitat de memòria i velocitat de càlcul. Tots els mètodes numèrics es caracteritzen

perquè, d'una manera o d'una altra, substitueixen el medi continu per un domini discretitzat de manera que la solució és sempre una aproximació (més o menys bona) a la solució exacta. Distingirem cinc mètodes. Dues característiques, que generalment estan en relació inversa, determinen el grau d'èxit de cada un d'ells:

1- la capacitat per modelitzar qualsevol medi heterogeni amb una aproximació satisfactòria.

2- la simplicitat i economia de les solucions.

I. Stefanescu (1950) va idear EL MÈTODE DELS ALFA CENTRES o dels medis alfa harmònics. Aquest mètode aporta bones solucions per medis on les variacions de la resistivitat siguin suaus, de manera que la funció alfa definida com  $\alpha \equiv \sqrt{1/\rho}$  sigui una funció harmònica. Evidentment, és una limitació important doncs els models geològics d'interès no presenten aquestes variacions de la resistivitat de les roques. Tot i això, com el càlcul és senzill i econòmic, Petrick et al. (1981) realitzen inversió tridimensional. Però, donades les característiques dels medis alfa harmònics, només poden determinar amb precisió la posició d'inhomogeneïtats conductores, no els seus tamanys ni les seves conductivitats.

II. Al 1959 Alfano va dissenyar un algorisme que permetia el tractament de medis heterogenis. Era un embrió del MÈTODE DE L'EQUACIÓ INTEGRAL (MEI). Aquest mètode és un dels millors mètodes

(per potència i economia) per modelitzar determinades estructures bidimensionals i sobre tot tridimensionals (per exemple un cos anòmal dins d'un medi estratificat), ja que aprofita solucions analítiques per al potencial primari (per exemple la solució pel medi estratificat) i només cal discretitzar la superfície que envolta el cos anòmal on es crearan distribucions de càrrega que produeixen el potencial secundari. Aquests últims anys s'estan publicant nombrosos treballs: Okabe (1981, 1982), Schulz (1985a), Das i Parasnis (1987)...De totes maneres quan l'estructura es complica cal refinar molt la discretització i el cost de la solució s'igualava amb els altres mètodes com els de les diferències finites o elements finits.

III. EL MÈTODE D'ANÀLISI DE XARXES (network analysis o surface analogy transmission) s'ha emprat força en la modelització electromagnètica degut a l'analogia que hi ha entre les equacions de Maxwell i l'equació del telegrafista. El mètode consisteix, bàsicament, en substituir el medi per una xarxa o circuit elèctric amb impedàncies i admitàncies. Aplicant la segona llei de Kirchoff s'obté un sistema d'equacions de característiques molt semblants al que s'arriba per diferències finites. La solució del sistema dóna el potencial elèctric en tots els nusos de la xarxa. Una limitació important d'aquest mètode és que cal limitar-se a xarxes rectangulars.

IV. EL MÈTODE DE LES DIFERÈNCIES FINITES ha estat la tècnica de modelització més utilitzada. Ha evolucionat molt des dels mètodes de relaxació fins al de les diferències integrades que es pot considerar un cas particular dels elements finits. D'entre els treballs publicats (Mufti 1976, 1978 i 1980, Dey i Morrison 1979b , Scriba 1980, Mundry 1984) destaca el de Dey i Morrison (1979a). Aporta un algorisme per la modelització en 2D força operatiu proposant una condició de contorn mixta molt adequada per la prospecció de resistivitats. A grans trets, el mètode de les diferències finites consisteix en fer una discretització del medi per tal de poder aproximar les derivades en diferències en cada punt de la xarxa de discretització. Per aquest motiu, és convenient limitar-se a xarxes rectangulars i bastant regulars.

V. EL MÈTODE DELS ELEMENTS FINITS en molts aspectes és semblant al de les diferències finites però, per construcció, supera les limitacions d'aquell. Les condicions de contorn s'imposen d'una manera natural i la xarxa de discretització es pot adaptar excel·lentment a qualsevol geometria. Els treballs previs de modelització via elements finits per prospecció elèctrica en corrent continu són els següents. Coggon (1971) és el primer que dissenya un algorisme de modelització bidimensional, el qual està basat en la descomposició del potencial en dues parts. La primera

corresponent a un medi senzill (amb solució analítica) i la segona al potencial anòmal que és el que es resol pròpiament per elements finits. Els resultats presentats es refereixen tan sols a sondatges dipolars axials en la direcció perpendicular a l'estructura. Rijo (1977) arriba al mateix algorisme però partint de la tècnica de Galerkin i no d'un principi variacional. Amb aquest algorisme Fox et al. (1980) són els primers en estudiar algun efecte topogràfic aplicat al dispositiu dipol-dipol perpendicular a l'estructura. Bibby (1978) aporta un algorisme per estructures amb simetria axial, presentant resultats pel dispositiu bipolar-dipol.

L'únic intent de modelització tridimensional per elements finits és realitzat per Pridmore et al.(1981). La modelització tridimensional - via MEF o MDF - és conceptualment equivalent a la bidimensional. Però demana un esforç excessiu en la implementació dels algorismes i poder disposar d'una potent infraestructura informàtica, altrament no és possible treballar de manera operativa (Queralt 1985). Ja que els models bidimensionals cobreixen un camp suficient d'aplicacions geològiques, la tendència actual és desenvolupar algorismes i aplicacions en 2D mitjançant el MDF o el MEF. La modelització en 3D es reserva a models molt simples i es realitza via el mètode de l'equació integral per les seves característiques esmentades anteriorment.

Tots aquests treballs previs consideren exclusivament condicions de contorn de Dirichlet o de Neumann. A més, tots ells es refereixen a models concrets i excessives simplificacions de les estructures geològiques. Quedant un buit en l'estudi de models més complexos, l'estudi d'altres dispositius electròdics (per exemple, el sondatge elèctric vertical) i l'estudi de sondatges en direcció paral·lela a l'estructura.

La modelització bidimensional en prospecció elèctrica presenta una problemàtica específica que fa difícil implementar de manera operativa els algorismes d'inversió. Els únics treballs publicats són de la Universitat d'Utah (Pelton et al. 1978 i Tripp et al. 1984) i de la Universitat de Macquarie (Smith i Vozoff 1984), els quals resolen el problema directe amb els programes de Rijo i de Dey i Morrison respectivament. Aquests treballs, per tant, es limiten a inversió de dades de perfils dipol-dipol i sempre consideren els perfils perpendiculars a la direcció de l'estructura, que correspon a la situació més favorable des del punt de vista matemàtic. Per experiència (Pous 1983, Pous et al. 1987) en inversió unidimensional de SEV sabem que el coneixement de la morfologia de les corbes de  $\rho_{\alpha}$  (nombre de capes, principi d'equivalència, compatibilitat amb el model estratificat, etc.) és

imprescindible per l'elecció del model inicial i per incloure, si s'escau, la informació a priori. A més a més, en models bidimensionals el problema de l'equivalència es complica enormement. Considerem doncs que, ara per ara, és prioritària la investigació en la modelització de manera que només quan es tingui un coneixement més acurat sobre el comportament dels models bidimensionals tindrà sentit abordar el problema invers.

## 1.2. INTRODUCCIÓ AL MÈTODE DELS ELEMENTS FINITS.

El mètode dels elements finits va sorgir cap als anys 60 per resoldre les complicades equacions diferencials d'elasticitat i mecànica d'estructures, tot reemplaçant el mètode de les diferències finites. Aquesta tècnica numèrica va desenvolupar-se ràpidament i amb èxits importants en l'àmbit de l'enginyeria; al principi, però, sense adonar-se que des del punt de vista matemàtic és una extensió dels mètodes projectius o variacionals (Strang i Fix, 1973). Aquests mètodes redueixen la resolució d'una equació diferencial a un sistema d'equacions a partir d'expressions integrals per la solució aproximada, desenvolupant-la com a combinació lineal de funcions anomenades de prova o assaig ("trial functions") (Marchoux i Agochkov, 1985). La novetat que presenta el mètode dels elements finits és al fer l'elecció de les funcions



prova; aquestes són funcions definides localment, és a dir, definides en subdominis acotats: elements finits. Això permet realitzar una discretització del domini i obtenir un sistema d'equacions esclarissat (sparse). En aquest últim aspecte el mètode dels elements finits coincidía amb el mètode de les diferències finites.

Aviat el mètode dels elements finits va estendre's a altres branques de l'enginyeria (elèctrica, fluids, acústica, etc.) i als problemes de la física matemàtica. Al 1971 es comencen a publicar els primers treballs de Geofísica aplicant el mètode dels elements finits: Lysmer i Drake en l'estudi de la propagació d'ones Love i Rayleigh, Geertsma en l'estudi d'anomalies tèrmiques i Coggon en la modelització elèctrica i electromagnètica.

Descriurem a continuació el mètode dels elements finits (MEF) d'una manera generalitzada i breu. El MEF és una tècnica numèrica que permet trobar una solució aproximada de problemes definits en un domini  $\Omega$  continu i amb una equació diferencial (o un sistema d'equacions diferencials) i unes condicions sobre el contorn  $\Gamma$ .

Representarem l'equació diferencial per:

$$\mathbb{D}(\phi) = \mathbb{L} \phi - f = 0 \quad (1.1)$$

on  $\mathbb{L}$  és un operador diferencial,  $\phi$  la funció incògnita i  $f$  és una funció donada a cada problema. I les condicions de contorn:

$$\mathbb{C}(\phi) = 0 \quad (1.2)$$

on  $\mathbb{C}$  és un operador conegut.

Sigui  $\phi'$  una aproximació de  $\phi$ ;  $\phi$  i  $\phi'$  són funcions del vector  $\underline{x}$ , ( $\underline{x} \in \Omega$ ).  $\phi'$  es construeix a partir de la combinació lineal de  $N$  funcions prova  $\xi_\nu(\underline{x})$ :

$$\phi(\underline{x}) \simeq \phi'(\underline{x}) = \sum_{\nu=1}^N \phi_\nu \xi_\nu(\underline{x}) \quad (1.3)$$

on  $\phi_\nu$  són paràmetres a determinar. Per diferents vies que més endavant descriurem (pel mètode variacional o pels mètodes dels residus ponderats) s'arriba a unes integrals del tipus:

$$F_j(\phi') = \int_{\Omega} \mathbb{G}_j(\phi') \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbb{E}_j(\phi') \, d\Gamma = 0 \quad \forall j = 1 \dots N \quad (1.4)$$

on  $\mathbb{G}_j$  i  $\mathbb{E}_j$  són operadors coneguts. L'equació (1.4) correspon al sistema d'equacions a partir del qual es determinen els paràmetres  $\phi_\nu$ . Les expressions (1.3) i (1.4) signifiquen que considerem que el comportament del problema ve determinat aproximadament pels  $N$  paràmetres  $\phi_\nu$  i per les  $N$  equacions  $F_j(\phi') = 0$ .

Les funcions prova  $\xi_\nu(\underline{x})$  es trien de domini acotat, o dit d'una

altra manera, són zero en la major part del domini  $\Omega$  menys a l'entorn d'un punt que s'ha anomenat punt nodal o nus. Aquestes funcions prova s'anomenen "shape functions" (funcions de forma). Donades aquestes característiques podem discretitzar el domini  $\Omega$ , substituint-lo per un domini  $\Omega_h$  format per  $N_e$  subdominis  $\Omega_e$  o elements finits, on  $h$  representa la mida característica dels elements. A (1.4) podem substituir les integrals sobre  $\Omega$  i sobre  $\Gamma$  per:

$$\int_{\Omega} ( \quad ) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} ( \quad ) d\Omega_e$$

$$\int_{\Gamma} ( \quad ) d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_e} ( \quad ) d\Gamma_e$$

$F_j$  (integral sobre tot el domini  $\Omega$ ) pot construir-se per simple addició dels termes  $F_j^e$  (integrals sobre els subdominis  $\Omega_e$ ) dels elements que contribueixen:  $F_j = \sum_e F_j^e$ . Si els elements són tots semblants, el càlcul de les  $F_j^e$  serà repetitiu. Per altra banda s'acostuma a prendre funcions de forma simples (per exemple polinomis de grau baix) a canvi de que l'ordre del sistema (nombre de funcions per obtenir  $\phi'$  en l' expressió (1.3)) sigui força elevat per tal d'obtenir una bona aproximació a la solució. A més a més, el caràcter local de les funcions de forma fa que el sistema sigui "sparse" o poc dens (molts termes nuls); d'aquesta manera encara que l'ordre sigui elevat pot ser solucionat pels ordinadors

sense unes necessitats inabastables de memòria.

En la construcció d'un algorisme basat en el MEF hi ha dos aspectes claus:

1- La tècnica elegida per arribar a les expressions integrals  $F_j(\phi)$ :

a- mètode variacional

b- mètode dels residus ponderats.

2- L'elecció de les funcions de forma.

Aquests dos aspectes, junt amb el caràcter de l'operador diferencial, determinen les expressions de les  $F_j$ , i per tant, les característiques del sistema d'equacions resultant. Comentem tot seguit cadascun d'aquests aspectes.

### Mètode Variacional.

En molts problemes físics es pot buscar la solució imposant una condició d'extrem d'una certa magnitud escalar (per exemple: la minimització de l'energia emmagatzemada en un cert volum). El problema, plantejat des del punt de vista matemàtic, és el de trobar la funció  $\phi$  que dóna un valor estacionari d'un funcional  $\mathfrak{J}$ .

Expressem el funcional com:

$$\mathfrak{J}(\phi) = \int_{\Omega} \mathfrak{M}(\phi) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathfrak{N}(\phi) d\Gamma \quad (1.5)$$

on  $\mathfrak{M}$  i  $\mathfrak{N}$  són operadors coneguts.

La solució aproximada del problema:  $\phi' = \sum_{i=1}^N \phi_i \xi_i(\underline{x})$  ha de complir que, per petites variacions arbitràries de  $\phi$  ( $\delta\phi$ ),  $\mathfrak{J}$  no varii:  $\delta\mathfrak{J} = 0$ . Substituint  $\phi$  per la seva aproximació  $\phi'$  i aplicant el càlcul variacional:

$$\delta\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathfrak{J}(\phi')}{\partial \phi_i} \delta\phi_i = 0$$

d'on s'obté:

$$F_j(\phi') = \frac{\partial \mathfrak{J}(\phi')}{\partial \phi_j} = 0 \quad \forall j=1 \dots N$$

que identifiquem amb el sistema (1.4). A partir d'aquest sistema es procedeix tal com hem indicat anteriorment.

Observem que la variació de  $\mathfrak{J}$  es pot expressar com:

$$\delta\mathfrak{J} = \int_{\Omega} \mathfrak{A}(\phi) \delta\phi d\Omega + \int_{\Gamma} \mathfrak{B}(\phi) \delta\phi d\Gamma = 0$$

si això ha de ser vàlid per qualsevol variació  $\delta\phi$ :

$$\mathfrak{A}(\phi) = 0 \text{ en } \Omega$$

$$\mathfrak{B}(\phi) = 0 \text{ en } \Gamma$$

que corresponen a una equació diferencial amb unes condicions de contorn (equacions d'Euler) que poden coincidir amb les que governen el problema (equacions (1.1) i (1.2)). Si no podem

establir el funcional a partir d'arguments físics, sempre que l'operador  $\mathbb{L}$  sigui autoadjunt i definit positiu, la solució de l'equació diferencial minimitza el funcional següent: (Marchouk i Agochkov, 1985)

$$\mathfrak{J}(\phi) = \langle \mathbb{L} \phi, \phi \rangle - 2 \langle \phi, f \rangle$$

on  $\langle \rangle$  indica el producte escalar entre funcions.

Un avantatge important dels mètodes variacionals en el MEF és que la matriu del sistema és sempre simètrica i definida positiva si l'operador  $\mathbb{L}$  ho és, mentre que en el mètode de les diferències finites no està assegurat. Aquesta propietat redueix altament les necessitats de memòria i facilita la resolució del sistema.

#### Mètode dels residus ponderats.

No totes les equacions diferencials tenen associat un funcional. El mètode dels residus ponderats permet arribar a unes expressions integrals com (1.4) a partir de l'equació diferencial imposant l'ortogonalitat dels residus d'aquesta amb unes funcions pes  $\omega_l(\underline{x})$ :

$$\langle r, \omega_l \rangle = \int_{\Omega} r(\underline{x}) \omega_l(\underline{x}) d\Omega = 0 \quad \forall l = 1 \dots N \quad (1.6)$$

on  $r(\underline{x})$  és el residu de l'equació diferencial:  $r(\underline{x}) = \mathbb{D}(\phi') \neq 0$ . Si (1.6) es compleix per qualsevol funció  $\omega(\underline{x})$  evidentment  $r(\underline{x}) = 0$

i es compliria l'equació diferencial. Existeixen diferents tècniques per desenvolupar (1.6) segons les funcions pes que es prenguin: col.locació per punts si  $\omega_i(\underline{x}) = \delta(\underline{x}-\underline{x}_i)$  on  $\underline{x}_i$  són punts predeterminats del domini  $\Omega$ , col.locació per subdominis si  $\omega_i(\underline{x}) = 1$  si  $\underline{x} \in \Omega_i$ , on  $\Omega_i$  són subdominis de  $\Omega$  i  $\omega_i(\underline{x}) = 0$  si  $\underline{x} \notin \Omega_i$ , i la tècnica de Galerkin si  $\omega_i(\underline{x}) = \xi_i(\underline{x})$  (Zienkiewicz 1981). La tècnica més utilitzada és la de Galerkin ja que genera unes expressions integrals  $F_j(\phi)=0$  idèntiques a aquelles que s'obtenen pel mètode variacional quan existeix funcional. Per tant, la matriu del sistema serà simètrica i definida positiva.

#### Elecció de les funcions de forma.

L'elecció de les funcions de forma ha de tenir en compte les condicions que assegurin la convergència de la solució aproximada a l'exacta. Si  $D_L$  és el domini de definició de l'operador diferencial  $L$ , la solució exacta evidentment pertany al domini:  $\phi \in D_L$ ; però la solució aproximada  $\phi'$  no hi ha de pertànyer necessàriament. Si completem el domini  $D_L$  amb una norma, obtenim l'anomenat espai energètic  $H_L$  que és un espai de Hilbert complet (Marchoux i Agochkov, 1985). Si es trien  $N$  funcions de  $H_L$  linealment independents, s'obté una base  $\{\xi_i\}$  d'un  $H_L^N$ , subspai de  $H_L$ . Les funcions de forma constitueixen aquesta base, de manera que la solució aproximada:  $\phi'(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i \xi_i(\underline{x})$  serà una funció de  $H_L^N$  i,

per tant, de l'espai energètic  $H_L$ .

Aquí rau l'avantatge principal dels mètodes projectius o variacionals, hem ampliat el conjunt de les solucions respecte al domini de l'operador diferencial. Per això sovint es fa referència a aquests mètodes com "la formulació dèbil del problema". De totes maneres resten unes condicions per assegurar que l'aproximació del MEF és correcta, condicions que s'han d'imposar sobre les funcions de forma.

- Continuïtat: En general, si l'operador diferencial conté derivades d'ordre  $m+1$ , en les expressions integrals (1.4)  $(F_j(\phi') = 0)$  els operadors contenen derivades d'ordre  $m$ . Això és degut a la mateixa naturalesa dels funcionals o bé al fet d'haver aplicat el teorema de Green (integració per parts) en l'expressió de la contribució dels residus ponderats. Per tant, serà suficient que les funcions de forma tinguin derivades contínues fins a l'ordre  $m-1$ : Continuïtat en  $C^{m-1}$  (Zienkiewicz, 1981).

- Completesa: La convergència exigeix que  $\phi' \rightarrow \phi$  quan  $N \rightarrow \infty$ . Cal assegurar, doncs, que en el límit, quan la mida representativa dels elements sigui zero ( $h \rightarrow 0$ ), la funció  $\phi'$  i les seves derivades fins a  $m$  prenguin valors constants. En el cas que les funcions de forma siguin polinòmiques, això queda assegurat si són polinomis complets fins al grau  $m$  (Zienkiewicz, 1981).



- Condicions de contorn: Les condicions de contorn del problema poden també condicionar l'elecció de les funcions de forma. Es distingeixen dos tipus de condicions de contorn: Essencials o forçades i naturals. Una condició és essencial quan és satisfeta tant pels elements de  $D_L$  com per  $H_L$ . Si  $H_L$  conté elements que no satisfan una condició de contorn, aleshores aquesta condició és natural. Per tant, les funcions de forma hauran de complir solament les condicions essencials. El criteri pràctic per distingir unes condicions d'unes altres és el següent: si l'operador diferencial és d'ordre  $2m$ ; la condició de contorn serà natural si aquesta conté derivades d'ordre  $\geq m$ ; si no, serà essencial (Marchoux i Agochkov, 1985).

## Capítol 2. ALGORISME DE MODELITZACIÓ PER LA PROSPECCIÓ ELÈCTRICA.

### 2.1. INTRODUCCIÓ.

En aquest capítol es plantegen, en primer lloc, les equacions que descriuen el fenomen físic sobre el qual es fonamenta la prospecció elèctrica ( o mètode de resistivitats) en corrent continu. A continuació, apliquem el mètode dels elements finits per tal de construir l'algorisme de modelització. Finalment, estudiem la resolució dels sistemes d'equacions resultants i presentem una discussió sobre les diferents condicions de contorn que pot contemplar l'algorisme: sentit físic i adequació de cada una d'elles a diferents situacions pràctiques.

Considerarem medis bidimensionals, o sigui, aquells medis on els paràmetres físics, en aquest cas la conductivitat elèctrica, només depenen de dues coordenades. El més usual en la prospecció elèctrica es utilitzar elèctrodes de corrent puntuals i mesurar la distribució del potencial creat en qualsevol punt de la superfície. Malgrat que el model sigui bidimensional, els elèctrodes puntuals fan que la distribució del potencial depengui de les tres coordenades espacials. Per aquest motiu es parla del potencial

tridimensional en contraposició al potencial bidimensional. Aquest correspon a una situació diferent i menys freqüent, on la distribució del potencial depèn únicament de les dues coordenades del medi.

L'algorisme dissenyat contempla les dues situacions. Aquestes dues situacions corresponen a resoldre equacions diferencials diferents i, a més, en el primer cas (el tridimensional) suposa treballar en l'espai transformat per la coordenada segons la direcció de l'estructura.

## 2.2. RELACIONS FONAMENTALS.

En prospecció elèctrica es considera el sòl com un medi semi-infinit, conductor i isòtrop. La conductivitat elèctrica  $\sigma(\underline{x})$  és el paràmetre físic que caracteritza el medi on  $\underline{x}$  representa el vector de coordenades. Per crear el potencial es claven elèctrodes al terra i, mitjantçant unes bateries, s'hi fa circular corrent continu. Per l'equació de conservació de la càrrega:

$$\nabla \cdot \underline{J} = q \quad (2.1)$$

on  $\underline{J}$  és el vector densitat de corrent i  $q$  representa els termes de font de càrrega degut a la presència dels elèctrodes. Fent la hipòtesi que es compleix la llei de Ohm:  $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ , on  $\underline{E}$  és el camp elèctric. Com estem en el cas estacionari, per la primera llei de

Maxwell el camp  $\underline{E}$  serà irrotacional. Per tant:  $\underline{E} = -\nabla V$ , on  $V$  és el potencial elèctric. Substituint aquestes relacions en l'equació (2.1) s'obté:

$$-\nabla \cdot (\sigma(\underline{x}) \nabla V(\underline{x})) = q(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

$$\mathbb{L}V = q(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

que representa l'equació diferencial de segon ordre en derivades parcials i el·líptica que ha de complir el potencial elèctric  $V(\underline{x})$  en tots els punts del medi, identificats pel domini  $\Omega$ . L'operador diferencial  $\mathbb{L}$  és simètric i definit positiu.

Les condicions de contorn que s'han de complir en qualsevol superfície de separació de medis de diferent  $\sigma$  són:

1- continuïtat del potencial  $V(\underline{x})$ .

2- continuïtat del component normal de la densitat de corrent  $J_n$ .

Aquestes condicions són conseqüència del fet que el camp és irrotacional i de la conservació de la càrrega.

La frontera o contorn de  $\Omega$  està representada per  $\Gamma$ . Donat que el medi és semi-infinit, en general, el contorn  $\Gamma$  estarà format per una frontera física: la superfície del terra  $\Gamma_s$ , i per una frontera fictícia que simula l'infinit  $\Gamma_\infty$ . D'aquesta forma:  $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_\infty$ . (figura 2.1)

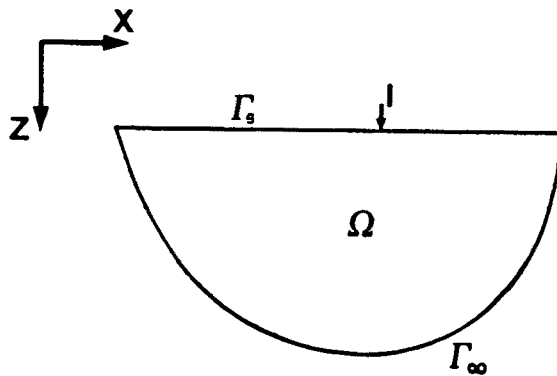


Figura 2.1. Identificació de les diferents parts de la frontera  $\Gamma$ .

Sobre aquesta frontera  $\Gamma$  imposem una condició del tipus:

$$\mathbb{C}(V) = \sigma(\underline{x}) \partial V(\underline{x}) / \partial n + \alpha(\underline{x}) (V(\underline{x}) - V_0) + Q_0 = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma \quad (2.3)$$

on  $n$  és la normal a  $\Gamma$  cap a fora,  $V_0$  representa valors fixats del potencial en punts del contorn i  $Q_0$  valors fixats del flux del potencial a través de la frontera  $\Gamma$ . La funció  $\alpha(\underline{x})$  determina el tipus de condició de contorn:  $\alpha = 0$  correspon a imposar condicions tipus Neumann (homogènies si  $Q_0 = 0$ ),  $\alpha = \infty$  correspon a condicions tipus Dirichlet (homogènies si  $V_0 = 0$ ) i si  $\alpha$  és una funció acotada,  $\mathbb{C}(V)$  representa una condició mixta. En la secció 2.5 discutirem el tipus de condició a imposar en diferents situacions.

Un cop obtingut el potencial  $V(\underline{x})$  hom calcula l'anomenada resistivitat aparent -  $\rho_a$  - que reflecteix millor el model geològic

i a partir de la qual es realitza la interpretació de les mesures experimentals. La resistivitat aparent ve definida per:

$$\rho_a \equiv K \Delta V / I \quad (2.4)$$

on  $\Delta V$  és la diferència de potencial entre dos punts del medi,  $I$  és la intensitat del corrent que circula pels elèctrodes i  $K$  és un factor geomètric que depèn de les posicions relatives entre els elèctrodes i els punts on es mesura el potencial.

En el medi bidimensional la conductivitat elèctrica només dependrà de dues coordenades:  $\sigma(x,z)$ , on  $x$  és la coordenada horitzontal i  $z$  la vertical (figura 2.1). La coordenada  $y$  correspon a la direcció de l'estructura ("strike direction") per tant:  $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$ .

Com ja hem indicat anteriorment, en un medi bidimensional, el potencial no té perquè ser independent de la coordenada  $y$ ; cal tenir en compte el tipus de font representada per la funció  $q(\underline{x})$ . La situació més usual en prospecció elèctrica és utilitzar elèctrodes puntuals, per tant  $V(\underline{x}) = V(x,y,z)$ . El problema és tridimensional malgrat que el medi sigui bidimensional, per aquest motiu es parla de modelització quasi-tridimensional.

El cas en què el potencial és independent de la coordenada  $y$ , (aleshores el problema es manté bidimensional) correspon a resoldre

directament l'equació (2.2). Aquesta situació es presenta rigurosament només quan es consideren elèctrodes lineals infinits i paral·lels a la direcció de l'estructura. Donat que els elèctrodes lineals no s'acostumen a utilitzar a la pràctica, només Mufty (1976) (amb diferències finites) es va ocupar d'aquest problema.

Tot i que el que ens interessa és el problema tridimensional (elèctrodes puntuals), començarem resolen el problema bidimensional. Aquest cas té un doble interès. En primer lloc i sota certes condicions pot ser una aproximació suficient al potencial tridimensional (per exemple si tenim simetria axial, si els elèctrodes de corrent estan lluny de la zona d'estudi...), i en segon lloc, perquè permet introduir tot el formalisme de resolució del problema, que posteriorment aplicarem en la resolució del potencial tridimensional.

### 2.3. EL PROBLEMA BIDIMENSIONAL.

El problema directe de la prospecció elèctrica ha quedat plantejat de la següent manera: donada una distribució de la conductivitat  $\sigma(\underline{x})$  i de les fonts  $q(\underline{x})$  sobre el medi, obtenir el potencial elèctric  $V(\underline{x})$ . Cal, doncs, resoldre l'equació (2.2) amb la condició de contorn (2.3):

$$\mathbb{D}(V) = \nabla \cdot (\sigma(\underline{x}) \nabla V(\underline{x})) + q(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

$$\mathbb{C}(V) = \sigma(\underline{x}) \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n} + \alpha(\underline{x}) (V(\underline{x}) - V_0) + Q_0 = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Gamma \quad (2.3)$$

Per tal de resoldre l'equació (2.2) (on ara  $\nabla$  serà l'operador nabla bidimensional:  $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ ) aplicarem el mètode dels residus ponderats amb la tècnica de Galerkin. Un cop obtingudes les expressions integrals aplicarem el mètode dels elements finits tal i com s'ha presentat en la secció 1.2.

Suposem una aproximació per al potencial elèctric:

$$V(\underline{x}) \simeq V'(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N V_i \xi_i(\underline{x}) \quad (2.5)$$

on  $\xi_i$  són les funcions de forma i  $V_i = V(\underline{x}_i)$  són els valors del potencial en N punts (nusos) del domini  $\Omega$ . Els residus de l'equació diferencial (2.2) seran:

$$r(\underline{x}) = \mathbb{D}(V'(\underline{x})) = \nabla \cdot (\sigma(\underline{x}) \nabla V'(\underline{x})) + q(\underline{x}) \neq 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

Imposant que la contribució dels residus, ponderats amb les mateixes funcions de forma  $\xi_i(\underline{x})$ , serà zero:



$$\int_{\Omega} r(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) d\Omega = 0 \quad \forall j=1 \dots N$$

per tant:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (\sigma(\underline{x}) \nabla v'(\underline{x})) \xi_j(\underline{x}) d\Omega = - \int_{\Omega} q(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) d\Omega \quad \forall j=1 \dots N$$

Aplicant la primera identitat de Green en el primer membre:

$$\int_{\Omega} \sigma(\underline{x}) \nabla v'(\underline{x}) \cdot \nabla \xi_j(\underline{x}) d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma(\underline{x}) \nabla v'(\underline{x}) \cdot \underline{n} \xi_j(\underline{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} q(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) d\Omega \quad \forall j=1 \dots N \quad (2.6)$$

Observem que aquesta expressió permet discontinuïtats en  $\sigma$  i en les derivades primeres del potencial, possibilitat que no teníem en l'equació diferencial (2.2).

Els algorismes de Coggon (1971), Rijo (1977) i Pridmore et al. (1981) imposen condicions de contorn de Neumann homogènies ( $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ ) o condicions de Dirichlet (que cal imposar sobre les funcions de forma i s'acaben reduint a  $\xi_j(\underline{x}) = 0$  en  $\Gamma$ ). Per tant no inclouen la integral sobre el contorn  $\Gamma$ , ja que tots dos tipus de condicions l'anul·len. Nosaltres, en canvi, mantenim aquest terme que dona més

flexibilitat en les possibles condicions de contorn a imposar.

En l'expressió (2.6) podem imposar còmodament la condició de contorn (2.3) en la integral sobre  $\Gamma$ . Substituint (2.3) en (2.6) i el potencial aproximat  $V'(\underline{x})$  per la seva expressió (2.5), s'obté:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \sigma(\underline{x}) \nabla \xi_i(\underline{x}) \cdot \nabla \xi_j(\underline{x}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha(\underline{x}) \xi_i(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) \, d\Gamma \right\} V_i =$$

$$\int_{\Omega} q(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ \alpha(\underline{x}) V_o - Q_o \right] \xi_j(\underline{x}) \, d\Gamma \quad \forall j=1 \dots N \quad (2.7)$$

Aquesta expressió (2.7) representa un sistema de  $N$  equacions amb  $N$  incògnites. La solució d'aquest ens donarà el potencial en els  $N$  nusos  $i$ , a partir de (2.5), podem obtenir el potencial per qualsevol punt del domini. En forma matricial:

$$(A + D) \underline{V} = \underline{Q} \quad (2.8)$$

on el vector  $\underline{V}$  té per components els valors del potencial en els  $N$  nusos. Les matrius  $A$  i  $D$  són matrius quadrades d'ordre  $N$ , simètriques i definides positives. Contenen, respectivament, la informació del medi i les condicions de contorn. Ens referirem a elles per: matriu de conductivitats ( $A$ ) i matriu de contorn ( $D$ ). El vector  $\underline{Q}$  correspon als termes de font.

Realitzem ara una discretització del domini  $\Omega$ , obtenim un nou domini  $\Omega_h$  amb  $N_e$  elements de subdominis  $\Omega_e$  cadascun ( $h$  indica la mida dels elements). Ara es poden descomposar les integrals de l'expressió (2.7) en integrals sobre els elements i construir les matrius elementals  $A^e$  i  $D^e$  per cada element. Els elements d'aquestes matrius seran:

$$\left. \begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \sigma^e(\underline{x}) \nabla \xi_i(\underline{x}) \cdot \nabla \xi_j(\underline{x}) d\Omega_e & \forall (\underline{x}) \in \Omega \\ D_{ij}^e &= \int_{\Gamma_e} \alpha(\underline{x}) \xi_i(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) d\Gamma_e & \text{si } \underline{x} \in \Gamma \\ D_{ij}^e &= 0 & \text{si } \underline{x} \notin \Gamma \end{aligned} \right\} (2.9)$$

Els elements de les matrius globals s'obtinran sumant les contribucions:

$$A_{ij} = \sum_e A_{ij}^e \quad \text{i} \quad D_{ij} = \sum_e D_{ij}^e \quad (2.10)$$

L'avaluació de les integrals (2.7) o (2.9) depèn del tipus d'element finit i de funcions de forma que es considerin. Tenint en compte les condicions que han de complir les funcions de forma, continuïtat  $C^{m-1}$  i completesa (secció 1.2), és suficient que aquestes siguin funcions polinòmiques de primer grau ja que l'ordre de derivació que apareix sota les integrals (2.7) és  $m=1$ . Els

elements finits més senzills associats a les funcions de forma lineals són els elements triangulars amb nusos en els vèrtex (figura 2.2). Nosaltres hem pres aquestes funcions de forma i aquests elements per la seva simplicitat i perquè els resultats que s'obtenen són satisfactoris.

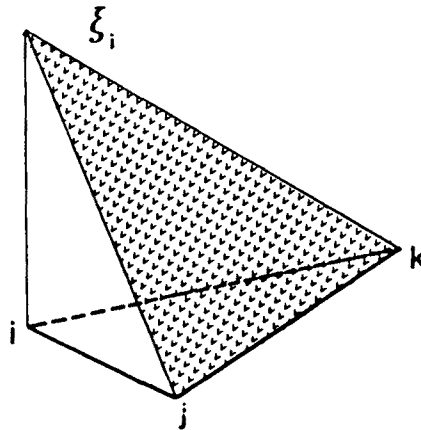


Figura 2.2. Elements triangulars associats a les funcions de forma lineals.

Avaluem les integrals (2.9) considerant aquests elements triangulars d'àrea  $\Omega_e$  i de conductivitat  $\sigma^e$  i amb funcions de forma lineals definides sobre cada element per  $\xi_i^e = \frac{1}{2\Omega_e} (a_i + b_i x + c_i z)$ . S'obté:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \sigma^e(\underline{x}) \nabla \xi_i^e(\underline{x}) \cdot \nabla \xi_j^e(\underline{x}) d\Omega_e = \frac{\sigma^e}{4\Omega_e} (b_i b_j + c_i c_j)$$

on les constants  $b_i$  i  $c_i$  depenen de les coordenades dels nusos:  $b_i = \varepsilon_{ijk}(x_k - x_j)$  i  $c_i = \varepsilon_{ijk}(z_i - z_k)$  (on  $\varepsilon_{ijk}$  representa el tensor

de permutacions); de manera que:  $\Omega_e = 1/2 (c_i b_j - b_i c_j)$  és l'àrea de l'element  $i$ :

$$D_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \alpha(\underline{x}) \xi_i^e(\underline{x}) \xi_j^e(\underline{x}) d\Gamma_e = \begin{cases} 0 & \text{si } (\underline{x}) \notin \Gamma \\ \frac{\alpha^e}{6} L_e (1 + \delta_{ij}) & \text{si } (\underline{x}) \in \Gamma \end{cases}$$

on  $L_e$  és la longitud del contorn de l'element sobre  $\Gamma$  i  $\alpha^e$ , que és la funció que determina les condicions de contorn, s'ha suposat constant al llarg de  $\Gamma_e$ .

El terme independent  $q$  del sistema d'equacions (2.8) l'avaluem considerant fonts puntuals en el domini  $\Omega$ . Si tenim  $m$  fonts:

$$q(\underline{x}) = \sum_m I_m \delta(x - x_m) \delta(z - z_m)$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q(\underline{x}) \xi_j(\underline{x}) d\Omega &= \sum_m \int_{\Omega} I_m \delta(x - x_m) \delta(z - z_m) \xi_j(\underline{x}) d\Omega = \\ &= \sum_m I_m \xi_j(x_m, z_m) = \delta_{jm} I_m \end{aligned}$$

on  $I_m$  correspon a la intensitat de corrent per unitat de longitud que circula per l'elèctrode  $M$  situat en el nus de coordenades  $(x_m, z_m)$ . Es procedeix de manera equivalent amb la integral sobre el contorn.

Volem constatar que el desenvolupament anterior és extensible als

medis o estructures tridimensionals amb elèctrodes puntuals ja que correspon a resoldre la mateixa equació diferencial de Poisson. Unicament cal incorporar la coordenada  $y$  i considerar funcions de forma lineals definides localment sobre elements tetraèdrics per:  $\xi_i^e = \frac{1}{6\Omega_e} ( a_i + b_i x + c_i z + d_i y )$ . Ara  $\Omega_e$  és el volum de l'element i  $a_i, b_i, c_i$  i  $d_i$  són constants que depenen de les coordenades dels quatre vèrtex del tetraèdre. Les matrius elementals seran:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \sigma^e(\underline{x}) \nabla \xi_i^e(\underline{x}) \cdot \nabla \xi_j^e(\underline{x}) d\Omega_e = \frac{\sigma^e}{36\Omega_e} ( b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j )$$

$$D_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \alpha(\underline{x}) \xi_i^e(\underline{x}) \xi_j^e(\underline{x}) d\Gamma_e = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{x} \notin \Gamma \\ \frac{\alpha^e}{12} S_e (1 + \delta_{ij}) & \text{si } \underline{x} \in \Gamma \end{cases}$$

on  $S_e$  correspon a la superfície de la cara del tetraèdre situada sobre  $\Gamma_e$ , i el terme corresponent a les fonts:

$$\int_{\Omega} q(x,y,z) \xi_j(x,y,z) d\Omega = \sum_m I_m \xi_j(x_m, y_m, z_m) = \delta_{jm} I_m$$

on ara  $I_m$  és la intensitat del corrent que circula per l'elèctrode puntual situat en el nus  $m$  de coordenades:  $(x_m, y_m, z_m)$ .

