UNIVERSITAT DE BARCELONA

Aproximaciones sucesivas de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de 3er. orden

Joaquín Mª Cascante Dávila

APROXIMACIONES SUCESIVAS DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3^{r} ORDEN

Por

JOAQUIN M^{a} CASCANTE Dirigido por el Prof. Dr. AUGE

Memoria presentada para aspirar al Grado de Dr. en

CIENCIAS MATEMATICAS

APROXIMACIONES SUCESIVAS DE LAS SOLUCIONES

DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3er. ORDEN.

P R O L O G O

El presente trabajo tuvo su origen durante el transcurso de los estudios monográficos de Doctorado, correspondientes al curso académico 1952-1953 de la Sección de Matemáticas, en que nos fué propuesta en la Asignatura de Doctorado "Ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico", por el Prof. Dr. Augé, la clasificación y reducción a formas canónicas de las ecuaciones cuasi-lineales en derivadas parciales de 3er. orden con dos variables independientes.

Resuelto este problema, se nos sugirió la posibilidad de obtener un teorema de existencia para las ecuaciones lineales de 3er. orden con dos variables independientes de tipo hiperbólico, por el método de aproximaciones sucesivas en el campo real, que fuese, por decirlo así, una prolongación de los resultados obtenidos por Picard en las ecuaciones en derivadas parciales de 2º orden.

En la actualidad, la teoría de las distribuciones ha contribuído poderosamente a la sistematización de los procedimientos empleados en la resolución de los problemas de contorno adecuados a distintos tipos de ecuaciones diferenciales, dando lugar a los llamados "métodos operacionales", los cuales constituyen los instrumentos de cálculo de soluciones de dichas ecuaciones, preferidos por la mayoría de los especialistas a ellas consagrados.

Entre éstos cabe destacar a Jean Leray, cuyo método operacional (1), (2), (3), consiste en substituir los operadores de derivación de 1er. orden por una variable contravariante lo que equivale a considerar el primer miembro de la ecuación como un elemento del álgebra envolvente de un álgebra de Lie de dimensión $2n + 1$ (n, número de variantes) después el problema de Cauchy se resuelve por una transformación funcional definida por una cuadratura y que opera sobre la solución de un problema de Cauchy particular relativo a otra ecuación con coeficientes polinomios.

Con su método, Leray ha logrado resultados completos y precisos, aunque para llegar a los mismos se vea obligado igual que Petrowski (4) a combinar el teorema de Cauchy-Kowalevski con desigualdades semejantes a la desigualdad de Friedrichs y Lewy, válidas para las ecuaciones hiperbólicas.

Lars Garding (5), (6), establece sin utilizar el teorema de Cauchy-Kowalevski dos desigualdades para los operadores diferenciales hiperbólicos lineales definidos en un cilindro; la primera, es aunque enunciada en forma diferente, la desigualdad generalizada de Friedrichs y Lewy, y la segunda, una desigualdad dual. De este modo, la existencia, unicidad y propiedades de diferenciabilidad de la solución del problema de Cauchy para un cilindro son consecuencias inmediatas de dichas desigualdades, aunque los resultados obtenidos son solamente locales.

Ya en fecha anterior es de notar la contribución aportada a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales por Luigi Fantappié (7), (8), cuya teoría de las funcionales analíticas, proporciona cinco nuevos métodos de integración en términos finitos de las mismas. Mediante estos métodos se llega a calcular efectivamente las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales muy generales (9), utilizando los recursos clásicos del análisis ordinario, es decir, por medio de un número finito de integraciones (cuadraturas o cálculo de residuos) a partir de funciones conocidas).

En particular se consigue con estos métodos resolver el <u>problema de Cauchy</u>, para toda ecuación lineal de coeficientes constantes, pero de orden cualquiera, así como también el número de variables independientes, y por lo tanto para todas las ecuaciones lineales de la Física Matemática de los medios homogéneos, ya que la homogeneidad del medio, se traduce precisamente en el hecho de ser constantes los coeficientes de la ecuación diferencial a que da lugar.

Por aplicación sistemática de la teoría de distribuciones, Lions y Garnier (10), (11), han realizado un profundo estudio de los problemas con condiciones en los límites para las ecuaciones de 2ª orden; se resuelven con ayuda de operadores lineales en un espacio de Hilbert, elegido convenientemente y el método consigue suprimir las condiciones innecesarias de regularidad de los coeficientes y datos iniciales, refiriéndose sistemáticamente a las soluciones débiles de las ecuaciones tratadas.

Por lo que a nuestro trabajo se refiere, no nos hemos apartado del clásico método constructivo, de la solución en el campo real, mediante aproximaciones sucesivas de la misma, iniciado por Picard (12), (13) y (14), seguido por otros autores, por creer que su eficacia podía extenderse todavía a ecuaciones de orden superior a las estudiadas por Picard, y aún incluso a las por nosotros consideradas.

Concretando, el problema que nos hemos planteado y resuelto puede resumirse en los Apartados siguientes:

a) Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de 3er. orden con dos variables independientes y separación de los casos hiperbólicos.

b) - En los casos hiperbólicos, construcción y cálculo de la solución al problema de Cauchy, por el método de aproximaciones sucesivas en el campo real.

c) - Teorema de unicidad.

d) - Generalización a ecuaciones no lineales.

De acuerdo con dichas ideas, hemos creído conveniente subdividir nuestro trabajo en cuatro Capítulos para la mejor metodización y exposición del mismo.

En el Capítulo I, hemos clasificado las ecuaciones en derivadas parciales cuasi-lineales de 3er. orden con dos variables independientes, hallando los cambios de variables que permiten reducirlas a las formas canónicas más sencillas separando los casos hiperbólicos de los demás.

Asímismo se consideran los casos particularmente interesantes de ser constantes los coeficientes del operador $L[u]$ primer miembro de la ecuación. Y en el caso de coeficientes variables se obtienen las condiciones necesarias y suficientes , para que la ecuación supuesta de tipo hiperbólico, admita un cambio que la reduzca a la misma forma canónica que, en el caso de ser constantes los coeficientes de $L[u]$, cuestión que se ha resuelto cómodamente mediante la teoría de los tritejidos hexagonales, quedando reducido el problema a determinar las condiciones necesarias y suficientes de hexagonalidad del tejido T_3, constituído por las familias de curvas características de la ecuación objeto de estudio.

En el Capítulo II, planteamos y resolvemos en el campo real, el problema de Cauchy para toda ecuación hiperbólica de la forma: $u_{112} + \rho(x_1,x_2) \cdot u_{122} = \Phi(x_1,x_2)$

con las condiciones iniciales: $u(x_1,x_2^{\circ}) \equiv \varphi(x_1)$; $u(x_1^{\circ},x_2) \equiv \psi(x_2)$; $u_1(x_1^{\circ},x_2) \equiv \chi(x_2)$ determinando los dominios de dependencia de cada punto y prolongación del arco de curva sobre el que son dadas las condiciones iniciales, obteniendo fórmulas resolutivas, demostrativas de que el problema de Cauchy considerado es adecuado a la ecuación dada. En dicho Capítulo introducimos el operador lineal $\underline{J}$ mediante el cual se simplifican notablemente los cálculos efectuados para la resolución del problema propuesto, operador que también utilizamos en los capítulos que siguen.

En el Capítulo III, demostramos el teorema de existencia y unicidad para toda ecuación lineal de tipo hiperbólico, reducida a su forma canónica:

$$u_{112} + \rho(x_1,x_2) u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u_k + c \cdot u = g(x_1,x_2)$$

con (a_{ij}, b_k, c, g) funciones continuas y derivables) siendo las condiciones iniciales impuestas a la solución las mismas que las de la ecuación anterior, por el método de las aproximaciones sucesivas de Picard, viniendo expresada la solución al problema de Cauchy considerado por la suma de la serie de dichas aproximaciones, cuya convergencia uniforme en todo el dominio de prolongación, demostramos previamente mediante los correspondientes teoremas de acotación de tales aproximaciones. Estas, se determinan por recurrencia como soluciones de ecuaciones en derivadas parciales del mismo tipo que la estudiada en el anterior Capítulo, así como también con las mismas condiciones iniciales, y por tal razón hemos antepuesto su estudio, como preliminar del planteo y resolución del problema de Cauchy para la ecuación lineal hiperbólica en su forma más general. Asimismo determinamos los dominios de dependencia y prolongación correspondientes.

En los cálculos de las aproximaciones nos valemos del operador J definido en el Capítulo anterior.

Finalmente, en el IV y último Capítulo, planteamos y resolvemos localmente el problema de Cauchy para las ecuaciones de tipo hiperbólico más general de la forma:

$$u_{112} + p(x_1, x_2) \cdot u_{122} = f(x_l, u, u_k, u_{ij}); \quad (l, k, i, j = 1, 2)$$

es decir, para toda ecuación quasi-lineal de 3er. orden de tipo hiperbólico, con dos variables independientes, previamente reducida a su forma canónica, con el mismo sistema de condiciones iniciales que el de las ecuaciones considerados en los anteriores Capítulos, supuestas verificadas ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad respecto a sus argumentos de las funciones p y f.

Utilizamos asimismo el método de las aproximaciones sucesivas, en el campo real, y los teoremas de acotación de las mismas, así como demostración de la convergencia uniforme de las correspondientes sucesiones, son análogos a los utilizados en el Capítulo anterior, razón por la que abreviamos en lo posible los largos cálculos a que dan lugar, dejando para la Nota Complementaria que sigue al Capítulo, las demostraciones más laboriosas.

Se determinan al igual que en los anteriores capítulos, los dominios de dependencia y prolongación, y se demuestra que el problema de Cauchy considerado es apropiado a la ecuación propuesta.

El método que hemos seguido para la construcción de las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales de 3er. orden con dos variables, de tipo hiperbólico, no se aparta pues, esencialmente, como ya hemos indicado más arriba del empleado por Picard y otros en la demostración de los teoremas de existencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden cualquiera, y las de derivadas parciales de 2º orden, y la creencia por parte nuestra, de que el mismo no había agotado todas sus posibilidades, así como de que es todavía susceptible de ser aplicado al cálculo de soluciones en el campo real de ecuaciones de más de dos variables independientes, y de orden superior al tercero, es la principal razón que nos ha impulsado a redactar el presente trabajo.

Es deber, por parte nuestra, expresar nuestro agradecimiento al profesor Dr. Angé, quien no ha dejado de alentarnos en todo momento y a cuyas atinadas observaciones y acertada orientación se debe en gran parte la culminación de este modesto trabajo.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

(1) J.Leray. Le problème de Cauchy pour une équation linéaire a coefficients polynomiaux. LXXI Colloque international du Centre National de la Recherche Scientiphique. Nancy 9-15 Avril 1956.

(2) J.Leray. Comptes rendus, Acad. Paris. t. 242 (20 février 1956).

(3) J.Leray. Lectures on hiperbolic equations with variable coefficients. Princenton, Inst. for Adv. Study, 1952.

(4) Petrowski I.G. Uber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Rec. Math. (Moscou) N.S. 2. 1937, 814-868.

(5) Lars Garding. Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. LXXXI Colloque international du Centre National de la Recherche Scientiphique, Nancy 9-15 Avril 1956.

(6) Lars Garding. L'inegalité de Friedrichs et Lewy pour les équations hyperboliques linéaires d'ordre supérieur. C.R. Acad. SCIEN. Paris, 239, 1954, 849-850.

(7) Fantappie L. Les nouvelles méthodes d'intégration en termes finis des équations aux derivées partielles. Second Colloque sur les Equations aux derivées partielles.

Bruxelles 24-26 Mai 1954.

(8) Fantappié L. La giustificazione del cálcolo simbólico e le sue applicazione all'integrazione delle equazioni a derivata partiali. (Mem. R.Ac. D'Italia. Vol. I-1930).

(9) Fantappie L. Risoluzione in termini finiti del problema de Cauchy con dati iniziali su una ipersuperfizie qualunque (Rehd, Acc. d'Italia, serie 7, vol. II, 1941).

(10) J.L.Lions. Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math. t. 94, 1955.

(11) H.G.Garnir Espaces de Hilbert et problèmes aux limites de la Physique. LXXXI Colloque international du Centre National de la Recherche Scientiphique, Nancy, 9-15 Avril 1956.

(12) E.Picard. Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations differentielles. Cahiers Scientiphiques, Fascicule V.

13) E. Picard. Traité d'Analyse. Tome III 3ème édition.

(14) E.Picard. "Leçons sur quelques types simples d'équations aux derivées partielles (Fascicule I de la Collection des Cahiers Scientiphiques).

CLASIFICACION Y SOLUCIONES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 1er. ORDEN CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES.

C A P I T U L O   I

CLASIFICACION Y REDUCCION A FORMAS CANONICAS DE LAS ECUACIONES CUASI-LINEALES DE 3er. ORDEN.

1.- CAMBIOS DE VARIABLES. Consideremos la ecuación:

$$a\cdot u_{xxx} + 3b\,u_{xxy} + 3c\cdot u_{xyy} + d\,u_{yyy} + f(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = 0 \quad (1)$$

cuasi-lineal, es decir, lineal en las derivadas terceras con los coeficientes a, b, c, d, funciones de x e y solamente.

Dicha ecuación la podremos representar abreviadamente por:

$$L[u] + f(x,y,u,p,q,r,s,t) = 0 \qquad (2)$$

Vamos a dar una clasificacion de las ecuaciones fundadas en los diferentes tipos canónicos a que puede llegarse por cambio de variables.

Tratemos ahora de efectuar un cambio de variables que nos reduzca $L[u]$ a la forma más sencilla posible( ). Si son $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ dos funciones por determinar, la sustitución

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(x,y) \\ \eta &= \psi(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

( ) El proceso es semejante al empleado en las ecuaciones de 2º Orden. Véase Courant-Hilbert 1 pag. 138.

en donde φ y ψ son continuas y derivables con derivadas primeras asímismo continuas en el entorno de un punto $x_0 y_0$ en el cual es:

$$\left[\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \neq 0$$

transforma la ecuación (1) en otra del mismo tipo, con las variables independientes

$$\alpha u_{\xi\xi\xi}+3\beta u_{\xi\xi\eta}+3\gamma u_{\xi\eta\eta}+\delta u_{\eta\eta\eta}+F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta})=0 \qquad [4]$$

De (3) deducimos:

$$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x$$

$$u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\cdot\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\cdot\psi_x + u_{\eta\eta}\cdot\psi_x^2 + u_\xi\cdot\varphi_{xx} + u_\eta\cdot\psi_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x\cdot\varphi_y + u_{\xi\eta}[\varphi_x\cdot\psi_y + \psi_x\cdot\varphi_y] + u_{\eta\eta}\cdot\psi_x\psi_y + u_\xi\varphi_{xy} + u_\eta\psi_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + u_\xi\varphi_{yy} + u_\eta\cdot\psi_{yy}$$

$$u_{xxx} = u_{\xi\xi\xi}\varphi_x^3 + 3u_{\xi\xi\eta}\cdot\varphi_x^2\psi_x + 3u_{\xi\eta\eta}\cdot\varphi_x\cdot\psi_x^2 + u_{\eta\eta\eta}\psi_x^3 + \cdots \qquad (5)$$

$$u_{xxy} = u_{\xi\xi\xi}\varphi_x^2\varphi_y + u_{\xi\xi\eta}[\varphi_x^2\cdot\psi_y + 2\varphi_x\varphi_y\psi_x] + u_{\xi\eta\eta}[\varphi_y\cdot\psi_x^2 + 2\varphi_x\psi_x\psi_y] + u_{\eta\eta\eta}\psi_x^2\psi_y + \cdots$$

$$u_{xyy} = u_{\xi\xi\xi}\varphi_y^2\cdot\varphi_x + u_{\xi\xi\eta}[\varphi_y^2\cdot\psi_x + 2\varphi_x\varphi_y\psi_y] + u_{\xi\eta\eta}[\varphi_x\cdot\psi_y^2 + 2\varphi_y\psi_x\psi_y] + u_{\eta\eta\eta}\psi_y^2 + \psi_x + \cdots$$

$$u_{yyy} = u_{\xi\xi\xi}\cdot\varphi_y^3 + 3\cdot u_{\xi\xi\eta}\cdot\varphi_y^2\cdot\psi_y + 3u_{\xi\eta\eta}\varphi_y\cdot\psi_y^2 + u_{\eta\eta\eta}\psi_y^3 + \cdots$$

en donde los términos no escritos, solamente contienen las derivadas parciales de primero y de segundo orden u_ξ, u_η $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}$ pero no las de tercer orden.

Por lo que vemos, las derivadas terceras antiguas son funciones lineales de las derivadas terceras nuevas. El operador $L[u]$ se transformará pues en el análogo $\Lambda[u]$ Sustituyendo en (1) $u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}$ por sus expresiones dadas en (5) e igualando los coeficientes de $u_{\xi\xi\xi}, u_{\xi\xi\eta}, u_{\xi\eta\eta}, u_{\eta\eta\eta}$ en (1) y (4) obtendremos para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ las expresiones:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\alpha(\xi,\eta) = a\cdot\varphi_x^3 + 3b\varphi_x^2\varphi_y + 3c\varphi_x\varphi_y^2 + d\varphi_y^3 \\
\beta(\xi,\eta) = a\varphi_x^2\cdot\psi_x + b[\varphi_x^2\cdot\psi_y + 2\varphi_x\varphi_y\cdot\psi_x] + c[\varphi_y^2\cdot\psi_x + 2\varphi_x\cdot\varphi_y\cdot\psi_y] + d\varphi_y^2\cdot\psi_y \\
\gamma(\xi,\eta) = a\cdot\varphi_x\cdot\psi_x^2 + b[\varphi_y\cdot\psi_x^2 + 2\cdot\varphi_x\psi_x\psi_y] + c[\varphi_x\psi_y^2 + 2\varphi_y\psi_x\psi_y] + d\cdot\varphi_y\cdot\psi_y^2 \\
\delta(\xi,\eta) = a\cdot\psi_x^3 + 3b\cdot\psi_x^2\cdot\psi_y + 3\cdot c\cdot\psi_y^2\cdot\psi_x + d\cdot\psi_y^3
\end{cases}
$$

2.- <u>FORMAS CANONICAS</u>. Se trata de elegir φ y ψ de modo que $\Lambda[u]$ sea lo más sencilla posible.

Consideremos la forma cúbica:

$$a l^3 + 3\cdot b\cdot l^2 m + 3c\cdot l\cdot m^2 + d m^3 \quad (7)$$

asociada a $L[u]$ y la : $\alpha\lambda^3 + 3\beta\lambda^2\mu + 3\gamma\lambda\mu^2 + \delta\mu^3$ (8) asociada a $\Lambda[u]$

El paso de a, b, c, d, a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se consigue mediante una sustitución lineal que es la misma que si en la forma cúbica asociada aplicamos la sustitución

$$\left.\begin{aligned} l &= \lambda \varphi_x + \mu \psi_x \\ m &= \lambda \varphi_y + \mu \psi_y \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

ya que si sustituímos en (8) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ por sus expresiones dadas en (6) y luego identificamos los coeficientes de a, b, c, y d, con los de (7) obtendremos (9).

Se puede conseguir que (8) adopte una de las formas:

1.- $\rho\lambda^3 + \rho'\mu^3$ | 4º.- $\rho\lambda^2\mu + \rho'\lambda^3$
2º.- $\rho\lambda^2\mu + \rho'\lambda\mu^2$ | 5º.- $\rho\lambda\mu^2 + \rho'\mu^3$
3º.- $\rho\lambda^2\mu + \rho'\mu^3$ | 6º.- $\rho\lambda\mu^2 + \rho'\lambda^3$

El primer caso equivale a imponer $\beta = 0$; $\gamma = 0$ el segundo $\alpha = 0$; $\delta = 0$ .... etc. Estas dos condiciones son dos ecuaciones en derivadas parciales en la φ y la ψ. Eligiendo éstas de modo que las satisfagan tendremos la forma cúbica reducida a su forma canónica.

También podrían considerarse combinaciones de la forma: $\alpha = 0$, $\beta = \gamma$; $\beta = 0$, $\alpha = \gamma$ etc.

Consideremos el caso $\alpha = 0$, $\delta = 0$ que equivale a imponer las condiciones

$$\left.\begin{aligned} a\varphi_x^3 + 3b\varphi_x^2\varphi_y + 3c\varphi_x\varphi_y^2 + d\varphi_y^3 = 0 \\ a\psi_x^3 + 3b\psi_x^2\psi_y + 3c\psi_x\psi_y^2 + d\psi_y^3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

En realidad son una misma condición, impuesta una vez a φ

y otra a ψ Hemos de hallar, pues dos soluciones de la ecuación en derivadas parciales

$$a\varphi_x^3+3b\varphi_x^2\cdot\varphi_y+3c\varphi_y^2\cdot\varphi_x+d\varphi_y^3=0 \qquad (11)$$

No es lineal, pero es homogénea. Podemos dividir por φ_y^3 obteniéndose como ecuación ordinaria asociada:

$$a\cdot y'^3-3by'^2+3c\,y'-d=0 \qquad (12)$$

Esta ecuación es de 3er. grado en y', su discriminante será:

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} \quad \text{con } q=\frac{-2b^3+3abc-a^2d}{a^3} \quad \text{y } p=\frac{3ac-3b^2}{a^2}$$

es decir: $$\Delta=\frac{a^4d^2+4a^2b^3d-6a^3bcd+4a^3c^3-3a^2b^2c^2}{4a^6}$$

La ecuación (12) admite tres soluciones en cada punto, que serán reales y distintas siempre que sea, $\Delta<0$ Sean $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ las raíces de la ecuación: $a\lambda^3-3b\lambda^2+3c\lambda-d=0$
La ecuación (11) se desdobla en tres lineales:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_x+\lambda_1\varphi_y=0\\ \psi_x+\lambda_2\psi_y=0\\ \chi_x+\lambda_3\chi_y=0\end{array}\right\} \quad (13)$$

a las cuales corresponden tres haces de curvas características:

$$\varphi(x,y)=C^{te};\ \psi(x,y)=C^{te};\ \chi(x,y)=C^{te}$$

soluciones de los sistemas diferenciales $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\lambda_i}$ $(i=1,2,3$

asociados a las mismas, siendo las integrales generales respectivas

$$F_1[\varphi(x,y)], \; F_2[\psi(x,y)], \; F_3[X(x,y)], \text{ con } F_1, F_2, F_3$$

arbitrarias.

La reducción se conseguirá tomando como curvas coordenadas dos cualesquiera de estos tres haces. Este será el caso totalmente <u>hiperbólico</u>. Si es $\Delta = 0$ dos de las tres raíces reales $\lambda_1 \; \lambda_2 \; \lambda_3$ son iguales $\lambda_1 = \lambda_2$

Haciendo $\lambda_1 = \lambda_2$ las tres ecuaciones (13) se reducen a dos, obteniéndose únicamente dos haces de curvas características :

$$\varphi(x,y) = c^{te}; \; X(x,y) = c^{te}$$

Lograremos también reducción, adoptando como curvas coordenadas estos dos haces de curvas. Seguiremos de acuerdo con el punto de vista de Courant, considerando a este caso también como <u>hiperbólico</u> ([1])

3.- <u>CASO DE EXCEPCION</u>.- Si es $\Delta = 0, \; q = 0$; con lo que también $p = 0$ Esto solo tendrá lugar para un número finito de puntos del plano XOY los comunes a las curvas de ecuaciones: $\left.\begin{matrix}\Delta = 0\\ q = 0\end{matrix}\right\}$ ó $\left.\begin{matrix}\Delta = 0\\ p = 0\end{matrix}\right\}$ ya que ambos sistemas son equivalentes y sólo tiene interés cuando son constantes los coeficientes de $L[u]$ En este caso las tres raíces reales

---

([1]) Courant-Hilbert, [1] pag. 140

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se confunden en una sola λ_0 obteniéndose únicamente un haz de curvas características $\varphi(x,y)=C^{te}$
y también lograremos reducción, ya que si $\varphi(x,y)$ es una integral de la ecuación $\varphi_x + \lambda_0 \varphi_y = 0$; y $\psi(x,y)$ designa otra función cualquiera diferenciable que no satisfaga a esta ecuación en derivadas parciales, tomándolas como funciones de transformación de las variables x, y, en las ξ, η y teniendo presente las relaciones

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 3\lambda_0 = \frac{3b}{a} ;\ \lambda_0 = \frac{b}{a} ;\ \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = 3\lambda_0^2 = \frac{3c}{a} ;\ \lambda_0^2 = \frac{c}{a}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_0^3 = \frac{d}{a}$$

de las que se deducen:

$$\lambda_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} ;\ b^2 = ac ;\ \lambda_0 = \frac{d}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{a} ;\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a} ;\ ad = b \cdot c$$

resulta: $\beta(\xi,\eta) = \varphi_y^2 \cdot \psi_y \left\{ a\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 \left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + b \cdot \left[\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \cdot \frac{\psi_x}{\psi_y}\right] + c \cdot \left[\frac{\psi_x}{\psi_y} + 2\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right] + d \right\}$

pero: $\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\lambda_0$ luego:

$$\beta(\xi,\eta) = \varphi_y^2 \psi_y \left\{ a \cdot \lambda_0^2 \frac{\psi_x}{\psi_y} + b\left[\lambda_0^2 - 2\lambda_0 \frac{\psi_x}{\psi_y}\right] + c\left[\frac{\psi_x}{\psi_y} - 2\lambda_0\right] + d \right\} =$$

$$= \varphi_y^2 \psi_y \cdot \left[c \cdot \frac{\psi_x}{\psi_y} + b \cdot \frac{c}{a} - 2\frac{b^2}{a}\frac{\psi_x}{\psi_y} + c\frac{\psi_x}{\psi_y} - \frac{2bc}{a} + d \right] = 0$$

y análogamente obtendríamos $\gamma(\xi,\eta) = 0$

Mediante el cambio:

$$\xi = \varphi(x,y)$$
$$\eta = \psi(x,y)$$

obtendremos reducción, pero, en este caso desaparecerán los términos en derivadas cruzadas y un término en derivadas puras.

