

4 Implementación del método de máxima verosimilitud: modelización de la muestra

Gran parte de las investigaciones en el campo de la astrofísica se enfrentan al problema de obtener la mayor información posible de un conjunto de datos, por lo general incompletos y/o sesgados, referidos únicamente a una muestra extraída de una *población base* más amplia que es realmente el objeto de estudio. Una manera de abordar el problema es mediante métodos de análisis estadístico, que consideran el conjunto de datos como una realización de una variable aleatoria. Según el método de análisis empleado necesitaremos introducir más o menos hipótesis sobre la distribución de dicha variable aleatoria, teniendo en cuenta que, debido a los sesgos, dicha distribución no suele ser la misma que la distribución de la población base.

Uno de estos métodos es el ajuste por máxima verosimilitud, el cual permite tener en cuenta simultáneamente toda la información disponible sobre cada estrella (en nuestro caso paralaje, movimiento propio, velocidad radial, fotometría, ...) y sus correspondientes errores. Por tratarse de un método paramétrico debemos adoptar *a priori* un modelo con una serie de parámetros libres que nos permitirán ajustar dicho modelo a nuestras observaciones. El primer paso para la aplicación de este método es pues la modelización de la muestra de trabajo, tanto desde el punto de vista de los modelos físicos que describen la población base, como de los procesos de selección llevados a cabo en la elaboración de la muestra.

En este capítulo, tras una breve descripción del método de máxima verosimilitud, nos ocuparemos de la modelización de nuestra muestra. Ello supondrá definir el conjunto de parámetros a ajustar y establecer las dependencias entre estos paráme-

tros y las variables consideradas (en nuestro caso temperatura y metalicidad). La deducción explícita de la función de verosimilitud, con el correspondiente desarrollo matemático asociado, puede encontrarse en el apéndice A.

4.1. Consideraciones generales

La aplicación de métodos de máxima verosimilitud a problemas astronómicos data de mediados del siglo pasado, cuando Rigal (1958) propuso su utilización en la obtención de paralajes estadísticas. Desde entonces los modelos utilizados han ido ganando en complejidad a medida que mejoraban los métodos de resolución de las ecuaciones implicadas y el poder de cálculo de los ordenadores. Así, Luri (1995) propone una implementación que utiliza toda la información astrométrica disponible (y no sólo la paralaje), para obtener determinaciones de la magnitud absoluta. Esta implementación introduce además el efecto de los errores observacionales y de los procesos de selección. En este trabajo hemos partido de la implementación de Luri (1995), adaptando las funciones de selección y distribución (en especial la del color ($V - K$)) al problema particular que nos ocupa.

Como todo método paramétrico, el método de máxima verosimilitud precisa de un modelo que describa el conjunto de datos de la muestra de trabajo, el cual debe describir tanto la población base de la que ha sido extraída la muestra como los procesos de selección que han dado lugar a dicha muestra. En el caso de su implementación para el estudio de la luminosidad y la cinemática de las estrellas F,G y K de secuencia principal la población base queda caracterizada por su distribución espacial y las funciones de distribución de magnitud absoluta, velocidad espacial, color (temperatura) y metalicidad. Además necesitaremos una forma explícita para las funciones de selección, dependientes de variables observadas como la magnitud aparente o el color. Es posible también establecer relaciones entre las diferentes variables, las cuales deben ser también modelizadas. Estas relaciones permitirían por ejemplo obtener una calibración de la magnitud absoluta en función de una o más variables (color, metalicidad, ...).

Los parámetros libres del modelo serán ajustados utilizando el *estimador de máxima verosimilitud*, el cual nos dará el conjunto de parámetros que mejor reproducen la muestra. Estos parámetros libres deben de ser escogidos de tal manera que permitan obtener la máxima información sobre las propiedades astrofísicas de la po-

blación, como podrían ser el valor de su velocidad espacial, metalicidad promedio, calibración de la magnitud absoluta en función del color, etc.

De forma algo más detallada podemos resumir los pasos a seguir en la implementación del método en los siguientes puntos, cada uno de los cuales será ampliamente desarrollado a lo largo de este capítulo:

- Adopción y parametrización de modelos que describan la función de distribución de la magnitud absoluta, distribución espacial y distribución de velocidades de la población estelar objeto de estudio. Estas funciones de distribución dependerán de un indicador de temperatura y/o un indicador de metalicidad, bien sea de forma explícita, bien sea de forma implícita al separar nuestra muestra en grupos con diferente metalicidad promedio (ver capítulo 5).

A su vez, el modelo deberá incluir una función de distribución de los parámetros de temperatura y metalicidad. El desarrollo del método y formulación de las ecuaciones es igualmente válido para cualquier otro par de parámetros C_1 y C_2 de los cuales quisieramos hacer depender las calibraciones.

La absorción interestelar también debe ser modelizada, puesto que nuestro observable es la magnitud aparente y no la absoluta. Para ello utilizaremos un modelo tridimensional de absorción interestelar galáctica.

- Análisis de las dependencias de la función de distribución de la magnitud absoluta, distribución espacial y distribución de velocidades con los parámetros C_1 y C_2 . También se deben estudiar, y en su caso modelizar, las posibles correlaciones entre C_1 y C_2 .
- Inclusión de los errores observacionales. El modelo debe tener en cuenta que los valores medidos están afectados de un error observacional y por tanto difieren de los valores reales.
- Análisis y modelización de los diferentes sesgos presentes en el proceso de construcción de la muestra de trabajo. El objetivo de este punto es tener en cuenta que dicha muestra no está descrita por las mismas distribuciones de probabilidad que la población base de la cual ha sido extraída.
- Obtención de la forma explícita de la función de verosimilitud, planteamiento de las ecuaciones a maximizar y estudio de los métodos matemáticos necesarios para ello (apéndice A).

4.2. Hipótesis físicas

Los parámetros libres del modelo, obtenidos a través de máxima verosimilitud aplicada a las estrellas de la muestra, permitirán caracterizar la población base que mejor representa nuestra muestra. Una adecuada elección del modelo a ajustar es por tanto de suma importancia para la obtención de unos resultados correctos.

Describimos en esta sección de forma detallada las hipótesis físicas que hemos adoptado en la construcción del modelo, así como las funciones que permiten su representación y sus dependencias con los parámetros libres a ajustar.

4.2.1. Función de distribución de la magnitud absoluta

La función de distribución de la magnitud absoluta $\Phi(M_v)$ proporciona la frecuencia relativa de estrellas de una determinada magnitud absoluta y puede ser definida para un grupo cualquiera de estrellas (el entorno solar, un tipo espectral determinado, la totalidad de estrellas de la Galaxia, etc).

Una manera de determinar esta función de distribución consiste en contar las estrellas en una determinada área del cielo que poseen una magnitud aparente entre $(m, m + dm)$. Para poder obtener la función de distribución de M_v a partir de estos conteos deberemos tener un conocimiento previo de la distribución espacial de esas estrellas y tener presente que, debido a nuestras limitaciones observacionales, sólo podemos realizar el contaje hasta una cierta magnitud límite, lo cual introduce un sesgo conocido como *sesgo de Malmquist* (ver sección 4.5). Dada la complicación de este procedimiento, en muchas aplicaciones prácticas se suelen adoptar expresiones de $\Phi(M_v)$ sencillas, en especial cuando se trata de describir poblaciones formadas por estrellas de un único tipo espectral y/o clase de luminosidad.

Entre los trabajos más relevantes sobre la distribución de magnitudes absolutas de un amplio número de estrellas se encuentra el de Houk et al. (1997). Utilizando una muestra de estrellas de clase V de tipos espectrales entre B y K incluidas en el catálogo Hipparcos y con distancias inferiores a los 100 pc, Houk et al. construyen los histogramas de M_v para cada tipo espectral (figura 4.1), corrigiendo el sesgo de Malmquist. Los valores medios de M_v para cada tipo espectral se pueden reproducir ajustando una distribución de magnitudes absolutas gaussiana a los

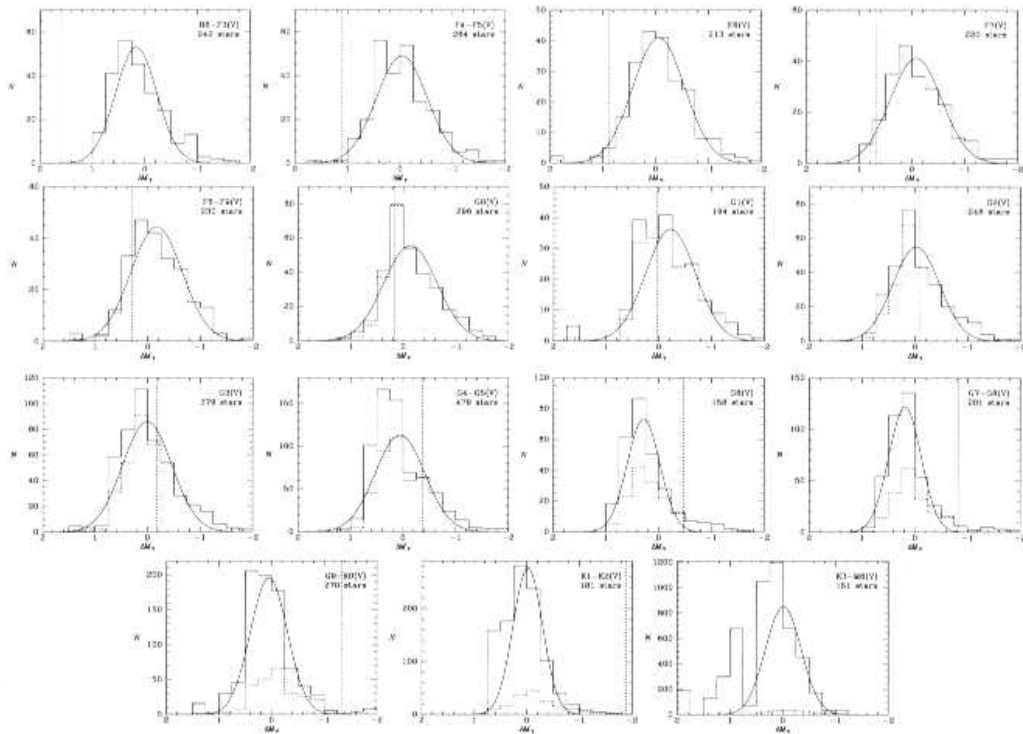


Figura 4.1: Distribución de magnitudes absolutas para estrellas del catálogo Hipparcos de tipos espectrales similares, extraída de Houk et al. (1997). La línea discontinua muestra los histogramas observados y la línea continua los mismos una vez corregidos del sesgo de Malmquist para una muestra limitada en volumen. Estos últimos han sido ajustados mediante gaussianas

diferentes histogramas, si bien las dispersiones se desvían ligeramente del comportamiento gaussiano, mostrando los histogramas una cola más pronunciada hacia altas luminosidades, principalmente ocasionada por estrellas binarias no resueltas.

