

Càtedra d'Astronomia
Dept. de Física de l'Atmosfera, Astronomia i Astrofísica
Facultat de Física
Divisió de Ciències Experimentals i Matemàtiques
Universitat de Barcelona



SUPERPOSICIÓ DE SISTEMES ESTEL·LARS
A SIMETRIA CILÍNDRICA

Memòria presentada per
RAFAEL CUBARSI i MORERA
per a optar al grau de
Doctor en Ciències Físiques

Barcelona, 15 de Novembre de 1988

Després de colpejar-se el pit
va amonestar el seu cor amb
aquestes paraules: Aguanta,
cor meu, que has sofert coses
encara més dures.

HOMER, *L'Odissea*.

SUPERPOSICIÓ DE SISTEMES ESTEL·LARS A SIMETRIA CILÍNDRICA

Introducció	3
1- Dinàmica de sistemes estel·lars	9
1.1- Equació fonamental de la dinàmica estel·lar	9
1.2- Moments de la distribució de velocitats	17
1.3- Sistemes estel·lars de Chandrasekhar	22
1.4- Relacions cinemàtiques	32
2- Superposició de sistemes: Potencial	37
2.1- Poblacions estel·lars	37
2.2- Superposició de sistemes de Chandrasekhar	44
2.3- Potencials particulars	54
2.4- Conseqüències cinemàtiques	61
3- Superposició de sistemes: Distribució de velocitats	70
3.1- Superposició de distribucions d'Schwarzschild	70
3.2- Moments centrats	79
3.3- Distribucions a simetria cilíndrica	88
3.4- Fórmules d'acotació i càlcul d'errors	102
4- Aplicació a l'entorn solar	109
4.1- Mostres de l'entorn solar	109
4.2- Determinació dels moments	118
4.3- Discussió de resultats	130
4.4- Conclusions	136
Bibliografia	140

Perquè ni m'arribo a concedir, quan a un u afegim un altre u, que és el primer u el qui es converteix en dos, o és el segon, o és l'un i l'altre plegats, per l'addició de l'un a l'altre, que es converteixen en dos. Em sorprèn, en efecte, que quan cadascun d'ells estava separat de l'altre, cadascun era u i no era dos, i que quan s'acosten, aquest encontre que els posa de costat és la causa que arribin a ésser dos.

PLATÓ, Fedó.

La història de la superposició de sistemes estel·lars té els seus orígens a l'any 1905, quan Kapteyn s'adonà de l'assimetria que presentava la distribució de velocitats residuals de determinats grups estel·lars. El mateix Kapteyn (1922) proposà un model teòric explicatiu del fet, superposant dues distribucions esfèriques excèntriques. Posteriorment, Strömberg (1925) aplicà diferents mètodes de superposició amb distribucions el·lipsoidals per a descriure un conjunt d'estrelles lentes mesclades amb estrelles de gran velocitat. D'aleshores ençà alguns autors han aplicat diversos criteris de superposició. En una primera etapa hi trobem autors com Gliese (1941) i Éinasto (1952, 1954). Posteriorment, Iwanovska (1966), Dessureau & Uppgren (1975), Éinasto (1976), Kondratev & Ozernoy (1982) i Wyse & Gilmore (1986). La majoria d'aquests treballs es basen en la superposició de distribucions gaussianes, des d'un punt de vista purament estadístic, i els altres es fonamenten en criteris gràfics o d'aproximació numèrica. El que tenen tots ells en comú és que, per a fer l'ajust, només empen moments fins a segon ordre i, a més, no estan emmarcats dins cap model dinàmic.

Si bé en una primera etapa semblava que el tema no despertava prou interès, va ser a partir de la distinció entre poblacions estel·lars, introduïda per Baade (1944), que va anar prenent color. El concepte de població estel·lar evolucionà fins a adquirir forma ben definida a la Conferència Vaticana de l'any 1957 i, des d'aleshores, quan es fa superposició de funcions de distribució, és inevitable associar cada un dels subsistemes a un determinat tipus de població estel·lar amb característiques astrofísiques pròpies: edat, comportament cinemàtic, distribució espacial, composició química, etc.