Si es $\Delta>0$ las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son una real y dos imaginarias conjugadas. Este caso no será totalmente hiperbólico, ni totalmente elíptico, como era de esperar por ser la ecuación de orden impar. Habrá un haz real de curvas características y otros dos imaginarios. Tomando como funciones de transformación la $\varphi(x,y)$ solución de la ecuación $\varphi_x+\lambda_1\varphi_y$; (λ_1 raíz real) y otra función $\psi(x,y)$ cualquiera (continua y derivable) se logrará que desaparezca el término correspondiente a u_{xxx}

En resumen, para la ecuación diferencial habrá una curva que dividirá el plano en dos recintos, uno cerrado de puntos hiperbólicos que tiene por frontera precisamente esta curva y otro abierto que no es de puntos hiperbólicos, ni elípticos.

4.- <u>CASOS DE SIMPLIFICACION</u>. Analicemos ahora qué condiciones necesarias y suficientes deben verificar los coeficientes del operador $L[u]$ para que la ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico de que forma parte, admita un cambio de variables $\xi=\varphi(x,y)$; $\eta=\psi(x,y)$ que la reduzca a la forma canónica

$$\rho(\xi,\eta)[u_{\xi\xi\eta}-u_{\xi\eta\eta}]+F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta})=0$$

es decir, como veremos en el próximo número, a la misma forma canónica en que se transforma por un cambio de variables, conveniente, toda ecuación de tipo hiperbólico de coeficientes constantes. Para ello observemos que las características de la ecuación transformada (que son las características de las ecuaciones en derivadas parciales de 1er. orden $\Phi_x = 0$; $\Phi_y = 0$ $\Phi_x - \Phi_y = 0$ en que se desdobla la ecuación $\Phi_x^2 \cdot \Phi_y - \Phi_x \Phi_y^2 = 0$ asociada a ella) son las tres familias de rectas paralelas a los ejes y a la bisectriz del 2º y 4º cuadrante $x = c_1, y = c_2, x+y = c_3$ y que dichas características son las transformadas mediante el cambio $\xi = \varphi(x,y); \eta = \psi(x,y)$ de las características de la ecuación dada.

Como la transformación $\xi = \varphi(x,y); \eta = \psi(x,y)$ se supone biunívoca y bicontinua, y además las tres familias de rectas consideradas pueden mediante una transformación afín convertirse en tres familias de rectas paralelas a los lados de un triángulo equilátero (que constituyen un tritejido regular (1)) las familias de curvas características de la ecuación dada, serán topológicamente equivalentes a un tejido regular y constituirán, por tanto, un tejido hexagonal T_3.

El problema que nos ocupa equivale pues a determinar las condiciones necesarias y suficientes de hexagonalidad del tritejido T_3, constituído por las características de la ecuación objeto de estudio, características que vienen dadas, como hemos visto, por los sistemas diferenciales:

$$\Phi_x + \lambda_j \Phi_y = 0 \quad ; (j = 1,2,3)$$

(1) Consúltese Wilhem Blaschke [2] pag. 9 y sgs. y [3]

asociados a las ecuaciones en derivadas parciales:

$$\Phi_x + h_j \Phi_y = 0 \quad (j = 1,2,3)$$

Podemos pues, adoptar como pfaffianos representativos de las tres familias de curvas características que constituyen el tejido T_3, las expresiones diferenciales $\sigma_j = h_j dx - dy$; $(j = 1,2,3)$ las cuales supondremos normalizadas siendo los factores de normalización los que satisfacen el sistema

$$\left.\begin{aligned} g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 &= 0 \\ g_1 + g_2 + g_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cuyas soluciones vienen dadas, salvo un factor de proporcionalidad, por las siguientes expresiones:

$$g_1 = h_2 - h_3 \ ; \ g_2 = h_3 - h_1 \ ; \ g_3 = h_1 - h_2$$

y los nuevos pfaffianos normalizados serán:

$$\bar{\sigma}_1 = h_1(h_2 - h_3)dx - (h_2 - h_3)dy = p_1 dx + q_1 dy$$

$$\bar{\sigma}_2 = h_2(h_3 - h_1)dx - (h_3 - h_1)dy = p_2 dx + q_2 dy$$

$$\bar{\sigma}_3 = h_3(h_1 - h_2)dx - (h_1 - h_2)dy = p_3 dx + q_3 dy$$

verificando los mismos la relación: $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3 = 0$

Calculemos el elemento superficial Ω el cual viene dado por el producto externo:

$$\Omega = [\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2] = (p_1 q_2 - q_1 p_2)[dx\,dy] = (h_2 - h_3)(h_3 - h_1)(h_2 - h_1)[dx\,dy]$$

así como las diferenciales externas

$$\left.\begin{aligned} d\bar{\sigma}_1 &= (q_{1x} - p_{1y})[dx\,dy] = \{(h_3 - h_2)_x - [h_1(h_2 - h_3)]_y\}[dx\,dy] \\ d\bar{\sigma}_2 &= (q_{2x} - p_{2y})[dx\,dy] = \{(h_1 - h_3)_x - [h_2(h_3 - h_1)]_y\}[dx\,dy] \\ d\bar{\sigma}_3 &= (q_{3x} - p_{3y})[dx\,dy] = \{(h_2 - h_1)_x - [h_3(h_1 - h_2)]_y\}[dx\,dy] \end{aligned}\right\}$$

siendo las expresiones de los escalares $h_j = \frac{d\bar{\sigma}_j}{\Omega}$ las siguientes

$$h_1 = \frac{(\lambda_3-\lambda_2)_x - [\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)]_y}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} \quad ; \quad h_2 = \frac{(\lambda_1-\lambda_3)_x - [\lambda_2(\lambda_3-\lambda_1)]_y}{(\lambda_2-\lambda_3)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$h_3 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)_x - [\lambda_3 (\lambda_1-\lambda_2)]_y}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}$$

Mediante los escalares h_j podemos calcular la conexión γ del tejido T_3 que vendrá dada por la expresión:

$$\gamma = h_2\bar{\sigma}_1 - h_1\bar{\sigma}_2 = A\,dx + B\cdot dy$$

siendo:

$$A = \frac{\lambda_1\lambda_2\{(\lambda_1-\lambda_2)_x + [\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)]_y\} + *}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$B = \frac{\lambda_3\{(\lambda_1-\lambda_2)_x + [\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)]_y\} + *}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}$$

donde los asteriscos * indican otros dos términos obtenidos del 1º mediante permutación circular de los índices 1, 2, 3.

La condición necesaria y suficiente de hexagonalidad de T_3 es que $\gamma = A\cdot dx + B\cdot dy$ <u>sea una diferencial exacta, es decir:</u>

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

y esta relación diferencial de 2º orden en las λ_j (y por

tanto de 2ª orden en los coeficientes del operador $L[u]$, ya que las λ_j vienen expresadas por funciones elementales de dichos coeficientes) es por consiguiente, como acabamos de probar, la condición necesaria y suficiente que deben verificar los coeficientes del operador $L[u]$ para que la ecuación en derivadas parciales de que forma parte, admita un cambio de variables $\xi = \varphi(x,y)\ ;\ \eta = \psi(x,y)$
que la reduzca a la forma canónica:

$$\rho(\xi,\eta)\cdot[u_{\xi\xi\eta} - u_{\xi\eta\eta}] + F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}) = 0$$

5.- CASO DE COEFICIENTES CONSTANTES EN LOS TERMINOS EN DERIVADAS DE 3er. ORDEN.- ([1]). Sea la ecuación:

$$L[u] + f(x,y,u,p,q,r,s,t) = 0 \qquad (14)$$

en la que los coeficientes del operador $L[u]$ son constantes.

La forma cúbica asociada a $L[u]$:

$$a\cdot l^3 + 3bl^2m + 3clm^2 + dm^3 = 0 \qquad (15)$$

es asímismo de coeficientes constantes, y representa en el plano de las l, m, tres rectas por el origen, las tres reales y distintas o una recta real doble, y otra simple, o una real y simple y dos imaginarias conjugadas, o una recta real triple.

([1]) Vidar Thomée demuestra la existencia y unicidad de la solución de una ecuación de 3er. orden lineal e hiperbólica, con condiciones de contorno de tipo mixto en el supuesto que sean constantes los coeficientes de la parte principal del operador por aplicación de los métodos usados por Leray y Garding [4] pag. 115 y sgts. Véase la nota bibliográfica al final del Capítulo IV.

Dichas rectas tienen por coeficientes angulares las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la ecuación cúbica en $\frac{l}{m}$:

$$a\left(\frac{l}{m}\right)^3 + 3b\left(\frac{l}{m}\right)^2 + 3c\cdot\left(\frac{l}{m}\right) + d = 0$$

o bien haciendo $\frac{l}{m} = t$:

$$at^3 + 3bt^2 + 3ct + d = 0 \tag{15'}$$

raíces que son opuestas a las correspondientes a la ecuación (12) ya considerada en y'.

Supongamos que las tres raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sean reales y distintas.

Según hemos visto antes, el paso de a, b, c, d, coeficientes de la forma cúbica asociada a $L[u]$ a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ coeficientes de la forma cúbica asociada a $\Lambda[u]$ se consigue mediante una sustitución lineal que es la misma que si en la forma cúbica asociada aplicamos la sustitución

$$\left.\begin{aligned} l &= \lambda\cdot\varphi_x + \mu\,\psi_x \\ m &= \lambda\cdot\varphi_y + \mu\,\psi_y \end{aligned}\right\}$$

en la cual si $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$ se suponen constantes, lo que implica que $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ sean lineales, respecto a x, y, equivale a un cambio del sistema de coordenadas en el haz de rayos de vértice en el origen.

Elijamos como rayos origen, límite y unidad del nuevo sistema de coordenadas, respectivamente, las rectas de

Coeficientes angulares λ_1, λ_2, λ_3 representadas por la ecuación (15). Las coordenadas homogéneas de éstas serán $(\lambda_1, 1)$, $(\lambda_2, 1)$, $(\lambda_3, 1)$ en el antiguo sistema, y $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ en el nuevo sistema, por lo que la ecuación (15) se transformará en otra en λ y μ que carecerá de los términos centrales, es decir, será de la forma:

$$\rho(\lambda^2\mu - \lambda\mu^2) = 0$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} \rho \cdot l &= a_{11}\lambda + a_{12}\mu \\ \rho \cdot m &= a_{21}\lambda + a_{22}\mu \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

el sistema de ecuaciones que nos representa tal cambio. Los coeficientes $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ los calcularemos mediante el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$\begin{aligned} \rho'\lambda_1 &= a_{12} & \qquad \rho''\lambda_2 &= a_{11} & \qquad \rho'''\lambda_3 &= a_{11} + a_{12} \\ \rho' &= a_{22} & \rho'' &= a_{12} & \rho''' &= a_{21} + a_{22} \end{aligned}$$

que las podemos dividir todas ellas por ρ''' por ejemplo:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'\lambda_1 &= \bar{a}_{12} & \qquad \bar{\rho}''\lambda_2 &= \bar{a}_{11} & \qquad \lambda_3 &= \bar{a}_{11} + \bar{a}_{12} \\ \bar{\rho}' &= \bar{a}_{22} & \bar{\rho}'' &= \bar{a}_{21} & 1 &= \bar{a}_{21} + \bar{a}_{22} \end{aligned}$$

con lo que tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 &= \bar{\rho}''\lambda_2 + \bar{\rho}'\lambda_1 \\ 1 &= \bar{\rho}'' + \bar{\rho}' \end{aligned}\right\}$$

obteniéndose:

$$\bar{\rho}'' = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad ; \quad \bar{\rho}' = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\bar{a}_{11} = \lambda_2 \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad \bar{a}_{12} = \lambda_1 \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\bar{a}_{21} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad \bar{a}_{22} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Las funciones $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ las determinaremos de modo que sea:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \bar{a}_{11} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \bar{a}_{21} & ; \ \varphi(x,y) = \bar{a}_{11}x + \bar{a}_{21}y + C_1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = \bar{a}_{12} & \frac{\partial\psi}{\partial y} = \bar{a}_{22} & \ \ \psi(x,y) = \bar{a}_{12}x + \bar{a}_{22}y + C_2 \end{array}\right\}$$

es decir, en definitiva:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x,y) = \lambda_2 \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} x + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot y + C_1 \\ \psi(x,y) = \lambda_1 \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} x + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_1} y + C_2 \end{array}\right\}$$

y la ecuación (14) se reducirá después de efectuar el cambio:

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad \eta = \psi(x,y)$$

a otra cuasi-lineal de la forma

$$\rho(\xi,\eta)\left[u_{\xi\xi\eta} - u_{\xi\eta\eta}\right] + F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}) = 0$$

6.- UNA RAIZ DOBLE.- Supongamos ahora que las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sean las tres reales, pero confundiéndose en una sola λ_1 las dos primeras.

Mediante el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} \rho \cdot l = \lambda_3 \cdot \lambda - \lambda_1 \mu \\ \rho \cdot m = \lambda - \mu \end{array}\right\} \qquad (17)$$

las dos rectas de coeficientes angulares λ_1 y λ_3 pasarán a ser, después del mismo, rectas origen y recta límite, respectivamente, y la forma cúbica que las representa (15) se reducirá a la $\rho \cdot \lambda^2 \mu = 0$

Por tanto el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \lambda_3 x + y + C^{te} \\ \eta = -\lambda_1 x - y + C^{te} \end{array}\right\}$$

reduce la ecuación (14) a otra de la forma:

$$\rho \cdot \mu_{\xi\xi\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0$$

7.- UNA RAIZ TRIPLE.- Consideremos el caso en que las tres raices se confundan en una sola λ_0

Mediante el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} \rho l = \lambda_0 \cdot \lambda \\ \rho . m = \lambda - \mu \end{array}\right\}$$

la recta de coeficiente angular λ_0 pasa a ser después del mismo, recta límite y la forma cúbica (15) que la representa, se reduce a la:

$$\rho \cdot \mu^3 = 0$$

Luego el cambio:

$$\begin{array}{l} \xi = \lambda_0 \cdot x + y + C^{te} \\ \eta = \quad - y + C^{te} \end{array}$$

reducirá la ecuación (14) a otra de la forma:

$$\rho \cdot \mu_{\eta\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0$$

8.- DOS RAICES IMAGINARIAS CONJUGADAS.- Si las raices son una real λ_0 y dos imaginarias conjugadas $\alpha + \beta i$; $\alpha - \beta i$ (caso no hiperbólico) procederemos análogamente al caso de ser las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reales y distintas, a determinar una sustitución lineal de la forma:

$$\begin{cases} \rho \cdot \lambda = a_{11}\lambda + a_{12}\cdot\mu \\ \rho\cdot\mu = a_{21}\lambda + a_{22}\cdot\mu \end{cases}$$

que nos convierta las rectas de coordenadas homogéneas $(\lambda_0, 1)$ $(\alpha+\beta i, 1)$; $(\alpha-\beta i, 1)$ en las de coordetadas $(1,0)$, $(i,1)$, $(-i,1)$ respectivamente, con lo que la ecuación (15) se transformará en la

$$\rho(\lambda^2\mu+\mu^3)=0$$

Los coeficientes $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ de tal sustitución, los calculamos mediante el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$\left.\begin{matrix} \rho'\cdot\lambda_0 = a_{11} \\ \rho' = a_{21} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \rho''(\alpha+\beta i) = a_{11}\cdot i + a_{12} \\ \rho'' = a_{21} i + a_{22} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \rho'''(\alpha-\beta i) = -a_{11} i + a_{12} \\ \rho''' = -a_{21} i + a_{22} \end{matrix}\right\}$$

que las podemos dividir todas ellas por ρ''' por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} \bar\rho'\cdot\lambda_0 = \bar a_{11} \\ \bar\rho' = \bar a_{21} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \bar\rho''(\alpha+\beta i) = \bar a_{11}\cdot i + \bar a_{12} \\ \bar\rho'' = \bar a_{21} i + \bar a_{22} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \alpha-\beta i = -\bar a_{11}\cdot i + \bar a_{12} \\ 1 = -\bar a_{21} i + \bar a_{22} \end{matrix}\right\}$$

deduciéndose :

$$\left.\begin{matrix} \bar\rho''\cdot(\alpha+\beta i) - (\alpha-\beta i) = 2\lambda_0\cdot\bar\rho'\cdot i \\ \bar\rho'' - 1 = 2\bar\rho'\cdot i \end{matrix}\right\}$$

resultando :

$$\bar\rho' = -\frac{\beta}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} \; ; \quad \bar\rho'' = \frac{(\alpha-\beta i)-\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}$$

$$\bar a_{11} = -\frac{\beta\cdot\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} \; ; \quad \bar a_{12} = (\alpha+\beta i)\frac{(\alpha-\beta i)-\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} + \frac{\beta\lambda_0 i}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}$$

$$\bar a_{21} = -\frac{\beta}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} \; ; \quad \bar a_{22} = \frac{(\alpha-\beta i)-\lambda_0}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0} + \frac{\beta i}{(\alpha+\beta i)-\lambda_0}$$

o bien por tratarse de coordenadas homogéneas y simplificando:

$$a_{11} = -\lambda_0\cdot\beta \; ; \quad a_{12} = \alpha^2+\beta^2-\lambda_0\alpha \; ; \quad a_{21} = -\beta \; ; \quad a_{22} = \alpha-\lambda_0$$

Las funciones $\varphi(x,y)$ y $\psi(x,y)$ se determinarán de modo que sean:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=a_{11}\ ;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=a_{21}\ ;\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=a_{12}\ ,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=a_{22}$$

y por tanto:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y) &= a_{11}\cdot x + a_{21}\cdot y + C_1\\ \psi(x,y) &= a_{12}\cdot x + a_{22}\cdot y + C_2\end{aligned}\right\}$$

es decir, en definitiva:

$$\left.\begin{aligned}-\varphi(x,y) &= -\lambda_0\cdot\beta\cdot x - \beta\cdot y + C_1\\ \psi(x,y) &= (\alpha^2+\beta^2-\lambda_0)x + (\alpha-\lambda_0)\cdot y + C_2\end{aligned}\right\}$$

y la ecuación (14) se reducirá después de efectuar el cambio:

$\xi = \varphi(x,y)\ ;\ \eta = \psi(x,y)$ a otra cuasi-lineal de la forma:

$$\rho\cdot(u_{\xi\xi\eta}-u_{\xi\eta\eta}) + F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}) = 0$$

CAPITULO II

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION HIPERBOLICA: $u_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u_{122} = \Phi(x_1, x_2)$

1.- PLANTEO DEL PROBLEMA.- Dada la ecuación lineal en derivadas parciales:

$$u_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u_{122} = \Phi(x_1, x_2)$$

con $\Phi(x_1, x_2)$ función continua que admite derivadas parciales, asímismo continuas, en un cierto recinto abierto y conexo G, limitado por una curva frontera continua y conexa y $\rho(x_1, x_2)$ una función contima que no se anula en G, y por lo tanto de signo constante en el mismo (signo que siempre podemos suponer positivo (1) admitiendo derivadas parciales primeras y segundas continuas. Sea $O(x_1^0, x_2^0)$ un punto interior de G, la recta $x_2 = x_2^0$ determina en G un intervalo abierto $\alpha_1 < x_1 < \alpha_2$ interior a G, con $\alpha_1 < x_1^0 < \alpha_2$ asímismo la $x_1 = x_1^0$ determina un intervalo abierto $\beta_1 < x_2 < \beta_2$ interior a G con $\beta_1 < x_2^0 < \beta_2$, y sean $\varphi(x_1)$; $\psi(x_2)$; $\chi(x_2)$ tres funciones que cumplen las siguientes condiciones:

---

(1) Bastará en caso contrario efectuar el cambio de variables independientes:

$$\begin{cases} x_1 = -\xi_1 \\ x_2 = \xi_2 \end{cases}$$

1º) - $\varphi(x_1)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden continuas en el intervalo anteriormente considerado.

2º) - $\psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de tercero y segundo orden, respectivamente, continuas en el intervalo $\beta_1 < x_2 < \beta_2$ Dichas funciones verifican además las condiciones: $\varphi(x_1^0) = \psi(x_2^0)$; $\varphi'(x_1^0) = \chi(x_2^0)$

2.- DETERMINACION DE LAS CURVAS CARACTERISTICAS DE LA ECUACION.

Estas vienen dadas, como sabemos, por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales, en que se descompone la expresión diferencial.

$$\varphi_{x_1}^2 \cdot \varphi_{x_2} + \rho\, \varphi_{x_1} \varphi_{x_2}^2 = 0 \; ; \; \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_2} (\varphi_{x_1} + \rho \cdot \varphi_{x_2}) = 0$$

que son:

$$\varphi_{x_1} = 0 \qquad \varphi_{x_2} = 0 \qquad \varphi_{x_1} + \rho\, \varphi_{x_2} = 0$$

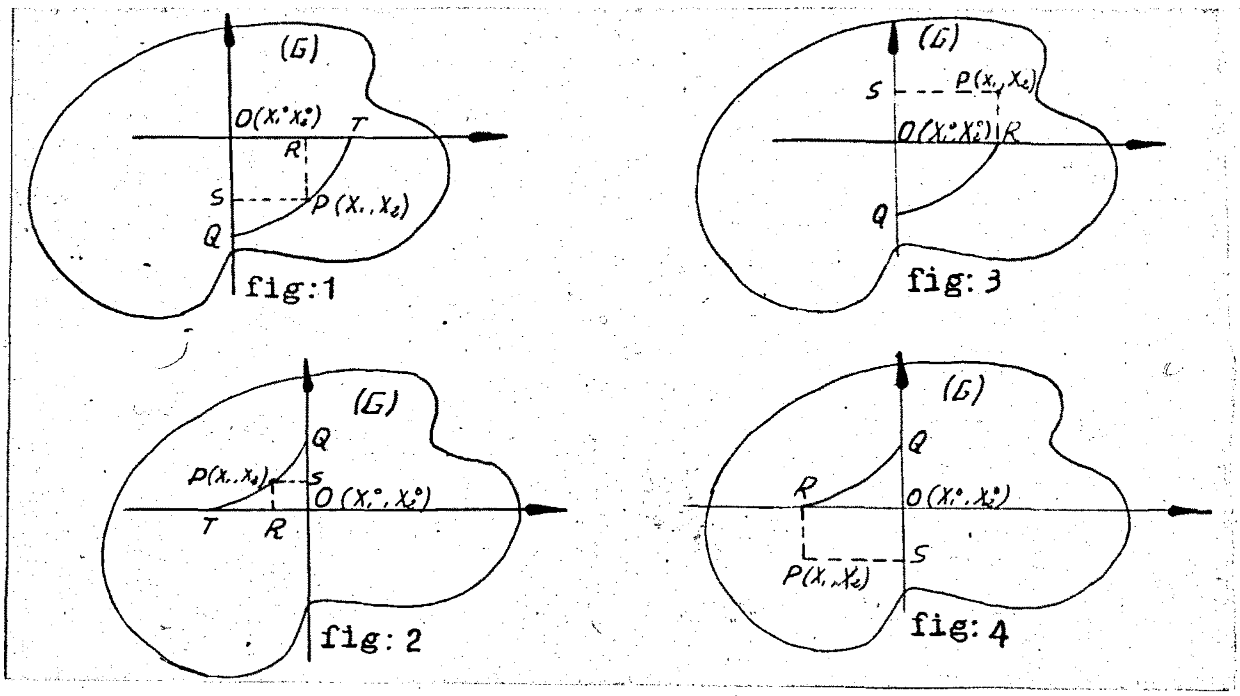
Las dos primeras tienen por características respectivas las familias de rectas paralelas: $x_2 = C_2$; $x_1 = C_1$ y la tercera las curvas integrales $\lambda(x_1^0, x_1, x_2) = C_3$ de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \rho(x_1, x_2)$, que por las hipótesis hechas sobre $\rho(x_1, x_2)$ serán crecientes en G.