#### 2.4. EL PROBLEMA TRIDIMENSIONAL.

Al modelitzar medis bidimensionals ( $\sigma(\underline{x}) = \sigma(x, z)$ ) amb elèctrodes puntuals el potencial és tridimensional:  $V(x, y, z)$ . Per tal d'evitar la dependència del potencial amb la coordenada  $y$  (direcció de l'estructura) utilitzarem la transformada de Fourier en cosinus ja que el potencial serà una funció parell respecte de  $y$  si els elèctrodes estan situats en el pla  $y=0$ . Ens situem en l'espai transformat  $(x, y; K_y)$  on el paràmetre  $K_y$  té dimensions de  $L^{-1}$  i l'anomenarem nombre d'ona. La funció que ara hem de determinar és el potencial transformat,  $\tilde{V}(x, z; K_y)$ :

$$\tilde{V}(x, z; K_y) = \int_0^{\infty} V(x, y, z) \cos(K_y \cdot y) dy \quad (2.11)$$

(la notació  $\sim$  indicarà transformada en cosinus). Aplicant aquesta transformada a l'equació diferencial (2.2):

$$\nabla \cdot \left[ \sigma(x, z) \nabla \tilde{V}(x, z; K_y) \right] - K_y^2 \sigma(x, z) \tilde{V}(x, z; K_y) + \tilde{q}(x, z) = 0, \quad \forall (x, z) \in \Gamma \quad (2.12)$$

Aquesta és una equació diferencial de Helmholtz i la representarem per  $\mathcal{H}(\tilde{V}) = 0$ . Caldrà resoldre-la per diferents valors de  $K_y$  per poder calcular l'antitransformada i obtenir el potencial elèctric en tots els punts de l'espai:

$$V(x,y,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}(x,z;K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y \quad (2.13)$$

En el contorn  $\Gamma$  del domini  $\Omega$  imposarem una condició de contorn equivalent a la (2.3) però en l'espai transformat:

$$\mathbb{B}(\tilde{V}) = \varphi(x,z) \frac{\partial \tilde{V}(x,z;K_y)}{\partial n} + \beta(x,z;K_y) [\tilde{V}(x,z;K_y) - \tilde{V}_0] + \tilde{Q}_0 = 0, \quad \forall (x,z) \in \Gamma \quad (2.14)$$

on  $n$  és la normal cap a fora de  $\Gamma$ ;  $\beta(x;K_y)$  una funció que ve determinada pel tipus de condició de contorn, i  $\tilde{V}_0$  i  $\tilde{Q}_0$  són valors a imposar pel potencial transformat i el seu flux a través de  $\Gamma$ .

#### 2.4.1 Desenvolupament en l'espai transformat.

Partint d'aquesta nova equació diferencial (2.12) i de la condició de contorn (2.14), apliquem de nou el mètode dels residus ponderats amb el criteri de Galerkin. Se segueix el mateix procés que el desenvolupat anteriorment i finalment s'obté:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \sigma \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi_j d\Omega + \int_{\Gamma} \beta \xi_i \xi_j d\Gamma + K_y^2 \int_{\Omega} \sigma \xi_i \xi_j d\Omega \right\} \tilde{V}_i = \\ = \int_{\Omega} \tilde{q} \xi_j d\Omega + \int_{\Gamma} [\beta \tilde{V}_0 - \tilde{Q}_0] \xi_j d\Gamma \quad \forall j = 1 \dots N \end{aligned} \quad (2.15)$$



Expressat en forma matricial:

$$(A + B + C) \underline{\tilde{V}} = \underline{\tilde{Q}} \quad (2.16)$$

Observem que la matriu  $A$  del sistema (2.16) és equivalent a la matriu  $A$  obtinguda en el sistema (2.8) (matriu de conductivitats) quan no treballàvem en l'espai transformat. La matriu  $B$  és formalment equivalent a la matriu  $D$  (matriu de contorn) del sistema (2.8). Correspon als termes de les condicions de contorn i la funció  $\beta$  incorpora la dependència amb el paràmetre  $K_y$ . Trobem ara una nova matriu, la matriu  $C$ , que no té equivalent en el sistema (2.8). Totes aquestes matrius són quadrades d'ordre  $N$ , simètriques i definides positives. Considerant el domini  $\Omega$  discretitzat en  $N_e$  elements finits, les matrius  $A$ ,  $B$  i  $C$  poden calcular-se a partir de les elementals:

$$A_{ij} = \sum_e A_{ij}^e \quad B_{ij} = \sum_e B_{ij}^e \quad i \quad C_{ij} = \sum_e C_{ij}^e$$

Prenent funcions de forma lineals i elements triangulars d'àrea  $\Omega_e$ , s'obté:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \sigma^e \nabla \xi_i^e \cdot \nabla \xi_j^e d\Omega_e = \frac{\sigma^e}{4\Omega_e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad \forall (\underline{x}) \in \Omega$$

$$B_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \beta^e \xi_i^e \xi_j^e d\Gamma_e = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,z) \notin \Gamma \\ \frac{\beta^e}{6} L_e (1 + \delta_{ij}) & \text{si } (x,z) \in \Gamma \end{cases}$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega} \sigma^e K_y^z \xi_i^e \xi_j^e d\Omega_e = K_y^z \frac{\sigma^e \Omega_e}{12} (1 + \delta_{ij}) \quad \forall (\underline{x}) \in \Omega$$

Per avaluar el terme independent del sistema (2.15) considerem  $m$  elèctrodes puntuals situats en els nusos de coordenades  $(x_m, y_m, z_m)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, z; K_y) &= \int_0^{\infty} q(x, y, z) \cos(K_y \cdot y) dy = \\ &= \sum_m \int_0^{\infty} I_m \delta(x-x_m) \delta(y-y_m) \delta(z-z_m) \cos(K_y \cdot y) dy = \sum_m I_m / 2 \delta(x-x_m) \delta(z-z_m) \end{aligned}$$

Per tant:

$$\int_{\Omega} \tilde{q}(x, z; K_y) \xi_j(x, z) d\Omega = \sum_m \int_{\Omega} \frac{I_m}{2} \delta(x-x_m) \delta(z-z_m) \xi_j(x, z) d\Omega = \delta_{jm} \frac{I_m}{2} \quad (2.17)$$

on  $I_m$  correspon a la intensitat que circula per l'elèctrode situat en el nus  $m$ .

#### 2.4.2. Transformada Inversa.

La resolució de l'equació diferencial de Helmholtz (2.12) pel mètode dels elements finits ens ha conduït al sistema d'equacions (2.16). La solució d'aquest sistema correspon als potencials transformats  $\tilde{V}_j$  ( $\forall j = 1 \dots N$ ) per un valor determinat del nombre

d'ona  $K_y$ . El sistema d'equacions final (2.16) és en gran mesura semblant a l'obtingut en la resolució de l'equació de Poisson per al potencial bidimensional; únicament trobem una nova matriu (la matriu  $C$ ) associada al paràmetre  $K_y$ . La diferència substancial del problema bidimensional amb el tridimensional és que en aquest últim cas cal repetir tot el procés per diferents valors de  $K_y$  (des de 0 fins a  $\infty$ ) per tal de calcular el potencial  $V(x, y, z)$  mitjançant l'antitransformada (2.13):

$$V(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}(x, z; K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y \quad (2.13)$$

Donades les dimensions del problema s'ha d'evitar haver de repetir el procés massa vegades. La millor manera de procedir és calcular  $\tilde{V}(x, z; K_y)$  per un conjunt òptim i reduït de valors de  $K_y$ , realitzar una interpolació i després calcular analíticament la integral (2.13).

#### Interpolació i comportament del potencial transformat.

La problemàtica que presenta la interpolació és evident, perquè l'espectre del potencial,  $\tilde{V}(x, z; K_y)$ , en principi variarà no solament en funció del model considerat, sinó també en funció de la posició dels elèctrodes i del seu nombre; a última hora, per cada

punt  $(x, z)$  del medi serà diferent. Si es conegués el potencial  $V(x, y, z)$  es podria realitzar un estudi del comportament del seu espectre en funció de diferents paràmetres, i trobar el conjunt òptim de  $K_y$ 's i la funció que millor interpola a  $\tilde{V}$ . La situació en què ens trobem és totalment diferent, doncs precisament volem trobar el potencial  $V(x, y, z)$  pels models on no és conegut. Tenim, però, la possibilitat de treballar amb models de control (aquells que tenen solució coneguda i senzilla) per deduir el comportament general que permeti establir uns criteris per la selecció del conjunt de  $K_y$  i poder realitzar la interpolació.

En l'apèndix calculem el potencial transformat per als models de control considerats (medi homogeni, contacte vertical i model de dues capes horitzontals). Tots ells presenten un comportament asimptòtic del tipus  $\mathcal{K}_0$  (funció de Bessel modificada d'ordre zero) en funció del producte  $r_f \cdot K_y$ , on  $r_f$  és la distància del punt  $(x, z)$  considerat a l'elèctrode.

A la figura 2.3 comparem el potencial i el potencial transformat. La figura 2.3A representa el potencial a la superfície per un medi homogeni (línia continua) de resistivitat  $\rho = 1 \Omega_m$  i per un contacte vertical de resistivitats  $\rho_1 = 1 \Omega_m$  i  $\rho_2 = 1000 \Omega_m$  tant quan ens allunyem de l'elèctrode paral·lelament al contacte (línia discontinua) com perpendicularment (línia a punts). La intensitat

del corrent que circula per l'electrode és d'1A i aquest està situat en el medi de resistivitat  $1\Omega\text{m}$  i a una distància de 25m del contacte. S'observa que el comportament dels potencials és bàsicament del tipus  $1/r_f$ . El màxim local que apareix en el potencial perpendicular al contacte correspon precisament al punt de contacte entre els medis 1 i 2. A la figura 2.3B hem representat únicament el potencial transformat pel contacte vertical ja que en la representació lineal no s'aprecia la diferència entre aquest potencial transformat i els altres corresponents al medi homogeni o al contacte vertical perpendicular al contacte. Tots ells presenten un comportament del tipus  $\mathcal{X}_0$ .

El comportament del potencial transformat és el següent: té una caiguda pràcticament exponencial per punts llunyans ( $t \rightarrow \infty$ ) i tendeix a infinit de forma logarítmica per punts molt propers a l'elèctrode ( $t \rightarrow 0$ ) presentant a  $t = 0$  una singularitat. Aquesta singularitat, però, és integrable, condició necessària per l'existència de la transformada inversa. Aquest comportament descrit és generalitzable a qualsevol model i ens sugereix una solució al problema de l'interpolació del espectre per tots els valors des de  $t = 0$  a  $t = \infty$ . Efectivament, hem considerat una interpolació de l'espectre  $\tilde{V}(x, z; \mathcal{K}_y)$  logarítmica, en els punts molt propers a l'elèctrode, i exponencial en els punts no tan propers i per valors de  $\mathcal{K}_y$  grans. Aquesta elecció ha estat adequada com més endavant es veurà en detall (capítol quart).

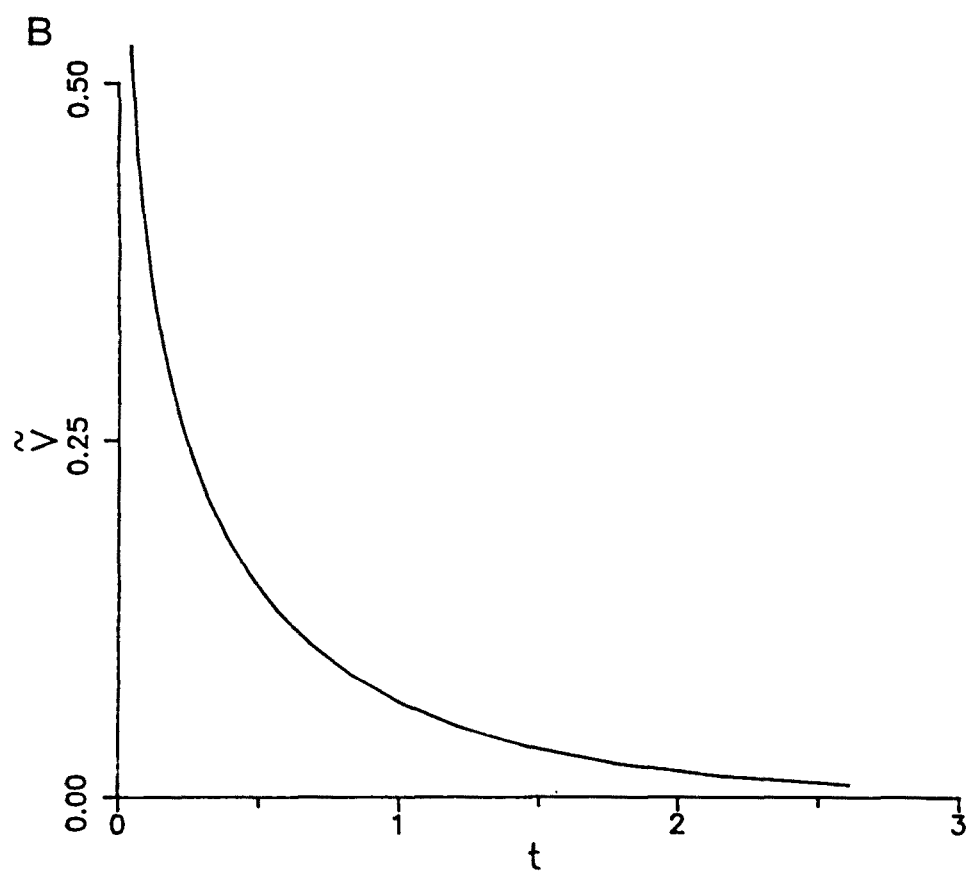
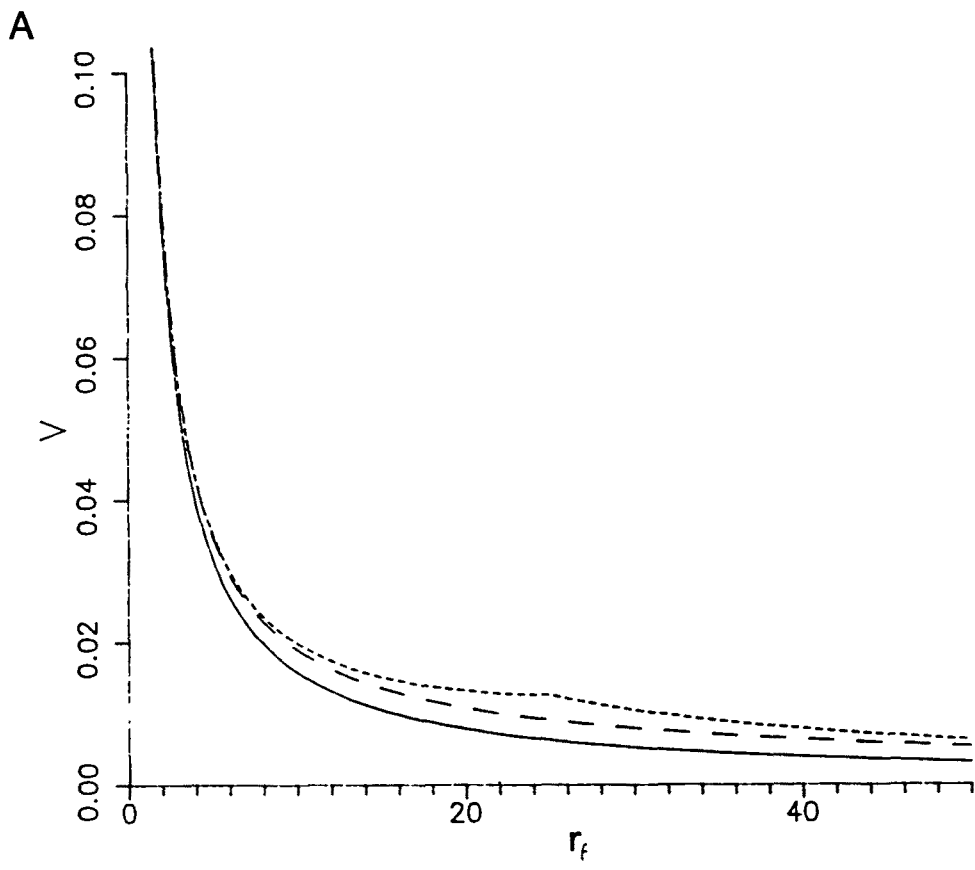


Figura 2.3. A. Comportament del potencial en un medi homogeni ( — ), en un contacte vertical paral·lel ( - - - ) i perpendicular ( · · · ).  
 B. Comportament del potencial transformat en un contacte vertical.

Convé obtenir més detall sobre el comportament del potencial transformat en funció del nombre d'ona  $K_y$  per tal de seleccionar els  $K_y$  adequats per les interpolacions. A la figura 2.4 està representat l'espectre del potencial a la superfície, en funció de  $K_y$  per dos models: un medi homogeni de  $\rho=1 \Omega\text{m}$  i un contacte vertical de contrast 1/1000 amb una distància de l'elèctrode al contacte de  $d=50\text{m}$  i diferents distàncies a l'elèctrode. La intensitat que circula per l'elèctrode és d'1A. En aquesta representació bilogarítmica observem un comportament bastant pla per  $K_y$  petites i la caiguda monòtona a zero per  $K_y$  grans. És clar que les  $K_y$  s'han de prendre amb increments constants en escala logarítmica i que la selecció de les  $K_y$ 's òptimes així com el lloc de truncament (valor màxim de  $K_y$ ) depèn de la distància a l'elèctrode. En el capítol quart donarem més detalls sobre aquests aspectes i els errors que poden induir.

Hem comprovat que aquest comportament descrit de l'espectre del potencial es manté en tots els models que hem estudiat, tant pels models de control (calculats analíicament) com per models més complexos (calculats via elements finits), sempre que es consideri el potencial total creat per un sol elèctrode. La morfologia del potencial creat per dos elèctrodes pot ser diferent en funció del model i de les posicions dels elèctrodes. Com a exemple, a la

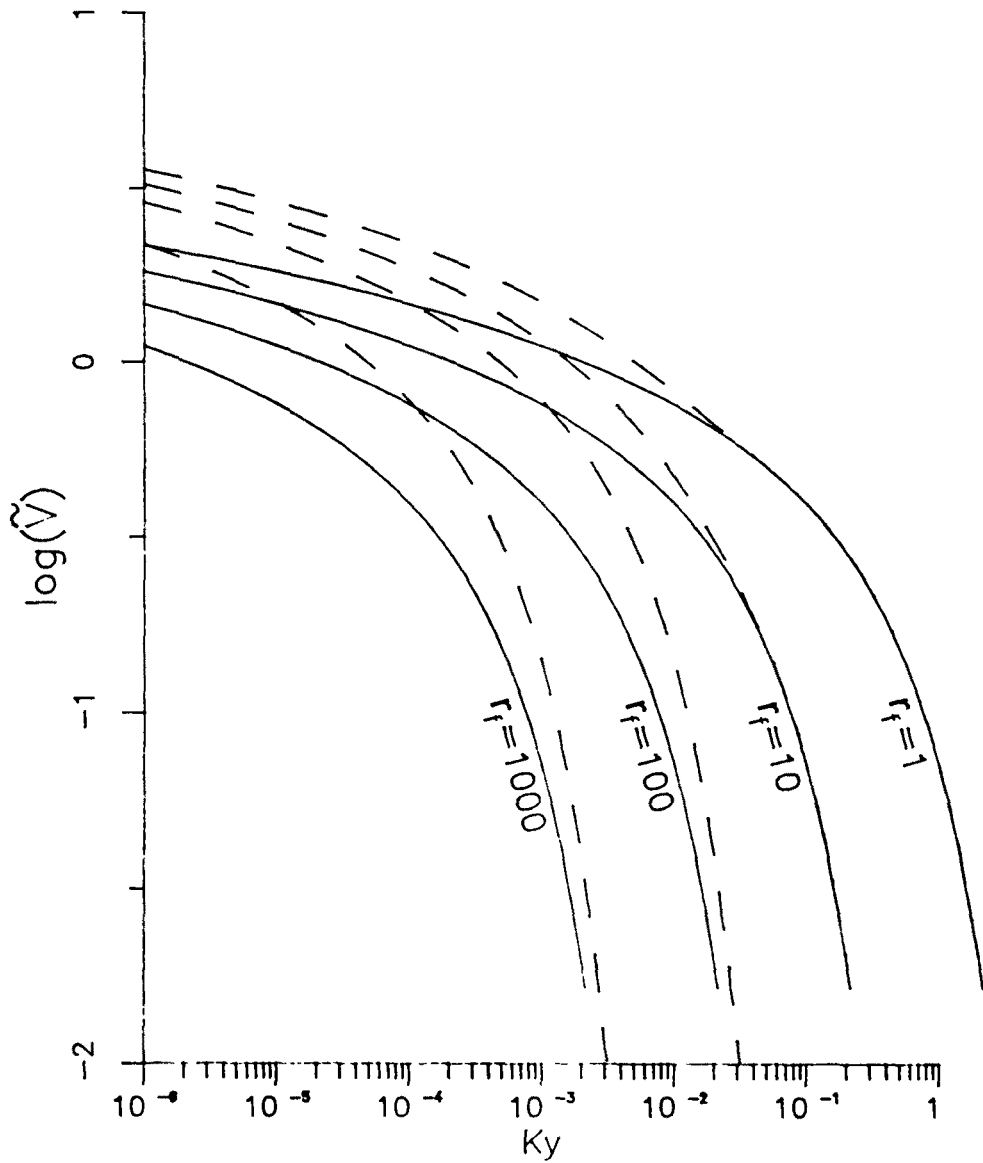


Figura 2.4. Espectre del potencial per diferents distàncies  $r_f$  (m) a l'elèctrode i per un medi homogeni (—) i un contacte vertical (---).



figura 2.5 s'han representat els espectres dels potencials a la superfície, creats per un sol elèctrode (línies discontinües amb segments llargs) i els creats per dos elèctrodes (línies discontinües amb segments curts). Aquests espectres corresponen a un model estratificat de tres capes que presenta un horst en el basament resistiu (figura 2.6). Els paràmetres del model són:  $\rho_1 = 2400 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$  i  $\rho_3 = 1000 \Omega\text{m}$  i gruixos  $t_1 = 30 \text{ m}$  i  $t_2 = 230\text{m}$ . L'amplada del horst és 200m i l'alçada 210m. A la figura 2.6 s'indica la posició dels punts on es calcula el potencial transformat  $\tilde{V}$  (punts "a" i "b"), així com les posicions dels elèctrodes 1 i 2. A les corbes de la figura 2.5, la lletra "a" o "b" indica el punt on s'ha calculat el potencial transformat  $\tilde{V}$ . El número "1" indica que correspon al potencial creat per un sol elèctrode (elèctrode 1 amb intensitat  $I_1 = 1\text{A}$ ) i el número "2" al potencial creat per dos elèctrodes (elèctrodes 1 i 2 amb  $I_1 = -1\text{A}$  i  $I_2 = 1\text{A}$ ). S'observa que mentre la morfologia del potencial creat per un sol elèctrode és la mateixa independentment de la situació del punt on es calcula, el potencial creat per dos elèctrodes varia en funció de la posició del punt en relació a l'estructura. Per un punt allunyat dels elèctrodes (punt b) l'espectre té el mateix comportament que el d'un sol elèctrode, mentre que en el punt a, situat a prop dels elèctrodes i del horst, l'espectre presenta un mínim i un màxim pronunciats.

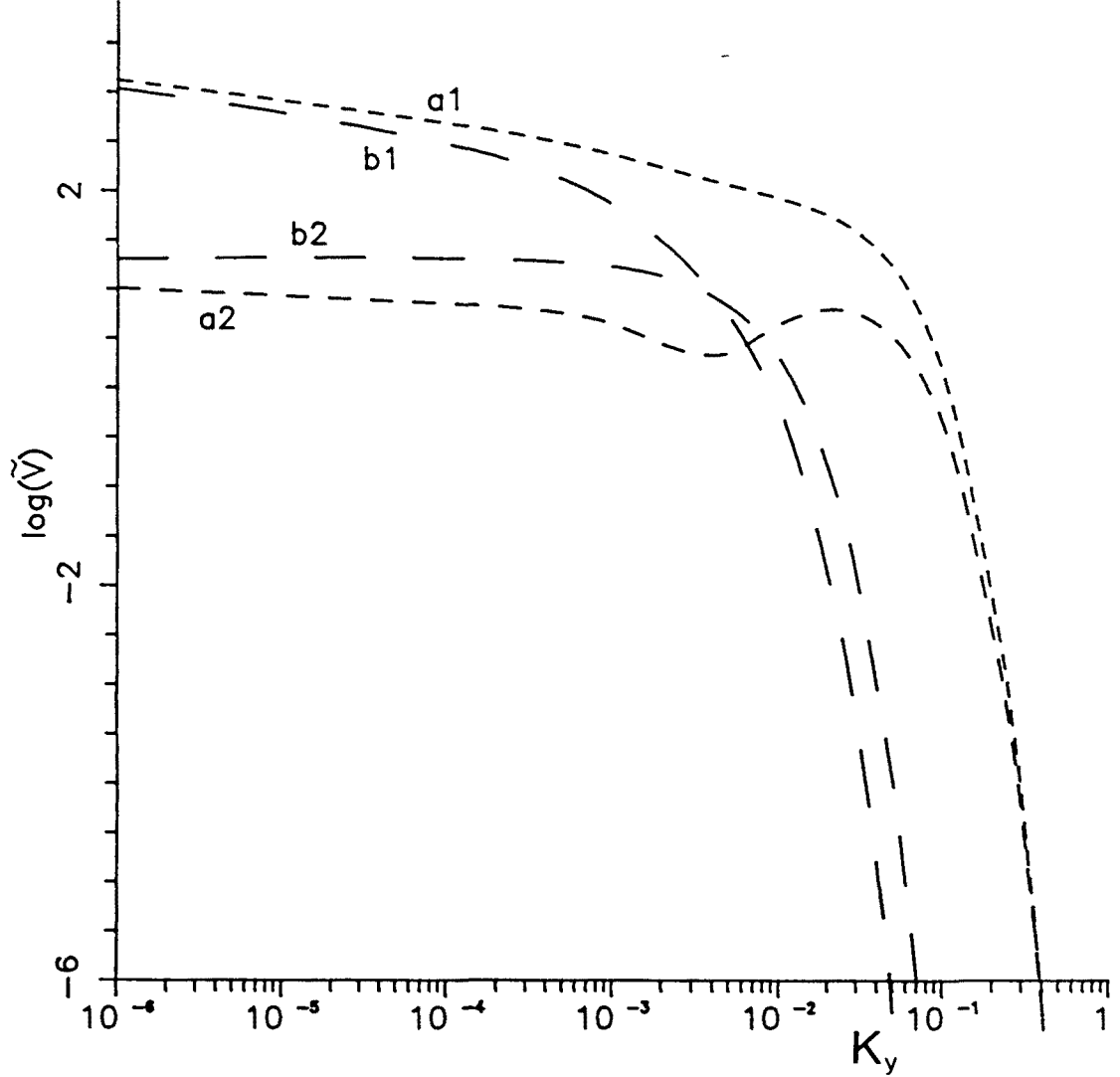


Figura 2.5. Espectre del potencial per un model de horst. La lletra "a" o "b" indicat el punt on s'ha calculat  $\psi$ . El nombre 1 indica que corresponen al potencial creat per un sol elèctrode i 2 al creat per dos elèctrodes.

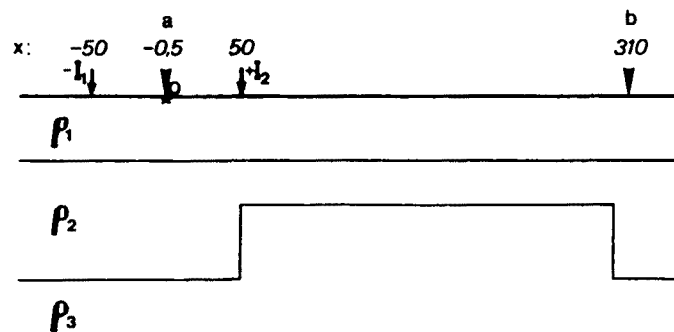


Figura 2.6. Esquema del model utilitzat pel càlcul dels espectres de la figura 2.5.

L'enfocament donat per Coggon (1971) i Rijo (1977) a tota aquesta problemàtica del càlcul del potencial transformat és diferent perquè treballen amb el potencial secundari. El potencial secundari es defineix com el potencial total menys el primari, essent el primari el que correspon al medi sense heterogeneïtats i té solució analítica coneguda. L'espectre del potencial secundari és més complicat que el del potencial total i és difícil predir el seu comportament perquè aquest depèn exclusivament del model. Com a exemple, a la figura 2.7 presentem el potencial secundari (línia contínua) junt amb el potencial total (línia discontinua) pel model del horst representat en la figura 2.8. Els paràmetres del model són:  $\rho_1 = 2400 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_3 = 1000 \Omega\text{m}$ ,  $t_1 = 30\text{m}$  i  $t_2 = 230\text{m}$ . L'alçada del horst és 210m i l'amplada 50m. A la mateixa figura 2.8 s'indica la posició del punt on s'ha calculat el potencial total i el secundari, i la posició de l'elèctrode pel qual circula un corrent d'1 A. S'observa que mentre l'espectre del potencial total presenta la morfologia típica descrita anteriorment, el potencial secundari presenta un màxim en  $K_y = 0.25 \cdot 10^{-2}$ .

Recordem que si només es calcula el potencial en punts del pla  $y = 0$ , el càlcul de la transformada inversa (2.13) és simplement el càlcul de l'àrea sota l'espectre i pot realitzar-se fàcilment amb una interpolació per splines pel potencial secundari o, senzillament una interpolació exponencial pel potencial total.

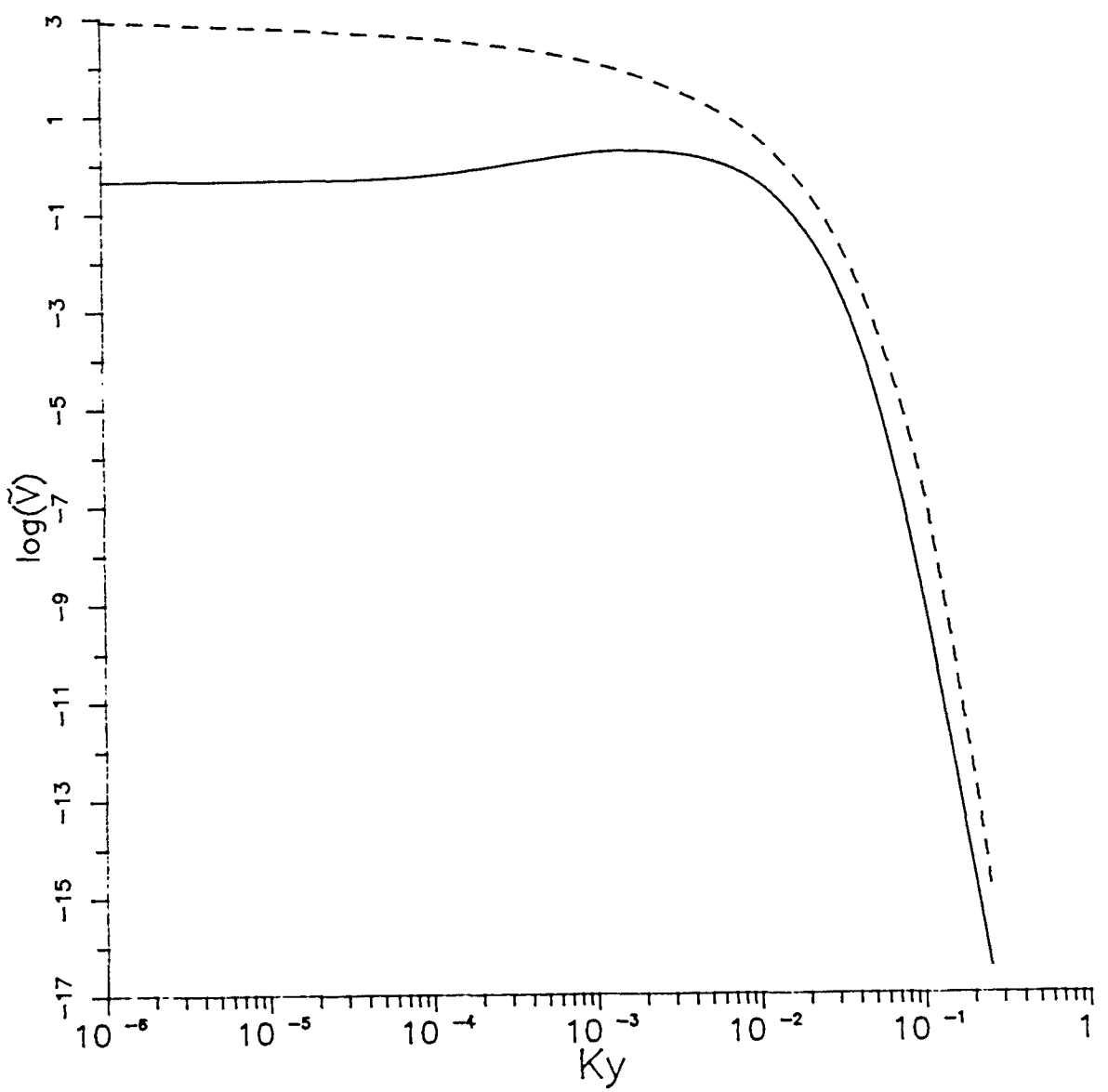


Figura 2.7. Espectre del potencial total ( - - - ) i secundari ( — ) pel model del horst.

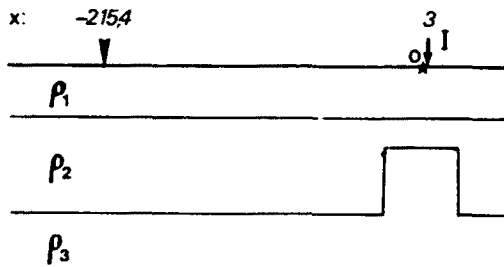


Figura 2.8. Esquema del model utilitzat pel càlcul dels espectres de la figura 2.7.

### Integració.

Un cop realitzada la interpolació logarítmica o exponencial per cada interval del conjunt de  $K_y$  considerat, resta únicament la integració analítica de (2.13) per obtenir, finalment, el potencial a qualsevol punt de l'espai. Integrant la funció interpolada a intervals s'obté: (veure detalls en l'apèndix)

$$\begin{aligned} V(x,y,z) \simeq & \frac{2}{\pi} \frac{B_0}{y} \left[ \ln (b_0 K_y) \sin (K_y \cdot y) - \text{si} (K_y \cdot y) \right] \\ & + \sum_n \frac{2}{\pi} \frac{B_n}{y} \left[ \ln (b_n K_y) \sin (K_y \cdot y) - \text{si} (K_y \cdot y) \right]_{K_n}^{K_{n+1}} \\ & + \sum_m \frac{2}{\pi} A_m \frac{e^{-a_m K_y}}{a^2 + y^2} \left[ y \sin (K_y \cdot y) - a_m \cos (K_y \cdot y) \right]_{K_m}^{K_{m+1}} \end{aligned}$$

on  $A_m$ ,  $a_m$ ,  $B_n$ ,  $b_n$  són les constants de la interpolació de cada interval  $[K_i, K_{i+1}]$ , i  $B_0$  i  $b_0$  per l'interval  $[0, K_1]$ .

## 2.5. RESOLUCIÓ DELS SISTEMES D'EQUACIONS.

Mitjançant el mètode dels elements finits hem reduït l'equació diferencial tipus Poisson pel potencial elèctric (2.2):  $\mathbb{D}(V)=0$  junt amb la condició de contorn (2.3):  $\mathbb{C}(V) = 0$  en el sistema  $(A + D) \underline{V} = \underline{Q}$ . De manera semblant pel potencial transformat, hem passat de l'equació de Helmholtz (2.12):  $\mathbb{H}(\tilde{V})=0$  junt amb la condició de contorn (2.14):  $\mathbb{B}(\tilde{V})=0$ , al sistema  $(A + B + C) \underline{\tilde{V}} = \underline{\tilde{Q}}$ .

Per resoldre els sistemes lineals amb un nombre elevat d'equacions existeixen dos grups de mètodes : els indirectes i els directes. Els indirectes eviten emmagatzemar les matrius però involucren un procés iteratiu a partir d'una solució inicial i, per tant, es presenten els típics problemes de convergència i estabilitat. Els directes es basen en la descomposició de la matriu i són més ràpids.

Cal remarcar que les matrius dels sistemes que ens ocupen són matrius quadrades d'ordre  $N$  (on  $N$  és el nombre de nusos de la xarxa) i el seu ordre de magnitud és  $10^8$  en molts casos. Però, per sort, totes les matrius són simètriques i "sparse" (de manera que només no són nuls els elements de la diagonal i els termes creuats corresponents als nusos connectats). Aquestes propietats són avantatges de la tècnica de Galerkin i del caràcter local de les

funcions de forma. A més, si la numeració dels nusos es fa de forma ordenada, obtenim matrius de banda limitada. La importància d'aquestes propietats és que permeten emmagatzemar les matrius amb un gran estalvi de memòria.

Els mètodes directes més utilitzats es basen en la descomposició de Crout i, si la matriu és definida positiva, en la descomposició de Cholesky (Ralston i Wilf 1967). Aquests mètodes tenen l'avantatge que resolen el sistema d'equacions,  $M\underline{x} = \underline{y}$ , en dos passos: 1- la descomposició de la matriu ("forward reduction") en el producte de dues matrius triangulars (una superior i l'altra inferior):  $M = LU$  i 2- la resolució dels sistemes resultants:  $L\underline{z} = \underline{y}$  i  $U\underline{x} = \underline{z}$  que són una simple "back substitution". Aquest detall és molt important perquè en el nostre problema de modelització pot reduir el temps de càlcul. Quan es consideren diferents posicions dels elèctrodes per una mateixa estructura només cal realitzar un cop la descomposició de la matriu i guardar-la en memòria. A continuació realitzar la "back substitution" per cada nova posició dels elèctrodes.

Tenint en compte aquests avantatges dels mètodes directes i les característiques de les matrius del nostre problema, hem optat per la resolució dels sistemes d'equacions via la descomposició de Cholesky, aconseguint una resolució del sistema suficientment operativa i precisa per totes les modelitzacions realitzades.

## 2.6. DISCUSSIÓ DE LES CONDICIONS DE CONTORN.

L'elecció de les condicions de contorn òptimes és un dels aspectes fonamentals en la resolució de les equacions diferencials per mètodes numèrics ja que condicionen el tipus de solució. En concret, en el MEF hem vist que imposen restriccions en l'elecció de les funcions de forma (secció 1.2). A més a més, en prospecció elèctrica trobem una problemàtica específica pel fet de considerar el medi semi-infinit i fonts puntuals.

