ACERCA DEL GENERO VIRTUAL DE LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS

VºBº

Tesis
CAS

Memoria presentada por
D. Eduardo Casas Alvero
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas.

Universidad de Barcelona, Facultad de Matemáticas, 1975.

INDICE

INTRODUCCION

El problema objeto de esta memoria tiene su origen en la clásica fórmula del género para curvas algebraicas planas. Dicha fórmula expresa el género (efectivo) de una curva algebraica plana en función de su género virtual (o aritmético según algunos autores) y de un término dependiente de las singularidades de la curva.

Es bien sabido que los géneros virtual y efectivo de una curva no singular coinciden, de modo que el género efectivo de una curva cualquiera, al ser un invariante birracional, puede entenderse como el género virtual de su modelo no singular. Si se escribe la fórmula del género en la forma $g = p + \delta$ donde g es el género efectivo y p el género virtual, δ puede interpretarse como la diferencia entre el género virtual del modelo no singular y el de la propia curva. En [3] [1], interpretado δ como la variación de género virtual sufrida en el proceso de desingularización, se obtiene una fórmula del género válida para una curva cualquiera: $g = p - \sum_x(\mu_x + p_x - 1)$ con el sumatorio extendido a todos los puntos, ordinarios e infinitamente próximos, de la curva, y en la que μ_x es la multiplicidad del punto x, mientras p_x designa el género virtual del cono tangente en x. La demostración se obtiene descomponiendo el proceso de desingularización en etapas sucesivas (transformaciones cuadráticas centradas en puntos múltiples).

El mismo problema puede considerarse para superficies algebraicas si bien el proceso de desingularización de una superficie no es tan sencillo como el de una curva: siguiendo a Zariski [33], sabemos que puede alcanzarse un modelo no singular de una superficie S mediante sucesivas normalizaciones y transformaciones cuadráticas centradas en puntos múltiples. Aun en el caso de una superficie normal, al efectuar una transformación cuadrática centrada en un punto múltiple, puede obtenerse una superficie no normal (por existir una curva múltiple en el primer entorno, por ejemplo). Parece pues justificado realizar

---

[1] Los números entre corchetes se refieren a la bibliografía incluida al final de la memoria.

un estudio de la variación experimentada por el género virtual en el proceso de normalización y tal es el tema de esta tesis.

Designemos por S una superficie algebraica y por $\overline{\overline{S}}$ su normalizada. Para determinar la diferencia de géneros virtuales $p_{\overline{\overline{S}}} - p_S$ se descompone la proyección $\overline{\overline{S}} \to S$ en un número finito de transformaciones de dos tipos distintos: una primera transformación permite construir, a partir de S, una superficie S_{cm} cuyos anillos locales verifican la condición de Cohen-Macaulay resultando inalterados en la transformación $S \leftarrow S_{cm}$ aquellos puntos de S cuyos anillos locales verificaban ya la condición de Cohen-Macaulay (cap. III).

Partiendo ya de una superficie S cuyos anillos locales verifican la condición de Cohen-Macaulay, se define un segundo tipo de transformación, $S \leftarrow \overline{S}$, centrada en una de las curvas múltiples de S (cap IV). Tal transformación permite introducir la noción de curvas en el primer entorno de una curva de S y, reiterando el proceso, la de curvas en el enésimo entorno de una curva de S.

Si se parte de una superficie cualquiera S , se alcanza su normalizada $\overline{\overline{S}}$ transformando primero S en la superficie S_{cm} y operando luego, a partir de esta, mediante un número finito de transformaciones del segundo tipo.

Descompuesto ya el proceso de normalización, en el capítulo V se da una primera determinación de las variaciones experimentadas por el género virtual en las transformaciones

$S \leftarrow S_{cm}$ y $S \leftarrow \overline{S}$. La primera de ellas resulta ser la variación de género virtual que sufren, por la misma transformación, ciertas curvas de S (teorema V - 7).

Los resultados del capítulo V sugieren la conveniencia de introducir, para una curva C sobre una superficie S, la <u>función asociada a C en S</u>. Tal función puede definirse para una subvariedad de una variedad de dimensión arbitraria. En el caso de que la subvariedad se reduzca a un punto, la función asociada coincide con la función de Hilbert-Samuel del anillo local del punto en la variedad. Si θ es el haz de anillos locales de la superficie y $\underline{\underline{a}}$ el haz de ideales de la curva, la función asociada se define por la fórmula

$$F(n) = \chi(\theta/\underline{\underline{a}}^{(n)}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(\theta/\underline{\underline{a}}^{(n)})$$

donde $\underline{\underline{a}}^{(n)}$ es la enésima potencia simbólica del haz de ideales $\underline{\underline{a}}$ (cap. II).

En el capítulo VI se establece que las funciones asociadas a determinadas curvas son polinomios en n para n suficientemente grande y se determinan las variaciones de género virtual en las diversas etapas del proceso de normalización como términos independientes de los polinomios correspondientes a diversas funciones asociadas (VI-4, VI-5, VI-6). Importa señalar la analogía con el caso de las curvas, por cuanto en [3] aparecen las variaciones de género virtual como términos independientes de polinomios de Hilbert-Samuel.

El resto de la memoria (capítulos VII a X) está dedicado al cálculo efectivo de la función asociada, y con ella de una variación de género, para determinadas superficies del espacio proyectivo $P_3(k)$. Ante todo (cap VII) ha sido indispensable extender algunos resultados de la teoría de la representación de curvas algebraicas en el espacio, en particular se establece que para toda curva C , localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe una superficie S que pasa por C , de modo que C admite sobre S una ecuación local en cada uno de sus puntos (VII-5). El teorema permite generalizar a este tipo de curvas uno clásico que afirma que toda curva no singular aparece como intersección completa de cuatro superficies a lo más (VII-6). En los capítulos VIII y IX se calcula la función asociada en el espacio $P_3(k)$ a una curva localmente intersección en cada punto de dos superficies. Tal función asociada permite obtener algunos teoremas clásicos en teoría de curvas alabeadas, entre ellos la fórmula del género virtual de una curva representada como intersección parcial de dos superficies (IX - 5). El capítulo X está dedicado al cálculo efectivo, bajo ciertas hipótesis, de la función asociada a una curva múltiple de una superficie del espacio $P_3(k)$ a partir de los resultados de los dos capítulos anteriores. Ello proporciona en particular la expresión de una variación del género (X -8, X-9).

Las técnicas actuales de la teoría de esquemas y del álgebra conmutativa han sido indispensables en la realización de este trabajo; sin embargo la intuición que ha llevado a la mayoría de los resultados procede de la obra de los geómetras clásicos italianos. En este sentido es de lamentar que la sencillez de algunas demostraciones se vea quizás oscurecida por el formalismo algebraico que por otra parte no he sido capaz de evitar.

Quede aquí constancia de mi agradecimiento al Dr. J. Teixidor, director de este trabajo, quien me ha hecho conocer y apreciar la geometría italiana y a mis compañeros J. Mª. Giral, J. Grané, J. M. Regué y G. Welters con los que he podido mantener conversaciones sobre estos temas.

Barcelona, marzo de 1975.

CAPITULO I. PRELIMINARES.

A lo largo de toda la memoria k será un cuerpo algebraicamente cerrado que tomaremos como cuerpo base. Supondremos que k es de característica cero aunque esta hipótesis es innecesaria en algunos capítulos. Todos los anillos que se consideren se supondrán conmutativos y con unidad sin hacer mención especial de ello.

Emplearemos constantemente el lenguaje de esquemas y detallaremos aquí los conceptos básicos que nos van a ser de utilidad así como algunas cuestiones no tan usuales que utilizaremos posteriormente. En lo que se refiere a la teoría de esquemas nos remitiremos al texto de Grothendieck [8], y además a los de Mumford [11] y Dieudonné [4] más ceñidos al caso que nos interesa.

§1. Variedades algebraicas.

Haremos uso tan solo de variedades algebraicas proyectivas. Para poder considerar variedades con componentes múltiples interesa tomar las variedades como esquemas: el espacio proyectivo de dimensión n sobre k , $P_n(k)$, será el k-esquema algebraico Proj $k[X_o,\ldots,X_n]$ como es habitual ([8] cap. II, §2, [11] pag. 163).

Llamaremos variedad algebraica (sobreentendiendo proyectiva) a cualquier subesquema cerrado de un $P_n(k)$ ([8] cap. I, §4; [11] cap. II, §5). Una variedad algebraica será pues un par formado por un cerrado V de $P_n(k)$ y un haz sobre V , cociente[1] del haz estructural de $P_n(k)$ por un haz de ideales, al que llamaremos haz estructural,o también, haz de anillos locales de la variedad. Si (V,θ_V) es una variedad algebraica (V cerrado de $P_n(k)$, θ_V haz estructural), mientras no haya peligro de confusión la designaremos por V, no sin advertir que dos variedades algebraicas con el mismo conjunto subyacente no tienen por que ser iguales. Consideraremos las variedades independientemente de sus inmersiones en un espacio proyectivo. El morfismo de inmersión de una variedad en el proyectivo no se entenderá parte integrante de la estructura de la variedad, y en consecuencia dos variedades serán isomorfas cuando lo sean como esquemas, independientemente de que tal isomorfismo sea compatible con inmersiones de las variedades.

Una subvariedad (W,θ_W) de una variedad (V,θ_V) será un subesquema cerrado de V ; θ_W es entonces la restricción a W del cociente de θ_V por un cierto haz de ideales $\underline{\underline{I}}_W$ sobre V.

---

[1] Salvo restricción a V.

Si U es un abierto afín de V, el anillo $A = \Gamma_U \theta_V = \theta_V(U)$ es el anillo afín correspondiente a U y U se identifica al esquema afín Spec A. Si W es una subvariedad de V, $\underline{\underline{I}}_W$ el haz de ideales correspondiente, llamaremos sistema de ecuaciones de W en U a cualquier sistema de generadores del ideal de A : $\underline{\underline{I}}_W(U) = \Gamma_U \underline{\underline{I}}_W$. Si x es un punto de V, llamaremos sistema de ecuaciones locales de W en x a cualquier sistema de generadores de la fibra en x de $\underline{\underline{I}}_W$, $\underline{\underline{I}}_{W,x}$, que es un ideal de la fibra en x de θ_V, $\theta_{V,x}$. En particular $1 \in \theta_x$ es una ecuación local de W en cualquier punto $x \in (V - W)$. Diremos que W es localmente principal en V cuando lo sea $\underline{\underline{I}}_W$, esto es, cuando W admita una ecuación local en cada punto de V.

§2. Descomposición de haces de ideales sobre una variedad.

Cualquier variedad algebraica es en particular un esquema noetheriano y pueden aplicarse los resultados de [8] cap. IV, §3: si $\underline{\underline{I}}$ es un haz de ideales en V, considerando una descomposición reducida en irredundantes del θ_V-módulo $\theta_V/\underline{\underline{I}}$, tal descomposición es finita, permite expresar $\underline{\underline{I}}$ como intersección de haces de ideales primarios, siendo el radical de cada uno de ellos un haz de ideales primos: $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}_1 \cap \ldots \cap \underline{\underline{I}}_m$, $\mathrm{rad}(\underline{\underline{I}}_i) = \underline{\underline{p}}_i$. Cualquiera que sea el abierto afín $U \subset V$, $\underline{\underline{I}}(U) =$

$= \underline{\underline{I}}_1(U) \cap \ldots \cap \underline{\underline{I}}_m(U)$ es una descomposición reducida en primarios del ideal $\underline{\underline{I}}(U)$ en $\theta(U)$ una vez eliminados los posibles términos irrelevantes $\underline{\underline{I}}_i(U) = \theta(U)$. Los $\underline{\underline{p}}_i(U)$ son los primos asociados al ideal $\underline{\underline{I}}(U)$, una vez excluidos los correspondientes a términos irrelevantes. También, si $x \in W$, $\underline{\underline{I}}_x = (\underline{\underline{I}}_1)_x \cap \ldots \cap (\underline{\underline{I}}_m)_x$ es una descomposición reducida de $\underline{\underline{I}}_x$ en θ_x excluidos los términos $(\underline{\underline{I}}_i)_x = \theta_x$. Los primos asociados son los $(\underline{\underline{p}}_i)_x$ para $(\underline{\underline{p}}_i)_x \neq \theta_x$.