La función de distribución de M_v que hemos adoptado para describir nuestra población base es por consiguiente una gaussiana:

$$\Phi(M_v) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{M_v - \overline{M}_v}{\sigma_{M_v}}\right)^2} \quad (4.1)$$

Esta función de distribución ofrece la ventaja de estar caracterizada por sólo dos parámetros, valor medio y dispersión $(\overline{M}_v, \sigma_{M_v})$, que, como veremos en la sección

4.3.1, dependerán en nuestro caso de la temperatura y de la metalicidad.

Modelizar $\Phi(M_v)$ de una forma más compleja añadiría nuevos parámetros y posiblemente no mejoraría sustancialmente la calibración de la magnitud absoluta. Hemos de tener presente sin embargo que la σ_{M_v} resultante podría estar ligeramente subestimada, debido a la mencionada asimetría del histograma.

En la expresión 4.1 no incluimos el factor de normalización, ya que éste será calculado conjuntamente para la totalidad de la función de verosimilitud.

4.2.2. Distribución espacial

Al igual que Luri (1995), hemos representado la distribución espacial de las estrellas de nuestra muestra mediante un disco, homogéneo en la dirección (x, y) y con un decaimiento de la densidad a medida que nos alejamos perpendicularmente de él (*disco exponencial*):

$$f_e(r, l, b) = \exp\left(\frac{|r \sin b + Z_\odot|}{Z_h}\right) r^2 \cos b \quad (4.2)$$

El término $r^2 \cos b$ es el jacobiano de la transformación de coordenadas rectangulares (X, Y, Z) a galácticas (r, l, b) , Z_\odot es la altura del Sol sobre el plano galáctico y Z_h es la altura característica sobre dicho plano de la población de estrellas considerada.

Evidentemente éste es un perfil de densidad altamente simplificado, que omite las irregularidades del plano galáctico (estructura espiral, cinturón de Gould, inhomogeneidades locales...) y el decaimiento exponencial en función de la distancia al centro galáctico. La estructura espiral o el cinturón de Gould son extremadamente difíciles de incluir en la función de distribución espacial. Estas irregularidades se ponen especialmente de manifiesto al estudiar cierto tipo de objetos, en particular estrellas jóvenes (tipos espectrales OBA), pero puede ser perfectamente obviado para los tipos espectrales objeto de este trabajo. Por su parte el decaimiento exponencial en el perfil del plano galáctico sólo es importante si consideramos grandes áreas del disco. Dentro de una esfera de 400 pc alrededor del Sol, como la ocupada por nuestra muestra, su efecto puede ser excluido del modelo.

Es bien conocido que la distribución espacial de las estrellas del halo en el entorno solar no responde a un disco como el descrito, sino que siguen una distribución

prácticamente uniforme. Podemos obtener este tipo de distribución a partir de 4.2 asumiendo un valor elevado de Z_h , puesto que entonces, para distancias pequeñas, $f_e(r, l, b)$ dependerá poco de la altura sobre el plano galáctico.

Z_\odot podría considerarse como un parámetro libre, obteniendo así una determinación de la posición del Sol respecto al plano de la Galaxia. Sin embargo, al ser la muestra de trabajo tan cercana al Sol, su valor no quedaría bien determinado, por lo cual hemos optado por fijarlo a +16 pc (Binney y Merrifield 1998).

4.2.3. Función de distribución de la velocidad

A principios del siglo pasado, Schwartzchild introdujo la idea de que las estrellas de la Galaxia se movían de la misma manera que lo hacen las moléculas de un gas, con la salvedad, observada empíricamente, de que la dispersión de la velocidad dependía de la dirección de ésta. Dicha distribución de velocidades recibe el nombre de *distribución de Schwartzchild* y matemáticamente se expresa como:

$$f_{\bar{V}}(U, V, W) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{U-\bar{U}}{\sigma_U}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V-\bar{V}}{\sigma_V}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{W-\bar{W}}{\sigma_W}\right)^2} \quad (4.3)$$

Análogamente al caso de la magnitud absoluta hemos omitido el factor de normalización.

Como hemos comentado, todas las estrellas de la muestra pertenecen al entorno solar. Por este motivo no hemos tenido en cuenta el efecto de la rotación diferencial galáctica en la distribución de velocidades, ya que es poco importante en un volumen tan reducido. Simulaciones hechas por Luri (1995), adoptando el modelo de rotación de Oort-Lindblad, muestran que la no inclusión de la rotación galáctica afecta especialmente a la determinación de las dispersiones (σ_U, σ_V) y a la velocidad \bar{V} . Este efecto sin embargo sólo es importante para muestras de estrellas que cubran un gran volumen.

Por otro lado hemos considerado que el elipsoide de velocidades apunta exactamente al centro de la Galaxia. Aunque sabemos que en el entorno solar esto no es así, sino que el elipsoide presenta una desviación conocida como *desviación del vértice* (l_v), mayor cuanto menor es la edad del grupo de estrellas. Para los tipos espectrales FGK el valor medio de l_v es relativamente pequeño, entre 2° y 10° (Dehnen y Binney 1998), por lo que queda justificada su no inclusión.

4.2.4. Absorción interestelar

Por efecto de la absorción interestelar las estrellas parecen más débiles de lo que realmente son, lo que lleva a asignarles una magnitud absoluta también más débil en caso de no ser considerada. La absorción interestelar depende de la cantidad y características de la materia *absorbente* (básicamente el polvo y el gas presente en el medio interestelar) que se encuentre entre la estrella y el observador. Al ser la distribución del medio interestelar inhomogénea, la absorción depende de (r, l, b) . Para una muestra limitada en magnitud aparente como la nuestra, la dependencia con las coordenadas galácticas introduce a su vez una dependencia entre la posición y la distancia a la cual podemos *ver* estrellas: vemos estrellas más lejanas en la dirección del polo galáctico que en la dirección del plano galáctico, ya que en el primer caso la absorción es menor. Por último, la absorción interestelar modifica los índices de color, de forma que las estrellas parecen más rojas de lo que realmente son.

En este trabajo hemos modelizado la absorción interestelar siguiendo el trabajo de Arenou et al. (1992). En este modelo el cielo se divide en 199 regiones, para cada una de las cuales se da una expresión polinómica de la absorción en el visible en función de la distancia. Los coeficientes de los polinomios fueron obtenidos a partir de los colores fotométricos Strömgen de estrellas situadas en cada una de las 199 regiones. Se asume además que a partir de una distancia R_{max} no existe más material absorbente. Así:

$$A_v(r)^i = \begin{cases} \alpha_i r + \beta_i r^2 & \text{si } r \leq R_i \\ A_v(R_i) + \gamma_i(r - R_i) & \text{si } R_i < r \leq R_{max} \\ A_{max}^i & \text{si } r > R_{max} \end{cases} \quad i = 1, 199$$

(4.4)

La figura 4.2 muestra la absorción en los diferentes sectores a una distancia de 150 pc.