L'algorisme que hem construït imposa sobre la frontera del domini les condicions de contorn (2.3) i (2.14) pel potencial i pel potencial transformat respectivament:

$$\mathbb{C}(V) = \sigma(\underline{x}) \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n} + \alpha(\underline{x}) \left[ V(\underline{x}) - v_o \right] + Q_o = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbb{B}(\tilde{V}) = \sigma(\underline{x}) \frac{\partial \tilde{V}(\underline{x}; K_y)}{\partial n} + \beta(\underline{x}; K_y) \left[ \tilde{V}(\underline{x}; K_y) - \tilde{v}_o \right] + \tilde{Q}_o = 0 \quad (2.14)$$

Aquestes expressions permeten considerar els diferents tipus de condicions de contorn:



1- Condicions de Dirichlet:

$$V(\underline{x}) = V_0, \quad \text{fent } \alpha(\underline{x}) = \infty \text{ en (2.3)}$$

$$\text{i } \tilde{V}(\underline{x}; \mathcal{K}_y) = \tilde{V}_0, \quad \text{fent } \beta(\underline{x}; \mathcal{K}_y) = \infty \text{ en (2.14)}$$

2- Condicions de Neumann:

$$\sigma(\underline{x}) \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n} = Q_0, \quad \text{fent } \alpha(\underline{x}) = 0 \text{ en (2.3)}$$

$$\text{i } \sigma(\underline{x}) \frac{\partial \tilde{V}(\underline{x}; \mathcal{K}_y)}{\partial n} = \tilde{Q}_0, \quad \text{fent } \beta(\underline{x}; \mathcal{K}_y) = 0 \text{ en (2.14)}$$

3- Condicions mixtes:

$$\sigma(\underline{x}) \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n} = \alpha(\underline{x}), \quad \text{fent } V_0 = Q_0 = 0 \text{ en (2.3)}$$

$$\text{i } \sigma(\underline{x}) \frac{\partial \tilde{V}(\underline{x}; \mathcal{K}_y)}{\partial n} = \beta(\underline{x}; \mathcal{K}_y), \quad \text{fent } \tilde{V}_0 = \tilde{Q}_0 = 0 \text{ en (2.14)}$$

Segons el criteri donat en la secció 1.2, les condicions tipus Dirichlet són condicions essencials o forçades, per tant, en cas de considerar-les cal imposar-les sobre les funcions de forma. Les condicions de Neumann i les mixtes són condicions naturals; no cal imposar-les sobre les funcions de forma, es compleixen de manera "natural", en terme mitjà sobre el contorn de l'element corresponent.

A continuació discutim quines d'aquestes condicions són

convenients en les diferents fronteres.

Recordem que la frontera del domini,  $\Gamma$ , està formada per la superfície del terra,  $\Gamma_s$ , i una frontera fictícia sobre la que hem de simular les condicions de l'infinit,  $\Gamma_\infty$ :  $\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_\infty$  (figura 2.1).

#### Condicions sobre $\Gamma_s$ :

La superfície del terra separa el medi de l'aire, que es pot considerar totalment aïllant ( $\sigma=0$ ). Per la condició de continuïtat del component normal del vector densitat de corrent ( $J_n = \sigma \frac{\partial V}{\partial n}$ ) ha de ser nul a través de  $\Gamma_s$ . Sobre  $\Gamma_s$  s'ha d'imposar sempre la condició de Neumann homogènia:  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ . Es procedeix de manera equivalent pel potencial transformat.

#### Condicions sobre $\Gamma_\infty$ :

Donat que situem la frontera  $\Gamma_\infty$  a grans distàncies de la font, s'acostuma a imposar en ella condicions de Neumann homogènies o condicions de Dirichlet inhomogènies (Coggon 1971, Rijo 1977 i Pridmore et al. 1981). En el cas d'utilitzar condicions de Dirichlet inhomogènies es fixen en els nusos de la frontera els valors del potencial primari (medi homogeni o medi estratificat

generalment).

Aquestes condicions són aproximacions vàlides i generalment condueixen a resultats satisfactoris, però cal considerar la frontera molt lluny de la zona d'interès ( zona heterogènia ). A més, imposar el potencial primari resulta molt laboriós. Recordem que el potencial transformat cal calcular-lo per diferents valors del paràmetre  $\kappa_y$ , per tant el potencial primari canviarà per cada  $\kappa_y$ .

La frontera  $\Gamma_\infty$ , de fet, està a una distància gran però finita de la font. Rigorosament no podem aplicar les condicions de l'infinít, ni tampoc imposar potencials d'un medi diferent al model considerat (potencial primari). La condició més apropiada és una condició sobre el comportament del potencial. Dey i Morrison (1979a), en modelització per diferències finites, proposen una condició mixta basada en el comportament asimptòtic del potencial a grans distàncies de la font. Si bé la seva incorporació en un algorisme d'elements finits demana un esforç suplementari en la programació, un cop implementada és còmode i general per qualsevol model, en front a les condicions de Dirichlet inhomogènies que seran diferents per cada model.

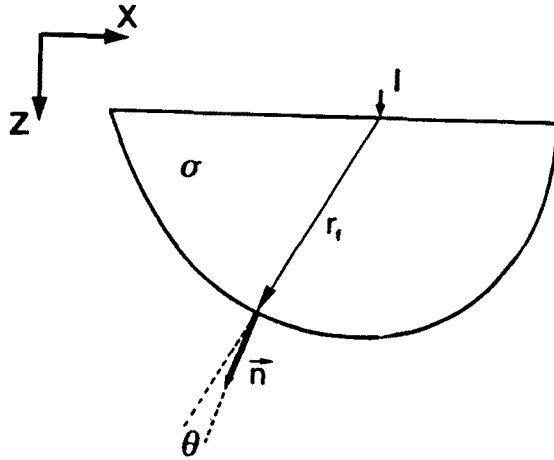


Figura 2.9. Identificació dels termes que intervien en la condició mixta

El potencial elèctric té un comportament del tipus  $1/r_f$  a grans distàncies de la font, on  $r_f$  és la distància a la font:  $V(\underline{x}) = C_1/r_f$  ( $C_1$  és una constant que depen del model). Així,  $\frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n} = -C_1 \frac{\cos \vartheta}{r_f^2}$

on  $\vartheta$  és l'angle format entre la normal  $n$  i la direcció de  $r_f$  (figura 2.9). L'equació (2.3)  $\mathcal{C}(V)=0$  pren la forma:

$$-\sigma(\underline{x}) \frac{\partial V(\underline{x})}{\partial n} = \sigma(\underline{x}) \frac{\cos \vartheta}{r_f} V(\underline{x})$$

d'on:  $\alpha(\underline{x}) = \sigma(\underline{x}) \cos \vartheta / r_f$ .

En l'espai transformat, el comportament asimptòtic del potencial

serà:

$$\tilde{V}(\underline{x}; K_y) = C_2 \mathcal{K}_0(r_f \cdot K_y)$$

per tant:

$$\frac{\partial \tilde{V}(\underline{x}; K_y)}{\partial n} = -C_2 K_y \mathcal{K}_1(r_f \cdot K_y) \cos \vartheta$$

on  $C_2$  és una constant que depèn del model i  $\mathcal{K}_0$  i  $\mathcal{K}_1$  són les funcions de Bessel modificades d'ordre zero i u respectivament.

L'equació de contorn (2.14) pren la forma:

$$-\sigma(\underline{x}) \frac{\partial \tilde{V}(\underline{x}; K_y)}{\partial n} = \sigma(\underline{x}) \cos \vartheta \frac{\mathcal{K}_1(r_f \cdot K_y)}{\mathcal{K}_0(r_f \cdot K_y)} K_y \tilde{V}(\underline{x}; K_y)$$

$$\text{d'on: } \beta(\underline{x}; K_y) = \sigma(\underline{x}) \cos \vartheta \frac{\mathcal{K}_1(r_f \cdot K_y)}{\mathcal{K}_0(r_f \cdot K_y)} K_y$$

El criteri que nosaltres utilitzarem és imposar sempre sobre  $\Gamma_\infty$  la condició mixta menys en els casos particulars que, per raons de simetria del model, sigui convenient imposar les condicions clàssiques.

#### Condicions en les interfícies:

A cada frontera interna que separa elements de conductivitats diferents,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , han de complir-se les condicions de continuïtat del potencial i del component normal de vector densitat de corrent:

$$1- V_1 = V_2$$

$$2- \sigma_1 \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right]_1 = \sigma_2 \left[ \frac{\partial V}{\partial n} \right]_2$$

La primera condició es compleix automàticament, ja que les funcions de forma que hem elegit són contínues ( $C^0$ ). Es tracta, de fet, d'una condició essencial o forçada.

La segona condició implica un salt en les derivades del potencial. Les nostres funcions de forma lineals presenten un salt en les seves derivades primeres. Ara bé, no imposen que aquest salt sigui la relació de conductivitats. La continuïtat de  $J_n$  és, de fet, una condició natural i, per tant, es complirà únicament en terme mitjà sobre cada interfície de  $\sigma$ .



## Capítol 3. IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORISME.

### 3.1. INTRODUCCIÓ.

En aquest capítol es presenta la implementació de l'algorisme desenvolupat al capítol anterior. L'elevat volum de càlcul requerit aconsella d'establir determinades estratègies de càlcul numèric que moltes vegades representen aproximacions a la solució però que, d'altra manera, l'algorisme fora inoperant. Les aproximacions bàsiques que utilitzem són l'eliminació de la dependència de la matriu del sistema respecte la posició dels elèctrodes i, per altra banda, la utilització de l'anomenat esquema concentrat en les matrius de contorn i en l'associada al nombre d'ona. S'evaluen els errors que aquestes aproximacions indueixen i es comprova la seva poca influència en la solució final. Es realitza una quantificació de la memòria i el temps de CPU necessaris en funció de les dimensions del problema (nombre de nusos de la xarxa de discretització, nombre de variables transformades  $K_y$  i nombre d'elèctrodes de corrent).

El procés complet de modelització comporta les següents fases:

I- Definició del model: Distribució de la conductivitat:  $\sigma(\underline{x})$ .

Distribució de les fonts:  $q(\underline{x})$ .

Condicions de contorn a imposar.



- II- Discretització: Definició dels nusos i dels elements finits.
- III- Resolució de l'equació diferencial via MEF: Càlcul del potencial transformat  $\tilde{V}$ .
- IV- Càlcul del potencial  $V$ .
- V- Càlcul de la resistivitat aparent  $\rho_a$ .

Hem escrit un paquet de programes en Fortran 77 per tal de realitzar cada una d'aquestes parts del procés, encaixats tal i com es presenta en la figura 3.1. Descriurem amb més detall el programa principal (GPEF.FORTRAN) que resol l'equació diferencial del potencial tridimensional pel mètode dels elements finits. El cas del problema bidimensional (potencial bidimensional) es considera com un cas particular del general (equació de Helmholtz) amb un nombre d'ona  $K_y$  nul i les corresponents condicions de contorn. En aquest cas el pas IV queda eliminat.

### 3.2 IMPLEMENTACIÓ DE L'ALGORISME.

La figura 3.2 presenta el diagrama del programa principal que comentem a continuació.

#### ENTRADES.

Les entrades vénen donades pels quatre fitxers següents:

GPEF.DADES: Informació general de les dimensions del problema a partir de la qual es realitzarà la partició de la memòria:

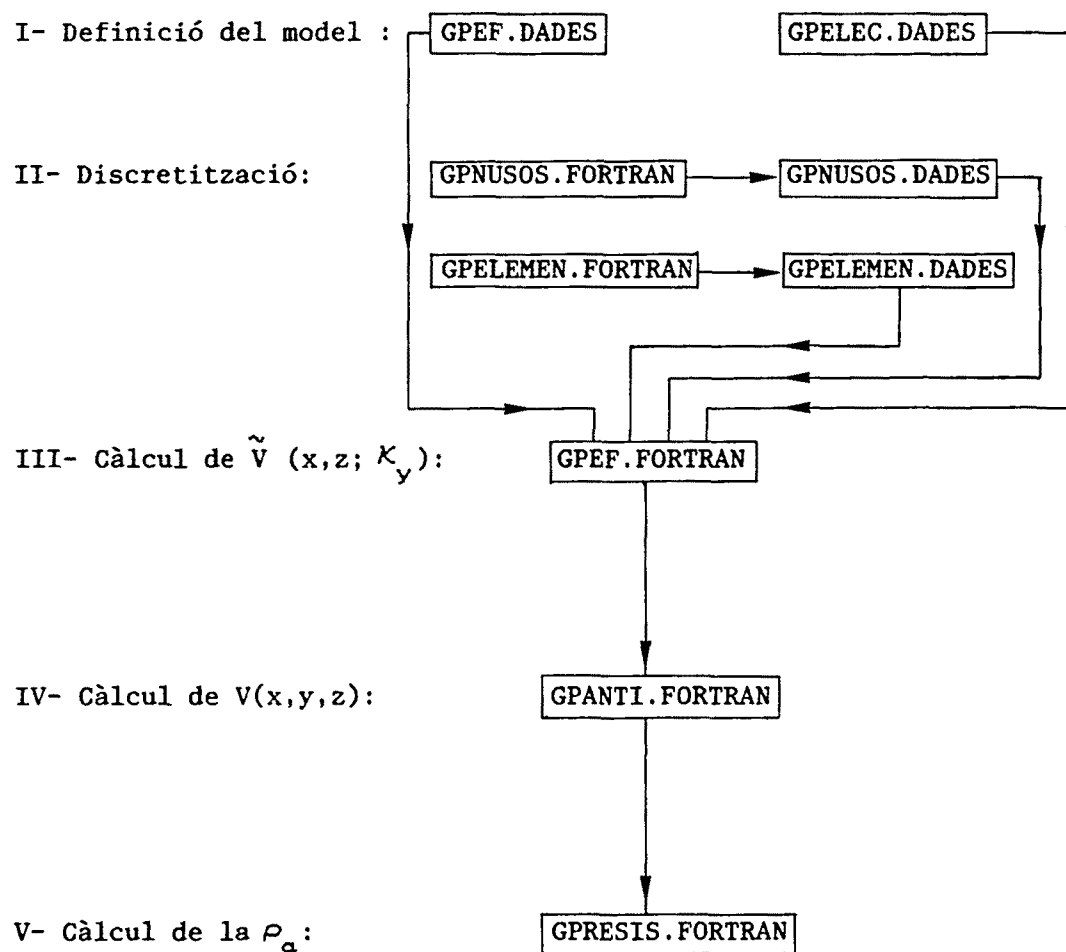


Figura 3.1. Diagrama del procés de modelització junt amb els programes corresponents.

nombre de nusos, nombre d'elements, semi-ample de banda, nombre de materials i els valors de les seves resistivitats, nombre de posicions d'elèctrodes i nombre de  $K_y$ 's i els seus valors.

GPUSOS.DADES. Xarxa de discretització : Coordenades de cada nus. Pels nusos de la frontera cal indicar el tipus de condició de contorn a imposar.

GPELEMEN.DADES. Elements amb indicació de les connexions i del tipus de material.

GPELEC.DADES. Posicions dels elèctrodes i valor de la intensitat del corrent que hi circula.

ALGORISME.

La implementació de l'algorisme es realitza amb les següents set parts: (assenyalades en la figura 3.2)

1- Construcció de les matrius elementals de conductivitat

( $A^e$ ) i de la matriu ( $C^e$ ).

Segons les expressions: (secció 2.3)

$$A_{ij}^e = \frac{\sigma^e}{4\Omega_e} (b_i b_j + c_i c_j)$$

$$C_{ij}^e = \frac{1}{12} K_y^2 \sigma^e \Omega_e (1 + \delta_{ij})$$

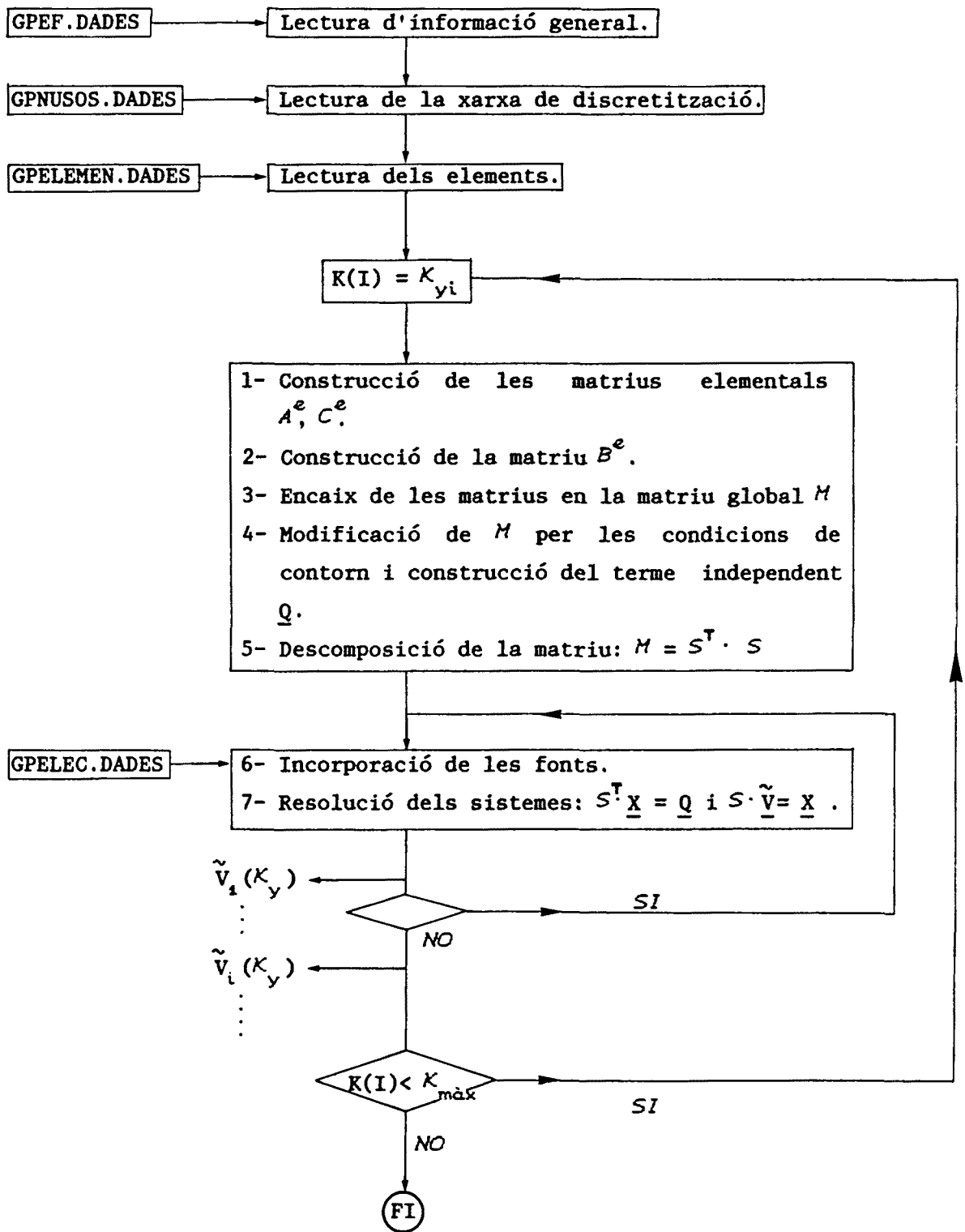


Figura 3.2 Esquema del programa GPEF.

Gràcies a la repetibilitat dels elements fem un bucle per a tots els elements. Si, per raons de comoditat, s'han construït elements rectangulars, el programa realitza una partició d'aquest en dos triangulars d'igual resistivitat.

## 2- Construcció de la matriu elemental de contorn $B^e$ .

Pels elements que contenen nusos en la frontera on cal imposar la condició mixta, es calcula la matriu  $B^e$  segons l'expressió: (secció 2.3)

$$B_{ij}^e = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, z) \notin \Gamma \\ \frac{1}{6} \beta^e L_e (1 + \delta_{ij}) & \text{si } (x, z) \in \Gamma \end{cases}$$

La funció  $\beta$  venia donada per: (secció 2.5)

$$\beta(\underline{x}; K_y) = \sigma(\underline{x}) \cos \vartheta \frac{\mathcal{K}_1(r_f \cdot K_y)}{\mathcal{K}_0(r_f \cdot K_y)} K_y$$

La funció  $\beta$  la suposem constant dins de cada element calculant l'angle  $\vartheta$  just en el centre de  $\Gamma_e$ . La distància d'aquest punt (centre de  $\Gamma_e$ ) a l'elèctrode ( $r_f$ ) l'aproximem per la distància al centre de la frontera que representa la superfície del terra ( $r_e$ ). (figura 3.3)

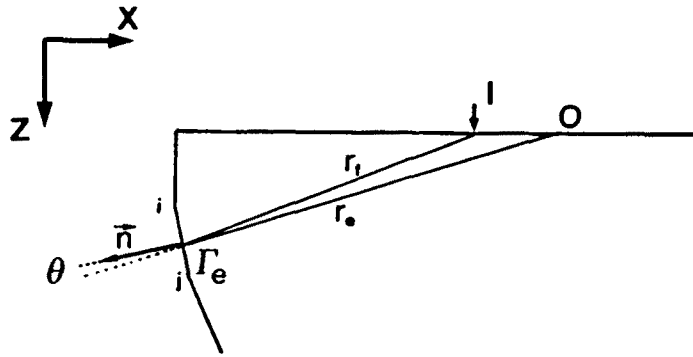


Figura 3.3. Èsquema de l'aproximació realitzada en les funcions  $\alpha$  i  $\beta$ .

Operant, tenint en compte aquesta aproximació, s'obté:

$$\beta^e = \sigma^e \frac{|(x_i + x_j)(z_j - z_i) - (x_j - x_i)(z_i + z_j)|}{2 r_e L_e} \frac{\mathcal{K}_1(r_e \cdot \mathcal{K}_y)}{\mathcal{K}_0(r_e \cdot \mathcal{K}_y)} \mathcal{K}_y$$

Pel cas del potencial bidimensional, amb la funció  $\alpha(\underline{x})$  es procedeix de manera semblant, i s'obté:

$$\alpha^e = \sigma^e \frac{|(x_i + x_j)(z_j - z_i) - (x_j - x_i)(z_i + z_j)|}{2 r_e^2 L_e}$$

Gràcies a aquesta aproximació, la condició de contorn mixta no introdueix cap dependència de la matriu del sistema amb les fonts i podrem realitzar un important estalvi de temps

d'execució al considerar diferents posicions dels elèctrodes. S'han realitzat càlculs estudiant l'efecte d'aquesta aproximació i l'error que introdueix és totalment despreciable i només afecta als nusos molt pròxims a la frontera. Per tal de calcular les funcions de Bessel modificades d'ordre zero i u ( $\mathcal{K}_0$  i  $\mathcal{K}_1$ ) s'accedeix a la biblioteca NAG.

### 3- Encaix de les matrius elementals en la matriu global $M$ .

Recordem que  $M$  estava donada per:

$$M = A + B + C, \text{ on: } A = \sum_e A^e, B = \sum_e B^e, C = \sum_e C^e.$$

Les matrius  $B$  i  $C$  les prenem amb esquema concentrat. Aquest recurs és força utilitzat pel MEF en enginyeria i consisteix en sumar tots els termes de la matriu a la seva diagonal. D'aquesta manera les matrius elementals  $B^e$  i  $C^e$  prenen la forma:

$$B_{ij}^e = \frac{1}{2} \beta^e L_e \delta_{ij}$$

$$C_{ij}^e = \frac{1}{3} \kappa_y^2 \sigma^e \Omega_e \delta_{ij}$$

Tot i que existeixen justificacions teòriques (Zienkiewicz, 1981) en base a realitzar un canvi de les funcions de forma per aquestes matrius prenent una base ortogonal, la utilització de l'esquema concentrat és purament una estratègia

que, en determinats casos, pot estalviar memòria i accelerar el procés de càlcul, però sobre tot dóna estabilitat. És per aquest últim motiu que l'hem considerat útil pel nostre problema.

En les matrius de contorn (matrius  $B$  i  $D$ ) l'efecte que produeix l'esquema concentrat és inapreciable perquè els únics elements d'aquestes matrius diferents de zero són els elements  $b_{ij}$  corresponents als nusos de la superfície  $\Gamma_\infty$  connectats entre si.

En canvi, per la matriu associada al nombre d'ona (matriu  $C$ ) l'efecte pot ser important. Recordem que cal calcular de nou aquesta matriu per cada  $K_y$ . Per  $K_y$  petites aquesta matriu té molt poc pes i l'esquema concentrat no influirà en el resultat final. Per  $K_y$  grans el potencial  $\tilde{V}$  es fa molt petit i poden sorgir inestabilitats que desapareixen amb l'esquema concentrat ja que el seu efecte principal és esmorteir el decreixement de  $\tilde{V}$ .

A la figura 3.4 mostrem l'efecte de l'esquema concentrat sobre l'espectre del potencial per un medi homogeni de resistivitat  $\rho = 1 \Omega m$ , per un punt situat a 7m de l'elèctrode ( $r_f = 7m$ ). La intensitat del corrent que circula per l'elèctrode és d'1A. Observem com per valors de  $K_y$  petits es presenta una coincidència excel·lent entre l'esquema concentrat i l'espectre analític. Però, a mesura que  $K_y$  augmenta comença a



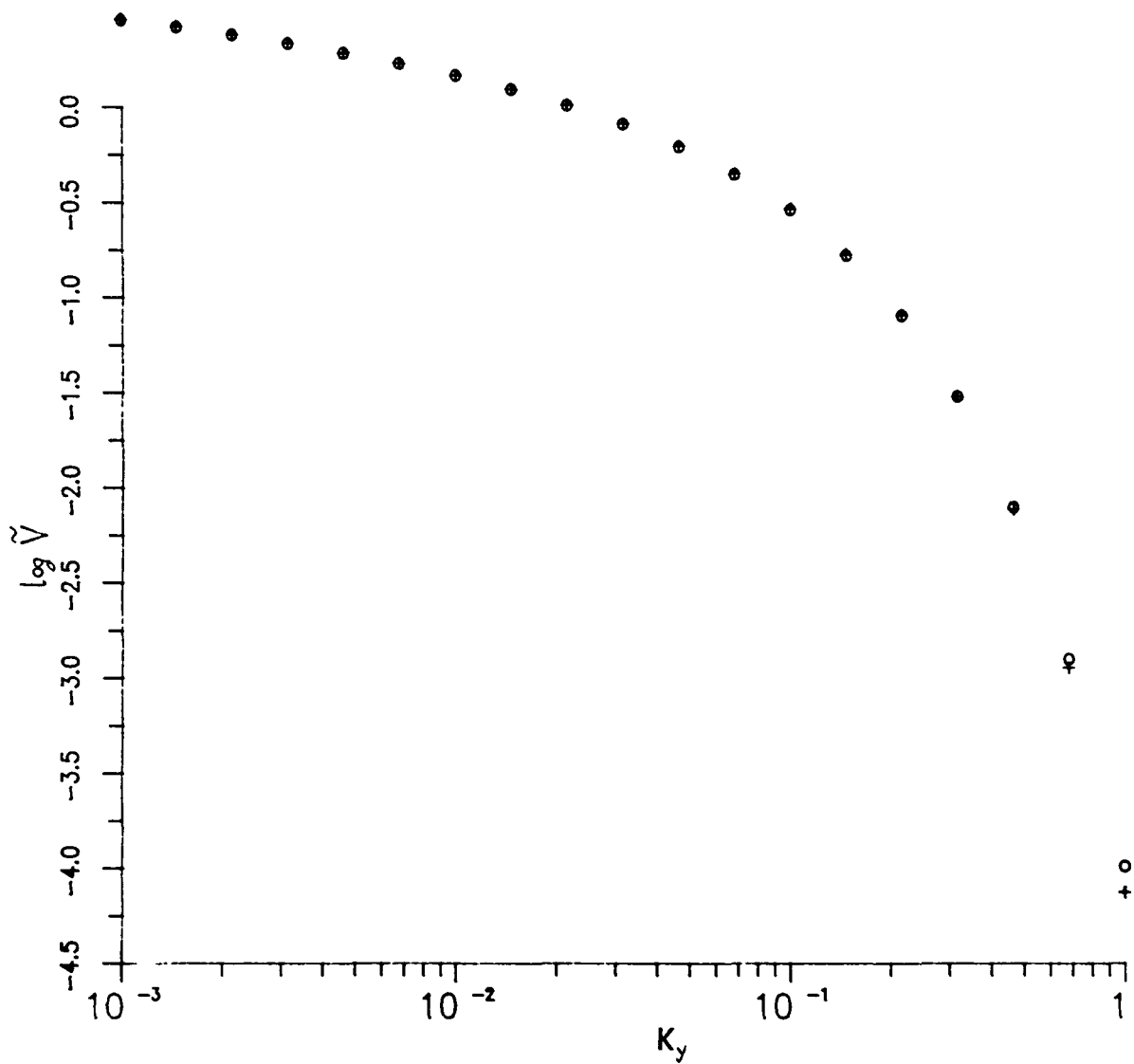


Figura 3.4. Efecte del esquema concentrat.  
 Comparació entre l'espectre del potencial  
 analític (+) i el numèric (o).

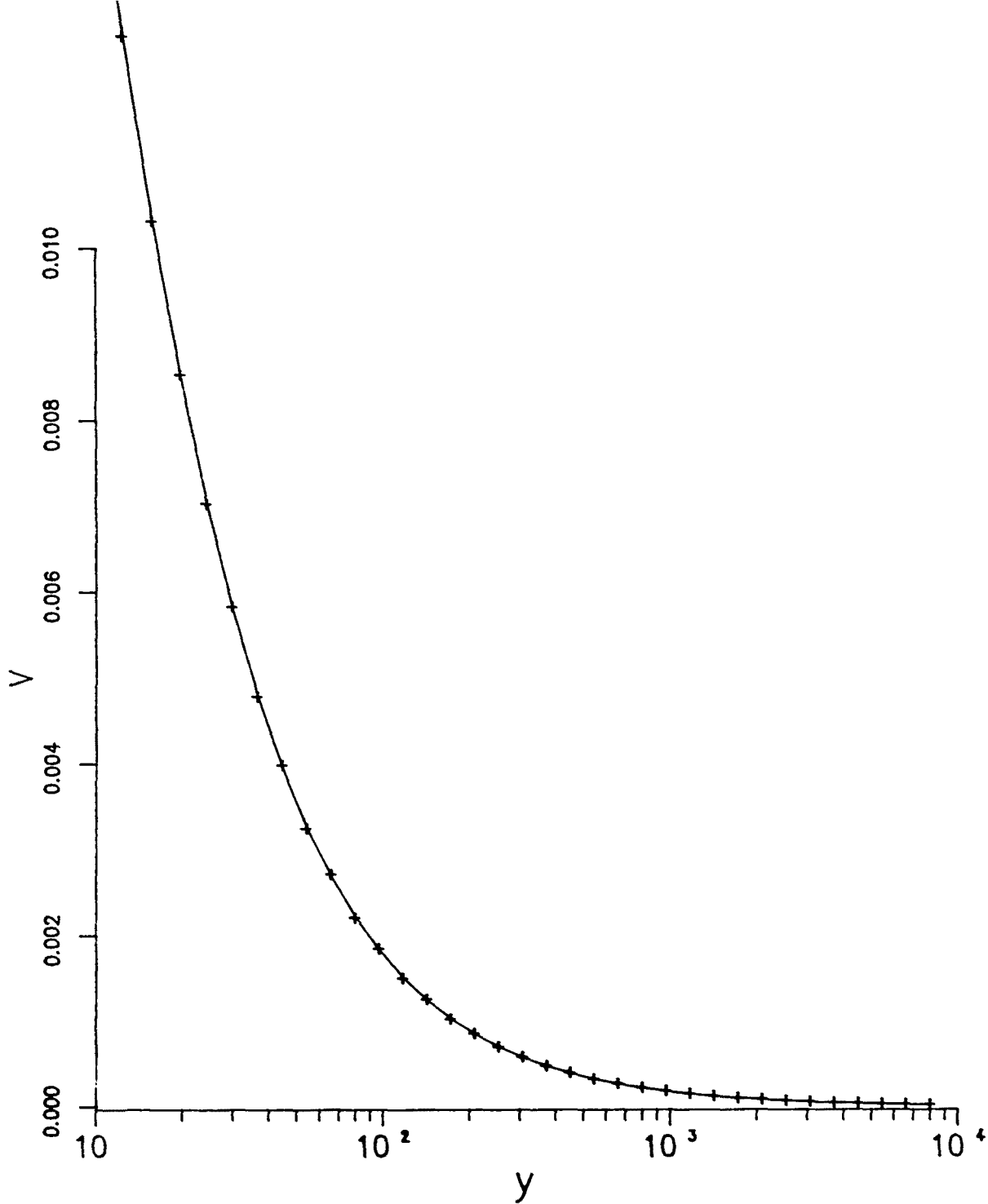


Figura 3.5. Comparació del potencial analític ( — ) i numèric ( + ).

mostrar-se la discrepància, (el valor de transició de  $K_y$  és de l'ordre de 0.1 o 1). La discrepància és més important per punts més propers a l'elèctrode; però són els punts on més interessa l'esquema concentrat, altrament comencen les inestabilitats. És evident, doncs, que l'esquema concentrat distorsiona l'espectre del potencial, però únicament en la zona final, on  $\tilde{V}$  és molt petit i tindrà poc pes en el càlcul de l'antitransformada. Es pot comprovar en la figura 3.5 com en el potencial final l'ajust amb el potencial analític és molt més satisfactori que en l'espectre ( error màxim  $\approx 1\%$  ).

4- Modificació de la matriu  $M$  per les condicions de contorn de Dirichlet o de Neumann i construcció del terme independent.

Les condicions de Dirichlet suposen considerar  $\beta = \infty$ . Per evitar inestabilitats i mal condicionament de la matriu prendrem el següent camí estàndard.

Suposem que el que volem és fixar el potencial en el nus  $l$ :  $V_l = V_0$ . Podem modificar la fila  $l$  de manera que tots els elements d'aquesta siguin zero menys el de la columna  $l$  ( $M_{lj} = \delta_{lj} \forall j=1,N$ ) i, en el terme independent del sistema, imposar:  $Q_l = V_0$ . Aquesta estratègia fa perdre la simetria de la matriu, per tal de mantenir-la es modifica també la columna  $l$  de forma

que els elements siguin zero menys el de la fila  $l$  ( $M_{jl} = \delta_{jl}$ ,  $\forall j = 1, N$ ) corregint els termes independents  $Q_j$  de forma apropiada restant-li el terme  $M_{jl} V_o$  ( $\forall j \neq l$ ).

Les condicions de Neumann s'imposen directament sobre el terme independent:  $Q_l = Q_o$ , que equival a fer  $\beta=0$  en (2.14).

#### 5- Descomposició de la matriu $M$ .

Es realitza la descomposició  $M = S^T \cdot S$ , on  $S$  és una matriu triangular superior, mitjançant una subrutina de Cholesky estàndard. S'emmagatzema la matriu  $S$  en la memòria de  $M$ .

#### 6- Incorporació de les fonts.

Un cop llegida una configuració dels elèctrodes de corrent i el valor de la intensitat del corrent que hi circula ( $I_k$ ), es modifica el terme independent addicionat-li  $I_k/2$  (segons (2.17)),  $\forall k$ , on  $k$  són els nusos on estan situats els elèctrodes.

#### 7- Resolució dels sistemes: $S^T \cdot \underline{X} = \underline{Q}$ , i $S \cdot \underline{\tilde{V}} = \underline{X}$ .

Accedint a la mateixa subrutina de Cholesky es realitza la "back substitution".

Tal i com hem construït la matriu global  $M$  depèn únicament de

les característiques del medi i de les condicions de contorn, no de l'acció que hi fem en ell. Per tant, podem repetir els passos 6 i 7 per cada nova posició dels elèctrodes de corrent, sense necessitat de tornar a calcular i a descomposar la matriu  $M$ . Hem comprovat que aquesta forma de procedir suposa una important reducció de temps de execució. El temps de CPU de la "back substitution" és aproximadament un 6% del temps que necessita la descomposició.

Finalment, cal repetir tot el procés ( de 1- a 7- ) per cada nombre d'ona  $K_y$  fins al valor màxim  $K_{m\grave{a}x}$ .

SORTIDES.

Les sortides corresponen a una col·lecció de fitxers, un per cada configuració dels elèctrodes, amb el potencial transformat  $\tilde{V}$  pel conjunt dels  $K_y$  considerats.

Aquests fitxers seran l'entrada del programa GPANTI.FORTRAN que realitza la interpolació i calcula l'antitransformada. Finalment es calcula la  $\rho_a$  amb el programa GPRESIS.FORTRAN adaptat al dispositiu electròdic considerat (figura 3.1).

### 3.3. NECESSITATS INFORMÀTIQUES.

Donat que la modelització és un problema de grans dimensions, involucra molts recursos informàtics: temps de CPU i memòria. És, per tant, necessari conèixer bé i preveure aquests paràmetres. Evidentment és el programa principal GPEF el que demana més temps de càlcul i més memòria. Per aquests motius treballa amb màquina batch, mentre que els altres programes (figura 3.1.) treballen en interactiu per comoditat i per tal de poder controlar les solucions.

#### Memòria.

El programa principal GPEF treballa amb memòria dinàmica per obtenir major aprofitament d'aquesta. La magnitud de la memòria necessària és proporcional a les dimensions de la xarxa de discretització, per tant, de les dimensions de la matriu global  $M$ . Tenint en compte el conjunt del programa podem donar com a referència la següent relació: Memòria =  $N \times (N_{\text{banda}} + 12)$ , on  $N$  és el nombre de nusos de la xarxa de discretització i  $N_{\text{banda}}$  el semi-ample de banda de la matriu  $M$ . A títol d'exemple, per un problema típic de 2400 nusos i semi-ample de banda de 40, la memòria necessària és aproximadament 1Mb si es treballa amb doble precisió.

### Temps d'execució.

El temps de CPU necessari depèn fonamentalment dels següents paràmetres: nombre de nusos (N), nombre de variables transformades  $K_y$  (NK) i nombre de configuracions d'elèctrodes (NE).

La part de programa que consumeix més temps correspon a la resolució del sistema d'equacions i, dins d'aquesta part, la que realitza la factorització de la matriu. Evidentment, el temps emprat per la descomposició de la matriu depèn de les dimensions de la matriu del sistema i, per tant, del nombre de nusos de la xarxa. Per una dimensió determinada, el temps necessari per cada "back substitution" (segona part de la resolució del sistema) és aproximadament un 6% del temps de la descomposició, però cal repetir-la per cada posició de l'elèctrode. Per últim, recordem que per calcular el potencial transformat cal repetir tot el procés per diferents valors del nombre d'ona  $K_y$ .

En la taula 3.1. presentem els temps en funció d'aquests paràmetres. Els temps de CPU corresponen a l'ordinador IBM 3090 de la Universitat de Barcelona amb el qual s'han efectuat part dels càlculs dels models estudiats en el capítol d'aplicacions. L'altra part dels càlculs es van efectuar amb l'ordinador IBM 3083 que suposava un cost de CPU aproximadament tres o quatre vegades superior.

a)

N	NK	NE	T
888	18	1	14
984	18	1	16
1258	18	1	36
2618	18	1	76

b)

NE	NK	N	T
1	18	2618	76
5	18	2618	100
8	18	2618	148
18	18	2618	176

c)

NK	NE	N	T
1	5	2618	6
8	5	2618	48
18	5	2618	100

*Taula 3.1 Temps total ( T en segons de CPU ).*

*a) En funció del nombre de nusos ( N ).*

*b) En funció del nombre de paràmetres  $K_y$  ( NK ).*

*c) En funció del nombre de posicions de l'elèctrode ( NE ).*





## Capítol 4. ANÀLISI DELS ERRORS I CONTROL DE LES SOLUCIONS.

### 4.1. INTRODUCCIÓ.

Els algorismes de modelització es basen en mètodes numèrics que, per construcció, ens donen solucions aproximades. Unicament podem conèixer l'error comès si comparem la solució numèrica amb la solució analítica. Evidentment no és aquest el cas de la modelització on l'objectiu és precisament obtenir la solució per models dels quals no coneixem la solució analítica. Com més augmenta el grau de complexitat del model, més difícil és controlar la solució.