Se observa inmediatamente, a partir de los resultados análogos en anillos noetherianos ([10] cap. VI, §5) , que los haces de ideales primos $\underline{\underline{p}}_i$ y los de ideales primarios $\underline{\underline{I}}_i$ cuyo radical sea minimal entre los $\underline{\underline{p}}_i$, vienen determinados por $\underline{\underline{I}}$.

§3. Componentes de una variedad.

La definición habitual de componentes de un esquema reducido hace corresponder estas a las componentes irreducibles (en sentido topológico) del espacio subyacente; utilizaremos aquí una definición distinta, aplicable a variedades no reducidas[1], con el fin de poder considerar componentes sumergidas.

Considerando una descomposición en primarios del haz de ideales nulo en V , $\underline{\underline{0}} = \underline{\underline{q}}_1 \cap \ldots \cap \underline{\underline{q}}_m$, diremos que la subvariedad de V definida por cada uno de los haces $\underline{\underline{q}}_i$ es una

[1] i. e., con elementos nilpotentes en alguno de sus anillos locales.

componente de V. Llamaremos componentes reducidas de V a las subvariedades definidas por los haces de ideales primos $\underline{\underline{p}}_i = \mathrm{rad}(\underline{\underline{q}}_i)$. La componente correspondiente a $\underline{\underline{q}}_i$ y la reducida correspondiente a $\underline{\underline{p}}_i = \mathrm{rad}(\underline{\underline{q}}_i)$ tienen el mismo espacio subyacente y pueden diferir tan solo en el haz estructural. Los espacios subyacentes a las componentes reducidas de V correspondientes a un primo $\underline{\underline{p}}_i$ minimal, coinciden con las componentes irreducibles, en sentido topológico, del espacio subyacente a V. Llamaremos componentes sumergidas a aquellas, reducidas o no, que corresponden a un primo asociado no minimal en la descomposición del ideal cero. Una componente reducida sumergida es siempre subvariedad de alguna otra componente reducida de V. Las componentes reducidas y las componentes no sumergidas son independientes de la particular descomposición del ideal cero en primarios.

El hecho de que V sea reducida equivale a que los haces $\underline{\underline{q}}_i$ lo sean de ideales primos. En tal caso V carece de componentes sumergidas y sus componentes coinciden con sus componentes reducidas.

Llamaremos irreducibles a las variedades reducidas con una sola componente; en particular, las componentes reducidas de una variedad cualquiera son variedades irreducibles.

Diremos que una componente es múltiple cuando no coincide con la reducida correspondiente, las variedades reducidas carecen de componentes múltiples.

§4. Variedades irreducibles. Dimensión.

Si V es una variedad irreducible, su espacio subyacente es irreducible (topologicamente) y existe un punto $x \in V$ al que son adherentes todos los puntos de V , $\bar{x} = V$. Llamaremos a este punto, como es habitual, punto genérico de V . La fibra de θ_V en el punto genérico x es un cuerpo, el cuerpo de funciones racionales de V , escribiremos $\theta_{V,x} = k(V)$. Para cualquier abierto afín $U \subset V$, $x \in U$ y si se identifica U a $\mathrm{Spec}\ \theta_V(U)$, x corresponde al ideal cero de $\theta_V(U)$. Para cada abierto afín U de V y cada punto y de V los anillos $\theta_V(U)$, $\theta_{V,y}$ son íntegros y se inyectan de forma natural en $k(V)$ de modo que este se identifica a su cuerpo de fracciones.

La dimensión de una variedad irreducible V puede tomarse como el grado de trascendencia de $k(V)$ sobre k o, equivalentemente, como la dimensión de un anillo afín cualquiera de V . Llamando puras a las variedades cuyas componentes reducidas tienen todas la misma dimensión, la dimensión de una variedad pura será la de cualquiera de sus componentes reducidas; aparece también tal dimensión como la de cualquiera de sus anillos afines.

Llamaremos curvas y superficies a las variedades puras de dimensión, respectivamente, uno y dos.

En general, en una variedad pura de dimensión r, llamaremos puntos de altura s a aquellos cuyo anillo local tiene dimensión s, los puntos genéricos de las componentes reducidas de la variedad serán los de altura cero y los puntos cerrados los de altura r. Si U es un abierto afín de V, y x un punto de U, $\theta_{V,x}$ es el localizado de $\theta_V(U)$ en el ideal primo correspondiente a x, de ahí que si x es de altura s corresponda a un ideal primo de altura s de $\operatorname{Spec} \theta_V(U)$.

Sea x un punto de altura s en V, su adherencia es un cerrado irreducible de V que admite una única estructura como subvariedad reducida (e irreducible) de V; su punto genérico es x y su dimensión $r - s$. Reciprocamente, si W es una subvariedad irreducible de V de dimensión $r - s$, el punto genérico x de W es, como punto de V, de altura s. Nos referiremos al anillo local $\theta_{V,x}$ (de dimensión s) llamandole anillo local de W en V.

En particular, en el caso de una superficie aparecen, además de los puntos cerrados y los de altura cero, puntos de altura uno que son los puntos genéricos de las curvas irreducibles trazadas sobre la superficie.

§5. Morfismos.

Un morfismo ψ entre dos variedades (V,θ_V), (W,θ_W) , será un morfismo de esquemas, es decir, una aplicación continua entre los espacios subyacentes (que desgnaremos también por ψ con abuso de lenguaje) $\psi:V \to W$ junto con un ψ-homomorfismo de haces de anillos, $\psi^{\#}:\theta_W \to \theta_V$ (equivalente a un morfismo de haces $\theta_W \to \psi_*\theta_V$) tal que para cada $x \in V$, el morfismo inducido $\psi_x:\theta_{W,\psi(x)} \to \theta_{V,x}$ sea un homomorfismo local. ([8] cap. 0, §3.5 , §4.1 ; cap. I, §2.2 o también [11] cap. II §2).

Si V y W son irreducibles, de puntos genéricos x, y respectivamente, diremos que $\psi:V \to W$ es un morfismo birracional cuando $\psi(x) = y$ resultando además que ψ_x es isomorfismo $k(W) \simeq k(V)$. Un tal morfismo corresponde, en sentido clásico, a una transformación birracional entre V y W que carece de puntos excepcionales en V .

Si $\psi:V \to W$ es un morfismo, diremos que ψ es afín ([8] cap. II §1.2) cuando para cualquier abierto afín $U \subset W$, $\psi^{-1}(U)$ sea un abierto afín de V , basta que la condición se verifique para los abiertos de un recubrimiento de W por afines para que ψ sea afín.

Sea $\psi:V \to W$ un morfismo afín, para cada abierto afín $U \subset W$ se tiene un morfismo de anillos inducido por ψ : $\theta_W(U) \to \theta_V(\psi^{-1}(U))$ que permite considerar $\theta_V(\psi^{-1}(U))$ como una $\theta_W(U)$-álgebra. Se dice que ψ es finito si es afín y para cualquier abierto afín $U \subset V$, $\theta_V(\psi^{-1}(U))$ es un $\theta_W(U)$-módulo de tipo finito y se demuestra también en este caso que basta que la condición se verifique para los abiertos de un recubrimiento de W. Si $\psi : V \to W$ es finito, resulta que la fibra $\psi^{-1}(x)$ de un punto cualquiera $x \in W$ está formada por un número finito de puntos. ([8] cap. II, §6; [11] cap. II, §7).

Consideraremos a menudo morfismos birracionales y finitos entre variedades irreducibles. Si $\psi : V \to W$ está en estas condiciones, ψ es necesariamente una aplicación epiyectiva entre los espacios subyacentes ([8] cap. II, §6.1.10 y cap. I, §2.2.6) y para cada abierto afín $U \subset W$, $\theta_V(\psi^{-1}(U))$ es, identificando a través del morfismo inducido por ψ, $k(V) \simeq k(W)$, una extensión entera de $\theta_W(U)$ en su cuerpo de fracciones. Resulta así que el morfismo inducido por ψ, $\theta_W \to \psi_*\theta_V$ es un monomorfismo que hace de $\psi_*\theta_V$ un θ_W-módulo de tipo finito. Puede considerarse el haz de ideales $\underline{\underline{K}}$ de θ_W, anulador del θ_W-módulo $\psi_*\theta_V/\theta_W$: llamaremos a $\underline{\underline{K}}$ conductor de ψ y es fácil probar que para cada abierto afín $U \subset W$ y cada punto $x \in W$, $\underline{\underline{K}}(U)$ y $\underline{\underline{K}}_x$ son, respectivamente, los conductores, en el sentido algebraico clásico, de las extensiones enteras $\theta_W(U) \to \psi_{*\,V}(U) = \theta_V(\psi^{-1}(U))$, $\theta_{W,x} \to (\psi_*\theta_V)_x$.

<u>6. Variedades normales.</u> ([8], cap. II, §6.3 ; [11], cap. III,

§8; [4], §5).

Si V es una variedad irreducible, diremos que V es normal[1] cuando sean integramente cerrados en su cuerpo de fracciones ($k(V)$) todos los anillos locales de V. Es equivalente exigir que los anillos correspondientes a un recubrimiento por abiertos afines de V sean integramente cerrados en su cuerpo de fracciones, en este caso cualquier anillo afín de V verifica la misma propiedad.

La normalizada $\overline{\overline{V}}$ de una variedad irreducible V es una variedad también irreducible, normal y dotada de un morfismo $\omega:\overline{\overline{V}} \to V$ birracional y finito (y por tanto epiyectivo como aplicación continua). Tal variedad está determinada salvo isomorfismos compatibles con las correspondientes proyecciones en V. Si U es un abierto afín de V, designando por θ, $\overline{\overline{\theta}}$ los haces estructurales de V y $\overline{\overline{V}}$, $\overline{\overline{\theta}}(\omega^{-1}(U)) = \omega_*\overline{\overline{\theta}}(U)$ es la clausura entera de $\theta(U)$ en su cuerpo de fracciones.

Puede definirse la normalizada de V considerando la clausura entera en $k(V)$ del haz estructural θ y tomando $\overline{\overline{V}}$ como el espectro ([8], II,§1.3) de dicha θ-álgebra.

Si $\psi:\overline{V} \to V$ es un morfismo birracional y finito entre variedades irreducibles, designando por $\overline{\theta}$ el haz estructural

---

[1] No debe confundirse con la normalidad aritmética, dependiente de la inmersión en un espacio proyectivo ([32] , §3, corolario 12.8 y proposición 12.10.).

de $\overline{V}$, $\psi_*\overline{\theta}$ es una θ-álgebra entera sobre θ , contenida en el haz constante $k(V)$. Resulta pues que $\theta \subset \psi_*\overline{\theta} \subset \omega_*\overline{\overline{\theta}}$ si $(V,\overline{\overline{\theta}})$ es la normalizada de V , de donde, tomando los espectros de las θ-álgebras $\psi_*\overline{\theta}$, $\omega_*\overline{\overline{\theta}}$ que son respectivamente $\overline{V}$, $\overline{\overline{V}}$, ω factoriza

$$\overline{\overline{V}} \xrightarrow{\eta} \overline{V} \xrightarrow{\psi} V$$

siendo η también birracional y finito.

Para asegurar que se alcanza la normalizada de una superficie por un número finito de transformaciones, utilizaremos el siguiente

<u>Lema I.1</u> <u>Si</u> V <u>es una variedad irreducible y</u> $\{(V_i,\theta_i)\}$, $i \in N$, <u>una familia de variedades irreducibles dotadas de morfismos birracionales y finitos</u>

$$\cdots \quad V_i \xrightarrow{\eta_i} V_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow V_1 \xrightarrow{\eta_1} V$$

<u>, para</u> i <u>mayor que un cierto</u> n <u>todos los</u> η_i <u>son isomorfismos</u>.