Amb independència del que s'ha explicat, Chandrasekhar, a l'any 1942, va establir els postulats fonamentals per a un model dinàmic de sistema estel·lar i va suggerir l'estudi de la superposició dels sistemes que proposava. En aquest sentit, Ros (1983) va estudiar alguns casos de superposició de dues funcions de distribució quadràtiques en les velocitats residuals de les considerades per Chandrasekhar. Tot i restringint-se a sistemes estel·lars amb rotació pura, va donar explicació dels moments centrats fins a quart ordre, incloïent-hi alguns de tercer ordre, dels quals Erickson, a l'any 1975, ja havia comprovat l'existència. Si bé Ros no feia ús del model dinàmic de Chandrasekhar, sí que, a partir de consideracions sobre el potencial i les integrals primeres del moviment de les estrelles, podia treure algunes conclusions dinàmiques sobre les mostres estel·lars que estudiava.

L'estudi dels sistemes de Chandrasekhar, particularment a simetria cilíndrica, s'ha anat refinant i completant (Orús, 1952; Català, 1972) i és amb el model no estacionari i a simetria cilíndrica de Sala (1986) que en el present treball s'estudia la superposició de dos sistemes d'aquestes característiques. El fet d'adoptar un model

dinàmic concret permet interpretar físicament resultats que d'altra forma serien purament estadístics. Permet, segons els casos, parlar de la localització de les mostres estel·lars, de la seva evolució espacial o temporal i, evidentment, dels tipus de potencials que es donen.

El model adoptat és prou general com per a donar explicació de tots els moments centrats de la distribució de velocitats. Tant els d'ordre parell com imparell. En particular, conté les conseqüències del fenomen de la desviació del vèrtex, que s'observa localment, i no fa cap hipòtesi sobre la situació de les mostres estel·lars estudiades, és a dir, l'explicació no es restringeix al pla galàctic. Per altra part, el moviment dels sistemes estel·lars considerats no té per què ser de rotació pura, és més, es poden explicar fenòmens d'expansió o de contracció de les mostres estel·lars en altres direccions.

El procediment que es segueix consisteix en descomposar un sistema estel·lar, materialitzat en la taula de moments de les velocitats residuals de la corresponent mostra, en dos subsistemes, dels quals es determina el percentatge de població, els respectius moments o dispersions i la diferència de velocitat dels centroides. Mitjançant aquests resultats, en concret la component rotacional de la velocitat de cada centroide i les dispersions, es pot classificar —d'acord amb criteris de diversos autors— cada subsistema, és a dir, relacionar-lo amb el tipus de població estel·lar de similars característiques. Així, fent ús de criteris purament cinemàtics es dona compte de la composició de la mostra i dels paràmetres cinemàtics de les submostres, amb les seves relacions.

L'ordenació del present treball és com segueix: Al primer capítol s'exposen els enfocaments bàsics de la dinàmica i l'estadística estel·lars a partir de la funció de distribució de les velocitats i dels moments centrats de la mateixa. Es revisa la relació que hi ha entre alguns tipus de potencials, integrals primeres del moviment i moments centrats. Es presenta el model de sistema estel·lar de Chandrasekhar, amb les equacions que han de complir els diferents paràmetres que hi intervenen, en especial el potencial i el tensor A, la forma del qual és independent de si es fa o no superposició. Es posa de manifest la relació d'aquest tensor amb el tensor de moments i s'expressen les característiques cinemàtiques del model a través dels moments centrats i la velocitat del centre de massa del sistema, característiques que satisfaran, quan apliquem superposició, cada un dels subsistemes. La resolució del potencial es deixa pel segon capítol que és on realment es comença a estudiar la superposició de sistemes.

Al segon capítol, es comença amb una breu explicació de la història i l'estat actual de la qüestió de les poblacions estel·lars. Serà necessari referir-s'hi quan es vulgui caracteritzar físicament els subsistemes en que es divideix cada mostra estel·lar. Posteriorment es passa a resoldre les equacions de Chandrasekhar que contenen el potencial. Aquest, en ser comú als dos sistemes que es superposen, sofrirà algunes restriccions respecte a les solucions que s'obtidrien per a un únic sistema. S'estudia, en un primer pas, el potencial més general, sense cap hipòtesi addicional sobre la seva forma i, posteriorment, els casos particulars, però interessants, de potencial separable i estacionari. En cada cas s'obté una sèrie de lligams entre els paràmetres dels subsistemes, que són condicions necessàries per a que aquests subsistemes puguin compartir el potencial. Finalment s'extreuen les conseqüències i relacions

que implica la superposició, interpretant-les cinemàticament a partir de les velocitats dels centroides, de l'orientació dels el·lipsoïdes de velocitats residuals, de les relacions entre els moments centrats de cada sistema, etc.