En resumen las familias de curvas características de la ecuación (1) son

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 = C_1 \\ (\beta) & x_2 = C_2 \\ (\gamma) & \lambda(x_1^0, x_1, x_2) = C_3 \end{array}\right\} \quad (2)$$

3.- DETERMINACION DEL DOMINIO DE DEPENDENCIA DE UN PUNTO P.-

Consideremos un punto $P(x_1, x_2)$ de $\underline{G}$ y tracemos las tres características que pasan por él; supongamos que P es lo



suficiente próximo a $O(x_1^0, x_2^0)$ para que supuesto el caso de las figs. 1 y 2 (P situado en 2º ó 4º cuadrante) el trapecio mixtilíneo $ORPQ$ determinado por los ejes, el arco PQ de la característica del haz (γ) y el segmento PR de la del haz (α) sea interior a $\underline{G}$, o en el caso de las figs. 3 y 4 (P en el 1º y 3erl cuadrante) sea interior a $\underline{G}$ el trapecio mixtilíneo $PRQS$ determinado por el arco QR de la característica del haz (γ) que pasa por la proyección $\underline{R}$ de $\underline{P}$ los segmentos PR y PS de las características de los haces (α) y (β) y el eje $x_2 = x_2^0$

En ambos casos los intervalos OQ y QS' constituyen como vamos a demostrar posteriormente los dominios de dependencia de P sobre $x_1 = x_1^0$

Análogamente sobre $x_2 = x_2^0$ el dominio de dependencoa está constituído en todos los casos por el segmento O R determinado por el origen y la proyección R de P sobre $x_2 = x_2^0$

4.- <u>CONSTRUCCION DEL DOMINIO DE PROLONGACION</u>.- A cada punto P de G hagámosle corresponder la región plana, que llamaremos <u>asociada a P</u>, constituída por el triángulo mixtilíneo OQT (supuesto P situado en el 2º ó 4º cuadrante) limitado por los ejes y por la característica del haz (γ) que pasa por él, tal como indica la fig. 1, o por el trapecio mixtilíneo $PRQS$ (si P está situado en el 1º o 3er. cuadrante) limitado por los ejes y por las características de los haces (α) y (β) que pasan por él, así como por la característica del haz (γ) que pasa por R, proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$

Dadas las funciones $\psi(x_2), \chi(x_2)$ sobre el segmento QS del eje $x_1 = x_1^0$ y la $\varphi(x_1)$ sobre el segmento UR del eje $x_2 = x_2^0$ llamaremos <u>dominio de prolongación</u> D de dichos segmentos, al conjunto de puntos P de G, tales que la correspondiente región asociada sea interior a G en sentido estricto, estando además contenidos en QS y UR los correspondientes dominios de dependencia sobre

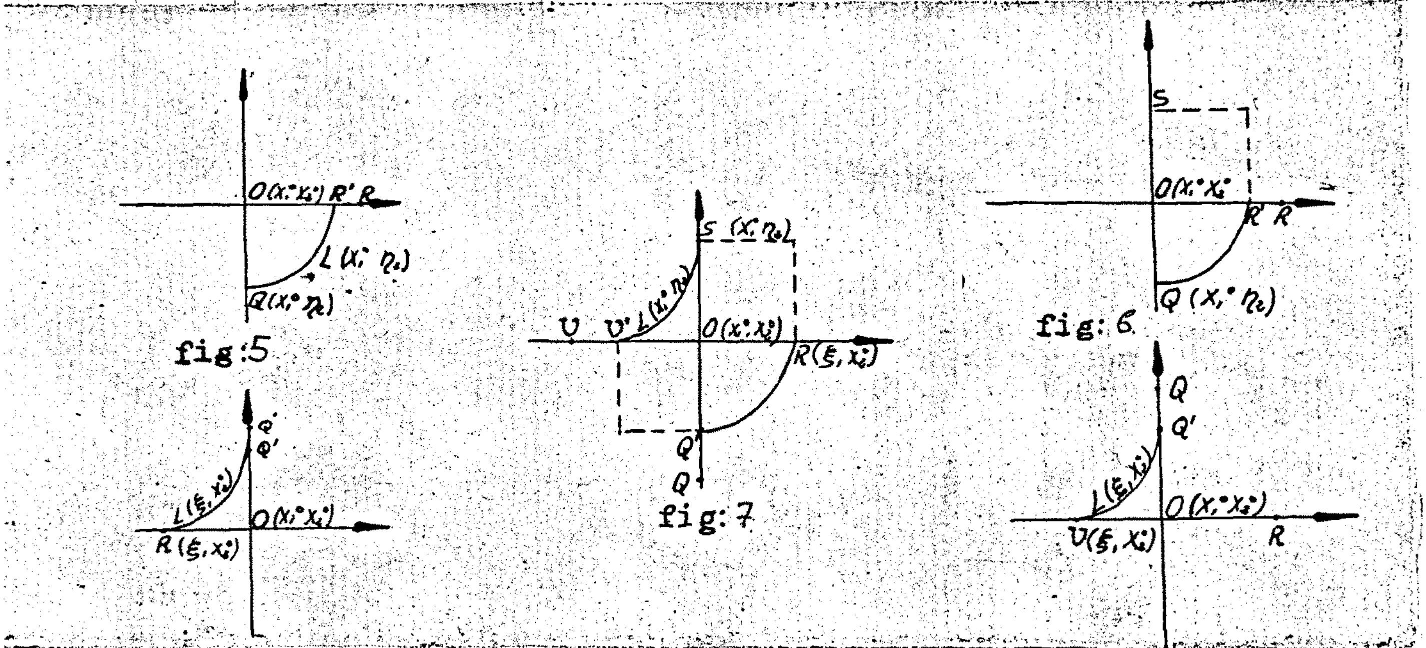


fig:5 fig:6 fig:7

$x_1 = x_1^0$ y $x_2 = x_2^0$ respectivamente. Dichos dominios de prolongación tal como los hemos definido, se indican en las figuras 5, 6 y y 7 corresponden a los casos en que los segmentos QS de eje $x_1 = x_1^0$ y U R del eje $x_2 = x_2^0$ que determinan tal dominio **D**, tengan el punto O (x_1^0, x_2^0) como extremos de los mismos, o como extremo de uno y punto interior del otro, o bien como punto interior a ambos respectivamente. Estas definiciones serán justificadas más adelante.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo el dominio de prolongación (D) de cualquier segmento del eje $x_1 = x_1^0$ (al cual pertenezca el origen), en el que satisface a las condiciones iniciales

a) se convierte en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2^0$ es decir, $u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)$

b) en $\psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$ o sea, $u(x_1^0, x_2) \equiv \psi(x_2)$

c) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ se reduce a la función $\chi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$ es decir, $u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$ Además, esta solución es única.

5.- CONSTRUCCION DE LA SOLUCION AL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACION (1).- Procederemos como es habitual en este tipo de cuestiones desdoblando el problema general (no homogéneo, ni con condiciones iniciales homogéneas) en los dos problemas parcialmente homogéneos a que equivale

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u_{122} = \Phi(x_1, x_2) \\ u(x_1, x_2^0) \equiv 0 \\ u(x_1^0, x_2) \equiv 0 \\ u_1(x_1^0, x_2) \equiv 0 \end{array}\right\} (3) \qquad \begin{array}{l} u_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u_{122} = 0 \\ u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1) \\ u(x_1^0, x_2) \equiv \psi(x_2) \\ u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2) \end{array}$$

cuyas soluciones u, v con las condiciones iniciales señaladas para cada uno superpondremos, obteniendo la solución al problema de Cauchy que buscamos.

El segundo problema ($3'$) se reduce al primero (3) sin más que efectuar el cambio de función $v = w + v^0$ siendo $v^0(x_1, x_2)$ una función continua, con derivadas parciales, asimismo continuas, hasta las de 3er. orden, que satisfaga las condiciones iniciales de $(3')$ (*) por lo que solo resolveremos el problema (3).

Para ello escribamos la ecuación (3) en la forma: $s_1 + \rho(x_1,x_2)\,s_2 = \phi(x_1,x_2)$ (4) en la que s designa, de acuerdo con la notación de Monge, la derivada parcial mixta u_{12} y s_1 y s_2 las derivadas u_{112} y u_{122} respectivamente. La ecuación (4) es una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden, no homogénea, cuya solución determinaremos con la condición inicial $s(x_1^0, x_2) \equiv 0$ que se deduce de la antes impuesta $u_1(x_1^0, x_2) \equiv 0$ y cuya sistema diferencial asociado es el siguiente:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\rho(x_1,x_2)} = \frac{ds}{\phi(x_1,x_2)}$$

Una integral primera $\lambda(x_1^0, x_1, x_2)$ del mismo podrá obtenerse de la primera ecuación, siendo $\lambda(x_1^0, x_1, x_2) = K_1$, o $x_2 = \lambda(x_1, x_1^0, K_1)$ (**) el haz integral de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \rho(x_1, x_2)$ $(4')$ (que es la misma que nos definía el haz de características (γ) de (2) Otra integral primera podrá deducirse de la ecuación diferencial ordinaria que constituyen la primera y tercera razón del sistema asociado habiendo sustituído en ellas x_2 por $x_2 = \lambda(x_1, x_1^0, K_1)$ obteniéndose: $s - \int_{x_1^0}^{x_1} \phi[\xi_1, \lambda(\xi_1, x_1^0 K_1)]\, d\xi_1 = K_2$

(*) Por ejemplo podría elegirse la $v^0(x_1,x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2) - \varphi(x_1^0) + (x_1 - x_1^0)\left[\chi(x_2) - \varphi'(x_1^0)\right]$ que verifica las condiciones exigidas.

(**) Véase [5] Parte prima. pags, 32-33

suponiendo que una vez efectuada la cuadratura que figura en el primer miembro, se sustituye k_1 por $\lambda(x_1^\circ, x_1, x_2)$

Las dos integrales primeras consideradas, pueden ponerse en la forma :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(x_1^\circ, x_1, x_2) = k_1 \\ s - \oint_{\mathcal{L}(x_1,x_2)} \phi(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 = k_2 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

en la que integral curvilínea se supone extendida a lo largo del arco de curva integral $\mathcal{L}(x_1,x_2)$ de $(4')$ que pasa por el punto (x_1, x_2) y comprendida entre éste y el punto en que corta al eje $x_1 = x_1^\circ$ y que en lo sucesivo expresaremos dicha integral por $J[\phi(x_1,x_2)]$ indicando $J[F(x_1,x_2)]$ o abreviadamente $J[F]$ un operador funcional aplicado sobre F definido como sigue: $J[F] \equiv \oint_{\mathcal{L}(x_1,x_2)} F(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1$ siendo el camino $\mathcal{L}(x_1,x_2)$ de integración, el que hemos ya considerado.

Con estas notaciones, la integral general de (4) será por tanto :

$$s = J[\phi(x_1,x_2)] + \psi[\lambda(x_1^\circ, x_1, x_2)]$$

con ψ arbitraria. Para determinar la forma de la función ψ correspondiente a la solución que verifica las condiciones iniciales señaladas al principio, eliminaremos x_2 entre las dos ecuaciones siguientes, resultantes de haber hecho

$x_1 = x_1^\circ$ en las dos integrales primeras (5) y tener en cuenta que $\mathcal{S}(x_1^\circ, x_2) \equiv 0$; $\lambda(x_1^\circ; x_1^\circ, x_2) \equiv x_2$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = k_1 \\ 0 = k_2 \end{array}\right\}$$

siendo por tanto la expresión de $\mathcal{S}(x_1, x_2)$ con la condición señalada : $\mathcal{S}(x_1, x_2) = J[\Phi(x_1, x_2)]$ (5')

Puesto que $\mu_{12}(x_1, x_2) \equiv \mathcal{S}(x_1, x_2)$ la solución de la ecuación (3) tendrá por expresión general (en la que R (P) denota el rectángulo formado por los ejes y las características de los haces (α) y (β) que pasan por el punto P (x_1, x_2)) :

$$\mu(x_1, x_2) = \iint_{R(P)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2 + \bar{\varphi}(x_1) + \bar{\psi}(x_2)$$

determinándose $\bar{\varphi}(x_1)$ y $\bar{\psi}(x_2)$ funciones arbitrarias por las condiciones iniciales : $\mu(x_1, x_2^\circ) = \mu(x_1^\circ, x_2) \equiv 0$ obteniéndose en definitiva $\bar{\varphi}(x_1) = \bar{\psi}(x_2) \equiv 0$

$$\mu(x_1, x_2) = \iint_{R(P)} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2 \quad (5'')$$

6.- <u>CALCULO DE LAS PRIMERAS DERIVADAS</u>. Por derivación de $\mu(x_1, x_2)$ respecto a x_1, x_2 se obtiene inmediatamente:

$$p(x_1, x_2) = \mu_1 = \int_{x_2^\circ}^{x_2} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_2 \quad (6)$$

$$q(x_1, x_2) = \mu_2 = \int_{x_1^\circ}^{x_1} J[\Phi(\xi_1, \xi_2)]\, d\xi_1 \quad (6')$$

(1) Véase Sansone [5] pags. 32 a 33.

deduciéndose de ellas:

$$\left.\begin{array}{l} p(x_1, x_2^0) \equiv 0 \\ p(x_1^0 x_2) \equiv 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} q(x_1, x_2^0) = \int_{x_1^0}^{x_1} [\Phi(\xi_1, x_2^0)]\, d\xi_1 \\ q(x_1^0 x_2) \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (6'')$$

7.- <u>CALCULO DE LAS DERIVADAS SEGUNDAS</u>.- La existencia de las segundas derivadas u_{11}, u_{22} y de u_{112}, u_{122} se verifica fácilmente mediante las fórmulas (6), (6') y (5') respectivamente, reduciendo la integral curvilínea $J[\Phi(x_1,x_2)] = \oint_{L(x_1,x_2)} \Phi(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1$ a definida ordinaria, y teniendo en cuenta que la función subintegral $\Phi[\xi,\lambda(\xi, x_1^0, K_1)]$ que figura en esta última, admite en virtud de las hipótesis hechas al principio, derivada parcial continua respecto a λ y en consecuencia respecto a x_1 y x_2 por ser $\lambda(x_1, x_1^0, K_1)$ y $K_1 = h(x_1^0, x_1, x_2)$ funciones diferenciables cuyas derivadas parciales son continuas (1) siendo por tanto legítimo derivar bajo el signo integral; con lo que se prueba lo afirmado al principio. Sentado ésto, el cálculo de las expresiones de $u_{11} = r(x_1,x_2)$ y $u_{22} = t(x_1,x_2)$ se logra fácilmente observando que de la ecuación (1) se deduce mediante dos cuadraturas las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} p(x_1,x_2) + \int_{x_1^0}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2^0}^{x_2} \rho \cdot u_{122}\, d\xi_2 = \int_{x_1^0}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_2 + \bar{\xi}(x_1) + \bar{\eta}(x_2); \\ q(x_1,x_2) + \int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\rho} \cdot u_{112}\, d\xi_1 = \int_{x_2^0}^{x_2} d\xi_2 \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{\rho} \cdot \Phi[\xi_1,\xi_2]\, d\xi_1 + \bar{\bar{\xi}}(x_1) + \bar{\bar{\eta}}(x_2); \end{array}\right.$$

---

(1) Véase la citada obra de Sansone [5] Parte prima. pags. 25 a 31.

en las cuales las funciones arbitrarias que figuran se determinan inmediatamente al hacer sucesivamente $x_1=x_1^0;\ x_2=x_2^0$ y tener en cuenta (6") resultando

$$\begin{cases} p(x_1,x_2)+\int_{x_1^0}^{x_1}d\xi_1\int_{x_2^0}^{x_2}\rho\cdot\mu_{122}\,d\xi_2=\int_{x_1^0}^{x_1}d\xi_1\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2\,; \\ q(x_1,x_2)+\int_{x_2^0}^{x_2}d\xi_2\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{1}{\rho}\mu_{112}\,d\xi_1=\int_{x_2^0}^{x_2}d\xi_2\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{1}{\rho}\cdot\Phi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1+\int_{x_1^0}^{x_1}J[\Phi(\xi_1,x_2^0)]\,d\xi_1\,; \end{cases}$$

de las que por derivación respecto a x_1 y x_2 respectivamente, y mediante integraciones por partes convenientes resultan:

$$\begin{cases} r(x_1,x_2)=-[\rho\cdot s]_{x_2^0}^{x_2}+\int_{x_2^0}^{x_2}\rho_{x_2}\cdot s(x_1,\xi_2)\,d\xi_2+\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2\,; \\ t(x_1,x_2)=-\left[\frac{1}{\rho}\cdot s\right]_{x_1^0}^{x_1}+\int_{x_1^0}^{x_1}\left(\frac{1}{\rho}\right)_{x_1}\cdot s(\xi_1,x_2)\,d\xi_1+\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{1}{\rho}\cdot\Phi(\xi_1,x_2)\,d\xi_1\,; \end{cases}$$

y recordando la expresión (5') hallada anteriormente para $S(x_1,x_2)$ se obtienen las de $r(x_1,x_2)$ y $t(x_1,x_2)$ respectivamente

$$\begin{cases} r(x_1,x_2)=[\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi)]_{x_2}^{x_2^0}+\int_{x_2^0}^{x_2}\rho(x_1,\xi_2)\cdot J[\Phi(x_1,\xi_2)]\,d\xi_2+\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi(x_1,\xi_2)\,d\xi_2 \\ t(x_1,x_2)=-\frac{J(\Phi)}{\rho(x_1,x_2)}-\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\,J[\Phi(\xi_1,x_2)]\,d\xi_1+\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\Phi(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\,d\xi_1 \end{cases}$$

8.- <u>CALCULO DE LAS DERIVADAS TERCERAS.</u>- A partir de las fórmulas anteriores y de la de $\delta'(x_1, x_2)$ se deducen por derivación respecto a x_1 y x_2 las derivadas de tercer orden, habiendo de calcularse previamente las derivadas parciales de la integral general $\lambda(x_1, x_1^0, k_1)$ considerada como función de las condiciones iniciales x_1^0, k_1 con relación a éstas, pues dicha función interviene en todas las fór,ulas, lo cual se obtiene fácilmente a partir de las ecuaciones diferenciales ordinarias y condiciones iniciales a que satisfacen dichas derivadas :

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\right) = p_{x_1}(x_1, x_2)\cdot \frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\,; \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\right)_{x_1 = x_0} = 1 \qquad (1)$$

resultando:

$$\left[\ln \frac{\partial \lambda}{\partial k_1}\right]_{x_1^0}^{x_1} = \int_{x_1^0}^{x_1} p_{x_2}[t, \lambda(t, x_1^0, k_1)]\,dt\,; \quad \frac{\partial[\lambda(x_1, x_1^0 k_1)]}{\partial k_1} = \exp\left\{\int_{x_1^0}^{x_1} p_{x_2}[t, \lambda(t, x_1^0, k_1)]\,dt\right\}$$

cambiando :

$$\underline{x_1^0} \text{ en } \underline{x_1}\,; \ \underline{k_1} \text{ en } \underline{x_2}, \text{ y } \underline{x_1} \text{ en } \underline{x_1^0}$$

se deduce :

$$\frac{\partial[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)]}{\partial x_2} = \exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} p_{x_2}[\lambda, t(x_1^0, x_1 x_2)]\,dt\right\}$$

y como:

$$p(x_1, x_2) = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)]}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)]}{\partial x_2}}$$

resulta asímismo:

$$\frac{\partial[\lambda(x_1^0, x_1, x_2)]}{\partial x_1} = -p(x_1, x_2)\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} p_{x_2}[t, \lambda(t, x_1, x_2)]\,dt\right\}$$

---

(1) Consúltese Sansone [5] Parte prima. pags. 25 a 31

cambiando en esta última x_1^0 por x_1, x_2 por k_1

x_1 por x_1^0

obtendremos la expresión de $\frac{\partial[\lambda(x_1,x_1^0,k_1)]}{\partial x_1^0}$:

$$\frac{\partial[\lambda(x_1,x_1^0,k_1)]}{\partial x_1^0} = -\rho(x_1^0,k_1)\cdot \exp\left\{\int_{x_1^0}^{x_1} \rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1^0,k_1)]dt\right\}$$

Con esto, podemos calcular las expresiones de las derivadas $J_{x_1}(\phi)$ y $J_{x_2}(\phi)$ que son las siguientes:

$$J_{x_1}[\phi(x_1,x_2)] = \frac{\partial}{\partial x_1}\oint_{L(x_1,x_2)}\phi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{x_1^0}^{x_1}\phi[\xi_1,\lambda(\xi_1,x_1^0,k_1)]d\xi_1 =$$

$$= \phi(x_1,x_2) + \int_{x_1^0}^{x_1}\phi_{x_2}[\xi_1,\lambda(\xi_1,x_1^0,k_1)]\frac{\partial\lambda}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial x_1}d\xi_1 =$$

$$= \phi(x_1,x_2) - \rho(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]dt\right\}\cdot J[\phi_{x_2}(x_1,x_2)\cdot\exp\{J[\rho_{x_2}(x_1,x_2)]\}] \quad (1)$$

$$J_{x_2}[\phi(x_1,x_2)] = \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\oint_{L(x_1,x_2)}\phi(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{x_1^0}^{x_1}\phi[\xi_1,\lambda(\xi_1,x_1^0,k_1)]d\xi_1 =$$

$$= \int_{x_1^0}^{x_1}\phi_{x_2}[\xi_1,\lambda(\xi_1,x_1^0,k_1)]\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial k_1}\cdot\frac{\partial k_1}{\partial x_2}\cdot d\xi_1 =$$

$$= J[\phi_{x_2}(x_1,x_2)\cdot\exp\{J[\rho_{x_2}(x_1,x_2)]\}]\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]dt\right\}$$

deduciéndose además de ellas, la relación:

$$J_{x_1}[\phi(x_1,x_2)] + \rho(x_1,x_2)\cdot J_{x_2}[\phi(x_1,x_2)] \equiv \phi(x_1,x_2)$$

---

(1) Hemos designado de acuerdo con la notación usada hasta ahora por $J[\rho_{x_2}(x_1,x_2)]$ las integrales curvilíneas $\int_{x_1^0}^{x_1}\rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1^0,k_1)]dt = \oint_{L(x_1,x_2)}\rho_{x_2}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1$ que intervienen en las fórmulas de las derivadas de $\lambda(x_1,x_1^0,k_1)$ respecto a las condiciones iniciales.