El criteri per aquest control és la convergència i l'estabilitat. La solució ha de ser convergent en el sentit que ho són els propis mètodes numèrics utilitzats. La solució ha de ser estable en front petites variacions de les condicions numèriques (xarxa de discretització, distància de la frontera, etc.) i ha de ser estable també en el sentit que ho és el problema directe en prospecció elèctrica: petites variacions dels paràmetres físics ( resistivitats ) o geomètrics produeixen petites variacions en la solució.

L'objecte d'aquest capítol és estudiar les principals fonts d'errors, el comportament d'aquests errors i, finalment, obtenir criteris o recomanacions per tal de controlar la bondat de les solucions.

Per aquest estudi s'ha realitzat una separació de les fonts d'error. Les principals fonts d'error les tenim en el càlcul del potencial transformat  $\tilde{V}$  via elements finits (errors deguts a la discretització del medi i errors d'arrodoniment) i en el càlcul del potencial antitransformat (errors en la interpolació de l'espectre del potencial).

Pel control dels errors de discretització s'han realitzat diferents proves. Aquestes han consistit amb: Estudi de la influència de les diferents condicions de contorn, comparació de solucions obtingudes amb diferents xarxes de discretització (diferent densitat del mallat), estudi de la influència de la distancia on es situen les fronteres i estudi de l'evolució de l'error en els punts pròxims als elèctrodes de corrent.

Tots aquests efectes s'han estudiat tant en models que tenen solució analítica com amb models més complexes. En particular en els primers s'ha pogut comparar la solució numèrica amb la corresponent solució analítica.

Un altre control ha estat la comprovació del principi de reciprocitat. Efectivament per qualsevol model, una garantia de la bona elecció de la xarxa és que la solució obtinguda per elements finits no varii al invertir la posició dels elèctrodes del corrent amb els de potencial.

Els errors en el càlcul de l'antitransformada del potencial és convenien determinar-los sense que estiguin enmascarats per l'error propi dels elements finits (discretització). Per tant, pel control d'aquests errors s'han realitzat comparacions tant sols amb potencials analítics transformats.

De tot aquest estudi es conclou amb uns criteris de selecció de la xarxa òptima i dels nombres d'ona per la interpolació del potencial transformat.

Abordem en primer lloc els errors provocats en el càlcul del potencial antitransformat, i els errors de discretització els tractarem en la secció 4.3.

#### 4.2. CÀLCUL DE L'ANTITRANSFORMADA.

Com s'ha vist en el capítol 2, l'algorisme construït ens permet trobar la solució de l'equació diferencial pel potencial transformat  $\tilde{V}(x,z)$  per cada nombre d'ona  $K_y$  considerat. Una vegada obtingut  $\tilde{V}$  s'ha de calcular l'antitransformada per obtenir el potencial  $V(x,y,z)$ . S'ha estudiat la forma dels espectres del  $\tilde{V}$  per tal de trobar la manera operativa i suficientment aproximada de calcular el potencial antitransformat  $V(x,y,z)$ . Donades les dimensions del problema, s'ha d'evitar haver de resoldre masses vegades l'equació diferencial per elements finits. Del estudi realitzat conclouïem que la millor manera de procedir era la següent: Calcular  $\tilde{V}$  per un conjunt òptim de valors del paràmetre  $K_y$ , seguidament realitzar una interpolació per obtenir tot l'espectre del potencial (des de  $K_y = 0$  fins a  $K_y = \infty$ ) i, finalment, calcular analíticament la integral (2.13):

$$V(x,y,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}(x,z;K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y$$

S'ha realitzat un test de la bondat d'aquest procediment amb el potencial corresponent a un contacte vertical. D'aquesta forma podrem estudiar els errors deguts únicament a aquest procés, ja que

no partirem de valors de  $\tilde{V}$  calculats per elements finits, sinó de valors calculats analíticament (segons les expressions recollides en l'apèndix).

#### 4.2.1 Errors en la interpolació i selecció del conjunt òptim dels nombres d'ona.

Recordem que els dos aspectes claus en el procés proposat pel càlcul de l'antitransformada són el tipus d'interpolació a realitzar i la selecció del conjunt del nombres d'ona  $K_y$ .

A la vista del comportament del potencial transformat (figures 2.3 i 2.4, secció 2.3.2) hem cregut convenient realitzar una interpolació logarítmica per valors petits del producte ( $r_f \cdot K_y$ ) (on  $r_f$  correspon a la distància del punt on calculem el potencial a l'elèctrode) i una interpolació exponencial en la resta del espectre. El valor de  $r_f \cdot K_y$  per passar d'una interpolació a una altra depèn del model i cal determinar-lo per assaig, però per experiència podem recomanar  $r_f \cdot K_y \approx 0.5$ .

Per obtenir un ordre de magnitud del valor màxim de  $K_y$  a considerar, podem tenir en compte el valors que pren la funció de

Bessel  $\mathcal{K}_0(t)$  . Per exemple,  $\mathcal{K}_0(20) = 10^{-10}$  el qual és ja un valor insignificant. En el nostre cas serà  $t = r_f \cdot \mathcal{K}_y$  , de manera que donat el valor de  $r_f$  mínim ( distància de l'elèctrode al punt més pròxim on es vol calcular el potencial), podem estimar el valor de  $\mathcal{K}_y$  màxim.

#### 4.2.2 El potencial en $y = 0$ .

Si es vol determinar únicament el potencial en la direcció perpendicular a l'estructura ( "strike direction" ), l'antitransformada correspon a calcular directament l'àrea sota l'espectre. En aquest cas particular és suficient una interpolació exponencial amb pocs valors de  $\tilde{V}$  ja que no es mesura el potencial per  $r_f \rightarrow 0$ . Els valors òptims de  $\mathcal{K}_y$  per realitzar la interpolació exponencial varien en funció dels valors de  $r_f$  a considerar i poden ser suficients de cinc a set valors. Però per comoditat calculem els espectres del potencial per tots els valors de  $r_f$  alhora; aleshores és necessari augmentar el nombre de  $\mathcal{K}_y$ 's en funció de les dimensions del problema i del tipus de dispositiu. Per exemple, en el dispositiu Schlumberger la distància de la font al punt on es mesura el potencial ( $r_f$ ) pot variar fins a dos o tres ordres de magnitud, mentre que no acostuma a passar en un sondatge dipolar

axial. Per tant caldrà considerar més punts de l'espectre en el SEV amb dispositiu Schlumberger. Hem comprovat que un bon criteri és prendre aproximadament  $18 K_y$ 's (dos per cicle en escala logarítmica des d'aproximadament  $10^{-6}$  o  $10^{-5}$  fins  $10^{-3}$  ( $m^{-1}$ ) i després quatre punts per cicle) per valors de  $10 \leq r_f \leq 10^3$  (m). La contribució a l'antitransformada de la integral des de  $K_y = 0$  a  $K_y = 10^{-5}$  es pot menysprear (és del ordre de  $10^{-11}$ ).

S'ha observat que l'error en la interpolació es propaga molt poc al calcular la integral i que disminueix en augmentar  $r_f$ , sense presentar cap tipus d'oscil·lació.

#### 4.2.3. El potencial en $y \neq 0$ i en $x = 0$ .

El càlcul del potencial al llarg d'una direcció paral·lela a l'estructura és més complicat. D'entre les possibles direccions, normalment interessa aquella que conté al punt on hi ha l'elèctrode ( $r_f = 0$ ). Aquest punt correspon a una singularitat del potencial transformat, a igual que ho és  $K_y = 0$  (secció 2.4.2). Aquestes singularitats són però, integrables i d'aquesta forma està definida la transformada en cosinus. Per calcular el potencial transformat de forma numèrica hem optat per considerar no el valor  $r_f = 0$ , sino  $r_f = \varepsilon$ , on  $\varepsilon$  és un nombre molt petit. D'aquesta



manera:

$$V(0,y,z) \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}(\varepsilon, z; K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y$$

El criteri que hem utilitzat és  $\varepsilon \simeq y_0 / 20$ , on  $y_0$  és la coordenada  $y$  més petita de tots els punts on volem calcular el potencial. L'error comés disminueix en augmentar  $y$ , i és inferior al 0.4% per  $y_0 \geq 10$  per un  $\varepsilon = 0.5$ .

A la figura 4.1 presentem l'espectre del potencial corresponent a un model de contacte vertical de resistivitats  $\rho_1 = 1 \Omega\text{m}$  i  $\rho_2 = 1000 \Omega\text{m}$ . S'ha considerat una intensitat d' 1A i la distància de l'elèctrode de corrent al contacte és  $d = 26\text{m}$ . Correspon al  $\tilde{V}$  d'un punt pròxim a l'elèctrode ( $r_f = 0.5\text{m}$ ). La línia contínua representa el potencial  $\tilde{V}$  calculat per cada  $K_y$  i hem marcat amb estrelles els valors que prenem per fer la interpolació i l'antitransformada. Els errors de la interpolació són més petits de l'1% realitzant interpolació logarítmica per  $r_f \cdot K_y \leq 0.5$  i exponencial per  $r_f \cdot K_y \geq 0.5$ . Hem d'exigir errors molt petits en la interpolació perquè hem comprovat que aquests errors poden amplificar-se en el càlcul de l'antitransformada perquè apareixen oscil.lacions degut al terme del cosinus. Com s'observa en la figura 4.1, l'interval de selecció de les  $K_y$  és constant en escala

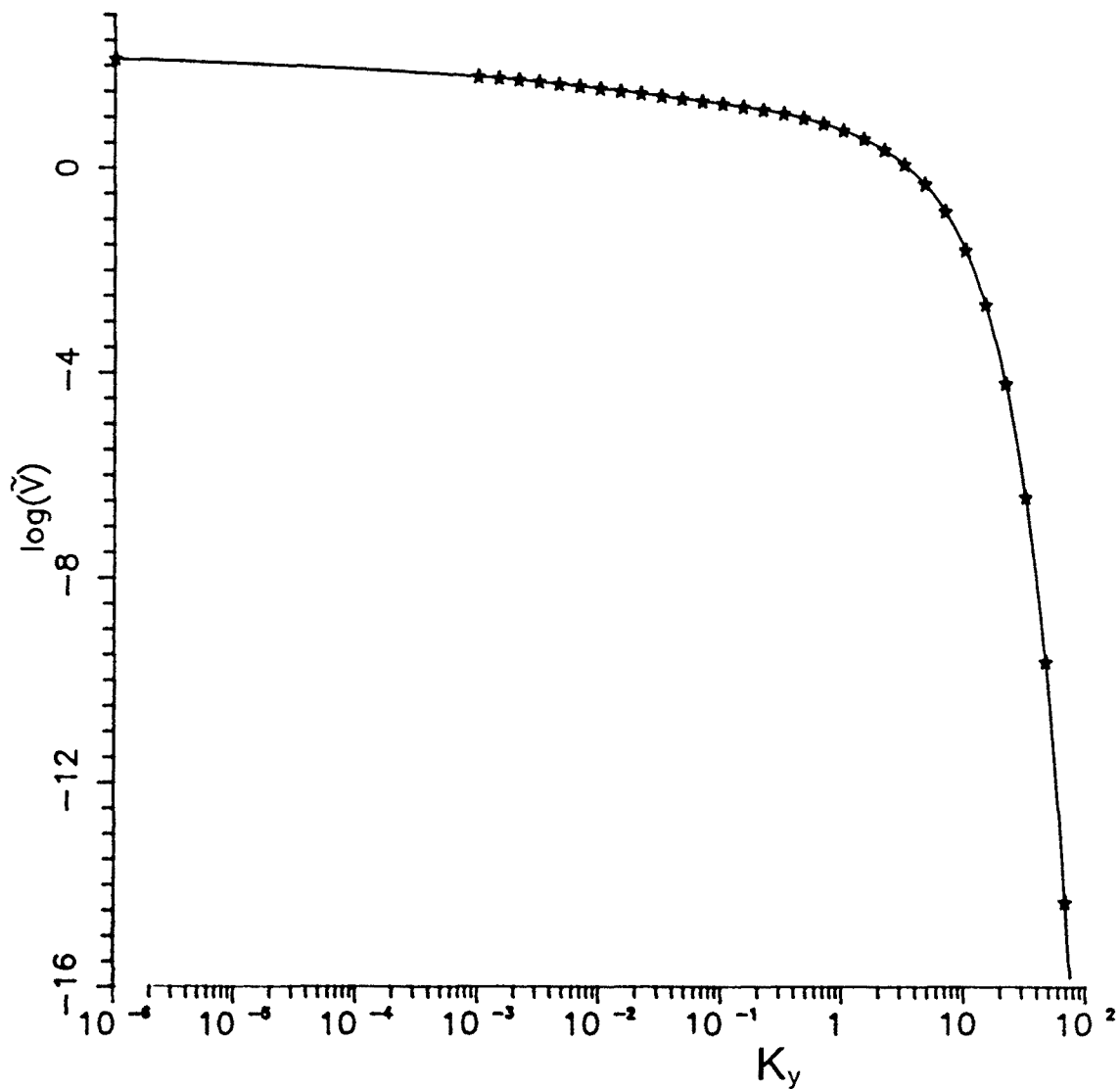


Figura 4.1. Potencial transformat per un contacte vertical.  
 Amb estrelles s'indica els nombres d'ona  
 seleccionats per realitzar la interpolació.

logarítmica (6 nombres d'ona per cicle) menys per  $K_y \leq 10^{-3}$  on és suficient un punt ( $K_y = 10^{-6}$  ó  $10^{-5}$ ), perquè és una zona on la funció logarítmica s'ajusta perfectament a  $\tilde{V}$  (error d'interpolació  $\approx 0.1\%$ ).

#### 4.2.4. Càlcul de la resistivitat aparent.

En el dispositiu Schlumberger els valors teòrics de la resistivitat aparent es determinen a partir del camp elèctric, és a dir, calculant la derivada del potencial.

En el cas de considerar el dispositiu en la direcció perpendicular al strike ( $y=0$ ) caldria calcular la derivada respecte a la coordenada  $x$ . S'hauria de calcular numèricament com una aproximació per diferències a partir dels valors obtinguts en els diferents punts de la xarxa. Aquest procediment és equivalent a determinar la  $\rho_a$  a partir de la seva definició general, mesurant diferències de potencials.

En el cas de situar-nos paral·lelament a la direcció de l'estructura, la derivada del potencial respecte  $y$  pot calcular-se

analíticament, operant directament sobre la antitransformada:

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_y \tilde{V}(x,z;K_y) \sin(K_y \cdot y) dK_y$$

Podem procedir de la mateixa manera que pel càlcul del potencial, interpolant  $\tilde{V}$  logarítmicament (per valors petits de  $(r_f \cdot K_y)$  i exponencialment per la resta de l'espectre. Aquesta interpolació permet la integració analítica, i s'obté: (veure detalls en l'apèndix).

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} \simeq & -\frac{2}{\pi} \frac{B_0}{y^2} \left[ (1+\ln(b_0 K_y)) \sin(K_y y) - \text{si}(K_y y) - y K_y \cos(K_y y) \ln(b_0 K_y) \right] \\ & - \sum_n \frac{2}{\pi} \frac{B_n}{y^2} \left[ (1+\ln(b_n K_y)) \sin(K_y \cdot y) - \text{si}(K_y \cdot y) - y K_y \cos(K_y \cdot y) \ln(b_n K_y) \right] \Bigg|_{K_n}^{K_{n+1}} \\ & + \sum_m \frac{2}{\pi} \left[ \left[ \frac{A_m e^{-a_m K_y}}{a^2 + y^2} \right] \left[ (a_m \sin(K_y y) - y \cos(K_y y)) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2 a y \cos(K_y \cdot y) + (a^2 - y^2) \sin(K_y \cdot y)}{a^2 + y^2} \right] \right] \Bigg|_{K_m}^{K_{m+1}} \end{aligned}$$

Els integrants que intervenen en el càlcul del potencial i de la derivada són diferents. En el primer cas, apareixia el potencial transformat multiplicat pel cosinus, mentre que en el cas de la derivada apareix el potencial transformat multiplicat per  $K_y$  i pel sinus. A la figura 4.2 presentem les corbes corresponents a  $\tilde{V}$  i a  $(K_y \cdot \tilde{V})$  per un model d'un contacte vertical de contrast de resistivitats 1/1000, a una distància  $d= 50\text{m}$  de l'elèctrode i per un punt situat a una distància  $x=0.5\text{m}$  de l'elèctrode. S'observa que la funció necessària per calcular el camp,  $(K_y \cdot \tilde{V})$ , té una caiguda més lenta que el potencial transformat i, per tant una freqüència de Nyquist més gran que la del potencial transformat. Per aquest motiu, és necessari prendre un interval més ampli i dens de  $K_y$ . Per un mateix conjunt de  $K_y$ , i per tant un mateix error d'interpolació, l'error en el potencial antitransformat és molt més petit que en el camp. A més a més, l'error final en la resistivitat aparent és més petit quan es calcula per diferències de potencial que quan es calcula a partir de l'expressió del camp elèctric. Per aquest motiu, les corbes teòriques pel cas del dispositiu paral·lel a "strike direction" les hem calculat mitjançant diferències de potencial.

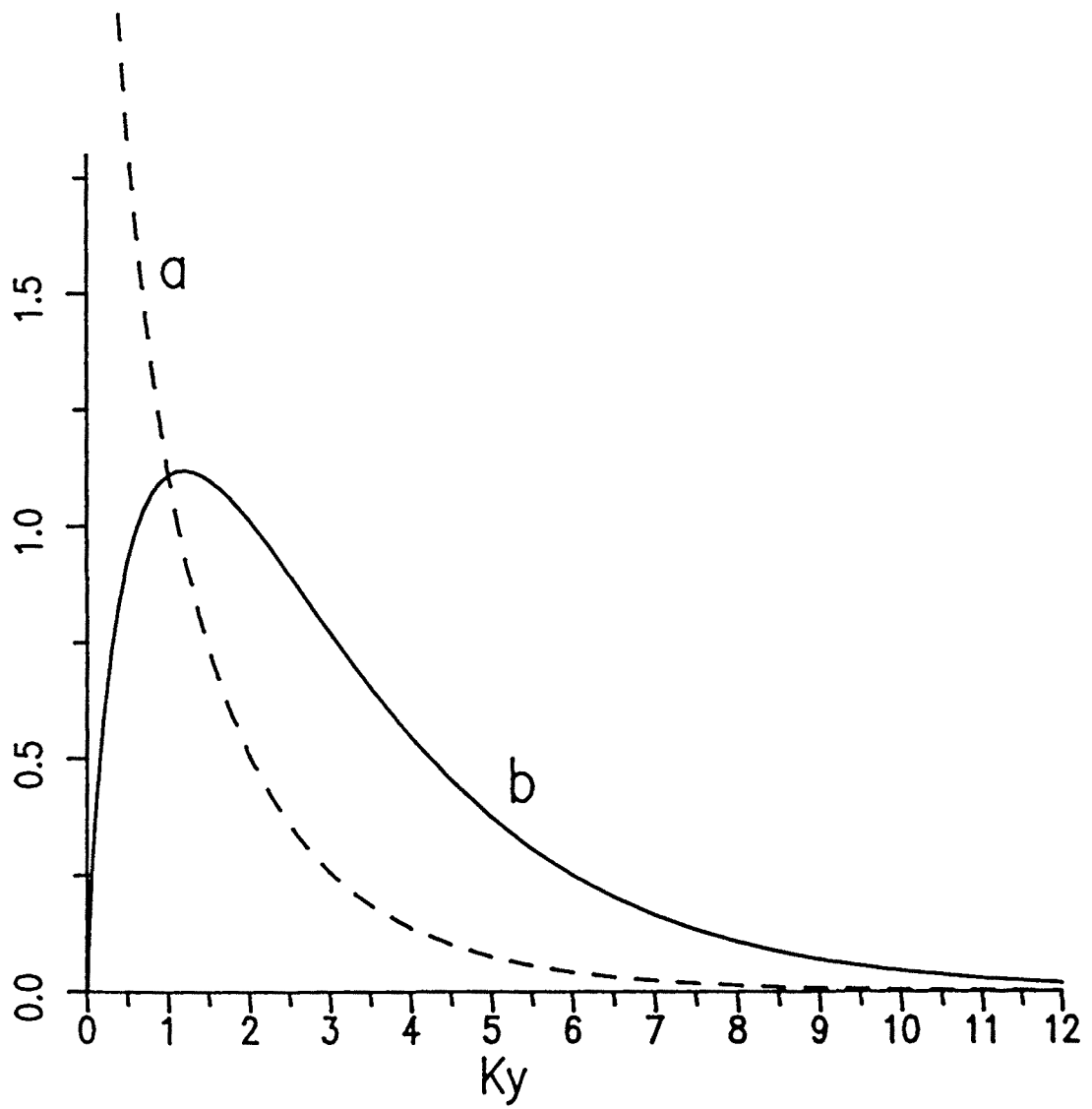


Figura 4.2. La corba a indica el comportament de  $\tilde{V}$  i la corba b el comportament de  $K_y \cdot \tilde{V}$ .

Utilitzant el principi de reciprocitat i aprofitant el fet que al llarg d'una direcció paral·lela a l'estructura el potencial només depèn de la distància a l'elèctrode:

$$\rho_a = \frac{2 K}{I} [V(\varepsilon, y_1, 0) - V(\varepsilon, y_2, 0)]$$

on  $y_1 = \sqrt{(AB/2 + MN/2)^2 - \varepsilon^2}$  ,  $y_2 = \sqrt{(AB/2 - MN/2)^2 - \varepsilon^2}$

i K és la constant del dispositiu Schlumberger. Per evitar la propagació dels errors d'arrodoniment, les diferències de potencial les calculem en punts que compleixen  $MN \approx AB/5$ .

En aquest apartat 4.2. hem trobat doncs una manera adequada de realitzar la interpolació de l'espectre del potencial. Obtenim uns errors finals, en la interpolació i en el potencial antitransformat, inferiors a l'1% amb un nombre reduït de  $K_y$  i amb uns criteris concrets de selecció d'aquestes en funció del potencial que és vol calcular. També s'ha donat una solució satisfactòria pel càlcul de la resistivitat aparent.

#### 4.3. ERRORS DE DISCRETITZACIÓ.

En l'aplicació del mètode dels elements finits hi han tres fonts principals d'error: l'error de discretització, l'error en la integració sobre els elements i l'error d'arrodoniment (Strang i Fix, 1973). En l'algorisme que hem construït no hem de considerar l'error en la integració, perquè les funcions de forma elegides (lineals) permeten realitzar la integració de forma analítica. En la secció 4.4 comentarem els errors d'arrodoniment i a continuació estudiarem els errors de discretització.

L'error de discretització és el més important en el mètode dels elements finits. Aquests errors són proporcionals a la mida característica dels elements ( $h$ ) elevada a una potència que depèn del grau del polinomi utilitzat com a funció de forma i de l'ordre dels operadors diferencials que actuen sobre aquests (Zienkiewicz, 1981). Pel nostre cas l'error de discretització serà :  $O(h^2)$ .

Per veure els efectes de la discretització, estudiem primer el grau de precisió obtinguda en models senzills que tenen solució analítica. D'aquesta manera obtenim un error de la solució numèrica que correspon a la diferència relativa, en tant per cent, entre aquesta i l'analítica. Aquests models s'han calculat amb xarxes i



elements regulars. El grau d'ajust de les solucions ens permetrà detectar les zones on l'error és més gran i també contrastar les diferents condicions de contorn.

#### Medi homogeni.

Hem considerat un medi homogeni de resistivitat  $\rho$ . Per aquest model, les condicions de Dirichlet inhomogènies són les condicions òptimes, ja que imposen el potencial exacte en els nusos de la frontera. Hem realitzat diferents proves tant amb elèctrodes lineals com elèctrodes puntuals i utilitzant xarxes molts senzilles, l'error relatiu màxim ha estat inferior a l'1.5% en tots els assaigs.

En la figura 4.3 presentem un exemple més interessant utilitzant un altre tipus de condició de contorn. Hem considerat un medi homogeni de resistivitat  $\rho=30 \Omega\text{m}$ ; aprofitant la simetria axial a l'entorn del punt on es troba l'elèctrode podem reduir a la meitat la xarxa de discretització i treballar amb el potencial bidimensional directament si procedim de la següent manera: L'elèctrode se situa en el vèrtex de la xarxa i tant en els nusos sota la seva vertical com en els nusos de la superfície del terra s' imposa la condició de Neumann homogènia. A la resta de la frontera hem imposat la condició mixta. En la figura 4.3 s'observa

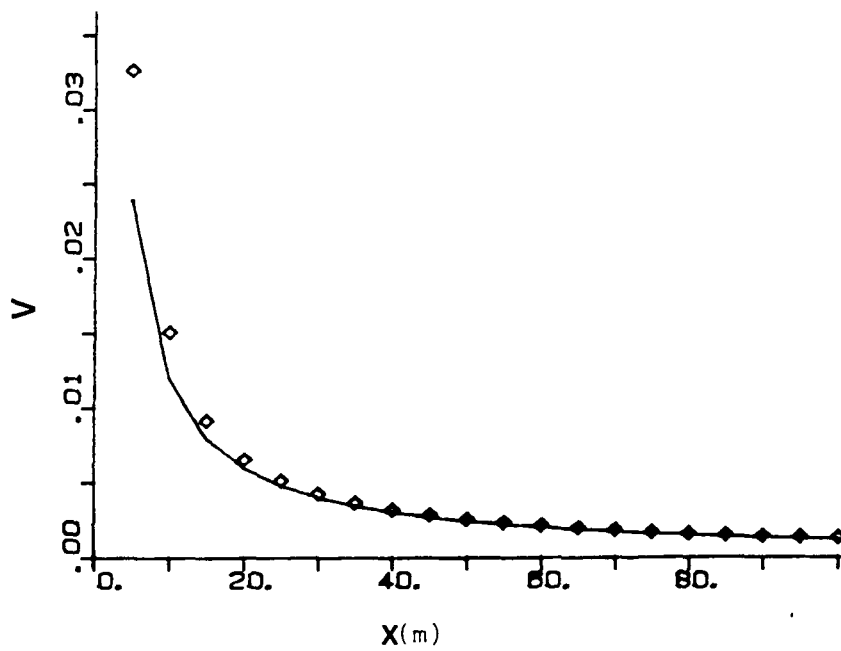


Figura 4.3. Comparació del potencial analític ( — ) i el numèric ( ◊ ) creat per un electrode situat en  $x = 0$  m sobre un medi homogeni.

que, menys en els punts a prop de l'elèctrode, hi ha un bon ajust entre la solució numèrica i l'analítica, (error inferior al 5%). La xarxa de discretització utilitzada per aquest exemples consta de 21x17 nusos, la mida dels elements és  $h = 5\text{m}$  i s'ha considerat una intensitat de 0.025 A.

#### Medi estratificat.

Un altre model de control utilitzat és el medi estratificat. A la figura 4.4 hem representat la corba de resistivitat aparent amb dispositiu gradient corresponent a un medi de dues capes de paràmetres:  $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$  i  $t_1 = 20\text{m}$ . La posició dels elèctrodes de corrent i la distància entre ells s'ha mantingut constant  $AB = 300\text{m}$ .

La línia contínua de la figura 4.4 correspon a la resistivitat aparent calculada analíticament. Les altres dues solucions corresponen a solucions numèriques obtingudes pel nostre algorisme però utilitzant la condició de contorn mixta (quadrats) i imposant una condició de Dirichlet (creus). Aquesta última condició ha consistit en imposar en els 20 primers metres el potencial corresponent a un medi homogeni de  $\rho = 200 \Omega\text{m}$  i en la resta el potencial corresponent a un altre medi homogeni de  $\rho = 500 \Omega\text{m}$ .

A la figura 4.4 observem que a prop dels elèctrodes les dues

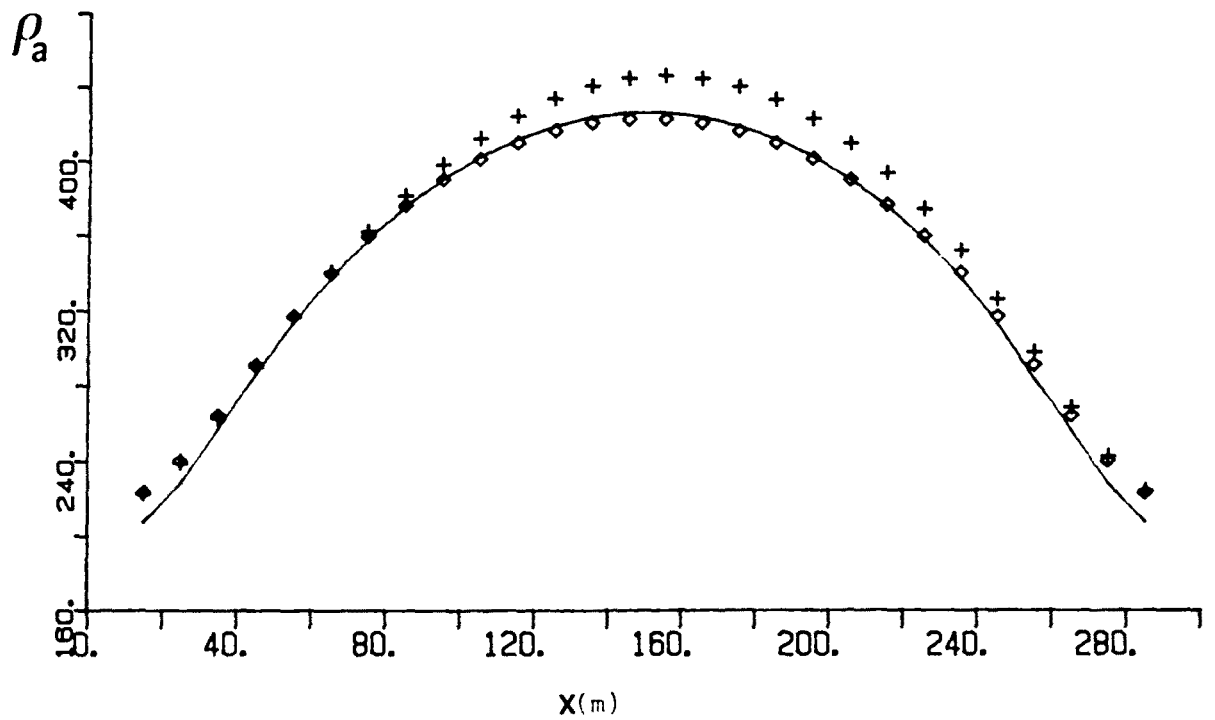


Figura 4.4. Comparació de les resistivitats aparents en un model de dues capes amb dos elèctrodes situats en  $x = 0$  i  $x = 300$  m utilitzant diferents condicions de contorn: Dirichlet inhomogènies (+) i mixtes (◊), amb la solució analítica (—).

solucions són equivalents i l'error és del 7%. En la zona central la solució que millor s'ajusta a l'analítica és la que utilitza les condicions mixtes, obtenim un error del 1%, mentre que amb les condicions de Dirichlet l'error és del 4%. Encara que en aquest últim cas la solució és també excel·lent, presenta l'inconvenient que cal calcular el valor del potencial transformat a la frontera per cada un dels valors de  $K_y$ . La xarxa de discretització utilitzada per aquest assaig consta de 49X26 nusos, la mida dels elements és 10x5m i la distància de l'elèctrode a la frontera és de 90m.

#### Contacte vertical.

Considerem el contacte vertical entre dos medis homogenis, de resistivitats  $\rho_1 = 10 \Omega\text{m}$  i  $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$ . Situem un elèctrode puntual en el medi 1 a una distància de 5m del contacte pel que circula un corrent d' 1A. Si utilitzem les condicions de Dirichlet corresponents al potencial analític del contacte vertical l'error màxim és del 2%, però si imposem condicions de Dirichlet semblants a l'exemple anterior (imposant en la frontera el potencial del medi homogeni corresponent) ens porta a uns errors excessius en el medi segon, on no hi ha l'elèctrode. La solució mixta representa el cas més realista.

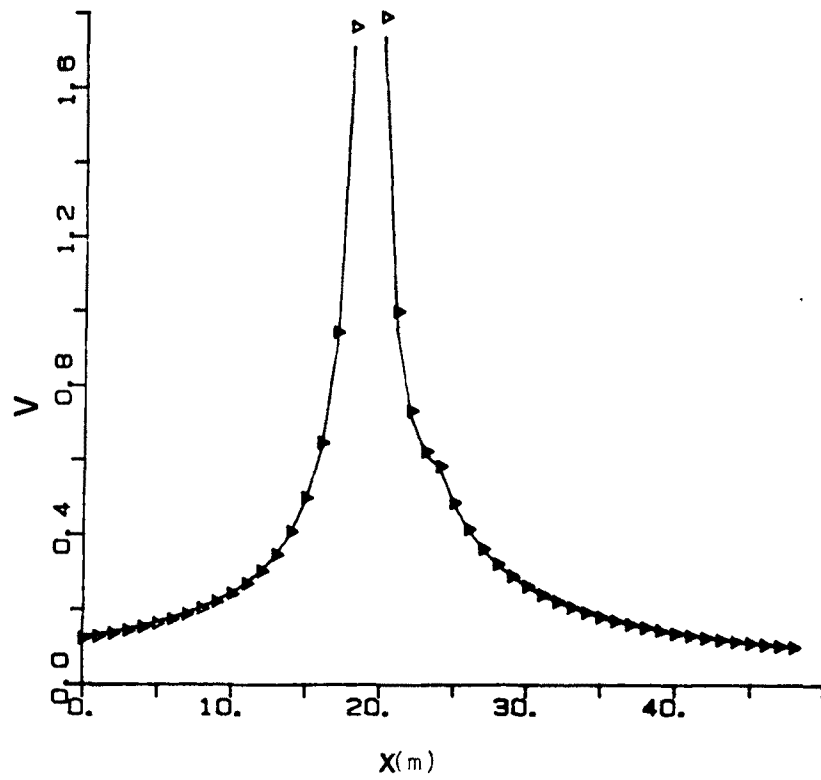


Figura 4.5. Comparació dels resultats analític ( — ) i numèric ( ▴ ) en un contacte vertical en  $x = 24$  m i l'elèctrode situat a  $x = 19$  m.

A la figura 4.5 presentem la solució numèrica obtinguda amb les condicions mixtes (triangles) i la solució analítica (línia contínua). L'error màxim és del 4%. La xarxa de discretització té 49x16 nusos amb elements de mida característica  $h=1m$ .

Aquests tres models senzills poden servir de control del procés ja que altres models poden considerar-se una combinació d'ells o, dit d'una altra manera, poden reduir-se a ells. Permeten controlar els efectes de la discretització, de la distància de la frontera i de la distància a l'elèctrode i deduir-ne els criteris per models pròxims a ells que no tenen solució analítica. Donada una xarxa, el medi estratificat permet provar l'adequació de la xarxa a les variacions verticals de la resistivitat i el contacte vertical respecte a les variacions horitzontals, així com els valors del contrast de resistivitats admissibles.

#### Efectes de les distàncies a l'elèctrode i a la frontera.

A la figura 4.6 es representa la corba de resistivitat aparent per dispositiu Schlumberger corresponent a un medi estratificat de tres capes amb resistivitats:  $\rho_1 = 1 \Omega_m$ ,  $\rho_2 = 100 \Omega_m$  i  $\rho_3 = 1 \Omega_m$  i

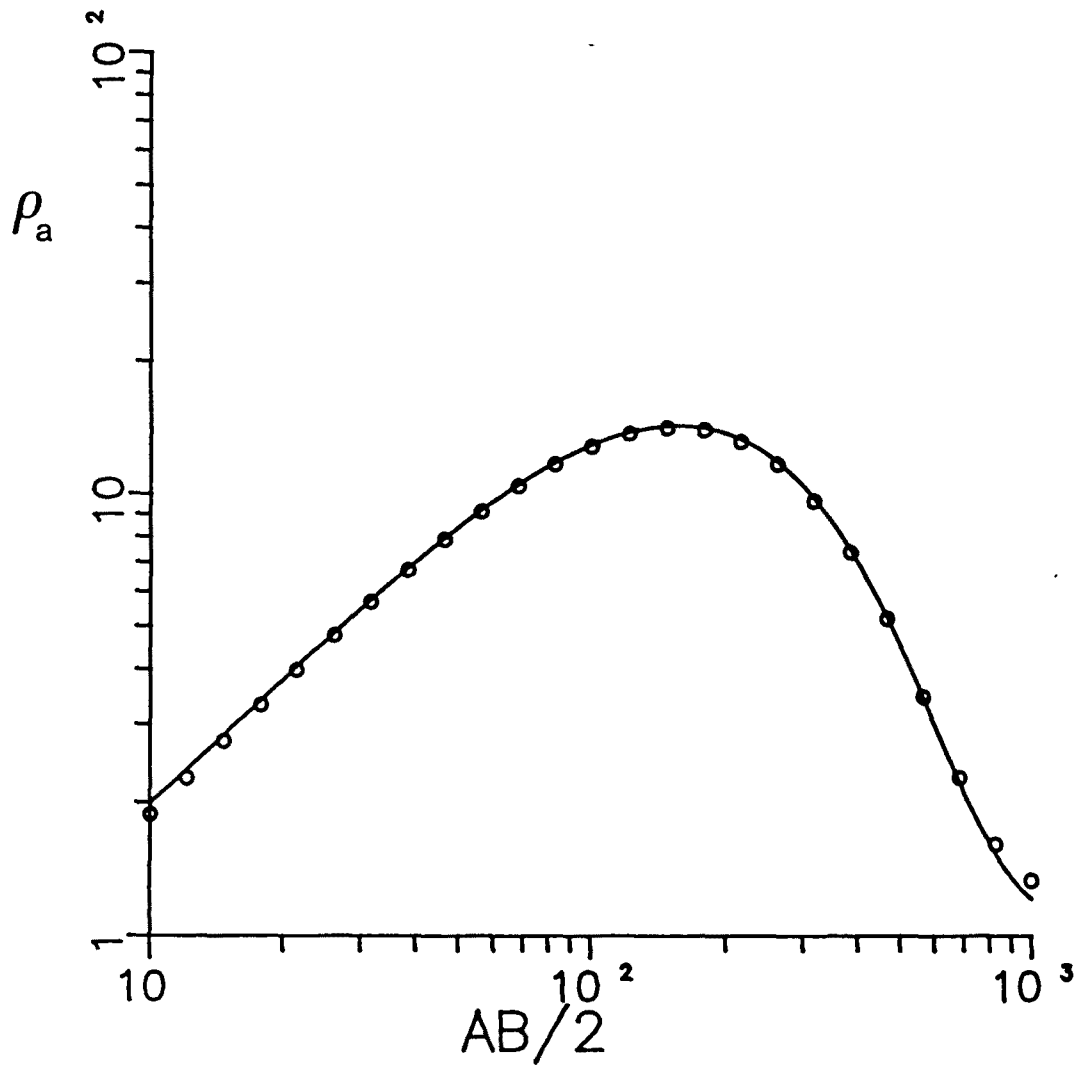


Figura 4.6. Comparació de la resistivitat aparent en un model de tres capes: Solució analítica (—) i solució numèrica (○).



gruixos  $t_1 = 5\text{m}$  i  $t_2 = 25\text{m}$ . En línia contínua representem la corba analítica i amb cercles la solució que hem obtingut numèricament.

Com es pot observar, l'ajust és molt bó menys en els punts extrems on apareix una petita discrepància. L'error en  $AB/2 \approx 10\text{m}$  és degut a la proximitat al clau de corrent (error de l'ordre del 5%) i sempre es manifesta amb el mateix signe. L'error en l'extrem dret  $AB/2 \approx 1000\text{m}$  (error de l'ordre del 9%) és degut al efecte de la frontera i si és positiu, com en aquest cas, indica que la frontera està massa pròxima.