<u>Demostración</u>: Sea $\psi_i = \eta_1 \circ \cdots \circ \eta_i$, U un abierto afín de V: si $A = \theta(U)$, $A_i = \theta_i(\psi_i^{-1}(U))$, identificando $k(V) = k(V_1) = \cdots = k(V_i) = \cdots$ a través de los η_i , se tiene una sucesión de extensiones enteras en $k(V)$

$$A \subset A_1 \subset \cdots \subset A_i \subset \cdots$$

que deberá ser estacionaria ya que la clausura entera de A

en su cuerpo de fracciones $k(V)$ es un A-módulo de tipo finito (A es una k-álgebra y se aplica el teorema de [24], pag. III-25). Basta razonar ahora sobre los abiertos de un recubrimiento finito por afines de V.

<u>7. Dilatación a lo largo de una subvariedad.</u> ([8], cap. II, §8).

Sea (V,θ) una variedad algebraica, W una subvariedad propia de V con haz de ideales $\underline{\underline{I}}$. La suma directa $\Delta_{\underline{\underline{I}}}(\theta) = \bigoplus_{n\geq 0}\underline{\underline{I}}^n$ es una θ-álgebra graduada y llamaremos variedad obtenida de V por dilatación en W al k-esquema algebraico $\mathrm{Proj}\ \Delta_{\underline{\underline{I}}}(\theta)$ (probaremos más adelante que se trata de una variedad proyectiva), dotado del morfismo $\pi:\mathrm{Proj}\ \Delta_{\underline{\underline{I}}}(\theta) \to V$ inducido por el morfismo natural $\theta \to \Delta_{\underline{\underline{I}}}(\theta)$. Según [8], cap. II, §8.1.4 , $\mathrm{Proj}\ \Delta_{\underline{\underline{I}}}(\theta)$ es irreducible y π es un morfismo birracional y epiyectivo. De acuerdo con la definición de Proj. de una θ-álgebra graduada ([8], cap. II, §3), si U es un abierto afín de V, y $A = \theta(U)$, $\underline{I} = \underline{\underline{I}}(U)$,$\pi^{-1}(U)$ es el espectro homogéneo de la A-álgebra graduada $\Delta_{\underline{I}}(A) = \bigoplus_{n\geq 0}\underline{I}^n$. Recordemos ([8], cap. II, §2) que si $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ es un anillo graduado y $S_+ = \bigoplus_{n>0} S_n$, Proj S es el conjunto de ideales primos homogéneos de S que no contienen a S_+ . La topología en Proj S admite como base de abiertos los $D_+(f) = \{p \in \mathrm{Proj}\ S \mid f \notin p\}$ para los elementos homogéneos $f \in S_+$. Cada

$D_+(f)$ es un esquema afín, isomorfo al espectro del localizado homogéneo de S en el sistema multiplicativo de las potencias de f: $D_+(f) \simeq \operatorname{Spec} S_{(f)}$. En particular, si $\{f_\alpha\}$ es una familia de elementos homogéneos de S_+ tales que todo elemento de S_+ tenga alguna potencia en el ideal de S generado por los $\{f_\alpha\}$, los $D_+(f\ )$ forman un recubrimiento de Proj S.

En nuestro caso, $S = \Delta_{\underline{I}} A = \bigoplus_{n\geq 0} \underline{I}^n$ y si $f_1,\ldots,f_m$ es un sistema de generadores de $\underline{I}$, tomados como de grado uno en $\Delta_{\underline{I}} A$, los $D_+(f_i)$ recubren $\operatorname{Proj} \Delta_{\underline{I}} A = \pi^{-1}(U)$ y cada $D_+(f_i)$ se identifica al esquema afín $\operatorname{Spec} A[f_1/f_i,\ldots,f_m/f_i]$ de forma que la restricción de π a $D_+(f_i)$ viene dada por la inclusión natural $A \to A[f_1/f_i,\ldots,f_m/f_i]$. Resulta inmediato observar que π es isomorfismo localmente en cada punto $x \in V$ donde $\underline{\underline{I}}_x$ sea principal, en particular la restricción de π es un isomorfismo $\operatorname{Proj} \Delta_{\underline{\underline{I}}}\theta - \pi^{-1}(W) \simeq V - W$.

Vamos a ocuparnos de describir la dilatación de V a lo largo de W en términos más clásicos. Supongamos V sumergida en un espacio proyectivo $P_r(k)$, sea $k[X_o,\ldots,X_r]$ el anillo de polinomios correspondiente. Designaremos por $\overline{F}$ la clase, módulo el ideal de V , de un elemento $F \in k[X_o,\ldots,X_r]$, en particular $k[\overline{X}_o,\ldots,\overline{X}_r]$ es el anillo de coordenadas homogéneas de V , $V = \operatorname{Proj} k[\overline{X}_o,\ldots,\overline{X}_r]$. Si consideramos en $P_r(k)$ los abiertos afines complementarios de los hiperplanos

$X_i = 0$, las trazas de estos sobre V constituyen un recubrimiento de V por abiertos afines, $V = \bigcup_i U_i$, $U_i = \mathrm{Spec}\ k[\overline{X}_o/\overline{X}_i, \ldots, \overline{X}_r/\overline{X}_i]$. Supondremos tomadas las coordenadas de manera que V no esté contenida en ninguno de los hiperplanos $X_i = 0$. Sea I el ideal de W en $k[X_o,\ldots,X_r]$, I es un ideal homogéneo, $I = \oplus I_j$, designando por I_j el conjunto de elementos de I de grado j . Sean $G_o,\ldots,G_s$ un sistema de generadores de I , todos ellos homogéneos de grados respectivos ρ_o, $\ldots$, ρ_s ; tomemos una k-base de I_μ para μ mayor que el máximo de los $\rho_o,\ldots,\rho_s$, sea $F_o,\ldots,F_m$. Para cada i , los $F_o/X_i^\mu,\ldots, F_m/X_i^\mu$ generan el ideal de W en $k[X_o/X_i,\ldots X_r/X_i]$: en efecto, basta observar que dicho ideal viene engendrado por los $G_h/X_i^{\rho_h}$, $h = 0,\ldots,s$, y expresando $G_h X^{\mu-\rho_h}$ como combinación lineal de los F_j, basta dividir por X_i^μ para obtener la conclusión. De ahí que el ideal de W en cada uno de los anillos $k[\overline{X}_o/\overline{X}_i,\ldots,\overline{X}_r/\overline{X}_i]$ esté engendrado por los $\overline{F}_o/\overline{X}_i^\mu$, $\ldots$, $\overline{F}_m/\overline{X}_i^\mu$ y podemos recubrir $\pi^{-1}(U_i)$ por los abiertos afines

$$U_{ij} = \mathrm{Spec}\ k[\overline{X}_o/\overline{X}_i,\ldots,\overline{X}_r/\overline{X}_i][\overline{F}_o/\overline{F}_j,\ldots,\overline{F}_m/\overline{F}_j]$$

siendo la restricción de π a U_{ij} inducida por la inclusión natural entre los anillos correspondientes. Consideremos ahora un espacio proyectivo de dimensión m , $P_m(k)$, con coordenadas $Y_o,\ldots,Y_m$. El producto $P_r(k)\times P_m(k)$ está recubierto por los abiertos afines

$$E_{ij} = \operatorname{Spec} k[X_o/X_i,\dots,X_r/X_i] \otimes_k k[Y_o/Y_j,\dots,Y_m/Y_j] =$$
$$= \operatorname{Spec} k[X_o/X_i,\dots,X_r/X_i,Y_o/Y_j,\dots,Y_m/Y_j]$$

El morfismo de anillos que hace corresponder a cada X_s/X_i, $\overline{X}_s/\overline{X}_i$ y a los Y_t/Y_j , $\overline{F}_t/\overline{F}_j$ induce una inmersión de cada U_{ij} en E_{ij} , dichas inmersiones son compatibles con las identificaciones entre abiertos y permiten sumergir la variedad transformada Proj $\Delta_{\underline{\underline{I}}}\theta$ en $P_r(k)\times P_m(k)$. π viene dado de esta forma por restricción de la proyección $P_r(k)\times P_m(k) \to P_r(k)$ y la transformación hace corresponder al punto de coordenadas homogéneas $(\xi_o,\dots,\xi_r)$ de V el $(\xi_o,\dots,\xi_r;F_o(\xi),\dots,F_m(\xi))$ de $P_r(k)\times P_m(k)$. Recordando que las F_i generan el sistema lineal de las hipersuperficies de grado μ que pasan por W, la composición de nuestra transformación con la proyección $P_r(k)\times P_m(k) \to P_m(k)$ da lugar a la transformación definida por el sistema lineal cortado sobre V por las hipersuperficies de grado μ que pasan por W ([5] pag. 22).

En particular aparece la transformada de V como variedad proyectiva sin más que sumergir $P_r(k)\times P_m(k)$ en $P_{rm+r+m}(k)$ mediante el morfismo de Segre ([4] vol. 2 §3, por ejemplo).

Si designamos por $(\overline{V},\overline{\theta})$ la variedad obtenida de V por dilatación en W , $\overline{V}$ = Proj $\Delta_{\underline{\underline{I}}}\theta$, dada una subvariedad de V con haz de ideales $\underline{\underline{q}}$, tomaremos como transformada de la subvariedad en V la definida por el haz de ideales imagen inversa de $\underline{q}$. Si U es un abierto afín de V y $\overline{U}$ lo es de $\overline{V}$ de modo que $\pi(\overline{U}) \subset U$, el ideal de la transformada en $\overline{U}$ es $\underline{q}(U)\overline{\theta}(\overline{U})$. Si en particular consideramos el centro de dilatación W y $f_1,\ldots,f_m$ son ecuaciones de W en un abierto afín $U \subset V$ de anillo $A = \theta(U)$, recubriendo $\pi^{-1}(U)$ por los Spec $A|f_1/f_i,\ldots,f_m/f_i|$, el ideal de la transformada de W en cada uno de estos abiertos será $\sum_j f_j A|f_1/f_i,\ldots,f_m/f_i| = f_i A|f_1/f_i,\ldots,f_m/f_i|$ y la transformada de W es una subvariedad localmente principal de $\overline{V}$.

§8. Puntos singulares.

Un punto x de una variedad algebraica (V,θ) es no singular si y solo si su anillo local θ_x es regular ([22] vol. II, cap VIII, §11). Teniendo en cuenta que si un anillo local es regular también lo son todos sus localizados en ideales primos, si x no es un punto singular de V , tampoco lo es ningún $y \in V$ en cuya adherencia esté x o, inversamente, si y es singular, también lo son todos los puntos de la variedad que tiene a y como punto genérico. En el caso de variedades irreducibles (o reducibles sin componentes múltiples) es bién sabido que los puntos no singulares forman un abierto no vacío. Llamaremos múltiples aquellas subvariedades irreducibles cuyo punto genérico sea singular, ello equivale a que lo sean todos los de la subvariedad.

Si nos ceñimos al caso de superficies irreducibles, se presentarán en general un número finito de curvas múltiples junto con un número finito de puntos singulares cerrados fuera de ellas. El anillo local de una curva en una superficie irreducible es de dimensión uno, sabido que un anillo local de dimensión uno es regular si y solo si es principal, esto es, de valoración discreta, una curva irreducible será simple sobre una superficie si y solo si su anillo local es de valoración discreta.

Si x es un punto de una variedad pura (V,θ) tomaremos como multiplicidad de x en V la del anillo local θ_x, definida a partir del polinomio de Hilbert-Samuel de θ_x ([22] vol. II, cap VIII §10 ; [21] , pag. 186).

Un punto resulta singular si y solo si su multiplicidad es mayor que uno[1].

Si W es una subvariedad irreducible de V, la multiplicidad de W en V será la del punto genérico de W, es decir, la del anillo local de W en V.

---

[1] Debido a que un anillo local de multiplicidad uno en cuyo completado el ideal cero tenga todos los primos asociados minimales es necesariamente regular ([13] VI.40.6).

§9. Algunos resultados algebraicos.

Utilizaremos, la mayor parte de las veces sin referencia explícita, nociones y resultados corrientes de álgebra conmutativa, todos ellos se hallan en [22] [13] o [24].