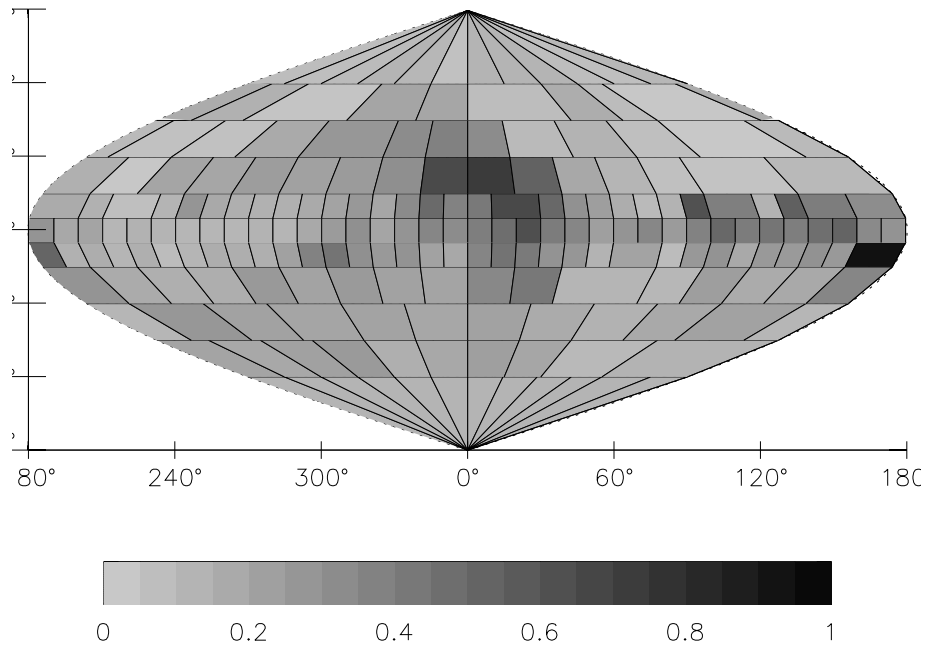


Figura 4.2: Absorción interestelar A_v a 150 pc (en magnitudes) en función de las coordenadas galácticas según el modelo de Arenou et al. (1992)

4.2.5. Función de distribución de $(V - K)$

Dentro de la secuencia principal, la distribución $f_{(V-K)}$ (número de estrellas con un valor de $(V - K)$ entre $(V - K)$ y $(V - K) + d(V - K)$) está estrechamente relacionada con la función de masa, es decir, con el número de estrellas con una masa entre \mathcal{M} y $\mathcal{M} + d\mathcal{M}$. Para pasar de una a otra deberíamos conocer el color $(V - K)$ para cada una de las masas (y estado evolutivo). Podríamos pensar, por tanto, en derivar $f_{(V-K)}$ de una manera teórica, partiendo de una función de masa determinada. Sin embargo existen dos complicaciones que hacen este proceso poco recomendable. En primer lugar, mientras que la función inicial de masa (*IMF*), función de masa en el momento de la formación estelar, está más o menos bien determinada (ver por ejemplo Scalo 1985), para conocer la función de masa actual deberíamos hacer evolucionar el conjunto de estrellas desde su nacimiento hasta el

presente, lo cual implica conocer sus edades y el ritmo de formación estelar. Por otro lado obtener una relación entre la masa y el color ($V - K$) no es en absoluto sencillo, debido de nuevo, entre otras causas, a factores evolutivos y a que dicha relación debería depender de la metalicidad.

La alternativa es recurrir a determinaciones empíricas, basadas en recuentos estelares en el entorno solar, de la densidad de estrellas en función de la temperatura o el color. Así por ejemplo, Allen (1973) presenta una tabla que reproducimos en nuestra tabla 4.1 donde se da la densidad observada de estrellas de la secuencia principal más brillantes que $M_v = 16$ en el entorno solar, según el tipo espectral. Asociando a cada tipo espectral el valor medio de ($V - K$), según la tabla 2.4 del capítulo 2, hemos obtenido la relación mostrada en la figura 4.3. Esta relación se debe considerar como el resultado de la superposición de las distribuciones de las diferentes poblaciones estelares en el entorno solar.

Sin embargo, si deseamos representar un grupo de estrellas de una edad o rango de edades determinado, como es nuestro caso, la relación de la tabla 4.1 debe de ser modificada. Es de esperar que las estrellas del grupo más frías que el valor correspondiente al *turn-off* de las estrellas más viejas de la Galaxia no hayan visto prácticamente modificada su distribución de ($V - K$) por factores evolutivos. Para estas estrellas podremos adoptar la relación de la tabla 4.1. No ocurre lo mismo para las estrellas más masivas, las cuales se habrán separado en mayor o menor medida de su posición inicial en la secuencia principal. Como consecuencia de la evolución, la distribución de ($V - K$) de un grupo de estrellas de una edad determinada presenta un máximo local alrededor del color del *turn-off* correspondiente a esta edad. Por otro lado, existe un ($V - K$) de *corte* a partir del cual, y para dicha edad, no encontraremos estrellas más calientes, puesto que éstas habrán abandonado ya la secuencia principal.

Una aproximación que tiene en cuenta lo dicho anteriormente consiste en suponer la distribución de ($V - K$) formada por dos componentes. La primera de ellas es un ajuste polinómico de los datos de la tabla 4.1. La segunda componente es una distribución gaussiana asimétrica centrada en el color correspondiente al *turn-off* de la población y superpuesta a la anterior.

Mientras que la primera componente domina la distribución de las estrellas frías, la segunda permite modelizar el máximo de la distribución alrededor del *turn-off* debido a efectos evolutivos.

Tabla 4.1: Logaritmo del número de estrellas de secuencia principal con una magnitud más brillante que $M_v = 16$ en 10^4pc^3 para el entorno solar (Allen 1973)

Tipo Espectral	$\log(N)$
O	-3.6
B	0.0
A	0.7
F	1.4
G	1.8
K	2.0
M	2.8

La forma analítica de $f_{(V-K)}$ será por tanto:

$$f_{(V-K)} = \mathcal{P}(V - K) + Ae^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(V-K) - (V-K)_{TO}}{\sigma_{(V-K)}^{+/-}} \right)^2} \quad (4.5)$$

con $\mathcal{P}(V - K)$ un polinomio de tercer grado. Este polinomio suaviza la distribución de la tabla 4.1 (figura 4.3), y por tanto disminuye los efectos de la evolución en la distribución de $(V - K)$ de las estrellas del entorno solar.

Los valores de A , $(V - K)_{TO}$, $\sigma_{(V-K)}^+$ y $\sigma_{(V-K)}^-$ serán parámetros libres de nuestro modelo. El valor de $(V - K)_{TO}$ estará relacionado con la edad de la población y su metalicidad. Por su parte, el parámetro A , como veremos en la sección 4.5, puede depender no sólo de la distribución de colores de la población, sino también del sesgo observacional de la muestra.

Una vez más no debemos preocuparnos de que $f_{(V-K)}$ no esté normalizada, ya que la constante de normalización se evaluará conjuntamente para toda la función de verosimilitud.

4.2.6. Función de distribución de $[Fe/H]$

La distribución de metalicidad de las estrellas de la Galaxia está íntimamente relacionada con la evolución química de la misma, que a su vez depende de los posibles episodios de formación estelar que han tenido lugar a lo largo de su historia.

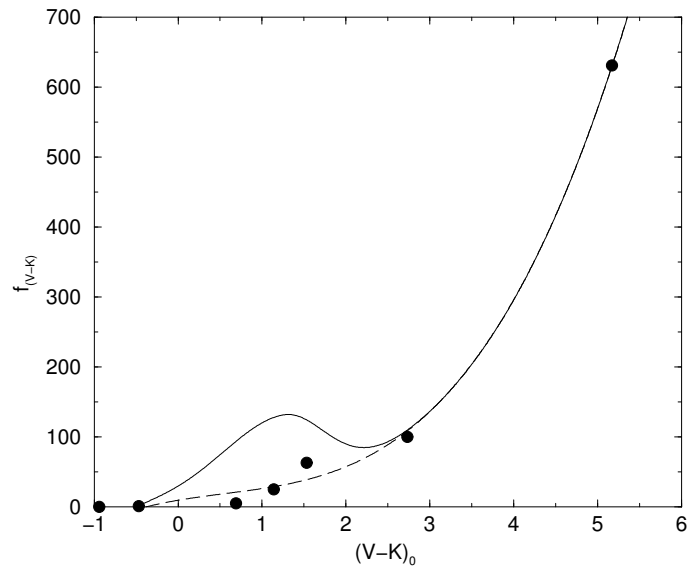


Figura 4.3: Representación gráfica de los valores de la tabla 4.1 (puntos) y un ajuste polinómico de los mismos (línea discontinua). Se representa también la aproximación adoptada para representar la distribución de $(V - K)$ (línea continua) para un conjunto arbitrario de parámetros (ver texto)

Es por tanto difícil conocer *a priori* cual debería ser dicha distribución, y de hecho es uno de los objetivos de este trabajo determinarla.

Sin embargo podemos hacer una serie de suposiciones al respecto. Ya hemos comentado en la introducción que una de las características que permiten diferenciar las distintas poblaciones estelares de la Galaxia es precisamente su metalicidad. Es sabido que la composición de una estrella depende de la composición del medio interestelar en el cual se formó, el cual se ha ido enriqueciendo paulatinamente en metales, provenientes de explosiones de supernovas. Así las estrellas de población II, más viejas, se formaron en un medio pobre en metales, mientras que las de población I lo hicieron posteriormente en un medio más enriquecido. Se sabe también (ver por ejemplo Freeman y Bland-Hawthorn 2002) que no todas las estrellas formadas en una misma época poseen el mismo valor de $[Fe/H]$, ya que se pueden haber formado en regiones de la Galaxia donde el ritmo de enriquecimiento ha sido diferente. Por último, no todas las poblaciones estelares están presentes en igual número en el entorno solar.

Es conveniente pues considerar la población base a la que pertenece nuestra

muestra como la suma de n componentes estelares. Asumiremos que cada una de estas componentes tiene una distribución gaussiana de metalicidad, de valor medio $\overline{[Fe/H]}$ y dispersión $\sigma_{[Fe/H]}$, diferentes. La distribución final para cada componente es por tanto:

$$f_{[Fe/H]} = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{[Fe/H] - \overline{[Fe/H]}}{\sigma_{[Fe/H]}} \right)^2} \quad (4.6)$$

Queda por estudiar y modelizar una posible correlación entre las distribuciones de $(V - K)$ y $[Fe/H]$. Es de esperar que dicha correlación exista, puesto que tanto la distribución de color como la de metalicidad dependen en mayor o menor medida de la edad. Así por ejemplo, una muestra de estrellas con un origen común (y por consiguiente con una edad y composición química similares), presentará una distribución de color con un valor máximo del mismo correspondiente al *turn-off*, y una distribución de metalicidades con un valor promedio característico de dicha edad. A esto hay que añadir la correlación originada por un sesgo en la magnitud aparente, ya que las estrellas menos metálicas son en promedio menos luminosas, y por tanto en una muestra limitada en magnitud aparente no estarán incluidas las estrellas frías de baja metalicidad. En nuestro modelo, esta correlación entre $(V - K)$ y $[Fe/H]$ quedará implícitamente incluida al suponer diferentes distribuciones de $(V - K)$ para cada una de las n componentes de las que consideramos formada la muestra, puesto que para cada una de ellas el modelo tiene libertad para ajustar una distribución de metalicidad distinta.