Las expresiones de las derivadas terceras buscadas de $u(x_1,x_2)$ son las siguientes

$$u_{111}(x_1,x_2)=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi)\right]\right\}_{x_1}^{x_1^0}+\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{\rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J[\Phi(x_1,\xi_2)]\right\}_{x_1}d\xi_2+\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi_{x_1}(x_1,\xi_2)\,d\xi_2$$

$$u_{112}(x_1,x_2)=-\rho(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}\left[t,\lambda(t,x_1,x_2)\right]dt\right\}\cdot J\left\{\Phi_{x_2}(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{J\left[\rho_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right\}\right\}+\Phi(x_1,x_2)$$

$$u_{122}(x_1,x_2)=J\left\{\Phi_{x_2}(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{J\left[\rho_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right\}\right\}\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}\left[t,\lambda(t,x_1,x_2)\right]dt\right\}$$

$$u_{222}(x_1,x_2)=-\left[\frac{J\{\Phi(x_1,x_2)\}}{\rho(x_1,x_2)}\right]_{x_2}-\int_{x_1^0}^{x_1}\left\{\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi(\xi_1,x_2)\right]\right\}_{x_2}d\xi_1+\int_{x_1^0}^{x_1}\left\{\frac{\Phi(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right\}_{x_2}\cdot d\xi_1$$

Las fórmulas resolutivas obtenidas demuestran la existencia de solución con las condiciones iniciales señaladas para la ecuación (3), como se comprueba inmediatamente, sumando a la expresión obtenida para $u_{112}(x_1,x_2)$, la de $u_{122}(x_1,x_2)$ multiplicada por $\rho(x_1,x_2)$

9.- <u>SOLUCION AL SISTEMA (3')</u>.- La solución $v(x_1,x_2)$ de la ecuación (3') se obtendrá sumando $v^0(x_1,x_2)$ (función contínua con derivadas parciales hasta las de tercer orden asímismo continuas que satisface las condiciones iniciales de (3')) a la solución de la ecuación

$$w_{112}+\rho(x_1,x_2)\cdot w_{122}=\Phi(x_1,x_2);\quad(6''')$$ con las condiciones iniciales:

$$w(x_1,x_2^0)=w(x_1^0,x_2)=w_1(x_1,x_2^0)\equiv 0$$

resultante por transformación de la (3') mediante el cambio de función $v = w + v^{\circ}$; ecuación del mismo tipo que la (3) por lo que la solución $v(x_1, x_2)$ de (3') tendrá por expresión la:

$$v(x_1,x_2) = v^{\circ} + \iint_{R(P)} J[\bar{\Phi}(\xi_1,\xi_2)]\,d\xi_1\,d\xi_2$$

y adoptando por ejemplo, como función $v^{\circ}(x_1, x_2)$ la indicada al pie de la página 38:

$$v^{\circ}(x_1,x_2) = \varphi(x_1)+\psi(x_2)-\varphi(x_1^{\circ})+(x_1-x_1^{\circ})+(x_1-x_1^{\circ})[\mathcal{X}(x_2)-\varphi'(x_1^{\circ})]$$

se tendrá:

$$\bar{\Phi}(x_1,x_2) = -\rho(x_1,x_2)\cdot \mathcal{X}''(x_2);$$

$$J[\bar{\Phi}(x_1,x_2)] = -\oint_{L(x_1,x_2)} \rho(\xi_1,\xi_2)\,\mathcal{X}''(\xi_2)\,d\xi_1 = -\int_{x_1^{\circ}}^{x_1} \rho[\xi_1, \lambda(\xi_1,x_1^{\circ};K_1)]\cdot \mathcal{X}''[\lambda(\xi_1,x_1^{\circ};K_1)]\,d\xi_1$$

y teniendo en cuenta:

$$\frac{d}{d\xi_1}\lambda(\xi_1,x_1^{\circ};K_1) = \rho[\xi_1, \lambda(\xi_1,x_1^{\circ};K_1)]$$

resultará

$$J[\bar{\Phi}(x_1,x_2)] = -\int_{x_1^{\circ}}^{x_1}\frac{d}{d\xi_1}\mathcal{X}'[\lambda(\xi_1,x_1^{\circ};K_1)]\,d\xi_1 = -\Big\{\mathcal{X}'[\lambda(\xi_1,x_1^{\circ};K_1)]\Big\}_{x_1^{\circ}}^{x_1} =$$

$$= \mathcal{X}'[\lambda(x_1^{\circ},x_1^{\circ};K_1)] - \mathcal{X}'[\lambda(x_1,x_1^{\circ};K_1)] = \mathcal{X}'(K_1)-\mathcal{X}'(x_2) =$$

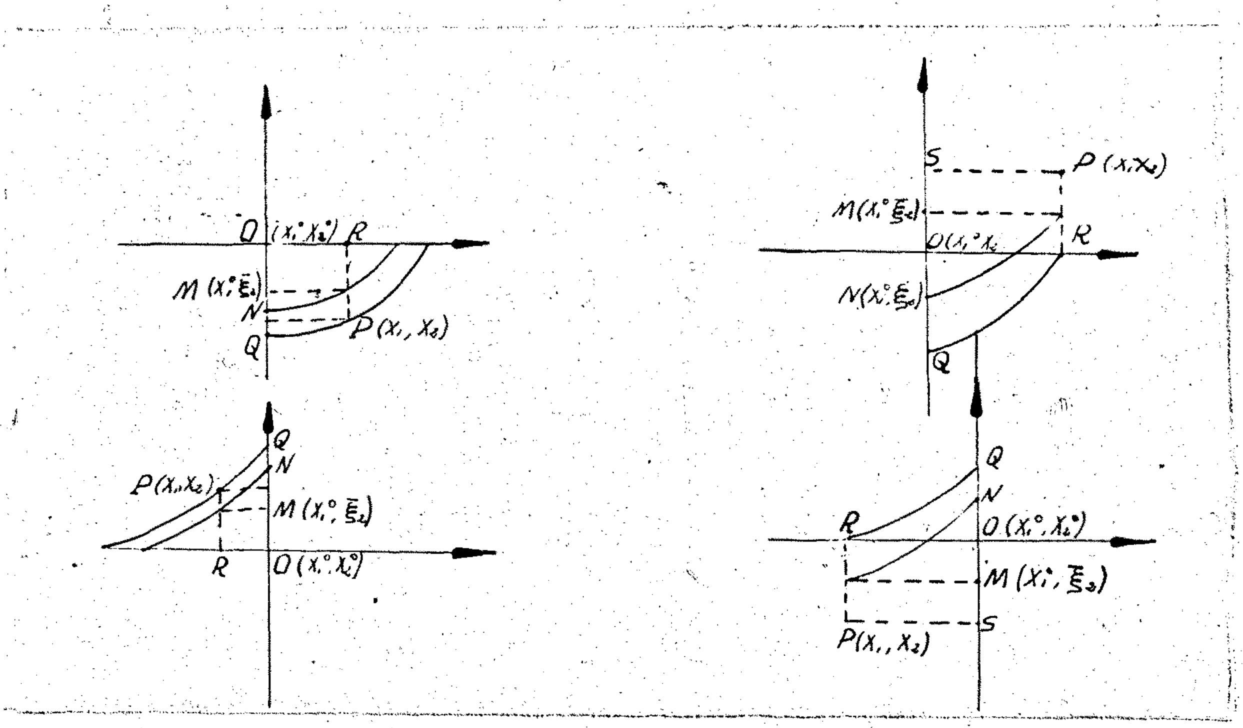
$$= \mathcal{X}'[\lambda(x_1^{\circ};x_1,x_2)] - \mathcal{X}'(x_2)$$

por tanto se tendrá en definitiva

$$v(x_1,x_2) = \varphi(x_1)+\psi(x_2)-\varphi(x_1^{\circ})+(x_1-x_1^{\circ})\cdot[\mathcal{X}(x_2)-\varphi'(x_1^{\circ})] + \iint_{R(P)}\Big\{\mathcal{X}'[\lambda(x_1^{\circ},\xi_1,\xi_2)-\mathcal{X}'(\xi_2)]\Big\}\,d\xi_1\,d\xi_2$$

y superponiendo a la misma la solución $w(x_1, x_2)$ obtenida para (3), tendremos para solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales señaladas, la:

$$u(x_1,x_2)=\varphi(x_1)+\psi(x_2)-\varphi(x_1^0)+(x_1-x_1^0)[\chi(x_2)-\varphi'(x_1^0)]+\iint_{R(P)}\{\chi'[\lambda(x_1^0,\xi_1,\xi_2)]-\chi'(\xi_2)+f[\Phi(\xi_1,\xi_2)]\}\,d\xi_1\,d\xi_2 \quad (7)$$



Ahora ya podemos justificar lo dicho en el nº 3 sobre la determinación del dominio de dependencia de un punto P

En efecto, en la expresión de u **obtenida, figura la integral.**

$$\iint_{R(P)}\chi'[\lambda(x_1^0,\xi_1,\xi_2)]\,d\xi_1\,d\xi_2=\int_{x_2^0}^{x_2}d\xi_2\int_{x_1^0}^{x_1}\chi'[\lambda(x_1^0,\xi_1,\xi_2)]\,d\xi_1$$

en la que $\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)$ es precisamente el valor de la ordenada en el origen correspondiente a la curva integral $l(x_1, x_2)$ que pasa por el punto (ξ_1, ξ_2) y que para cada valor de ξ_2 comprendido entre x_2^0 y x_2 varía de O M a O N, siendo M y N respectivamente las trazas del eje $x_1 = x_1^0$ con la recta $x_2 = \xi_2$ y la curva del haz (γ) que pasa por el punto (x_1, ξ_2) y por tanto, el intervalo de variación total de $\lambda(x_1^0, \xi_1, \xi_2)$ al tomar ξ_2 todos los valores del intervalo de integración correspondiente será O Q ó Q S según P pertenezca al 2º ó 4º cuadrante, o bien al 1º o 3º respectivamente; por otra parte en la expresión de $\underline{u}$ figuran $\varphi(x_1)$ y $\psi(x_2)$ y para determinar $u(x_1, x_2)$ será preciso conocer los valores de $\chi(x_2), \psi(x_2)$ sobre dicho segmento, así como los de $\varphi(x_1)$ sobre O R no influyendo para nada sobre el valor de $u(x_1, x_2)$ en P, los valores de $\chi(x_2), \psi(x_2), \varphi(x_1)$ fuera de los segmentos correspondientes, quedando pues demostrada la legitimidad de lo afirmado en el nº 3.

Por otra parte es lícito definir el dominio de prolongación (D) de los segmentos Q S del eje $x_1 = x_1^0$ U R del eje $x_2 = x_2^0$ tal como se hizo en el nº 4, ya que Q S y U R contiene los dominios de dependencia de todos los puntos $\underline{P}$ de (D) y por tanto, dadas las funciones $\chi(x_2), \psi(x_2)$ sobre el segmento Q S y la $\varphi(x_1)$ sobre U R queda unívocamente determinado el valor de la solución $u(x_1, x_2)$ en cada punto $\underline{P}$ de (D).

Asímismo las fórmulas resolutivas obtenidas ponen de manifiesto que sólo precisa imponer a $\rho(x_1,x_2)$ la existencia y continuidad de derivada parcial primera continua respecto a x_2 para asegurar la existencia de derivadas terceras mixtas de la solución $u(x_1,x_2)$ que son las únicas que figuran en la ecuación (1) mientras que para asegurar la existencia de todas las derivadas terceras, se requiere que $\rho(x_1,x_2)$ admita derivadas parciales primeras y segundas continuas en (G).

10.- UNICIDAD DE LA SOLUCION. Falta ahora demostrar la unicidad de la solución y que el problema de Cauchy es adecuado a la ecuación. Para la primera, si $\bar{u}(x_1,x_2)$ fuese otra solución de (1) cumpliendo las condiciones iniciales

$$\bar{u}(x_1,x_2^0)\equiv\varphi(x_1),\ \bar{u}(x_1^0,x_2)\equiv\psi(x_2),\ \bar{u}_1(x_1^0,x_2)\equiv\chi(x_2)$$

la función $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-\bar{u}(x_1,x_2)$

satisfará evidentemente a la ecuación homogénea $u_{112}+\rho\cdot u_{122}=0$

con las condiciones iniciales: $\bar{\bar{u}}(x_1^0,x_2)=\bar{\bar{u}}(x_1,x_2^0)=\bar{\bar{u}}_1(x_1,x_2^0)\equiv 0$

y su derivada parcial segunda: $\bar{\bar{s}}=\bar{\bar{u}}_{12}(x_1,x_2)$

a la ecuación lineal homogénea de primer orden:

$$s_1+\rho(x_1,x_2)\cdot s_2=0$$

con la condición inicial $\bar{\bar{s}}(x_1^0,x_2)\equiv 0$ que admite como única solución (por ser homogénea, de condiciones iniciales homogéneas y en virtud del teorema de existencia de las ecuaciones de 1er. orden) la idénticamente nula: $\bar{\bar{s}}(x_1,x_2)\equiv 0$, lo que implica que $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ sea de la forma:

$\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)\equiv\alpha(x_1)+\beta(x_2)$; y por tener que anularse idénticamente para $x_1=x_1^0$ y para $x_2=x_2^0$ deberá cumplirse $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)\equiv 0$ es decir: $u(x_1,x_2)\equiv\bar{u}(x_1,x_2)$

Probada la existencia y unicidad de la solución de (1) sólo nos resta demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para asegurar que el problema es apropiado a la ecuación dada. Esto se comprueba inmediatamente mediante la fórmula que da la expresión de $u(x_1,x_2)$ teniendo presente las hipótesis hechas sobre las funciones $\varphi(x_1)$; $\psi(x_2)$; $\chi(x_2)$ y las propiedades de las integrales definidas dependientes de un parámetro.

C A P I T U L O   III

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION LINEAL DE TIPO HIPERBOLICO: $u_{112}+\rho(x_1,x_2)u_{122}+\sum_{i,j=1,2} a_{ij}u_{ij}+\sum_{k=1,2} b_k u_k+c\cdot u=g(x_1,x_2)$

1.- PLANTEO DEL PROBLEMA.- Dada la ecuación lineal:

$$u_{112}+\rho(x_1,x_2)u_{122}+\sum_{i,j=1,2} a_{ij}u_{ij}+\sum b_k u_k+c\cdot u=g(x_1,x_2)$$

cuyos coeficientes a_{ij}, b_k, c, g son funciones continuas que admiten derivadas parciales, asímismo continuas, en un cierto recinto abierto y conexo G con frontera continua y conexa y $\rho(x_1,x_2)$ una función continua que no se anula en G, es decir, de signo constante en el mismo (signo que siempre se puede suponer positivo 1.- CAP. II) cuyos valores se mantienen inferiores a un cierto número $\mu<1$ ( ) y que admite derivadas parciales primeras y segundas continuas. Sea $O(x_1^0,x_2^0)$ un punto interior de G, y $\alpha_1<x_1<\alpha_2$; $\beta_1<x_2<\beta_2$ los intervalos abiertos interiores a G, determinados respectivamente en el mismo, por las rectas $x_2=x_2^0$; $x_1=x_1^0$; sean $\varphi(x_1)$; $\psi(x_2)$; $\chi(x_2)$ tres funciones que

---

( ) En caso contrario, bastará efectuar el cambio de variables: $\xi_1=Kx_1$; $\xi_2=x_2$ siendo K un número positivo cualquiera mayor que el extremo superior E de $\rho(x_1,x_2)$ en G, es decir $E<K$

cumplen las siguientes condiciones:

1º) $\varphi(x_1)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden continuas en el intervalo considerado

2º) $\psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de tercero y segundo orden, respectivamente, continuas en el intervalo $\beta_1 < x_2 < \beta_2$ Dichas funciones verifican además las condiciones:

$$\varphi(x_1^0) = \psi(x_2^0); \quad \varphi'(x_1^0) = \chi(x_2^0)$$

2.- CURVAS CARACTERISTICAS.- Estas vienen dadas por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales:

$$\begin{cases} \varphi_{x_1} = 0 \\ \varphi_{x_2} = 0 \\ \varphi_{x_1} + \rho(x_1, x_2)\varphi_{x_2} = 0 \end{cases}$$

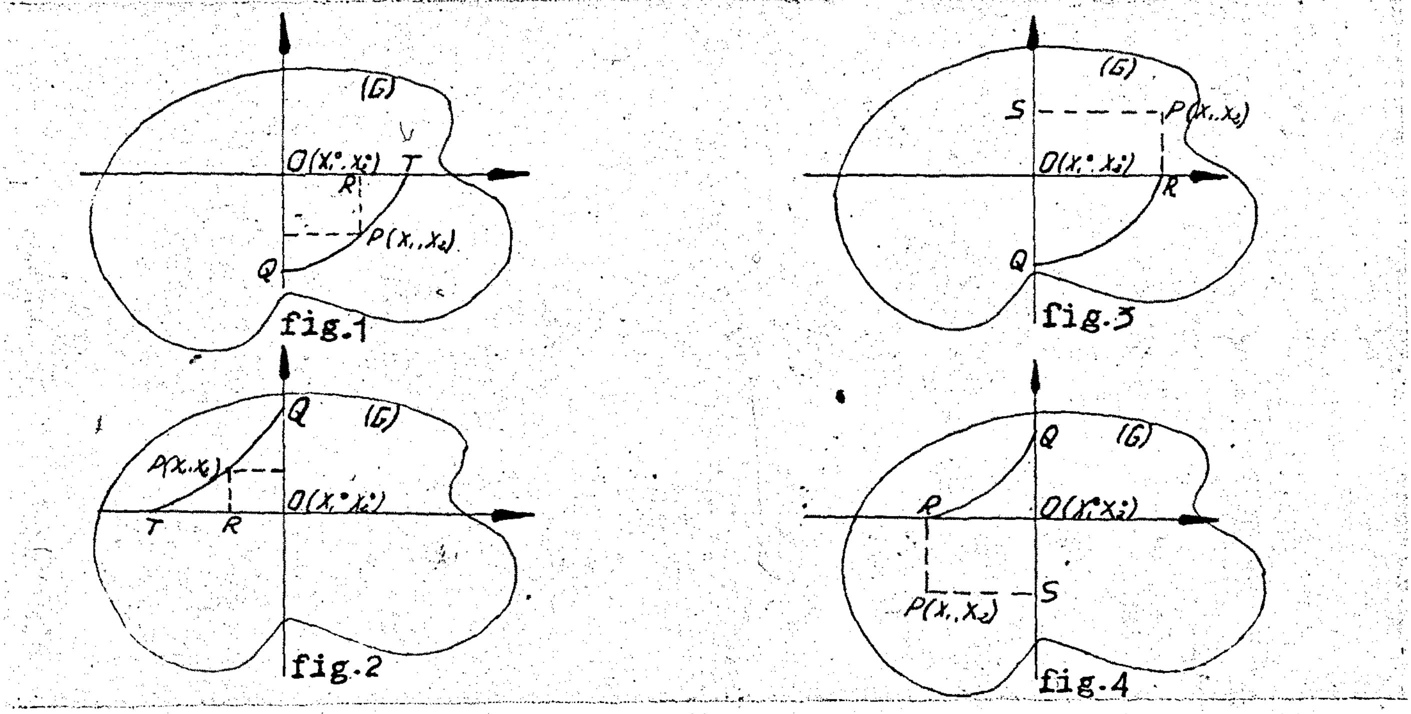
en que se descompone la expresión diferencial:

$$\varphi_{x_1}^2 \cdot \varphi_{x_2} + \rho(x_1, x_2) \cdot \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_2}^2 = 0$$

y cuyas caracteristicas, las constituyen las familias de curvas consideradas anteriormente (2. CAP. II):

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 = c_1 \\ (\beta) & x_2 = c_2 \\ (\gamma) & \lambda(x_1^0, x_1, x_2) = c_3 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

3.- DOMINIO DE DEPENDENCIA DE UN PUNTO P.- Definiremos el dominio de dependencia de un punto $P(x_1,x_2)$ de G, del mismo modo que en el capítulo anterior, es decir (supuesto P lo suficientemente próximo del origen para que se verifiquen las condi-



ciones allí exigidas (según que dicho punto pertenezca al 2º ó 4º cuadrante, o bien al 1º o 3er. cuadrante, el dominio de dependencia sobre $x_1=x_1^0$ estará constituído respectivamente por los segmentos OQ (Figs. 1 y 2) ó QS (Figs. 3 y 4) y sobre $x_2=x_2^0$ por el segmento O R determinado por el origen y por la proyección de P sobre $x_2=x_2^0$

4.- DETERMINACION DEL DOMINIO DE PROLONGACION.- Análogamente a cómo se hizo en el capítulo anterior, consideremos la correspondencia existente entre cada punto P de G y su región asociada, constituída por el triángulo mixtilíneo O Q T (supuesto P situado en el 2º ó 4º cuadrante) limitado por los ejes y por la característica del haz (γ) que pasa por él como se indica en la fig. 1, o por el trapecio mixtilíneo P R Q S (si P está situado en 1º ó 3er. cuadrante) limitado por los ejes y por las características de los haces (α) y (β) que pasan por él, así como por la característica del haz (γ) que pasa por R proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ (fig. 2).

Dadas las funciones $\psi(x_2)$ $\chi(x_2)$ sobre el segmento Q S del eje $x_1 = x_1^0$ y la $\varphi(x_1)$ sobre el segmento UR del eje $x_2 = x_2^0$ llamaremos dominio de prolongación D de dichos segmentos, al conjunto de puntos P, de G, tales que la correspondiente región asociada sea interior a G en sentido estricto, estando además contenidos en QS y UR los correspondientes dominios de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$ y $x_2 = x_2^0$ respectivamente. Dichos dominios de prolongación, tal como los hemos definido se indican en las figuras 5, 6 y 7 del capítulo anterior y corresponden a los mismos caso allí considerados, por lo que no insistiremos más sobre el particular, justificando más adelante tales definiciones.

Nos proponemos demostrar, por un método de aproximaciones sucesivas el siguiente:

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.- La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo dominio de prolongación D de dos segmentos cualesquiera de los ejes $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ (que contengan el origen) que satisface a las condiciones iniciales:

a) se convierte en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2^0$ es decir $u(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)$

b) en $\psi(x_1)$ para $x_1 = x_1^0$ o sea $u(x_1^0, x_2) \equiv \psi(x_2)$

c) su derivada parcial $u(x_1, x_2)$ se reduce a la función $\chi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$ es decir, $u_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$

Además esta solución es única.

5.- DEFINICION DE LAS APROXIMACIONES Y CALCULO DE LAS MISMAS.-

Consideremos las ecuaciones en derivadas parciales que siguen:

$$\left.\begin{aligned} & u^0_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u^0_{122} = g(x_1, x_2) \\ & u^n_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u^n_{122} = -\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u^{n-1}_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k u^{n-1}_k - c \cdot u^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

cuyas soluciones determinaremos por recurrencia del siguiente modo: la de la primera con las condiciones iniciales:

$$u^0(x_1^0, x_2) \equiv \psi(x_2)\,;\; u^0(x_1, x_2^0) \equiv \varphi(x_1)\,;\; u^0_1(x_1^0, x_2) \equiv \chi(x_2)$$

y las de las restantes ecuaciones con las condiciones

$$u^n(x_1^0, x_2) = u^n(x_1, x_2^0) = u^n_1(x_1^0, x_2) \equiv 0; \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dichas ecuaciones son del mismo tipo que la estudiada en el

Capítulo II, así como las condiciones iniciales impuestas a las mismas, por lo que en virtud de lo allí demostrado, las funciones u^u quedan perfectamente determinadas en todo dominio de prolongación construído de acuerdo con la definición que se acaba de dar en el número anterior.

Las fórmulas resolutivas que allí obtuvimos [(5ª del nº 5 y (7) del nº 9 CAP. II] son las mismas que nos expresarán las funciones $u^0(x_1,x_2)$ $u^u(x_1,x_2)$ $(u=1,2\ldots)$ es decir:

$$u^0(x_1,x_2)=\varphi(x_1)+\psi(x_2)-\varphi(x_1^0)+(x_1-x_1^0)\left[\chi(x_2)-\varphi'(x_1^0)\right]+\iint_{R(P)}\left\{\chi'\left[\lambda(x_1^0,\xi_1,\xi_2)\right]-\chi'(\xi_2)+\Phi(\xi_1,\xi_2)\right\}d\xi_1\,d\xi_2$$

en donde por brevedad representamos $\Phi^r(x_1,x_2)\equiv-\sum_{i,j=1,2}a_{ij}u^r_{ij}-\sum_{k=1,2}b_k u^r_k-c\cdot u^r$

Del mismo modo, las derivadas de las aproximaciones definidas por las ecuaciones (3) vendrán expresadas por fórmulas resolutivas similares a las obtenidas en los números, 6, 7 y 8 del capítulo anterior.

Por otra parte como se ha visto en dicho capítulo los dominios de dependencia y prolongación de tales aproximaciones son los definidos en los números 3 y 4.

6.- ACOTACION DE LAS APROXIMACIONES CORRESPONDIENTES A LOS INDICES n = 0, n = 1, Y DE SUS DERIVADAS PARCIALES.

Designando por H una cota superior en módulo de los coeficientes a_{ij}, b_k, c de las ecuaciones (3) y de las derivadas primeras de los mismos en (G), por M_o una cota superior de los módulos de $u^o(x_1,x_2)$ y sus derivadas parciales hasta las de tercer orden, cotas existentes siempre en todo dominio de prolongación por las hipótesis hechas al principio sobre los coeficientes a_{ij}, b_k, c y por la continuidad (que se comprueba inmediatamente mediante las correspondientes fórmulas resolutivas) de $u^o(x_1,x_2)$ y sus derivadas, resultan en primer lugar, las desigualdades válidas en todo el dominio de prolongación D:

$$\left|\Phi^o(x_1,x_2)\right| = \left|\sum_{i,j=1,2} a_{ij} u^o_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u^o_k + c u^o\right| \leq 6HM_o$$

$$\left|\Phi^o_{x_1}(x_1,x_2)\right| \leq \left|\sum_{i,j=1,2} a_{ij} u^o_{ij1} + \sum_{k=1,2} b_k u^o_{k1} + c u^o_1\right| + \left|\sum_{i,j=1,2} (a_{ij})_{x_1} u^o_{ij} + \sum_{k=1,2} (b_k)_{x_1} u^o_k + (c)_{x_1} u^o\right| \leq 12HM_o$$

y análogamente

$$\left|\Phi^o_{x_2}(x_1,x_2)\right| \leq 12\, HM_o$$

Antes de seguir adelante conviene que hagamos una consideración previa que nos facilitará la obtención de las cotas que pretendemos determinar. Observemos, que en virtud de las hipótesis efectuadas sobre $\rho(x_1,x_2)$ $(0<\rho(x_1,x_2)<h<1)$ para todo $P(x_1,x_2)$ de G, la posición de las curvas

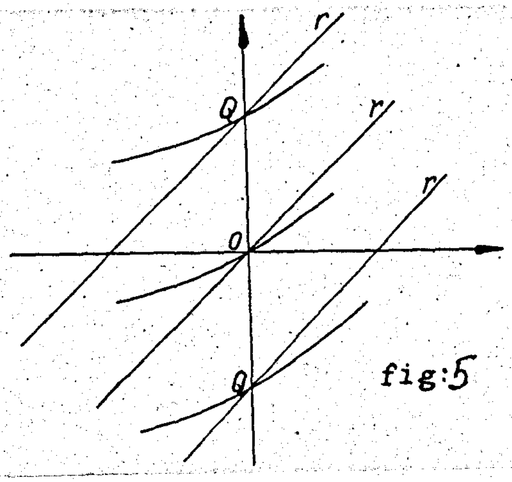


fig:5

características $\lambda(x_1^0, x_1, x_2) = G$ de la ecuación dada con respecto a la recta **r** de coeficiente angular 1 que pasa por el punto Q de intersección de tales características con el eje $x_1 = x_1^0$ es la que se representa en la fig. 5: es decir, la curva pasa de la izquierda a la derecha de la recta **r** al pasar por tal punto Q no volviendo a cortar más a dicha recta.

En efecto, la pendiente de la curva en Q, $\frac{dx_2}{dx_1} = p(x_1, x_2)$ es menor que la de la recta (r) y la curva no vuelve a cortar a la recta **r** en otro punto distinto del Q puesto que en caso contrario, en virtud del teorema de los incrementos finitos habría un punto P de la curva característica, en el cual la tangente a la misma sería paralela a la recta **r** es decir, de pendiente $p(P) = 1$ (fig. 6) contrariamente a la hipótesis.