Al tercer capítol es calculen les fórmules dels moments totals en funció dels parcials i es particularitza a la superposició de distribucions d'Schwarzschild. Es transformen les fórmules obtingudes de forma que, les unes, permetin obtenir paràmetres dels subsistemes en funció de paràmetres del sistema total i, les altres, donguin equacions de lligadura entre paràmetres del sistema total. Entre aquestes se'n calculen unes pels moments de tercer ordre que, en l'aplicació posterior, seran de gran utilitat. A més, s'indica un mètode general pel qual, sense hipòtesis suplementàries, es determinarien, en cas de saber amb suficient exactitud els moments centrats totals, totes les incògnites del model. Malauradament, les dades de que es disposa són, per a alguns moments centrats, poc exactes, especialment pels de tercer ordre, i algunes de les relacions obtingudes són força complexes, de manera que, en fer-ne l'aplicació, els errors numèrics desfigurarien els resultats. Al introduïr la hipòtesi de simetria cilíndrica, les anteriors relacions queden bastant simplificades i se'n obtenen unes que generalitzen les de Ros (1983) i altres de noves. Així mateix, s'arriba a unes simples equacions de lligadura entre moments totals, que permetran l'acotació dels errors, i a un conjunt de desigualtats, que serviran al mateix fi. A l'últim apartat s'expliquen els mètodes d'acotació, que no consisteixen en aproximacions lineals i tècniques de diferències finites, sinó a treballar amb intervals, el qual dóna una idea molt més exacta dels marges de variació numèrica de les quantitats que entren en joc.

Finalment, al quart capítol, s'exposen les mostres a les que s'aplicarà el nostre model, a saber, la de Erickson (1975) constituïda per 869 estrelles a distància menor que 22 pc del sol, la general de Torra (1984) formada per 3822 estrelles fins a una distància heliocèntrica aproximada de 500 pc i una mostra de Figueras (1986) que la formen 7398 estrelles dins un radi de 300 pc de centre el sol, amb errors molt petits i selecció molt acurada d'estrelles. Les mostres, totes elles, són suficientment locals com per a poder aplicar un mètode de superposició de dues poblacions. S'indica el procediment de càlcul i es mostren els resultats obtinguts. Es descriu la composició i comportament de cada mostra i es realitzen les comparacions amb els resultats d'altres autors. En darrer lloc, com és obligat, van les conclusions.

Desitjo acabar agraïnt sincerament al Dr. Juan J. de Orús el fet d'haver-me proposat i dirigit aquest treball, la seva sàvia experiència i intuïció han descartat mals camins i han fet possible encaminar-lo a bon terme. També vull agraïr a la Dra. Rosa M. Ros, predecessora meva en el tema de la superposició, tota la informació rebuda, a la Dra. Francesca Figueras, en proporcionar-me la seva mostra estel·lar, al Dr. Ferran Sala, els diversos comentaris sobre el seu model i, en general, a tots els que d'una forma o altra han col·laborat.

1.1- Equació fonamental de la dinàmica estel·lar

Un sistema estel·lar es descriu donant la distribució estel·lar a l'espai de les fases:

Els elements de l'espai de les fases són parelles de vectors \underline{r} i \underline{V} , representants de la posició i velocitat de cada estrella respecte a un sistema inercial de referència.

La distribució estel·lar es suposa contínua i donada mitjançant la funció densitat a l'espai de les fases $f(t, \underline{r}, \underline{V})$, que proporciona, per a cada temps t , el nombre d'estrelles amb posició compresa entre \underline{r} i $\underline{r}+d\underline{r}$ i velocitat entre \underline{V} i $\underline{V}+d\underline{V}$. Generalment, ens hi referirem simplement com a funció de distribució. Suposarem que f és contínua, diferenciable i integrable en el sentit que, en cada cas, faci falta.