Nos será de utilidad el hecho de que si A es un anillo excelente íntegro, en particular cualquier anillo local o afín de una variedad irreducible, y K el cuerpo de fracciones de A, un elemento α de K es entero sobre A si y solo si toma valor positivo o nulo por cualquier valoración centrada en un ideal primo de altura uno de A. En otras palabras, la clausura entera de A en K es la intersección de todos los anillos de valoración de K que contienen a A y tales que la traza de su ideal maximal en A es un primo de altura uno ([8] cap. IV, §7.8.3.1).

Demostraremos aquí dos resultados puramente técnicos que serán de interés más adelante.

Lema 1.2. *Sean* A *un anillo y* $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s$ *ideales maximales de* A. *Si* $\mathfrak{a}$ *es un ideal de* A *y, para cada* i, *el ideal* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}_i}$ *admite dos generadores, existen* f,g *pertenecientes a* A *tales que, para cualquier* i, *el ideal engendrado por* f, g *en* $A_{\mathfrak{m}_i}$ *coincide con* $\mathfrak{a}_i$.

Demostración: Sean $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_h,\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_r$ ideales maximales de A distintos entre si, $S_1 = A - \mathfrak{m}_1\cup\dots\cup\mathfrak{m}_h$, $S_2 = A - \mathfrak{n}_1\cup$..

$\ldots\cup\underline{n}_r$, $B_1 = S_1^{-1}A$, $B_2 = S_2^{-1}A$, $B_o = (S_1 \cap S_2)^{-1}A$; probemos en primer lugar que si llamamos $\underline{b}_1 = \underline{a}B_1$, $\underline{b}_2 = \underline{a}B_2$ y cada uno de ellos admite un par de generadores, $\underline{b}_1 = (f_1, g_1)$, $\underline{b}_2 = (f_2, g_2)$, existen $f, g \in A$ tales que $(f,g)B_o = \underline{a}B_o$. Resulta obvio que f_1, g_1, f_2, g_2 pueden elegirse en $\underline{a}$, multiplicandolos en todo caso por un inversible de B_1 o B_2. Sean

$$\alpha \in \underline{m}_1 \cap \ldots \cap \underline{m}_h - \underline{n}_1 \cup \ldots \cup \underline{n}_r$$

$$\beta \in \underline{n}_1 \cap \ldots \cap \underline{n}_r - \underline{m}_1 \cup \ldots \cup \underline{m}_h$$

debiendo observarse que ninguno de los dos conjuntos es vacío. Tomando

$$\begin{aligned} f &= \beta f_1 + \alpha f_2 \\ g &= \beta g_1 + \alpha g_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

tendremos $f, g \in \underline{a}$ y por lo tanto $(f,g)B_1 \subset \underline{a}B_1$. Teniendo en cuenta que f_2, $g_2 \in \underline{a} \subset \underline{b}_1$, tendremos expresiones en B_1

$$f_2 = \gamma_{11}f_1 + \gamma_{12}g_1$$

$$g_2 = \gamma_{21}f_1 + \gamma_{22}g_1$$

de ahí que en B_1

$$\begin{aligned} f &= (\beta + \gamma_{11}\alpha)f_1 + \alpha\gamma_{12}g_1 \\ g &= \gamma_{21}\alpha f_1 + (\beta + \gamma_{22}\alpha)g_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \beta + \gamma_{11}\alpha & \gamma_{12}\alpha \\ \gamma_{21}\alpha & \beta + \gamma_{22}\alpha \end{pmatrix}$$

es $\beta^2 + \alpha(\gamma_{11}\gamma_{22}\alpha + \gamma_{11}\beta + \gamma_{22}\beta - \gamma_{12}\gamma_{21}\alpha)$, inversible en B_1 por la elección de α y β . Por tanto pueden despejarse f_1 , g_1 de las (2) y $(f,g)B_1 = \underline{a}B_1 = (f_1,g_1)B_1$. Una demostración análoga prueba que $(f,g)B_2 = \underline{a}B_2$.

Si ahora $x \in \underline{a}B_o$, teniendo en cuenta que los ideales maximales de B_o lo son de B_1 o de B_2 , el transportador $((f,g)B_o:x)$ no puede estar contenido en ningún ideal maximal de B_o, luego $x \in (f,g)B_o$ y $\underline{a}B_o = (f,g)B_o$ dado que la inclusión inversa es obvia.

Para probar el enunciado basta ahora proceder por inducción: si $S_i = A - \underline{m}_1 \cup \ldots \cup \underline{m}_i$, probado que $\underline{a}S_i^{-1}A$ admite dos generadores, basta utilizar el resultado anterior para asegurar lo mismo de $\underline{a}S_{i+1}^{-1}A$. Probada la existencia de f, g de A tales que $(f,g)S_s^{-1}A = \underline{a}S_s^{-1}A$ el resultado es ya inmediato al ser los $A_{\underline{m}_i}$ localizados de $S_s^{-1}A$.

<u>Lema I.3.</u> <u>Con las hipótesis del lema anterior, si ahora $\underline{a}A_{\underline{m}_i}$ es principal para todo i , existe $f \in A$ tal que $\underline{a}A_{\underline{m}_i} = fA_{\underline{m}_i}$ cualquiera que sea i .</u>

<u>Demostración</u>: Basta repetir la del lema anterior tomando $g_i = 0$, $i = 1,\ldots,s$, de donde resultará $g = 0$.

§10. La teoría de Northcott.

De los trabajos de Northcott [15], [16] nos interesa fundamentalmente la noción de anillos en el primer entorno de un anillo local y ello solo para el anillo local de una curva en una superficie irreducible. Dicho anillo, sea A, es íntegro y de dimensión uno y el anillo semilocal en su primer entorno es $R(A) = A[f_1/f,\ldots,f_m/f]$ donde $f_1,\ldots,f_m$ es un sistema de generadores del ideal maximal de A y f un elemento superficial de grado uno en tal ideal o, equivalentemente, un elemento que presenta mínimo valor positivo por todas las valoraciones del cuerpo de fracciones de A centradas en el ideal maximal de este último. $R(A)$ es independiente de la elección de las $f_1,\ldots,f_m,f$. La extensión $A \to R(A)$ es entera, $R(A)$ es semilocal y a sus localizados en ideales maximales se les llama anillos locales en el primer entorno de A. Reiterando el proceso a partir de los anillos locales en el primer entorno de A se construyen los anillos locales en los sucesivos entornos de A: un anillo local en el enésimo entorno de A es un anillo local en el primer entorno de alguno del $(n-1)$-entorno de A. Se obtiene así el llamado árbol de anillos locales de A. Nos interesa destacar que A es regular (i. e., normal o de valoración discreta) si y solo si aparece en su primer entorno (como extensión de él mismo). En este caso $A = R(A)$ y en el primer entorno de A aparece un solo anillo local.

§11. Género virtual.

Según la definición clásica (por ejemplo [28] §31) el género aritmético virtual de una variedad (V,θ_V) pura de dimensión d es $(-1)^d(\Phi(0) - 1)$ siendo $\Phi(n)$ un polinomio en n que para n alto iguala la postulación de la variedad, número de condiciones impuestas a las superficies de grado n al obligarlas a pasar por la variedad.

Nos resultará más cómodo tomar el género aritmético virtual en la forma $(-1)^d(\chi(V) - 1)$ donde $\chi(V) = \sum_{i=o}^{d}(-1)^i \dim_k H^i(V,\theta_V)$ es la característica de Euler-Poincaré de V, la coincidencia de las dos definiciones viene asegurada por los resultados de Serre [23]. Conviene señalar que el género aritmético virtual, al que muchos autores llaman género aritmético, no coincide,en el caso de superficies, con el género aritmético clásico (véanse las definiciones en [5]; [29] cap. IV ; §1 ; [28] §31), más que en el caso en que la superficie sea no singular. Al no tener necesidad de tratar en ningún momento otro tipo de género, llamaremos,para abreviar, género virtual al género aritmético virtual.

CAPITULO II. POTENCIAS SIMBOLICAS.

Es bien sabido que si A es un anillo íntegro y noetheriano y $\underline{p}$ un ideal primo de A, en general no es posible asegurar que las potencias $\underline{p}^n$ sean ideales primarios. Desde luego el único primo minimal asociado a $\underline{p}^n$ es $\underline{p}$ pero en la descomposición de $\underline{p}^n$ pueden aparecer ideales primarios cuyo radical contenga a $\underline{p}$. Es habitual llamar enésima potencia simbólica de $\underline{p}$, y designarla por $\underline{p}^{(n)}$, a la componente $\underline{p}$-primaria de la descomposición de $\underline{p}^n$. Equivalentemente, $\underline{p}^{(n)} = \underline{p}^n A_{\underline{p}} \cap A$ siendo $\underline{p}^{(n)}$ el conjunto de los elementos de A que se expresan en forma de fracción cuyo numerador es de $\underline{p}^n$ y cuyo denominador no es de $\underline{p}$.

Desde un punto de vista más geométrico, supongamos que A es en anillo de un abierto afín U de una variedad (V,θ) irreducible y que $\underline{p}$ es el ideal de A correspondiente a una subvariedad irreducible W. A se interpreta como el anillo de las funciones algebraicas regulares en U y $\underline{p}$ como el ideal de las que se anulan en W. En general la subvariedad definida (en U) por $\underline{p}^n$ presentará componentes sumergidas además de una componente no reducida de conjunto subyacente

$W \cap U$. No parece pues conveniente interpretar la subvariedad definida por $\underline{p}$ como W "contada n veces". En cambio, parece razonable convenir en que si x es un punto de W y $\underline{\underline{m}}_x$ el ideal maximal de θ_x , los elementos de $\underline{\underline{m}}_x^n$ son las funciones regulares en x que presentan un orden de anulación mayor o igual que n en x (desde luego, siendo $\underline{\underline{m}}_x$ maximal, $\underline{\underline{m}}_x^n = \underline{\underline{m}}_x^{(n)}$ cualquiera que sea n). Observando entonces que $A_{\underline{p}}$ es la fibra de θ en el punto genérico de W y que su ideal maximal es $\underline{p}A_{\underline{p}}$, de la igualdad $\underline{p}^{(n)} = \underline{p}^n A_{\underline{p}} \cap A = (\underline{p}A_{\underline{p}})^n \cap A$, resulta que los elementos de $\underline{p}^{(n)}$ pueden interpretarse como funciones regulares en U que presentan un orden de anulación superior o igual a n en el punto genérico de W o, lo que es lo mismo, en W.

Si x es un punto de W , $\underline{\underline{p}}_x$ la fibra en x del haz de ideales de W , $(\theta_x)_{\underline{\underline{p}}_x}$ es el anillo local en el punto genérico de W , $\underline{\underline{p}}_x^{(n)}$ puede interpretarse como el ideal de las funciones regulares en x que presentan un orden de anulación superior o igual a n en el punto genérico de W .

Necesitaremos considerar el caso de una subvariedad reducible, para ello generalizamos la definición de potencias simbólicas: si A es un anillo noetheriano íntegro y $\underline{a}$ es un ideal de A cuyos primos asociados minimales son $\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_m$, estos son también los primos minimales asociados de $\underline{a}^n$ y definiremos $\underline{a}^{(n)}$ como la intersección de las componentes primarias de $\underline{a}^n$ correspondientes a $\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_m$. Equivalentemente, si $S = A - \underline{p}_1 \cup \ldots \cup \underline{p}_m$, $\underline{a}^{(n)} = (\underline{a}^n S^{-1}A) \cap A = A \cap (\bigcap_i \underline{a}^n A_{\underline{p}_i})$. Obviamente $\underline{a}^{(1)} = \underline{a}$ si y solo si $\underline{a}$ carece de componentes primarias sumergidas.

La definición se extiende inmediatamente a nivel de haces. Si (V,θ) es una variedad algebraica, $\underline{\underline{a}}$ un haz de ideales de θ , el haz $\underline{\underline{a}}^{(n)}$ será la intersección de los haces primarios de la descomposición de $\underline{\underline{a}}^n$ correspondientes a primos minimales; para cada abierto afín U , $\underline{\underline{a}}^{(n)}(U) = (\underline{\underline{a}}(U))^{(n)}$ y para cada punto $x \in V$, $(\underline{\underline{a}}_x)^{(n)} = (\underline{\underline{a}}^{(n)})_x$.