#### Adequació de la malla al dispositiu electròdic.

El diseny de la xarxa de discretització no solament ha de tenir en compte el model, sino que també ha de tenir en compte el tipus de dispositiu per al que es vol modelitzar. Pel dispositiu gradient o per dipol-dipol, les xarxes poden ser bastant regulars amb una mida característica dels elements del ordre de  $1/4$  del tamany característic del dispositiu. Pel SEV amb dispositiu Schlumberger, es presenta un problemàtica diferent perquè les distàncies varien molt ràpidament, s'abarquen des de petites fins grans distàncies i calen xarxes amb molts nusos.

Considerem el medi estratificat de tres capes de resistivitats  $\rho_1 =$

2400  $\Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_3 = 1000 \Omega\text{m}$ , i de gruix  $t_1 = 30\text{m}$ ,  $t_2 = 230\text{m}$ . Es vol calcular la corba de resistivitat aparent per un SEV amb dispositiu Schlumberger des de  $AB/2 \approx 10\text{m}$  fins a un  $AB/2$  de 600m a 1000m. S'han construït dues xarxes:

Xarxa-1, formada per 181x32 nusos, aproximadament regular menys en la zona central on es mesura la diferència de potencial i a prop de les posicions dels elèctrodes de corrent on la discretització és més fina. La xarxa és simètrica i a mesura que ens apropem a la frontera els elements es van fent progressivament més grans. Les distàncies de les fronteres laterals són 100m del  $AB/2$  màxim i la frontera inferior està situada a una fondària de 750m.

Xarxa-2, formada per 71x34 nusos, simètrica i amb espaiat horitzontal logarítmic (12 punts per cicle) menys en la zona central que és regular i densa. Es calcula la resistivitat aparent utilitzant el principi de reciprocitat, situant dos elèctrodes en el centre amb  $MN = 6\text{m}$ . Les fronteres estant situades a  $AB/2 = 1000\text{m}$  i la frontera horitzontal a una fondària de 1200m.

A la figura 4.7 hem representat les corbes obtingudes per les dues xarxes diferents amb creus (xarxa-1) i amb cercles (xarxa-2) i la solució analítica (en línia contínua). L'ajust és excel·lent per les dues xarxes (errors inferiors al 1.7%).

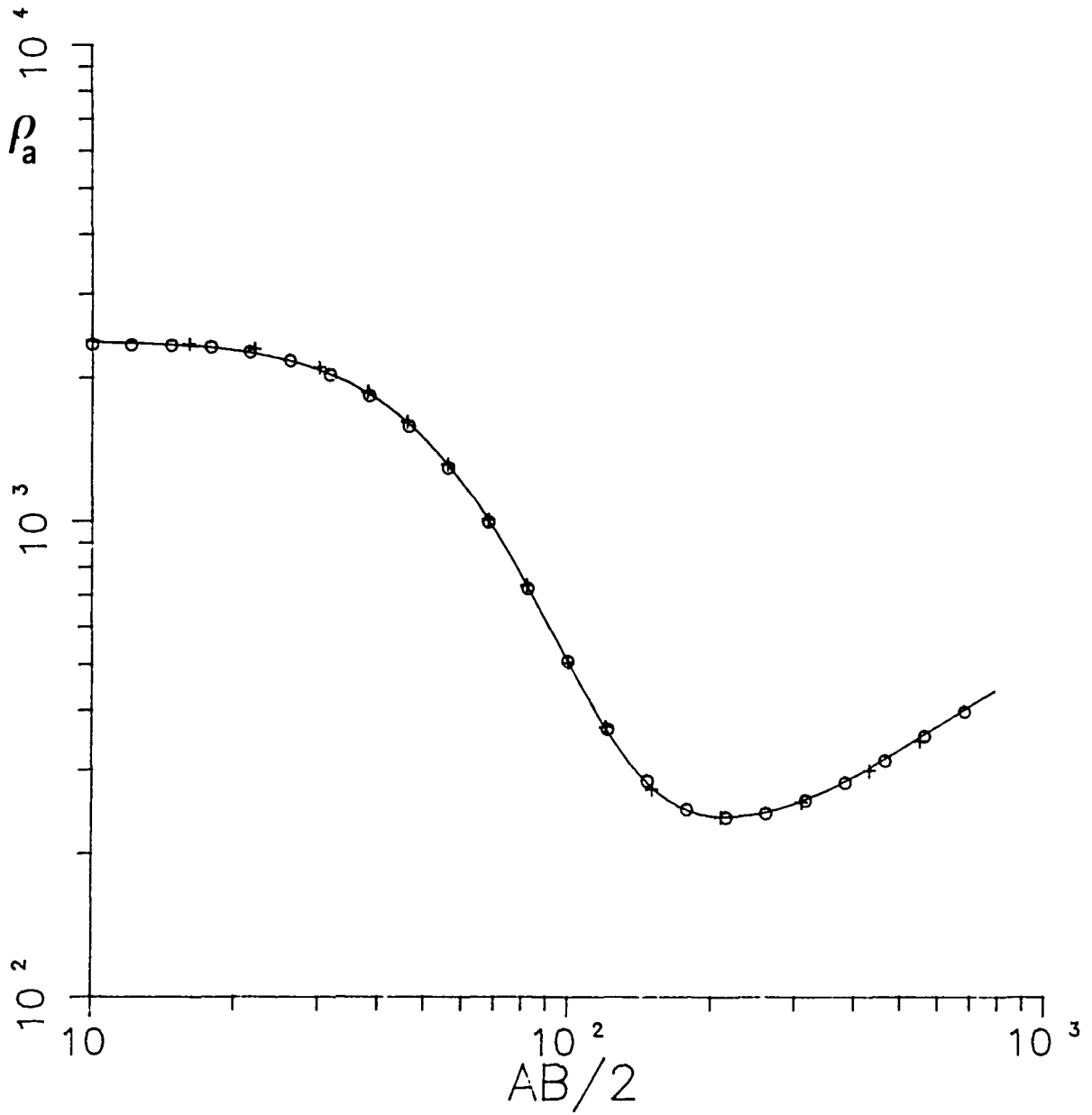


Figura 4.7. Comparació de la resistivitat aparent obtinguda per diferents condicions:  
 solució analítica (—)  
 solució amb xarxa-1 (+)  
 solució amb xarxa-2 (o)

Aquest comportament s'ha comprovat amb altres models i podem concluir doncs, que per economia de la solució és recomanable per modelització de SEV la utilització de xarxes amb espaiat logarítmic i no un espaiat regular.

#### Principi de reciprocitat.

Per tal de millorar la solució a prop dels elèctrodes, a prop de la frontera i en les zones de contrats de resistivitats, ens veiem obligats a utilitzar xarxes no regulars. A més, quan treballem amb dispositiu Schlumberger, ja hem vist anteriorment que és convenient utilitzar una xarxa amb espaiat logarítmic. La realització d'un test de comprovació del principi de reciprocitat en alguns punts de la xarxa ens pot servir d'un nou control de la independència de la solució amb la discretització.

Comentem tot seguit un exemple per il·lustrar aquest test. L'estructura que es vol modelitzar és un medi estratificat de tres capes amb un "horst" en el basament (figura 4.8). Els paràmetres del model són  $\rho_1 = 2400 \Omega \text{ m}$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega \text{ m}$ ,  $\rho_3 = 1000 \Omega \text{ m}$ ,  $t_1 = 30\text{m}$  i  $t_2 = 230\text{m}$ . Les dimensions del horst són: amplada  $a = 200\text{m}$  i alçada  $h = 210\text{m}$  situat a una distància  $d = 50\text{m}$  respecte el centre de la xarxa (0). La xarxa de discretització té uns 2400 nusos, és simètrica i, bàsicament, té un espaiat logarítmic amb 12 punts per cicle. En la

		$x_I(m)$					
		-250.	-82.5	-14.6	14.6	82.5	250
$x_V(m)$	-250.		0.37084	0.30644	0.28902	0.24922	
	-82.5	0.37084		1.2105	0.67045		0.20280
	-14.6	0.30644	1.2105			0.72759	0.24070
	14.6	0.28902	0.67047			1.3491	0.26912
	82.5	0.24922		0.72759	1.3491		0.41138
	250.		0.20280	0.24070	0.26912	0.41138	

Taula 4.1. Comprovació del principi de reciprocitat en la malla dissenyada pel model corresponent a un horst en el basament. La intensitat ha estat 1 A i el potencial està en V.

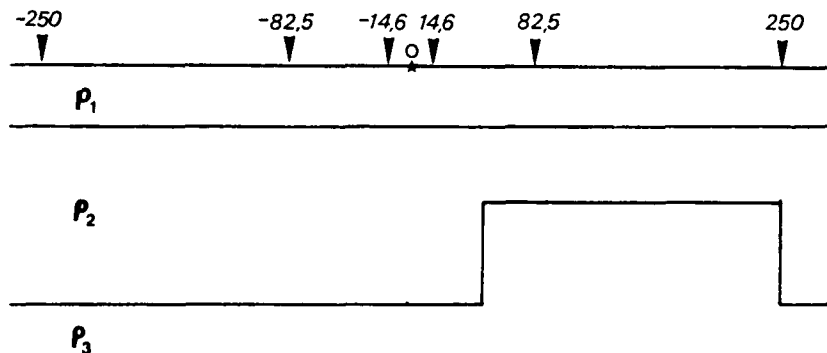


Figura 4.8. Esquema del model utilitzat per la comprovació principi de reciprocitat, on s'indiquen les coordenades emprades a la taula 4.1.

taula 4.1 presentem el valor del potencial en diferents punts de coordenades  $X_y$ , creat elèctrodes situats en diferents coordenades  $X_x$ , tal i com s'indica en la figura 4.8.

A la vista de les dades de la taula podem afirmar que el disseny de la xarxa és adequat pel model en qüestió i que es compleix el principi de reciprocitat perfectament.

En els models que presenten simetria, és també convenient comprovar que la solució numèrica en té. Per una xarxa determinada i un model concret, un cop s'ha comprovat el principi de reciprocitat i la simetria (si el problema en té) en alguns punts, podem simplificar la resolució. Efectivament la simetria ens estalvia calcular el potencial en la meitat dels punts i el principi de reciprocitat ens permet estalviar noves posicions dels elèctrodes.

#### 4.4. ERRORS D'ARRODONIMENT.

Tot procés numèric porta associat un error d'arrodoniment que no és fàcil determinar. Depenen tant de l'algorisme en si i de la manera com s'ha construït el programa, com de l'ordinador utilitzat per realitzar els càlculs. El comportament d'aquest error associat al MEF depèn fonamentalment del tamany dels elements (h) i de

l'ordre dels operadors diferencials que intervenen, no del grau del polinomi utilitzat com a funció de forma. Es proporcional a una potència negativa de  $h$ . Pel nostre problema, proporcional a  $h^{-2}$  (Strang i Fix, 1973). Aquest comportament posa límits en els succesius refinaments de les xarxes per tal d' estudiar la convergència.

Tot i sabent que existeix aquest error, el que ens interessa és assegurar que és menyspreiable en front als altres. Per tal de comprovar-ho, hem estudiat alguns models amb doble i amb simple precisió. El resultat és que, si bé en els resultats parcials apareixien petites discrepàncies, en els resultats finals les diferències són inferiors al 0.5%. Aquest fet ens indica que l'error d'arrodoniment queda enmascarat per tots els altres errors i per les aproximacions que s'han considerat.

#### 4.5. CRITERIS EN L'ELECCIÓ DE LA MALLA.

A la vista de l'estudi realitzat podem resumir un seguit de criteris o recomanacions en l'elecció de la xarxa de discretització:

- Adequació de la xarxa al tipus de dispositiu que es vol estudiar fent coincidir els punts a on es vol determinar el potencial amb

nusos de la xarxa.

- Comprovació, en cert nombre de punts, del principi de reciprocitat i de la simetria (si el problema en té).
- Refinament de la malla en llocs on és previsible una variació més gran del potencial: les proximitats als elèctrodes, les superfícies de canvi de resistivitat del medi (sobre tot si el contrast de resistivitats és superior a 10), les capes primes i les zones resistives.
- A partir d'un model amb solució analítica (pròxim al model d'estudi) assatjar les distàncies adequades per les fronteres.
- Utilització de la condició mixta sempre que una frontera hagi de simular l'infinit.
- Comprovar l'estabilitat de la solució en front a petites variacions de la malla i dels paràmetres del model.
- Comprovar la independència de la resistivitat aparent en front a diferents valors de l'intensitat. El cas contrari indicaria que s'han produït inestabilitats numèriques en la resolució del sistema d'equacions.





## Capítol 5. APLICACIONS

### 5.1. INTRODUCCIÓ.

En aquest capítol presentem un seguit d'exemples de modelització de diferents estructures bidimensionals i per diferents dispositius electrònics.

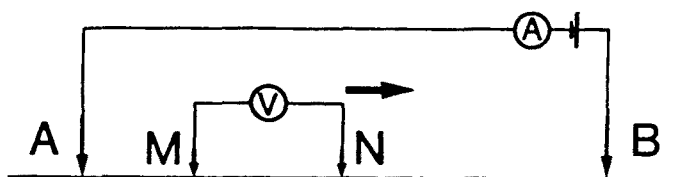
Les modelitzacions que presentem responen a problemàtiques concretes que sorgeixen en el treball de camp i per altra banda estan en la línia d'anar completant el conjunt d'estructures modelitzades publicades fins ara.

Per cada model estudiat es planteja, primer, la problemàtica concreta que es pretén resoldre i després es presenten els resultats de les modelitzacions realitzades. D'aquesta manera, a més de donar resposta a la problemàtica plantejada, mostrem una metodologia per abordar els problemes pràctics via la modelització.

Tots els càlculs s'han realitzat amb el programa construït a partir de l'algorisme dissenyat en aquest treball. Per cada cas concret es donen els detalls importants referents a la xarxa de discretització utilitzada, condicions de contorn, etc.

## 5.2. MODELITZACIÓ PER DISPOSITIU GRADIENT.

El dispositiu del gradient consisteix en quatre elèctrodes aliniats de manera que els elèctrodes de corrent A i B es mantenen fixos, mentre que els elèctrodes de potencial M i N es desplacen al llarg de la línia entre A i B, com es representa a la figura 5.1.



*Figura 5.1. Esquema del dispositiu gradient.*

Aquest dispositiu és adient per estudiar els canvis laterals de resistivitat, encara que presenta l'inconvenient davant d'altres dispositius (calicates amb dispositiu Wenner, Schlumberger i semi-Schlumberger) que la penetració no és constant, essent màxima en el punt central d'AB, coincidint en aquest punt amb el dispositiu Schlumberger. Per aquesta raó, el dispositiu gradient ha estat poc estudiat en comparació amb els altres i no existeixen corbes patró per a la interpretació d'anomalies. No obstant, aquests últims anys s'està presentant interès per ell com ho demostren recents estudis: Sánchez 1984, Schulz 1985b, Shettigara

i Adams 1989 entre d'altres. El dispositiu gradient té el gran avantatge que els elèctrodes de corrent no es mouen. Això facilita, evidentment, el treball de camp i també la modelització, ja que els altres dispositius precisen executar el programa de nou per cada posició dels elèctrodes de corrent. Podem aprofitar aquest avantatge tenint en compte que a la zona central (aproximadament un terç d'AB) la penetració és aproximadament constant.

A la figura 4.4 (secció 4.3) s'ha representat la corba de resistivitat aparent pel dispositiu gradient en un model de dues capes ( $\rho_1 = 200 \Omega\text{m}$ ;  $\rho_2 = 500 \Omega\text{m}$ ;  $t_1 = 20\text{m}$ ) amb  $AB = 300 \text{ m}$ . S'observa que al ser un medi sense variacions laterals, la corba es pràcticament plana en la zona central (variacions màximes del 6%), essent  $\rho_{\text{max}} = 426 \Omega\text{m}$ . A la figura 5.2 es presenten els quatre tipus possibles de corbes de tres capes (amb  $AB = 300\text{m}$ ). Igual que al model anterior, les corbes, en la seva zona central, són planes i les variacions de la resistivitat amb la profunditat es reflecteixen a les zones laterals de les corbes, a prop dels elèctrodes de corrent. S'observa que en els models amb resistivitat decreixent amb la profunditat (corbes tipus Q), les corbes són més planes ja que la penetració és major (la resistivitat aparent s'aproxima més a la resistivitat de l'última capa).

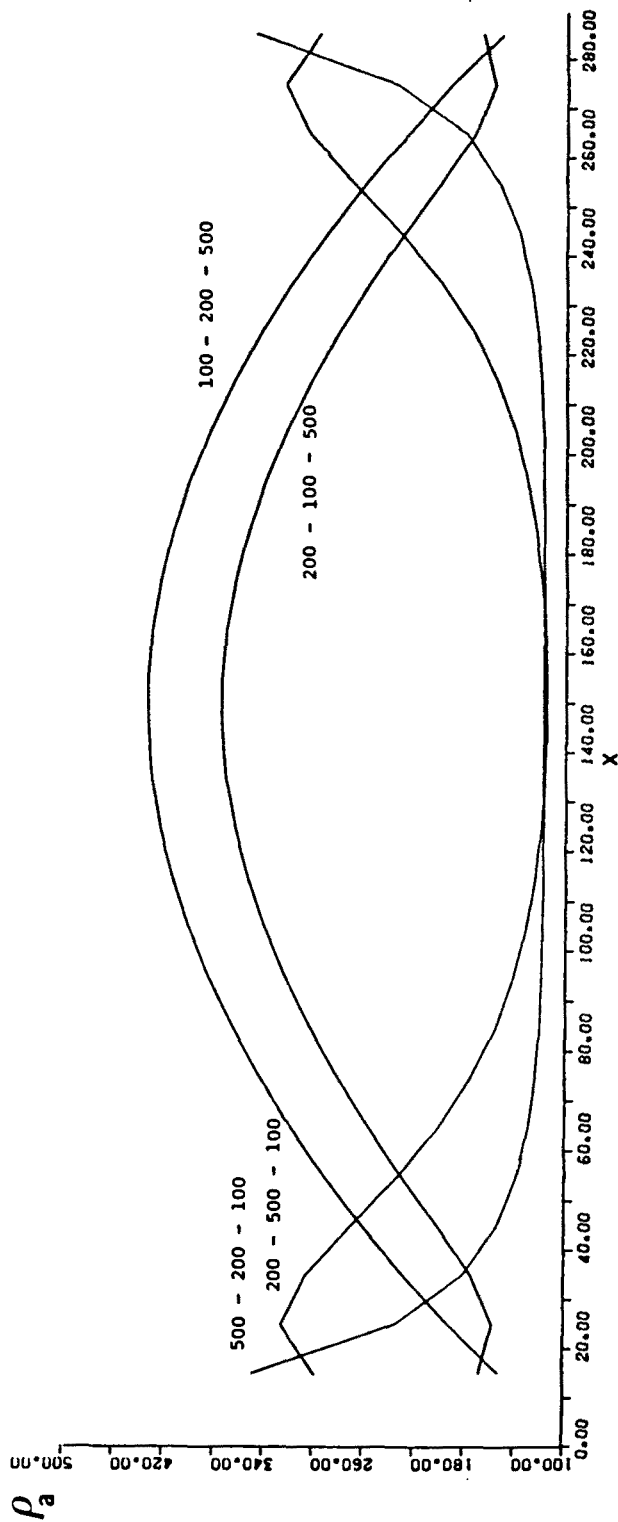


Figura 5.2. Morfologia de les corbes de resistivitat aparent amb dispositiu gradient per un model de tres capes. Les resistivitats s'indiquen a la figura i els gruixos són:  $t_1 = 5m$  i  $t_2 = 15m$ .

S'han estudiat diferents exemples amb capes inclinades. Al perdre l'homogeneïtat lateral de la resistivitat les corbes perden la seva simetria, la zona central ja no és plana sinó que reflecteix l'orientació del cabussament de les capes.

Com a exemple presentem a les figures 5.3 i 5.4 les corbes de resistivitat aparent per dispositiu gradient per un contacte inclinat de dos medis de resistivitats  $60 \Omega_m$  i  $300 \Omega_m$ , tal com s'ha representat en les figures 5.3 i 5.4. En totes dues figures s'observa l'assimetria de les corbes, reflectint en els extrems les resistivitats del medi superficial.

La figura 5.3 mostra la diferència de la morfologia de les corbes en funció del AB i de la posició del dispositiu respecte al contacte. S'observa com les corbes corresponents a un AB més petit tenen una penetració menor ja que els valors de les resistivitats són més elevats.

La figura 5.4 mostra l'efecte de la inclinació ( $\alpha$ ) del contacte en les corbes de resistivitat aparent per un mateix AB. S'observa que poden diferenciar-se les dues inclinacions ja que la corba corresponen a una inclinació més gran ( $\alpha=20^\circ$ ) presenta valors més alts de la resistivitat aparent en la zona resistiva.

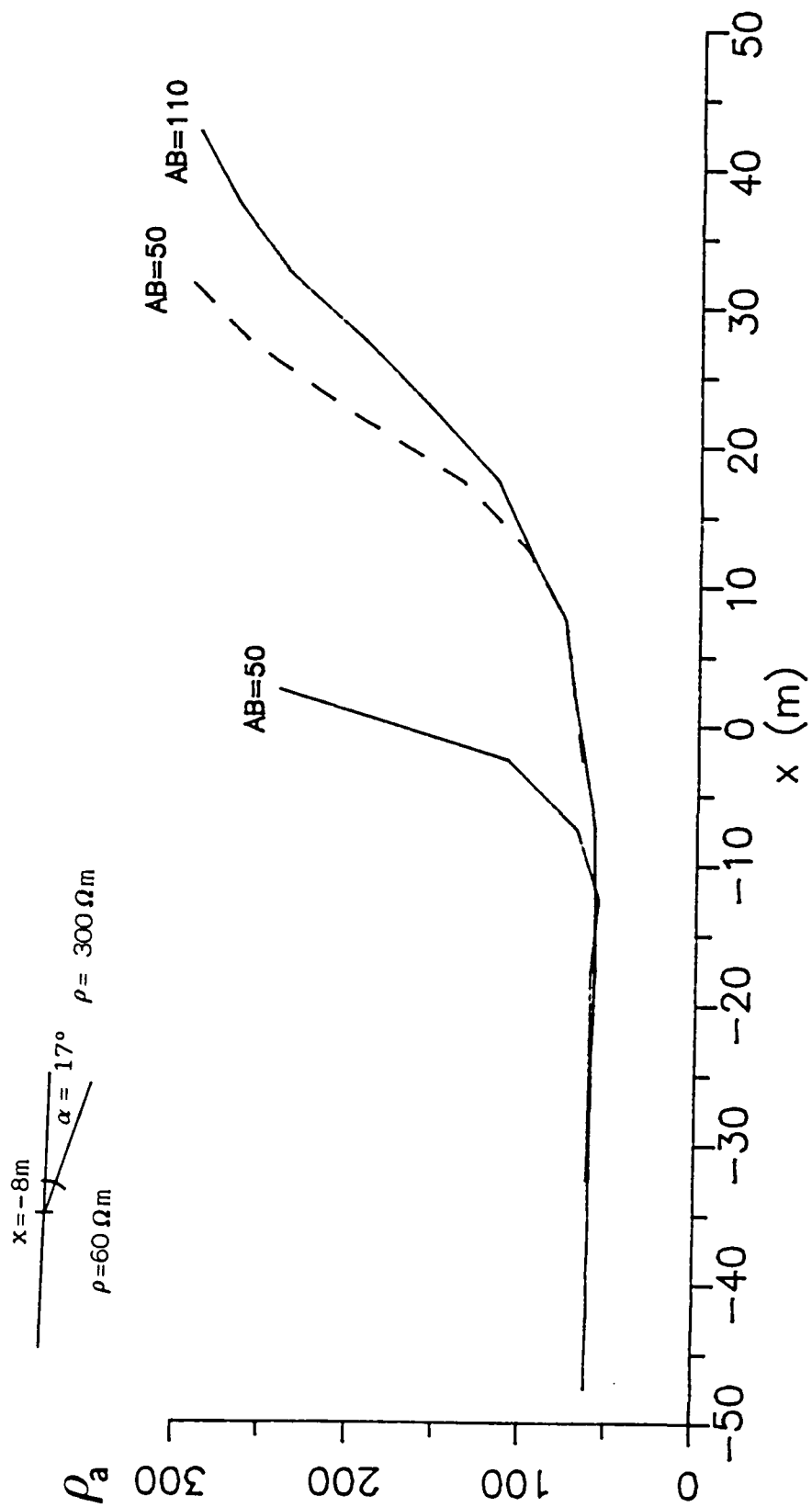


Figura 5.3. Morfologia de les corbes de resistivitat aparent amb dispositiu gradient per un contacte inclinat per diferents  $AB$ .

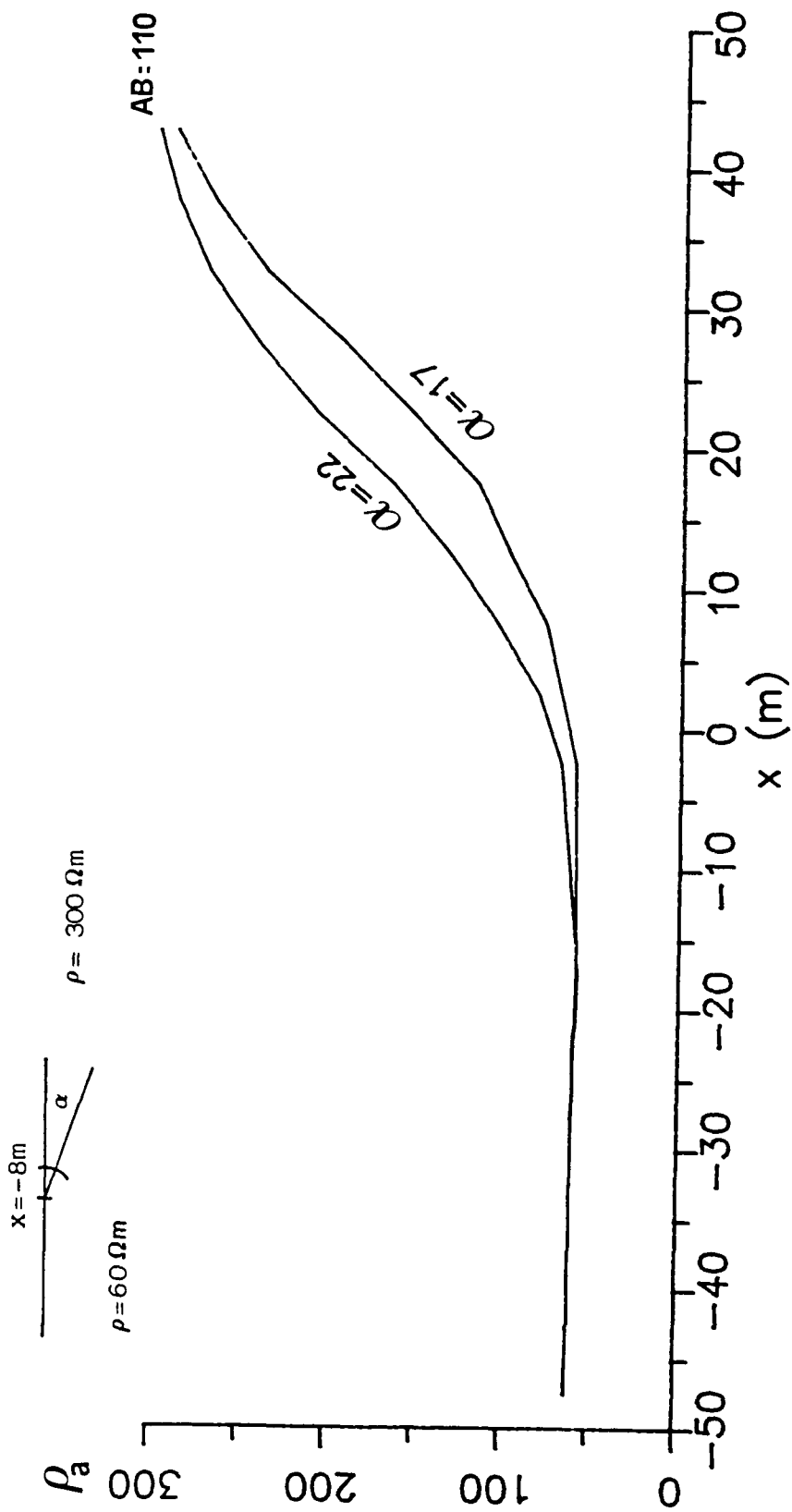


Figura 5.4. Morfologia de les corbes de resistivitat aparent amb dispositiu gradient per un contacte inclinat per diferents angles  $\alpha$ .



El problema que es planteja quan es vol localitzar una anomalia lateral és la relació existent entre la profunditat a la que es troba i la penetració del dispositiu, que en aquest cas depèn bàsicament de la distància AB. No poden donar-se unes lleis generals en aquest sentit ja que depenen del model i del contrast de resistivitats. No obstant, aquest problema pot solucionar-se en part combinant sondatges elèctrics verticals amb dispositiu Schlumberger i perfils amb dispositiu gradient. El SEV permet trobar un model estratificat de partida i deduir les distàncies AB adequades per realitzar els perfils gradient en busca d'anomalies laterals per sobre d'una profunditat determinada.

#### 5.2.1. Estudi de l'anomalia creada per un cilindre.

S'ha modelitzat un medi homogeni de resistivitat  $\rho_h$  en el que es troba un cilindre de radi 2,5 m i resistivitat  $\rho_c$ , enterrat a una profunditat  $z_0$ . S'ha estudiat l'anomalia en la resistivitat aparent considerant diferents contrastes de les resistivitats  $\rho_h$  i  $\rho_c$  (diferents valors de K,  $K = (\rho_c - \rho_h) / (\rho_c + \rho_h)$ ) i per diferents profunditats  $z_0$ . El dispositiu gradient ens permet realitzar una simplificació addicional: la distància AB s'ha pres suficientment

gran de manera que, a la zona central on ens interessa estudiar l'anomalia, pot considerar-se que el potencial creat pels elèctrodes puntuals no depèn de la coordenada de l'eix del cilindre ("strike direction"). D'aquesta manera el potencial és bidimensional i evitem treballar en el camp transformat. Mitjançant una anàlisi, calculant el potencial transformat, hem comprovat la validesa d'aquesta aproximació degut a què, en la part central on realitzem les mesures, provoca tan sols un error màxim inferior al 4%. Per tal d'asegurar la penetració constant en una zona suficientment gran, cal considerar grans distàncies entre elèctrodes. Per reduir les dimensions de la xarxa, s'ha suposat que aquests són fora d'ella. La seva influència, aleshores, l'hem tingut en compte via unes condicions de Dirichlet inhomogènies (apropiades en aquest cas) a la frontera imposant el potencial d'un medi homogeni de resistivitat  $\rho_h$ .

S'han realitzat diferents proves variant la distància entre els elèctrodes de corrent (AB= 220m, AB = 620 m i AB = 1820m) i no s'ha observat cap variació significativa en l'anomalia. D'aquesta manera queda assegurat que en la zona d'interès la penetració és constant, malgrat la presència del cos anòmal. Al llarg de tot l'estudi hem mantingut constants les següents distàncies: AB= 220m i MN= 1m.

La xarxa de discretització amb la que s'han obtingut els resultats té 49x26 nusos, 1200 elements quadrats de 1mx1m, a excepció dels elements de la superfície del sòl que són rectangulars de 1mx0.5m. El contorn del cilindre queda definit pel contorn d'elements com s'observa a la figura 5.5.

A les figures 5.5 i 5.6 es presenten dos dels àbac obtinguts en la modelització. La figura 5.5 presenta com varia l'anomalia en funció de la fondària ( $z_0 = 0.5, 1.5, 2.5$  i  $4.5\text{m}$ ) per un valor fix del contrast de resistivitats ( $K = 0.98$ ). A la figura 5.5 s'observa un àbac d'anomalia per un valor de la profunditat ( $z_0 = 0.5\text{m}$ ) i diferents contrastos ( $K = 0.20, 0.54, 0.75$  i  $0.98$ ). Comparant entre si aquests dos àbac s'observa el diferent comportament de l'anomalia al modificar el contrast  $K$  i al variar la profunditat  $z_0$ . L'amplitud de l'anomalia depèn tant de la profunditat com del contrast mentre que l'amplada depèn, fonamentalment, de la profunditat.

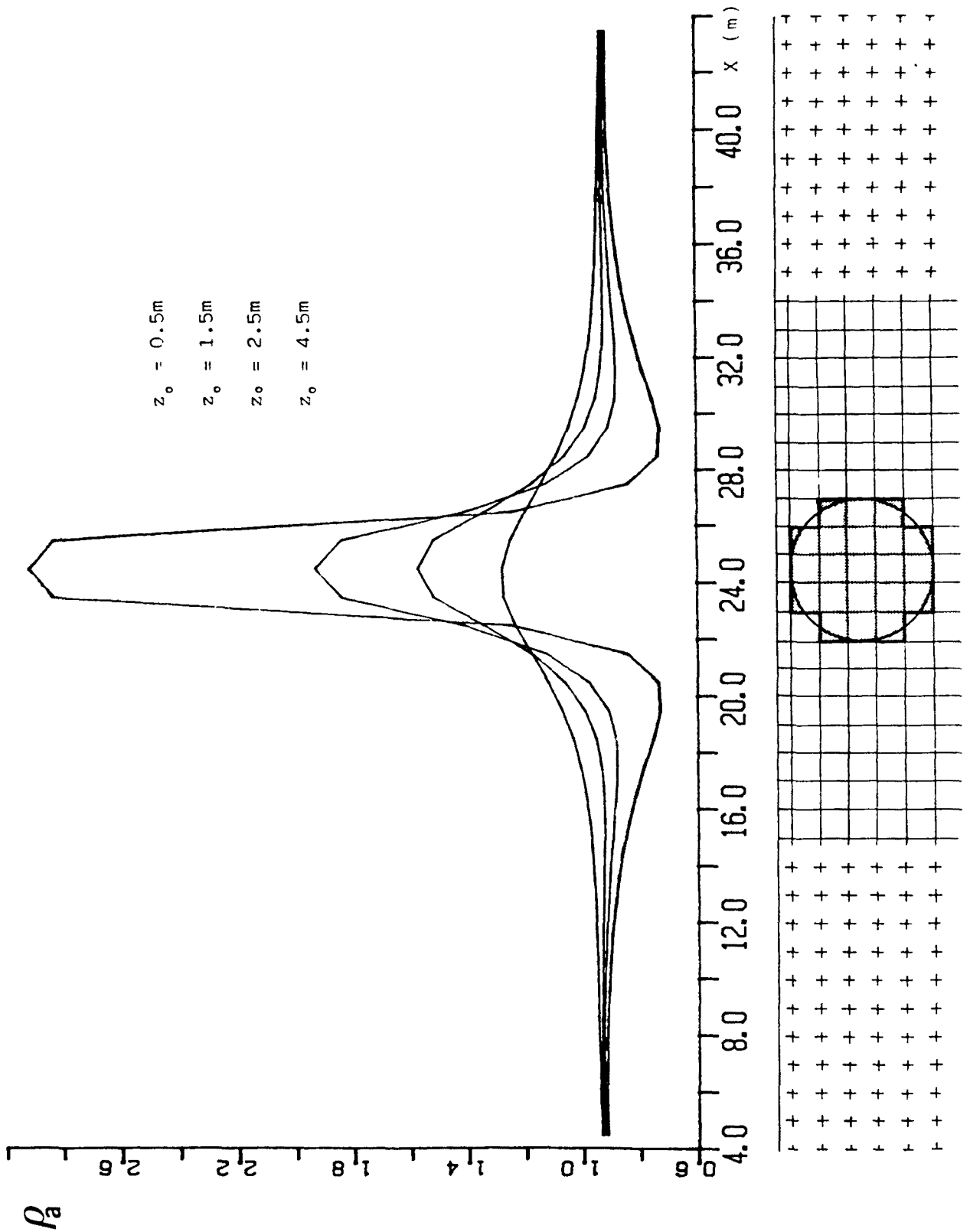


Figura 5.5. Àbac de resistivitat aparent per un cilindre de radi 2.5m enterrat en un medi homogeni amb un contrast de resistivitats  $K=0.98$  en funció de la fondària  $z_0$ . També es mostra part de la xarxa de discretització.

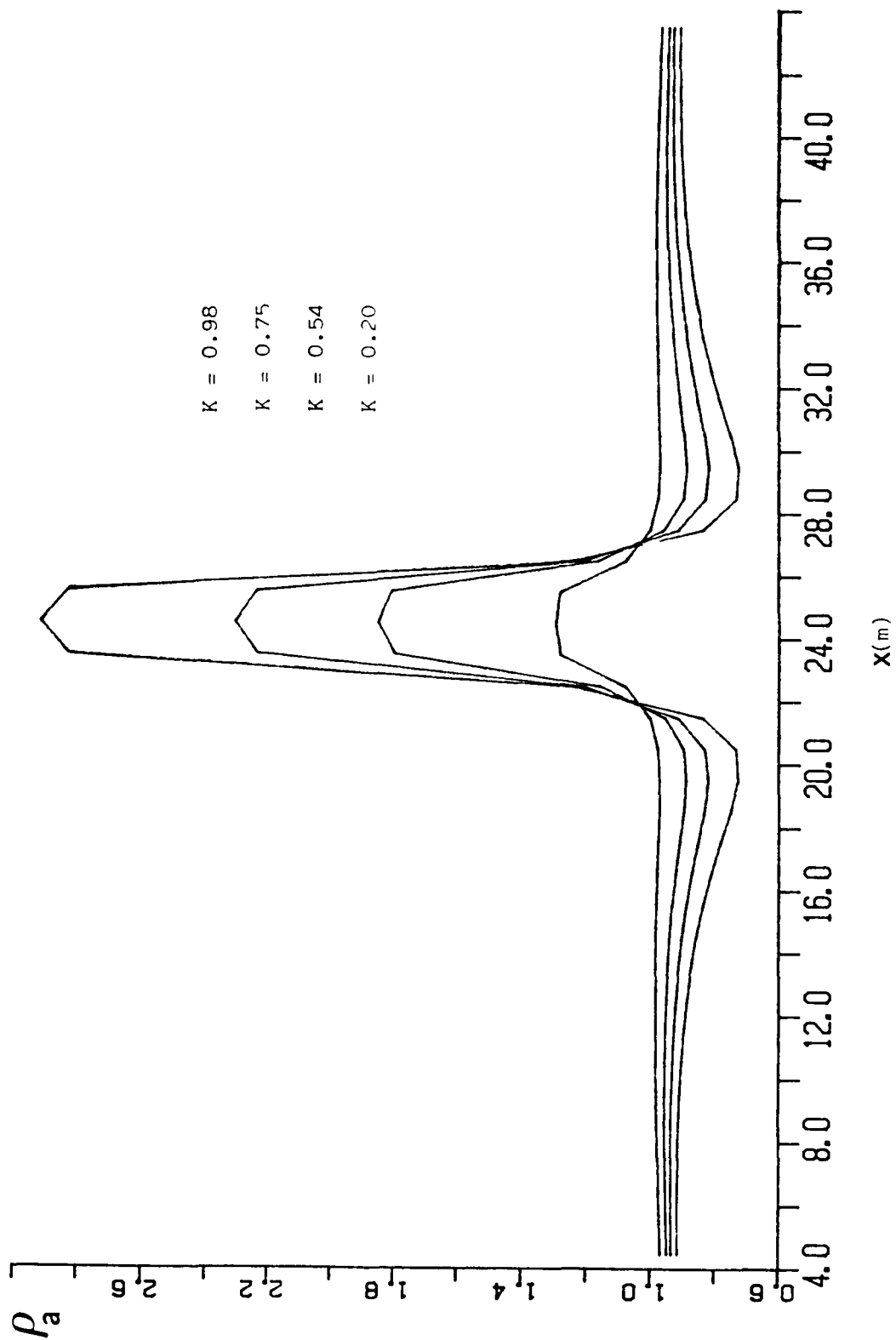


Figura 5.6. Àbac de resistivitat aparent d'un cilindre de radi 2.5m enterrat en un medi homogeni situat a una fondària de  $z=0.5m$  en funció del contrast de resistivitats  $K$ .