4.3. Dependencias de $\Phi(M_v)$, $f_e(r, l, b)$ y $f_{\vec{V}}(U, V, W)$

Antes de iniciar la discusión sobre cómo dependen las funciones de distribución $\Phi(M_v)$, $f_e(r, l, b)$ y $f_{\vec{V}}(U, V, W)$ de $(V - K)$ y $[Fe/H]$ conviene insistir de nuevo que se trata de encontrar relaciones válidas para la población base, y no para la muestra de trabajo. Esto implica que deberemos recurrir a resultados teóricos o a resultados obtenidos sobre muestras no sesgadas, para plantear un modelo de dependencia realista para la población. En algunos casos, el análisis de la muestra, aún siendo sesgada, nos puede dar indicios sobre el tipo de dependencia más adecuado.

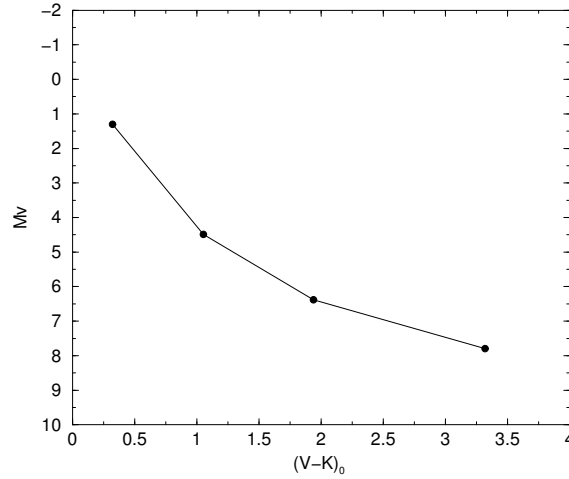


Figura 4.4: Ejemplo de relación $M_v - (V - K)_0$ siguiendo la expresión 4.7

4.3.1. Dependencia de $\Phi(M_v)$

Tanto los modelos de evolución estelar como los diagramas HR del capítulo anterior nos indican que $\Phi(M_v)$ debe depender de $(V - K)_0$ y de $[Fe/H]$. En el primer caso hemos adoptado un modelo compuesto por varios segmentos lineales (figura 4.4), tanto para \overline{M}_v , como para σ_{M_v} :

$$\overline{M}_v((V - K)_0) = \begin{cases} A_1 (V - K) + B_1 & \text{si } (V - K)_{01} < (V - K)_0 \leq (V - K)_{02} \\ A_2 (V - K) + B_2 & \text{si } (V - K)_{02} < (V - K)_0 \leq (V - K)_{03} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{M_v}(V - K) = \begin{cases} C_1 (V - K) + D_1 & \text{si } (V - K)_{01} < (V - K)_0 \leq (V - K)_{02} \\ C_2 (V - K) + D_2 & \text{si } (V - K)_{02} < (V - K)_0 \leq (V - K)_{03} \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (4.8)$$

Como hemos dicho en la sección 4.2, la dependencia de M_v con la metalicidad la podemos tener en cuenta de forma explícita, haciendo depender A_i , B_i , C_i y D_i de la misma, o bien simplemente adoptando unos valores diferentes de estos coeficientes para cada grupo de metalicidad en que separemos nuestra muestra. Este aspecto, así como el número de segmentos adoptados serán discutidos en el capítulo 5.

4.3.2. Dependencia de $f_e(r, l, b)$

El único parámetro libre de la distribución espacial descrita en la sección 4.2 es la altura patrón sobre el plano galáctico, Z_h . Este parámetro ha de depender obviamente de la metalicidad, puesto que cada población estelar tiene una distribución espacial diferente.

Uno de los principales argumentos en favor de lo anterior es la existencia del denominado *disco grueso*. Gilmore y Reid (1983) obtuvieron las magnitudes absolutas de un gran número de estrellas situadas cerca del polo sur galáctico. Estudiando la distribución vertical z de estas estrellas para diferentes rangos de magnitud absoluta descubrieron que las estrellas con $M_v < 4$ seguían un perfil de densidad exponencial con una altura patrón Z_h de unos 300 pc, mientras que para las estrellas con $M_v > 4$ la altura patrón era de unos 1450 pc. Así pues, las estrellas más brillantes y por lo tanto en promedio más jóvenes se encontraban más próximas al plano galáctico que las estrellas menos luminosas y por lo tanto más viejas. Gilmore y Reid (1983) apuntan como explicación más plausible que la muestra esté formada por dos componentes diferenciadas con una distribución espacial tipo disco exponencial de diferente Z_h cada una. Estas componentes son lo que se conoce como *disco delgado* y *disco grueso*. Posteriores estudios han demostrado que cada componente tiene diferentes valores promedio de $[Fe/H]$ (el disco grueso es menos metálico que el disco delgado) y distintas propiedades cinemáticas.

Por otra parte ya se ha mencionado que la distribución espacial de las estrellas del halo puede ser localmente representada por un disco exponencial con un elevado valor de Z_h .

Por último, suponemos que, para un grupo de edad determinada, la distribución espacial es independiente de la temperatura.

4.3.3. Dependencia de $f_{\vec{v}}(U, V, W)$

El estudio de la cinemática de las diferentes poblaciones estelares que conforman la Galaxia y su dependencia con la temperatura (reflejo como veremos más adelante de la relación edad-cinemática) se debe abordar a través del estudio de muestras poco sesgadas que dispongan de todos los parámetros astrométricos, incluida la velocidad

radial. Existen varios trabajos realizados al respecto (ver por ejemplo Carney et al. (1996), Flynn y Morell (1997), Fuchs et al. (1999) o Dehnen y Binney (1998), los tres últimos basados en datos del catálogo Hipparcos) que estudian la relación de la velocidad espacial y su dispersión con la metalicidad y/o la temperatura. Sin embargo, como Binney et al. (1997) han demostrado, el conjunto de estrellas con determinación de la velocidad radial forma una submuestra cinemáticamente sesgada, debido a que los programas de observación de velocidades radiales tienden a priorizar estrellas de alto movimiento propio, por lo que debe ponerse una especial atención al confeccionar la muestra y analizar los datos.

En esta sección vamos a realizar un estudio cualitativo de la cinemática de nuestra muestra de trabajo, con la única intención de establecer un modelo que nos permita relacionar dicha cinemática con $(V-K)$ y $[Fe/H]$. Para ello, utilizaremos las estrellas de la muestra que disponen de velocidad radial, que a pesar de formar una muestra sesgada, nos permitirán obtener suficiente información para nuestro propósito. Un análisis más detallado basado en datos Hipparcos para toda la secuencia principal puede encontrarse en Dehnen y Binney (1998).

Disponer tanto de la velocidad radial como de los movimientos propios y distancias, permite la determinación de las tres componentes (U, V, W) de la velocidad espacial de la estrella (figura 4.5). Más interesante para nuestros propósitos es la figura 4.6. En ella se han representado los valores de U , V y W en función de $[Fe/H]$, promediados en intervalos con igual número de estrellas. Se eliminaron las estrellas con velocidades de más de 3σ por encima de la velocidad media del intervalo. Las barras de error horizontales son la dispersión de $[Fe/H]$ dentro del intervalo considerado, mientras que las verticales son los errores en las componentes de la velocidad promediadas, calculados a partir de los correspondientes errores individuales en la paralaje, movimientos propios y velocidad radial.

Una rápida inspección de la figura nos muestra que mientras que las velocidades medias \bar{U} y \bar{W} son prácticamente independientes de la metalicidad, \bar{V} es altamente dependiente de la misma. Vemos que las estrellas con baja metalicidad tienden a tener una velocidad de rotación en torno al centro de la Galaxia menor que las estrellas más metálicas. Este efecto es un reflejo de lo que se conoce como *corriente asimétrica*, según el cual la velocidad de rotación promedio de una población en torno al centro de la Galaxia tiende a disminuir a medida que aumenta la dispersión de velocidades dentro de la población (ver más abajo la discusión sobre la dependencia