Si acceptem que totes les forces que actuen sobre el sistema estel·lar deriven d'un potencial gravitatori $U(t, \underline{r})$ i despreciam les degudes a encontres estel·lars, el moviment d'una estrella estarà regit, en coordenades cartesianes i suposant que la massa de totes les estrelles és la mateixa i igual a la unitat, pel següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}} &= \underline{V} \\ \dot{\underline{V}} &= - \nabla_{\underline{r}} U(t, \underline{r})\end{aligned}\tag{1.1}$$

Parlem breument de la hipòtesi que s'acaba d'introduir. És sabut que el temps de relaxació per a

encontres estrella-estrella, a l'entorn de la posició solar, és de l'ordre de 10^{14} anys (Chandrasekhar, 1942), per tant, comparant-ho amb el període de rotació galàctica, que vé a ser d'uns 2×10^8 anys, l'efecte es pot considerar totalment despreciable. També recolza la hipòtesi el fet de que, suficientment lluny del nucli galàctic, la distància efectiva d'interacció d'un encontre és de l'ordre d'una seixantena part de la distància mitjana de separació entre estrelles (Ogorodnikov, 1965). No obstant, s'han fet algunes especulacions teòriques sobre els efectes de fricció que podrien produir grans núvols de matèria interestel·lar (Spitzer & Schwarzschild, 1951, 1953). Els núvols causarien irregularitats en el camp gravitatori, en cas de tenir una massa aproximada de $10^6 M_{\odot}$ o superior, però mai s'ha obtingut cap confirmació observacional del fet. Els treballs teòrics i de simulació que s'han realitzat per a estudiar fenòmens de difusió i de dispersió de la velocitat estel·lar amb l'edat (Wielen, 1977; Lacey, 1984) reconeixen que l'efecte hauria estat important en un primer estadi de formació de la galàxia, o en tot cas, podria afectar a estrelles molt joves, i per tant, donen la raó a Chandrasekhar al considerar-los, en la època actual i en la posició solar, sense significància. Àdhuc està en qüestió si la vida mitjana d'aquests complexos nuvolars arribaria al temps mínim dels encontres estrella-núvol (Fujimoto, 1980).

Acceptem, doncs, les equacions (1.1), que constitueixen un sistema hamiltonià (Arnold, 1978). Com a tal, el flux associat preserva volum a l'espai de les fases i la funció de distribució compleix el teorema de Liouville, que afirma la seva conservació al llarg de les trajectòries estel·lars. Per tant, escriurem

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla_{\underline{r}} f + \dot{\underline{V}} \cdot \nabla_{\underline{V}} f = 0 \quad (1.2)$$

expressió que constitueix l'equació fonamental de la dinàmica estel·lar, i que correspon a l'equació de Boltzmann sense col·lisions.

En conseqüència, f és funció de les integrals primeres de les equacions del moviment. Si I_1, I_2, \dots, I_6 són sis integrals primeres independents del sistema (1.1), llavors

$$f(t, \underline{r}, \underline{V}) = f(I_1, I_2, \dots, I_6) \quad (1.3)$$

El problema, però, pot tenir una doble interpretació. En efecte, fent ús de (1.1), podem substituir $\dot{\underline{V}}$ a (1.2),

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla_{\underline{r}} f - \nabla_{\underline{r}} U \cdot \nabla_{\underline{V}} f = 0 \quad (1.4)$$

Sota aquesta forma, l'equació fonamental de la dinàmica estel·lar es pot interpretar com una equació diferencial en derivades parcials lineal i homogènia en f , on es suposa conegut el potencial U , o bé, com una equació diferencial en derivades parcials lineal i no homogènia en U , on es suposa coneguda la funció de distribució f . El primer punt de vista es coneix amb el nom de problema directe de Jeans i en donarem, ara, una formulació més explícita. El

segon enfoc, el problema invers de Jeans, el tractarem posteriorment.

Efectivament, les sis integrals primeres que apareixen a (1.3) no existeixen de forma general, doncs (1.1) no és globalment integrable. Per a obtenir-ne alguna, cal fer hipòtesis restrictives sobre la forma del potencial $U(t, \underline{r})$. Com el present estudi es referirà a sistemes amb simetria cilíndrica, expressarem (1.2) en un sistema de coordenades cilíndriques, sense restar, per això, generalitat al problema. Aleshores,

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Theta \\ Z \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{v}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\Theta^2}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\Pi \Theta}{r} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Així, (1.2) esdevé

