SOBRE INMERSIONES ISOMETRICAS DE VARIEDADES RIEMANNIANAS EN ESPACIOS EUCLIDEOS

V° B°

Memoria presentada por Don CARLOS CURRAS BOSCH
para optar al grado de DOCTOR EN MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE BARCELONA FACULTAD DE MATEMATICAS 1977

INDICE

INTRODUCCION.

John Nash(1,2),probó la existencia de inmersión e inmersión homeomorfa inyectiva isométricas de cualquier variedad Riemanniana en un espacio euclídeo de dimensión suficiente.

Desde entonces el estudio de las inmersiones isométricas se ha orientado principalmente en cuatro direcciones:

a)Encontrar propiedades propias de la variedad y de la inmersión que permitan establecer acotaciones o reducir la dimensión del espacio euclídeo ambiente.

Citaremos a Chern-Kuiper(1),donde se prueba que si una variedad Riemanniana de dimensión n,tiene en todo punto un índice de nulidad $\geq\mu$,no puede estar inmersa homeomorfa e isométricamente en un espacio euclídeo de dimensión $n+\mu-1$,lo que generaliza el conocido resultado de Tompkins(1),de que una variedad Riemannian compacta,localmente plana de dimensión n,no puede estar inmersa homeomorfa e isométricamente en un espacio euclídeo de dimensión 2n-1.

Erbacher(1),consigue reducir la codimensión por medio de hipótesis adecuadas sobre el primer espacio normal de la inmersión.

b)Estudio de la rigidez de las inmersiones isométricas. Citaremos al respecto a Allendoerfer(1),donde establece su conocido teorema local de rigidez,Sacksteder(1) que estudia la rigidez de las hipersuperficies.

c)Estudio de las restricciones que puede dar el grupo o el álgebra de holonomía de la variedad,a las inmersiones de ésta.

Citaremos a Kobayashi(1),donde ve que si M es una variedad Riemanniana compacta,de dimensión n,inmersa isométricamente en R^{n+1},su grupo restringido de holonomía es SO(n).

Bishop(1),estudia las inmersiones en codimensión dos y prueba que para variedades compactas de dimensión $\neq 4$,el grupo restringido de holonomía es $SO(k)\times SO(n-k)$.

d)Estudio de las inmersiones homeomorfas isométricas equivariantes,o sea aquellas para las que el grupo de isometrías de la variedad se incluye en el del espacio euclídeo ambiente.

Citaremos a Lichnerowicz(1),donde prueba que un espacio simétrico y hermítico,de tipo compacto G/H,puede ser equivariante e isométricamente inverso en R^n,con n=dim.G.

En líneas generales nuestro trabajo consiste en aplicar el hecho ya conocido de que se puede efectuar el estudio de las inmersiones isométricas de variedades Riemannianas en espacios euclídeos,a partir del sistema de tensores obtenido por medio del fibrado normal a la variedad inmersa,a los temas siguientes: Inmersiones en codimensión dos,con curvatura normal cero y álgebra local de holonomía no total(c).

Influencia del álgebra de Lie de las isometrías infinitesimales de la variedad sobre las inmersiones en codimensión dos con curvatura normal cero(c).

Reducción de la codimensión(a).

Estudio de la rigidez de la inmersión,por medio de las isometrías infinitesimales de la variedad y su relación con el fibrado normal de la variedad.(b y d).

Esquema de los capítulos.

Capítulo 0.-Se da una demostración de la generalización del teorema de Bonet,para inmersiones en codimensión cualquiera. Aunque este resultado ya ha sido probado por Szczarba(1,2),hemos creido intersante incluir esta demostración por la gran sencillez con que se prueba dicho resultado,así como las importantes consecuencias que de él se obtienen,como el teorema de rigidez local de Allendoerfer.

El origen de la técnica seguida para esta demostración,está en Sasaki(1),donde se da una demostración del teorema de Bonet para superficies en R^3,construyendo un fibrado vectorial adecuado.Siguiendo ésto construimos un fibrado vectorial sobre la variedad que contenga al fibrado tangente a ella y que sea el fibrado vectorial que podremos definir sobre la variedad una vez esté ya inmersa.La prueba del teorema sigue,definiendo métrica y conexión adecuadas yutilizando la hipótesis de que la variedad sea simplemente conexa.

Capítulo I.

Como antecedentes de lo estudiado en este capítulo podemos citar a Bishop(1),ya mencionado y comentado anteriormente,Alexander(1),Moore(1,2,3),Alexander-Maltz(1),que estudian las inmersiones isométricas para variedades producto,en codimensión igual al número de componentes de la variedad,viendo que la inmersión se puede descomponer en producto de inmersiones en codimensión uno.

Estos resultados nos han sugerido el estudio de las inmersiones isométricas en codimensión dos,con curvatura normal cero. Utilizando técnicas deducidas del capítulo cero,probamos que si el álgebra local de holonomía no es total en ningún punto, la variedad es reducible y la inmersión descompone.

Cuando la dimensión de la variedad es 4,mejoramos uno de los resultados obtenidos por Bishop(1).

Dentro de este mismo capítulo,probamos una especie de recíproco del resultado establecido por Lynge(1),que dice que en una variedad producto el álgebra de Lie de isometrías infinitesimales,es la suma directa de tantos ideales como componentes tiene el producto y cada ideal es la proyección del álgebra de las isometrías infinitesimales sobre cada componente.Siguiendo con variedades inmersas en codimensión dos,con curvatura normal cero,vemos que si el álgebra de Lie de isometrías infinitesimales es suma directa de dos ideales,la variedad es reducible y la inmersión también.

Capítulo II

Erbacher (1),ha probado la posibilidad de reducir la codimensión de inmersiones isométricas,utilizando el paralelismo del primer espacio normal.

Utilizando técnicas deducidas del capítulo cero,en hipótesis como las de Erbacher y algunas más,probamos con gran facilidad,la posibilidad de reducir la codimensión.Por último damos condiciones suficientes para reducir la codimensión,utilizando los sucesivos espacios normales de la inmersión.

Capítulo III

En este capítulo se estudia la influencia del álgebra de Lie de isometrías infinitesimales de la variedad inmersa,en la rigidez de dichas inmersiones.

Dicha influencia puede observarse en Goldstein-Ryan(1),al estudiar las deformaciones infinitesimales de las esferas.

Nosotros vamos a dedicarnos al concepto clásico de rigidez(

(dos inmersiones isométricas de una misma variedad,son mutuamente rígidas,cuando difieren en una isometría del espacio euclídeo ambiente).

Al principio del capítulo se citan ejemplos que nos sugieren la consideración del hecho de que las isometrías infinitesimales de la variedad,sean o no la restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo a la variedad.

Se estudia la relación existente entre este hecho y la influencia de las isometrías infinitesimales sobre los tensores definidos por medio del fibrado normal.A continuación vemos que con hipótesisadecuadas sobre dichas isometrías,podemos probar la rigidez de las inmersiones.

Capítulo IV.

En este capítulo se demuestra para variedades de dimensión dos y tres,la posibilidad de obtener inmersiones isométricas, a partir de las isometrías infinitesimales de la variedad,de forma que dichas isometrías infinitesimales sean restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo ambiente.

Quede aquí constancia de mi agradecimiento al Dr.J.Vaquer, por la dirección de este trabajo y la ayuda de todo tipo por él prestada durante la realización del mismo.A mis compañeros Dr,E.Casas y J.M.Regué por la inestimable ayuda prestada por ellos en algunos momentos.Al Dr.G.Vranceanu por sus valiosos cosejos e información prestados,durante sus dos últimas estancias en Barcelona.A los Dres. S.Alexander y J.D.Moore por la valiosa información que me han proporcionado.

Barcelona Febrero de 1977.

Notaciones.

$A^1(M,\xi)$=Espacio de las 1-formas con valores en ξ.

$\mathcal{F}(M)$=Anillo de las funciones diferenciables definidas en M,con valores reales.

$\mathfrak{X}(M)$=$\mathcal{F}(M)$-módulo de los campos diferenciables sobre M.

P(M,G)=Fibrado principal sobre M con grupo estructural G.

Ω=Forma de curvatura.

R=Curvatura.

Secc.ξ=Espacio vectorial de las secciones diferenciables en el fibrado vectorial ξ.

$\tau(M)$=Fibrado vectorial tangente a M.

$T_V W$=Componente normal de $\bar{\nabla}_V W$.

χ_G=Curvatura de Gauss.

$U^2=U\wedge U$.

i(M)=Algebra de Lie de las isometrías infinitesimales de M.

$\cong$ Isométrico.

CAPITULO 0. PRELIMINARES.

Todos los objetos que se van a utilizar a lo largo de esta memoria van a ser infinitamente diferenciables.

§1. Conexiones en fibrados vectoriales.-

Definición.-Sea ξ,fibrado vectorial sobre la variedad M.Llamaremos conexión en ξ;a una aplicación

$$\nabla: \text{Secc.}\xi \longrightarrow A^1(M,\xi)$$

Que verifica para $\sigma,\tau\in\text{Secc.}\xi$,y $f\in\mathcal{F}(M)$.

(1) $\nabla(\sigma+\tau)=\nabla\sigma+\nabla\tau$.

(2) $\nabla(f.\sigma)= f\nabla\sigma + df\sigma$.

A partir de ahora vamos a considerar M,variedad paracompacta y simplemente conexa.Dando por conocido que en todo fibrado vectorial sobre M,provisto de una métrica,podemos definir en él conexiones métricas.

Teorema 0-1.-Sea ∇ una conexión en ξ,fibrado vectorial sobre M.Si $R\equiv 0$.Eligiendo $x_o\in M$ y $z_o\in F_{x_o}$,existe una única sección de ξ,σ tal que:(1)$\nabla\sigma=0$,(2)$\sigma(x_o)=z_o$.

Demostración.-Sea $P(M,G)$,el fibrado principal asociado a ξ.Como $R=0$,es $\Omega=0$,y por tanto la conexión en $P(M,G)$ es plana.

Como M es simplemente conexa,vease Kobayashi-Nomizu (1) (Corollary9.2,pág.92),resulta $P\cong M\times G$ y la conexión en P es isomorfa a la conexión plana canónica en $M\times G$.

Tomando (x_o,e) en $M\times G$.Cualquier curva x_t en M,que para $t=0$ pasa por x_o,tiene por elevación horizontal (x_t,e).Sea u de R^n,$u=(x_o,e)^{-1}z_o$,entonces $(x_t,e)u$ es horizontal en ξ y define la sección σ,tal que $\nabla\sigma=0$.

La unicidad de tal sección es obvia.

§2.Teorema de Bonet en codimensión cualquiera.

Teorema 0-2.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, simplemente conexa.En M tenemos definidos k tensores (1,1) simétricos $A_1,\dots,A_k$,y k^2 tensores (0,1) s_{ij},cumpliendo $s_{ij}=-s_{ji}$ verificándose las ecuaciones de:

Gauss. $R(X,Y)=\sum_{j=1}^{k}A_j(X)\wedge A_j(Y)$.

Codazzi. $(\nabla_X A_j)Y-\sum_{i\neq j}s_{ji}(X)A_i(Y)=(\nabla_Y A_j)X-\sum_{i\neq j}s_{ji}(Y)A_i(X)$.

Ricci. $2ds_{ij}(X,Y)=(\nabla_X s_{ij})Y-(\nabla_Y s_{ij})X=\left(A_i,A_j\right)X\cdot Y+$
$+\sum_q\{s_{iq}(X)s_{qj}(Y)-s_{iq}(Y)s_{qj}(X)\}$.