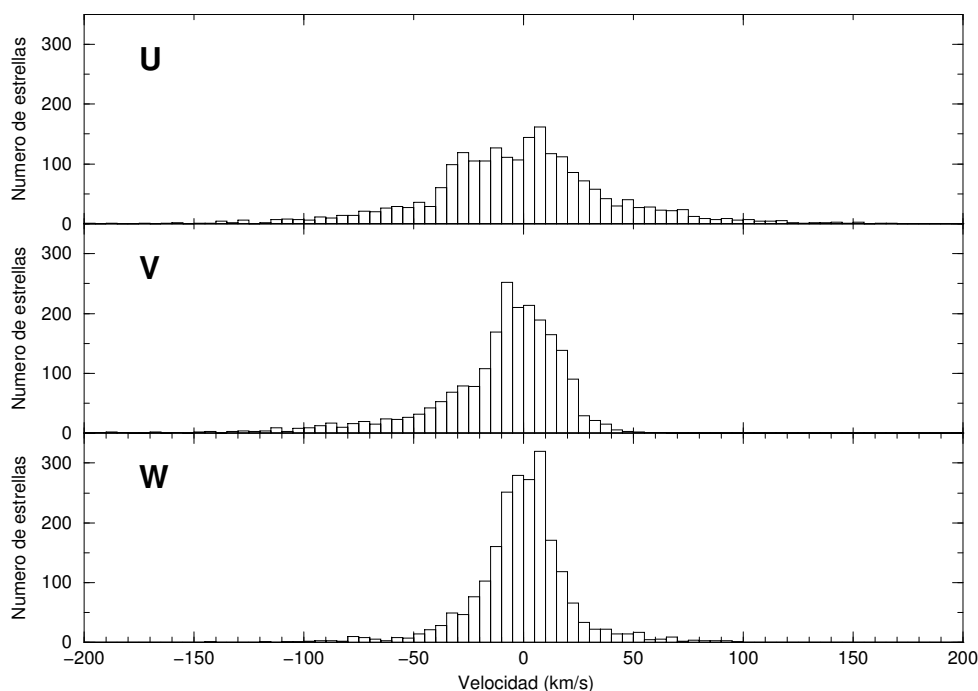


Figura 4.5: Histograma de las tres componentes de la velocidad espacial para las estrellas de la muestra con medidas de la velocidad radial (20% del total). Obsérvese la forma gaussiana de las componentes U y W y la extensión hacia velocidades negativas de la componente V , debido a la *corriente asimétrica*. Las velocidades están expresadas respecto del *Local Standard of Rest* (LSR)

entre dispersión de velocidades y metalicidad). La corriente asimétrica puede ser explicado totalmente a partir de las ecuaciones hidrodinámicas (ver por ejemplo Binney y Tremaine 1987).

En la figura 4.7 se han representado las dispersiones de las tres componentes de la velocidad en función de $[Fe/H]$. En este caso es obvia la dependencia de las tres dispersiones con la metalicidad. En el caso del disco este comportamiento no es más que el reflejo de lo que se conoce como *calentamiento del disco* (*disk heating* en inglés): la dispersión de la velocidad de un grupo de estrellas aumenta con el paso del tiempo. La existencia de una relación edad-metalicidad dentro del disco provocaría que este aumento de las dispersiones estuviese relacionado con la metalicidad.

Si bien no está aún del todo explicado desde un punto de vista teórico, en el caso del disco delgado el calentamiento puede obedecer a varios mecanismos: interacción de las estrellas con nubes moleculares y brazos espirales, perturbaciones debidas a

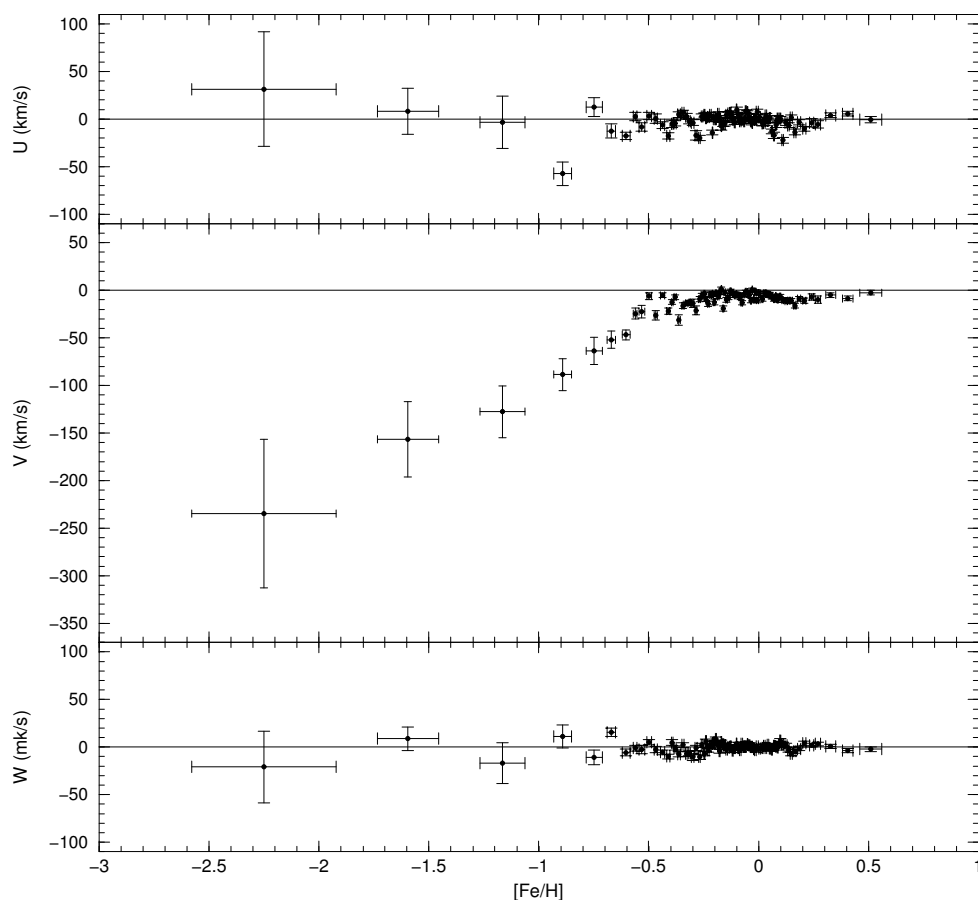


Figura 4.6: Velocidades medias referidas al LSR en función de $[Fe/H]$. Los intervalos de metalicidad se han escogido de tal forma que el número de estrellas en cada uno sea constante. Las barras de error horizontales representan la dispersión $[Fe/H]$ dentro de cada intervalo, mientras que las verticales representan el error observacional en las componentes de la velocidad promediadas, calculado a partir de los errores individuales en los movimientos propios, velocidades radiales y distancias

agujeros negros masivos, ... Cada uno de estos encuentros aumenta la dispersión de velocidades, de manera que las estrellas más viejas, al haber sufrido en promedio más encuentros que las estrellas jóvenes, tienen dispersiones de la velocidad más altas.

En lo referente a las estrellas de baja metalicidad, pertenecientes al halo, la alta dispersión de la velocidad se podría explicar en base a una formación del halo a partir de la acreción de subsistemas más pequeños y a la propia evolución dinámica del sistema.

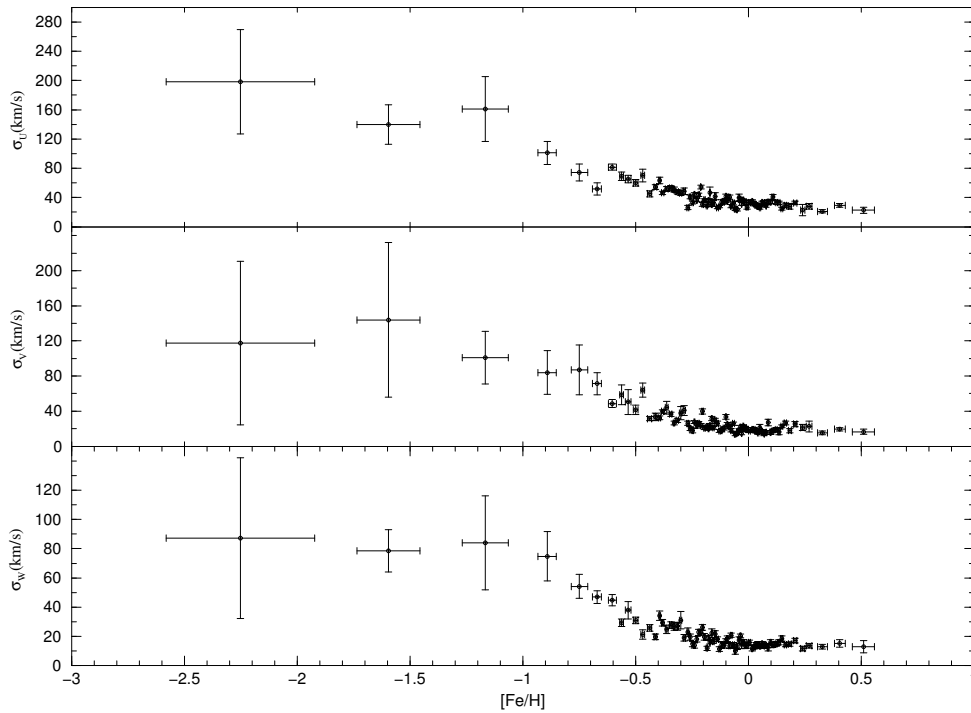


Figura 4.7: Dispersión de las tres componentes de la velocidad espacial en función de $[Fe/H]$. Los intervalos y barras de error se han calculado análogamente a la figura 4.6

Discutiremos más a fondo éste y otros aspectos de la formación de la Galaxia en el capítulo 6.

Las figuras 4.8 y 4.9 muestran las componentes de la velocidad y sus dispersiones en función de $(V - K)_0$. La primera de las figuras muestra una clara dependencia de la media de la componente V de la velocidad con $(V - K)$, en especial en el rango $1.2 < (V - K) < 1.6$. Por debajo de este intervalo el valor promedio de V es cero, mientras que por encima se estabiliza alrededor de un valor de -30 km/s. Este comportamiento es lo que se conoce como *discontinuidad de Parenago* (Parenago 1950).

Para entender este comportamiento debemos pensar que a medida que avanzamos por la secuencia principal hacia las estrellas más frías encontramos progresivamente estrellas formadas en épocas más dispares. En la zona de las estrellas más calientes sólo las estrellas jóvenes permanecen aún en la secuencia principal, por lo que la dispersión de edades es pequeña. Al desplazarnos hacia tipos espectrales más fríos, el rango de edades va aumentando progresivamente, hasta alcanzar el máxi-

mo en el color correspondiente al *turn-off* de las estrellas más viejas de la Galaxia ($(V - K) \approx 1.6$). A partir de aquí el rango de edades ya no aumenta, puesto que, independientemente de cuando se formase, ninguna estrella ha tenido aún tiempo de evolucionar hacia la fase de gigante abandonando la secuencia principal.