Aun en casos relativamente sencillos en los que la subvariedad definida por $\underline{\underline{a}}$ es pura e incluso irreducible, las potencias ordinarias y simbólicas de $\underline{\underline{a}}$ no coinciden (véase el ejemplo de [18] pag. 29).

<u>Proposición II.1.</u> <u>Sean</u> A <u>un anillo íntegro noetheriano,</u> $\underline{a}$ <u>un ideal de</u> A <u>cuyos primos asociados sean todos de una misma altura</u> m . <u>Si</u> $\underline{a}$ <u>admite un sistema de</u> m <u>generadores,</u> $\underline{a}^n = \underline{a}^{(n)}$ <u>cualquiera que sea</u> n .

<u>Demostración.</u> Sean $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_s$ los primos asociados a $\underline{a}$, $S = A - \underline{p}_1 \cup \ldots \cup \underline{p}_s$. Llamando B al localizado $B = S^{-1}A$, B es un anillo semilocal de dimensión m . Sean $f_1,\ldots,f_m$ un sistema de generadores de $\underline{a}$, $\underline{b} = \underline{a}B$. Designando por $\tilde{f}_i$ las clases de los f_i en $\underline{b}/\underline{b}^2$, probemos en primer lugar que el graduado $G_{\underline{b}}B = \bigoplus_{i \geq 0} \underline{b}^i/\underline{b}^{i+1} = B/\underline{b}[\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m]$ es un anillo de polinomios, esto es, que los $\tilde{f}_i$ son libres sobre $B/\underline{b}$.

En caso contrario, si $X_1,\dots,X_m$ son indeterminadas, el morfismo $\gamma : B/\underline{b}[X_1,\dots,X_m] \to B/\underline{b}[\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m]$ tal que $\gamma(X_i) = \tilde{f}_i$, tendría un núcleo no trivial. Sea $P(X_1,\dots,X_m)$ un elemento homogéneo no nulo de $\ker \gamma$; la longitud de la pieza de grado n de $B/\underline{b}[X_1,\dots,X_m]/P(X_1,\dots,X_m)$ se calcula facilmente ($B/\underline{b}$ es un anillo de Artin) resultando, para n mayor que el grado h de P

$$\operatorname{long}\left(B/\underline{b}[X_1,\dots,X_m]/P\right)_n = \left(\binom{n+m-1}{m-1} - \binom{n+m-1-h}{m-1}\right).\operatorname{long} B/\underline{b}$$

que es un polinomio en n de grado $m-2$ (nulo si $m = 1$). En cambio, observando que $\underline{a}$ es un ideal de definición de B, $\operatorname{long} B/\underline{b}^n$ es, para n alto, un polinomio en n de grado $m = \dim B$ ([24] pag. III-7), así

$$\operatorname{long} \underline{b}^n/\underline{b}^{n+1} = \operatorname{long} B/\underline{b}^{n+1} - \operatorname{long} B/\underline{b}^n$$

es un polinomio en n, para n alto, de grado $m-1$. Se obtiene una contradicción al ser $\underline{b}^n/\underline{b}^{n+1}$ isomorfo a un cociente de $\left(B/\underline{b}[X_1,\dots,X_m]/P(X_1,\dots,X_m)\right)_n$.

Sabido ya que los $\tilde{f}_i$ son libres sobre $B/\underline{b}$, consideremos el graduado $G_{\underline{a}}A = \bigoplus_{n\geq 0} \underline{a}^n/\underline{a}^{n+1}$ y el morfismo natural entre graduados $\psi : G_{\underline{a}}A \to G_{\underline{b}}B$. Si $\bar{f}_i$, $i = 1,\dots,m$, son las clases de los f_i en $\underline{a}/\underline{a}^2$, $G_{\underline{a}}A = A/\underline{a}[\bar{f}_1,\dots,\bar{f}_m]$ y representado $G_{\underline{b}}B$ como anillo de polinomios $G_{\underline{b}}B = B/\underline{b}[\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_m]$, ψ opera en grado cero según el morfismo natural $A/\underline{a} \to B/\underline{b}$ y $\psi(\bar{f}_i)=$

$= \tilde{f}_i$. Por ser B el localizado de A en el complementario de la unión de los primos asociados a $\underline{a}$, $\underline{a}B \cap A = \underline{a}$, esto es $\underline{b} \cap A = \underline{a}$ y ψ es inyectivo en grado cero. La independencia algebraica de los $\tilde{f}_i$ sobre $B/\underline{b}$ permite concluir que ψ es inyectivo.

Supongamos ahora $g \in \underline{a}^{(n)} - \underline{a}^n$ para cierto n ; sea r el mayor entero tal que $g \in \underline{a}^r$, $r > 0$ y por hipótesis $r + 1 \leqslant n$. El elemento $\bar{g} \in \underline{a}^r/\underline{a}^{r+1}$ es no nulo y su imagen por ψ es cero ya que $g \in \underline{a}^{(n)} \subset \underline{b}^n \subset \underline{b}^{r+1}$ con lo que se tiene una contradicción que prueba el enunciado.

Corolario II.2. Si V es una variedad algebraica irreducible de dimensión d y W una subvariedad pura de dimensión $d - m$ que admite en cada uno de sus puntos un sistema de m ecuaciones locales, las potencias simbólicas y ordinarias del haz de ideales de W coinciden.

Haremos uso de este corolario en el caso de curvas localmente principales sobre una superficie y el el de curvas en $P_3(k)$ que admiten un sistema de dos ecuaciones locales en cada uno de sus puntos.

CAPITULO III. LA CONDICION DE COHEN-MACAULAY EN SUPERFICIE.

De las diversas caracterizaciones de los anillos o, más en general, de los módulos de Cohen-Macaulay, tomaremos la del teorema 2, pag. IV-20 de [24] : un anillo local noetheriano A será de Cohen-Macaulay si y solo si existe un sistema de parámetros de A que es una A-sucesión. En tales condiciones todo sistema de parámetros de A es una A-sucesión.

Es sabido que todo anillo local regular es de Cohen-Macaulay ([24] corolario 3, pag IV-37); a la vista de la definición es inmediato probar que un anillo local de dimensión uno es de C. M. si y solo si existe un no divisor de cero en su ideal maximal. En particular todos los anillos locales de una curva, incluso reducible, verifican esta condición.

Estamos especialmente interesados en el caso de anillos locales íntegros de dimensión dos para los que utilizaremos la siguiente caracterización.

<u>Proposición III.1</u>. <u>Si</u> A <u>es un anillo local íntegro dedimensión dos</u>, A <u>es de C. M. si y solo si existe</u> a <u>en el ideal maximal de</u> A <u>tal que todos los primos asociados al ideal</u> (a) <u>sean de altura uno. En estas condiciones lo mismo</u>

ocurre para cualquier otro elemento no nulo a' del ideal maximal de A.

Demostración. Si $\underline{m}$ es el ideal maximal de A resulta obvio que cualquier elemento no nulo $a \in \underline{m}$ puede formar parte de un sistema de parámetros de A : basta para ello tomar un elemento cualquiera b cuya clase módulo (a) sea un sistema de parámetros del anillo A/(a) que es de dimensión uno.

Los primos asociados de (a) en A son todos de altura mayor o igual que uno al ser A íntegro; si $\underline{m}$,que es el único ideal primo de altura mayor que uno en A, es primo asociado de (a) , todo elemento $b \in \underline{m}$ es cero o divisor de ceto en A/(a) con lo que ningún sistema de parámetros de la forma $\{a,b\}$ será A-sucesión y A no será C. M.

Reciprocamente, si existe $a \in \underline{m}$ tal que $\underline{m}$ no sea primo asociado de (a) , no todos los elementos de $\underline{m}$ dividen cero módulo (a) de manera que puede tomarse $b \in \underline{m}$ tal que $\{a,b\}$ sea una A-sucesión, que será automaticamente un sistema de parámetros dado que A es de dimensión dos.

Resulta de la observación de la pág. III-14 de [24] el

Corolario III.2. Un anillo local íntegro de dimensión dos es de C. M. si y solo si es intersección de sus localizados en ideales primos de altura uno.

Diremos que una superficie irreducible S es de Cohen-Macaulay (abreviadamente C. M.) en uno de sus puntos cuando lo sea el anillo local correspondiente y que S es C. M. cuando lo sea en cada uno de sus puntos. Desde luego, para que una superficie sea de C. M. basta que lo sean su anillos locales en puntos cerrados, puesto que los restantes son anillos íntegros de dimensión uno o el cuerpo de funciones racionales de la superficie. Es bien sabido que toda superficie de $P_3(k)$ es de C. M. puesto que sus anillos locales son cocientes de anillos regulares por ideales principales. Una superficie normal es también de C. M. sin más que observar que la normalidad de sus anillos locales hace que verifiquen automaticamente la condición del corolario anterior ([24] pag. III-13).

Si S es una superficie y x es un punto cerrado de S (supuesto sumergido en un espacio afín un cierto entorno de x en S) cada ideal principal del anillo local θ_x de S en x puede interpretarse como el ideal sobre S de la intersección de S con una cierta hipersuperficie localmente en x. El hecho de que θ_x sea de C. M. equivale a que tal ideal no tenga al maximal de θ_x como primo asociado, esto es, en términos geométricos, que la intersección de S con la hipersuperficie no tenga al punto x como componente y para ello basta que esto sea cierto para una sola hipersuperficie. Resulta pues que para que una superficie, sumergida en un cierto espacio proyectivo, sea C. M. es necesario y suficiente que por cada uno de sus puntos cerrados pase una hipersuperficie cuya traza sobre S no tenga el punto como componente. Con ello la misma condición se verifica para cualquier hipersuperficie que no contenga a S y cualquier punto de S : la traza de una hipersuperficie cualquiera sobre una superficie C. M. no contenida en ella será pues una variedad pura de dimensión uno, esto es, una curva.

Nos resultará de utilidad la siguiente caracterización:

Proposición III.3. *Si S es una superficie irreducible, S es C. M. en los puntos de un abierto afín U si y solo si el anillo correspondiente $\theta(U)$ es intersección de sus localizados en primos de altura uno.*

Demostración. Es sabido que la condición de que un anillo íntegro sea intersección de sus localizados en primos de altura uno equivale a que los primos asociados de cualquier ideal principal sean de altura uno. Si $A = \theta(U)$ es el anillo del abierto afín U y x es un punto cerrado de U, el anillo local en x es el localizado $A_{\underline{m}}$ donde $\underline{m}$ es el ideal maximal correspondiente a x ; basta tomar $a \in \underline{m}$ no nulo: por hipótesis $\underline{m}$ no es primo asociado de (a) en A y tampoco lo será $\underline{m}A_{\underline{m}}$ del ideal $aA_{\underline{m}}$ con lo que $A_{\underline{m}} = \theta_x$ es C. M.

Reciprocamente, sea $a \in A$ ($a \neq 0$) y supongamos que algun primo asociado de (a) no sea de altura uno. Siendo A íntegro de dimensión dos, tal primo asociado será un maximal $\underline{m}$ correspondiente a un punto cerrado $x \in U$. Inmediatamente $\underline{m}A_{\underline{m}}$ es primo asociado de $aA_{\underline{m}}$ y el anillo local $A_{\underline{m}} = \theta_x$ no será C.M.

<u>Proposición III.4.</u> <u>Sea</u> A <u>el anillo de un abierto afín</u> U <u>de una superficie irreducible</u> S <u>y sea</u> $\bar{A}$ <u>una extensión entera de</u> A <u>en su cuerpo de fracciones. Si</u> A <u>es intersección de sus localizados en primos de altura uno (i. e.,</u> S <u>es C. M. en todos los puntos de</u> U) <u>el conductor de la extensión</u> $A \to \bar{A}$ <u>tiene todos los primos asociados en</u> A <u>de altura uno</u>: <u>sus componentes primarias son las trazas en</u> A <u>de los conductores de las extensiones no triviales que se deducen de la</u> $A \to \bar{A}$ <u>al localizar en primos de altura uno</u>.