Tesis.-Existe una inmersión isométrica en R^{n+k},de forma que el fibrado normal a la variedad inmersa,viene descrito por los tensores A_i,s_{jq}.

Demostración.-Definimos el fibrado $\eta=\tau(M)\oplus(M\times R^{n+k})$,y en él la métrica $\bar{g}=g+ds^2+\overset{k}{\ldots}+ds^2$(dónde ds^2designa la métrica habitual en R).

Luego se define la conexión siguiente:

$$\nabla_X(Z,\phi_1,\ldots,\phi_k)=(\nabla_X Z+\phi_1A_1(X)+\ldots+\phi_kA_k(X),X\phi_1-A_1(X)Z+\phi_2s_{21}(X)+\ldots+\phi_ks_{k1}(X),\ldots,X\phi_k-A_k(X)Z+\phi_1s_{1k}(X)+\ldots+\phi_{k-1}s_{k-1,k}(X)).$$

Puede comprobarse sin ninguna dificultad,aprovechando que se cumplen las ecuaciones de Gauss,Codazzi y Ricci,que esta conexión es métrica y anula la curvatura.

Construcción de n+k secciones ortonormales y paralelas.-

Aplicando el teorema 0-1,existen n+k secciones con estas propiedades y con valores en cierto punto p de M los que queramos.Sean $\sigma_1=(e_1,\phi_1^1,\ldots,\phi_k^1),\ldots,\sigma_{n+k}=(e_{n+k},\phi_1^{n+k},\ldots,\phi_k^{n+k})$.

Tomando $\omega_i=ie_ig$.Las n+k formas $\omega_1,\ldots,\omega_{n+k}$,son cerradas.

En efecto;$2d\omega_i(X,Y)=X(\omega_i(Y))-Y(\omega_i(X))-\omega_i[X,Y]=X(e_iY)-Y(e_iX)-e_i[X,Y]=\nabla_Xe_iY-\nabla_Ye_iX+e_i\{\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]\}$.

Como la sección $(e_i,\phi_1^i,\ldots,\phi_k^i)$es paralela,tendremos:

$\nabla_Xe_iY=-(\phi_1^iA_1(X)+\ldots+\phi_k^iA_k(X))Y;\nabla_Ye_iX=-(\phi_1^iA_1(Y)+\ldots+\phi_k^iA_k(Y))X$.

De lo que resulta $\nabla_Xe_iY-\nabla_Ye_iX=0$.

Construcción de las funciones que dan la inmersión.-

Como M es simplemente conexa,existirán n+k funciones $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+k}$,tales que $d\lambda_i=\omega_i$,para todo i.

Estas funciones son C^∞y dan $M\xrightarrow{\lambda}R^{n+k}$,por medio de

$x \xrightarrow{\lambda} (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+k}(x))$. Esta aplicación λ es una inmersión isométrica. Para verlo calculemos la imagen de un campo tangente X. En M consideremos una curva x_t, con vector tangente X_p en p punto de M. Su imagen por λ será la curva en R^{n+k}, $(\lambda_1(x_t), \ldots, \lambda_{n+k}(x_t))$.

Tomando $(x_1, \ldots, x_n)$, sistema local de coordenadas en un entorno de p. El vector tangente a la curva será.

$$\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}, \ldots, \frac{\partial\lambda_{n+k}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\lambda_{n+k}}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\right) = \left(Xd\lambda_1, \ldots, Xd\lambda_{n+k}\right) =$$

$$= \left(\omega_1(X), \ldots, \omega_{n+k}(X)\right) = \lambda(X).$$

$$\|\lambda X\|^2 = \omega_1(X)^2 + \ldots + \omega_{n+k}(X)^2 = (e_1 X)^2 + \ldots + (e_{n+k} X)^2 = (X,0,\ldots,0)\cdot(e_1, \ldots, \phi_k^1)^2 + \ldots + (X,0,\ldots,0)\cdot(e_{n+k}, \phi_1^{n+k}, \ldots, \phi_k^{n+k})^2 = \|X\|^2.$$

Luego λ es una inmersión isométrica.

<u>El fibrado normal a la variedad inmersa viene descrito por los tensores $\{A_i, s_{jq}\}$.</u>

Para ver ésto, extendemos la inmersión al fibrado de la forma siguiente: El elemento $(o, \ldots \overset{i}{1}, \ldots, 0)$ lo mandamos a

$N_i = ((0,\ldots,1,\ldots,0)(e_1,\ldots,\phi_k^1), \ldots, (0,\ldots,1,\ldots,0)(e_{n+k},\ldots,\phi_k^{n+k}))$

$N_i = (\phi_i^1, \ldots, \phi_i^{n+k})$. Segun ésto $\bar{\nabla}_X N_i = (X\phi_i^1, \ldots, X\phi_i^{n+k})$. Pero por el paralelismo de las secciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+k}$, tendremos:

$$X\phi_i^1 = A_i(X)e_1 + \phi_1^1 s_{i1}(X) + \ldots + \phi_k^1 s_{ik}(X).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X\phi_i^{n+k} = A_i(X)e_{n+k} + \phi_1^{n+k} s_{i1}(X) + \ldots + \phi_k^{n+k} s_{ik}(X).$$

Luego $\nabla_X N_i = A_i(X) + s_{i1}(X)N_1 + \ldots + s_{ik}(X)N_k$.

<u>Independencia de la inmersión respecto de las secciones ortonormales elegidas.</u>-

Vamos a ver que si en el proceso anterior modificamos las secciones ortonormales, lo único que hacemos es aplicar una isometría del espacio euclídeo ambiente a la variedad inmersa.

Hay que probar que si $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+k}),(\mu_1,\ldots,\mu_{n+k})$, son dos inmersiones que provienen de distintas eleccciones de las secciones ortonormales, se verifica:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1(x)\\ \vdots\\ \lambda_{n+k}(x)\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}\mu_1(x)\\ \vdots\\ \mu_{n+k}(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \\ \alpha_{n+k}\end{pmatrix}$$

Donde u es un elemento de $O(n+k)$, y $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+k})$ es una traslación.

Es inmediato que lo anterior es equivalente a probar que

$$\begin{pmatrix}X(\lambda_1)\\ \vdots\\ X(\lambda_{n+k})\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}X(\mu_1)\\ \\ X(\mu_{n+k})\end{pmatrix} \qquad \text{Para todo } X.$$

Ahora bien.

$\{X(\lambda_1),\ldots X(\lambda_{n+k})\} = \{\omega_1(X),\ldots,\omega_{n+k}(X)\} = \{X\cdot e_1,\ldots,X\cdot e_{n+k}\}$.

$\{X(\mu_1),\ldots,X(\mu_{n+k})\} = \{\nu_1(X),\ldots,\nu_{n+k}(X)\} = \{X\cdot v_1,\ldots,X\cdot v_{n+k}\}$

Pero los paréntesis anteriores no son más que las coordenadas de $(X,0,\ldots,0)$ respecto a cada uno de los dos sistemas de secciones. Como son ortonormales y paralelas difieren en un elemento fijo u de O(n+k).Por tanto

$$\begin{pmatrix} \omega_1(X) \\ \vdots \\ \omega_{n+k}(X) \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \omega_1(X) \\ \vdots \\ \omega_{n+k}(X) \end{pmatrix}$$

----

§3.Determinación de la inmersión por el sistema de tensores.

Teorema 0-3.-Los tensores $\{A_i, s_{jq}\}$,determinan salvo isometrías del espacio euclídeo ambiente la inmersión.

Para probar ésto vamos a empezar viendo que toda inmersión isométrica,restringida a un entorno simplemente conexo de un punto de la variedad,puede obtenerse por el método anterior.La razón de tener que restringirnos a un entorno simplemente conexo,es que aunque consideremos variedades simplemente conexas,no tiene sentido en general que hablemos de un sistema de tensores definido en toda la variedad.

Lema 0-1.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n,simplemente conexa,que admite una inmersión isométrica en R^{n+k}, y tenemos $N_1,\ldots,N_k$,base ortonormal del fibrado normal definida globalmente.

Tesis.-La inmersión puede obtenerse por el método anterior.

Demostración.-La inmersión viene dada por unas funciones $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+k}$.

Sea x_o un punto de M tal que $\lambda(x_o)=0$.Tomemos $x_1,\ldots,x_n$, sistema de coordenadas en un entorno de x_o,de forma que en

x_o, los campos coordenados $X_1,\dots,X_n$, son ortonormales, y se aplican por λ en $(e_1)_o,\dots,(e_n)_o$, ortonormales en 0; sistema que complementamos con $(N_1)_o,\dots,(N_k)_o$, a fin de tener una referencia ortonormal en el origen.

Sea $y_1,\dots,y_{n+k}$, sistema euclídeo de coordenadas, tal que $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_o=(e_j)_o$, para $j=1,\dots,n$. $\left(\frac{\partial}{\partial y_{n+\alpha}}\right)_o=(N_\alpha)_o$, para $\alpha=1,\dots,k$.

Como la imagen de X_i en x_o es $(e_i)_o$, tendremos:

$$(1)\left[\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}\right]_o=\delta^j_i.\ (2)\ \left[\frac{\partial\lambda_{n+\alpha}}{\partial x_i}\right]_o=0.\ (3)(N^j_\alpha)_o=0,\ (N^\beta_\alpha)_o=\delta^\beta_\alpha.$$

Estudiemos las fórmulas de Gauss y Weingarten.

$\bar\nabla_{X_i}X_j=\nabla_{X_i}X_j+\sum_{\alpha=1}^k h^\alpha_{ij}N_\alpha$. Expresándolo en coordenadas, resulta

$$\bar\nabla_{X_i}\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j},\dots,\frac{\partial\lambda_{n+k}}{\partial x_j}\right]=\sum_{q=1}^n\Gamma^q_{ij}\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_q},\dots,\frac{\partial\lambda_{n+k}}{\partial x_q}\right]+\sum_{\alpha=1}^k h^\alpha_{ij}\left[N^1_\alpha,\dots,N^{n+k}_\alpha\right]$$

Considerando $1\leq p\leq n+k$, tenemos la fórmula de Gauss.

$$\frac{\partial^2\lambda_p}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{q=1}^n\Gamma^q_{ij}\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_q}+\sum_{\alpha=1}^k h^\alpha_{ij}N^p_\alpha.$$

$\bar\nabla_{X_i}N_\alpha=\sum_{\beta\neq\alpha}s_{\alpha\beta}(X_i)N_\beta+\sum_{j=1}^n a^{(\alpha)j}_i X_j$. Expresándolo en coordenadas

$$\left[\frac{\partial N^1_\alpha}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial N^{n+k}_\alpha}{\partial x_i}\right]=\sum_{\beta=\alpha}s_{\alpha\beta}(X_i)\left[N^1_\beta,\dots,N^{n+k}_\beta\right]+\sum_{j=1}^n a^{(\alpha)j}_i\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_j},\dots,\frac{\partial\lambda_{n+k}}{\partial x_j}\right].$$

La fórmula de Weingarten será:

$$\frac{\partial N^p_\alpha}{\partial x_i}=\sum_{\beta=\alpha}s_{\alpha\beta}(X_i)N^p_\beta+\sum_{j=1}^n a^{(\alpha)j}_i\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_j}$$

Sea ahora Z_p, el campo tangente correspondiente a $d\lambda_p$, tenemos $\nabla_{X_i} d\lambda_p(X_j)=X_i\left(\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_j}\right)-d\lambda_p\left(\sum_{q=1}^{n}\Gamma_{ij}^{q}X_q\right)=\frac{\partial^2\lambda_p}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{q=1}^{n}\Gamma_{ij}^{q}\frac{\partial\lambda_p}{\partial x_q}=$

$=\sum_{\alpha=1}^{k} h_{ij}^{\alpha}N_{\alpha}^{p}$. Pero $\nabla_Y d\lambda_p(X)=Y(d\lambda_p X)-d\lambda_p(\nabla_Y X)=Y(Z_p X)-Z_p(\nabla_Y X)=\nabla_Y Z_p X$.