Así pues, al realizar promedios de la dispersión de velocidad en función del color, encontramos una primera zona de la secuencia principal (la correspondiente a las estrellas calientes) donde la dispersión es poco dependiente del color, ya que en ella encontramos tan sólo estrellas del disco con cinemática relativamente parecida. Al avanzar hacia las estrellas frías cada vez encontramos más estrellas viejas y por tanto con valores más dispares de la velocidad, con lo que la dispersión de la velocidad aumenta. Como acabamos de decir, a partir de ($(V - K) \approx 1.6$) la mezcla de edades ya no aumenta, por lo que el valor de las dispersiones se estabiliza. Este mismo razonamiento puede ser aplicado para explicar el comportamiento de \bar{V} en función del color (figura 4.8).

Podemos ahora discutir como ha de ser la dependencia de $f_{\bar{V}}$ con $(V - K)_0$ y $[Fe/H]$. Recordemos que $f_{\bar{V}}(U, V, W)$ (ecuación 4.3) está parametrizada en función de las velocidades medias \bar{U} , \bar{V} y \bar{W} y de las respectivas dispersiones σ_U , σ_V y σ_W . Tanto \bar{V} como las tres dispersiones, según hemos visto, dependen claramente de la metalicidad. Por otra parte, tras el análisis anterior, es obvio que si dispusiéramos de una muestra de estrellas de una misma edad no encontraríamos dependencia entre la cinemática y el color. Como precisamente nuestra intención es separar la muestra en diferentes poblaciones, cada una de ellas con una cinemática, una metalicidad y una edad diferenciada, no hará falta suponer una relación entre los parámetros cinemáticos y el color $(V - K)$.

4.4. Errores observacionales

Al realizar varias observaciones de una misma variable, el conjunto de valores medidos puede ser representado por una distribución gaussiana alrededor de un cierto valor medio con una cierta dispersión. Esta dispersión se puede identificar con el error observacional de la variable. El método de máxima verosimilitud que queremos implementar debe tener en cuenta estos errores.

En el presente trabajo han sido considerados los errores observacionales en la

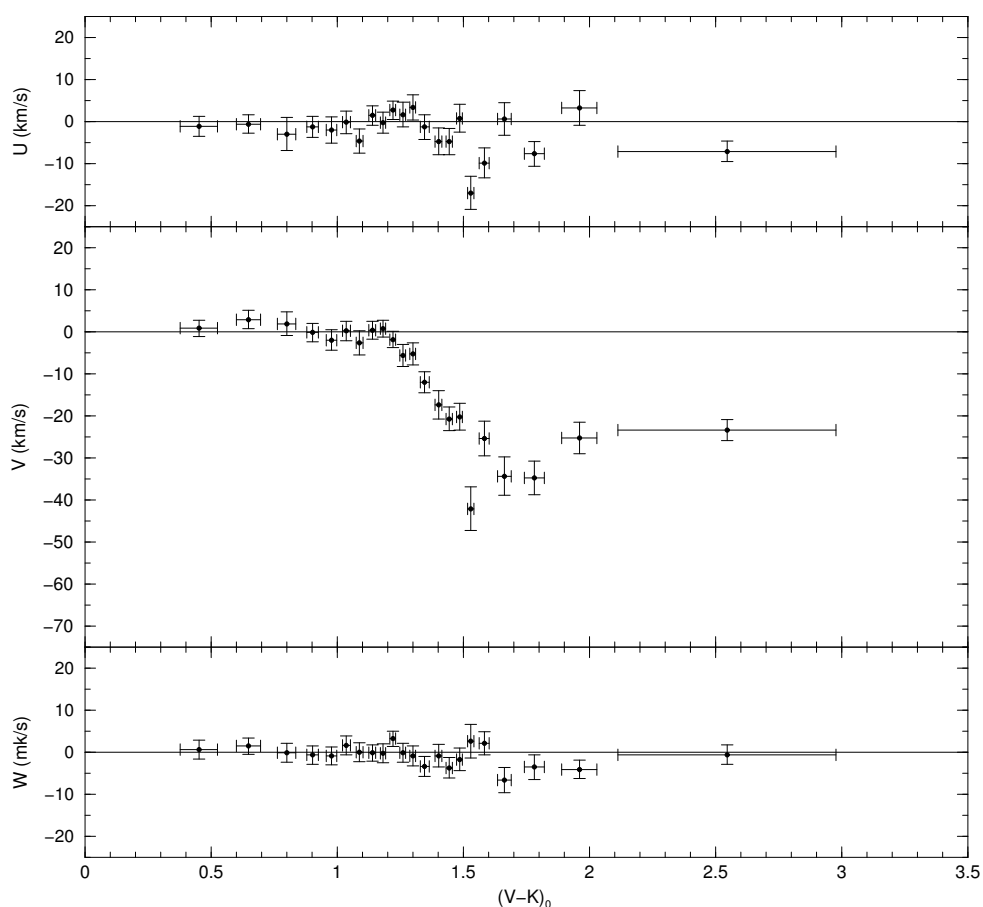


Figura 4.8: Velocidades medias referidas al LSR en función de $(V - K)_0$. Los intervalos y barras de error se han calculado análogamente a la figura 4.6

paralaje, el movimiento propio, la velocidad radial y la metalicidad. Para ser estrictos deberíamos considerar el error observacional de cada una de las variables, pero en la práctica algunas de estas variables (l , b , magnitudes y colores) son medidas con suficiente precisión como para poder ignorar su error. Hemos visto que los datos Hipparcos proporcionan valores de (l, b) con un error medio inferior al milisegundo de arco, mientras que los errores en las magnitudes y colores fotométricos para nuestras estrellas suelen ser del orden de la centésima de magnitud, valores que justifican considerar estas variables libres de error.

Matemáticamente, la distribución de las variables libres de error se puede expresar a través de la función *Delta de Dirac* $\delta(x' - x)$ ¹, mientras que el resto son las

¹Utilizaremos la notación x' para asignar los valores observados de las variables.

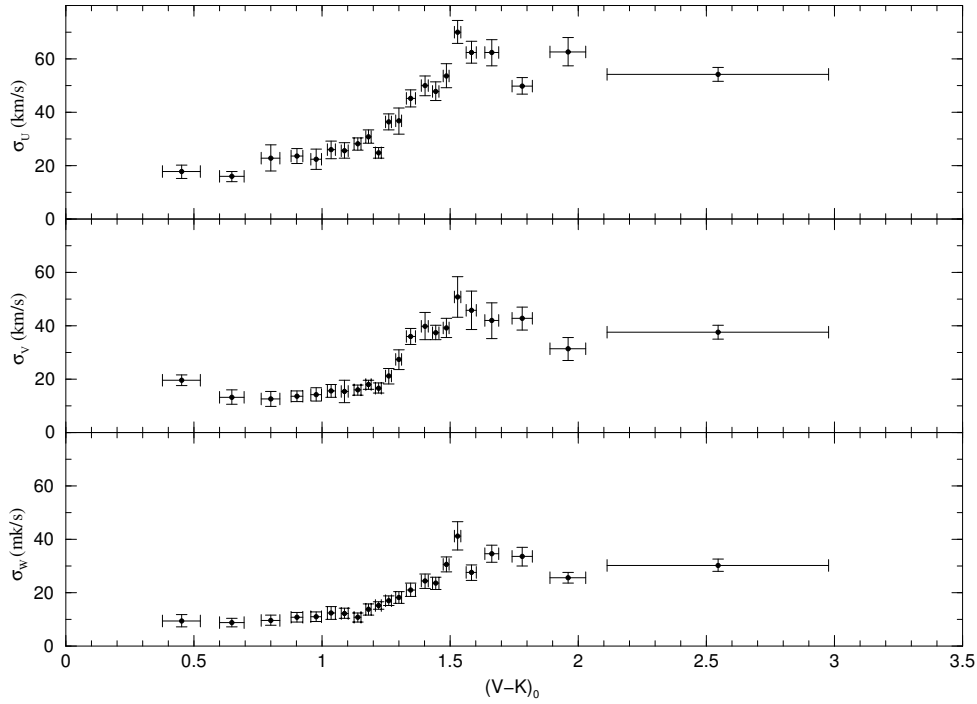


Figura 4.9: Dispersión de las tres componentes de la velocidad referida al LSR en función de $(V - K)_0$. Los intervalos y barras de error se han calculado análogamente a la figura 4.6

mencionadas funciones gaussianas. Así pues, en nuestro caso el error total se puede expresar como:

$$\Sigma = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi' - \pi}{\epsilon_\pi}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu'_l - \mu_l}{\epsilon_{\mu_l}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu'_b - \mu_b}{\epsilon_{\mu_b}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v'_r - v_r}{\epsilon_{v_r}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{[Fe/H]' - [Fe/H]}{\epsilon_{[Fe/H]}}\right)^2} \delta(m' - m)\delta(l' - l)\delta(b' - b)\delta(C'_1 - C_1) \quad (4.9)$$

En la expresión anterior estamos suponiendo que los errores correspondientes a las diferentes variables son independientes entre sí. Esta hipótesis es cuestionable en el caso de (μ_l, μ_b) , ya que ambas cantidades se miden conjuntamente y sus errores pueden presentar correlaciones.