De ahí se sigue, que para todo punto $P(x_1, x_2)$ fig. 7 de una de tales características, se verifica

$$|\xi| + |\eta| > |OQ| \quad ; (\text{con } \xi = x_1 - x_1^0 \; ; \; \eta = x_2 - x_2^0)$$

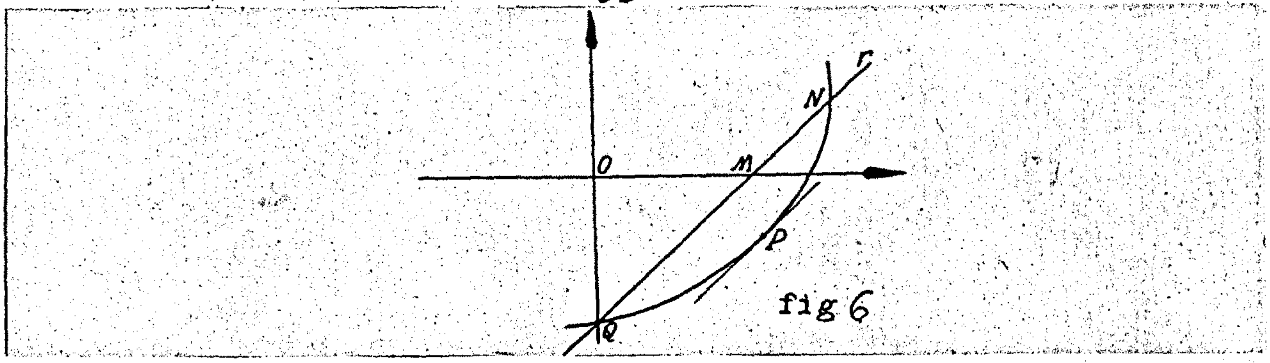


fig 6

Sentado esto, pasemos a calcular las cotas superiores de $U'(x_1, x_2)$ y sus derivadas.

Primeramente acotemos la integral curvilínea $\oint_{\ell(x_1,x_2)} \bar{\Phi}^0(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 = J\left[\bar{\Phi}^0(x_1,x_2)\right]$, que figura en las expresiones de las mismas, lo que conseguiremos fácilmente, reduciendo dicha integral curvilínea a integral definida ordinaria

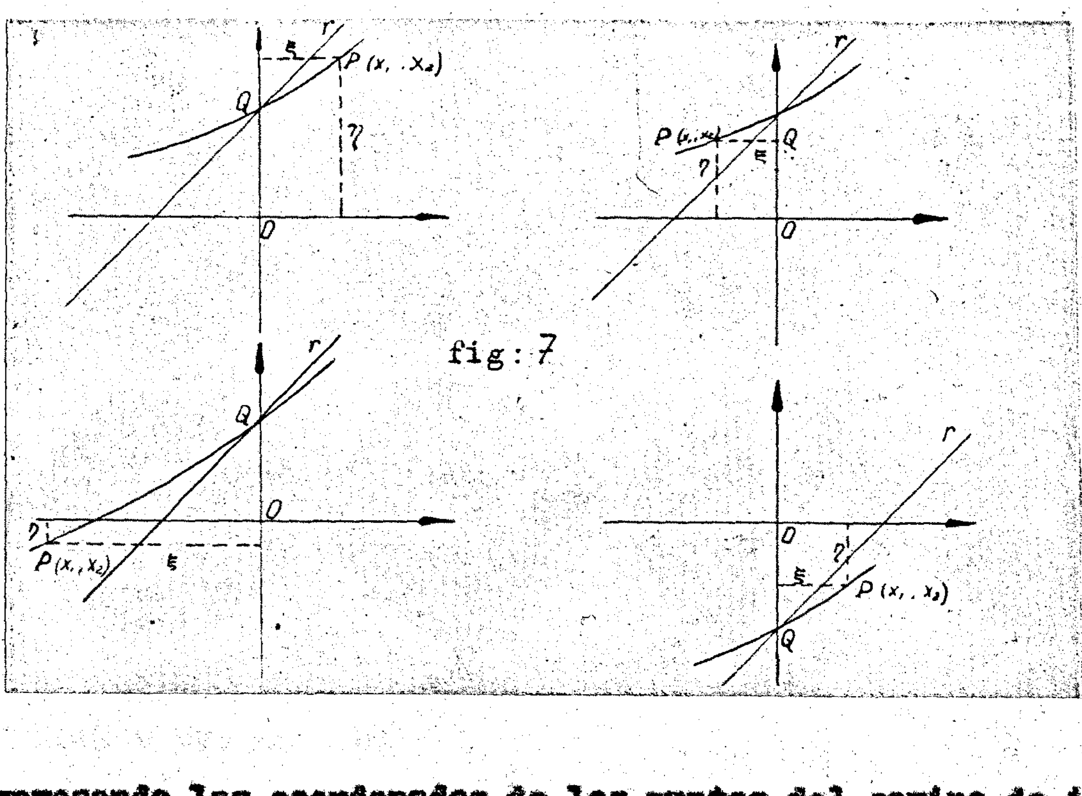


fig: 7

expresando las coordenadas de los puntos del camino de integración en función del parámetro $\mu = |\xi'|+|\eta'| = \xi'+\eta'$ resultando:

$$du = d\xi' + d\eta' = \left(1 + \frac{d\eta'}{d\xi'}\right) d\xi'$$

y teniendo en cuenta que en los arcos del camino de integración pertenecientes al 1º ó 3er. cuadrante se verifica respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1^0 + z = x_1^0 + z' \\ z_2 &= x_2^0 + y = x_2^0 + y' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} z_1 &= x_1^0 + z = x_1^0 - z' \\ z_2 &= x_2^0 + y = x_2^0 - y' \end{aligned}\right\}$$

y en ambos casos:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{dy'}{dz'} = \rho(x_1^0 \pm z'; x_2^0 \pm y')$$

(los signos superiores para el 1er. cuadrante y los inferiores para el 3º) mientras que en el 2º y 4º cuadrantes es respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1^0 + z = x_1^0 - z' \\ z_2 &= x_2^0 + y = x_2^0 - y' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} z_1 &= x_1^0 + z = x_1^0 + z' \\ z_2 &= x_2^0 + y = x_2^0 - y' \end{aligned}\right\}$$

y en los dos casos:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = -\frac{dy'}{dz'} = \rho(x_1^0 \mp z'; x_2^0 \pm y')$$

(Los signos superiores para el 2º cuadrante y los inferiores para el 4º) se obtiene en definitiva (habiendo designado por $\bar{\rho}(z', y')$ la transformada de $\rho(z_1, z_2)$ mediante el cambio procedente):

$$dz' = \frac{du}{1 \mp \bar{\rho}(z', y')}$$

tomando el signo $+$ ó el $-$ para $\bar{\rho}(z', y')$ según se considere el 1º ó

3ª cuadrante, o el 2ª ó 4ª cuadrante respectivamente)
Teniéndose en consecuencia (designando por $\bar{\Phi}^0(\xi',\eta')$ la transformada de $\Phi^0(\xi_1,\xi_2)$ por el cambio considerado).

$$\left|J(\Phi^0)\right| = \left|\oint_{L(x_1,x_2)} \Phi^0(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\right| = \left|\int_{u_0}^{u} \bar{\Phi}^0(\xi',\eta')\frac{du}{1\pm\bar{p}(\xi',\eta')}\right| < \frac{6HM_0}{1-h}\left[\frac{u}{1!}\right]_{u_0}^{u} = \frac{6HM_0}{1-h}\left[\frac{(\xi'+\eta')}{1!}-\frac{\overline{OQ}}{1!}\right] < \frac{6HM_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

puesto que

$$\left|\bar{\Phi}^0(\xi',\eta')\right| < 6HM_0;\quad \frac{1}{1\pm\bar{p}(\xi',\eta')} < \frac{1}{1-h};\quad \xi'+\eta' > |OQ|$$

según hemos visto anteriormente.

Y análogamente

$$\left|J\left[\Phi^0_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right| = \left|\oint_{L(x_1,x_2)} \Phi^0_{x_2}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\right| < \frac{12HM_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

Vamos ahora a demostrar el siguiente:

<u>**TEOREMA I:** La aproximación $u^1(x_1,x_2)$ y sus derivadas 1as. y 2as. admiten como cota superior $M_0K\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$ mientras que sus derivadas 1as. admiten la cota numérica $\bar{M}_0$ siendo K y $\bar{M}_0$ números positivos perfectamente definidos.</u>

En efecto, teniendo en cuenta la acotación que acabamos de obtener al aplicar el teorema de la media, resulta inmediatamente

$$\left|u^1(x_1,x_2)\right| = \left|\iint_{R(P)} J\left[\Phi^0(\xi_1,\xi_2)\right]d\xi_1 d\xi_2\right| < \int_0^{\xi'} d\xi_1' \int_0^{\eta'} \frac{6HM_0}{1-h}\,\frac{(\xi_1'+\xi_2')}{1!}\,d\xi_2' < \frac{6HM_0}{1-h}\,\frac{(\xi'+\eta')^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!} < \frac{6HM_0}{1-h}\,(\alpha+\beta)^{\alpha}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

siendo α y β los extremos superiores de las distancias de los puntos del contorno de G a los ejes $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ respectivamente.

Asímismo se obtendrá

$$\left|\mu_1^1(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

$$\left|\mu_2^1(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

Las cotas de las derivadas segundas (CAP.II pags. 40 y 42) son las siguientes (en las que L designa una cota superior de los módulos de $\rho(x_1,x_2)$, $\frac{1}{\rho(x_1,x_2)}$ y de sus derivadas primeras y segundas en G):

$$\left|\mu_{11}^1(x_1,x_2)\right| < 12L\frac{HM_0}{1-h}\cdot\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!} + 6L\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!} + 6HM_0\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

ya que:

$$\left|\left[\rho(x_1,x_2)\,J(\Phi)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| \leq \left|\rho(x_1,x_2^0)\right|\cdot\left|J[\Phi^0(x_1,x_2^0)]\right| + \left|\rho(x_1,x_2)\right|\cdot\left|J[\Phi^0(x_1,x_2)]\right| < 12L\frac{HM_0}{1-h}\cdot\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\rho_{x_2}(x_1,\mathfrak{z}_2)\cdot J[\Phi^0(x_1,\mathfrak{z}_2)]\,d\mathfrak{z}_2\right| < \frac{6LHM_0}{1-h}\int_0^{\mathfrak{h}'}\frac{\mathfrak{z}_1'+\mathfrak{z}_2'}{1!}\,d\mathfrak{z}_2' \leq \frac{6LHM_0}{1-h}\,\frac{(\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}')^2}{2!} < \frac{6LHM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi^0(x_1,\mathfrak{z}_2)\,d\mathfrak{z}_2\right| < 6HM_0\int_0^{\mathfrak{h}'}d\mathfrak{z}_2' = 6HM_0\frac{\mathfrak{h}'}{1!} \leq 6HM_0\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

y análogamente

$$\left|\mu_{12}^1(x_1,x_2)\right| = \left|J(\Phi^0)\right| < \frac{6HM_0}{1-h}\cdot\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

$$\left|\mu_{22}^1(x_1,x_2)\right| < 6LHM_0\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]\frac{\mathfrak{z}'+\mathfrak{h}'}{1!}$$

El cálculo de las cotas de las derivadas terceras, presenta más complicación, por lo que procederemos a acotar separadamente los diversos términos que las componen.

Para ello teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas $J_{x_1}(\Phi)$ y $J_{x_2}(\Phi)$ (Nº 8 CAP. II) se deduce

$$|J_{x_1}(\Phi^0)| < 6HM_0\left[1+\frac{2L\cdot\exp\{2L\alpha\}}{1-h}(\alpha+\beta)\right]; \quad |J_{x_2}(\Phi^0)| < 12\exp\{2L\alpha\}\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

(pues : $\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} f_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]dt\right\} < \exp\left\{\left|\int_{x_1}^{x_1^0} L\,dt\right|\right\} < \exp\{L\alpha\}$;

$$\exp\{J[f_{x_2}(x_1,x_2)]\} < \exp\{L\alpha\}; \text{ y } |J(\Phi^0_{x_2})| < \frac{12HM_0}{1-h}\frac{3^1 h^{\prime}}{1!} < \frac{12HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

como acabamos de ver)

con lo que se obtienen para los términos componentes de la derivada $\mu'_{11}(x_1,x_2)$ (nº 8 CAP. II) las acotaciones:

$$\left|\left[f_{x_1}(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12L\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

$$\left|\left[f(x_1,x_2)\cdot J_{x_1}(\Phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12LHM_0 + 24L^2\exp\{2L\alpha\}\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{f_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J[\Phi^0(x_1,\xi_2)]\right\}_{x_1}d\xi_2\right| < 6L\,HM_0(\alpha+\beta)\left[1+(\alpha+\beta)\frac{2L\exp\{2L\alpha\}+1}{1-h}\right]$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi^0_{x_1}(x_1,\xi_2)d\xi_2\right| < 12\,HM_0\,(\alpha+\beta)$$

Análogamente

$$|\mu'_{112}(x_1,x_2)| < 6HM_0\left[\frac{2L(\alpha+\beta)\cdot\exp\{2L\alpha\}}{1-h}+1\right]$$

$$|\mu'_{122}(x_1,x_2)| < 12\exp\{2L\alpha\}\cdot\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

y finalmente para $\mu'_{222}(x_1,x_2)$ procederemos igual que hemos hecho con $\mu'_{111}(x_1,x_2)$ a acotar separadamente sus diversos términos:

$$\left|\frac{f_{x_1}(x_1,x_2)}{f^2(x_1,x_2)}J(\Phi^0)\right| = \left|\left[\frac{1}{f(x_1,x_2)}\right]_{x_1}\cdot J[\Phi^0(x_1,x_2)]\right| < 6LH\frac{M_0}{1-h}(3^4h^{\prime}) < 6L\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta);$$

$$\left|\frac{1}{f(x_1,x_2)}\cdot J_{x_2}[\Phi^0(x_1,x_2)]\right| < 12L\exp.\{2L\alpha\}\cdot\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta);$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{f_{x_1}(\xi_1,x_2)}{f^2(\xi_1,x_2)}\cdot J[\Phi^0(\xi_1,x_2)]\right]_{x_2}d\xi_1\right| < 6L\frac{HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)^2\left[1+2L\cdot\exp\{2L\alpha\}\right];$$

y análogamente

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^0(\xi_1, x_2)}{\rho(\xi_1, x_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 \right| < 18 \cdot L \cdot H M_0 (a+b)$$

Si ahora designamos por K el mayor de los factores que multiplican a $M_0 \frac{\xi'+b'}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, resultará en definitiva como cota superior común de las mismas, la $M_0 K \frac{\xi'+b'}{1!}$ y si $\overline{M_0}$ expresa el máximo de M_0 y de las cotas numéricas halladas para las derivadas terceras de $u^1(x_1, x_2)$ una cota común de dichas derivadas terceras es $\overline{M_0}$

El teorema resulta así, pues demostrado

7.- ACOTACION DE LA APROXIMACION CORRESPONDIENTE A n = 2 Y SUS DERIVADAS PARCIALES.-

TEOREMA II.- Una cota superior de $u^2(x_1, x_2)$ y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. es de la forma $M_0 K^2 \frac{(\xi'+b')^2}{2!}$ las derivadas 3ªs admiten como cota superior $\overline{M_0}\, \overline{K} \frac{\xi'+b'}{1!}$ siendo $\overline{K}$ un número positivo perfectamente definido.

En efecto, análogamente al caso n = 1 tendremos:

$$\left| \Phi^1(x_1, x_2) \right| = \left| \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u^1_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u^1_k + c u^1 \right| < 6 H M_0 K \frac{\xi'+b'}{1!}$$

$$\left|\Phi'_{x_1}(x_1,x_2)\right| \leq \left|\sum a_{ij}\, u'_{ij,1} + \sum b_k u'_{k,1} + c u'_1\right| + \left|\sum (a_{ij})_{x_1} u'_{ij} + \sum (b_k)_{x_1} u'_k + (c)_{x_1} u\right| < 9HMK(\alpha+\beta) + 3H\bar{M}_0$$

de la misma manera:

$$\left|\Phi'_{x_2}(x_1,x_2)\right| < 9HM_0K(\alpha+\beta) + 3H\bar{M}_0$$

y además:

$$\left|J(\Phi')\right| = \left|\int_{u_0}^{u} \Phi'(\xi', \eta') \frac{du}{1 \pm p(\xi',\eta')}\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\int_{u_0}^{u}\frac{u}{1!}\,du < \frac{6HM_0}{1-h} K \cdot \frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$\left|J(\Phi'_{x_2})\right| < \frac{9HM_0K}{1-h}\int_{u_0}^{u}\frac{u}{1!}\,du + \frac{3H\bar{M}_0}{1-h}\int_{u_0}^{u} du < \frac{9HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{\xi'+\eta'}{1!} + \frac{3H\bar{M}_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

así como:

$$\left|J_{x_1}(\Phi')\right| < 6HM_0K\frac{\xi'+\eta'}{1!} + 9l(\alpha+\beta)\exp\{2l\alpha\}\frac{HM_0K}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!} + 3l\exp\{2l\alpha\}\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

$$\left|J_{x_2}(\Phi')\right| < 9(\alpha+\beta)\exp\{2l\alpha\}\frac{HM_0K}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!} + 3\exp\{2l\alpha\}\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{1!}$$

Las cotas superiores de $u^2(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras son por consiguiente:

$$\left|u^2(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\int_0^{\eta'} d\xi'_2 \int_0^{\xi'} \frac{(\xi'_1+\xi'_2)^2}{2!}\,d\xi'_1 < \frac{6HM_0K}{1-h}\,\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}\,\frac{(\xi'+\eta')^2}{3.4} < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)^2\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$\left|u^2_1(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\int_0^{\eta'}\frac{(\xi'_1+\xi'_2)^2}{2!}\,d\xi'_2 < \frac{6HM_0K}{1-h}\,\frac{\xi'+\eta'}{3}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!} < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

$$\left|u^2_2(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\int_0^{\xi'}\frac{(\xi'_1+\xi'_2)^2}{2!}\,d\xi'_1 < \frac{6HM_0K}{1-h}\,\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}\,\frac{\xi'+\eta'}{3} < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$$

Para las derivadas segundas, resultan las cotas:

$$\left| u^2_{11}(x_1,x_2) \right| < 6HM_0\left[L\cdot\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]\cdot K\cdot\frac{(\zeta'+b')^2}{2!}$$

puesto que

$$\left|\left[P(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^1)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12\frac{LHM_0}{1-h}\cdot K\cdot\frac{(\zeta'+b')^2}{2!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2} P_{x_2}(x_1,\zeta_2)\cdot J\left[\Phi^1(x_1,\zeta_2)\right]d\zeta_2\right| < \frac{6LM_0KH}{1-h}\int_0^{b'}\frac{(\zeta'_1+\zeta'_2)^2}{2!}\,d\zeta'_2 < \frac{6LM_0KH}{1-h}\frac{(\zeta'+b')^3}{3!} < \frac{6LHM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot K\,\frac{(\zeta'+b')^2}{2!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi^1(x_1,\zeta_2)\,d\zeta_2\right| < 6HM_0K\int_0^{b'}\frac{\zeta'_1+\zeta'_2}{1!}\,d\zeta'_2 < 6HM_0K\,\frac{(\zeta'+b')^2}{2!}$$

y análogamente

$$\left|u^2_{12}(x_1,x_2)\right| = \left|J(\Phi^1)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\;\frac{(\zeta'+b')^2}{2!}$$

$$\left|u^2_{22}(x_1,x_2)\right| < 6LHM_0\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]\cdot K\cdot\frac{(\zeta'+b')^2}{2!}$$

Para el cálculo de las cotas de las derivadas terceras, previamente procederemos, igual que hicimos en el caso $n = 1$ a acotar separadamente sus diversos términos componentes.

Así para $u^2_{111}(x_1,x_2)$ tendremos:

$$\left|\left[P_{x_1}(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^1)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < \frac{12HL(\alpha+\beta)}{1-h}\,\bar{M}_0\cdot K\,\frac{\zeta'+b'}{1!}$$

$$\left|\left[P(x_1,x_2)\cdot J_{x_1}(\Phi^1)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 6LH\bar{M}_0\left[2K+L\cdot\exp\cdot\{2L\alpha\}\,\frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-h}\right]\cdot\frac{\zeta'+b'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{P_{x_2}(x_1,\zeta_2)\cdot J\left[\Phi^1(x_1,\zeta_2)\right]\right\}_{x_1}d\zeta_2\right| < 3LH\bar{M}_0(\alpha+\beta)\left[\frac{2K(\alpha+\beta)+L\cdot\exp\{2L\alpha\}\cdot\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]}{1-h}+2K(\alpha+\beta)\right]\cdot\frac{\zeta'+b'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi_{x_1}(x_1,\zeta_2)\,d\zeta_2\right| < 3H\bar{M}_0\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\frac{\zeta'+b'}{1!}$$

Análogamente

$$\left|u^2_{112}(x_1,x_2)\right| < 3HM_0\left[2K + L\exp\{2L\alpha\}\frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-h}\right]\frac{3'h'}{1!}$$

$$\left|u^2_{122}(x_1,x_2)\right| < 3\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\exp\{2L\alpha\}\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\frac{3'h'}{1!}$$

y finalmente las cotas de los diversos términos de $u^2_{222}(x_1,x_2)$ son las siguientes:

$$\left|\frac{\rho_{x_2}(x_1,x_2)}{\rho^2(x_1,x_2)}\cdot J(\phi^1)\right| = \left|\left[\frac{1}{\rho(x_1,x_2)}\right]_{x_2}\cdot J(\phi^1)\right| < 6L\frac{H\bar{M}_0}{1-h}K(\alpha+\beta)\cdot\frac{3'h'}{1!}$$

$$\left|\frac{1}{\rho(x_1,x_2)}J(\phi^1)\right| < 3L\exp\{2L\alpha\}\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\frac{3'h'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J[\phi^1(\xi_1,x_2)]\right]_{x_2}d\xi_1\right| < 3L(\alpha+\beta)\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\left[2K(\alpha+\beta)+\exp\{2L\alpha\}\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\right]\frac{3'h'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\phi^1(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right]_{x_2}d\xi_1\right| < 3LH\bar{M}_0\left[5K(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\frac{3'h'}{1!}$$

(En todas las cotas obtenidas para las derivadas terceras hemos sustituído M_0 por $\bar{M}_0$).

Teniendo en cuenta el significado de $\underline{K}$ resulta como cota superior de $u^2(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la $M_0K^2\frac{(3'h')^2}{2!}$ y si $\bar{K}$ designa el máximo de K y de los factores que multiplican a $\bar{M}_0\frac{3'h'}{1!}$

en las expresiones de las cotas que hemos obtenido para las derivadas terceras de $u^2(x_1,x_2)$, una cota superior de estas últimas, será la $M_0 K \cdot \frac{3'+b'}{1!}$ con la que el teorema resulta así demostrado.