A la figura 5.7, mitjançant el diagrama de l'índex d'anomalia, es resumeix el comportament de l'anomalia per diferents valors de la profunditat  $z_0$  i del contrast de resistivitats  $K$ . L'índex d'anomalia  $\Delta$  és una mesura de la distorsió de la resposta del medi homogeni semi-infinit causat per la presència d'alguna inhomogeneïtat. S'ha escollit l'índex definit per Tarkhov (Orellana, 1982) segons el qual:

$$\Delta = 100 \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\rho_{\max} + \rho_{\min}}$$

on  $\rho_{\max}$  i  $\rho_{\min}$  són respectivament els valors màxim i mínim de la resistivitat aparent.

Una anàlisi qualitativa del diagrama de la figura 5.7 mostra que, per valors grans del contrast de resistivitats, l'amplitud d'anomalia presenta variacions importants al variar la profunditat  $z_0$ . S'observa també la saturació de l'índex d'anomalia al voltant del 60%. En canvi, per contrastos petits l'anomalia varia poc al variar la profunditat. De la mateixa forma s'observa que per profunditats petites la variació de  $\Delta$  amb el contrast  $K$  és més gran que per profunditats grans on quasi no s'aprecia variació. Per la forma de la corba es dedueix que l'índex d'anomalia és més sensible a un canvi de profunditat que a un canvi en el contrast  $K$ .

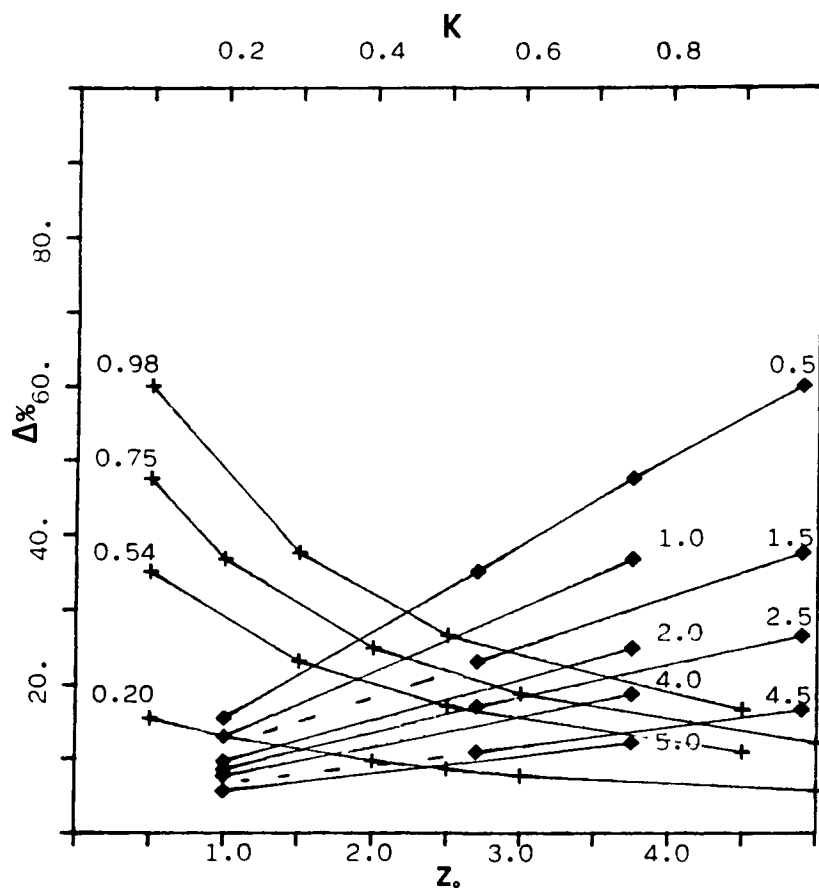


Figura 5.7. Índex de l'anomalia pel cilindre.  
 Les corbes (+) corresponen als valors  
 indicats del contrast  $K$  i  $z_0$  variables  
 i les corbes (◊), als valors indicats  
 de  $z_0$  i  $K$  variable.

S'ha simulat també dos casos extrems corresponents a cilindres superficials ( $z_0 = 0.5$  m) amb contrastos de resistivitats molt alts:  $\rho_h = 1 \Omega_m$  i  $\rho_c = 1000 \Omega_m$  ( $K = 0.998$ ) i  $\rho_h = 1 \Omega_m$  i  $\rho_c = 10000 \Omega_m$  ( $K = 0.9998$ ). Aquests casos podrien correspondre a cavitats buides on podria esperar-se una anomalia molt important; no obstant, s'observa la saturació ja que l'índex d'anomalia és només del 61% i les corbes de resistivitat aparent són quasi idèntiques entre si i únicament es diferencien en un 2% en els valors màxim i mínim de la corba corresponent a  $\rho_c = 100 \Omega_m$ .

S'ha estudiat també l'anomalia creada per dos cilindres de resistivitat  $\rho_c = 100 \Omega_m$  enterrats en un medi homogeni de  $\rho_h = 1 \Omega_m$  (contrast  $K = 0.98$ ) i també 2.5 m de radi (figura 5.8). La distància entre els seus centres és de 8 m i es troba a una profunditat  $z_0 = 0.5$ m. Comparant aquesta anomalia amb la corresponent a un sol cilindre (figura 5.6), observem que existeix una diferència entre els valors  $\rho_{max}$  i  $\rho_{min}$  degut a la presència de dos cilindres. Però l'índex d'anomalia és manté aproximadament igual ( $\Delta \approx 60\%$ ), no trobem, doncs, ni solapament ni amplificacions de les anomalies creades per cada un dels cilindres.



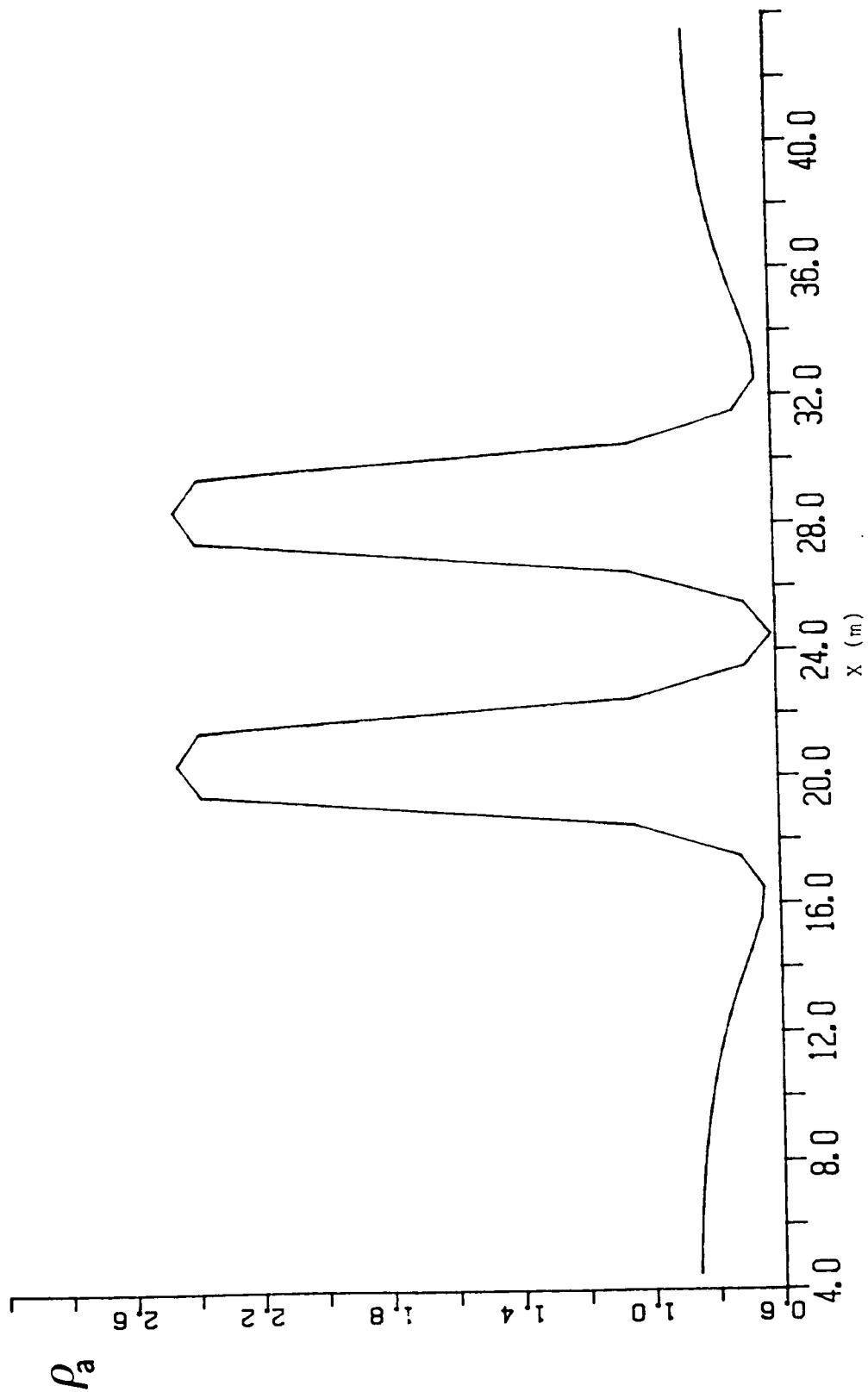


Figura 5.8. Corba de resistivitat aparent per dos cilindres de radi 2.5m enterrats en un medi homogeni a una profunditat  $z_0 = 0.5m$  i un contrast de  $K=0.98$ .

Finalment s'ha realitzat un nou assaig per conèixer l'efecte d'una capa prima conductora per sobre del mateix tub resistiu enterrat en el medi homogeni. Hem considerat el cas d'anomalia màxima (cilindre superficial  $z_0 = 0.5\text{m}$  i contrast  $K = 0.98$ ) amb una capa superficial de gruix  $t_1 = 0.5\text{m}$  i  $\rho_1 = 0.1\Omega\text{m}$ . L'índex d'anomalia s'ha reduït des d'un 60% a un 20%, la qual cosa fa veure la importància dels recobriments emmascarant considerablement les anomalies.

### 5.3. MODELITZACIÓ PER DISPOSITIU DIPOL-DIPOL.

El dispositiu dipol-dipol o dipolar axial ha estat desenvolupat preferentment a Nord-Amèrica. Per aquest motiu és el dispositiu pel que existeixen més exemples de modelització (Pelton et al. 1978, Pridmore et al. 1981).

Presentem a continuació un exemple de modelització per dispositiu dipol-dipol sota el punt de vista de la detectabilitat.

Moltes vegades es presenta el problema d'estudiar si un determinat cos anòmal és o no detectable i la relació entre la profunditat on es troba el cos i les distàncies entre els elèctrodes del dispositiu. La modelització és l'única manera que permet estudiar

aquest tipus de problemes.

### 5.3.1. Estudi de l'anomalia creada per un dic conductor.

S'ha modelitzat un dic rectangular (20mx15m) infinit, conductor (de resistivitat  $\rho_d$ ) enterrat a una profunditat  $z_0$  dins d'un medi homogeni de resistivitat  $\rho_h$ . (figura 5.9 ).

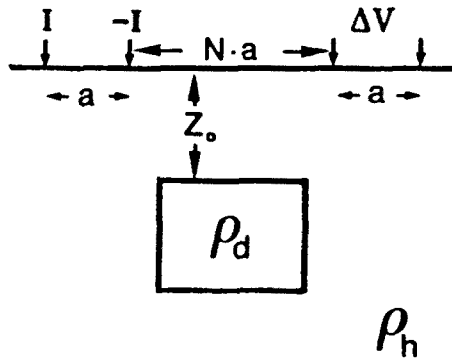


Figura 5.9. Esquema del model corresponen a un dic.

S'han realitzat diferents assaigs calculant les pseudo-seccions per diferents valors del paràmetre  $z_0$  i  $\rho_d$ . A la figura 5.10 presentem una de les pseudo-seccions perpendicular a la direcció del dic. Correspon als següents paràmetres:  $\rho_d = 1 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_h = 100 \Omega\text{m}$  i  $z_0 = 60\text{m}$  i amb una longitud del dipol ( $a$ ) de 40m.



La pseudo-secció mostra clarament la presència i la situació del cos anòmal conductor, però el gradient de resistivitat aparent és tan petit que difícilment seria detectable en un problema real. La presència d'altres anomalies ( altres petites heterogeneïtats o soroll en les mesures) emmascararia la presència del cos conductor. Trobem el mínim de  $\rho_a$  per  $N = 5$ , que equival a una distància de 240m entre els centres dels dipols que representa tan sols una anomalia d'un 15% ( segons l'índex de anomalia de Tarkhov).

A partir de les diferents pseudo-seccions calculades, equivalents a la figura 5.10, s'ha construït la taula 5.1. Aquesta taula recull els valors mínims de la resistivitat aparent en funció dels paràmetres profunditat ( $z_0$ ) i longitud del dipol ( $a$ ). S'indica també les distàncies entre els centres dels dipols corresponents on es troba aquest mínim.

$z_0$ (m)	a(m)	$\rho_d$ ( $\Omega m$ )	$\rho_{min}$ ( $\Omega m$ )	d(m)
20	10	1	46.7	80
40	10	1	65.6	180
60	10	1	74.8	260
80	10	1	80.7	315
80	20	1	80.7	300
60	40	1	75.2	240
60	40	10	91.9	240

*Taula 5.1. Relació entre els diferents paràmetres del model.*

Per aquests models les xarxes utilitzades tenen de l'ordre de 30X90 nusos. Tenen una zona central regular on la distància entre nusos és 1/4 de la longitud del dipol (la més petita de les considerades) i una zona perifèrica (zona pròxima a la frontera) on la distància entre els nusos és la longitud del dipol.

#### 5.4. MODELITZACIÓ PER DIPOSITIU SCHLUMBERGER.

El Sondatge Elèctric Vertical amb dispositiu Schlumberger s'utilitza de manera rutinària en la prospecció de resistivitats per estudis de variacions de la resistivitat en profunditat. La interpretació quantitativa de les corbes de camp es realitza sota la hipòtesi de medi horitzontalment estratificat. Aquesta hipòtesi és vàlida si hom coneix bé els seus límits. Un expert coneix quan les corbes no són compatibles amb aquesta hipòtesi. El problema important és que podem trobar corbes compatibles amb un model estratificat (tenint en compte que podem tenir errors experimentals de l'ordre del 5%) però que corresponguin en realitat a un model més complicat. Si es tenen indicis d'allunyament d'un model estratificat (per informació geològica, accidents tectònics, efectes topogràfics..) cal, via modelització, conèixer com queden modificades les corbes de resistivitat aparent.

##### 5.4.1. Efectes d'inhomogeneïtats a l'entorn dels elèctrodes de potencial.

Un problema pràctic delicat en la realització d'un sondatge elèctric vertical és l'emplacament dels elèctrodes. Es conegut que les heterogeneïtats a l'entorn dels elèctrodes de corrent són

menyspreables mentre que poden induir a grans errors si es troben al entorn dels elèctrodes de potencial. Les heterogeneïtats distorsionen les línies de corrent i s'ha d'evitar mesurar en elles la diferència de potencial. Precisament el SEV amb dispositiu Wenner presenta la important desavantatge en front al SEV amb Schlumberger de que cada punt és un empalme i, per tant, canvien les condicions físiques on es mesura la diferència de potencial. Els salts d'empalme en les corbes de resistivitat aparent són exemple clar de la importància dels efectes d'heterogeneïtats al entorn dels elèctrodes de potencial. La modelització d'aquestes heterogeneïtats permetrà conèixer i controlar quantitativament com modifiquen les corbes de resistivitat aparent.

Hem modelitzat aquests efectes en un medi estratificat de dues capes de resistivitats  $\rho_1 = 1 \Omega\text{m}$  i  $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$  i amb un gruix de la primera capa  $t_1 = 30 \text{ m}$ . S'han considerant diferents situacions i tamanyes d'una heterogeneïtat resistiva ( $\rho = 1000\Omega\text{m}$ ).

A la figura 5.11 presentem els models d'estudi i les corbes de resistivitat aparent. Els models estan descrits pels següents paràmetres geomètrics:  $a = 2.5\text{m}$  i  $b = 2\text{m}$ . S'observa com la morfologia de la corba corresponent al medi estratificat sense anomalies (corba de punts en la figura 5.11) no queda afectada. Les diferents heterogeneïtats han provocat bàsicament un desplaçament vertical cap



amunt, obtenint les corbes A,B,C,D.

Evidentment, el desplaçament de la corba augmenta en augmentar el tamany de l'heterogeneïtat (pas del cas A al D). Si no hi ha simetria (casos B i D) la corba anòmala és pràcticament igual però el desplaçament és més petit.

L' estudi més detallat mostra, però, que el desplaçament no és realment constant. A mesura que augmenta el tamany de l'heterogeneïtat en relació al gruix de la capa, el desplaçament varia en funció del  $AB/2$ .

Comparant el salt de les corbes A,B a les corbes C,D es pot afirmar que la dimensió vertical (a) (figura 5.11) de l'inhomogeneïtat provoca més desplaçament que l'horitzontal (b). L'efecte d'un augment en el contrast  $\rho/\rho_1$  no és apreciable ja que ens hem situat en el cas límit de 1/1000 i en les proves realitzades per un contrast 1/10000 s'observa el fenomen de la saturació; és a dir no augmenta l'anomalia.

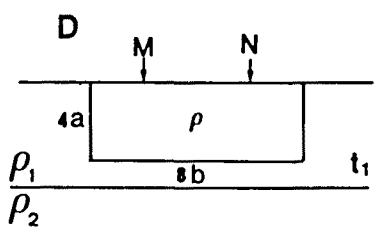
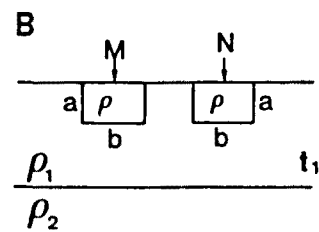
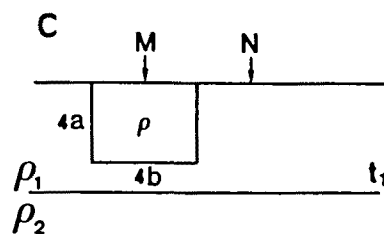
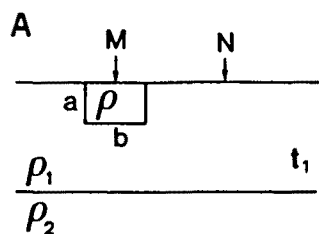
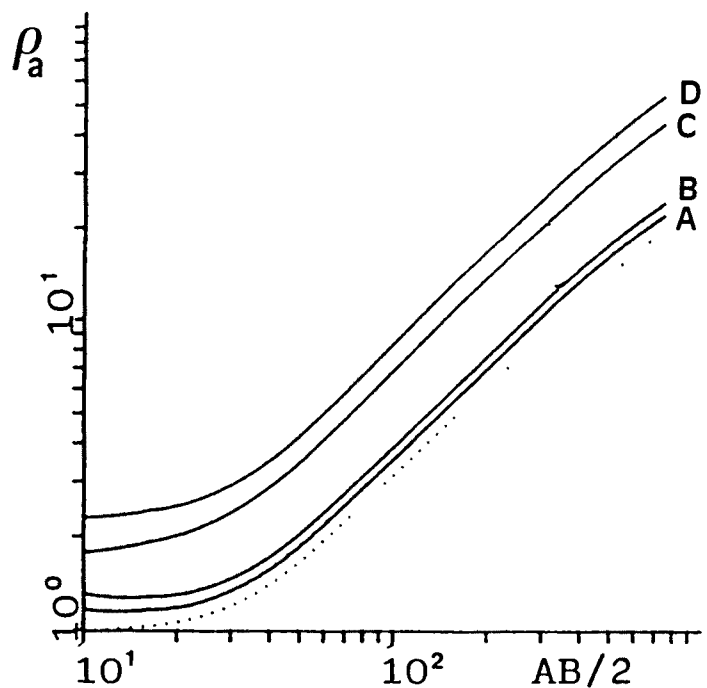


Figura 5.11. Efectes d'inhomogeneïtats a l'entorn dels elèctrodes de potencial.

#### 5.4.2. Efecte d'un esglaó en la superfície.

Un altre problema relacionat també amb l'emplaçament del SEV és la presència de petits esglaons o desnivells en la superfície. Si la direcció del SEV és paral·lela a aquests petits desnivells, estem en el cas d'un efecte lateral. Si el desnivell és petit (en relació a les longituds característiques del dispositiu) els seus efectes són totalment menyspreables. Si la direcció del SEV és perpendicular a aquests salts, estem en el cas de petits efectes topogràfics que poden afectar de manera considerable a les mesures de resistivitat aparent. Estudiarem a continuació aquest últim cas.

Presentem dos situacions diferents: l'efecte d'un salt petit (de l'ordre de MN) en el centre del dispositiu (figura 5.12) i l'efecte d'un esglaó lateral de dimensions del ordre de AB/2 del punt on es troba (figura 5.13). Hem considerat tan el medi homogeni (model A) com un medi estratificat de dues capes de  $\rho_1 = 1 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$  i  $t_1 = 30\text{m}$  (model B).

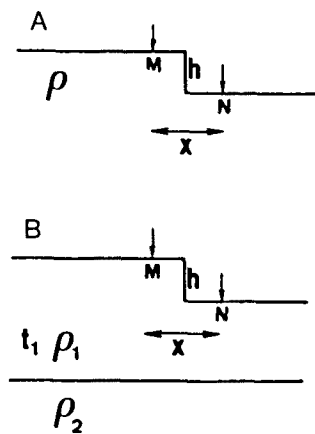
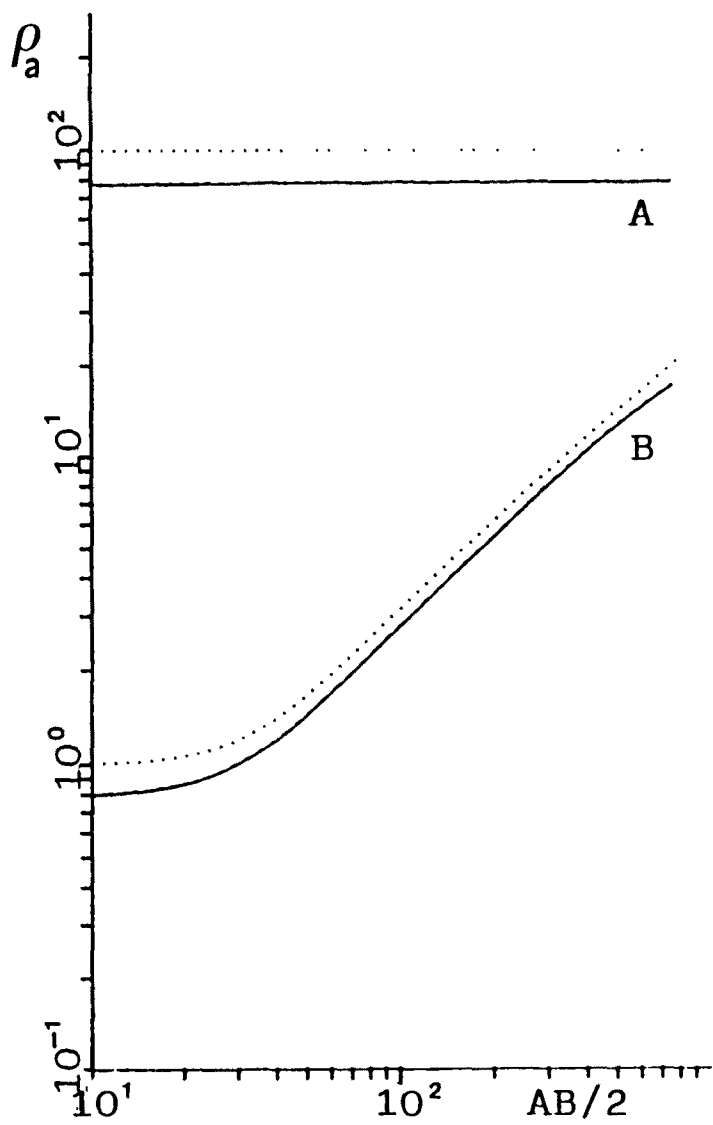


Figura 5.12. Efecte d'un esglaió entre els elèctrodes de potencial.

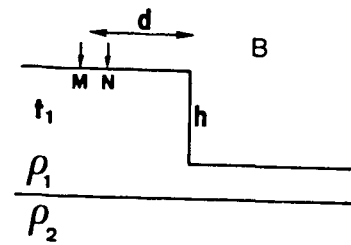
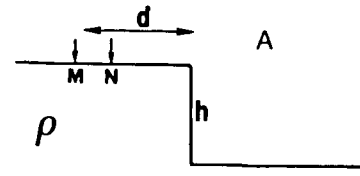
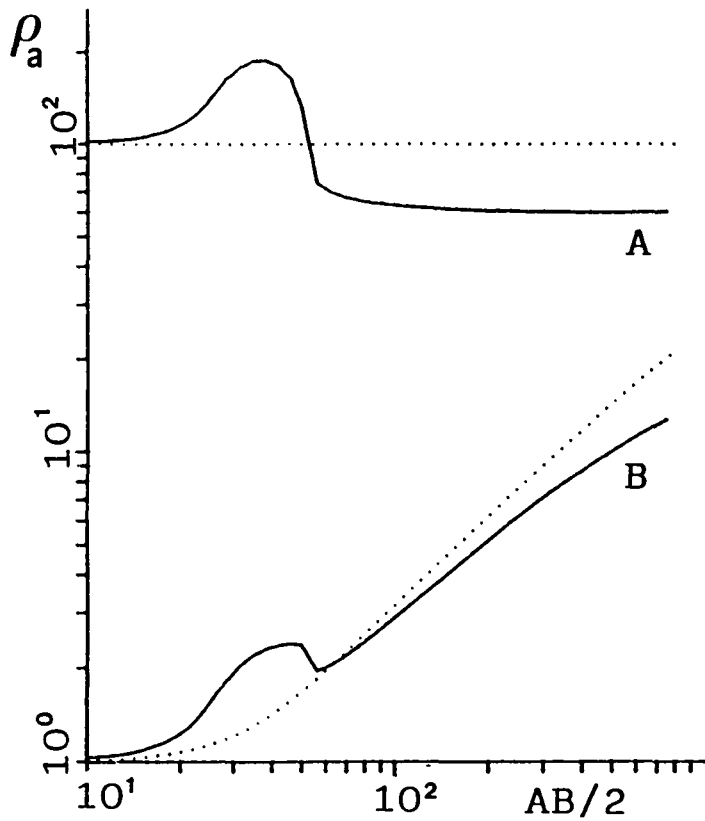
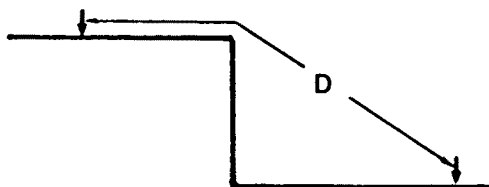


Figura 5.13. Efecte d'un esglaió en la superfície.

Degut a la particular geometria d'aquests models, un cop s'atravessa el salt, les distàncies (MN o AB/2) les hem considerat sobre la línia D, tal i com s'indica en la figura 5.14.



*Figura 5.14. Esquema de les distàncies utilitzades en el model de l'esglaió.*

Aquesta és la millor aproximació de la situació que trobem en el camp. I a més a més, per diferents proves realitzades, podem assegurar que és la forma de produir menys distorsió en les corbes de  $\rho_a$ .

A la figura 5.12 s'observen les corbes de resistivitat aparent corresponents al salt en el centre del dispositiu. En línies puntejades hem pintat les corbes corresponents al medi homogeni i al model estratificat sense esglaió. S'observa, de nou, que la morfologia de les corbes no canvia. Unicament s'ha produït un desplaçament cap avall, obtenint les corbes A i B. El desplaçament és pràcticament constant tant en el medi homogeni com en el model

de dues capes. Per valors concrets d'aquest models ( $h = 5m$  i  $x = 2m$ ) el desplaçament de les corbes és d'un 20%.

A la figura 5.13 presentem les corbes obtingudes en el cas d'un esglaó lateral. El valor dels paràmetres per aquestes corbes són:  $d = 25m$  i  $h = 25m$ . Observem que el comportament és més complex que en els casos anteriors. En les corbes es poden distingir clarament tres zones: a- abans del salt ( $AB/2 \leq d$ ), b- durant el salt ( $d \leq AB/2 \leq d+h$ ) i c- després del salt ( $AB/2 \geq d+h$ ). En la primera zona, la resistivitat va augmentant de la mateixa manera que en les corbes corresponents a un contacte vertical sobre un medi homogeni (corba A) i el mateix medi estratificat (corba B). La segona zona és de fet fictícia perquè correspondria a situar els elèctrodes de corrent en la pared del esglaó. Aquests trams de corba són de tipus K. La posició del màxim i grau d'anomalia que representa no tenen perquè coincidir en les dues corbes perquè en el model estratificat es superposen els efectes del esglaó i de la segona capa resistiva. Després del salt (tercera zona) les corbes van recuperant poc a poc la morfologia que els hi correpon, plana pel medi homogèni i ascendent pel model de dues capes però subestimant considerablement la resistivitat del medi. En el cas del medi estratificat la corba no és un senzill desplaçament vertical sino que hi ha un desplaçament horitzontal que provocaria una interpretació errònia del gruix de la primera capa.

#### 5.4.3. Efectes laterals produïts per contactes verticals i desnivells.

El SEV es caracteritza per la gran sensibilitat a les variacions verticals de la resistivitat en front a les variacions laterals. Però a mesura que augmenta la distància AB els efectes laterals poden afectar considerablement perquè els elèctrodes de corrent ja penetrin en un medi de resistivitat diferent. Per evitar aquest fet es situa el dispositiu paral·lelament a la "strike direction".

L'exemple més clar d'aquest comportament és la morfologia de les corbes de  $\rho_a$  a prop d'un contacte vertical entre dos medis.

Tot i conèixer aquests comportaments, el problema pràctic és que trobem combinacions de variacions laterals i verticals de la resistivitat. Es evident que hi haurà una zona de màxima influència dels efectes laterals, i pot emascarar o amplificar les inflexions en les corbes de resistivitat aparent pròpies dels medis estratificats. Delimitar aquestes zones és molt important per la interpretació perquè sempre hi ha el perill de sobrevalorar aquests efectes o de subestimar-los.

Presentem a continuació la modelització d'un SEV paral·lel a un desnivell important (d'altura cinc i deu cops la distància de la posició del SEV al desnivell). A la figura 5.15 es presenten els



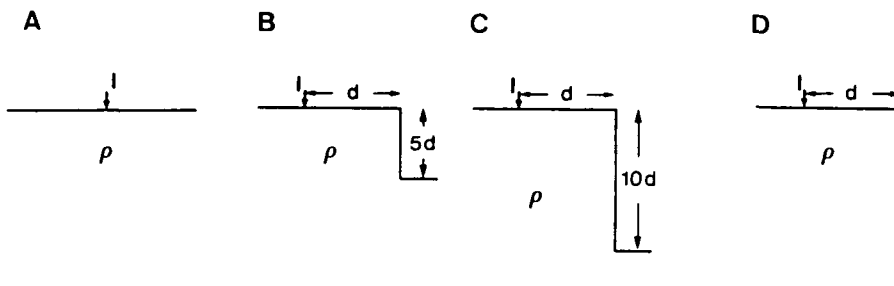
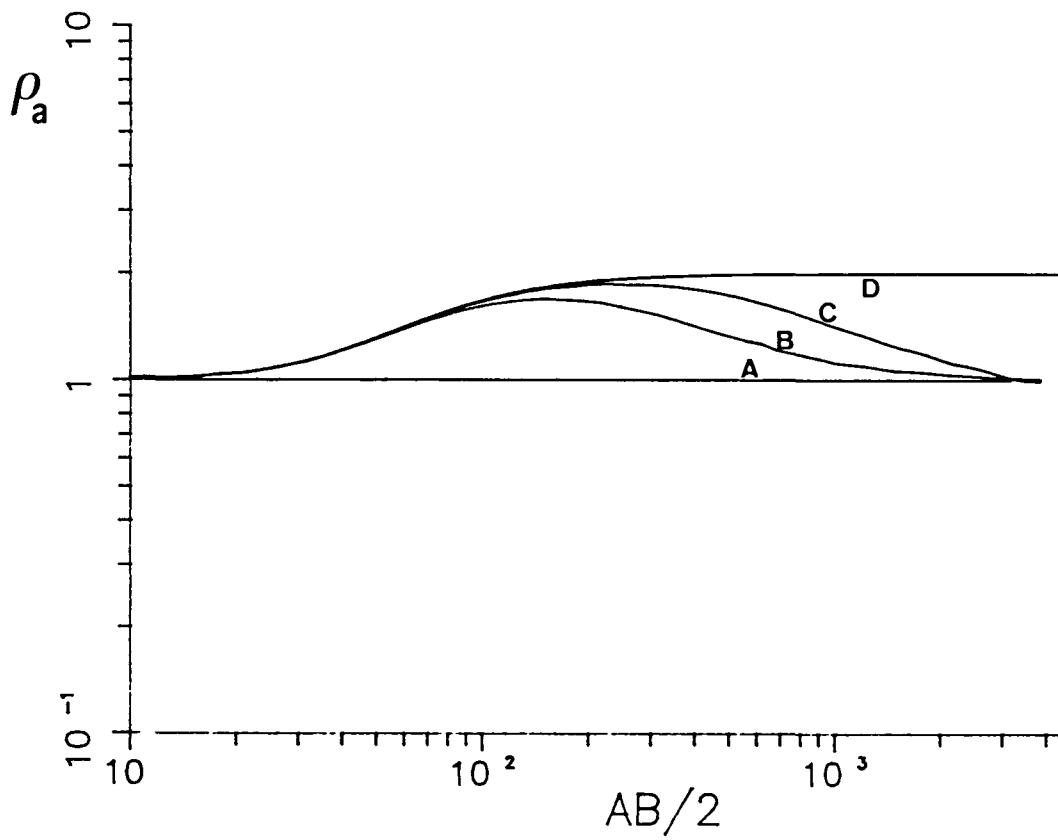


Figura 5.15. Efecte lateral d'un desnivell en el medi homogeni.

models corresponents a aquestes situacions (models B i C), junt amb els casos límit (medi homogeni (A) i contacte vertical (D)). A la mateixa figura 5.15 es poden observar les corbes de resistivitat aparent obtingudes per aquests models. Per aquestes corbes, els valors dels paràmetres del model són: distància del centre del dispositiu al desnivell  $d = 26\text{m}$  i resistivitat del medi  $\rho = 1 \Omega\text{m}$ .

A la vista de la figura 5.15, podem concloure que l'anomalia provocada pel desnivell és totalment equivalent al contacte vertical infinit fins a un  $AB/2$  del ordre del desnivell. Per  $AB/2$  més grans, la corba arriba a un màxim i lentament va convergint cap a la corba horitzontal que correspon al medi homogeni. Observem que el valor i la localització del màxim depèn de l'alçada del desnivell, en concret si el salt és  $10d$  (model C) el valor màxim de  $\rho_a$  coincideix amb el contacte vertical ( $\rho_{a-\text{max}} = 2\rho$ ). El comportament descrit, és força diferent al que s'obté si el SEV és perpendicular al salt (figura 5.13) on la corba després del salt presentava una resistivitat constant però en un 40% inferior al valor real.

Un cop conegut aquest comportament passem a estudiar el mateix model però sobre un medi estratificat. La figura 5.16 presenta els models considerants. El model A correspon al medi estratificat, el

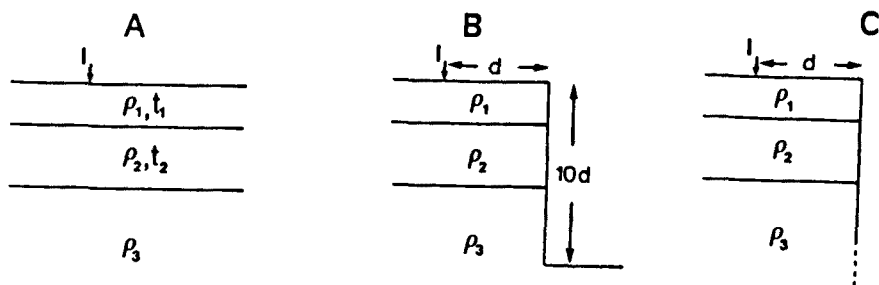
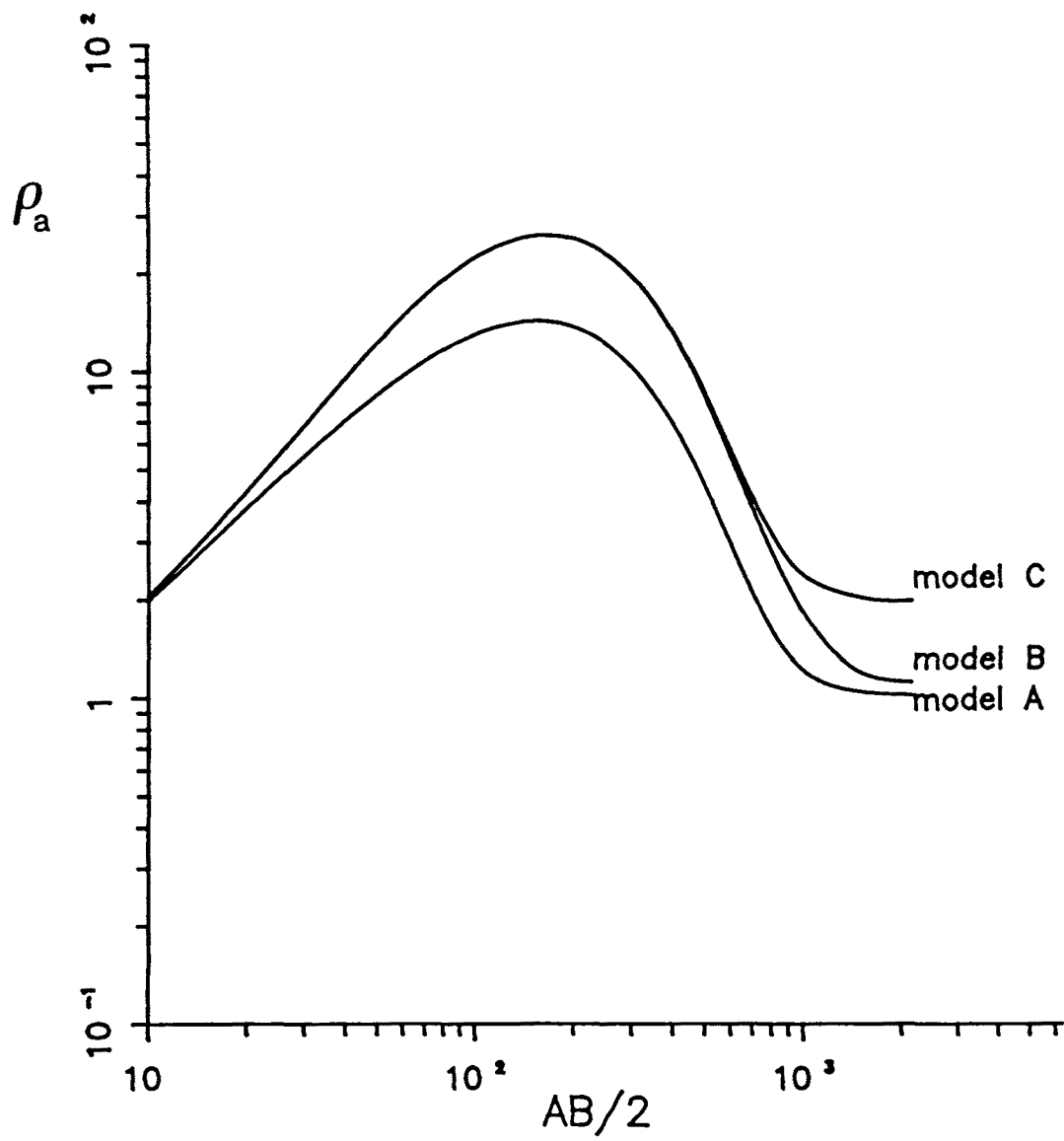


Figura 5.16. Efecte lateral del contacte vertical i del desnivell en un medi estratificat.

model B al medi estratificat amb el desnivell i el model C al medi estratificat però amb un contacte infinit. El valor dels paràmetres dels models són: resistivitats  $\rho_1 = 1 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_3 = 1 \Omega\text{m}$ , i gruixos  $t_1 = 5\text{m}$   $t_2 = 25\text{m}$  i hem mantingut  $d=26\text{m}$ .