En caso de utilizar como variable la distancia en lugar de la paralaje (ver apéndice A), el error de aquella se puede calcular a partir del correspondiente error en la paralaje:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_\pi}{\pi^2} \quad (4.10)$$

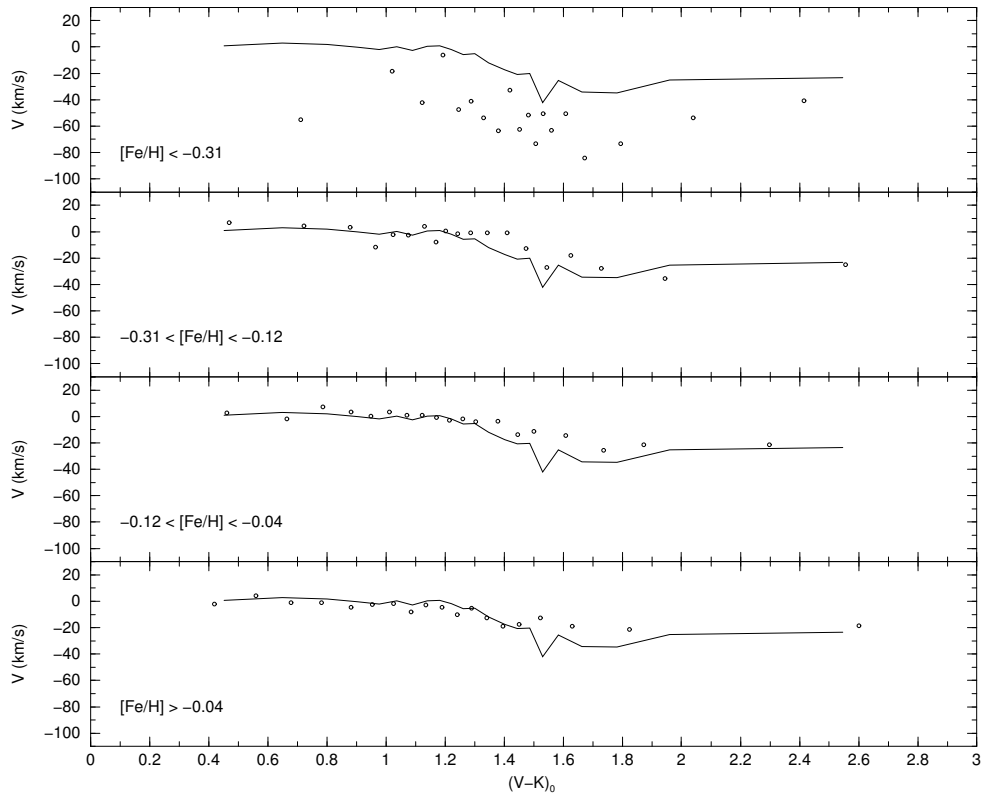


Figura 4.10: Relación entre \bar{V} y $(V - K)$ por grupos de metalicidad. La línea continúa es la relación obtenida para toda la muestra (figura 4.8). La desviación del punto a $(V - K) = 1.5$ es debida a la gran presencia en la muestra de estrellas poco metálicas a esta temperatura

Si usásemos la temperatura en vez del color $(V - K)_0$ se debería considerar su error, introduciendo en la expresión anterior la correspondiente función gaussiana. Sin embargo, como se puede ver en el desarrollo de la función de verosimilitud (apéndice A), la inclusión de este error complica enormemente las integrales a resolver, haciendo necesario el cálculo de una integral numérica doble para cada estrella. Es por ello que en esta implementación del método hemos optado por utilizar el color $(V - K)_0$ (el cual puede ser considerado libre de error) en vez de la temperatura efectiva, dejando la inclusión de ésta última para versiones futuras.

4.5. Efectos de selección y sesgos observacionales

Es evidente que nuestra muestra no está compuesta por todas las estrellas que forman la población base, siendo posible incluso que no sea representativa de la misma. Al construir la muestra se han ido seleccionando las estrellas de acuerdo a diversos criterios, hasta configurar la muestra final. Estos criterios, o efectos de selección, son extremadamente difíciles de modelizar, ya que suelen estar originados por diversas causas no siempre conocidas (limitaciones observacionales, utilización de uno u otro catálogo, mezcla de catálogos, etc).

Sin embargo, el estudio de los efectos de selección es de vital importancia si queremos obtener resultados representativos de la población a partir de estas muestras sesgadas. El ejemplo más evidente es el de la selección por magnitud aparente. Supongamos que queremos determinar \overline{M}_v , magnitud absoluta promedio de una muestra, asumiendo una distribución gaussiana de la misma. La manera en que el ajuste por máxima verosimilitud calcula este valor es *comparando* el histograma de magnitudes aparentes obtenido para un valor de \overline{M}_v dado con el de la muestra real. Ahora bien, sabemos que la muestra es completa hasta una magnitud aparente m_c , de tal manera que el número de estrellas en función de la magnitud aparente disminuye a partir de m_c . Si no tenemos en cuenta la modelización de este sesgo observacional, el valor de \overline{M}_v que mejor reproducirá el histograma de magnitud aparente observado será más brillante (para compensar la falta de estrellas débiles en la muestra) del que realmente tiene la población base. Por otro lado, si modelizamos de forma incorrecta la función de selección nos podemos encontrar con que el histograma de magnitudes aparentes predicho a partir de \overline{M}_v diste mucho de tener la forma que tiene el histograma de nuestra muestra observada, como explicaremos con más detalle en la sección 4.5.1. Algo similar ocurre para la distribución de otros parámetros, como puede ser el color ($V - K$).

Los *sesgos observacionales* introducidos en una muestra por los efectos de selección pueden ser de diferentes tipos:

- sesgos en la posición: las limitaciones observacionales (por ejemplo realizar las medidas desde un mismo observatorio) pueden provocar que nuestra muestra no cubra toda la bóveda celeste. Esto podría tener efecto en la determinación de la distribución espacial.

- sesgos cinemáticos: las estrellas con un movimiento propio elevado son incluidas con mayor frecuencia en los programas de determinación de velocidades radiales. Esto provoca que una muestra con velocidades radiales se encuentre sesgada hacia estos movimientos propios elevados, afectando a la determinación final de la cinemática de la población.

Por otra parte, es sabido que en la confección del catálogo de entrada de la misión Hipparcos se favoreció la presencia de estrellas de alto movimiento propio.

- sesgo en la magnitud aparente: también conocido como sesgo de Malmquist. Este sesgo afecta a la magnitud absoluta promedio de muestras limitadas en magnitud aparente (ver sección 4.5.1).
- sesgo en la estimación de la distancia: la utilización de la paralaje trigonométrica para estimar la distancia ($r = 1/\pi$) produce resultados sesgados aún cuando aquella no esté sesgada. Si suponemos que el error de la paralaje sigue una distribución gaussiana centrada en un valor π_0 , se puede demostrar (Luri y Arenou 1997) que el correspondiente error de r sigue una cierta distribución con un valor esperado r'_0 diferente a $r_0 = 1/\pi_0$. Es decir, el valor *más probable* de r , dados π_0 y su distribución de error, no es r_0 , sino r'_0 . Lo mismo sucede para cualquier otra cantidad derivada a partir de la paralaje, como puede ser la magnitud absoluta de la estrella.

Hay que insistir en que este efecto estará siempre presente, puesto que es intrínseco de la paralaje e independiente de cualquier otro efecto de selección.

No debemos confundir este efecto con el denominado sesgo de Lutz-Kelker (Lutz y Kelker 1973). Éste último nos dice que dada una muestra de estrellas seleccionadas de tal forma que el valor de su paralaje, o de su error relativo, no supere un cierto valor límite, el valor medio observado de la paralaje de la muestra será mayor que su valor real, como efecto del error gaussiano de la paralaje y del incremento de volumen de espacio observado en función de la distancia.

- otros sesgos, como los provocados por la selección de un determinado tipo espectral, o rango de metalicidades. En general, el efecto de estos sesgos dependerá de como se relacionen estos parámetros con las variables que caracterizan la población.

En el caso que nos ocupa, hemos considerado que nuestra muestra está libre de sesgos en posición, ya que en primera aproximación cubre todo el cielo uniformemente. Respecto al sesgo cinemático, al no haber exigido medidas de velocidad radial es de suponer que nuestra muestra no estará excesivamente afectada por el sesgo cinemático asociado a dichas medidas. Sin embargo sí que lo estará por ser una submuestra del catálogo *Hipparcos*. El hecho de que la selección de las estrellas Hipparcos no obedezca exclusivamente a criterios observacionales, sino que muchas de estrellas fueron incluidas *ad hoc* por su interés científico, hace extremadamente difícil modelar este sesgo. En este sentido se realizaron varias pruebas con funciones de selección que intentaban favorecer la presencia de estrellas de alto movimiento propio, pero ninguna de ellas dió resultados satisfactorios. Queda por tanto pendiente para trabajos futuros la modelización del sesgo cinemático.

Los otros sesgos son corregidos de forma natural en el ajuste por máxima verosimilitud, siempre que las funciones de selección y los errores observacionales estén bien modelizados.

Para tener en cuenta estos sesgos debemos definir una *función de selección* $S(x)$ que dé cuenta de la probabilidad de que una estrella con un valor x de una cierta variable sea incluida en la muestra. En nuestro caso hemos tenido cuenta los efectos de selección en la magnitud aparente m_c y en el color $(V - K)$, de forma que la función de selección final es el producto de las funciones para cada variable:

$$S(m', (V - K)') = S_m(m')S_{(V-K)}((V - K)') \quad (4.11)$$

Estamos suponiendo que ambas funciones de selección son independientes. La forma explícita de cada una de estas funciones es discutida en las secciones 4.5.1 y 4.5.2. Es importante notar que la función de selección depende de los valores observados (indicados con un apóstrofe), afectados de error, y no de los valores reales.