~~Cota superior de las derivadas terceras de~~

8.- ACOTACION DE LAS RESTANTES APROXIMACIONES Y SUS DERIVADAS PARCIALES.- Generalicemos los resultados anteriores demostrando: TEOREMA III: La (n + 1) -ésima aproximación $u^n(x_1,x_2)$ así como sus derivadas parciales primeras y segundas, admiten por cota superior la $M_0 K^n \frac{(3'+b')^n}{n!}$ y una cota superior de sus derivadas terceras es de la forma $M_0 K^{n-1}\frac{(3'+b')^{n-1}}{(n-1)!}$

Para probarlo procederemos por inducción completa; si suponemos que la hipótesis es cierta para la aproximación $u^n(x_1,x_2)$ y sus derivadas, tendremos en primer lugar, como consecuencia las desigualdades:

$$\left|\Phi^{n-1}(x_1,x_2)\right| = \left|\sum_{ij=1,2} a_{ij} u^{n-1}_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u^{n-1}_k + c u^{n-1}\right| < 6H \cdot M_0 K^{n-1}\frac{(3'+b')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\Phi^{n-1}_{x_1}(x_1,x_2)\right| \leq \left|\sum_{ij=1,2} a_{ij} u^{n-1}_{ij1} + \sum_{k=1,2} b_k u^{n-1}_{k1} + c u^{n-1}_1\right| + \left|\sum_{ij=1,2} (a_{ij})_{x_1} u^{n-1}_{ij} + \sum_{k=1,2} (b_k)_{x_1} u^{n-1}_k + (c)_{x_1} u^{n-1}\right| < 3H\left[3M_0 K^{n-1}(\alpha+\Delta) + \bar{M}_0 \bar{K}^{n-2}\right]\frac{(3'+b')^{n-2}}{(n-2)!}$$

de la misma manera:

$$\left|\Phi^{n-1}_{x_2}(x_1,x_2)\right| < 3H\left[3M_0 K^{n-1}(\alpha+\Delta) + \bar{M}_0 \bar{K}^{n-2}\right]\frac{(3'+b')^{n-2}}{(n-2)!}$$

y asimismo

$$\left|J\left[\Phi^{n-1}(x_1,x_2)\right]\right| = \left|\int_{u_0}^{u} \bar{\Phi}^{n-1}(\xi_1',\eta')\cdot\frac{du}{1\pm f(\xi_1',\eta')}\right| < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_{u_0}^{u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}du < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\ \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|J(\Phi^{n-1}_{x_2})\right| < \frac{9HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_{u_0}^{u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,du + \frac{3H\bar{M}_0\bar{K}^{n-2}}{1-h}\int_{u_0}^{u}\frac{u^{n-2}}{(n-2)!}\,du < \frac{3H}{1-h}\left[3M_0K^{n-1}(\alpha+\beta)+\bar{M}_0\bar{K}^{n-2}\right]\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como:

$$\left|J_{x_1}(\Phi^{n-1})\right| < 3H\left[2M_0K^{n-1}+L\exp\{2L\alpha\}\frac{3M_0K^{n-1}(\alpha+\beta)+\bar{M}_0\bar{K}^{n-2}}{1-h}\right]\ \frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|J_{x_2}(\Phi^{n-1})\right| < 3H\,\frac{\exp\{2L\alpha\}}{1-h}\left[3M_0K^{n-1}(\alpha+\beta)+\bar{M}_0\bar{K}^{n-2}\right]\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

con lo que se obtendrán como cotas superiores de $u^n(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras las siguientes:

$$\left|u^n(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\eta'}d\xi_2'\int_0^{\xi'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^n}{n!}d\xi_1' < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^2}{(n+1)(n+2)}\ \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!} < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}(\alpha+\beta)^2\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|u^n_1(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\eta'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^n}{n!}\,d\xi_2' < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')}{n+1}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!} < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|u^n_2(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\xi'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^n}{n!}\,d\xi_1' < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot\frac{\xi'+\eta'}{n+1}\ \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!} < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

y para las derivadas segundas, resultan las cotas:

$$\left|u^n_{11}(x_1,x_2)\right| < 6HM_0\left[\frac{2+\alpha+\beta}{1-h}L+1\right]K^{n-1}\ \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

ya que:

$$\left|\left[p(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12L\frac{HM_0K^{n-1}}{1-h}\ \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}p_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]d\xi_2\right| < 6L\frac{HM_0K^{n-1}}{1-h}\int_0^{\eta'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^n}{n!} < 6L\frac{HM_0K^{n-1}}{1-h}(\alpha+\beta)\ \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\bar{\Phi}^{n-1}(x_1,\xi_2)d\xi_2\right| < 6HM_0K^{n-1}\int_0^{\eta'}\frac{(\xi_1'+\xi_2')^{n-1}}{(n-1)!}\cdot d\xi_2' < 6H\cdot M_0\cdot K^{n-1}\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

del mismo modo:

$$\left|\mu^n_{12}(x_1,x_2)\right| = \left|J(\Phi^{n-1})\right| < \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

$$\left|\mu^n_{22}(x_1,x_2)\right| < 6LH\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]M_0K^{n-1}\frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$$

Para calculas las cotas de las derivadas terceras, acotaremos por separado, cada uno de los términos que las componen.

Así para $\mu^n_{111}(x_1,x_2)$ obtendríamos

$$\left|\left[\rho_{x_1}(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12L\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\cdot K(\alpha+\beta)\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\left\{\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right\}_{x_2}^{x_2^0}\right| < 6LH\bar{M}_0\left[2K+L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-h}\right]\bar{K}^{n-2}\cdot\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{\rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]\right\}_{x_1}d\xi_2\right| < 3LH\bar{M}_0\left[\frac{L\cdot\exp\{2L\alpha\}\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]+2K\cdot(\alpha+\beta)}{1-h}+2K(\alpha+\beta)\right](\alpha+\beta)\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi^{n-1}_{x_2}(x_1,\xi_2)\,d\xi_2\right| < 3H\bar{M}_0\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

Análogamente:

$$\left|\mu^n_{112}(x_1,x_2)\right| < 3H\bar{M}_0\left[2K+L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-h}\right]\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\mu^n_{122}(x_1,x_2)\right| < \frac{3H\bar{M}_0}{1-h}\cdot\exp\{2L\alpha\}\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

y las cotas que obtenemos por los términos que componen $\mu^n_{222}(x_1,x_2)$ son:

$$\left|\frac{\rho_{x_1}(x_1,x_2)}{\rho^2(x_1,x_2)}\cdot J(\Phi^{n-1})\right| < 6L\frac{H\bar{M}_0}{1-h}K(\alpha+\beta)\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\frac{1}{\rho(x_1,x_2)}\cdot J_{x_2}(\Phi^{n-1})\right| < 3L\exp\{2L\alpha\}\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(x_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)\right]\right]_{x_2}d\xi_1\right| < 3L(\alpha+\beta)\frac{H\bar{M}_0}{1-h}\left[2K(\alpha+\beta)+\exp\{2L\alpha\}\cdot\left[3K(\alpha+\beta)+1\right]\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\phi^{n-1}(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right]_{x_2}\cdot d\xi_1\right| < 3LH\bar{M}_0\left[5K(\alpha+\beta)+1\right]\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

(En las cotas obtenidas para las derivadas terceras se ha sustituído M_0 por $\bar{M}_0$)

Recordando el significado de K y $\bar{K}$ resulta como cota superior de $u^{n}(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la $M_0 K^n \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$ y como cota de las derivadas terceras la $\bar{M}_0\,\bar{K}^{n-1}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$

Como para $n = 3$, se verifican las hipótesis del teorema III, según el teorema II, queda pues demostrado lo que se pretendía.

9.- CONSTRUCCION DE LA SOLUCION AL PROBLEMA DE CAUCHY.

Consideremos ahora las series:

$$\sum_{r=0}^{\infty} u^r \quad ; \sum_{\substack{r=0\\k=1,2}}^{\infty} u_k^r \quad ; \sum_{\substack{r=0\\i,j=1,2}}^{\infty} u_{ij}^r \quad ; \sum_{\substack{r=0\\i,j=1,2}}^{\infty} u_{ijk}^r \quad ; \sum_{r=0}^{\infty}\phi^r$$

De las cuales las seis primeras admiten en todo el dominio de prolongación D, la serie numérica mayorante de términos positivos y convergentes

$$M_0\sum_{r=0}^{\infty}\frac{K^r(\alpha+\beta)^r}{r!} = M_0\, e^{K(\alpha+\beta)}$$

las cuatro siguientes la:

$$M_0+\bar{M}_0\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\bar{K}^r\frac{(\alpha+\beta)^r}{r!} = M_0+\bar{M}_0\cdot e^{\bar{K}(\alpha+\beta)}$$

y la última, la serie numérica convergente de términos positivos:

$$6HM_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{K^{\nu}\cdot(\nu+\beta)^{\nu}}{\nu!} = 6HM_0\, e^{K(\nu+\beta)}$$

por lo que en D la convergencia de las series (4) será absoluta y uniforme.

La primera de dichas series definirá pues una función en D $u(x_1,x_2)$ cuyas derivadas parciales hasta las de tercer orden, vendrán expresadas por las sumas de las restantes series de (4), excluída la última.

En virtud de las fórmulas resolutivas que expresan las funciones $S^0_1, S^1_1, S^2_1 \ldots, S^n_1, \ldots$ se puede escribir:

$$\sum_{\nu=0}^{n} S^{\nu} = \mathcal{X}'[\lambda(x_1^0,x_1,x_2)] + J[g(x_1,x_2)] + \sum_{\nu=0}^{n-1} J[\Phi^{\nu}(x_1,x_2)]$$

De esta igualdad, teniendo en cuenta la linealidad del operador J, y la convergencia uniforme en D de la sucesión de funciones: $V_n(x_1,x_2) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Phi^{\nu}(x_1,x_2)$ y poniendo:

$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} S^{\nu}$ se deduce por paso al límite esta otra:

$$S(x_1,x_2) = \mathcal{X}'[\lambda(x_1^0,x_1,x_2)] + J[g(x_1,x_2)] + J[\Phi(x_1,x_2)] \qquad (5)$$

En la que se ha designado por $\Phi(x_1,x_2)$ la expresión:

$$-\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k u_k - c\cdot u$$

resultante del paso al límite

De (5) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} u_{112} = S_1 &= -\rho(x_1,x_2)\cdot \mathcal{X}''[\lambda(x_1^\circ,x_1,x_2)]\cdot \exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^\circ} \rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]\,dt\right\} + J_{x_1}[g(x_1,x_2)] + J_{x_1}[\Phi(x_1,x_2)] \\ u_{122} = S_2 &= \mathcal{X}''[\lambda(x_1^\circ,x_1,x_2)]\cdot \exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^\circ} \rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]\,dt\right\} + J_{x_2}[g(x_1,x_2)] + J_{x_2}[\Phi(x_1,x_2)] \end{aligned}\right\}$$

y de estas últimas $\left(\text{habida cuenta que } J_{x_1}(F) + \rho(x_1,x_2) J_{x_2}(F) \equiv F \right)$

$$u_{122} + \rho(x_1,x_2) = \Phi(x_1,x_2) + g(x_1,x_2)$$

es decir, en definitiva

$$u_{112} + \rho(x_1,x_2) u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u_k + c\cdot u = g(x_1,x_2)$$

y esta igualdad demuestra que la función $u(x_1,x_2)$ definida mediante la primera de las series (5) satisface idénticamente en todo el dominio de prolongación D definido de acuerdo con el nº 4, a la ecuación en derivadas parciales propuesta. Cumple, además, como se verifica inmediatamente, las condiciones iniciales de convertirse en $\varphi(x_1)$ para $x_1 = x_2^\circ$ en $\psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^\circ$ y en reducirse su derivada parcial $u_1(x_1,x_2)$ a la función $\mathcal{X}(x_2)$ para $x_1 = x_1^\circ$

La función $u(x_1,x_2)$ así construída, es pues, la solución al problema de Cauchy considerado, y la unicidad de la misma se demuestra en el número siguiente.

10.- UNICIDAD DE LA SOLUCION. Demostremos ahora la unicidad de la solución y que el problema de Cauchy es adecuado a la ecuación dada. Para lo primero si $\bar{u}(x_1,x_2)$ fuese otra solución continua y admitiendo derivadas parciales hasta las de 3er. orden (siendo asímismo continuas las derivadas primeras y segundas), que sea solución de la ecuación (1) cumpliendo las condiciones iniciales

$$\bar{u}(x_1,x_2^0)\equiv\varphi(x_1);\ \bar{u}(x_1^0,x_2)\equiv\psi(x_2);\ \bar{u}_1(x_1^0,x_2)\equiv\chi(x_2)$$

la función $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-\bar{u}(x_1,x_2)$ satisfará evidentemente a la ecuación en derivadas parciales

$$u_{112}+\rho(x_1,x_2)\,u_{122}=\bar{\bar{\Phi}}(x_1,x_2) \quad (6) \quad \left(\text{con } \bar{\bar{\Phi}}(x_1,x_2)=-\sum_{i,j=1,2}a_{ij}\bar{\bar{u}}_{ij}-\sum_{K=1,2}b_K\bar{\bar{u}}_K-c\cdot u\right)$$

verificando las condiciones

$$\bar{\bar{u}}(x_1^0,x_2)=\bar{\bar{u}}(x_1,x_2^0)=\bar{\bar{u}}_1(x_1^0,x_2)=0$$

Dicha ecuación (6) es del tipo de las estudiadas en el CAP. II por lo que la solución de la misma con las condiciones iniciales exigidas y sus derivadas parciales primeras y segundas vendrán expresadas por las misma fórmulas resolutivas que allí se obtuvieron (Nºs. 5, 6, y 7 de dicho Capítulo).

Si $\bar{\bar{M}}_0$ es una cota superior en $\mathcal{G}$ de $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ y de sus derivadas primeras y segundas, se tendrá como consecuencia de las fórmulas que expresan las mismas y razonando de un modo idéntico, a como lo hicimos en el nº 6, teorema II, la cota $\bar{\bar{M}}_0 K\cdot\frac{3^1 h^1}{1!}$ común a $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, teniendo K el mismo significado que allí.

Sustituyendo las funciones subintegrales por las cotas respectivas, se obtiene de nuevo para $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ y sus derivadas parciales hasta las de segundo orden, la cota superior $\bar{\bar{M}}_0 K^2 \frac{(3'+b')^2}{2!}$

Y así sucesivamente, obteniéndose en general, como se demostraría fácilmente por inducción y de manera enteramente análoga a como se hizo anteriormente, la cota superior, común a $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ y sus derivadas $\bar{\bar{M}}_0 K^n \frac{(3'+b')^n}{n!}$ válida en todo dominio de prolongación D común a ambas funciones $u(x_1,x_2)$ y $\bar{u}(x_1,x_2)$; y al ser n cualquiera, y ser por otra parte $3'+b' < \alpha+\beta$; $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, serán menores en valor absoluto que cualquier número positivo prefijado al arbitrio, por lo que en dicho dominio de prolongación serán nulas idénticamente, es decir: $\bar{u}(x_1,x_2) \equiv u(x_1,x_2)$

Probada la existencia y unicidad de la solución de (1) sólo nos resta demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para asegurar que el problema es apropiado a la ecuación dada. Esto se comprueba teniendo presente que la serie que define $u(x_1,x_2)$ es uniformemente convergente en todo el dominio de prolongación D respecto a las condiciones iniciales consideradas como variables, por lo que, habida cuenta de la dependencia continua respecto de ellas de las aproximaciones $u^n(x_1, x_2)$ (que constituyen los términos de dicha serie) en todo el dominio D la solución $u(x_1, x_2)$ definida por esta serie dependerá, por tanto de un modo continuo respecto de las condiciones iniciales como pretendíamos demostrar.

CAPITULO IV

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION CUASI LINEAL DE TIPO HIPERBOLICO: $u_{112}+\rho(x_1,x_2)u_{122}=f(x_1,x_2,u,u_k,u_{ij})$

1.- POSICION DEL PROBLEMA:

Dada la ecuación cuasi lineal:

$$u_{112}+\rho(x_1,x_2)\,u_{122}=f(x_1,x_2,u,u_k,u_{ij}) \quad (1)$$

en la que $f(x_1,x_2;u,u_k,u_{ij})$ es una función continua de sus argumentos, con derivadas parciales primeras respecto de todos ellos, asimismo continuas en un cierto recinto abierto conexo y acotado $\mathcal{P}_8$ del espacio E_8 constituído por los puntos de coordenadas $x_1,x_2,u,u_1,u_2,u_{11},u_{12},u_{22}$ y tal que sus derivadas 1as. satisfacen a sendas desigualdades de Lipschitz respecto a u,u_k,u_{ij} en $\mathcal{P}_8$; y $\rho(x_1,x_2)$ una función continua que no se anula en el dominio $\mathcal{G}$ proyección de $\mathcal{P}_8$ en Ox_1x_2 es decir, de signo constante en el mismo (signo que siempre se puede suponer positivo 1.- CAP.II) cuyos valores se mantienen inferiores a un cierto número $\mu<1$ (1.- CAP. III) y que admite derivadas parciales primeras y segundas continuas.

Sea $O(x_1^0,x_2^0,u^0,u_k^0,u_{ij}^0)$ un punto interior de $\mathcal{P}_8$ y:

$$x_1^0-a<x_1<x_1^0+a;\; x_2^0-b<x_2<x_2^0+b;\; u^0-l<u<u^0+l$$

$$u_k^0-l_k<u_k<u_k^0+l_k \;(k=1,2)\;;\; u_{ij}^0-l_{ij}<u_{ij}<u_{ij}^0+l_{ij} \;(i,j=1,2)$$

los intervalos abiertos (simétricos respecto a 0) interiores a (P_8) determinados en el mismo por los ejes correspondientes; sean $\varphi(x_1)$; $\psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ tres funciones que cumplen las siguientes condiciones:

1º) $\varphi(x_1)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden continuas en el intervalo $x_1^0 - a < x_1 < x_1^0 + a$ considerado.

2º) $\psi(x_2)$ y $\chi(x_2)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de tercero y segundo orden respectivamente, continuas en el intervalo $x_2^0 - b < x_2 < x_2^0 + b$

Dichas funciones verifican además las condiciones

$$\varphi(x_1^0) = \psi(x_2^0) = u^0;\ \varphi'(x_1^0) = \chi(x_2^0) = u_1^0;\ \psi'(x_2^0) = u_2^0;\ \varphi''(x_1^0) = u_{11}^0;$$

$$\chi'(x_2^0) = u_{12}^0;\ \psi''(x_2^0) = u_{22}^0$$

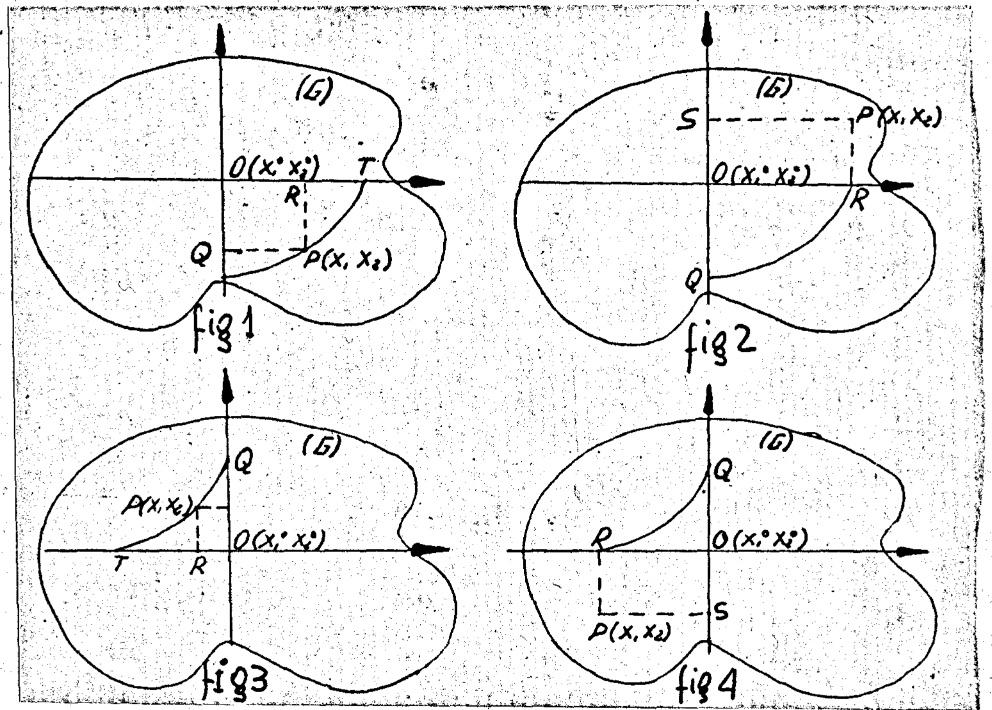
2.- <u>CURVAS CARACTERISTICAS</u>.- Estas vienen dadas por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales:

$$\begin{cases} \Phi_{x_1} = 0 \\ \Phi_{x_2} = 0 \\ \Phi_{x_1} + \rho(x_1, x_2)\Phi_{x_2} = 0 \end{cases}$$

y cuyas características las constituyen las familias de curvas ya consideradas (2. CAP. II):

$$(2)\ \begin{cases} x_1 = c_1 & (\alpha) \\ x_2 = c_2 & (\beta) \\ \lambda(x_1^0; x_1, x_2) = c_3 & (\gamma) \end{cases}$$

3.- DOMINIO DE DEPENDENCIA DE UN PUNTO P.- El dominio de dependencia de un punto $P(x_1, x_2)$ del recinto G (proyección de P_S con el plano de las variables (x_1, x_2))



lo definiremos del mismo modo que en el CAP. II, es decir, (supuesto P lo suficientemente próximo del origen O, para que se verifiquen las condiciones allí exigidas) según que dicho punto pertenezca al 2º ó 4º cuadrante, o bien al 1º o 3er. cuadrante, el dominio de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$ estará constituído respectivamente por los segmentos OQ (figs. 1 y 2) o QS (figs. 3 y 4) y sobre $x_2 = x_2^0$ por el segmento

OR determinado por el origen y por la proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ y además en ambos casos, supondremos que P está lo suficientemente cerca del origen O para que todos los puntos del triángulo curvilíneo OQT o del trapecio mixtilíneo PRQS sean interiores al intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$ siendo μ y ν números positivos que precisaremos más adelante.

4.- <u>DETERMINACION DEL DOMINIO DE PROLONGACIÓN</u>.- De manera análoga a como se hizo en el CAP. II, consideremos la correspondencia existente entre cada punto P de G y de su <u>región asociada</u>, constituída por el triángulo mixtilíneo OQT (supuesto P situado en el 2º ó 4º cuadrante) limitado por los ejes y por la caracteristica del haz (γ) que pasa por él, como se indica en la fig. 1 o por el trapecio mixtilíneo PRQS (si P pertenece al 1er. ó 3er. cuadrante) limitado por los ejes y por las caracteristicas de los haces (α) y (β) que pasan por él, así como por la caracteristica del haz (γ) que pasa por R proyección de P sobre $x_2 = x_2^0$ (fig. 2)

Dadas las funciones $\psi(x_2)$ $\chi(x_2)$ sobre el segmento QS del eje $x_1 = x_1^0$ y la $\varphi(x_1)$ sobre el segmento UR del eje $x_2 = x_2^0$ llamaremos <u>dominio de prolongación D</u>, de dichos segmentos, al conjunto de puntos

P de G, tales que la correspondiente región asociada sea interior a σ en sentido estricto, así como también al intervalo $(x_1 - x_1^0) < \mu$; $(x_2 - x_2^0) < \nu$ estando además contenidos en QS y UR los correspondientes dominios de dependencia sobre $x_1 = x_1^0$ y $x_2 = x_2^0$ respectivamente. Dichos dominios de prolongación tal como los hemos definido, son del mismo tipo que los considerados en el CAP. II y las distintas modalidades que pueden presentar según la posición de O respecto a los segmentos UR y QS están representados en las figuras 5, 6 y 7 de dicho Capítulo.

<u>TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.-</u> La ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ definida en todo dominio de prolongación D de dos segmentos de los ejes $x_1 = x_1^0$; $x_2 = x_2^0$ convenientemente elegidos (que contengan el origen) que satisface a las condiciones iniciales:

a) se convierte en $\varphi(x_1)$ para $x_2 = x_2^0$ es decir

b) en $\psi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$ o sea, $u(x_1^0; x_2) \equiv \psi(x_2)$

c) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$ se reduce a la función $\chi(x_2)$ para $x_1 = x_1^0$ es decir $u_1(x_1^0; x_2) \equiv \chi(x_2)$

Además esta solución es única.

Para lograr mayor sencillez en la demostración de este teorema supondremos en lo que sigue homogéneas las condiciones iniciales, es decir, $\varphi(x_1) = \psi(x_2) = \chi(x_2) \equiv 0$ y por tanto $u^0 = u_k^0 = u_{ij}^0 = 0$ lo que no resta generalidad a la misma como se vió en el número 5 del CAP. II.

5.- DEFINICION DE LAS APROXIMACIONES Y CALCULO DE LAS MISMAS.- Consideremos las ecuaciones en derivadas parciales que siguen:

$$\left.\begin{array}{l} u^1_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u^1_{122} = f(x_1, x_2, 0 \overset{6}{\ldots} 0) \\ u^n_{112} + \rho(x_1, x_2)\, u^n_{122} = f(x_1, x_2, u^{n-1}, u^{n-1}_{k}, u^{n-1}_{ij}) \end{array}\right\} (3)$$

que como se ve se obtienen por ley recurrente, que demostraremos tiene sentido, y cuyas soluciones determinaremos adoptando para todas ellas las condiciones iniciales:

$$u^n(x_1, x_2^0) = u^n(x_1^0, x_2) = u^n_1(x_1^0, x_2) \equiv 0 \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

Dichas ecuaciones son del mismo tipo que la estudiada en el CAP. II, así como las condiciones iniciales impuestas a las mismas, por lo que en virtud de lo allí demostrado las funciones u^n están completamente determinadas en todo dominio de prolongación construído de acuerdo con la definición que acabamos de dar en el número anterior.