A la figura 5.16 poden observar-se les corbes obtingudes. Els trams finals de les corbes són equivalents a l'exemple anterior. Les corbes ja han assolit el comportament asimptòtic; la corba A ha arribat al valor de  $\rho_3$  ( $1 \Omega\text{m}$ ), la corba B s'apropa lentament a la corba A (medi estratificat) (per  $AB/2 \simeq 2000 \text{ m}$  discrepen un 10%) i la corba C es comporta com un contacte vertical sense estratificació ( $\rho_a = 2\rho_3$ ). En la zona central l'efecte del contacte vertical és confon amb una corba tipus K però amb una capa intermitja més resistiva que el model de partida (model A). De nou, un desnivell de deu cops la distància del SEV al contacte, és equivalent al contacte vertical fins un  $AB/2$  aproximadament tres cops l'alçada del desnivell.

Comparant les figures 5.15 i 5.16 podem concloure que qualitativament el efecte d'un desnivell o d'un contacte vertical és el mateix per un medi homogeni que per un medi de tres capes, si bé, quantitativament ja hem vist que el grau de distorsió de les corbes depèn de les relacions entre els paràmetres del model.

Una altra situació que es troba sovint en la pràctica, i que és semblant a aquestes dues últimes estudiades, és la realització del SEV en la base d'un desnivell, o bé, a prop d'una pared. Per estudiar aquest efecte, hem modelitzat un SEV paral·lel a una pared amb la mateixa resistivitat que el medi semiinfinit (un cas d'alçada igual a la distància de la posició del SEV a la pared i un altre d'alçada "infinita"). A la figura 5.17 es presenten els models corresponents a aquestes situacions (models B i C) junt amb el medi homogeni sense desnivell (model A). La resistivitat del medi és  $\rho = 1 \Omega\text{m}$  i la distància de la posició del SEV a la pared és  $d = 26\text{m}$ .

A la mateixa figura 5.17 es presenten les corbes de resistivitat aparent obtingudes per aquests models. S'observa que l'anomalia creada per la pared és, en certa mesura, inversa a la creada pel contacte vertical o pel desnivell (figura 5.15) ja que es produeix una disminució de la  $\rho_a$  respecte al valor corresponent al medi homogeni. La corba corresponent al model B (pared d'alçada igual a la distància al SEV) provoca una anomalia poc important, però té una zona de màxima influència on es produeix una disminució de la  $\rho_a$  fins al 10% en  $AB/2 \approx 4d$  o  $5d$ . En el cas de la pared infinita (model C) aquesta disminució de la  $\rho_a$  pot arribar a un 30%. Es important remarcar que en tots dos casos (models B i C) per

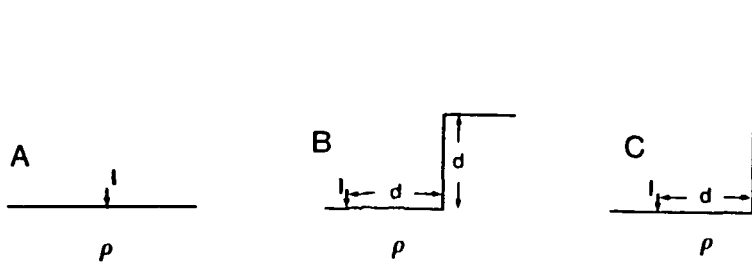
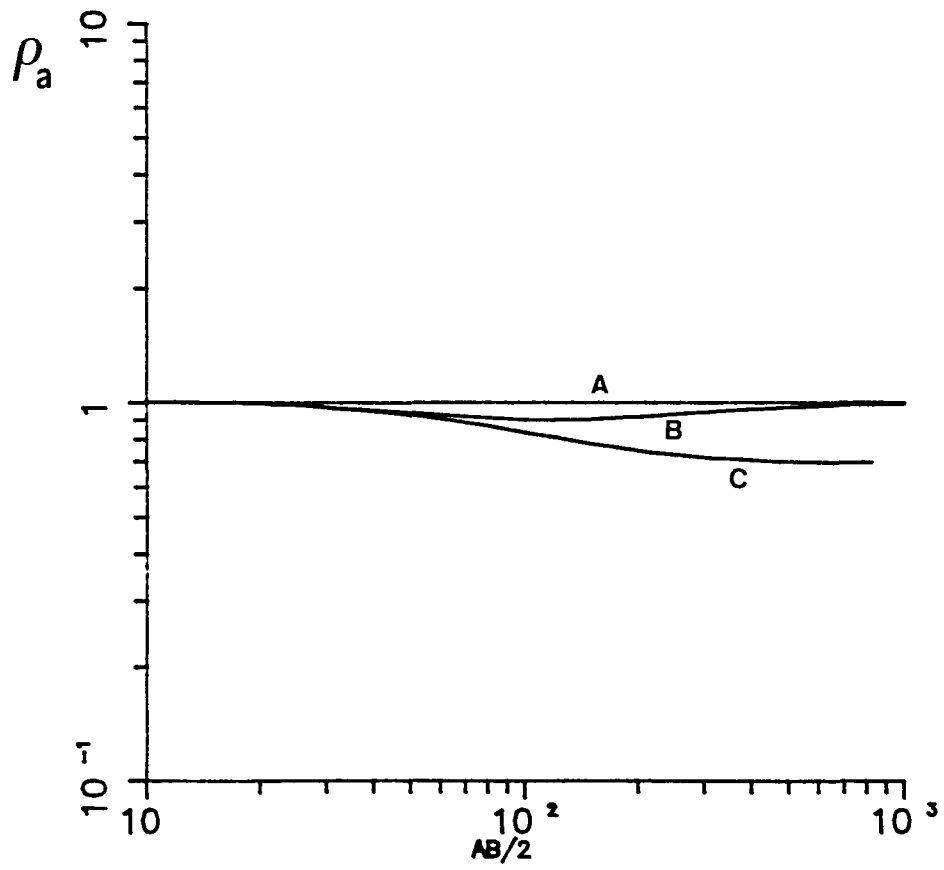


Figura 5.17 . Efecte lateral d'una pared en el medi homogeni.

distàncies  $AB/2 \leq 2d$  l'anomalia de les corbes és inferior al 5%.

Tot seguit passem a estudiar aquest mateix exemple sobre un medi estratificat. S'han simulat els mateixos models A, B i C però sobre un medi estratificat de tres capes de resistivitats:  $\rho_1 = 1 \Omega\text{m}$ ,  $\rho_2 = 100 \Omega\text{m}$  i  $\rho_3 = 1 \Omega\text{m}$  i gruixos:  $t_1 = 5 \text{ m}$  i  $t_2 = 25 \text{ m}$  i s'ha mantingut  $d = 26 \text{ m}$ .

La figura 5.18 representa els models A (medi estratificat), B (medi estratificat amb pared d'alçada  $d$ ) i C (medi estratificat amb pared d'alçada infinita) i les corbes obtingudes. L'efecte produït per la pared és qualitativament equivalent al produït en el medi homogeni: una disminució de la resistivitat aparent en les corbes B i C respecte la corba A, però en aquest model l'efecte de la pared és més important. La morfologia de les corbes no canvia, contínua essent corbes de tipus K, si bé queden fortament afectades per la presència de la pared conductora. S'observa també com l'efecte de la pared fa disminuir fortament el màxim de la  $\rho_a$  (fins aproximadament un 50%). Per  $AB/2 \leq d$ , les corbes B i C no es distingeixen i presenten una discrepància respecte de la corba A (medi estratificat) fins a un 10%. Per aquest model, a diferència del medi homogeni, cal mantenir-nos a  $AB/2 \leq d/2$  per no sobrepassar un error del 5%.

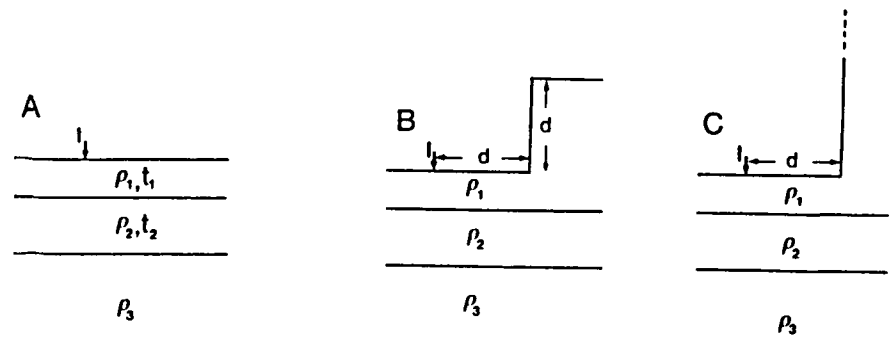
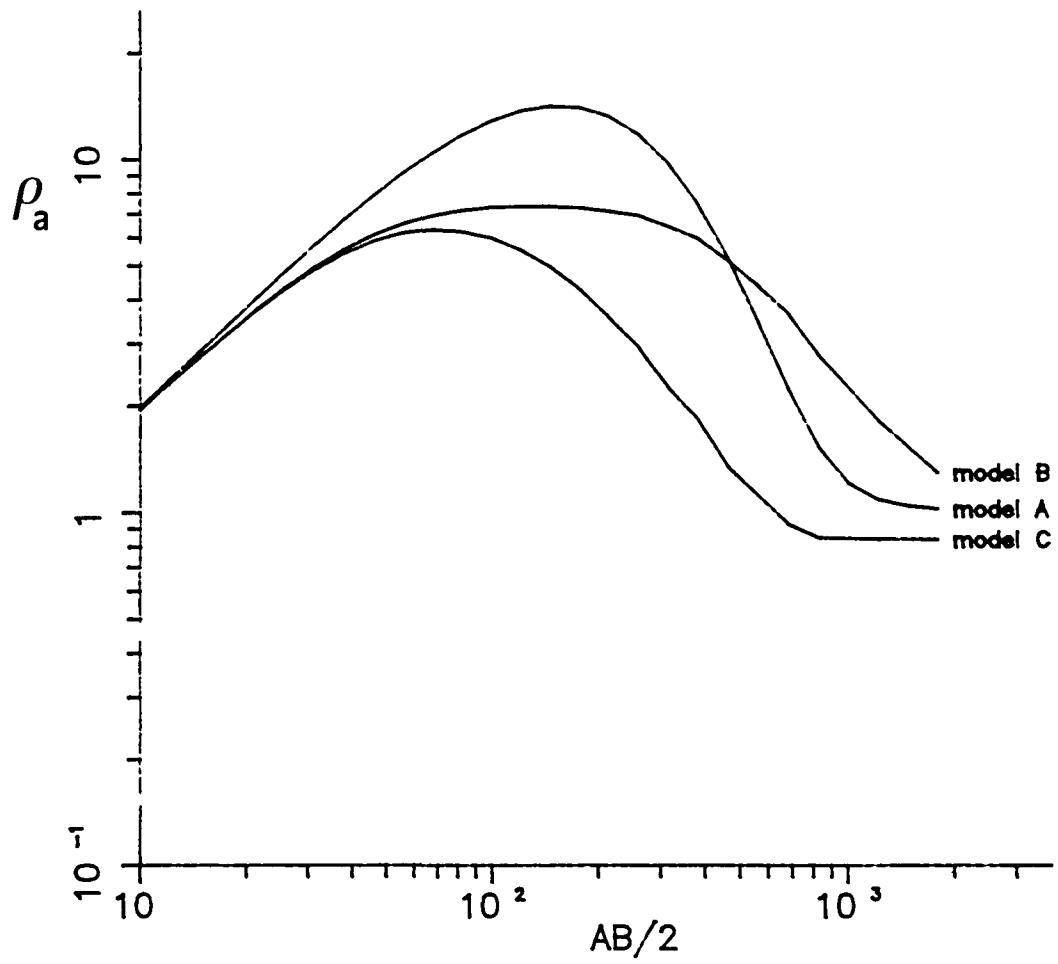


Figura 5.18. Efecte lateral d'una paret en un medi estratificat.



Aquest exemple mostra una vegada més que si bé a grans trets la influència d'aquests efectes (parets o desnivells) queda reflectida en el medi homogeni, en els medis estratificats els efectes poden estar amplificats o enmascarats en funció de les relacions existents entre els paràmetres del model.

#### 5.4.4. Efectes laterals produïts per un horst en el basament.

Un camp típic d'aplicació del SEV és l'estudi de determinació de fondàries del basament. El basament sovint presenta també efectes topogràfics deguts a accidents tectònics. Aquests efectes poden influir de manera molt diversa a les corbes de  $\rho_a$ . Dependrà molt de com estiguin relacionats els paràmetres del model (bàsicament contrast de resistivitats, dimensions de l'anomalia, fondària a la que es troba) i la posició i dimensions del dispositiu. Aquests efectes són delicats perquè són alhora efectes laterals i de profunditat. Però sobre tot perquè des de la superfície no tenim indicis de que poden existir, com si que els tenim davant d'un salt, desnivell o efecte topogràfic. A més al no tenir contactes aflorant les corbes són suaus i, com veurem, totalment compatibles amb models purament estratificats.

La importància pràctica de models com aquest ha quedat reflectida en una recent publicació sobre la geometria d'unes cubetes del Pirineu (Bordonau et al. 1989).

Presentem a continuació la modelització d'un horst en el basament considerant la direcció del sondatge perpendicular a la "strike direction", que és la situació més desfavorable.

El model construït correspon a un model de tres capes de resistivitats:  $\rho_1 = 2400 \Omega_m$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega_m$ ,  $\rho_3 = 1000 \Omega_m$  i gruixos:  $t_1 = 30m$ ,  $t_2 = 230m$ . El horst del basament té les següents dimensions:  $h = 210m$  i una amplada "a" variable. Anomenarem "d" la distància dels centre de dispositiu al vèrtex del horst.

Hem elaborat uns àbacs presentats en les figures 5.19, 5.20 i 5.21 que permeten estudiar la influència dels diferents paràmetres del model. Presentem tres situacions:

- a- Efecte de l'amplada quan el sondatge està centrat sobre el horst (figura 5.19).
- b- Efecte de l'amplada per una determinada distància "d" (figura 5.20).
- c- Efecte de la distància per una determinada amplada "a" (figura 5.21).

En tots aquests àbacs s'observa que les corbes són suaus i sense punts característics (degut a que els claus no atravesen contactes

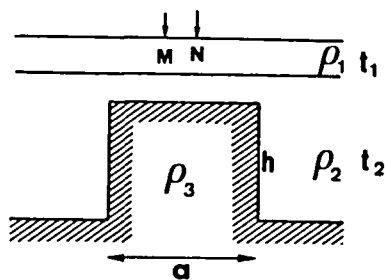
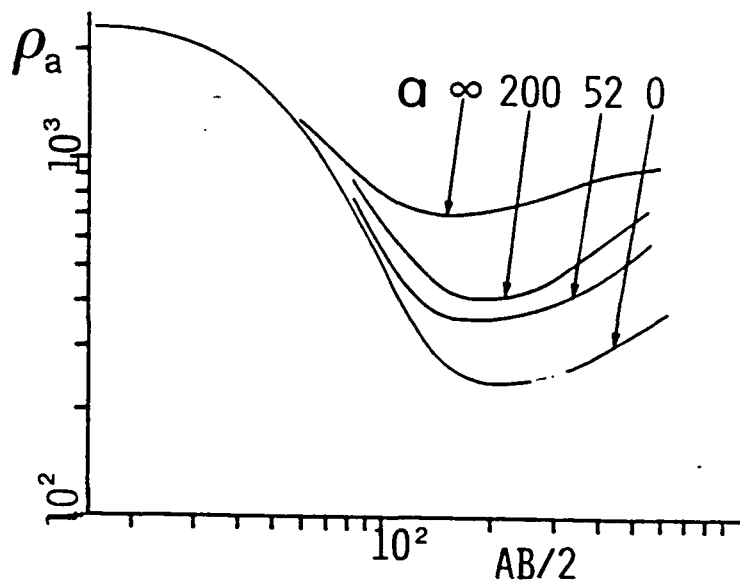


Figura 5.19. Efecte de l'amplada quan el sondatge està centrat sobre el horst.

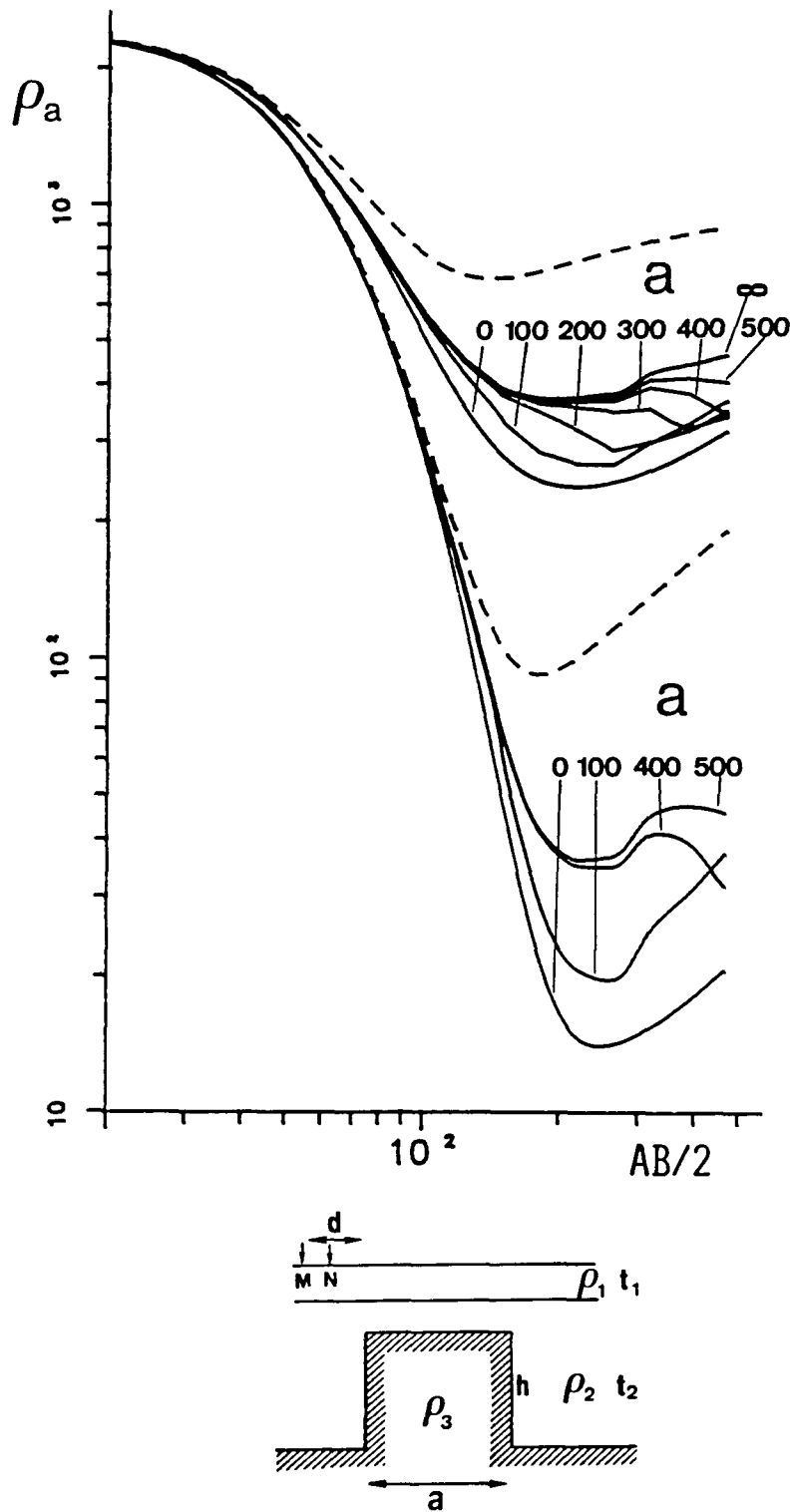


Figura 5.20. Efecte de l'amplada per a una distància  $d = 50$  m.

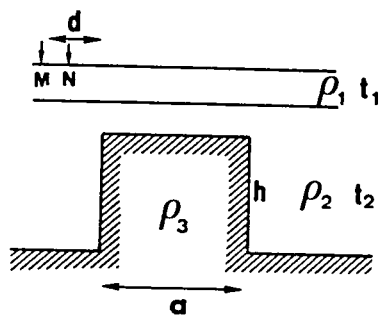
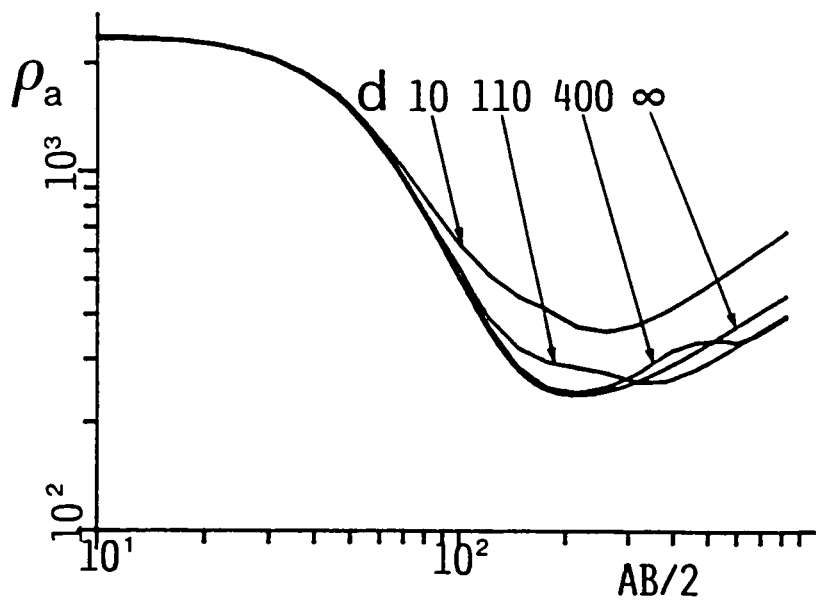


Figura 5.21. Efecte de la distància per una amplada  $a = 200$  m.

aflorants). La seva morfologia fa que siguin corbes compatibles amb medis estratificats. L'error principal en la interpretació d'aquestes corbes com a medis estratificats és que podriem associar efectes laterals a canvis profunds de resistivitat.

Les corbes associades al horst modelitzat són principalment de tipus H, i en alguns casos de tipus HKH. La interpretació d'aquestes corbes de  $\rho_{\alpha}$  com a medis horitzontals provocaria tres errors principals:

1- Error en la determinació de la resistivitat de la capa conductora ( $\rho_2$ ).

2- Error en la determinació de la fondària del basament, generalment una sobreestimació.

3- Error en el nombre de capes. En determinats casos (si  $a \approx 2h$  o  $d \approx 2h$ ) portaria a considerar una capa fictícia resistiva (intercalada en la capa conductora).

Evidentment, la situació més desfavorable és quan apareix la capa fictícia. Possiblement que el problema queda solucionat en part per la correlació de sondatges pròxims i a diferents distàncies del horst. Cal aleshores interpretar la primera pujada de la corba (el sostre de la capa fictícia) com el basament.

#### 5.4.5. Efectes topogràfics sobre medis estratificats.

Hi ha molts pocs estudis d'efectes topogràfics sobre el SEV, tot i que és conegut que poden afectar enormement a les mesures per la gran deformació que sofreixen les corbes equipotencials a prop de la superfície. El treballs que es basen en mètodes analítics presenten geometries una mica forçades (Cecchini i Rocroi 1980, Dasguta 1987); el treball de Holcombe et al. 1984, basat en modelització numèrica, no aporta criteris pràctics.

Els models més interessants i els més freqüents són els que corresponen a efectes topogràfics sobre medis estratificats. Sovint el que interessa és conèixer com queden afectades les corbes de  $\rho_a$  quan algún elèctrode de corrent ha de desplaçar-se necessàriament sobre un pendent.

Hem estudiat els efectes topogràfics corresponents a un turó (figura 5.22) i a una vall (figura 5.23) sobre un medi homogeni de resistivitat  $\rho = 100 \Omega m$  i sobre un medi de dues capes de resistivitats  $\rho_1 = 10 \Omega m$  i  $\rho_2 = 100 \Omega m$  i un gruix  $t_1$  variable. La distància del centre del dispositiu a la aresta del diedre és  $d = 25m$  i  $\beta$  és l'angle de la pendent respecte a l'horitzontal.

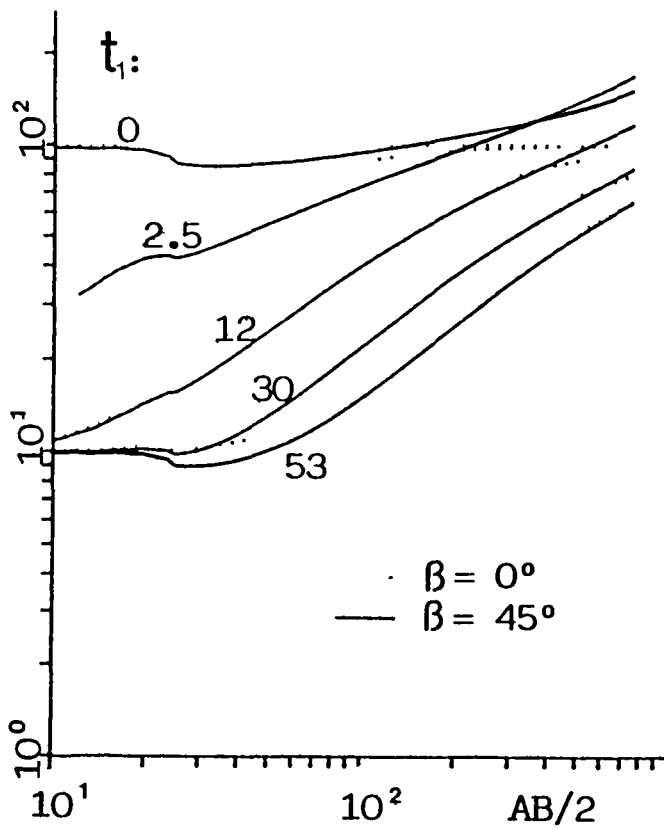
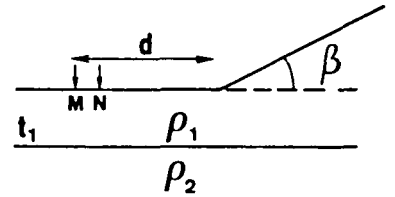
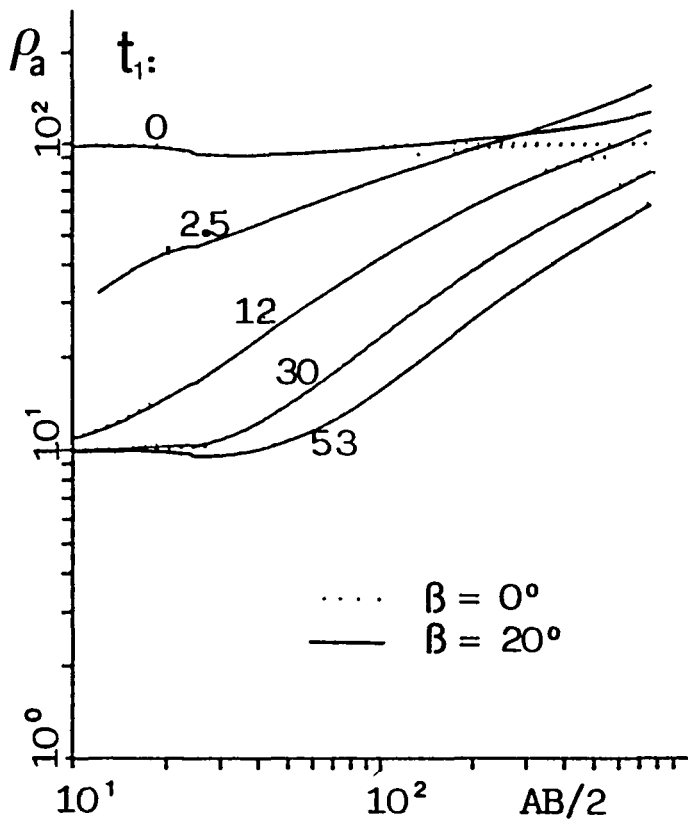


Figura 5.22. Àbac per l'estudi de l'efecte topogràfic d'un turó.



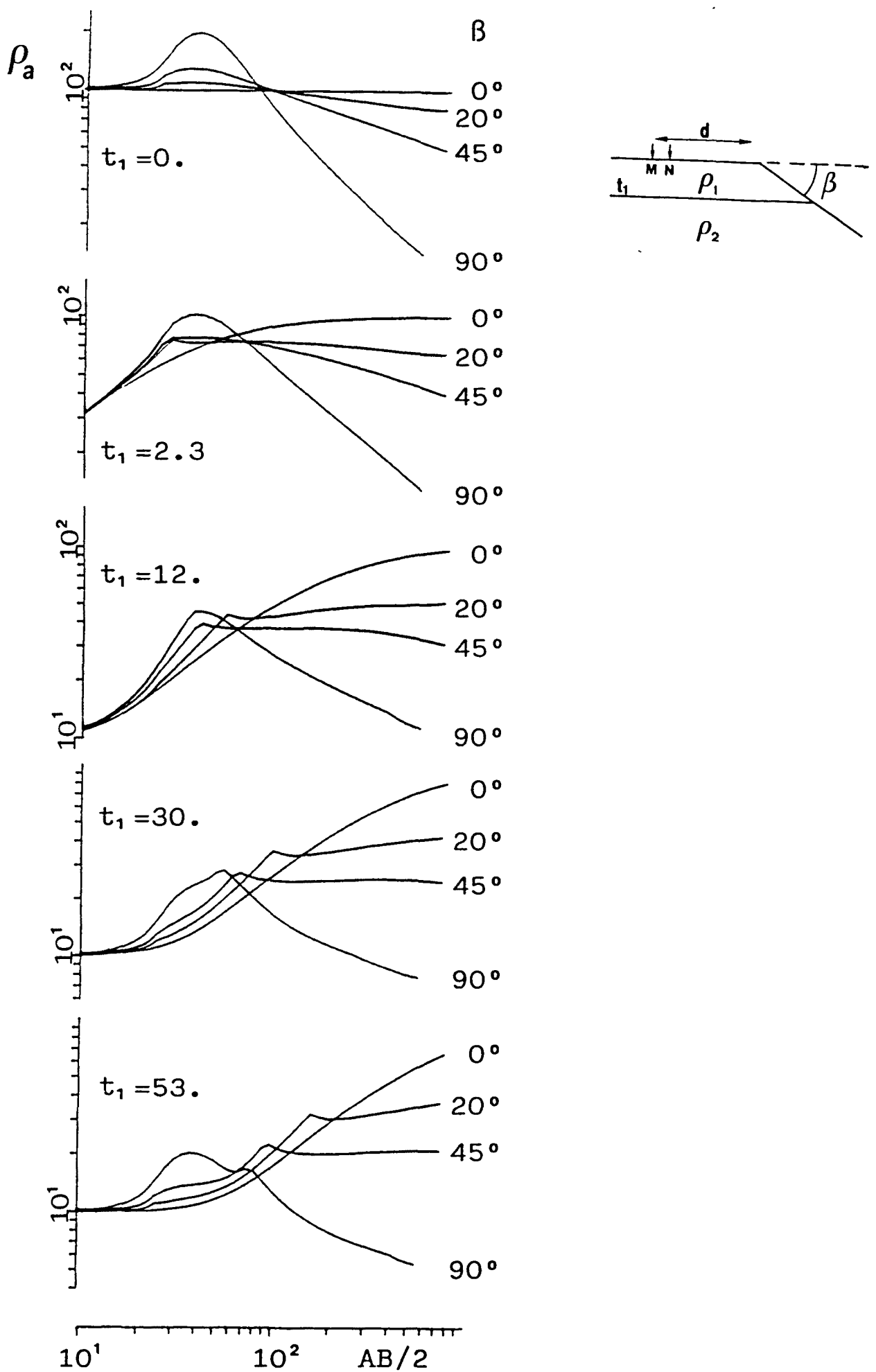


Figura 5.23. Àbacs per l'estudi de l'efecte topogràfic d'una vall.

En la figura 5.22 presentem els àbac corresponents al turó. Es presenten dos àbac, un per cada angle  $\beta$  considerat:  $\beta = 20^\circ$  i  $45^\circ$ . Les corbes representades per punts corresponen a  $\beta = 0^\circ$ , és a dir, corbes sense efecte topogràfic. En cada corba s'indica el gruix de la primera capa.

En la figura 5.23 presentem els àbac corresponents a la vall. Hem considerat els següents valors dels paràmetres:  $\beta = 0^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ . Les corbes corresponents al cas límit de  $\beta = 90^\circ$  ens permetran conèixer el grau màxim de distorsió. Presentem un àbac per cada gruix  $t_1$  indicant les diferents  $\beta$  al costat de cada corba.

A la vista d'aquests àbac podem arribar a les següents constatacions generals:

- Els efectes topogràfics distorsionen les corbes corresponents als medis estratificats produint unes anomalies en la  $\rho_a$  que, evidentment, en augmentar el  $AB/2$  i l'angle  $\beta$ , creixen.
- Els efectes topogràfics són més importants sobre medis estratificats que sobre el medi homogeni.
- Per una mateixa pendent ( $\beta = ct.$ ) el cas de la vall afecta més que el cas del turó. La forma de la corba és més complicada, tenim un

punt característic quan un elèctrode atravesa el contacte aflorant de les dues capes ( $\rho_1, \rho_2$ ) (figura 5.23). La posició d'aquest punt és:  $AB/2 = d + t_1 \cdot \sin \beta$ , on  $AB/2$  es mesura sobre la topografia. Aquestes corbes podrien interpretar-se erròniament com corbes de tipus K.

- Ordres de magnitud:

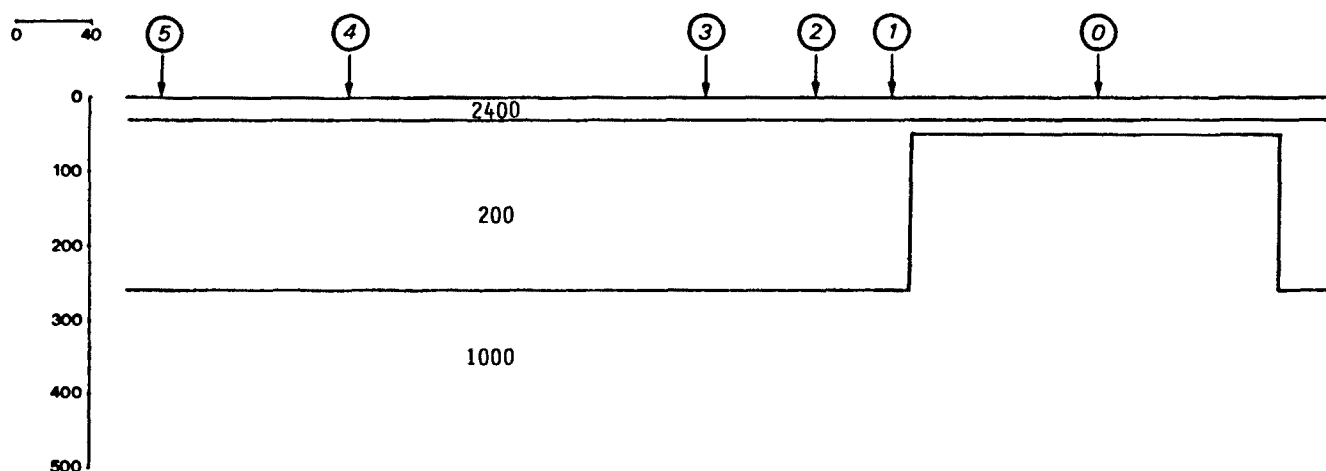
Per  $AB/2 \leq d$  i per  $\beta \leq 20^\circ$  (pendents inferiors al 35%) l'anomalia deguda al efecte topogràfic és inferior al 10% (diferència relativa de  $\rho_a$  amb efecte topogràfic i sense ell). Pel cas límit -  $\beta = 90^\circ$  - la anomalia és inferior al 40%.

Per  $AB/2 \geq d$  (un elèctrode de corrent es desplaça sobre la pendent) i  $\beta \leq 20^\circ$  la anomalia pot augmentar fins un 30% a prop del contacte  $\rho_1$  amb  $\rho_2$  (en el cas de la vall) i es manté inferior a un 20% en el cas del turó fins a un  $AB/2 \approx 4d$ .

#### 5.5.6. Interpretació unidimensional d'un model bidimensional.

Per tal de conèixer la importància dels efectes laterals en el SEV, hem simulat una petita campanya de SEV sobre un model bidimensional, interpretant les corbes obtingudes en la

modelització bidimensional com corbes corresponents a medis estratificats. De la correlació entre la interpretació dels diferents SEV s'ha obtingut un tall geològic que es compara amb el model bidimensional de partida.