Luego $\nabla_Y Z_p=-\sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(Y)N_\alpha^p$.

La fórmula de Weingarten nos da:

$Y(N_\alpha^p)-A_\alpha(Y)Z_p+\sum_{\beta\neq\alpha}s_{\alpha\beta}(Y)N_\beta^p=0$

Con lo que queda probado el Lema.Con ayuda del cual es evidente el siguiente resultado.

Teorema 0-4.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, simplemente conexa,que admite dos inmersiones isométricas ψ_1 y ψ_2 en R^{n+k},para las que puede definirse globalmente el mismo sistema de tensores $\{A_i, s_{jq}\}$.

Tesis.-ψ_1 y ψ_2 difieren en una isometría de R^{n+k}.

Con ayuda de este resultado,estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema.-0-5.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, conexa,que admite dos inmersiones isométricas ψ_1 y ψ_2,en R^{n+k}, de forma que ambas inmersiones admiten en un entorno de cada punto de la variedad,un sistema de tensores inducidos por los respectivos fibrados normales,que son los mismos para ambas inmersiones.

Tesis.-Ambas inmersiones difieren en una isometría del espacio R^{n+k}.

Demostración.- Todos los entornos abiertos los consideraremos simplemente conexos. Sea U, uno de tales entornos, por el Lema 0-1, existe una isometría u de R^{n+k}, tal que $u \circ \psi_1 = \psi_2$, en U. Si V es otro entorno del mismo tipo con intersección no vacía con el anterior; tendremos otra isometría v que cumplirá $v \circ \psi_1 = \psi_2$ en V. Pero en los puntos de $U \cap V$, u y v tienen el mismo efecto, luego u=v. De aquí vemos que el conjunto de puntos de M, en que $u \circ \psi_1 = \psi_2$, es abierto.

Si existiese otra isometría w de R^{n+k}, con $w \circ \psi_1 = \psi_2$, en otro abierto, deberían ser disjuntos. Y como M es conexa. tenemos que en todo M se cumple $u \circ \psi_1 = \psi_2$.

§4. Consideración sobre el fibrado normal de las variedaes inmersas.-

Para inmersiones en codimensión uno, en cada punto tenemos definido, salvo el signo, el tensor de Weingarten A.

Ahora bien, para inmersiones en codimensión dos, dada una elección en un cierto abierto U de la variedad, de los tensores A_i, s_{jq}, ó sea de los campos normales N_i. Podemos modificar dichos campos por rotación en cada punto, y consiguientemente habremos modificado los tensores.

Veamos cómo se produce dicha modificación. Si se trata de una rotación de ángulo α, siendo α una función de U en R. Si escribimos con barras los campos y tensores transformados, tenemos. $\bar{A}_1=\cos\alpha\cdot A_1-\operatorname{sen}\alpha\cdot A_2$, $\bar{A}_2=\operatorname{sen}\alpha\cdot A_1+\cos\alpha\cdot A_2$, $\bar{s}_{12}=s_{12}+d\alpha$.

En particular de aquí vemos que si la inmersión tiene curvatura normal cero, o sea $(A_1,A_2)=0$, deberá existir cierta función α para la cual $\bar{s}_{12}=0$, luego $s_{12}=-d\alpha$, y por tanto $ds_{12}=0$.

Para codimensiones mayores que dos el tratamiento es similar. Si ${}^t(\bar{N}_1,\ldots,\bar{N}_k)=u\,{}^t(N_1,\ldots,N_k)$. Donde u es una función diferenciable del abierto U en O(k), entonces

$${}^t(\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_k)=u\,{}^t(A_1,\ldots,A_k). \qquad (\bar{s}_{ij})=u^{-1}du+(s_{ij}).$$

CAPITULO I. INMERSIONES EN CODIMENSION DOS.

Siendo U espacio vectorial real, con un producto escalar definido en él, que designaremos como es habitual por un punto.

Vamos a considerar en U^2 la operación siguiente:

$$(e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4) = (e_1 \cdot e_3) e_2 \wedge e_4 + (e_2 \cdot e_4) e_1 \wedge e_3 - (e_1 \cdot e_4) e_2 \wedge e_3 - (e_2 \cdot e_3) e_1 \wedge e_4 .$$

§1. Algunos resultados sobre el álgebra de holonomía, y temas afines.

Teorema de holonomía. I-1.-Sea M variedad diferenciable de dimensión n. El álgebra de holonomía en el punto p de M, es la subálgebra de $\mathfrak{gl}(n,R)$, engendrada por los traslados paralelos a p, de las transformaciones R_{XY}, en todos los puntos de M.

Demostración.-Vease Kobayashi-Nomizu (1)(pág.89).

Vamos a ver a continuación, algunos lemas necesarios para el desarrollo del capítulo. En los cuatro primeros se citan los trabajos en que pueden encontrarse demostrados, aunque se incluye aquí la demostración, para facilitar la comprensión de la prueba del Lema I-6, no probado por Bishop en su artículo sobre las álgebras de holonomía en inmersiones a codimensión 2.

Lema I-1.(Bishop).-Sea U espacio vectorial real,y sean V y W,subespacios no nulos y tales que U=V+W.

Tesis.-U^2 está generado por VW.

Demostración.- Sean v_1,v_2,elmentos de V,y w de W,tal que $w{\cdot}w=1$. $[v_1\wedge w, v_2\wedge w]=v_1\wedge v_2+$ términos en VW.

Por tanto V^2 está contenido en el álgebra generada por VW.De la misma forma veríamos que W^2 está contenido en el álgebra generada por VW.

Como $U^2=V^2+VW+W^2$,resulta que el álgebra generada por VW es todo U^2.

Lema I-2.(Bishop).-Si $v\neq 0$,entomces vU,genera U^2.

Demostración.- Sean u_1,u_2,elementos cualesquiera de U

$[v\wedge u_1, v\wedge u_2]=(v{\cdot}v)u_1\wedge u_2+(u_1{\cdot}u_2)v\wedge v-(v{\cdot}u_2)u_1\wedge v-(v{\cdot}u_1)v\wedge u_2$.

Despejando $(v{\cdot}v)u_1\wedge u_2$,término genérico de U^2,vemos que pertenece al álgebra gemerada por vU.

Lema I-3.(Bishop).-Si v es de V y es $\neq 0$;w de W y $\neq 0$,y V tiene intersección no nula con W.Entoces vV+wW,genera U^2.

Demostración.- Por el Lema I-2,el álgebra generada por vV+wW,contiene V^2+W^2.Tomando u en $V\cap W$,$u\neq 0$,el álgebra anterior contendrá u(V+W)=uU,que genera U^2.

Lema I-4.-(Alexander(1)).-Si tenemos una inmersión en codimensión dos,y en algún punto el recorrido de A_1 es distinto del de A_2.Emtonces $(\text{rec}.A_i)^2$ está contenido en el álgebra de holonomía,para i=1,2.

Demostración.- Sean $V=\text{rec}.A_1$ y $W=\text{rec}.\ A_2$,y $U=V+W$.

Como $\text{rec}.A_1 \neq \text{rec}.A_2$,el recorrido de R en el punto,en cuestión,contiene $(A_1W^{\perp})V$ y a $(A_2V^{\perp})W$.Ya que si x es de $W^{\perp}$,$A_2(x)=0$ y $R_{xy}=A_1(x)\wedge A_1(y)$,luego el recorrido de R contendrá $(A_1W^{\perp})V$, y por tanto el álgebra de holonomía contendrá V^2(siempre y cuando $W^{\perp}\neq 0$).De la misma forma veríamos que el álgebra de holonomía contiene a W^2.

Si fuera W=U,por lo anterior el álgebra de holonomía contiene $W^2=U^2$,y por tanto a V^2.

Lema I-5.-Si tenemos una inmersión en codimensión dos de forma que en algún punto el índice de nulidad relativa es cero,$\text{rec}.A_1 \neq \text{rec}.A_2$,pero $\text{rec}.A_1 \cap \text{rec}.A_2 \neq \{0\}$.

El álgebra de holonomía es total.

Demostración.-En dicho punto p tendremos $\text{rec}.A_1+\text{rec}.A_2=T_p(M)$,y además la intersección no es nula.Aplicando el Lema I-3,sigue el resultado.

Lema I-6.-(Bishop).-Si $U=V\perp W$,y alguno de los dos tiene dimensión distinta de dos,V^2+W^2 es una subálgebra maximal propia de U^2.

Demostración.-Si las dimensiones deV y W son 1,el resultado es trivial

Si dim.V=1 y dim.W$\geq$2.Tomemos $e_1,v_1,\dots,v_n$,referencia ortonormal de U tal que $V=\{e_1\}.W=\{v_1,\dots,v_n\}$.

Supongamos que H es una subálgebra de U^2,que contiene estrictamente $V^2+W^2=W^2$.Sea $\lambda_{11}e_1\wedge v_1+\lambda_{12}e_1\wedge v_2+\dots+\lambda_{1n}e_1\wedge v_n$,un elemento de H,donde algun $\lambda_{1j}\neq 0$,por ejemplo $\lambda_{11}\neq 0$.

Observemos que debe haber algun otro $\lambda_{1j}=0$,ya que de lo contrario $e_1\wedge v_1$ es de H,y tomando $(e_1\wedge v_1,v_1\wedge v_j)=-e_1\wedge v_j$,que será de H,con lo que queda visto que $H=U^2$.

Tomemos $(\lambda_{11}e_1\wedge v_1+\dots+\lambda_{1n}e_1\wedge v_n,v_1\wedge v_2)=-\lambda_{11}e_1\wedge v_2+\lambda_{12}e_1\wedge v_1$, que es de H.

Pongamos ahora

$$\lambda_{12}e_1\wedge v_1-\lambda_{11}e_1\wedge v_2\in H$$

$$\lambda_{11}e_1\wedge v_1+\lambda_{12}e_1\wedge v_2+\dots+\lambda_{1n}e_1\wedge v_n\in H.$$

Multiplicando la segunda expresión por el cociente entre λ_{12} y λ_{11},y restándole la primera,tenemos un elemento de la forma $\mu_{12}e_1\wedge v_2+\dots+\mu_{1n}e_1\wedge v_n$,en H.A no ser que hubiesen sido $\lambda_{13}=0,\dots,\lambda_{1n}=0$,y $\lambda_{12}/\lambda_{11}=-\lambda_{11}/\lambda_{12}$,de lo que resulta $\lambda_{12}^2=-\lambda_{11}^2$. lo que es absurdo.

Ahora a partir de $\mu_{12}e_1\wedge v_2+\dots+\mu_{1n}e_1\wedge v_n\in H$,volveremos a hacer lo mismo ,y al final llegaremos a $e_1\wedge v_n\in H$.