<u>Demostración.</u> Es sabido que, prescindiendo de la hipótesis C. M., la clausura entera de A en su cuerpo de fracciones es un A-módulo de tipo finito de donde el conductor de la extensión, anulador del A-módulo $\bar{A}/A$ es un ideal no nulo de A.

Sean κ el conductor de $A \to \bar{A}$, $\underline{p}$ un ideal primo de altura uno y $\Sigma = A - \underline{p}$; es obvio que el conductor de la extensión $\Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}\bar{A}$ contiene a κ , de ahí que, salvo si $\kappa \subset \underline{p}$, el conductor de $\Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}\bar{A}$ sea todo el anillo y

$\Sigma^{-1}A = \Sigma^{-1}\overline{A}$. Recíprocamente, si $\Sigma^{-1}A$ coincide con $\Sigma^{-1}\overline{A}$, de la sucesión exacta

$$0 \to \Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}\overline{A} \to \Sigma^{-1}(\overline{A}/A) \to 0$$

resulta $\Sigma^{-1}(\overline{A}/A) = 0$ con lo que $\underline{p}$ no contiene al anulador κ de $\overline{A}/A$.

Si $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_n$ son los primos de altura uno que contienen al conductor, sean $\Sigma_i = A - \underline{p}_i$ y κ_i los conductores de las extensiones $\Sigma_i^{-1}A \to \Sigma_i^{-1}\overline{A}$. Se tiene $\kappa \subset \kappa_i$ para todo i , por consiguiente $\kappa \subset \bigcap_i(A\cap\kappa_i)$. Recíprocamente, si $a \in A\cap(\bigcap_i\kappa_i)$, para cada i $a\Sigma_i^{-1}\overline{A} \subset \Sigma_i^{-1}A = A_{\underline{p}_i}$; para los restantes primos de altura uno dicha relación es obvia y $a\overline{A} \subset A_{\underline{p}}$ para todo $\underline{p}$ de altura uno de A . la hipótesis C. M. fuerza que $A = \bigcap A_{\underline{p}}$ y $\kappa = \bigcap_i(A\cap\kappa_i)$.

Cada κ_i es $\underline{p}_iA_{\underline{p}_i}$-primario en $A_{\underline{p}_i}$, al ser un ideal propio no nulo de un anillo local e íntegro de dimensión uno, con ello la anterior es una descomposición en primarios de κ en la que aparecen como primos asociados los $\underline{p}_i$.

Resulta de la demostración, en el caso en que $\overline{A}$ sea la clausura entera, que los localizados de A en primos de altura uno son normales salvo un número finito, en particular el hecho bien conocido de que la superficie S tiene, en cualquier caso, un número finito de curvas múltiples y, de ser S C. M., condición necesaria y suficiente para que sea normal es que lo sean sus anillos locales en puntos de altura uno, esto es, que la superficie carezca de curvas múltiples.

Probaremos en lo que sigue, que dada una superficie S cualquiera, puede obtenerse a partir de ella, por medio de transformaciones monoidales, una superficie S_{cm} de C. M., birracionalmente equivalente a S e isomorfa a S salvo en los puntos de S que no sean de C. M.. Conviene probar en primer lugar la finitud del conjunto de puntos no C. M.

Lema III.5 Si S es una superficie irreducible, el conjunto de puntos en los que S no es C. M. es finito.

Demostración. Recubriendo S por un número finito de abiertos afines, basta razonar sobre un abierto afín U de S. Teniendo en cuenta que todo anillo regular es de C. M., los puntos no C. M. deben estar entre los puntos singulares y si prescindimos de las singularidades aisladas de S en U que son en número finito, basta que probemos que sobre una curva múltiple irreducible no hay más que un número finito de puntos de U no C. M., puesto que las curvas múltiples son en número finito. Sea A el anillo afín correspondiente a U y sea $\underline{p}$ el ideal de A correspondiente a una curva múltiple. Sea $a \in \underline{p}$ no nulo, x un punto (necesariamente cerrado) de la citada curva tal que θ_x no sea C. M.: designando por $\underline{m}$ el ideal maximal de A correspondiente a x , $\underline{p} \subset \underline{m}$ ya que x

es de la curva. Por ser $\theta_x = A_{\underline{m}}$ no C. M., aplicando III.1, $\underline{m}A_{\underline{m}}$ es primo asociado de $aA_{\underline{m}}$ con lo que $\underline{m}$ lo es de aA . teniendo en cuenta que los primos asociados a aA son en número finito, se sigue que el conjunto de puntos de la curva en los que S no es de C. M. es finito.

Sea x un punto cerrado cualquiera de una superficie S , supuesta S sumergida en un cierto espacio proyectivo. Sea H un hiperplano transversal a S que pase por x y no pase por ninguno de los puntos no C. M. de S , salvo x . La traza de H sobre S da lugar (por restricción a S de las ecuaciones afines de H) a un haz de ideales, localmente principal, que designaremos por Φ . Si x' es un punto de S distinto de x , por la elección de H , o bien la fibra $\Phi_{x'} = \theta_{x'}$ o el anillo $\theta_{x'}$ es C.M. y al ser $\Phi_{x'}$ principal todos sus primos asociados son de altura uno. En cambio el ideal Φ_x , al ser principal y no nulo, tiene todos sus primos asociados de altura uno si y solo si θ_x es C. M. (III.1). De ahí que, a nivel de haces, los haces de ideales primos asociados a Φ sean todos de altura uno salvo posiblemente el haz correspondiente al punto cerrado x : este es asociado a Φ si y solo si S no es C.M. en x . Designemos por Φ_1 la intersección de los haces de componentes primarias correspondientes a haces de ideales primos de altura uno asociados a Φ : Φ y

Φ_1 difieren tan solo en su fibra en el punto x , $\Phi = \Phi_1$ si y solo si S es C.M. en x . Sea S^1 la superficie obtenida de S por dilatación en la subvariedad definida por Φ_1, $S^1 = \mathrm{Proj}\ \theta_S \oplus \Phi_1 \oplus \ldots \oplus \Phi_1^n \oplus \ldots$, y sea τ_1 la proyección natural $\tau_1 : S^1 \to S$. Tenemos:

Lema III.6. τ_1 induce isomorfismo entre $S - \{x\}$ y $S^1 - \tau_1^{-1}(x)$.

Demostración. Basta observar que en el abierto $S - \{x\}$ la restricción del ideal Φ_1 coincide con la de Φ y es por ello localmente principal (I, §7).

Proposición III.7. τ_1 es un morfismo finito.

Demostración. A la vista del resultado anterior basta hacer la demostración para un entorno afín de x . Sea U un tal abierto afín, A el anillo correspondiente y supongamos elegido U tal que $\Gamma_U \Phi = fA$. Sean $f_1, \ldots, f_m$ generadores del ideal $\Gamma_U \Phi_1 = I \subset A$. $\tau_1^{-1}(U) = \mathrm{Proj}\ \Delta_I A$ con las notaciones del cap. I, §7.

Se observa en primer lugar que los f_i/f son enteros sobre A : al coincidir las componentes primarias correspondientes a ideales primos de altura uno de los ideales (f) e I , para todo $\underline{p}$ primo de altura uno en A , $IA_{\underline{p}} = fA_{\underline{p}}$ con lo que $f_i/f \in A_{\underline{p}}$ para cada i . Teniendo en cuenta que A es excelente (cap. I, §9), para probar que f_i/f es entero sobre A basta probar que tiene valor no negativo por cualquier valoración centrada en un ideal primo de altura uno de A y ello es obvio puesto que todos los elementos de $A_{\underline{p}}$ tienen valor no negativo por cualquier valoración centrada en $\underline{p}$.

Para cada f_i/f tenemos pues una ecuación de dependencia sobre A

$$(f_i/f)^n + a_{n-1}(f_i/f)^{n-1} + \ldots + a_o = 0$$

de donde

$$f_i^n = - f(a_{n-1}f_i^{n-1} + \ldots + a_o f^{n-1})$$

igualdad en A que resulta válida en el anillo graduado $\Delta_I A$ si se toman f_i , f como de grado uno puesto que entonces f_i^n se debe tomar de grado n y el término entre paréntesis resulta de grado $n - 1$. De ahí que una potencia conveniente del ideal $I\oplus I^2\oplus\ldots\oplus I^n\oplus\ldots$ de $\Delta_I A$ esté contenida en $f\Delta_I A$ entendido f como de grado uno. Con ello (cap. I, §7), $\tau_1^{-1}(U)=$ $= \text{Proj } \Delta_I A = D_+(f)$ y $\tau_1^{-1}(U)$ es afín, el anillo correspondiente es el localizado homogéneo de $\Delta_I A$ en el sistema multiplicativo de las potencias de f (entendido siempre de grado uno en $\Delta_I A$), que es $A[f_1/f,\ldots,f_m/f]$; se trata de una extensión entera de A por lo ya demostrado y en consecuencia es finita como A-módulo.

<u>Lema III.8.</u> τ_1 <u>es isomorfismo si y solo si</u> S <u>es C. M.</u>

en x .

Demostración. Si S es C. M. en x hemos observado que $\Phi_1 = \Phi$ y Φ_1 es localmente principal. Reciprocamente, a la vista de la demostración anterior y con las mismas notaciones, si τ_1 es isomorfismo, $A = A[f_i/f]$ con lo que $I = fA$. Localizando en el ideal $\underline{m}$ correspondiente al punto x , $\Phi_{1,x} = IA_{\underline{m}} = fA_{\underline{m}} = \Phi_x$ de donde $\Phi = \Phi_1$ y x es un punto C. M. de S.

Aplicando sucesivamente transformaciones del tipo descrito se construye una superficie C. M. según el

Teorema III.9. Dada una superficie irreducible S existe otra superficie S_{cm} que verifica la condición C. M., dotada de una proyección $\omega : S_{cm} \to S$ birracional y finita de modo que si $x_1,\ldots,x_n$ son los puntos de S no C. M., ω induce isomorfismo $S_{cm} - \omega^{-1}\{x_1,\ldots,x_n\} \simeq S - \{x_1,\ldots,x_n\}$. Por otra parte, S_{cm} está determinada salvo isomorfismo, como superficie proyectandose en S , por el hecho de ser C. M., finita sobre S e isomorfa a S salvo en los puntos no C. M. de S .

Demostración. Aplicando reiteradamente transformaciones del tipo descrito, se tiene una sucesión de superficies

$$S \leftarrow S_1 \leftarrow S_2 \leftarrow \ldots \leftarrow S_i \leftarrow \ldots$$

en las condiciones de I.1 que debe ser estacionaria lo que fuerza, en virtud de III.8, que con un número finito de transformaciones se alcance una superficie C. M. que verifica las condiciones del enunciado en virtud de III.6 y III. 7.

Para probar la unicidad de S_{cm}, teniendo en cuenta que es irreducible y por ello un esquema íntegro, bastará probar que están determinados los anillos locales de S_{cm} en virtud de [8], cap. I, §8.2.6. Identifiquemos $k(S_{cm})$ con $k(S)$ a través del isomorfismo inducido por ω entre puntos genéricos, resulta entonces que todos los anillos locales de puntos de altura uno de S_{cm} coinciden con los de sus imágenes en S al ser ω isomorfismo salvo en los puntos no C. M. de S. Si U es un abierto afín de S, sea U_{cm} su antiimagen en S_{cm}, sean A y A_{cm} los anillos correspondientes; por ser S_{cm} C. M. A_{cm} es intersección de sus localizados en primos de altura uno pero estos coinciden con los de A y podemos afirmar que el anillo afín de $\omega^{-1}(U)$ está determinado como intersección de los anillos locales de los puntos de altura uno de U. En consecuencia los anillos locales de $\omega^{-1}(U)$, que son los localizados de A_{cm}, están determinados. Basta que U recorra un recubrimiento de S para que queden determinados todos los anillos locales de S_{cm}.

Nota: En adelante nos referiremos a S_{cm} como la transformada C. M. de S.

CAPITULO IV. CURVAS MULTIPLES SOBRE SUPERFICIES DE COHEN MACAULAY.