*Figura 5.24. Model bidimensional utilitzat per la generació de les dades sintètiques en els SEV assenyalats.*

El model bidimensional elegit per fer aquesta simulació és el del horst en el basament, realitzant els sondatges amb el dispositiu perpendicular a l'estructura i a diferents distàncies del centre del horst. El model està representat en la figura 5.24. Correspon a

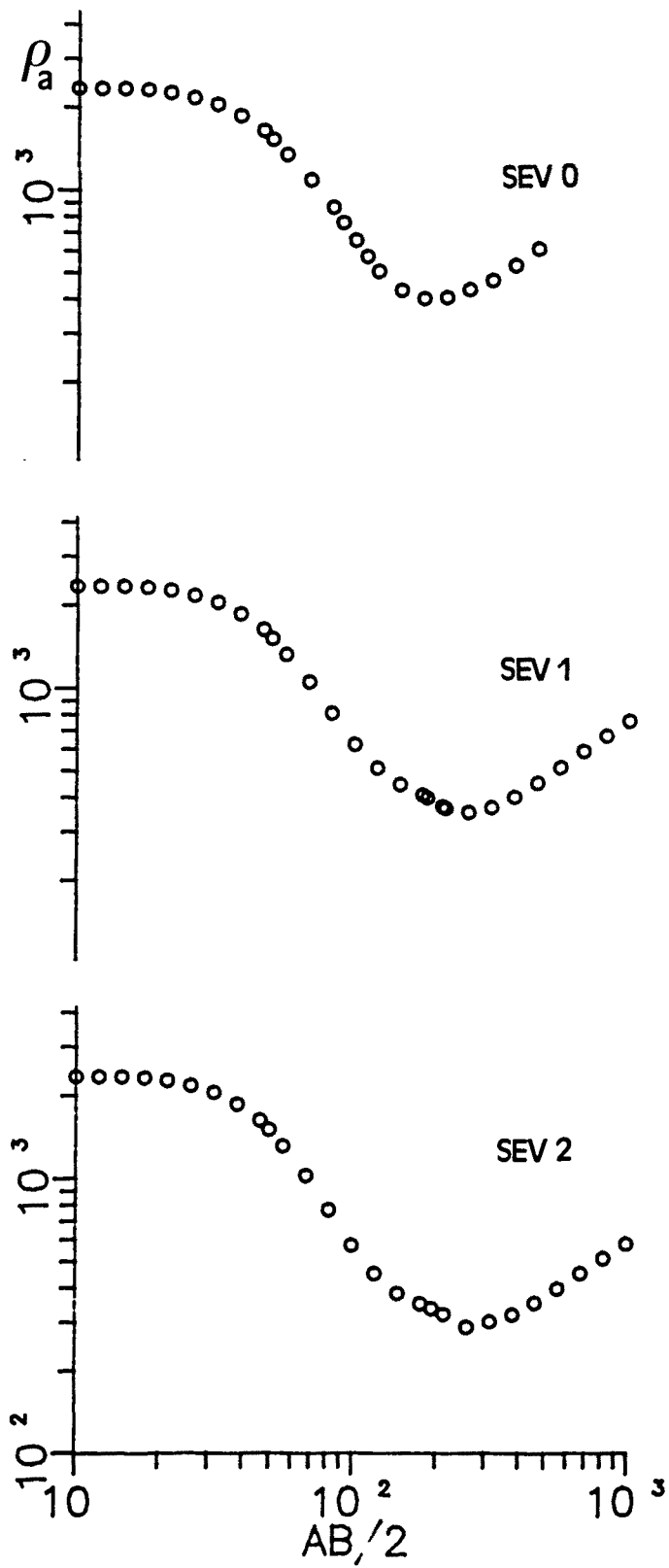


Figura 5.25. Corbes de resistivitat aparent corresponents als SEV 0,1 i 2.

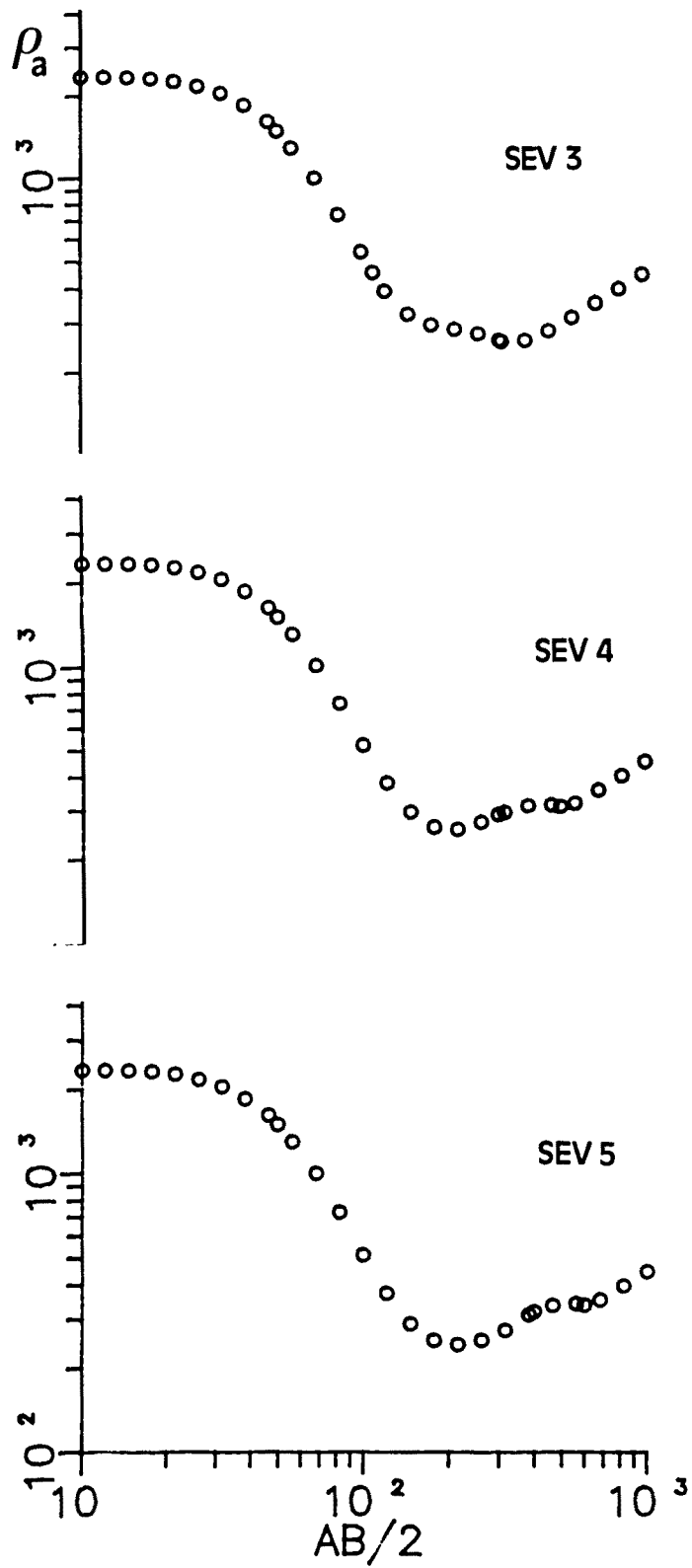


Figura 5.26. Corbes de resistivitat aparent corresponents als SEV 3,4 i 5.

un medi estratificat de tres capes de resistivitats:  $\rho_1 = 2400 \Omega_m$ ,  $\rho_2 = 200 \Omega_m$  i  $\rho_3 = 1000 \Omega_m$ , i gruixos  $t_1 = 30m$  i  $t_2 = 230m$ , presentant un horst en el basament de les següents dimensions: amplada  $a = 200m$  i alçada  $h = 210m$ .

A la mateixa figura 5.24 s'indiquen els punts on s'han realitzat els sondatges (SEV 0, 1, 2, 3, 4 i 5) que corresponen a les distàncies: 500, 400, 210, 150, 100 i 0m, del centre del horst respectivament.

A les figures 5.25 i 5.26 estan representades les corbes de resistivitat aparent corresponents als SEV 0, 1, 2, 3, 4 i 5 respectivament obtingudes via modelització. A la vista d'aquestes figures, les corbes poden semblar compatibles amb medis estratificats. Inclús la 4 i la 5 que presenten la clara inflexió degut a la influència del horst, poden passar com corbes compatibles amb un medi unidimensional, més encara considerant el marge d'error experimental.

Aquest model és representatiu de moltes situacions pràctiques on l'absència d'efectes topogràfics o contactes aflorants, junt amb la compatibilitat morfològica de les corbes de  $\rho_a$  amb corbes de medis estratificats, farien pensar que no és necessari la modelització bidimensional.

El criteri utilitzat per la inversió de les corbes de  $\rho_a$  ha estat

el següent: s'han pres els valors de  $\rho_a$  de les corbes resultat de la modelització (figures 5.25 i 5.26) amb un interval de 6 punts per cicle i amb un programa d'inversió s'han interpretat com corbes tipus H (corba 0) i tipus HKH (corbes 1,2,3,4 i 5) per tal de tenir en compte la inflexió que apareix clarament en els SEV més allunyats del horst (SEV 4 i 5). El marge de discrepància màxim admès entre les corbes "teòriques" (interpretació 1d) i "experimentals" (modelització 2d) ha estat inferior al 5%.

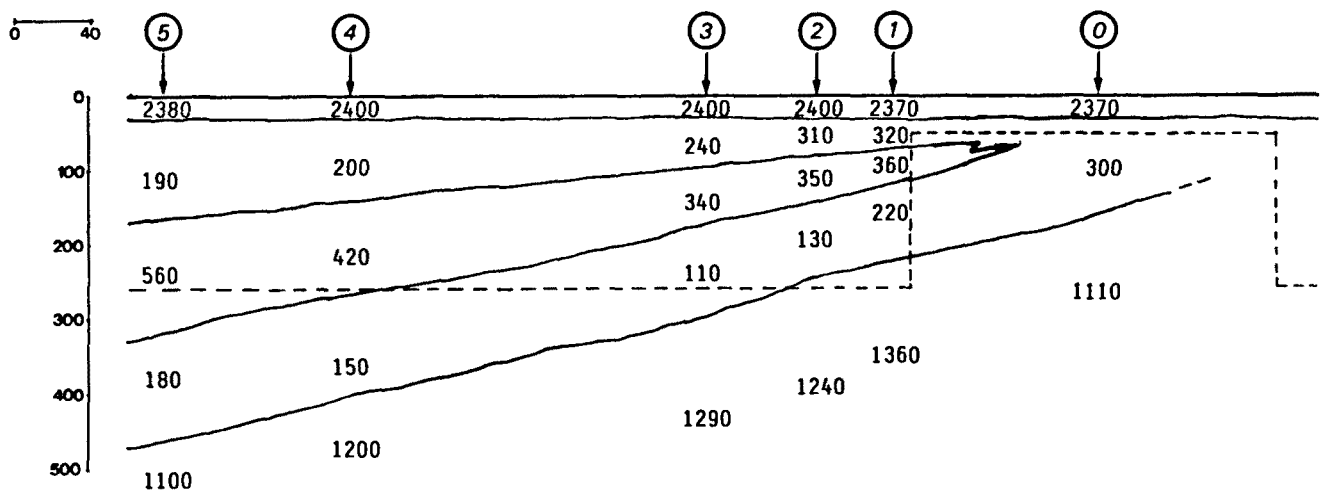


Figura 5.27. Tall geoelectric obtingut a partir de la interpretació unidimensional dels SEV.



A la figura 5.27 presentem el tall geoelectric resultat d'aquestes interpretacions. Evidentment, aquest és només un dels possibles talls, ja que tenint en compte l'equivalència, - sobretot en les corbes 4 i 5-, podrien obtenir-se altres interpretacions. Les corbes corresponents als SEV 1, 2 i 3 s'han interpretat buscant d'entre els models equivalents aquells correlacionables amb les corbes del SEV 4 i 5 i amb la corba del SEV 0, que és simplement de tipus H.

Comentem tot seguit les principals discrepàncies del tall geoelectric obtingut amb la interpretació unidimensional (figura 5.27) respecte el model bidimensional de partida (figura 5.24).

- Topografia del basament.

El tall geoelectric ens reflecteix correctament un aixecament del basament conforme ens desplaçem a la dreta però sobrevalorant la fondària d'aquest (en els SEV 5,4,3 i 0). En el SEV 0, centrat sobre el horst, la fondària del basament es sobreestima en 100m més de la fondària real i, en el SEV 5, 200m. L'aixecament del basament es produeix aparentment sense salts laterals, encara que amb un fort cabussament, d'uns  $30^{\circ}$ . S'ha produït un suavitzat de la topografia del basament.

- Intercalació resistiva.

Com hem comentat anteriorment, les corbes de  $\rho_a$  presenten una inflexió que es va desplaçant cap a  $AB/2$  més grans, conforme ens allunyem del horst, que fa intuir una capa resistiva intercalada en la zona relativament conductora. En el tall geoelectric, observem que aquesta capa podria interpretar-se amb una potència considerable (uns 150m) en el SEV 5. Aquesta capa aniria aprimant-se, fent-se més superficial i menys resistiva conforme ens apropem al horst fins a desaparèixer, entre el SEV 1 i SEV 0.

- Resistivitat del reompliment conductor.

Per últim tenim un efecte en la determinació de la resistivitat dels trams conductors (relatius), que corresponen a les capes segona i quarta en els SEV 1, 2, 3, 4 i 5 i a la tercera en el SEV 0. Recordem que la resistivitat real del conductor és  $200 \Omega_m$ . En el tall geoelectric (figura 5.27) trobem unes resistivitats de també uns  $200 \Omega_m$  (en els SEV 5 i 4) però que a grans trets va tendint als valors de  $300 \Omega_m$  conforme ens apropem al horst. En el SEV 0 (el sondatge està centrat sobre el horst) l'efecte del horst és bàsicament l'augment de la resistivitat de la tercera capa i de la

fondària del basament (en relació a la profunditat real a la que es troba just en la vertical del SEV).

De la comparació realitzada entre el model bidimensional i el tall geolèctric obtingut amb la interpretació unidimensional, podem concloure que la interpretació unidimensional atribueix a variacions en profunditat de la resistivitat el que en realitat són variacions laterals, resultant un model de fet més complicat que el model real.

## CONCLUSIONS.

En aquest treball s'ha realitzat una modelització d'estructures bidimensionals per la prospecció elèctrica en corrent continu, la qual cosa representa un pas important per l'ampliació del camp d'aplicacions dels mètodes elèctrics de prospecció. Els pocs treballs previs que hi havien sobre aquest tema presenten unes incògnites en alguns dels aspectes fonamentals. Per exemple, mai havia estat abordat suficientment el problema del control de la solució obtinguda per mètodes numèrics. Un altre fet significatiu era la impossibilitat de modelitzar operativament en dispositius elèctrodics paral·lels a l'estructura bidimensional (strike direction), la qual cosa representa una limitació pràctica prou important. En l'apartat de les aplicacions que es deriven d'una modelització bidimensional hi havia un buit referent a l'estudi de la influència dels efectes laterals (bidimensionals) en el dispositiu elèctrodic que possiblement sigui el més utilitzat. Ens referim al sondatge elèctric vertical. Una conclusió general d'aquest treball es que podem afirmar que hem donat una solució a cada un d'aquests problemes i que es disposa de la infraestructura per abordar cada problemàtica geològica concreta amb independència de si és o no aproximable al clàssic model estratificat.

A continuació es resumeixen els aspectes concrets que es

conclouen. Els hem agrupat en dos apartats, un fa referència al procés general de modelització pròpiament dit i l'altre a les aplicacions que hem realitzat.

### PROCÉS DE MODELITZACIÓ.

L'algorisme de modelització que s'ha desenvolupat i el programa que s'ha construït a partir d'ell, permeten l'estudi de qualsevol estructura bidimensional. L'algorisme generalitza els anteriors existents basats en el mètode dels elements finits ja que resol directament el problema pel potencial total, inclou la modelització d'estructures bidimensionals tant en presència de fonts bidimensionals com tridimensionals, contempla tots els tipus possibles de condicions de contorn i dona solució a la problemàtica del càlcul pel potencial en direccions no perpendiculars a la de l'estructura, en particular en la direcció paral·lela.

La validesa de l'algorisme i el correcte funcionament dels programes han estat comprovats pels models dels quals es disposa d'una solució analítica (models de control): model homogeni, models estratificats i un model de contacte vertical entre dos medis. Pels models més complexos es realitza un estudi de la convergència i l'estabilitat de les solucions obtingudes numèricament.

L'estudi del problema tridimensional ha comportat la utilització del potencial espectral  $\tilde{V}$ , a partir del qual es determina el potencial antitransformat  $V$ . El potencial transformat s'ha estudiat en detall i s'han determinat criteris òptims per al seu càlcul numèric, que faciliten la resolució del potencial en la direcció paral·lela a l'estructura bidimensional. De l'anàlisi de les aproximacions incloses en l'algorisme i de les fonts d'errors inherents al propi mètode numèric hem obtingut uns criteris metodològics per l'elecció de la xarxa de discretització.

#### APLICACIONS.

Com aplicació de la modelització realitzada amb el nostre algorisme presentem els casos més freqüents d'estructures bidimensionals, considerant a la vegada diferents configuracions de dispositiu electròdic. Els problemes estudiats han estat:

- El dispositiu gradient per l'anomalia creada per un cilindre resistiu situat en un medi homogeni en l'aproximació de potencial bidimensional.
- El dispositiu dipol-dipol per l'anomalia creada per un dic rectangular conductor.

-S'ha dedicat especial atenció als diferents efectes i anomalies que es presenten en els sondatges elèctrics verticals amb dispositiu Schlumberger. Els models estudiats han estat:

- 1- Efectes d'inhomogeneïtats a l'entorn dels elèctrodes de potencial.
- 2- Efecte d'un esglaó en la superfície.
- 3- Efectes laterals produïts per contactes verticals i desnivells.
- 4- Efectes laterals produïts per un "horst" en el basament.
- 5- Efectes topogràfics sobre medis estratificats.

La resolució d'aquests models ha portat a l'elaboració d'un conjunt d'àbacs que permeten mostrar la morfologia de les corbes de resistivitat aparent i observar la influència dels diferents paràmetres dels models. Aquests àbacs són d'una gran utilitat a l'hora de realitzar la interpretació i/o d'efectuar les correccions d'aquests efectes.

Els efectes depenen del model particular considerat. Dels resultats obtinguts podem indicar que aquests efectes són importants i s'han de tenir en compte quan es fa la interpretació, tal com mostrem a l'exemple de la interpretació d'una estructura bidimensional (com és un horst) mitjançant un model unidimensional, on es tendeix a sobrevalorar la fondària del basament.

D'aquest treball sorgeixen unes perspectives immediates. Des de la realització d'un conjunt d'àbacs que recullin les morfologies de les corbes de resistivitat aparent per una àmplia gamma de models bidimensionals, fins a l'optimització dels algorismes d'inversió aplicats a aquests tipus d'estructures que, ara per ara, no són suficientment viables. Tots aquests aspectes porten a una ampliació del camp d'actuació del mètodes elèctrics.





## REFERÈNCIES.

- Abramowitz, M. i Stegun, I.A. (1970). Handbook of mathematical functions. Dover Publications, Nova York, 1046 pp.
- Alfano, L. (1959). Introduction to the interpretation of resistivity measurements for complicated structural conditions. Geophys. Prospect., 7, 311-366.
- Bibby, H.M. (1978). Direct current resistivity modeling for axially symmetric bodies using the finite element method. Geophysics, 43, 550-562.
- Bichara, M. i Lashmanan, J. (1976). Fast automatic processing of resistivity soundings. Geophys. Prospect., 24, 354-370.
- Bordonau, J., Pous, J., Queralt, P. i Vilaplana, J.M. (1989). Geometría y depósitos de las cubetas glaciolacustres del Pirineo. Estudios geol., 45, 71-79.
- Cecchini, A. i Rocroi, J.P. (1980). Effet topographique en prospection électrique. Geophys. Prospect., 28, 977-993.
- CGG (Compagnie Generale de Geophysique) (1955). Abaques de sondage électrique. Geophys. Prospect., 3, suppl. 3.
- Coggon, J.H. (1971). Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. Geophysics, 36, 132-156.
- Das, U.C. i Parnasis, D.S. (1987). Resistivity and induced polarisation responses of arbitrarily shaped 3-D bodies in a two-layered earth. Geophys. Prospect., 35, 98-109.
- Dasgupta, S.P. (1987). Mathematical analysis of D.C. resistivity sounding over a paraboloid. Geophys. Prospect., 35, 924-931.
- Dey, A. i Morrison, H.F. (1979a). Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. Geophys. Prospect., 27, 106-136.
- Dey, A. i Morrison, H.F. (1979b). Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures. Geophysics, 44, 735-780.

- Dieter, K. i Paterson, N.R. (1969). IP and resistivity type curves for three-dimensional bodies. *Geophysics*, 34, 615-632.
- Fox, R.C., Hohmann, G.W., Killpack, T.J. i Rijo, L. (1980). Topographic effects in resistivity and induced-polarisation surveys. *Geophysics*, 45, 75-93.
- Geertsma, J. (1971). Finite-element analysis of shallow temperature anomalies. *Geophys. Prospect.*, 19, 662-679.
- Gosh, D.P. (1971a). The application of linear theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements. *Geophys. Prospect.*, 19, 192-217.
- Gosh, D.P. (1971b). Inverse filter coefficients for the computation of apparent resistivity standard curves for a horizontally stratified earth. *Geophys. Prospect.*, 19, 769-775.
- Grant, F.S. i West, G.F. (1961). Interpretation theory in applied Geophysics. McGraw-Hill, Nova York, 584 pp.
- Holcombe, H.T. i Jiracek, G.R. (1984). Three-dimensional terrain corrections in resistivity surveys. *Geophysics*, 49, 439-452.
- Inman, J.R., Ryu, J. i Ward, S.H. (1973). Resistivity Inversion. *Geophysics*, 38, 1088-1108.
- Johansen, H.K. (1975). An interactive computer-graphic-display-terminal system for interpretation of resistivity soundings. *Geophys. Prospect.*, 23, 449-458.
- Jupp, D.L. i Vozoff, K. (1975). Stable interactive method for the inversion of geophysical data. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 42, 957-976.
- Kalenov, E.N. (1957). Interpretación de curvas de sondeos eléctricos verticales. Traduït del rus en 1974 pel M.O.P., 604 pp.
- Koefoed, O. (1968). The application of the kernel function in interpreting geoelectrical resistivity measurements. Borntraeger, Berlin, 111 pp.
- Koefoed, O. (1979). Geosounding principles, 1. Resistivity sounding measurements. Elsevier, Amsterdam, 276 pp.

- Kumar, R. i Das, U.C. (1977). Transformation of dipole to Schlumberger sounding curves by means of digital linear filtering. *Geophys. Prospect.*, 25, 780-789.
- Kunetz, G. (1966). Principles of direct current resistivity prospecting. Borntraeger, Berlin, 101 pp.
- Lee, T. (1975). An integral equation and its solution for some two- and three-dimensional problems in resistivity and induced polarization. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 42, 81-89.
- Logn, Ö. (1954). Mapping nearly vertical discontinuities by earth resistivities. *Geophysics*, 19, 739-760.
- Lysmer, J. i Drake, L.A. (1971). The propagation of Love waves across non-horizontally layered structures. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 61, 1233-1251.
- Maeda, K. (1955). Apparent resistivity for dipping beds. *Geophysics*, 20, 123-147.
- Maillet, R. (1947). The fundamental equations of electrical prospecting. *Geophysics*, 12, 529-556.
- Maillet, R. i Doll, H.G. (1933). Sur un théoreme relatif aux milieux électriquement anisotropes et ses applications a la prospection électrique en courant continu. *Beitrag ang. Geophys.* III, 109
- Marchouk, G. i Agoshkov, V. (1985). Introduction aux méthodes des éléments finis. Ed. MIR, Moscou, 432 pp.
- Mooney, H.M., Orellana, E., Pickett, H. i Tornheim, L. (1966). A resistivity computation method for layered earth models. *Geophysics*, 31, 192-203.
- Mufti, I.R. (1976). Finite difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysics*, 41, 62-78.
- Mufti, I.R. (1978). A practical approach to finite-difference resistivity modeling. *Geophysics*, 43, 930-942.
- Mufti, I.R. (1980). Finite-difference evaluation of apparent resistivity curves. *Geophys. Prospect.*, 28, 146-166.

Mundry, E. i Homilius, J. (1972). Resistivity measurements in valleys with elliptic cross-section. *Geophys. Prospect.*, 20, 341-362.

Mundry, E. (1984). Geoelectrical model calculations for a two-dimensional resistivity distributions. *Geophys. Prospect.*, 32, 124-131.

Okabe, M. (1981). Boundary element method for the arbitrarily inhomogeneities problem in electrical prospecting. *Geophys. Prospect.*, 29, 39-59.

Okabe, M. (1982). Reciprocal averaging techniques in the geoelectrical boundary element approach. *Geophys. Prospect.*, 30, 653-672.

O'Neill, D.J. (1975). Improved filter linear coefficients for application in apparent resistivity computations. *Bull. Aust. Soc. Explor. Geophys.*, 6, 104-109.

Orellana, E. (1959). Analogía entre los campos de corrientes y los electrostáticos aplicada a los métodos geoelectricos. *Rev. de Geofísica*, 18, 19-28.

Orellana, E. (1982). *Prospección eléctrica en corriente continua*. Ed. Paraninfo, Madrid, 578 pp.

Orellana, E. i Mooney, H.M. (1966). *Master tables and curves for vertical electrical sounding over layered structures*. Interciencia, Madrid.

Pekeris, C.L. (1940). Direct method of interpretation in resistivity prospecting. *Geophysics*, 5, 31-42.

Pelton, W.M., Rijo, L. i Swift, J.R. (1978). Inversion of two-dimensional resistivity and IP data. *Geophysics*, 43, 788-803.

Petrick, W.R., Sill, W.R. i Ward, S.H. (1981). Three-dimensional resistivity inversion using alpha centers. *Geophysics*, 46, 1148-1162.

Pous, J. (1983). *Aplicaciones de la inversión generalizada a la interpretación de sondeos geoelectricos*. Tesi de Doctorat. Universitat de Barcelona, 159 pp.

- Pous, J., Marcuello, A. i Queralt, P. (1987). Resistivity inversion with a priori information. *Geophys. Prospect.*, 35, 590-603.
- Pridmore, D., Hohmann, G.W., Ward, S.H. i Sill, W.R. (1981). An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic modeling data in three dimensions. *Geophysics*, 46, 1009-1024.
- Queralt, P. (1985). Models numèrics bidimensionals i tridimensionals per a la prospecció geolèctrica. Tesi de Llicenciatura. Universitat de Barcelona. 105 pp.
- Queralt, P., Pous, J. i Marcuello, A. (1989). Modelización de estructuras bidimensionales en prospección eléctrica mediante el método de los elementos finitos. *Rev. de Geofísica*, 45, 3-14.
- Ralston, A i Wilf, H.S. (1967). *Mathematical methods for digital computers* (v. 2). John Wiley & Sons, Nova York, 287 pp.
- Rijo, L. (1977). Modelling of electric and electromagnetic data. Ph. D. Thesis. University of Utah.
- Rijswaterstaat. (1969). *Standard graphs for resistivity prospecting*. EAEG, La Haya.
- Sánchez, B. (1984). Cálculo de modelos para la interpretación cuantitativa con el método eléctrico de resistividad. Tesis Doctoral. ETS de ingenieros de Minas, Universidad de Oviedo, 256 pp.
- Schulz, R. (1985a). The method of integral equation in the direct current resistivity method and its accuracy. *J. Geophys.*, 56, 192-200.
- Schulz, R. (1985b). Interpretation and depth of investigation of gradient measurements in direct current geoelectrics. *Geophys. Prospect.*, 33, 1240-1253.
- Schulz, R. i Tezkan, B. (1988). Interpretation of resistivity measurements over 2D structures. *Geophys. Prospect.*, 36, 962-975.
- Scriba, H. (1981). Computation of electric potential in three-dimensional structures. *Geophys. Prospect.*, 29, 790-802.
- Shettigara, V.K. i Adams, W.M. (1989). Detection of lateral variations in geological structures using electrical resistivity gradient profiling. *Geophys. Prospect.*, 37, 293-310.

Smith, N.C. i Vozoff, K. (1984). Two-dimensional DC resistivity inversion for dipol-dipol data. IEEE transaction on Geoscience and Remote Sensing, 22, 21-28.

Stefanescu, S.S., Schlumberger, C i Schlumberger, M. (1930). Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans le terrain à couches horizontales, homogènes et isotropes. J. Phys. Radium, 7, 132-141.

Stefanescu, S.S. (1950). Modèles théoriques de milieux hétérogènes pour les méthodes de prospection électrique à courant stationnaires. Comitetul Geologic. Studii tehnice si economice, Seria D, Nr. 2. Imp. Nationala, Bucarest.

Strang, G. i Fix, G. (1973). An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 305 pp.

Sunde, E.O. (1949). Earth conduction effects in transmission systems. Van Nostrand, Nova York.

Tripp, A.C., Hohmann, G.W. i Swift, L.H. (1984). Two-dimensional resistivity inversion. Geophysics, 49, 1708-1717.

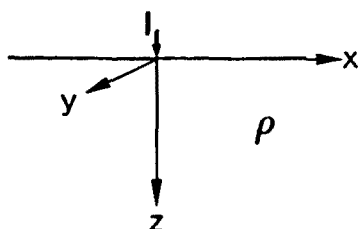
Ward, S.H. (1980). Electrical, electromagnetic and magnetotelluric methods. Geophysics, 45, 1659-1666.

Zienkiewicz, O.C. (1981). El método de los elementos finitos. Ed. Reverté, Barcelona, 903 pp.

## APÈNDIX

### A1. POTENCIAL TRANSFORMAT PELS MODELS DE CONTROL.

#### 1- MEDI HOMOGENI.



*Figura A1.*

La distribució del potencial creat per un elèctrode puntual pel qual circula un corrent d'intensitat  $I$  en un medi semiinfinit de resistivitat  $\rho$  ve donada per:

$$V(x,y,z) = \frac{I \rho}{2 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

on hem considerat l'elèctrode situat en el centre de coordenades (figura A1).

Per eliminar la dependència respecte la coordenada  $y$ , calculem la transformada en cosinus, donat que  $V(x,y,z)$  és una funció parell respecte l'eix  $y$ . Tenint en compte que  $\rho$  és independent de la coordenada  $y$ , s'obté:



$$\begin{aligned} \tilde{V}(x,z; K_y) &= \int_0^{\infty} V(x,y,z) \cos(K_y \cdot y) dy = \frac{I \rho}{2 \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(K_y \cdot y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy = \\ &= \frac{I \rho}{2 \pi} \mathcal{K}_0(K_y \cdot r) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

on  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  i  $\mathcal{K}_0$  és la funció de Bessel modificada d'ordre zero, que pot definir-se com:

$$\mathcal{K}_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad (x > 0)$$

en la seva representació integral (Abramowitz i Stegun, 1970).

## 2- MEDI ESTRATIFICAT DE DUES CAPES.

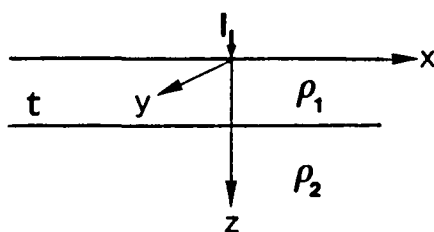


Figura A2.

La distribució del potencial a la superfície creat per un elèctrode puntual pel qual circula un corrent d'intensitat  $I$ , en un medi estratificat horitzontalment de dues capes de resistivitats  $\rho_1$  i  $\rho_2$ , i de gruixos  $t$  i infinit respectivament, ve donada per:

$$V(x,y) = \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 K^n}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2nt)^2}} \right]$$

on  $K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$  i hem considerat l'elèctrode situat en el centre de coordenades (figura A2).

Procedint de manera equivalent al medi homogeni, s'obté:

$$\tilde{V}(x; K_y) = \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[ \mathcal{X}_0(K_y \cdot x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 K^n \mathcal{X}_0(K_y \cdot r_n) \right] \quad (A.2)$$

on  $r_n = \sqrt{x^2 + (2nt)^2}$ .

### 3- CONTACTE VERTICAL.

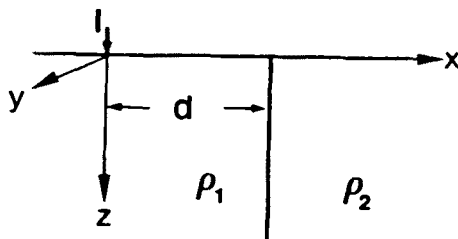


Figura A3.

Considerem el contacte vertical de dos medis semiinfinits de resistivitats  $\rho_1$  i  $\rho_2$ . El potencial creat per un elèctrode puntual

situat en el primer medi, a una distància  $d$  del contacte (figura A3) ve donat per:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{K}{\sqrt{(2d-x)^2 + y^2 + z^2}} \right] & x \leq d \\ \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[ \frac{1+K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] & x \geq d \end{cases}$$

on  $K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$  i hem considerat l'elèctrode situat en el centre de coordenades (figura A2).

Calculant la transformada en cosinus en cada interval, obtenim:

$$\tilde{V}(x,z;K_y) = \begin{cases} \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[ \mathcal{X}_0(K_y \cdot r) + K \mathcal{X}_0(K_y \cdot r') \right] & x \leq d \\ \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[ (1+K) \mathcal{X}_0(K_y \cdot r) \right] & x \geq d \end{cases} \quad (A.3)$$

$$\text{on } r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{i } r' = \sqrt{(2d-x)^2 + z^2}.$$

## A2. INTERPOLACIÓ DEL POTENCIAL TRANSFORMAT.

Per obtenir l'espectre del potencial, hem de calcular el potencial transformat  $\tilde{V}(x, z; K_y)$  per un conjunt de  $K_y$ :  $\{K_1, \dots, K_i, \dots, K_{\max}\}$ , i realitzar un interpolació per cada interval. Tot seguit deduem les expressions dels paràmetres per cada tipus d'interpolació.

- Interpolació logarítmica per l'interval  $[0, K_1]$ :

Considerem:

$$\tilde{V}(x, z; K_y) \simeq B_0 \ln(b_0 \cdot K_y) \quad 0 \leq K_y \leq K_1$$

on impositant:

$$\tilde{V}(x, z; 0) = \infty \quad \text{i} \quad \tilde{V}(x, z; K_1) = B_0 \ln(b_0 \cdot K_1)$$

s'obté:

$$B_0 = -1 \quad \text{i} \quad b_0 = \frac{e^{-\tilde{V}_1}}{K_1} \quad (\text{A.4})$$

on  $\tilde{V}_1 = \tilde{V}(x, z; K_1)$  i el paràmetre  $b_0$  és funció de  $(x, z)$ .

- Interpolació logarítmica per l'interval  $[K_n, K_{n+1}]$ :

Considerem:

$$\tilde{V}(x, z; K_y) \simeq B_n \ln(b_n \cdot K_y) \quad K_n \leq K_y \leq K_{n+1}$$

on impositant:

$$\tilde{V}(x, z; K_n) = B_n \ln(b_n \cdot K_n) \quad \text{i} \quad \tilde{V}(x, z; K_{n+1}) = B_n \ln(b_n \cdot K_{n+1})$$

s'obté:

$$B_n = \frac{\tilde{V}_n - \tilde{V}_{n+1}}{\ln(K_n / K_{n+1})} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{e^{\tilde{V}_n / B_n}}{K_n} \quad (\text{A.5})$$

on  $\tilde{V}_n = \tilde{V}(x, z; K_n)$ ,  $\tilde{V}_{n+1} = \tilde{V}(x, z; K_{n+1})$  i els paràmetres  $B_n$  i  $b_n$  són funció de  $(x, z)$ .

- Interpolació exponencial per l'interval  $[K_m, K_{m+1}]$ :

Considerem:

$$\tilde{V}(x, z; K_y) \simeq A_m e^{-a_m K_y} \quad K_m \leq K_y \leq K_{m+1}$$

on impositant:

$$\tilde{V}(x, z; K_m) = A_m e^{-a_m K_m} \quad \text{i} \quad \tilde{V}(x, z; K_{m+1}) = A_m e^{-a_m K_{m+1}}$$

s'obté:

$$A_m = V_m e^{a_m K_m} \quad \text{i} \quad a_m = \frac{\ln(\tilde{V}_m - \tilde{V}_{m+1})}{K_{m+1} - K_m} \quad (\text{A.6})$$

on  $\tilde{V}_m = \tilde{V}(x, z; K_m)$ ,  $\tilde{V}_{m+1} = \tilde{V}(x, z; K_{m+1})$  i els paràmetres  $A_m$  i  $a_m$  són funció de  $(x, z)$ .

### A3. CÀLCUL DEL POTENCIAL.

Per obtenir el potencial s'ha de calcular l'antitransformada en cosinus definida com:

$$V(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}(x, z; K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y \quad (\text{A.7})$$

Aproximant  $\tilde{V}$  en cada interval  $[K_i, K_{i+1}]$ , podem desglossar la integral en:

$$V(x, y, z) \cong \frac{2}{\pi} \int_0^{K_1} B_0 \ln(b_0 K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y + \sum_n \frac{2}{\pi} \int_{K_n}^{K_{n+1}} B_n \ln(b_0 K_y) \cos(K_y \cdot y) dK_y + \sum_m \frac{2}{\pi} \int_{K_m}^{K_{m+1}} A_m e^{-a_m K_y} \cos(K_y \cdot y) dK_y$$

Finalment, integrant per parts s'obté:

$$\begin{aligned}
 V(x,y,z) \approx & \frac{2}{\pi} \frac{B_0}{y} \left[ \ln (b_0 K_1) \sin (K_1 \cdot y) - \text{si} (K_1 \cdot y) \right] \\
 & + \sum_n \frac{2}{\pi} \frac{B_n}{y} \left[ \ln (b_n K_y) \sin (K_y \cdot y) - \text{si} (K_y \cdot y) \right]_{K_n}^{K_{n+1}} \\
 & + \sum_m \frac{2}{\pi} A_m \frac{e^{-a_m K_y}}{a^2 + y^2} \left[ y \sin (K_y \cdot y) - a_m \cos (K_y \cdot y) \right]_{K_m}^{K_{m+1}}
 \end{aligned}
 \tag{A.8}$$

on "si" correspon a la funció definida per:

$$\text{si}(a) \equiv \int_0^a \frac{\sin(t)dt}{t}$$

(Abramowitz i Stegun,1970), i pot calcular-se accedint a la biblioteca NAG.

A4. CÀLCUL DEL CAMP.

Per obtenir el camp en la direcció de l'estructura, pot calcular-se directament derivant respecte la coordenada y l'expressió (A.7):

$$\partial V(x,y,z)/\partial y = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_y \tilde{V}(x,z;K_y) \sin(K_y \cdot y) dK_y$$

De nou podem aproximar  $\tilde{V}$  logarítmicament i exponencialment en cada interval  $[K_n, K_{n+1}]$ :

$$\partial V(x,y,z)/\partial y \approx -\frac{2}{\pi} \int_0^{K_1} B_0 \ln(b_0 K_y) \sin(K_y \cdot y) K_y dK_y -$$

$$\sum_n \frac{2}{\pi} \int_{K_n}^{K_{n+1}} B_n \ln(b_n K_y) \sin(K_y \cdot y) K_y dK_y - \sum_m \frac{2}{\pi} \int_{K_m}^{K_{m+1}} A_m e^{-a_m K_y} \sin(K_y \cdot y) K_y dK_y$$

I integrant per parts, s'obté:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial y} \approx & -\frac{2}{\pi} \frac{B_0}{y^2} \left[ (1+\ln(b_0 K_y)) \sin(K_y y) - \text{si}(K_y y) - y K_y \cos(K_y y) \ln(b_0 K_y) \right] \\
& - \sum_n \frac{2}{\pi} \frac{B_n}{y^2} \left[ (1+\ln(b_n K_y)) \sin(K_y \cdot y) - \text{si}(K_y \cdot y) - y K_y \cos(K_y \cdot y) \ln(b_n K_y) \right]_{K_n}^{K_{n+1}} \\
& + \sum_m \frac{2}{\pi} \left[ \left[ \frac{A_m e^{-a_m K_y}}{a^2 + y^2} \right] \left[ (a_m \sin(K_y y) - y \cos(K_y y)) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2 a y \cos(K_y \cdot y) + (a^2 - y^2) \sin(K_y \cdot y)}{a^2 + y^2} \right] \right]_{K_m}^{K_{m+1}}
\end{aligned}$$

que és equivalent a derivar directament l'expressió (A.8) respecte y.