Tomando $(e_1\wedge v_n,v_i\wedge v_n)=e_1\wedge v_i\in H$,para todo i,luego $H=U^2$.

Por tanto efectivamente V^2+W^2 es maximal.

Si dim.$V\geqslant 2$ y dim.$W\geqslant 3$. Tomemos $e_1,\ldots,e_n,v_1,\ldots,v_m$, base ortonormal de U, tal que $V=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $W=\{v_1,\ldots,v_m\}$. Sea H una subálgebra de U^2, tal que $H\supsetneq V^2+W^2$.

Consideremos un elemento de H de la forma $\sum_{i,j}\lambda_{ij}e_i\wedge v_j$, con algún $\lambda_{ij}\neq 0$ (por ejemplo λ_{22}).

$$\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}e_i\wedge v_j, v_1\wedge v_2\right)= \sum_i(-\lambda_{i1}e_i\wedge v_2+\lambda_{i2}e_i\wedge v_1)\in H.$$

$$\left(\sum_i(-\lambda_{i1}e_i\wedge v_2+\lambda_{i2}e_i\wedge v_1), e_1\wedge e_2\right)=-\lambda_{11}v_2\wedge e_2+\lambda_{21}v_2\wedge e_1+$$
$$+\lambda_{12}v_1\wedge e_2-\lambda_{22}v_1\wedge e_1\in H.$$

Ahora utilizamos que la dimensión de W no es dos, al poner

$$(\lambda_{22}e_1\wedge v_1-\lambda_{21}e_1\wedge v_2-\lambda_{12}e_2\wedge v_1+\lambda_{11}e_2\wedge v_2, v_1\wedge v_3)=-\lambda_{22}e_1\wedge v_3+\lambda_{12}e_2\wedge v_3$$

$$(\lambda_{22}e_1\wedge v_3-\lambda_{12}e_2\wedge v_3, e_1\wedge e_2)=\lambda_{22}v_3\wedge e_2+\lambda_{12}v_3\wedge e_1\in H.$$

Así pues tenemos:

$$-\lambda_{22}e_1\wedge v_3+\lambda_{12}e_2\wedge v_3\in H$$

$$\lambda_{12}e_1\wedge v_3+\lambda_{22}e_2\wedge v_3\in H$$

Si, estos coeficientes no son proporcionales, tendremos que $e_1\wedge v_3$ y $e_2\wedge v_3$ son de H. Y si fueran proporcionales, llegaremos a que $-\lambda_{22}^2=\lambda_{12}^2$ lo que es absurdo.

Luego $e_2\wedge v_3$ es de H. $(e_i\wedge e_2, e_2\wedge v_3)=-e_i\wedge v_3\in H$.

$(e_i\wedge v_3, v_j\wedge v_3)=e_i\wedge v_j\in H$, para todos i,j, Por tanto $H=U^2$, y V^2+W^2 es maximal.

En el caso en que dim.$V=2$, dim.$W=2$. Si $V=\{e_1,e_2\}$, y $W=\{v_1,v_2\}$. Tenemos que la subálgebra engendrada por $e_1\wedge e_2, v_1\wedge v_2, e_1\wedge v_1+e_2\wedge v_2$,

$,e_1\wedge v_2 - e_2\wedge v_1$, es el álgebra unitaria de la estructura compleja definida en U por $Je_1=e_2$, $Jv_1=v_2$. Y contiene estrictamente a V^2+W^2.

Lema I-7.-Sea M variedad Riemanniana conexa de dimensión n, inmersa isométricamente en codimensión dos, con curvatura normal igual a cero.

Tal que tenemos definidas dos distribuciones involutivas, paralelas, complementarias y ortogonales, $\{V_1,\ldots,V_k\}$, $\{V_{k+1},\ldots V_n\}$, de forma que en cada punto, podemos encontrar un par de tensores de Weingarten A_1, A_2, de la forma:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & b_{k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & b_n \end{pmatrix}$$

Tesis.-Los tensores A_1, A_2, cumpliendo lo anterior, están definidos globalmente.

Demostración.-Vamos a ver que los campos N_1, N_2, asociados a los tensores A_1, A_2, son paralelos, con lo cual como la curvatura normal es igual a cero, estarán definidos globalmente.

Hay que ver que $s_{12}=0$. Consideraremos $1\leq i,j\leq k$, $k+1\leq\alpha,\beta\leq n$.

$\nabla_{V_i}(A_1V_\beta)-A_1(\nabla_{V_i}V_\beta)-s_{12}(V_i)b_\beta V_\beta=\nabla_{V_\beta}(A_1V_i)-A_1(\nabla_{V_\beta}V_i)-s_{12}(V_\beta)0$.

Como las distribuciones son involutivas y paralelas, resulta que $s_{12}(V_i)=0$.

Imponiendo las ecuaciones de Codazzi para A_2,obtendremos $s_{12}(V_\beta)=0$.Luego $s_{12}=0$.

§2.Estudio de las inmersiones en codimensión dos con curvatura normal cero,a partir del âlgebra local de holonomía.-

Estudio local.

Teorema I-2.-Si M es una variedad Riemanniana,de dimensión >2,y $\neq 4$.Inmersa isométricamente en codimensión dos,con curvatura normal cero.

Sea p un punto de M en el cual el índice de nulidad relativa es igual a cero.Si en p el álgebra local de holonomía no es total.

Tesis.-Existe un entorno de p,N_p que puede ser:(a)El producto de un segmento por una variedad de dimensión n-1.(b)El producto de dos variedades,una de dimensión k y la otra de dimensión n-k.

En el caso (a),la codimensión es reducible a uno,y en (b) la inmersión descompone en producto de dos,cada una en codimensión uno.

Demostración.- Por ser la curvatura normal cero,los tensores de Weingarten son diagonalizables simultaneamente.

Consideremos $V_1,\ldots V_n$,base ortonormal de campos en un entorno de p,en la que diagonalizan dichos tensores.

Vamos a ver que podemos elegir una referencia adecuada en el fibrado normal,a fin de que los tensores de Weingarten asociados tengan recorridos distintos.

Consideremos $T_{V_1}V_1$,y sea N_1 un campo unitario en esta dirección(tal dirección existe,pues el índice de nulidad relativa es cero en p y lo sigue siendo en un entorno).Tomamos $N_2 \perp N_1$ y si A_1,A_2 son los tensores de Weingarten asociados,tenemos

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}$$

Como rec.$A_1 \neq$rec.A_2,aplicando Lema I-4,el (rec.$A_1)^2$está contenido en el álgebra local de holonomía,y como no es total rec.A_1 no puede ser T(M) en ningún punto del entorno.Luego ha de cumplirse por ejemplo $a_2=0$.

Ahora tenemos en cada punto del entorno ,rec.A_1+rec.A_2= =T(M),y rec.$A_1 \neq$rec.A_2,luego (rec.$A_1)^2$+(rec.$A_2)^2$ contenido en el álgebra local de holonomía.Si en algún punto ambos recorridos tuviesen interscción no nula,por el Lema I-3,el álgebra local de holonomía sería total.

Luego en dicho entorno N_p,tendremos:

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & b_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Como dim.$M\neq 4$,aplicando el Teorema I-1,y el Lema I-6,resulta que las distribuciones $\{V_1,\dots,V_k\},\{V_{k+1},\dots,V_n\}$,son paralelas e involutivas.

Ahora pueden presentarse dos posibilidaes:(a)$k=1$ ó $k=n-1$, (b)$k\neq 1$ y $k\neq n-1$.

(a)Supongamos $k=1$(el otro caso es análogo).

Tomando N_p más pequeño si es preciso,para poderlo considerar simplemente conexo,y aplicando el teorema de descomposición de de Rham,vemos que $N_p\cong(a,b)\times V_p$,donde V_p es una variedad de dimensión $n-1$.

Para ver que en este caso la codimensión es reducible a uno,se consideran las ecuaciones de Codazzi,com $2\leq i,j\leq n$.

$$(\nabla_{V_i}A_2)V_j-s_{21}(V_i)A_1(V_j)=(\nabla_{V_j}A_2)V_i-s_{21}(V_j)A_1(V_i);$$

Como $A_1(V_i)=A_1(V_j)=0$.Tenemos que para A_2 secumple:

$$(\nabla_{V_i}A_2)V_j=(\nabla_{V_j}A_2)V_i.$$

Con lo que vemos que el tensor A_2,define una inmersión isométrica de V_p en R^n ψ,con lo que tenemos reducida la codimensión.

$$N_p\cong(a,b)\times V_p \xrightarrow{id\times\psi} (a,b)\times R^n\times R^{n+1}.$$

Conviene notar que esta inmersión isométrica no difiere en una isometría de R^{n+2} de la inicial.

(b)Como tenemos las distribuciones $\{V_1,\dots,V_k\},\{V_{k+1},\dots,V_n\}$,involutivas y paralelas,tenemos $N_p\cong U_p\times V_p$,donde U_p es de dimensión k y V_p de dimensión n-k.

Por el Lema I-7,$s_{12}=0$.Y las ecuaciones de Codazzi son:

Considerando $1\leq i,j\leq k$, $k+1\leq\alpha,\beta\leq n$.

$$(\nabla_{V_i}A_1)(V_j)=(\nabla_{V_j}A_1)(V_i).$$
$$(\nabla_{V_\alpha}A_2)(V_\beta)=(\nabla_{V_\beta}A_2)(V_\alpha).$$

Luego A_1(resp.A_2),define una inmersión isométrica de U_p (resp.V_p) en R^{k+1}(resp. R^{n-k+1}),que denominamos ψ_1(resp.ψ_2).

Combinando las dos obtenemos:

$$N_p\cong U_p\times V_p \xrightarrow{\psi_1\times\psi_2} R^{k+1}\times R^{n-k+1}=R^{n+2}.$$

Inmersión que por el Teorema 0-3,difiere en una isometría de R^{n+2}de la inicial.

Ahora es preciso estudiar el caso en que dim.M es 4,ya que aquí no podemos aplicar las técnicas utilizadas en este último Teorema.

<u>Teorema.I-3.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión 4, inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal igual a cero.</u>

<u>Sea p punto de M,en el cual el índice de nulidad relativa es igual a cero.</u>

<u>Si en p el álgebra local de holonomía no es total.</u>

<u>Tesis.-Existe un entorno de p N_p,que puede ser:(a)El producto de un segmento por una variedad de dimensión tres.(b)El</u>

producto de dos superficies.

En el caso (a),la codimensión es reducible a uno,y en (b),la inmersión descompone en el producto de las inmersiones de las superficies,cada una en R^3.

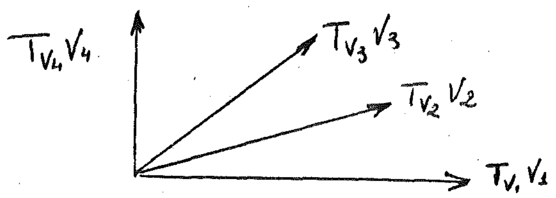
Demostración.-Por ser la curvatura normal cero,los tensores de Weingarten diagonalizan simultaneamente.

Consideremos V_1,V_2,V_3,V_4,base ortonormal de campos en un entorno de p,en la que diagonalicen dichos tensores.Vamos a ver cómo se distribuyen en el fibrado normal los campos $T_{V_1}V_1$, $T_{V_2}V_2,T_{V_3}V_3,T_{V_4}V_4$.