Si abordamos ahora el estudio del proceso de normalización de una superficie S con el fin de descomponer la proyección $\bar{\bar{S}} \to S$, de la normalizada en la superficie, en un número finito de proyecciones de modo que sea calculable la variación de género virtual en cada una de ellas, los resultados del capítulo anterior nos permiten cubrir una primera etapa: la transformada C. M. de S, al ser finita sobre S, permite factorizar la anterior proyección en la forma $\bar{\bar{S}} \to S_{cm} \xrightarrow{\psi} S$. Bastará pues que consideremos el caso de una superficie que cumple la condición C. M. .

Nota: a lo largo de este capítulo designaremos por S una superficie C. M..

Dado que $\bar{\bar{S}}$ es finita sobre S, cualquier superficie intermedia entre ambas deberá ser también finita sobre S, ello nos lleva en primer lugar a establecer condiciones suficientes para que la superficie obtenida de S por dilatación centrada en una curva sea finita sobre S.

Sea C una curva sobre S, dada por un haz de ideales

$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{q}}_1 \cap \ldots \cap \underline{\underline{q}}_r$ donde los $\underline{\underline{q}}_i$ son primarios y sus radicales, $\underline{\underline{p}}_i$, de altura uno y distintos dos a dos. Tenemos:

Lema IV.1. Si x es un punto de C, θ_x el anillo local de la superficie en x y f un elemento de $\underline{\underline{a}}_x$, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) f toma valor mínimo entre los valores de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x$ por toda valoración centrada en un primo de altura uno de θ_x.

b) Para n lo bastante alto, $f\underline{\underline{a}}_x^n = \underline{\underline{a}}_x^{n+1}$.

c) Para n lo bastante alto, $f\underline{\underline{a}}_x^{(n)} = \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$

Observese que la condición a) equivale a exigir que f tome valor mínimo, entre los valores de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x$, en toda valoración centrada en uno de los primos asociados a $\underline{\underline{a}}_x$ y que no pertenezca a ningún otro ideal primo de altura uno de θ_x, puesto que los primos asociados a $\underline{\underline{a}}_x$ son los únicos ideales primos de altura uno que lo contienen y por lo tanto el valor mínimo de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x$ en una valoración centrada en otro ideal primo de altura uno es cero.

Demostración de IV.1. Probemos en primer lugar que c) implica a): sea μ el valor mínimo de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x$ por una valoración v centrada en un ideal primo de altura uno. Para cualquier n, el valor mínimo de los elementos de

$\underline{\underline{a}}_x^{(n)}$ por dicha valoración es $n\mu$; si n es lo bastante alto como para que se cumpla c) y tomamos $g \in \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$ tal que $v(g) = (n+1)\mu$, por hipótesis $g = fg'$ con $g' \in \underline{\underline{a}}_x^{(n)}$ y $v(f) = v(g) - v(g') \leq (n+1)\mu - n\mu = \mu$ de donde $v(f) = \mu$.

Supongamos que f verifica la condición a) y probemos b): basta tomar un sistema de generadores $f_1,\ldots,f_m$ de $\underline{\underline{a}}_x$. Por hipótesis cada f_i/f es de valor positivo o nulo en cualquier valoración centrada en un primo de altura uno de θ_x y, por ser θ_x excelente, cada f_i/f será entero sobre θ_x. Se tendrá una relación, para cada i,

$$(f_i/f)^{h_i} + a_{n-1}(f_i/f)^{h_i-1} + \ldots + a_o = 0$$

de donde

$$f_i^{h_i} = -f(a_{n-1}f_i^{h_i-1} + \ldots + a_o f^{h_i-1}) = ff_i'$$

con $f_i' \in \underline{\underline{a}}_x^{h_i-1}$; es inmediato probar que si se toma $n + 1$ mayor o igual que el producto de m por el máximo de los h_i, se verifica b).

Probemos finalmente que b) implica c). Se observa en primer lugar que si $\underline{p}$ es un ideal primo de altura uno de θ_x que contiene a f , en virtud de b), $\underline{p} \supset \underline{\underline{a}}_x^{n+1}$ es decir, $\underline{p} \supset \underline{\underline{a}}_x$ y por ser $\underline{p}$ de altura uno debe ser uno de los primos asociados de $\underline{\underline{a}}_x$ en θ_x . Sean estos $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_s$, y $\Sigma = \theta_x - \underline{p}_1 \cup \ldots \cup \underline{p}_s$ Es obvio que $f\underline{\underline{a}}_x^{(n)} \subset \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$, cualquiera que sea n . Si entonces $g \in \underline{\underline{a}}_x^{(n+1)}$, para cierto $s \in \Sigma$, $sg \in \underline{\underline{a}}_x^{n+1}$ con lo que $sg = fg'$ con $g' \in \underline{\underline{a}}_x^n$ en virtud de b); resulta $g = (g'/s)f$ y basta probar que $g'/s \in \theta_x$. Es obvio que g'/s es de cada uno de los localizados $(\theta_x)_{\underline{p}_i}$. Si $\underline{p}$ es un ideal primo de altura uno de θ_x no asociado a $\underline{\underline{a}}_x$, $f \notin \underline{p}$ y por ello $g'/s = g/f \in (\theta_x)_{\underline{p}}$. Hemos demostrado que g'/s está en todos los localizados en primos de altura uno de θ_x de donde es elemento de θ_x al ser este de C. M..

La existencia del elemento f que verifica las condiciones equivalentes del lema equivale, desde un punto de vista más geométrico, a que un sistema lineal cortado sobre S por hipersuperficies que pasan por C, no tenga punto base en x una vez excluida la parte fija C.

Teorema IV.2. *Sea C una curva sobre S, $\underline{\underline{a}}$ el haz de ideales correspondiente y x un punto de C: si en $\underline{\underline{a}}_x$ existe un elemento que cumple las condiciones de IV.1, es posible determinar un entorno afín U de x en S y un elemento $f \in \underline{a} = \underline{\underline{a}}(U)$ que toma valor mínimo entre los valores de los elementos de $\underline{a}$ por cualquier valoración centrada en un primo de altura uno de $A = \theta(U)$. Si se considera la dilatación $\pi: S' \to S$ de S a lo largo de C, $\pi^{-1}(U)$ es un abierto afín de S' cuyo anillo, considerado como extensión de A, es de*

<u>la forma</u> $A[f_1/f,\ldots,f_m/f]$ <u>donde los</u> f_i <u>forman un sistema de generadores de</u> $\underline{a}$; <u>tal anillo es finito como A-módulo</u>.

Se deduce en particular del enunciado que π es un morfismo finito en un entorno de x .

<u>Demostración</u>. Sea U' un entorno afín de x que no contenga más componentes de C que las que pasan por x , $A' = \theta(U')$ el anillo correspondiente. Sea $f \in \underline{\underline{a}}_x$ tal que satisface a las condiciones de IV.1. Salvo multiplicación por un inversible de θ_x podemos suponer $f \in A$. La hipótesis de que todas las componentes de C en U' pasan por x equivale a la igualdad $\underline{a}' = \underline{\underline{a}}(U') = A' \cap \underline{\underline{a}}_x$ y por ello $f \in \underline{a}'$.

Si $\underline{m}'$ es el ideal de A' correspondiente a x , elijamos un elemento g en la intersección de todos los primos asociados a fA' no contenidos en $\underline{m}'$ de modo que $g \notin \underline{m}'$. De no existir tales primos asociados, sea $g = 1$. El abierto afín $D(g) \subset \operatorname{spec} A' = U'$ es entonces un entorno afín de x al que llamaremos U . Su anillo es $A = \theta(U) = A'_g$, localizado de A' en el sistema multiplicativo de las potencias de g . Por la elección de g , $f \in \underline{a} = \underline{\underline{a}}(U) = \underline{a}'A$ y el ideal fA tiene todos los primos asociados contenidos en $\underline{m} = \underline{m}'A$, ideal de A correspondiente a x . En consecuencia, si v es una valoración centrada en un primo de altura uno de A no contenido en $\underline{m}$, $v(f) = 0$ ya que f no pertenece a tal ideal. Si v está centrada en un primo $\underline{p}$ de altura uno contenido en $\underline{m}$, v está también centrada en el ideal $\underline{p}\theta_x$ de $\theta_x = A_{\underline{m}}$ y $v(f)$ es mínimo entre los valores de los elementos de $\underline{a}$ pues por hipótesis lo era entre los de los elementos de $\underline{a}\theta_x = \underline{\underline{a}}_x$.

Por lo que respecta a la segunda parte del enunciado, $\pi^{-1}(U) = \mathrm{Proj}\ A\oplus\underline{a}\oplus \ldots \oplus\underline{a}^n\oplus \ldots$. La condición de valor mínimo satisfecha por f asegura que al tomar un sitema de generadores de $\underline{a}$, $\{f_1,\ldots,f_m\}$, los f_i/f son enteros sobre A (al ser A excelente) de donde se deduce, como en la demostración de III.7 , que $\pi^{-1}(U)$ es afín (igual a $D_+(f)$ en el espectro homogêneo), de anillo $A[f_i/f]$ que es finito sobre A al ser extensión entera de A .

Del teorema deducimos inmediatamente el

<u>Corolario IV.3</u>. <u>Si en cada punto</u> x <u>de</u> C <u>existe un elemento</u> $f \in a_x$ <u>que cumple las condiciones de IV.1, la dilatación de</u> S <u>centrada en</u> C <u>es finita</u>.

<u>Demostración</u>. Sabido que tal dilatación, $\pi : S' \to S$, induce un isomorfismo $S' - \pi^{-1}(C) \simeq S - C$, basta recubrir C por abiertos afines en las condiciones del teorema y ampliar dicho recubrimiento a un recubrimiento de S mediante abiertos afines disjuntos con C para obtener la conclusión.

Al final del capítulo V demostraremos el recíproco de IV.3. De momento nos basta una condición suficiente para la finitud de la dilatación.

Si x es el punto genérico de una componente de C , θ_x es de dimensión uno, su ideal maximal es el único primo de altura uno y entonces es bien sabido que existe $f \in \underline{\underline{a}}_x$ verificando las condiciones de IV.1. Aplicando el teorema a cada uno de los puntos genéricos de las componentes de C es fácil probar que, cualquiera que sea C , la dilatación es finita salvo en un número finito de puntos de C .

Señalemos que existen curvas (sobre superficie singular) tales que la dilatación de la superficie centrada en ellas no es finita; puede verse un ejemplo en el apéndice.

En adelante designaremos por C una curva reducida de la superficie S . Con vistas a ampliar el alcance de los cálculos del cap. X, no impondremos a C que sea irreducible; en los casos que nos interesan C estará formada por curvas múltiples de S . Llamaremos $\underline{\underline{c}}$ al haz de ideales de C en S .

Al no poder asegurar, en general, que la dilatación centrada en C sea finita nos vemos obligados a tomar otras curvas como centro de dilatación.

<u>Proposición IV.4</u>. <u>Dada una curva reducida</u> C <u>en</u> S ,

existe otra curva C' en S, de haz de ideales $\underline{\underline{a}}$, tal que:

a) En cada punto $x \varepsilon C'$ existe $f_x \varepsilon \underline{\underline{a}}_x$ que cumple las condiciones equivalentes de IV.1.

b) Las componentes de C lo son de C', es decir, $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{c}} \cap \underline{\underline{q}}_{r+1} \cap \cdots \cap \underline{\underline{q}}_m$ donde los $\underline{\underline{q}}_i$ son primarios y ninguno de sus radicales es primo asociado de $\underline{\underline{c}}$.

c) C' es localmente principal en el abierto $S - C$.

Obviamente, basta que C cumpla la condición a) para poder tomar $C' = C$.

Demostración. Consideremos una hipersuperficie H cualquiera que corte a S a lo largo de C y presente en cada componente de C multiplicidad de intersección mínima[1]. Ello equivale a que cualquier ecuación local de H en cada uno de

---

[1]La existencia de tal hipersuperficie se establece facilmente: Si A es el anillo de un abierto afín U que corte a todas las componentes de C, basta tomar un elemento f del ideal de C en A que presente valor mínimo, entre los de los elementos del ideal, por cualquier valoración centrada en un primo asociado al ideal de C en A. Si S está sumergida en $P_n(k)$, f viene representado por un cociente de formas del mismo grado, con denominador no nulo en U: la hipersuperficie que resulta de igualar el numerador a cero cumple la condición.

los puntos genéricos de las componentes de C , $x_1,\dots,x_r$ tenga, reducida módulo S , valor mínimo positivo por las valoraciones centradas en el ideal maximal de θ_{x_i}.