Las fórmulas resolutivas que nos expresan las funciones $u^n(x_1, x_2)$; $(n = 1, 2 \ldots)$ y sus derivadas son por tanto (Nºs. 5, 6, 7 y 8 del CAP. II): $u^n(x_1, x_2) = \iiint_{R(P)} [\Phi^{n-1}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$; $(n = 1, 2 \ldots)$

[en donde por brevedad representamos por $\Phi^{\nu}(x_1, x_2)$ la expresión $f(x_1, x_2, u^{\nu}, u^{\nu}_{k}, u^{\nu}_{ij})$; $(k = 1, 2$; $i, j = 1, 2)]$

$$u_1^n(x_1,x_2)=\int_{x_2^0}^{x_2} J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]d\xi_2$$

$$u_2^n(x_1,x_2)=\int_{x_1^0}^{x_1} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)\right]d\xi_1$$

$$u_{11}^n(x_1,x_2)=\left[\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0}+\int_{x_2^0}^{x_2}\rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]d\xi_2+\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\,d\xi_2$$

$$u_{12}^n(x_1,x_2)=J\left[\Phi^{n-1}(x_1,x_2)\right]$$

$$(4)\qquad u_{22}^n(x_1,x_2)=-\frac{J(\Phi^{n-1})}{\rho(x_1,x_2)}-\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi(\xi_1,x_2)\right]d\xi_1+\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\Phi(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\cdot d\xi_1$$

$$u_{111}^n(x_1,x_2)=\left\{\left[\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0}\right\}_{x_1}+\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{\rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]\right\}_{x_1}d\xi_1+\int_{x_2^0}^{x_2}\Phi_{x_1}^{n-1}(x_1,\xi_2)\,d\xi_2$$

$$u_{112}^n(x_1,x_2)=-\rho(x_1,x_2)\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}\left[t,\lambda(t,x_1,x_2)\right]dt\right\}\cdot J\left[\Phi_{x_2}^{n-1}(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{J\left[\rho_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right\}\right]+\Phi^{n-1}(x_1,x_2)$$

$$u_{122}^n(x_1,x_2)=\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}\left[t,\lambda(t,x_1,x_2)\right]dt\right\}\cdot J\left[\Phi_{x_2}^{n-1}(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{J\left[\rho_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right\}\right]$$

$$u_{222}^n(x_1,x_2)=-\left[\frac{J(\Phi^{n-1})}{\rho(x_1,x_2)}\right]_{x_2}-\int_{x_1^0}^{x_1}\left\{\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)\right]\right\}_{x_2}d\xi_1+\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right]_{x_2}d\xi_1$$

Vamos a demostrar en primer lugar, que estas aproximaciones $\mu^{4}(x_1,x_2)$ y sus derivadas hasta las de segundo orden tienen sentido para todos los puntos $P(x_1,x_2)$ cuya región asociada esté comprendida en el intervalo $|x_1-x_1^0|<\mu;\ |x_2-x_2^0|<\nu$ siendo μ y ν dos números definidos como siguen:

$$\mu = \min\left(a, \sqrt[3]{\frac{l}{M}}; \sqrt{\frac{l_1}{M}}; \sqrt{\frac{l_2}{M}}, \sqrt{\frac{l_{11}}{3LM}}, \frac{l_{11}}{6LM}; \frac{l_{12}}{M}; \frac{l_{22}}{6LM}; \sqrt{\frac{l_{12}}{2LM}}\right)$$

$$\nu = \min\left(b, \sqrt[3]{\frac{l}{M}}, \sqrt{\frac{l_1}{M}}, \sqrt{\frac{l_{11}}{3LM}}\ \frac{l_{11}}{3M}\right.$$

designando por M una cota superior de $f(x_1,x_2;u,u_k,u_{ij})$ en $\mathcal{G}_8$ y L la cota ya considerada en el nº 6 del CAP. III.

En efecto, al aplicar el teorema de la media a las integrales que figuran en las fórmulas anteriores resulta

$$\left|\mu^1(x_1,x_2)\right| < M\cdot\mu^2\nu < M\sqrt[3]{\left(\frac{l}{M}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{l}{M}} = l$$

$$\left|\mu_1^1(x_1,x_2)\right| < M\cdot\mu\cdot\nu < M\sqrt{\frac{l_1}{M}}\cdot\sqrt{\frac{l_1}{M}} = l_1$$

$$\left|\mu_2^1(x_1,x_2)\right| < M\cdot\mu^2 < M\,\frac{l_2}{M} = l_2$$

$$\left|\mu_{11}^1(x_1,x_2)\right| < 2LM\mu + LM\mu\nu + M\nu < 2LM\,\frac{l_{11}}{6LM} + LM\,\frac{l_{11}}{3LM} + M\,\frac{l_{11}}{3M} = l_{11}$$

$$\left|\mu_{12}^1(x_1,x_2)\right| < M\cdot\mu < M\,\frac{l_{12}}{M} = l_{12}$$

$$\left|\mu_{22}^1(x_1,x_2)\right| < 3LM\mu + LM^2\mu < 3LM\,\frac{l_{22}}{6LM} + LM\,\frac{l_{22}}{2LM} = l_{22}$$

Supuesto ahora cierta hipótesis para la n- -ésima aproximación y sus derivadas, se tendrá, procediendo análogamente al caso anterior:

$$\left| \mu^{u}(x_1,x_2) \right| < M\cdot\mu^2\cdot\upsilon < M\cdot\frac{l}{M} = l$$

$$\left| \mu^{u}_1(x_1,x_2) \right| < M\cdot\mu\cdot\upsilon < M\cdot\frac{l_1}{M} = l_1$$

$$\left| \mu^{u}_2(x_1,x_2) \right| < M\cdot\mu^2 < M\cdot\frac{l_2}{M} = l_2$$

$$\left| \mu^{u}_{11}(x_1,x_2) \right| < 2LM\mu + LM\mu\upsilon + M\mu < 2M\frac{l_{11}}{6LM} + LM\frac{l_{11}}{3LM} + M\frac{l_{11}}{3M} = l_{11}$$

$$\left| \mu^{u}_{12}(x_1,x_2) \right| < M\mu < M\frac{l_{12}}{M} = l_{12}$$

$$\left| \mu^{u}_{22}(x_1,x_2) \right| < 3LM\mu + LM\mu^2 < 3LM\frac{l_{22}}{6LM} + LM\cdot\frac{l_{22}}{2LM} = l_{22}$$

Como para n = 1 se cumplen las hipótesis de la inducción, el resultado obtenido es completamente general. Además, como vimos en el CAP.II, los dominios de dependencia y prolongación de tales aproximaciones son los definidos por los nºs. 3 y 4.

6.— ACOTACION DE $u^2(x_1,x_2)-u^1(x_1,x_2)$ Y SUS DERIVADAS PARCIALES.— Designando por H una cota superior de los coeficientes de las desigualdades de Lipschitz que hemos supuesti verificaban $f(x_1,x_2,u,u_k,u_{ij})$ y sus derivadas parciales, y por M_0 una cota superior de $u^1(x_1,x_2)$ y sus derivadas parciales hasta las de tercer orden, cota existente siempre en todo dominio de prolongación D, por la continuidad (fácilmente comprobable mediante las correspondientes fórmulas resolutivas) de $u^1(x_1,x_2)$ y sus derivadas, resultan en primer lugar (1) las desigualdades:

$$\left|\phi^1(x_1,x_2)-\phi^0(x_1,x_2)\right|=\left|f(x_1,x_2,u^1,u^1_k,u^1_{ij})-f(x_1,x_2,0\overset{6}{\ldots}0)\right|<M_0(A+\Sigma A_k+\Sigma A_{ij})$$; $[A, A_k, A_{ij}$ son los coeficientes que figuran en la desigualdad de Lipschitz que verifica $f(x_1,x_2,u,u_k,u_{ij})]$

$$\left|\phi^1_{x_1}(x_1,x_2)-\phi^0_{x_1}(x_1,x_2)\right|\leq\left|f^1_{x_1}-f^0_{x_1}\right|+\left|f^1_u\cdot u^1_1\right|+\sum_{k=1,2}\left|f^1_k u^1_{k1}\right|+\sum_{i,j=1,2}\left|f^1_{ij}u_{ij1}\right|<6HM_0+6RM_0 \quad (2)$$

y análogamente:

$$\left|\phi^1_{x_2}(x_1,x_2)-\phi^0_{x_2}(x_1,x_2)\right|<6HM_0+6RM_0$$

---

(1) Véase el nº 6 del CAP. anterior.

(2) f^r designa la expresión resultante de sustituir en f las variables u, u_k, u_{ij} por las funciones u^r, u^r_k, u^r_{ij} ; y f_u, f_k, f_{ij} las derivadas parciales de la misma respecto de u, u_k, u_{ij}. R es una cota superior común de f y de dichas derivadas.

De estas desigualdades se deduce (Véase el nº 6, del CAP. anterior).

$$\left|J\left[\Phi^1(x_1,x_2)-\Phi^0(x_1,x_2)\right]\right| < \frac{6HM_0}{1-h}\cdot\frac{3'+b'}{1!}$$

$$\left|J\left[\Phi^1_{x_2}(x_1,x_2)-\Phi^0_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right| < 6\,\frac{H+R}{1-h}\,M_0\,\frac{3'+b'}{1!}$$

Demostremos ahora el siguiente

TEOREMA I.- $u^2(x_1,x_2)-u^1(x_1,x_2)$ y sus derivadas 1as. y 2as. admiten como cota superior la $M_0K\,\frac{3'+b'}{1!}$ mientras que sus derivadas 3as. admiten la cota numérica $\bar{M}_0$ siendo $K, \bar{M}_0$ números positivos perfectamente definidos.

En efecto, por razonamiento análogo al empleado en el Cap. anterior, se obtiene

$$\left|u^2(x_1,x_2)-u^1(x_1,x_2)\right| = \left|\iint_{R(P)} J\left[\Phi^1(\xi_1,\xi_2)-\Phi^0(\xi_1,\xi_2)\right]d\xi_1\,d\xi_2\right| < \frac{6HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)^2\,\frac{3'+b'}{1!}$$

siendo α y β igual que allí, los extremos superiores de las distancias de los puntos del contorno de G a los ejes $x_1=x_1^0$; $x_2=x_2^0$ respectivamente.

Así mismo obtendríamos:

$$\left|u^2_1(x_1,x_2)-u^1_1(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\,\frac{3'+b'}{1!}$$

$$\left|u^2_2(x_1,x_2)-u^1_2(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0}{1-h}(\alpha+\beta)\,\frac{3'+b'}{1!}$$

Las cotas de las derivadas segundas de $\mu^2(x_1,x_2)-\mu^1(x_1,x_2)$ **son las siguientes:**

$$\left|\mu^2_{11}(x_1,x_2)-\mu^1_{11}(x_1,x_2)\right| < 6HM_0\left[l\cdot\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]\frac{3^1h^1}{1!}$$

$$\left|\mu^2_{12}(x_1,x_2)-\mu^1_{12}(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0}{1-h}\;\frac{3^1h^1}{1!}$$

$$\left|\mu^2_{22}(x_1,x_2)-\mu^1_{22}(x_1,x_2)\right| < 6lHM_0\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]\frac{3^1h^1}{1!}$$

Para calcular las cotas de las derivadas terceras de $\mu^2(x_1,x_2)-\mu^1(x_1,x_2)$ **acotaremos previamente las expresiones** $J_{x_k}\left[\phi^1(x_1,x_2)-\phi^0(x_1,x_2)\right]$ $(k=1,2)$ **las cuales vienen dadas (Nº 6, CAP. III) por las fórmulas:**

$$J_{x_1}(\phi^1-\phi^0)=\phi^1-\phi^0-\rho(x_1,x_2)\cdot\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]dt\right\}\cdot J\left[(\phi^1_{x_2}-\phi^0_{x_2})\cdot\exp\left\{J[\rho_{x_2}(x_1,x_2)]\right\}\right]$$

$$J_{x_2}(\phi^1-\phi^0)=\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0}\rho_{x_2}[t,\lambda(t,x_1,x_2)]dt\right\}J\left[(\phi^1_{x_2}-\phi^0_{x_2})\cdot\exp\left\{J[\rho_{x_2}(x_1,x_2)]\right\}\right]$$

deduciéndose de las mismas:

$$\left|J_{x_1}(\phi^1-\phi^0)\right| < 6M_0\left[H+l\cdot\exp\{2l\alpha\}\cdot\frac{(H+R)(\alpha+\beta)}{1-h}\right]$$

$$\left|J_{x_2}(\phi^1-\phi^0)\right| < 6M_0\cdot\exp\{2l\alpha\}\frac{(H+R)(\alpha+\beta)}{1-h}$$

(**pues** $\exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} P_{x_2}[t, h(x_1,x_2,t)]dt\right\} < \exp\{L\cdot\alpha\}$; $\exp\{J(P_{x_2})\} < \exp\{\alpha L\}$ y

$$|J(\phi^1_{x_2}-\phi^0_{x_2})| < 6\,\frac{H+R}{1-h}\cdot M_0(\beta'+\gamma') < 6\,\frac{H+R}{1-h}\cdot M_0\cdot(\alpha+\beta)$$

como acabamos de ver).

con lo que las cotas de los diversos términos componentes de $u^2_{111}(x_1,x_2)-u^1_{111}(x_1,x_2)$ **son las siguientes:**

$$\left|\left[P_{x_1}\cdot J(\phi^1-\phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12LH\frac{M_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

$$\left|\left[P\cdot J_{x_1}(\phi^1-\phi^0)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12LM_0\left[H+L\cdot\exp\{2L\alpha\}\cdot\frac{(H+R)(\alpha+\beta)}{1-h}\right]$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{P_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J[\phi^1(x_1,\xi_2)-\phi^0(x_1,\xi_2)]\right\}_{x_1} d\xi_2\right| < 6LM_0(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)\frac{H+L(H+R)\cdot\exp\{2L\alpha\}}{1-h}+H\right]$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left[\phi^1_{x_1}(x_1,\xi_2)-\phi^0_{x_1}(x_1,\xi_2)\right]d\xi_2\right| < 6\cdot M_0(H+R)(\alpha+\beta)$$

Análogamente

$$\left|u^2_{112}(x_1,x_2)-u^1_{112}(x_1,x_2)\right| = \left|J_{x_1}(\phi^1-\phi^0)\right| < 6M_0\left[H+L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{(H+R)(\alpha+\beta)}{1-h}\right]$$

$$\left|u^2_{122}(x_1,x_2)-u^1_{122}(x_1,x_2)\right| = \left|J_{x_2}(\phi^1-\phi^0)\right| < 6M_0\exp\{2L\alpha\}\frac{(H+R)(\alpha+\beta)}{1-h}$$

y finalmente para $u^2_{222}(x_1,x_2)-u^1_{222}(x_1,x_2)$ **igual que hemos hecho con** $u^2_{111}(x_1,x_2)-u^1_{111}(x_1,x_2)$ **procederemos a acotar separadamente sus diversos términos**

$$\left|\frac{P_{x_2}(x_1,x_2)}{P^2(x_1,x_2)}\cdot J(\phi^1-\phi^0)\right| < 6L\,\frac{H\cdot M_0}{1-h}(\alpha+\beta)$$

$$\left|\frac{J_{x_2}(\phi^1-\phi^0)}{P(x_1,x_2)}\right| < 6LM_0\exp\{2L\alpha\}\frac{(H+R)(\alpha+\beta)}{1-h}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left\{\frac{P_{x_1}(\xi_1,x_2)}{P^2(\xi_1,x_2)}\cdot J(\phi^1-\phi^0)\right\}_{x_2}d\xi_1\right| < \frac{6LM_0\cdot(\alpha+\beta)^2}{1-h}\left[H+(H+R)\exp\{2L\alpha\}\right]$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^1(\xi_1,x_2) - \Phi^0(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 \right| < 6L M_0 (\alpha+\beta)[2H+R]$$

Si designamos por K el mayor de los factores que multiplican a $M_0 \cdot \frac{\xi'+h'}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para $u^2(x_1,x_2) - u^1(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, resultará en definitiva como cota superior común de las mismas, la $M_0 K \cdot \frac{\xi'+h'}{1!}$ y si $\overline{M_0}$ expresa el máximo de M_0 y de las cotas halladas para las derivadas terceras de $u^2(x_1,x_2) - u^1(x_1,x_2)$ una cota común de dichas derivadas terceras es $\overline{M_0}$

El teorema resulta pues así demostrado.

7.- ACOTACION DE $u^3(x_1,x_2) - u^2(x_1,x_2)$ Y DE SUS DERIVADAS PARCIALES.- TEOREMA II.- Una cota superior de $u^3(x_1,x_2) - u^2(x_1,x_2)$ y sus derivadas 1as. y 2as. es de la forma $M_0 K^2 \frac{(\xi'+h')^2}{2!}$ las derivadas 3as. admiten como cota superior $\overline{M_0} \overline{K} \frac{\xi'+h'}{1!}$ siendo $\overline{K}$ un número positivo perfectamente definido.

En efecto, análogamente al caso anterior tendremos

$$\left| \Phi^2(x_1,x_2) - \Phi^1(x_1,x_2) \right| = \left| f^2 - f^1 \right| < M_0 K \left(A + \Sigma A_k + \Sigma A_{ij} \right) \frac{\xi'+h'}{1!} < 6H M_0 K \frac{\xi'+h'}{1!}$$

$$\left|\Phi^2_{x_1} - \Phi^1_{x_1}\right| < 3\left[R\bar{M}_0 + M_0K(2H + R + 12HT)\,\frac{3'+h'}{1!}\right]$$

representando R como sabemos una cota superior de las derivadas 1ªs. de f, y T una cota numérica común de los módulos de cualquier aproximación $u^{4}(x_1,x_2)$ y de sus derivadas 1ªs. 2ªs, y 3ªs, en el intervalo $|x_1-x_1^0|<\mu$; $|x_2-x_2^0|<\upsilon$ cota existente e independiente de u como puede verse en la nota complementaria a este Capítulo.

De la misma manera:

$$\left|\Phi^2_{x_2} - \Phi^1_{x_2}\right| < 3\left[R\bar{M}_0 + M_0K(2H + R + 12HT)\,\frac{3'+h'}{1!}\right]$$

y además:

$$\left|J(\Phi^2-\Phi^1)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\,\frac{(3'+h')^2}{2!}$$ Véase nº 7 del CAP. III)

$$\left|J(\Phi^2_{x_2}-\Phi^1_{x_2})\right| < 3\bar{M}_0\left[\frac{(\alpha+\beta)(2HK+RK)+l}{1-h} + 12HTK(\alpha+\beta)\right]\frac{3'+h'}{1!}$$

así como:

$$\left|J_{x_1}(\Phi^2-\Phi^1)\right| < 3\bar{M}_0\left[l\cdot\exp\{2l\alpha\}\,\frac{R+(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)K}{1-h} + 2HK(\alpha+\beta)\right]\frac{3'+h'}{1!}$$

$$\left|J_{x_2}(\Phi^2-\Phi^1)\right| < 3\bar{M}_0\cdot\exp\{2l\alpha\}\,\frac{R+K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)}{1-h}\,\frac{3'+h'}{1!}$$

Las cotas superiores de $u^3(x_1,x_2)-u^2(x_1,x_2)$ y sus derivadas primeras son por tanto

$$\left|u^3(x_1,x_2)-u^2(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)^2\frac{(\xi'+h')^2}{2!}$$

$$\left|u^3_1(x_1,x_2)-u^2_1(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{(\xi'+h')^2}{2!}$$

$$\left|u^3_2(x_1,x_2)-u^2_2(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}(\alpha+\beta)\frac{(\xi'+h')^2}{2!}$$

Para las derivadas segundas se obtienen las cotas:

$$\left|u^3_{11}(x_1,x_2)-u^2_{11}(x_1,x_2)\right| < 6HM_0K\left[L\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]\frac{(\xi'+h')^2}{2!}$$

$$\left|u^3_{12}(x_1,x_2)-u^2_{12}(x_1,x_2)\right| < \frac{6HM_0K}{1-h}\cdot\frac{(\xi'+h')^2}{2!}$$

$$\left|u^3_{22}(x_1,x_2)-u^2_{22}(x_1,x_2)\right| < 6LHM_0K\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]\cdot\frac{(\xi'+h')^2}{2!}$$

Para el cálculo de las cotas de las derivadas terceras, procederemos de igual modo que en el caso anterior a acotar separadamente cada una de los términos que las componen.

Así para $u^3_{111}(x_1,x_2)-u^2_{111}(x_1,x_2)$ se obtiene:

$$\left|\left[\rho_{x_1}\cdot J(\phi^2-\phi^1)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 12L\frac{H\bar{M}_0}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot K\frac{\xi'+h'}{1!}$$

$$\left|\left[\rho\cdot J_{x_1}(\phi^2-\phi^1)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right| < 6L\bar{M}_0\left[L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{R+(\alpha+\beta)(2H+RK+12HTK)}{1-h}+2HK(\alpha+\beta)\right]\frac{\xi'+h'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{\rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\phi^2(x_1,\xi_2)-\phi^1(x_1,\xi_2)\right]\right\}_{x_1}d\xi_2\right| < 3L\bar{M}_0(\alpha+\beta)\left[\frac{L\cdot\exp\{2L\alpha\}\left[(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)\cdot(2H+RK)+R+12HK\right]+2HK(\alpha+\beta)\right]}{1-h}+2HR(\alpha+\beta)\right]\frac{\xi'+h'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left[\phi^2_{x_1}(x_1,\xi_2)-\phi^1_{x_1}(x_1,\xi_2)\right]d\xi_2\right| < 3\bar{M}_0\left[(\alpha+\beta)K\cdot(2H+R+12HT)+R\right]\frac{\xi'+h'}{1!}$$

Así mismo:

$$\left|u^3_{112}(x_1,x_2) - u^2_{112}(x_1,x_2)\right| = \left|J_{x_1}(\Phi^2-\Phi^1)\right| < 3\bar{M}_0\left[L\cdot \exp\{2L\alpha\}\frac{R+(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)K}{1-h} + 2HK(\alpha+\beta)\right]\frac{3^4h'}{1!}$$

$$\left|u^3_{122}(x_1,x_2) - u^2_{122}(x_1,x_2)\right| = \left|J_{x_2}(\Phi^2-\Phi^1)\right| < 3\bar{M}_0\cdot \exp\{2L\alpha\}\frac{R+K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)}{1-h}\;\frac{3^4h'}{1!}$$

y finalmente las cotas de los diversos términos de $u^3_{222}(x_1,x_2) - u^2_{222}(x_1,x_2)$ son las siguientes:

$$\left|\frac{\rho_{x_2}(x_1,x_2)}{\rho^2(x_1,x_2)}\,J(\Phi^2-\Phi^1)\right| < \frac{6H\bar{M}_0 H}{1-h}\,K(\alpha+\beta)\,\frac{3^4h'}{1!}$$

$$\left|\frac{J_{x_2}(\Phi^2-\Phi^1)}{\rho(x_1,x_2)}\right| < 3L\frac{2\exp\{2L\alpha\}}{1-h}\left[K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)+R\right]\bar{M}_0\cdot\frac{3^4h'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left\{\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi^2(\xi_1,x_2)-\Phi^1(\xi_1,x_2)\right]\right\}_{x_2} d\xi_1\right| < \frac{3L(\alpha+\beta)}{1-h}\left[L\cdot\exp\{2L\alpha\}\left[K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)+R\right]+2HK(\alpha+\beta)\right]\bar{M}_0\,\frac{3^4h'}{1!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\Phi^2(\xi_1,x_2)-\Phi^1(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right]_{x_2} d\xi_1\right| < 3L\left[(\alpha+\beta)K(4H+R+12HT)+R\right]\bar{M}_0\cdot\frac{3^4h'}{1!}$$

(En todas las cotas obtenidas para las derivadas terceras se ha sustituído M_0 por $\bar{M}_0$)

Teniendo en cuenta el significado de $\hat{K}$, resulta como cota superior de $u^3(x_1,x_2) - u^2(x_1,x_2)$ y de sus derivadas

1ªs. y 2ªs. la $M_0 K^2 \frac{(3'4h')^2}{2!}$ y si $\bar{K}$ designa el máximo de K y de los factores que multiplican a $\bar{M}_0 \cdot \frac{3'4h'}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para las derivadas terceras de $u^3(x_1,x_2)-u^2(x_1,x_2)$ una cota superior de éstas últimas, será la $\bar{M}_0 \bar{K} \cdot \frac{3'4h'}{1!}$, resultando demostrado lo que nos proponíamos.