Sea $T_{V_1}V_1$ y N_1,campo unitario en su dirección.Tomamos $N_2 \perp N_1$,y si A_1,A_2,son los tensores de Weingarten asociados,

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & b_4 \end{pmatrix}$$

Por el Lema I-4,$(\mathrm{rec}.A_1)^2$ está contenido en el álgebra local de holonomía y como no es total deberá ocurrir,por ejemplo,que $a_4=0$.Y por tanto en el fibrado normal en el punto p se tendrá:



Haciendo lo mismo con $T_{V_2}V_2$ y con $T_{V_3}V_3$,si es preciso, vemos que la situación de estos campos en el punto p puede ser:

producto de dos superficies.

En el caso (a),la codimensión es reducible a uno,y en (b),la inmersión descompone en el producto de las inmersiones de las superficies,cada una en R^3.

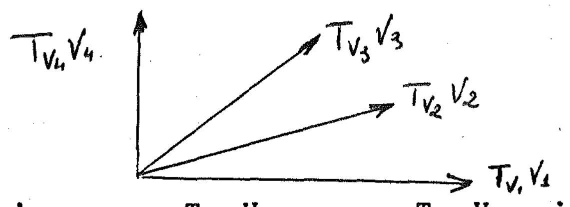
Demostración.-Por ser la curvatura normal cero,los tensores de Weingarten diagonalizan simultaneamente.

Consideremos V_1, V_2, V_3, V_4,base ortonormal de campos en un entorno de p,en la que diagonalicen dichos tensores.Vamos a ver cómo se distribuyen en el fibrado normal los campos $T_{V_1}V_1$, $T_{V_2}V_2, T_{V_3}V_3, T_{V_4}V_4$.

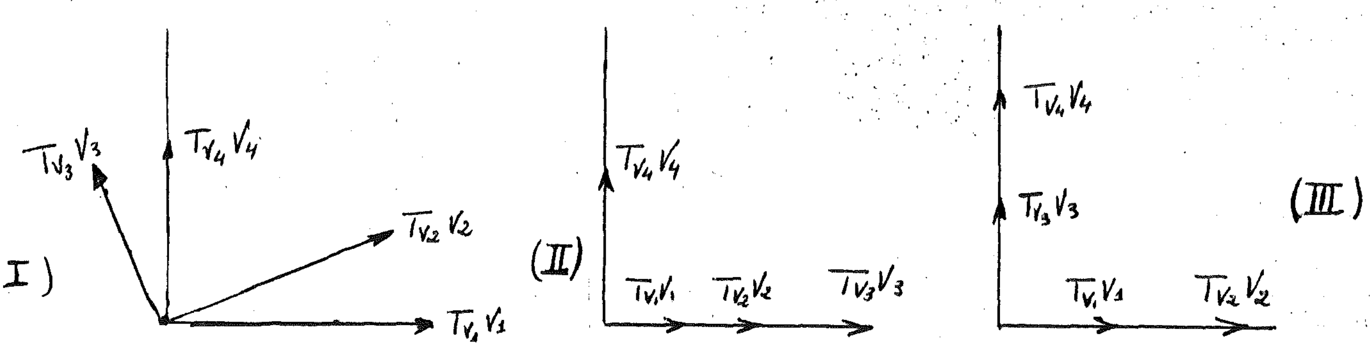
Sea $T_{V_1}V_1$ y N_1,campo unitario en su dirección.Tomamos $N_2 \perp N_1$,y si A_1, A_2,son los tensores de Weingarten asociados,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & a_4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & b_4 \end{pmatrix}$$

Por el Lema I-4,$(\text{rec}.A_1)^2$ está contenido en el álgebra local de holonomía y como no es total deberá ocurrir,por ejemplo,que $a_4=0$.Y por tanto en el fibrado normal en el punto p se tendrá:



Haciendo lo mismo con $T_{V_2}V_2$ y con $T_{V_3}V_3$,si es preciso, vemos que la situación de estos campos en el punto p puede ser:



Veamos que el caso I no es posible.En efecto en dicho caso tendremos:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & b_4 \end{pmatrix}$$

Tomando $U=\{V_1,V_2,V_3\}$, $V=\{V_2,V_3,V_4\}$.Tenemos $U+V=T_p(M)$, $U\neq\{0\}$, $V\neq\{0\}$,y aplicando el Lema I-3,el álgebra local de holonomía . . sería total.

En el caso II tendremos

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & b_4 \end{pmatrix}$$

Lo cual se verificará en un entorno de p.

Aplicando el Teorema I-1 y el Lema I-6,vemos que las distribuciones $\{V_1,V_2,V_3\}$, $\{V_4\}$,son paralelas y por tanto involutivas.Tomando el entorno de p más pequeño si es preciso,a fin de que sea simplemente conexo,tendremos $N_p \cong (a,b)\times V_p$,donde V_p será una variedad de dimensión tres.

Para ver que la codimensión es reducible a uno,se consideran las ecuaciones de Codazzi para A_1 que ahora serán:

$$(\nabla_{V_1}A_1)V_2=(\nabla_{V_2}A_1)V_1.$$
$$(\nabla_{V_1}A_1)V_3=(\nabla_{V_2}A_1)V_3.$$
$$(\nabla_{V_2}A_1)V_3=(\nabla_{V_3}A_1)V_2.$$

Con lo que vemos que el tensor A_1,define una inmersióm isométrica de V_p en R^4,que denominaremos ψ,y tomando $N_p \cong (a,b)\times V_p \xrightarrow{id.\times\psi} R\times R^4=R^5$.Tenemos reducida a uno la codimensión.(Conviene observar que esta inmersión isométrica,no difiere en una isometría de R^6 de la inicial.).

En el caso III,como no podemos aplicar el Lema I-6,hay que efectuar un estudio distinto.

En N_p tenemos:

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & b_3 & \\ & & & b_4 \end{bmatrix}$$

Como la curvatura normal es igual a cero,podemos considerar que $s_{12}=d\alpha$.

Las ecuaciones de Codazzi nos dan:

$$(I)\begin{bmatrix} (a_2-a_1)\Gamma^1_{12}=V_2(a_1) \\ (a_1-a_2)\Gamma^2_{21}=V_1(a_2) \\ a_2\Gamma^3_{12}=a_1\Gamma^3_{21} \\ a_2\Gamma^4_{12}=a_1\Gamma^4_{21} \end{bmatrix} \qquad (II)\begin{bmatrix} -a_2\Gamma^2_{13}=(a_1-a_2)\Gamma^2_{31} \\ -a_1\Gamma^1_{13}=V_3(a_1) \\ -V_1(\alpha)b_3=a_1\Gamma^3_{31} \\ 0=a_1\Gamma^4_{31} \end{bmatrix}$$

$$(III)\begin{bmatrix} -a_1\Gamma^1_{23}=(a_2-a_1)\Gamma^1_{32} \\ -a_2\Gamma^2_{23}=V_3(a_2) \\ -V_2(\alpha)b_3=a_2\Gamma^3_{32} \\ 0=a_2\Gamma^4_{32} \end{bmatrix} \qquad (IV)\begin{bmatrix} -a_2\Gamma^2_{14}=(a_1-a_2)\Gamma^2_{41} \\ -a_1\Gamma^1_{14}=V_4(a_1) \\ -V_1(\alpha)b_4=a_1\Gamma^4_{41} \\ 0=a_1\Gamma^3_{41} \end{bmatrix}$$

$$(V)\left\{\begin{array}{l} a_1\Gamma^1_{34}=a_1\Gamma^1_{43}\\ a_2\Gamma^2_{34}=a_2\Gamma^2_{43}\\ b_4V_3(\alpha)=0\\ b_3V_4(\alpha)=0\end{array}\right. \qquad (VI)\left\{\begin{array}{l} -a_1\Gamma^1_{24}=(a_2-a_1)\Gamma^1_{42}\\ -a_2\Gamma^2_{24}=V_4(a_2)\\ -a_2\Gamma^4_{42}=V_2(\alpha)b_4\\ a_2\Gamma^3_{42}=0\end{array}\right.$$

$$(VII)\left\{\begin{array}{l} b_3\Gamma^3_{12}=b_3\Gamma^3_{21}\\ b_4\Gamma^4_{12}=b_4\Gamma^4_{21}\\ 0=a_2V_1(\alpha)\\ 0=a_1V_2(\alpha)\end{array}\right. \qquad (VIII)\left\{\begin{array}{l} (b_3-b_4)\Gamma^4_{13}=-b_4\Gamma^4_{31}\\ b_3\Gamma^1_{13}=V_3(\alpha)a_1\\ b_3\Gamma^2_{13}=0\\ -b_3\Gamma^3_{31}=v_1(b_3)\end{array}\right.$$

$$(IX)\left\{\begin{array}{l} (b_4-b_3)\Gamma^3_{14}=-b_3\Gamma^3_{41}\\ -b_4\Gamma^4_{41}=V_1(b_4)\\ b_4\Gamma^2_{14}=0\\ b_4\Gamma^1_{14}=V_4(\alpha)a_1\end{array}\right. \qquad (X)\left\{\begin{array}{l} (b_3-b_4)\Gamma^4_{23}=-b_4\Gamma^4_{32}\\ -b_3\Gamma^3_{32}=V_2(b_3)\\ b_3\Gamma^1_{23}=0\\ b_3\Gamma^2_{23}=V_3(\alpha)a_2\end{array}\right.$$

$$(XI)\left\{\begin{array}{l} (b_4-b_3)\Gamma^3_{24}=-b_3\Gamma^3_{42}\\ -b_4\Gamma^4_{42}=V_2(b_4)\\ b_4\Gamma^1_{24}=0\\ b_4\Gamma^2_{24}=V_4(\alpha)a_2\end{array}\right. \qquad (XII)\left\{\begin{array}{l} (b_4-b_3)\Gamma^3_{34}=V_4(b_3)\\ (b_3-b_4)\Gamma^4_{43}=V_3(b_4)\\ b_4\Gamma^1_{34}=b_3\Gamma^1_{43}\\ b_4\Gamma^2_{34}=b_3\Gamma^2_{43}\end{array}\right.$$

De estas ecuaciones deducimos: $\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=\Gamma^4_{12}=\Gamma^4_{21}=\Gamma^1_{34}=\Gamma^1_{43}=$ $=\Gamma^2_{34}=\Gamma^2_{43}=0$. O sea que las distribuciones $\{V_1,V_2\}$, $\{V_3,V_4\}$, son involutivas. De (V) y (VII), $V_1(\alpha)=\ldots=V_4(\alpha)=0$, o sea que los campos que nos dan los tensores A_1, A_2, son paralelos en el fibrado normal. También deducimos que las distribuciones $\{V_1,V_2\}$, y $\{V_3,V_4\}$, son paralelas.

Tomando N_p simplemente conexo, tenemos $N_p\cong U_p\times V_p$, donde U_p y V_p son variedades de dimensión dos, simplemente conexas.

Para ver que la inmersión descompone en producto de dos.

Basta considerar las ecuaciones de Codazzi, que ahora serán:

$$(\nabla_{V_1} A_1)V_2 = (\nabla_{V_2} A_1)V_1.$$

$$(\nabla_{V_3} A_2)V_4 = (\nabla_{V_4} A_2)V_3.$$

Luego A_1, define $\psi_1 : U_p \longrightarrow R^3$, y A_2 define $\psi_2 : V_p \longrightarrow R^3$. Y la inmersión inicial difiere en una isometría de R^6 de $\psi_1 \times \psi_2$.