La traza de H en S es una curva dada por un haz de ideales localmente principal $\underline{\underline{\beta}}$ que tiene entre entre sus primos asociados los correspondientes a las componentes de C : en efecto, basta observar que $\underline{\underline{\beta}} \subset \underline{\underline{c}}$ y que los primos asociados a ambos ideales son todos de altura uno. Si $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{p}}_1 \cap \dots \cap \underline{\underline{p}}_r$ es la descomposición en primarios (primos en este caso ya que C es reducida) del ideal de C , supongamos ordenada la descomposición del haz de ideales $\underline{\underline{\beta}}$, $\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{q}}_1 \cap \dots \cap \underline{\underline{q}}_m$ de manera que $\underline{\underline{p}}_i = \mathrm{rad}(\underline{\underline{q}}_i)$ $i = 1,\dots,r$. Si $\underline{\underline{a}}$ es el ideal

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{p}}_1 \cap \dots \cap \underline{\underline{p}}_r \cap \underline{\underline{q}}_{r+1} \quad \dots \cap \underline{\underline{q}}_m$$

probaremos que la curva C' determinada por $\underline{\underline{a}}$ verifica las condiciones del enunciado:

En cuanto a la condición a), dado $x \in C'$, sea f_x la base de $\underline{\underline{\beta}}_x$. Si alguno de los $(\underline{\underline{p}}_i)_x$ es un ideal propio de θ_x , basta observar que, por la elección de H , $v(f_x)$ es mínimo entre los valores de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x$ por cualquier valoración v centrada en uno de los $(\underline{\underline{p}}_i)_x$ ya que esta misma valoración está centrada en el ideal maximal $\underline{\underline{a}}_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x}$ = $(\underline{\underline{p}}_i)_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x}$ de $(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x}$ que es el anillo local de S en la componente de C correspondiente a $\underline{\underline{p}}_i$. Si $\underline{\underline{p}}_i = \mathrm{rad}(\underline{\underline{q}}_i)$

$i = r+1,\dots,m$ y alguno de los $(\underline{\underline{p}}_i)_x$ es ideal propio de θ_x, una valoración v centrada en $(\underline{\underline{p}}_i)_x$ lo está en $(\underline{\underline{p}}_i)_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x}$: es inmediato que $\underline{\underline{a}}_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x} = \underline{\underline{\beta}}_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x} = f_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x}$ de donde el valor de f_x será mínimo entre los de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x(\theta_x)_{(\underline{\underline{p}}_i)_x}$, en particular entre los valores de los elementos de $\underline{\underline{a}}_x$. Finalmente, f_x no está en ningún otro primo de altura uno de θ_x y su valor será cero por las restantes valoraciones.

La condición b) se verifica trivialmente por construcción y finalmente, respecto a c), si $x \notin C$, las fibras $(\underline{\underline{p}}_i)_x$ $i = 1,\dots,r$, de los primos asociados a c son el propio anillo local, lo mismo ocurre con los $(\underline{\underline{q}}_i)_x$ $i = 1,\dots,r$ y $\underline{\underline{a}}_x = \underline{\underline{\beta}}_x$ que es principal.

Si C' es ahora una curva cualquiera en las condiciones del enunciado anterior, designemos por S' la transformada de S por la dilatación π centrada en C' y por θ' el haz estructural de S'. En virtud de IV.3 π será un morfismo finito. Tenemos además:

<u>Proposición IV.5.</u> <u>La transformación</u> π <u>induce un isomorfismo</u> $S' - \pi^{-1}(C) \simeq S - C$. <u>Por otra parte, si</u> y <u>es el punto genérico de una componente de</u> C, <u>los</u> θ'_z <u>para</u> $z \in \pi^{-1}(y)$ <u>son los anillos locales en el primer entorno de</u> θ_y <u>en el sentido de Northcott [15]</u>.

Demostración. Sabemos que $\underline{\underline{a}}$ es localmente principal en $S - C$, de ahí el isomorfismo mencionado.

Si y es el punto genérico de una componente C_j de C, sea U un entorno afín de y en las condiciones de IV.2, tendremos $\pi^{-1}(U) = \operatorname{spec} A[f_i/f]$ donde los f_i forman un sistema de generadores del ideal $\underline{\underline{a}}(U) = \underline{a}$ y la proyección π viene dada, en $\pi^{-1}(U)$, por la inclusión $A \to A[f_i/f]$. Si $\underline{p}$ es el ideal primo de altura uno correspondiente a y en A, $\theta_y = A_{\underline{p}}$ y $\pi^{-1}(y)$ es el conjunto de ideales primos de $A[f_i/f]$ cuya traza en A es $\underline{p}$. Sea $\Sigma = A - \underline{p}$; tendremos una inyección

$$A_{\underline{p}} = \Sigma^{-1}A \to \Sigma^{-1}(A[f_i/f]) = A_{\underline{p}}[f_i/f]$$

y los localizados de $A[f_i/f]$ en los elementos de $\pi^{-1}(y)$, anillos locales de las componentes de la antiimagen de C_j, son los localizados de $A_{\underline{p}}[f_i/f]$ en sus ideales maximales. Observando que los f_i generan $\underline{a}A_{\underline{p}} = \underline{p}A_{\underline{p}}$ y en virtud de la elección de f, $A_{\underline{p}}[f_i/f]$ es el anillo semilocal en el primer entorno de $A_{\underline{p}}$ y sus localizados los anillos locales en el primer entorno de $A_{\underline{p}}$, según las definiciones de Northcott.

A pesar de la hipótesis C. M. en S, es posible que la superficie S' no sea C. M. (véase ejemplo en el apéndice). Designemos por $\overline{S}$ la transformada C. M. de S' y sea $\overline{\pi}:\overline{S} \to S$

la proyección natural, composición de $\bar{S} \overset{\omega}{\to} S' \overset{\pi}{\to} S$. De lo ya establecido resulta que $\bar{S}$ es una superficie birracionalmente equivalente a S y finita sobre S . Es fácil comprobar que $\bar{\pi}$ induce un isomorfismo $\bar{S} - \bar{\pi}^{-1}(C) \simeq S - C$: en efecto, lo propio ocurría para π con lo que los puntos de $S' - \pi^{-1}(C)$ son todos C. M. al serlo S y se tiene el isomorfismo $\bar{S} - \bar{\pi}^{-1}(C) \simeq S' - \pi^{-1}(C)$.

Llamaremos a $\bar{S}$ transformada de S respecto de C y a $\bar{\pi}$ transformación centrada en C .

La transformada de S respecto de C y la transformación centrada en C vienen caracterizadas por el siguiente teorema que, en particular, libera la definición de $\bar{S}$, $\bar{\pi}$ de la arbitrariedad en la elección de la curva C' como centro de la dilatación.

<u>Teorema IV.6.</u> <u>La transformada</u> $\bar{S}$ <u>queda caracterizada, como superficie que se proyecta en</u> S , <u>por ser C. M., afín sobre</u> S , <u>tal que la proyección</u> $\bar{\pi}$ <u>induce un isomorfismo</u> $\bar{S} - \bar{\pi}^{-1}(C) \simeq S - C$ <u>y los anillos locales en</u> $\bar{S}$ <u>de las componentes de la antiimagen</u> $\bar{\pi}^{-1}(C_j)$ <u>de cada componente</u> C_j <u>de</u> C , <u>son precisamente los anillos locales en el primer entorno del local de</u> C_j <u>en</u> S.

<u>Demostración</u>. Acabamos de señalar que $\bar{S}$ verifica las con-

diciones del enunciado; basta observar, con respecto a la última, que lo mismo verificaba S' (IV.5) y la transformación de S' en superficie C. M. no modifica los anillos locales de dimensión uno de S' .

Desde luego $\bar{S}$ es irreducible y reducida, bastará probar, tal como hicimos en la demostración de III.9, que están determinados los anillos de un recubrimiento afín de $\bar{S}$ como subanillos de k(S) .

Sean U_i un recubrimiento afín de S , A_i el anillo correspondiente a cada U_i , $\bar{U}_i = \bar{\pi}^{-1}(U_i)$, $\bar{A}_i$ el anillo de $\bar{U}_i$. Para cada ideal primo de altura uno $\underline{p}$ de $\bar{A}_i$, $\bar{A}_{i\underline{p}}$ está determinado:si $\underline{p}$ no corresponde a una componente de $\bar{\pi}^{-1}(C)$, $\bar{A}_{i\underline{p}}$ coincide con el localizado de A_i en $\underline{p} \cap A_i$, en caso contrario será uno de sus anillos en el primer entorno. Por la condición C. M. resulta determinado $\bar{A}_i$ al ser intersección de sus localizados en primos de altura uno.

<u>Teorema IV.6.</u> <u>La proyección</u> $\bar{\pi}:\bar{S} \to S$ <u>es un isomorfismo si y solo si</u> C <u>es una curva simple de</u> S (<u>es decir, lo es cada una de sus componentes</u>).

<u>Demostración</u>. Si C es una curva simple de S , el anillo local en cada punto genérico de una componente de C , es de valoración discreta. En consecuencia tiene un solo anillo local en su primer entorno, él mismo, de ahí que la propia S , con la identidad como proyección, satisfaga a las condiciones de

IV.5 que caracterizan, salvo un isomorfismo compatible con las proyecciones, a $\overline{S}$.

Reciprocamente, si $\overline{\pi}$ es un isomorfismo,los anillos locales en el primer entorno de cada anillo local de cada componente de C coinciden con este y ello fuerza que tal anillo local sea de valoración discreta. De ahí que cada componente de C sea una curva simple en S .

De IV.5 y IV.6 es inmediato observar que $\overline{S}$ viene de hecho determinada por las componentes de C que son múltiples en S , fuera de las mismas $\overline{\pi}$ induce isomorfismo.

En la construcción de $\overline{S}$ ha quedado de manifiesto que $\overline{S}$ es finita sobre S . Procediendo ahora inductivamente y repitiendo la transformación en una curva múltiple de $\overline{S}$, se obtendrá una sucesión de superficies intermedias entre S y su normalizada que por I.1 debe ser estacionaria. Ello entraña que, tras un número finito de transformaciones centradas en curvas múltiples, se alcance una superficie C. M. dotada tan solo de singularidades aisladas que será normal y finita sobre S, y coincidirá por tanto con la normalizada $\overline{\overline{S}}$.

Supongamos ahora que C es una curva irreducible. Sean $\overline{S}$ la transformada de S respecto de C y $\overline{\pi}$ la proyección de $\overline{S}$ en S . A cada una de las componentes reducidas de $\overline{\pi}^{-1}(C)$ la llamaremos curva en el primer entorno de C en S. Procediendo por inducción, llamaremos curvas en el enésimo entorno de C (en S) a las curvas en el primer entorno de alguna del (n-1)-entorno de C . Resulta inmediatamente, por la finitud del número de superficies intermedias entre S y $\overline{S}$, que para un cierto n todas las curvas en el enésimo entorno de C son simples (en la transformada de S correspondiente). En particular se prueba inmediatamente que si C es simple sobre S las curvas en los sucesivos entornos de C son, una en cada entorno, siempre la propia C en la misma superficie S y recíprocamente.

Cada curva en el enésimo entorno de C tiene como anillo local en la superficie correspondiente uno de los anillos locales en el enésimo entorno del de C en S . Pueden representarse las curvas en los sucesivos entornos de C por un diagrama en árbol que coincidirá exactamente con el que se asocia, según Northcott ([16]) al anillo local de C en S.

Teniendo en cuenta que la multiplicidad de intersección de dos superficies del espacio proyectivo ordinario en una de las componentes C de su intersección, se calcula tan solo en función de los anillos locales de la componente en cada superficie, a la vista de los resultados de [17] parece posible establecer una fórmula en la que la multiplicidad de intersección de las dos superficies se exprese en función de las curvas en