8.- <u>ACOTACION DE LAS RESTANTES DIFERENCIAS</u> $u^{n+1}(x_1,x_2)-u^n(x_1,x_2)$ <u>Y SUS DERIVADAS PARCIALES.</u>- Generalicemos los resultados anteriores, demostrando: <u>TEOREMA III.</u>- $u^{n+1}(x_1,x_2)-u^n(x_1,x_2)$ así como sus derivadas parciales 1ªs. y 2ªs. admiten como cota superior la $M_0 K^n \frac{(3'4h')^n}{n!}$, y una cota superior de las derivadas terceras de $u^{n+1}(x_1,x_2)-u^n(x_1,x_2)$ es de la forma $\bar{M}_0 \bar{K}^{n-1} \frac{(3'4n')^{n-1}}{(n-1)!}$

<u>DEMOSTRACION.</u>- Para probarlo procederemos por inducción completa; si suponemos que la hipótesis es cierta para $u^n(x_1,x_2)-u^{n-1}(x_1,x_2)$ y sus derivadas, tendremos primeramente, c o mo consecuencia, las desigualdades:

$$\left|\Phi^n(x_1,x_2)-\Phi^{n-1}(x_1,x_2)\right|=\left|f^n-f^{n-1}\right|<M_0 K^{n-1}\left(A+\Sigma A_k+\Sigma A_{ij}\right)\frac{(3'4h')^{n-1}}{(n-1)!}<6\,H M_0 K^{n-1}\frac{(3'4h')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\Phi^n_{x_k}-\Phi^{n-1}_{x_k}\right|<3\bar{M}_0\left[R+K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(3'4h')^{n-2}}{(n-2)!}$$
$(k=1,2)$

y además:

$$\left|J\left[\Phi^{u}-\Phi^{u-1}\right]\right|<\frac{6HM_0K^{u-1}}{1-h}\;\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$ (Véase nº 8 del Cap.anterior)

$$\left|J\left(\Phi^{u}_{x_2}-\Phi^{u-1}_{x_2}\right)\right|<3\bar{M}_0\left[\frac{(\alpha+\beta)(2HK+RK)+R}{1-h}+RHTK(\alpha+\beta)\right]K^{u-2}\frac{(3'+b')^{u-1}}{(u-1)!}$$

así como:

$$\left|J_{x_1}\left(\Phi^{u}-\Phi^{u-1}\right)\right|<3\bar{M}_0\left[L\exp\{2L\alpha\}\frac{R+(\alpha+\beta)\cdot(2H+R+RHT)K}{1-h}+2HK(\alpha+\beta)\right]K^{u-2}\frac{(3'+b')^{u-1}}{(u-1)!}$$

$$\left|J_{x_2}\left(\Phi^{u}-\Phi^{u-1}\right)\right|<3\bar{M}_0\exp\{2L\alpha\}\frac{R+K(\alpha+\beta)(2H+R+RHT)}{1-h}\cdot K^{u-2}\frac{(3'+b')^{u-1}}{(u-1)!}$$

Las cotas superiores de $u^{u+1}(x_1,x_2)-u^{u}(x_1,x_2)$

y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. son por consiguiente:

$$\left|u^{u+1}(x_1,x_2)-u^{u}(x_1,x_2)\right|<\frac{6HM_0}{1-h}K^{u-1}(\alpha+\beta)^2\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$

$$\left|u_1^{u+1}(x_1,x_2)-u_1^{u}(x_1,x_2)\right|<\frac{6HM_0}{1-h}K^{u-1}(\alpha+\beta)\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$

$$\left|u_2^{u+1}(x_1,x_2)-u_2^{u}(x_1,x_2)\right|<\frac{6HM_0}{1-h}K^{u-1}(\alpha+\beta)\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$

$$\left|u_{11}^{u+1}(x_1,x_2)-u_{12}^{u}(x_1,x_2)\right|<6HM_0\left[L\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]K^{u-1}\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$

$$\left|u_{12}^{u+1}(x_1,x_2)-u_{12}^{u}(x_1,x_2)\right|<\frac{6HM_0}{1-h}K^{u-1}\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$

$$\left|u_{22}^{u+1}(x_1,x_2)-u_{22}^{u}(x_1,x_2)\right|<6LHM_0\left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]K^{u-1}\frac{(3'+b')^{u}}{u!}$$

Para acotar las derivadas terceras, igual que en los casos anteriores, calcularemos separadamente las cotas de sus diversos términos componentes:

Para $u_{111}^{n+1}(x_1,x_2)-u_{111}^{n}(x_1,x_2)$ obtendríamos:

$$\left|\left[P_{x_1}(x_1,x_2)\cdot\mathrm{J}\left(\Phi^{n}-\Phi^{n-1}\right)\right]_{x_2}^{x_2^0}\right|<\frac{12LH}{1-h}(\alpha+\beta)\cdot K\cdot\bar{M}_0\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\left[P(x_1,x_2)\mathrm{J}_{x_1}(\Phi^{n}-\Phi^{n-1})\right]_{x_2}^{x_2^0}\right|<6L\bar{M}_0\left[L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{R+(\alpha+\beta)(2H+RK+12HTK)}{1-h}+2HK(\alpha+\beta)\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left\{P_{x_2}(x_1,\xi_2)\mathrm{J}\left[\Phi^{n}(x_1,\xi_2)-\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]\right\}_{x_1}d\xi_2\right|<3L\bar{M}_0(\alpha+\beta)\left[2HK(\alpha+\beta)+\frac{L\exp\{2L\alpha\}[(\alpha+\beta)(2H+RK)+R+12HTK+2HK(\alpha+\beta)]}{1-h}\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_2^0}^{x_2}\left[\Phi^{n}(x_1,\xi_2)-\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]d\xi_2\right|<3\bar{M}_0\left[K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)+R\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

Del mismo modo:

$$\left|u_{112}^{n+1}(x_1,x_2)-u_{112}^{n}(x_1,x_2)\right|=\left|\mathrm{J}_{x_1}(\Phi^{n}-\Phi^{n-1})\right|<3\bar{M}_0\left[L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{R+K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)}{1-h}+2HK(\alpha+\beta)\right]\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|u_{122}^{n+1}(x_1,x_2)-u_{122}^{n}(x_1,x_2)\right|=\left|\mathrm{J}_{x_2}(\Phi^{n}-\Phi^{n-1})\right|<3\bar{M}_0\exp\{2L\alpha\}\frac{R+K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)}{1-h}\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

y finalmente las cotas de los términos de $u^{n+1}_{222}(x_1,x_2)-u^{n}_{222}(x_1,x_2)$ son las siguientes:

$$\left|\frac{\rho_{x_2}(x_1,x_2)}{\rho^2(x_1,x_2)}\cdot J(\Phi^n-\Phi^{n-1})\right|<\frac{6L\,H\bar{M}_0}{1-h}\,K(\alpha+\beta)\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+b')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\frac{J_{x_2}(\Phi^n-\Phi^{n-1})}{\rho(x_1,x_2)}\right|<3L^2\,\frac{\exp\{2L\alpha\}}{1-h}\left[K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)+R\right]\bar{M}_0\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+b')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left\{\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi^n(\xi_1,x_2)-\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)\right]\right\}_{x_2}d\xi_1\right|<\frac{3L(\alpha+\beta)}{1-h}\left[2HK(\alpha+\beta)+\left[K(\alpha+\beta)(2H+R+12HT)+R\right]L\cdot\exp\{2L\alpha\}\right]\bar{M}_0\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+b')^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{x_1^0}^{x_1}\left[\frac{\Phi^n(\xi_1,x_2)-\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right]_{x_2}d\xi_1\right|<3L\left[K(\alpha+\beta)(4H+R+12HT)+R\right]\bar{M}_0\cdot\bar{K}^{n-2}\frac{(\xi'+b')^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Recordando el significado de K y $\bar{K}$, resulta como cota superior de $u^{n+1}(x_1,x_2)-u^{n}(x_1,x_2)$ y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. la $M_0\cdot K^n\frac{(\xi'+b')^n}{n!}$ y como cota de las derivadas 3ªs. la $\bar{M}_0\,K^{n-1}\frac{(\xi'+b')^{n-1}}{(n-1)!}$

Como para $n = 3$ se verifican las hipótesis del teorema III, según el teorema II, queda demostrado lo que afirmábamos.

9.- CONSTRUCCION DE LA SOLUCION AL PROBLEMA DE CAUCHY.-

Formemos ahora las series:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(u^{\nu+1}-u^{\nu}),\ \sum_{\nu=0}^{\infty}(u^{\nu+1}_k-u^{\nu}_k),\ \sum_{\nu=0}^{\infty}(u^{\nu+1}_{ij}-u^{\nu}_{ij}),\ \sum_{\nu=0}^{\infty}(u^{\nu+1}_{ijk}-u^{\nu}_{ijk}),\ (\text{con } u^0=u^0_k=u^0_{ij}=u^0_{ijk}=0) \quad (5)$$

de las cuales las seis primeras admiten en todo dominio de prolongación (D) la serie numérica mayorante de términos positivos y convergente:

$$M_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{K^\nu (\alpha+\beta)^\nu}{\nu!} = M_0 \cdot e^{\nu(\alpha+\beta)}$$

y las cuatro últimas las: $M_0 + \bar{M}_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{K}^\nu \frac{(\alpha+\beta)^\nu}{\nu!} = M_0 + \bar{M}_0 \cdot e^{\bar{K}(\alpha+\beta)}$

por lo que en (D) la convergencia de las series (5) será absoluta y uniforme.

La primera de dichas series definirá pues una función en (D) $\mu(x_1, x_2)$ límite de la sucesión de aproximaciones $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^\nu, \ldots$ cuyas derivadas parciales hasta las de tercer orden vendrán expresadas por las sumas de las restantes series de (5), límites a su vez de las respectivas sucesiones de derivadas de $\mu^1, \mu^2 \ldots, \mu^\nu \ldots$

De la igualdad $s^\nu = \mu_{12}^\nu = J[\phi^{\nu-1}(x_1, x_2)]$ en virtud de la convergencia uniforme de $\phi^{\nu-1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \mu_K^{\nu-1}, \mu_{ij}^{\nu-1})$ consecuencia de la continuidad uniforme en (D) de f respecto de sus argumentos, así como de la convergencia uniforme de $\mu^{\nu-1}, \mu_K^{\nu-1}, \mu_{ij}^{\nu-1}$ en dicho dominio, se deduce por paso al límite esta otra:

$S(x_1,x_2)=u_{12}(x_1,x_2)=J[\Phi(x_1,x_2)]$ (6) en la que se ha designado por $\Phi(x_1,x_2)$ la expresión $f(x_1,x_2,u,u_K,u_{ij})$ resultante del paso al límite. De (6) y teniendo en cuenta que $J_{x_1}(F)+\rho(x_1,x_2)J_{x_2}(F)\equiv F$ se obtiene

$$u_{112}+\rho(x_1,x_2)\,u_{122}=\Phi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,u,u_K,u_{ij})$$

y esta igualdad demuestra que la función $u(x_1,x_2)=\lim_{\nu\to\infty} u^{\nu}(x_1,x_2)$ satisface idénticamente en todo dominio de prolongación (D) a la ecuación en derivadas parciales propuesta. Cumple por otra parte, como se comprueba inmediatamente las condiciones iniciales impuestas :

$$u(x_1^0,x_2)=u(x_1,x_2^0)=u_1(x_1^0,x_2)\equiv 0$$

La función $u(x_1,x_2)$ así construída, es pues la solución al problema de Cauchy considerado, y la unicidad de la misma lo demostramos en el número siguiente.

10.- UNICIDAD DE LA SOLUCION. La solución al problema de Cauchy considerado es única, es decir, toda otra función $\bar{u}(x_1,x_2)$ continua con derivadas parciales 1ªs. y 2ªs. continuas, que admita derivadas terceras cruzadas, y que sea solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales

$\bar{u}(x_1^0, x_2) = \bar{u}(x_1, x_2^0) = \bar{u}_1(x_1^0, x_2) \equiv 0$ coincide idénticamente con $u(x_1, x_2)$

Para demostrarlo consideremos la función

$\bar{\bar{u}}(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) - \bar{u}(x_1,x_2)$ que satisface evidentemente a la ecuación en derivadas parciales:

$$u_{112} + p(x_1,x_2)\cdot u_{122} = \bar{\phi}(x_1,x_2) \quad (7) \text{ siendo}$$

$$\bar{\phi}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,u,u_k,u_{ij}) - f(x_1,x_2,\bar{u},\bar{u}_k\,\bar{u}_{ij})$$

verificando las condiciones iniciales:

$$\bar{\bar{u}}(x_1^0,x_2) = \bar{\bar{u}}(x_1,x_2^0) = \bar{\bar{u}}_1(x_1^0,x_2) \equiv 0$$

La ecuación (7) es del tipo de las estudiadas en el CAP. II por lo que la solución de la misma con las condiciones iniciales exigidas, y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. vendrán expresadas por las fórmulas que allí se deducieron (nºs. 5, 6, 7 de dicho CAP.)

Si $\bar{\bar{M}}_0$ es una cota superior en G de $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$ y de sus derivadas 1ªs. y 2ªs, resultará en virtud de las fórmulas que expresan las mismas y con razonamientos análogos a los efectuados en el nº 6 para acotar $u^2(x_1,x_2) - u^1(x_1,x_2)$ y sus derivadas, la cota $\bar{\bar{M}}_0 \cdot K \cdot \frac{3'+b'}{1!}$ común a $\bar{\bar{u}}(x_1,x_2)$

y sus derivadas parciales primeras y segundas (teniendo $\underline{K}$ el mismo significado que allí).

Sustituyendo las funciones subintegrales por las cotas correspondientes, se obtiene nuevamente para $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. la cota $\bar{\bar{M}}_0 \cdot K^2 \cdot \frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}$ y así sucesivamente, resultando en general como se demostraría por inducción la cota $\bar{\bar{M}}_0 \cdot K^n \cdot \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}$ común a $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas válida en todo dominio $\underline{D}$ de prolongación común a $u(x_1, x_2)$ y $\bar{u}(x_1, x_2)$ y al ser $\underline{n}$ cualquiera, así como $\xi'+\eta' < \alpha+\beta$; $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas son en valor absoluto inferiores a cualquier número positivo prefijado arbitrariamente, lo que exige que en dicho dominio de prolongación, sean nulas idénticamente, es decir, $\bar{u}(x_1, x_2) \equiv u(x_1, x_2)$

Una vez probada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación, sólo queda por demostrar la dependencia continua de la misma respecto a las condiciones iniciales para afirmar que el problema es adecuado a la ecuación dada. Esto es fácilmente comprobable, considerando que la sucesión de aproximaciones que define $u(x_1, x_2)$ converge uniformemente en todo dominio de prolongación D respecto a las condiciones iniciales consideradas como variables y que los términos $u^4(x_1,x_2)$ de dicha sucesión dependen (Véase CAP. II) de un modo continuo de dichas condiciones iniciales, por lo que en todo el dominio de prolongación D, la solución $u(x_1,x_2)$ que define tal sucesión, dependerá asimismo de un modo continuo respecto de las condiciones iniciales, habiéndose pues demostrado lo que se afirmaba.

NOTA COMPLEMENTARIA AL CAPITULO IV.

<u>ACOTACION DE u^n Y SUS DERIVADAS 1ªs. 2ªs. y 3ªs.</u> De las expresiones obtenidas, pag. 83 CAP. IV, para las aproximaciones $u^n(x_1,x_2)$ y sus derivadas:

$$u^n = \iint_{R(P)} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,\xi_2)\right] d\xi_1\, d\xi_2$$

$$u^n_1 = \int_{x_1^0}^{x_2} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,\xi_2)\right] d\xi_2$$

$$u^n_2 = \int_{x_1^0}^{x_1} J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,\xi_2)\right] d\xi_1$$

$$u^n_{11} = \left[\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_1}^{x_2^0} + \int_{x_2^0}^{x_2} \rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right] d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\, d\xi_2$$

$$u^n_{12} = J\left[\Phi^{n-1}(x_1,x_2)\right]$$

$$u^n_{22} = -\frac{J(\Phi^{n-1})}{\rho(x_1,x_2)} - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)\right] d\xi_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\, d\xi_1$$

$$u^n_{111} = \left\{\left[\rho(x_1,x_2)\cdot J(\Phi^{n-1})\right]_{x_1}\right\}_{x_2}^{x_2^0} + \int_{x_2^0}^{x_2} \left\{\rho_{x_2}(x_1,\xi_2)\cdot J\left[\Phi^{n-1}(x_1,\xi_2)\right]\right\}_{x_1} d\xi_2 + \int_{x_2^0}^{x_2} \Phi^{n-1}_{x_1}(x_1,\xi_2)\, d\xi_2$$

$$u^n_{112} = \rho(x_1,x_2)\, J\left[\Phi^{n-1}_{x_2}(x_1,x_2)\cdot \exp\left\{J\left[\rho_{x_2}(x_1,x_2)\right]\right\}\right]\cdot \exp\left\{\int_{x_1} \rho_{x_2}\left[t,\lambda(t,x_1,x_2)\right] dt\right\} + \Phi^{n-1}(x_1,x_2)$$

$$u^n_{122} = J\left[\Phi^{n-1}_{x_2}(x_1,x_2)\, \exp\left\{J\left[\rho_2(x_1,x_2)\right]\right\}\right]\cdot \exp\left\{\int_{x_1}^{x_1^0} \rho_{x_2}\left[t,\lambda(t,x_1,x_2)\right] dt\right\}$$

$$u^n_{222} = -\left[\frac{J(\Phi^{n-1})}{\rho(x_1,x_2)}\right]_{x_2} - \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{\frac{\rho_{x_1}(\xi_1,x_2)}{\rho^2(\xi_1,x_2)}\cdot J\left[\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)\right]\right\}_{x_2} d\xi_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \left[\frac{\Phi^{n-1}(\xi_1,x_2)}{\rho(\xi_1,x_2)}\right]_{x_2} d\xi_1$$

se deduce que tanto u^n como sus derivadas 1ªs. y 2ªs. están igualmente acotadas.

Efectivamente hemos demostrado que en los puntos $P(x_1, x_2)$ cuya región asociada esté comprendida en el intervalo $|x_1 - x_1^0| < \mu$; $|x_2 - x_2^0| < \nu$; u^n y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. pertenecen a intervalos interiores al recinto $\mathcal{G}_S$ en el cual se ha supuesto continua $f(x_1, x_2, u, u_k, u_{ij})$ y por tanto acotada en el mismo. Se podrá, por tanto, acotar con independencia de n tódas las integrales que figuran en las expresiones de u^n y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. aplicando el teorema de la media, siendo la cota común pedida la mayor de las seis cotas obtenidas para u^n y sus cinco derivadas 1ªs. y 2ªs. En cuanto a las derivadas 3ªs. observemos que en las expresiones de

$$\Phi_{x_1}^{n-1}(x_1,x_2) = f_{x_1}^{n-1} + f_u^{n-1} u_1^{n-1} + \sum_{k=1,2} f_{u_k}^{n-1} u_{k1}^{n-1} + \sum_{\substack{i\le j \\ (i,j=1,2)}} f_{u_{ij}}^{n-1} u_{ij1}^{n-1}$$

$$\Phi_{x_2}^{n-1}(x_1,x_2) = f_{x_2}^{n-1} + f_u^{n-1} u_2^{n-1} + \sum_{k=1,2} f_{u_k}^{n-1} u_{k2}^{n-1} + \sum_{\substack{i\le j \\ (i,j=1,2)}} f_{u_{ij}}^{n-1} u_{ij2}^{n-1}$$

figuran términos en los que no intervienen las derivadas 3ªs. de la aproximación u^{n-1}

Por tanto, en las integrales que afecten a dichas expresiones, así como las que resulten de aplicar a ellas el operador J, se podrán acotar independientemente de n las partes correspondientes a dichos términos.

Resultando

$$(1)\begin{cases} \left|u^{n}_{111}\right| < P\cdot 2L^2R\exp\{2L\alpha\}\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|J(u^{n-1}_{ij2})\right| + L^2R\cdot\exp\{2L\alpha\}\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|\int_{x_2^0}^{x_2} J(u^{n-1}_{ij1})\,d\xi_2\right| + R\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|\int_{x_2^0}^{x_2} u^{n-1}_{ij1}\,d\xi_2\right| \\ \left|u^{n}_{112}\right| < P + LR\exp\{2L\alpha\}\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|J(u^{n-1}_{ij2})\right| \\ \left|u^{n}_{122}\right| < P + R\cdot\exp\{2L\alpha\}\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|J(u^{n-1}_{ij2})\right| \\ \left|u^{n}_{222}\right| < P + LR\exp\{2L\alpha\}\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|J(u^{n-1}_{ij2})\right| + LR\exp\{2L\alpha\}\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|\int_{x_1^0}^{x_1} J(u^{n-1}_{ij2})\,d\xi_1\right| + LR\sum\limits_{\substack{i\leq j\\(i,j=1,2)}}\left|\int_{x_1^0}^{x_1} u^{n-1}_{ij2}\,d\xi_1\right| \end{cases}$$

en donde P designa una cota común a las expresiones resultantes de aplicar el operador J a las partes en que no figuran derivadas 3ªs. de u^{n-1} y a las que resulten de someter dichas partes a las cuadraturas indicadas en las fórmulas resolutivas correspondientes. R es como sabemos, (pag. 86 CAP. IV) una cota común de f y de sus derivadas parciales en G, y L con el mismo significado que entonces designa, asímismo una cota superior común en G a $\rho(x_1,x_2)$, $\dfrac{1}{\rho(x_1,x_2)}$ y sus derivadas parciales 1ªs. y 2ªs.

Para $n=1$ por ser (pag. 82, CAP. IV) $u^0 = u^0_k = u^0_{ij} = 0$ resulta

$$\left| u^1_{ijl} \right| < P \qquad \begin{matrix} i \leq j \leq l \\ (i, j, l = 1, 2) \end{matrix}$$

Para n = 2 razonando igual que en CAP: III, pag. 61 y siguientes, se tienen en 1er. lugar las desigualdades siguientes:

$$\left| J(u^1_{ij2}) \right| < \frac{P}{1-h} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} u^1_{ij2}\, d\xi_1 \right| < P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} u^1_{ij1}\, d\xi_2 \right| < P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} J(u^1_{ij2})\, d\xi_1 \right| < \frac{P}{1-h} \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} < \frac{P}{1-h} (\alpha + \beta) \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} J(u^1_{ij2})\, d\xi_2 \right| < \frac{P}{1-h} \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} < \frac{P}{1-h} (\alpha + \beta) \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

y al substituir en (1) resulta:

$$\left| u^2_{111} \right| < P + 3R \cdot \left[L^2 \cdot \exp\{2L\alpha\} \frac{\alpha + \beta + 2}{1-h} + 1 \right] \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| u^2_{112} \right| < P + 3L \cdot \exp\{2L\alpha\} \frac{R}{1-h} \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| u^2_{122} \right| < P + 3 \exp\{2L\alpha\} \frac{R}{1-h} \cdot P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

$$\left| u^2_{222} \right| < P + 3L\, R \left[\exp\{2L\alpha\} \frac{\alpha + \beta + 1}{1-h} + 1 \right] P \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}$$

Ahora bien, si w representa el máximo del conjunto de nºs. constituído por P, y por los coeficientes de $P \cdot \frac{\xi'+\eta'}{1!}$ se obtendrá

$|\mu^2_{ijl}| < w + w^2 \frac{\xi'+\eta'}{1!} = S_2$; indicando con S_n la expresión

$$w + w^2 \frac{\xi'+\eta'}{1!} + \dots + w^n \frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como también: $|\mu^1_{ijl}| < w = S_1$

Generalicemos estos resultados demostrando que las derivadas 3ªs. de la n esima . aproximación, admiten como cota superior a S_n En efecto, procediendo por inducción, supuesta cierta la hipótesis para la aproximación μ^{n-1} se tendrá como consecuencia las desigualdades siguientes:

$$\left| J\left(\mu^{n-1}_{ij2}\right) \right| < \frac{1}{1-h} \cdot \frac{1}{w}(S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \mu^{n-1}_{ij2} \, d\xi_2 \right| < \frac{1}{w} \cdot (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} \mu^{n-1}_{ij2} \, d\xi_2 \right| < \frac{1}{w} (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_1^0}^{x_1} J\left(\mu^{n-1}_{ij2}\right) d\xi_1 \right| < \frac{\alpha+\beta}{1-h} \cdot \frac{1}{w} (S_n - w)$$

$$\left| \int_{x_2^0}^{x_2} J\left(\mu^{n-1}_{ij2}\right) d\xi_2 \right| < \frac{\alpha+\beta}{1-h} \cdot \frac{1}{w} (S_n - w)$$

y al tener en cuenta (1) se obtiene

$$\left|\mu^n_{111}\right| < P+3R\left[L^2\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{\alpha+\beta+2}{1-h}+1\right]\frac{S_n-w}{w} < w+S_n-w=S_n$$

$$\left|\mu^n_{112}\right| < P+3L\cdot\exp\{2L\alpha\}\frac{R}{1-h}\;\frac{S_n-w}{w} < S_n$$

$$\left|\mu^n_{122}\right| < P+3\cdot\exp\{2L\alpha\}\;\frac{R}{1-h}\;\frac{S_n-w}{w} < S_n$$

$$\left|\mu^n_{222}\right| < P+3LR\left[\exp\{2L\alpha\}\frac{\alpha+\beta+1}{1-h}+1\right]\;\frac{S_n-w}{w} < S_n$$

Como para $n = 3r$ son ciertas las hipótesis de la inducción el resultado obtenido es completamente general.

Ahora bien

$$\lim_{n\to\infty} S_n = w.\lim\left[1+w\frac{\gamma'+b'}{1!}+\ldots+w^{n-1}\frac{(\gamma'+b')^{n-1}}{(n-1)!}\right]=$$

$$=w.e^{w(\gamma'+b')} < w.e^{w(\alpha+\beta)}$$

quedando pues demostrado, lo que se afirmaba en la pag. 91 del CAP. IV sobre la existencia de una cota común a μ^n y sus derivadas 1ªs. y 2ªs. y 3ªs. independiente de n.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Courant-Hilbert.- "Methoden der Mathematischen Physik". Zweiten Band Berlin 1937. (Verlag von Julius Springer).

[2] Blaschke-Wilhem "Conferencias sobre Geometría de los tejidos" professadas por el autor en 1954 en el Seminario Matemático de Barcelona.

[3] Blaschke-Wilhem "Einführung in die Geometrie der Waben" (1955) Mathematische Einzelwerke. Birkhäuser Verlag.

[4] Vidar Thomée. "Estimates of the Friedrichs-Lewy type for a hiperbolic equation with three characteristics". Mathematica Scandinavica. Kobenhavn 1955.

[5] Sansone - Giovanni "Equazioni differenziali nel campo reale" Parte prima, 2ª ed. 1948. Bologna. Nicola Zanizelli.

Joaquín Mª Casante Dávila

=.=.=.=.=.=