Estudio global.-

Proposición I-1.-Sea M variedad Riemanniana conexa de dimensión $n \geqslant 2$. Inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal igual a cero; tal que en todos sus puntos el álgebra local de holonomía no es total, y el índice de nulidad relativa es cero en todos sus puntos.

Tesis.-El álgebra local de holonomía es igual al álgebra de holonomía, y es de la forma U^2, con dim.$U=n-1$, o bien es U^2+V^2, con U y V complementarios ortogonales, ambos de dimensión >1.

Demostración.-Según sabemos por las demostraciones de los Teoremas I-1, I-2; en cada punto el álgebra local de holonomía es de uno de los dos tipos citados en el enunciado, y también está claro a partir de las demostraciones indicadas, que el conjunto de puntos en que es de un tipo determinado, es abierto. Como M es conexa sólo podrá ser del mismo tipo en todos los puntos. Y por ser constante la dimensión del álgebra local de holonomía aplicando Kobayashi-Nomizu (1), Theorem10.3, pág.96. Sabemos que ambas álgebras coinciden.

<u>TeoremaI-3.-Sea M variedad Riemanniana simplemente conexa, de dimensión n>2. Inmersa isométricamente en codimensión dos con curvatura normal cero. Tal que en todos sus puntos el álgebra local de holonomía no es total y el índice de nulidad relativa es cero.</u>

<u>Tesis.- M puede ser:</u>

<u>(a) $M\cong R\times N$, con N variedad de dimensión $n-1$, y la codimensión es reducible a uno.</u>

<u>(b) $M\cong N_1\times N_2$, con las dos variedades de dimensión >1, y la inmersión de M es el producto de sendas inmersiones en codimensión 1.</u>

<u>Demostración</u>.-(a) Si el álgebra de holonomía es U^2, con $\dim.U=n-1$. Tenemos las distribuciones involutivas, paralelas y ortocomplementarias siguientes $\{V_1,\ldots,V_{n-1}\},\{V_n\}$.

Los tensores A_1, A_2, por el Lema I-7, definidos globalmente con $s_{12}=0$.

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & b_n \end{pmatrix}$$

Como M es simplemente conexa $M\cong R\times N$, y de la observación de las ecuaciones de Codazzi para A_1,deducimos una inmersión isométrica ψ de N en R^n,que nos proporciona:

$$M\cong R\times N \xrightarrow{id\times\psi} R\times R^n=R^{n+1}.$$

(b)Si el álgebra de holonomía es U^2+V^2,con U y V ortocomplementarios y de dimensión >1cada uno.Tenemos dos distribuciones involutivas paralelas y ortocomplementarias$\{V_1,\ldots,V_k\}$, $\{V_{k+1},\ldots,V_n\}$.Y por el Lema I-7,los tensores A_1,A_2,definidos globalmente con $s_{12}=0$.

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & b_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Como M es simplemente conexa $M\cong N_1\times N_2$,variedades de dimensión k y n–k, respectivamente.De la observación de las ecuaciones de Codazzi para A_1 y A_2,deducimos dos inmersiones isométricas $\psi_1:N_1\longrightarrow R^{k+1}$,$\psi_2:N_2\longrightarrow R^{n-k+1}$,de forma que la inmersión inicial es,salvo una isometría de R^{n+2},$\psi_1\times\psi_2$.

---

§3.Estudio de las inmersiones en codimensión dos con curvatura normal igual a cero,a partir de las isometrías infinitesimales.-

Lema I-8.Sean A_1 y A_2 dos endomorfismos simétricos,diagonalizables simultáneamente,en la base $V_1,\ldots,V_n$.Tales que rec.A_1+rec.A_2=$\{V_1,\ldots,V_n\}$.

Si X e Y son dos vectores con $X\cdot Y=0$, y además para todo i se cumple que $XV_i\neq 0$, ó $YV_i\neq 0$; tales que $A_1(X)\wedge A_1(Y)+A_2(X)\wedge A_2(Y)=0$.

Tesis.-Pueden encontrarse $\bar{A}_1,\bar{A}_2$, con $^t(\bar{A}_1,\bar{A}_2)=u\,^t(A_1,A_2)$ con u elemento de O(2), de forma que:

$$\bar{A}_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & b_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_n \end{pmatrix}$$

Demostración.-Tendremos que $X=\lambda_1V_1+\ldots+\lambda_nV_n$. $Y=\mu_1V_1+\ldots+\mu_nV_n$.

Imponiendo la condición de que $A_1(X)\wedge A_1(Y)+A_2(X)\wedge A_2(Y)=0$, resulta :

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)(a_1a_2+b_1b_2)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_{n-1}\mu_n-\lambda_n\mu_{n-1})(a_{n-1}a_n+b_{n-1}b_n)=0 \end{array}\right\}$$

Como X e Y son ortogonales, uno de los primeros paréntesis de alguno de los primeros miembros, deberá ser no nulo. Por ejemplo $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1=0$, de lo que resulta: $(a_1,b_1)\perp(a_2,b_2)$. Luego podemos encontrar $\bar{A}_1,\bar{A}_2$, en la forma indicada, tales que:

$$\bar{A}_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ahora uno de los dos determinantes $\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}$ ó $\begin{vmatrix}\lambda_2 & \mu_2\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}$, ha de ser $\neq 0$, ya que de lo contrario (λ_3,μ_3) sería proporcional a

(λ_1,μ_1) y a (λ_2,μ_2), lo cual es absurdo. Luego, por ejemplo

$\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_3 & \mu_3\end{vmatrix}\neq 0$, de aquí resulta $a_1a_3+0b_3=0$, ó sea $a_3=0$.

Reiterando el proceso se tiene el resultado pedido.

Teorema I-4.-Sea M variedad Riemannian simplemente conexa de dimensión ≥ 4. Inmersa isométricamente en codimensión dos, con curvatura normal igual a cero, y con índice de nulidad relativa cero en todos sus puntos.

Si $i(M)=i_1(M)\perp i_2(M)$, donde $i_1(M)$ e $i_2(M)$ son ideales, tales que si X es de $i_1(M)$ e Y es de $i_2(M)$, se cumple $R_{XY}=0$, para todos X e Y. Además dim. $\{i_1(M)\perp i_2(M)\}=n$ en cada punto y la dimensión de cada ideal es ≥ 2.

Tesis.-$M\cong M_1\times M_2$, donde $i(M_1)=i_1(M)$, $i(M_2)=i_2(M)$. Y la inmersión descompone en producto de dos, cada una en codimensión uno.

Demostración.-Sea p punto de M; $V_1,\dots V_n$, base ortonormal de campos en un entorno de p, en la que diagomalizan los tensores de Weingarten.

Sea X de $i_1(M)$ e Y de $i_2(M)$. Y $V_1,\dots,V_\beta$, los campos con producto escalar $\neq 0$ con X ó Y. Ahora aplicamos el Lema I-8, a los tensores de Weingarten y podemos considerarlos restringidos a $\{V_1,\dots,V_\beta\}$ Resultará que podemos encontrar A_1 y A_2, tales que existirá un $\alpha<\beta$, de forma que $a_{\alpha+1}=\dots=a_\beta=0$, $b_1=\dots=b_\alpha=0$.

Su expresión matricial quedará:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{\alpha_0} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & b_{\alpha+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & b_\beta \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ahora tomaremos X' e Y' de forma que tengan producto escalar no nulo con $V_{\beta+1},\ldots V_{\beta+\delta}$, y con algún V_i con $1\leq i\leq\beta$. De aquí deducimos

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_{\alpha_0} & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & a_{\beta+1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & a_{\beta+\gamma_0} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & b_{\alpha+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & b_{\beta_0} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & b_{\beta+\gamma+1} \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & b_{\beta+\delta} \\ & & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Iterando el proceso y permutando convenientemente los subíndices, llegamos a:

$$A_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & b_{k+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Veamos cuánto puede valer k en el punto p y por tanto en un entorno de dicho punto.

Supongamos que fuera $k=n-1$. Tomaremos X y X´en $i_1(M)$, lin. independientes en un entorno de p, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $(\lambda_1',\dots,\lambda_n')$, sus coordenadas en la base $V_1,\dots,V_n$. Y también Y e Y´en $i_2(M)$, cumpliendo lo mismo que los anteriores, y $(\mu_1,\dots,\mu_n)$, $(\mu_1',\dots,\mu_n')$ sus coordenadas.

Al imponer $R_{XY}=R_{X'Y}=R_{XY'}=R_{X'Y'}=0$, tenemos que

$$1=\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \vdots & \vdots\\ \lambda_{n-1} & \mu_{n-1}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda_1' & \mu_1\\ \vdots & \vdots\\ \lambda_{n-1}' & \mu_{n-1}\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1'\\ \vdots & \vdots\\ \lambda_{n-1} & \mu_{n-1}'\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda_1' & \mu_1'\\ \vdots & \vdots\\ \lambda_{n-1}' & \mu_{n-1}'\end{pmatrix}$$

Como X y X´son lin.ind., una de las dos $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$, $(\lambda_1',\dots,\lambda_{n-1}')$ será no nula, y de lo anterior se deduce:

$(\lambda_1',\dots,\lambda_{n-1}')=\alpha(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$, luego $\lambda_n'\neq\alpha\lambda_n$.

Por tanto, es posible encontrar un elemento de $i_1(M)$, que em p sea $(0,\dots,0,1)$. Aplicando el mismo razonamiento a Y y a Y´, llegaremos a que existe un elemento de $i_2(M)$ que en p es $(0,\dots,0,1)$, lo cual es absurdo.

Por tanto en p y por tanto en un entorno $k\geq 2$, y $n-k\geq 2$.

Veamos ahora que el valor de k es constante en toda la variedad.En efecto,según ya hemos indicado en la demostración anterior,el valor de k es localmente constante y por ser M conexa,k será constante en toda M.

Veamos ahora que $\{i_1(M)\}=\{V_1,\ldots,V_k\}$,$\{i_2(M)=\{V_{k+1},\ldots,V_n\}$.

Supongamos que no es así,y tomemos X de $i_1(M)$,e Y de $i_2(M)$,tales que $\lambda_1\mu_1>0$y $\lambda_{k+1}\mu_{k+1}>0$.La existencia de estos dos campos vamos a probarla en la forma siguiente:Tomemos X en $i_1(M)$,con $\lambda_1\neq 0$ y $\lambda_{k+1}\neq 0$.Todo elemento de $i_2(M)$ ha de tener ó $\mu_1\neq 0$,ó $\mu_{k+1}\neq 0$,para que pueda cumplirse la condición $R_{XY}=0$. Sea Y_1 de $i_2(M)$,$Y_1=\mu_1V_1+\ldots+\mu_{k+1}V_{k+1}+\ldots$,con $\mu_1\neq 0$ y $\mu_{k+1}\neq 0$. Si $\lambda_1\mu_1$ y $\lambda_{k+1}\mu_{k+1}$ tienen el mismo signo,ya tenemos lo que queríamos,y si no tomemos otro elemento de $i_2(M)$,lin.ind. del anterior $Y_2=\mu_1'V_1+\ldots+\mu_{k+1}'V_{k+1}+\ldots$.El rango del par (μ_1,μ_{k+1}), (μ_1',μ_{k+1}'),es dos,ya que de lo contrario existiría un elemento de $i_2(M)$ con $\mu_1=\mu_{k+1}=0$,lo que es absurdo.