4.5.1. Selección en la magnitud aparente

Cualquier muestra está en mayor o menor grado limitada en magnitud aparente. El caso más corriente es que la muestra sea completa hasta una magnitud denominada de *completitud* y que para magnitudes más debiles la probabilidad de que

una estrella pertenezca a la muestra disminuya hasta hacerse nula para estrellas con magnitud aparente superior a una cierta magnitud *límite*. El caso más sencillo se da cuando $m_{lim} = m_c$. Es decir, la muestra es completa hasta $m' = m_c$ y no existen estrellas con magnitudes más débiles.

Se puede demostrar que para una muestra limitada en magnitud aparente la magnitud absoluta media de la muestra es más brillante que la magnitud absoluta media de la población de la cual ha sido extraída, denominándose la diferencia entre ambas medias *sesgo de Malmquist*, por el astrónomo sueco K. G. Malmquist que lo formuló. La explicación es sencilla: el volumen de espacio dentro del cual podemos ver estrellas brillantes es mucho mayor que el correspondiente a estrellas débiles, con lo cual las primeras estarán presentes en mayor número dentro de la muestra.

Tradicionalmente el sesgo de Malmquist se corrige después de haber estimado la magnitud absoluta media de la muestra y su dispersión, obteniendo así una estimación de la magnitud absoluta media de la población. Para muestras en que $m_{lim} = m_c$, el mismo Malmquist (1936) demostró que el valor del sesgo es aproximadamente igual a $1.38\sigma_M^2$, siendo σ_M la dispersión de magnitudes absolutas de la población. La expresión anterior es tan sólo una aproximación de primer orden y requiere que la población cumpla ciertas condiciones (como estar distribuida homogéneamente en el espacio) que raramente se cumplirán. El sesgo de Malmquist puede ser tratado de una forma más rigurosa utilizando un ajuste por máxima verosimilitud. Luri et al. (1993) utilizan dicho método para obtener una expresión más precisa del sesgo para el caso $m_{lim} = m_c$.

En el caso más general en que $m_{lim} > m_c$, como es el que nos ocupa, debemos elegir una función de selección $S(m')$ que permita reproducir la distribución de magnitudes aparentes. Para ello, observemos la figura 4.11. En línea discontinua se muestra la distribución $F(m')$ de la magnitud aparente de una muestra simulada suponiendo que ha sido extraída de una única población base con una relación $M_v - (V - K)$ lineal que ajusta la dada por Schmidt-Kaler (1982), adoptando una distribución espacial de tipo disco exponencial con $Z_h = 300$ pc y la distribución de $(V - K)$ de la tabla 4.1. El histograma corresponde a la distribución de magnitud aparente de las estrellas del catálogo *Hipparcos* de secuencia principal seleccionadas según se ha descrito en la sección 2.1.3. De la figura 4.11 deducimos que existe una magnitud m_c hasta la cual la probabilidad de que una estrella pertenezca a la muestra es independiente de su magnitud. Esta probabilidad será igual a 1 si la

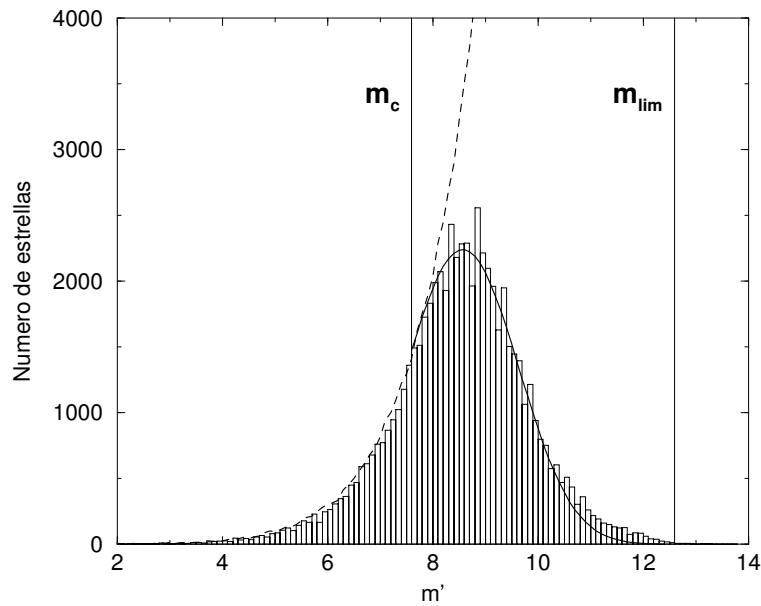


Figura 4.11: Función de selección $S_m(m')$. El histograma es el correspondiente a las estrellas del catálogo *Hipparcos* de secuencia principal. La línea discontinua muestra la distribución de magnitudes aparentes de la población base (sin ningún sesgo observacional). La línea continua es el ajuste del histograma suponiendo un sesgo en la magnitud aparente como el descrito en el texto

muestra es completa hasta dicha magnitud. A partir de m_c la probabilidad disminuye hasta hacerse nula para una magnitud límite m_{lim} .

Definimos $S_m(m')$ suponiendo que entre m_c y m_{lim} una estrella tiene una probabilidad de ser incluida en la muestra dada por una función gaussiana centrada en m_c y con una dispersión σ_{m_c} tal que para $m' = m_{lim}$ la probabilidad sea prácticamente nula:

$$S_m(m') = \begin{cases} 1 & \text{si } m' \leq m_c \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m'-m_c}{\sigma_{m_c}}\right)^2} & \text{si } m_c < m' < m_{lim} \\ 0 & \text{si } m' \geq m_{lim} \end{cases} \quad (4.12)$$

Un ajuste de $S_m(m')$ al histograma de la secuencia principal Hipparcos de los tipos FGK utilizando la distribución de magnitud aparente simulada (normalizada para ajustar la parte brillante del histograma) y adoptando $m_{lim} = 12.5$ da unos valores para m_c y σ_{m_c} de 7.6 y 4.6, respectivamente (figura 4.11). Vemos que el producto $F(m') \cdot S_m(m')$ ajusta razonablemente bien el histograma. Hay que tener

en cuenta que se trata únicamente de probar que la función $S_m(m')$ del tipo descrito en (4.12) es capaz de reproducir el histograma de una muestra sesgada en magnitud aparente, de forma similar a nuestra muestra.

m_c , σ_{m_c} y M_v son parámetros altamente correlados, de forma que considerarlos todos como parámetros libres no garantiza una solución más realista. Así, una determinación errónea de M_v podría ser compensada por una determinación de m_c también errónea para dar un histograma correcto de magnitudes aparentes. Para evitarlo, hemos considerado m_c como parámetro libre y hemos fijado el valor de σ_{m_c} , definiéndolo como:

$$\sigma_{m_c} = \frac{m_{lim} - m_c}{n_{m_c}} \quad (4.13)$$

Como veremos en el próximo capítulo, n_{m_c} será un parámetro que deberemos fijar antes del ajuste. En el caso del histograma de la figura 4.11, $n_{m_c} = 5$, de forma que $S(m_{lim}) \simeq 4 \cdot 10^{-5}$ (independientemente del valor de m_c).

Por último supondremos que el sesgo en magnitud aparente, y por tanto m_c , puede depender de la metalicidad. Con ello se quiere reflejar el hecho de que la muestra podría tener un cierto sesgo hacia estrellas de una metalicidad dada. Por ejemplo, en el catálogo *Hipparcos* se favoreció la presencia de estrellas poco metálicas, de la misma manera que lo hacen muchas las campañas de fotometría Strömgren o de espectroscopía. Si esto no es así, el propio ajuste nos dará valores de m_c independientes de la metalicidad.

4.5.2. Selección en el color ($V - K$)

La distribución de $(V - K)_0$ de nuestra muestra viene determinada por los siguientes puntos:

- la distribución de $(V - K)_0$ de la población base (ver sección 4.2.5),
- la selección en magnitud aparente descrita en el apartado anterior, a través de la relación $M_v - (V - K)_0$, y
- la selección en $(V - K)$ propiamente dicha, debido en nuestro caso a que nos hemos restringido a unos ciertos tipos espectrales y, como veremos, al hecho de haber exigido medidas de la metalicidad para todas las estrellas de la muestra.

La forma que hemos adoptado para la distribución de $(V - K)_0$ de la población base (expresión 4.5) permite modelizar que nuestra muestra está compuesta por estrellas pertenecientes a un rango espectral determinado. Para ello debemos ajustar la dispersión de la gaussiana por su parte izquierda ($\sigma_{(V-K)}^-$) de tal manera que reproduzca la distribución espectral de las estrellas más calientes de la muestra.

Debemos además definir los valores extremos $(V - K)_{inf}$ y $(V - K)_{sup}$. Similarmente al caso de la magnitud aparente, estos valores se definen a partir de los valores observados de la muestra.

Por último cabría plantearse si existe algún otro sesgo en la distribución de $(V - K)$, debido por ejemplo al hecho de haber exigido valores de la metalicidad para todas las estrellas. Es de esperar, sin embargo, que esta exigencia afecte más a la distribución de magnitud aparente que a la del color (o al tipo espectral). En cualquier caso, el parámetro A de la expresión (4.5), que representa la abundancia relativa de estrellas en torno al *turn-off* respecto de las estrellas más frías, puede también interpretarse como un sesgo observacional.

Así pues, la propia expresión 4.5 contiene suficientes parámetros para modelizar un posible sesgo observacional en el color $(V - K)$.