Por tanto está claro que existe un elemento de $i_2(M)$,cumpliendo la condición $\lambda_1\mu_1>0,\lambda_{k+1}\mu_{k+1}>0$.

De la condición $R_{XY}=0$,resulta:

$$\text{rango}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \vdots & \vdots\\ \lambda_k & \mu_k\end{pmatrix}=1 \qquad \text{rango}\begin{pmatrix}\lambda_{k+1} & \mu_{k+1}\\ \vdots & \vdots\\ \lambda_n & \mu_n\end{pmatrix}=1$$

De lo que resulta $(\mu_1,\ldots,\mu_k)=\alpha(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$,con $\alpha>0$,

$(\mu_{k+1},\dots,\mu_n)=\beta(\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n)$, con $\beta>0$. Lo cual está en contradicción con el hecho de que $X\cdot Y=0$.

Así pues tenemos un X de $i_1(M)$ en $\{V_1,\dots,V_k\}$, y un Y de $i_2(M)$ en $\{V_{k+1},\dots,V_n\}$.

Consideremos ahora otro X' de $i_1(M)$, si tuvieera algún λ_i', con $i>k$, distinto de cero. Imponiendo $R_{X'Y}=0$, resulta que el rango de $(\lambda_{k+1}',\dots,\lambda_n')$ y $(\mu_{k+1},\dots,\mu_n)$ es igual a uno, lo que imposibilita que $X'\cdot Y=0$.

Con ésto queda visto que $\{i_1(M)\}=\{V_1,\dots,V_k\}$, $\{i_2(M)\}=$ $=\{V_{k+1},\dots,V_n\}$.

Del estudio de las ecuaciones de Codazzi resulta que las distribuciones $\{V_1,\dots,V_k\}$, $\{V_{k+1},\dots,V_n\}$, son involutivas y paralelas. Por consiguiente $M\cong M_1\times M_2$, con $\dim.M_1=k$, $\dim.M_2=n-k$. Y de lo anterior vemos que $i(M_1)=i_1(M)$, $i(M_2)=i_2(M)$.

Si ahora consideramos las ecuaciones de Codazzi, con el sistema de índices $1\leq i,j\leq k$. $k+1\leq\alpha,\beta\leq n$.

$$(\nabla_{V_i}A_1)V_j=(\nabla_{V_j}A_1)V_j. \qquad\qquad (\nabla_{V_\alpha}A_2)V_\beta=(\nabla_{V_\beta}A_2)V_\alpha.$$

De lo que resulta que A_1 define $\psi_1:M_1\longrightarrow R^{k+1}$, y A_2 define $\psi_2:M_2\longrightarrow R^{n-k+1}$. Y la inmersión inicial difiere en una isometría de R^{n+2} de $\psi_1\times\psi_2$. c.s.q.d.

CAPITULO II.REDUCCION DE LA CODIMENSION.

§1.Codimensióm reducible por la constancia de la dimensión del primer espacio normal.-

Vamos a empezar estudiando las inmersiones en codimensión reducible a uno,para las que podemos enunciar:

Teorema II-1.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n,simplemente conexa,que admite inmersión isométrica en codimensión k,tal que la dimensión del primer espacio normal es constante e igual a uno.Y además el conjunto de puntos en que se anulan todas las curvaturas seccionales es discreto.

Tesis.-La codimensión es reducible a uno.

Demostración.-Sea p punto de M y U entorno de p,en el que tenemos definidos los k tensores $A_1,\dots,A_k$,de forma que $A_2=\dots=A_k=0$,y $A_1\neq 0$.

Vamos a ver que $s_{i1}=0$,para todo $i>1$.

Sea $V_1,\dots,V_n$,base ortonormal de campos en U en la que diagonaliza A_1(para conseguir ésto se toma el entorno más pequeño si es preciso),y sean a_i los autovalores.Podemos suponer

a_1 y $a_2 \neq 0$.

Consideremos las ecuaciones de Codazzi:

$$(\nabla_{V_1} A_2)V_2 - s_{21}(V_1)a_2 V_2 = (\nabla_{V_2} A_2)V_1 - s_{21}(V_2)a_1 V_1.$$

Pero como que $A_2=0$,nos quedará:$s_{21}(V_1)a_2V_2=s_{21}(V_2)a_1V_1$, de lo que resulta $s_{21}(V_1)=s_{21}(V_2)=0$.

Considerando ahora las ecuaciones para A_2,y los pares $(V_1,V_3),\ldots,(V_1,V_n)$,obtenemos $s_{21}=0$.

De la misma forma obtendríamos $s_{13}=\ldots=s_{1k}=0$.Si representamos por $\xi_1,\ldots,\xi_k$,los campos el el fibradó normal cuyos tensores asociados son los $A_1,\ldots,A_k$.Lo anterior significa que $\{\xi_1\},\{\xi_2,\ldots,\xi_k\}$,son paralelos y los podemos definir globalmente por traslado paralelo en el fibrado normal.

Como $R^N(X,Y)\xi_i=\sum_{j=1}^{k}(\left(A_i,A_j\right)X\cdot Y)\xi_j=0$,ya que $A_2=\ldots=A_k=0$

Tenemos que el traslado paralelo en el fibrado normal no depende del camino elegido.Por tanto pueden definirse globalmente ,por traslado paralelo en el fibrado normal,los campos $\xi_1,\ldots,\xi_k$,y por tanto los tensores $A_1,\ldots A_k,s_{ij}$,verificándose $s_{ij}=0$,para todos i,j.

Ahora tenemos que A_1 cumple las ecuaciones de Gauss y Codazzi,luego tenemos una inmersión isométrica de M en R^{n+1}, que podemos extender trivialmente a una en R^{n+k},que diferirá de la inicial en una isometría de R^{n+k}.

Teorema II-2.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, conexa, inmersa isométricamente en R^{n+k}. $\phi: M \longrightarrow R^{n+k}$.

De forma que la dimensión del primer espacio normal es constante e igual a uno. Y el conjunto de puntos en que se anulan todas las curvaturas seccionales es discreto.

Tesis.-La codimensión es reducible a uno.

Demostración.-Sea p punto de M y U entorno de p simplemente conexo. Por el TeoremaII-1 la inmersión restringida a U será $\phi_U: U \longrightarrow R_U^{n+1}$.

Si consideramos V otro entorno del tipo anterior, y tal que $U \cap V \neq \phi$. Tenemos que $\phi(U \cap V)$ estará en $R_U^{n+1} \cap R_V^{n+1}$ y como no todas las curvaturas seccionales son cero, $R_U^{n+1} = R_V^{n+1}$. Como M es conexa tenemos que $\phi: M \longrightarrow R^{n+1}$.

Vamos a estudiar ahora el caso en que la dimesión del primer espacio normal es cte. sin ser uno.

TeoremaII-3.-Sea M variedad Riemanniana conexa, de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+k+q}.

De forma que la dimensión del primer espacio normal es constante e igual a k. Y en cada punto existen vectores X y Y, de forma que R_{XY} tiene rango al menos 2k.

Tesis.-La codimensión es reducible a k.

Demostración.-Sea p punto de M y U entorno de p simplemente conexo, en el cual tomamos k tensores $A_1, \ldots, A_k$, asociados con el primer espacio normal y $B_{k+1},\dots,B_{k+q}$, con su ortogonal.

$$R_{XY}=\sum_{j=1}^{k} A_j(X)\wedge A_j(Y).$$

Luego los 2k vectores $A_j(X),A_j(Y)$, deberán ser linealmente independientes en cada punto. Podemos tomar por tanto X e Y campos en U, que sigan cumpliendo que $A_j(X),A_j(Y)$ sean lin. ind. en cada punto.

Consideremos las ecuaciones de Codazzi:

$$(\nabla_X B_{k+1})Y-\sum_j s_{k+1,j}(X)A_j(Y)=(\nabla_Y B_{k+1})X-\sum_j s_{k+1,j}(Y)A_j(X).$$

Como $B_{k+1}=0$, resulta $s_{k+1,j}(X)=s_{k+1,j}(Y)=0$.

Tomamos ahora Z perpendicular a X y a Y, aplicando lo anterior al par X,Z, se obtiene $s_{k+1,j}(Z)=0$. Y por tanto $s_{k+1,j}=0$. De la misma forma veríamos $s_{k+2,j}=\dots=s_{k+q,j}=0$. O sea que el primer espacio normal y su ortogonal son paralelos en el fibrado normal, luego tendremos definidos globalmente $\{\xi_1,\dots,\xi_k\}$, $\{\xi_{k+1},\dots,\xi_{k+q}\}$.

Sean $1\leq i,j\leq k$. $k+1\leq\alpha,\beta\leq k+q$. $R^N(V,W)(\xi_i,\xi_\alpha)=(A_i,A_\alpha)V{\cdot}W=0$.
$R^N(V,W)(\xi_\alpha,\xi_\beta)=(A_\alpha,A_\beta)V{\cdot}W=0$.

Por tanto el álgebra de holonomía para el fibrado normal está contenida en $\{\xi_1,\dots,\xi_k\}^2$.

luego globalmente podemos definir $\xi_{k+1},\dots,\xi_{k+q}$. Cumpliéndose $s_{i\alpha}=0, s_{\alpha\beta}=0$.

Los tensores $\{A_i,s_{ij}\}$, definen una inmersión isométrica de U en R^{n+k}, que se extiende trivialmente a una en R^{n+k+q}, y que difiere en una isometría de la inicial. Luego tenemos: $\phi|U:U \longrightarrow R_U^{n+k}$.

Sea V otro entorno del tipo anterior, y tal que tiene intersección no vacía con U. $\phi|U\cap V:U\cap V \longrightarrow R_U^{n+k}\cap R_V^{n+k}$. Pero como $\xi_{k+1},\ldots,\xi_{k+q}$, están definidos globalmente, resulta que $R_U^{n+k} = R_V^{n+k}$, y por tanto $\phi:M \longrightarrow R^{n+k}$.

----

§2. Reducción de la codimensión a partir de los espacios normales sucesivos.

Proposición II-1.- Sea M variedad Riemanniana conexa de dimensión n, inmersa isométricamente en R^{n+k+q}. $\phi:M \longrightarrow R^{n+k+q}$.

Sean $\eta_1,\ldots,\eta_q$, vectores del fibrado normal en p punto de M, que como subespacio es invariante por el grupo de holonomía, en el fibrado normal.

Si $h_r(X,Y)\perp\tau_p^r\{\eta_1,\ldots,\eta_q\}$. Donde τ_p^r designa el traslado paralelo a lo largo de cualquier camino de p a r.

Tesis.- La codimensión es reducible a k.

Demostración.- Globalmente tenemos definidos $\{\eta_1,\ldots,\eta_q\}$, $\{\xi_{q+1},\ldots,\xi_{q+k}\}$. Además como $R^N(X,Y)(\eta_i,-)=(B_i,-)XY=0$, ya que $B_i=0$. Globalmente podremos definir $\eta_1,\ldots,\eta_q$.

Ahora podemos considerar un entorno de p, U simplemente conexo, y en él los tensores $B_1=\ldots=B_q=0, A_{q+1},\ldots,A_{q+k}$. Tomando

$1\leq i,j\leq q$. $q+1\leq\alpha\leq q+k$ .Tenemos $s_{ij}=0$, $s_{i\alpha}=0$.

Luego los tensores $A_{q+1},\ldots,A_{q+k}$,definen una inmersión isométrica en R^{n+k}.Que podemos prolongar trivialmente a una en R^{n+q+k},que difiere en una isometría de la inicial.

Luego $\phi|U:U\longrightarrow R_U^{n+k}$.

Sea V otro entorno del tipo anterior,tal que $U\cap V\neq\phi$.Entonces $\phi|U\cap V:U\cap V$—— $R_U^{n+k}\cap R_V^{n+k}$.Pero como $\eta_1,\ldots,\eta_q$,están definidos globalmente,resulta que $R_U^{n+k}=R_V^{n+k}$.Por tanto $\phi:M\longrightarrow R^{n+k}$.

Definición de los espacios normales sucesivos(Allendoerfer).

Ya sabemos que $N_1(p)=\text{rec}.\{h_p(Z_1,Z_2)\}$,para todo par Z_1,Z_2, de vectores tangentes a la variedad en el punto p.

Supongamos definidos los espacios normales $N_1,\ldots,N_k$,con $N_i\perp N_j$,para todo $i\neq j$.Para definir N_{k+1} se considera

$$L_{k+1}(p)=\text{rec}.\{(D_{Z_1}(D_{Z_2}(\ldots(D_{Z_k}(h(Z_{k+1},Z_{k+2})))\ldots)))_p\}.$$

Para todos los $Z_1,\ldots,Z_{k+2}$,campos tangentes a M.

Si $L_{k+1}(p)\cap(N_1(p)+\ldots+N_k(p))^{\perp}$ no es cero(los complementos ortogonales se toman en $T_p(M)$),definimos $N_{k+1}(p)$ como la intersección anterior.Y si la intersección es cero definimos

$$N_{k+1}(p)=(N_1(p)+\ldots+N_k(p))^{\perp}.$$

De todas formas,para los resultados que queremos obtener, nos resulta más cómoda la consideración de unos espacios normales,distintos de los anteriores y definidos de la forma siguiente: $\bar{N}_1=N_1$, $\bar{N}_2=L_2+\bar{N}_1$, $\ldots,\bar{N}_k=L_k+\bar{N}_{k-1}$.

<u>Proposición II-2.-Sea M variedad Riemanniana conexa, inmersa isométricamente en un espacio euclídeo.</u>

<u>Si $\bar{N}_k=\bar{N}_{k-1}$, en cada punto.</u>

<u>Tesis.-La dimensión de $\bar{N}_{k-1}$ es constante y $\bar{N}_{k-1}$ es paralelo en el fibrado normal.</u>

<u>Demostración</u>.-La hipótesis nos dice:

$$\text{rec.}\{D_{Z_1}(D_{Z_2}(\ldots(D_{Z_{k-1}}(h(Z_k,Z_{k+1})))\ldots))\}\subset\text{rec.}\{D_{Y_1}(\ldots$$

$$\ldots(D_{Y_{k-2}}(h(Y_{k-1},Y_k)))\ldots))\}\cup\ldots\cup\text{rec.}\{h(X_1,X_2)\}.$$

O sea que la dimensión de $\bar{N}_{k-1}$ es localmente constante, como se deduce de la observación de lo anterior, y también que $\bar{N}_{k-1}$ es paralelo em el fibrado normal.

Como M es conexa la dimensión de $\bar{N}_{k-1}$ será constante.

De esta Proposición, resultan ya sin necesidad de demostración los siguientes teoremas.

<u>Teorema II-4.-En las hipótesis de la Proposición II-2, si la dimensión de $\bar{N}_{k-1}$ es menor que la codimensión, entonces ésta es reducible.</u>

<u>Teorema II-5.-Sea M variedad Riemanniana conexa, inmersa isométricamente en un espacio euclídeo.</u>

<u>Si en algún punto dim.$\bar{N}_k$ es igual a la codimensión, para cierto k. Entonces la codimensión no es reducible.</u>

CAPITULO III. ESTUDIO DE LAS INMERSIONES ISOMETRICAS A PARTIR DE LAS ISOMETRIAS INFINITESIMALES DE LA VARIEDAD.

De la observación de las inmersiones isométricas inyectivas de algunas variedades Riemannianas de dimensión dos, muy sencillas, vemos que en aquellos casos en que la inmersión es rígida, o sea que cualquier otra difiere de la anterior por una isometría del espacio euclídeo ambiente, las isometrías infinitesimales de dicha variedad son la restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo a la variedad.

Ahora bien, considerando un cilindro de R^3, vemos que hay isometrías infinitesimales que no son la restricción de ninguna isometría infinitesimal de R^3.

En efecto, sea el cilindro $x=\cos\theta, y=\operatorname{sen}\theta, z=z$. Una base para el álgebra de Lie de las isometrías infinitesimales es: $zD_\theta-\theta D_z, D_\theta, D_z$. El campo $zD_\theta-\theta D_z=(-z\operatorname{sen}\theta, z\cos\theta, -\theta)=(-zx_2, zx_1, -\text{arc.tan}\frac{x}{x})$, no es la restricción de ninguna isometría infinitesimal de R^3 al cilindro.

Otro caso en que hay alguna isometría infinitesimal que no es restricción, es el de la inmersión homeomorfa isométrica del plano hiperbólico en R^6, véase Blanusa D(1Se considera el plano hiperbólico como una de las dos componentes de $x^2+y^2-t^2=-1$, con la métrica inducida por $dx^2+dy^2-dt^2$. Se puede expresar en coordenadas u,v, por $x=\mathrm{ChuShv}$, $y=\mathrm{Shu}$, $z=\mathrm{ChuChv}$, $ds^2=$ $=du^2+\mathrm{Ch}^2u\ dv^2$.

Una base para el álgebra de Lie de isometrías infinitesimales es $D_v, -e^v D_u + e^v \mathrm{Tan.hu} D_v, e^{-v}D_u + e^{-v}\mathrm{Thu}D_v$.

Las funciones $x_1=\int_0^{\mu}\sqrt{1-f_1'(\xi)^2-f_2'(\xi)^2}\cdot d\xi$, $x_2=v$, $x_3=f_1(u)\cos(v\psi_1(u))$, $x_4=f_1(u)\mathrm{sen}(v\psi_1(u))$, $x_5=f_2(u)\cos(v\psi_2(u))$, $x_6=f_2(u)\mathrm{sen}(v\psi_2(u))$.
Con $\psi_1(u)=e^{2\alpha(u)+5}$, $\psi_2(u)=e^{2\beta(u)+6}$, $\alpha(u)=\left[\frac{|u|+1}{2}\right]$, $\beta(u)=\left[\frac{|u|}{2}\right]$,

$A=\int_0^1 \mathrm{sen}\pi\xi e^{-\frac{1}{\mathrm{sen}^2\pi\xi}}\, d\xi$, llamando $\gamma(\xi)$ a la función que se integra $\phi_1(u)=\left(\frac{1}{A}\int_0^{u+1}\gamma(\xi)\ d\xi\right)^{1/2}$, $\phi_2(u)=\left(\frac{1}{A}\int_0^{u}\gamma(\xi)d\xi\right)^{1/2}$, $f_1(u)=\frac{\phi\ (u)}{\psi\ (u)}\ \mathrm{Shu}$,
$f_2(u)=\frac{\phi\ (u)}{\psi\ (u)}\ \mathrm{Shu}$.

Definen una inmersión homeomorfa isométrica del plano hiperbólico en R^6.

La isometría infinitesimal D_v, aunque localmente es restricción no lo es globalmente.

En este capítulo vamos a estudiar la relación entre la rigidez de las inmersiones y el hecho de que las isometrías infinitesimales de la variedad sean la restricción de isometrías infinitesimales del espacio euclídeo ambiente.

§1. Estudio por medio de los tensores del fibrado normal, del hecho de que X de i(M) sea restricción de $\bar{X}$ de i(R^{n+-}).

Proposición III-1.- Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, inmersa isometrícamente en R^{n+k}. De manera que X de i(M) es la restricción de $\bar{X}$ de i(R^{n+k}).

Tesis.-Para cada punto p de M existe un entorno de p y una elección de los tensores A_i, s_{jk}, en dicho entorno, de forma que $L_X A_i=0$, $L_X s_{jk}=0$.

Demostración.- Como $\bar{X}$ es de i(R^{n+k}), sea $\bar{\phi}_t$ su grupo uniparamétrico, ya que T(M) es invariante por $\bar{\phi}_t$, también lo será su ortogonal que es el fibrado normal a la variedad.

Tomemos U entorno de p en M y $\bar{U}$ entorno de p en R^{n+k} tal que $\bar{U}\supset U$. Podemos tomar en $\bar{U}$,$\xi_1,\ldots,\xi_k$, campos ortonormales tales que $L_{\bar{X}}\xi_i=0$ y restringidos a U nos dan el fibrado normal.

Sean ahora $V_1,\ldots,V_n$, base de campos en U, de forma que $L_X V_\alpha=0$. Podemos extenderlos a $\bar{U}$, de manera que si $\bar{V}_\alpha$ son dichas extensiones, se cumple $L_{\bar{X}}\bar{V}_\alpha=0$.

Considerando $L_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{\bar{V}_\alpha}\xi_i)=\bar{\nabla}_{\bar{V}_\alpha}L_{\bar{X}}\xi_i+\bar{\nabla}_{(\bar{X},\bar{V})}\xi_i=0$. El campo $L_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{V_\alpha}\xi_i)$ sobre los puntos de M será $L_X(A_i(V_\alpha)+s_{ij}(V_\alpha)\xi_j)=$ $=L_X(A_i(V_\alpha))+(L_X s_{ij})(V_\alpha)\xi_j$. Si ésto es cero han de anularse las partes tangencial y normal, por tanto $L_X(A_i(V_\alpha))=(L_X A_i)(V_\alpha)=0$, $(L_X s_{ij})V_\alpha=0$. Por consiguiente $L_X A_i=0$, $L_X s_{ij}=0$.

El recíproco de esta proposición,cuya demostración no es fácil,es fundamental no solo por el resultado,sino también por las técnicas utilizadas en su demostración,que utilizaremos en resultados posteriores.

Para ello empezaremos probando

Lema III-1.-Sea M variedad Riemanniana de dimensión n, p punto de M y U entorno de p en el que tenemos un tensor (1,1) simétrico A,tal que siendo X de i(M),se cumple $L_X A=0$.

Si $V_1,\dots,V_n$,es una base ortonormal de campos en U,en la que A diagonaliza.

Tesis.-Existe V entorno de p,$V\subset U$,en el que podemos tomar $V'_1,\dots,V'_n$,base ortonormal de campos en la que diagonaliza A y se cumple $L_X V'_i=0$.

Demostración.-Sea V entorno de p,$V\subset U$,con un sistema de coordenadas $x_1,\dots,x_n$,centrado en p,de forma que en los puntos de V se cumple $D_{x_1}=X$.

Se considera la subvariedad $x_1=0$,y para cada punto q de ella razonamos en la forma siguiente:en q,A tiene por autovalores $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.Si en q,$\alpha_1=\dots=\alpha_k$,de $0=(L_X A)(V_i)=L_X(\alpha_i V_i)-A(L_X V_i)=X(\alpha_i)V_i+\alpha_i L_X V_i-A(L_X V_i)$,resulta $X(\alpha_i)=0$.Luego la igualdad entre las k primeras αse seguirá verificando a lo largo de la variedad integral de X por q.

Como $L_X V_i=\beta_{ij}V_j$,con $\beta_{ij}=-\beta_{ji}$,resulta de lo anterior que