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \Pi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\Theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + z \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\Theta^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \Pi} - \\ - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\Pi \Theta}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \Theta} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Llavors, les sis integrals primeres I_1, \dots, I_6 serien les solucions del seu sistema associat,

$$dt = \frac{dr}{\Pi} = \frac{d\theta}{\frac{\theta}{r}} = \frac{dz}{Z} = \frac{d\Pi}{-\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\theta^2}{r}} = \frac{d\theta}{-\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\Pi\theta}{r}} = \frac{dZ}{-\frac{\partial U}{\partial Z}} \quad (1.7)$$

Vegem algunes de les hipòtesis més corrents que es fan sobre el potencial a fi d'obtenir solucions de (1.7):

Si el potencial és estacionari, és a dir,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

l'energia, com ja sabem, es conserva. Una integral primera es podrà escriure com

$$I_1 \equiv V^2 + 2 U(\underline{r}) = \text{const.} \quad (1.9)$$

La hipòtesi d'estacionarietat del potencial queda sovint justificada pel fet de que, en curts intervals de temps, la forma de la galàxia no canvia de manera apreciable.

Si el potencial presenta simetria cilíndrica, és a dir,

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (1.10)$$

s'obté fàcilment la conservació del moment angular o integral de les àrees,

$$I_2 \equiv r \Theta = \text{const.} \quad (1.11)$$

La hipòtesi d'un potencial amb simetria cilíndrica estaria justificada en el cas de galàxies regulars on s'observa, bàsicament, aquest tipus de simetria. L'existència de braços espirals no suposa, en principi, cap contradicció ja que hom creu que són deguts a concentracions d'estrelles més brillants (Lin & Shu, 1964) i no a una distribució estel·lar no simètrica.

Si el potencial és separable en la forma

$$U(t, \underline{r}) = U_1(t, r, \theta) + U_2(z) \quad (1.12)$$

llavors s'obtindria una tercera integral primera:

$$I_3 \equiv Z^2 + 2 U_2(z) = \text{const.} \quad (1.13)$$

La hipòtesi es sol introduïr quan es treballa lluny del centre, però prop del plà galàctic. Llavors, pel principi de superposició, el potencial es desglosa, localment, en un terme representat de tot el disc galàctic, i en un de corrector degut a la altura respecte al plà galàctic.

El problema directe de Jeans es detindria, en aquest punt, a un nivell bastant general, donant —suposant el potencial estacionari, a simetria cilíndrica i separable en el sentit anterior— solucions de la forma

$$f = f(I_1, I_2, I_3) \quad (1.14)$$

Si es vol obtenir solucions més particulars, s'ha de postular formes concretes de funció de distribució: Per exemple (Kurth, 1957), si C és una constant positiva,

$$f = \begin{cases} (C - I_1)^n g(I_1, I_2, I_3) , & \text{si } I_1 \leq C \\ 0 , & \text{altrament} \end{cases} \quad (1.15)$$

Observem que, en aquest cas, la funció de distribució variaria només dins una regió acotada de les velocitats.

Un altre exemple és (Perek, 1962) la generalització d'un cas proposat per Fricke (1952), a partir de polinomis en les integrals primeres,

$$f = \sum_{i,j,k} a_{ijk} I_1^i I_2^j I_3^k \quad (1.16)$$

pensat inicialment només per a potències de I_1 i I_2 .

Altres enfocos possibles, ja tractats en un treball anterior (Cubarsí, 1982), són la utilització de la funció

característica associada a una funció de distribució, és a dir, la seva transformada de Fourier, i un mètode consistent en expressar la funció de distribució a partir d'una certa base de funcions de quadrat integrable. Així s'aconsegueix, a partir dels moments centrats de la distribució de velocitats, coneguts, determinar unívocament la funció de distribució. Al següent apartat parlarem d'aquesta relació entre la funció de distribució i els seus moments centrats.

1.2- Moments de la distribució de velocitats

L'estudi estadístic de les velocitats estel·lars es realitza a partir de diferents moments associats a la funció de distribució, considerant fixats t i \underline{r} :

Localment, la densitat estel·lar o nombre d'estrelles per unitat de volum es calcula a partir de

$$N(t, \underline{r}) = \int_{\underline{V}} f(t, \underline{r}, \underline{V}) d\underline{V} \quad (1.17)$$

La velocitat mitjana local del sistema, o velocitat del centre de masses, ve donada per

$$\underline{v}(t, \underline{r}) = \frac{1}{N(t, \underline{r})} \int_{\underline{V}} \underline{V} f(t, \underline{r}, \underline{V}) d\underline{V} \quad (1.18)$$

El moment centrat d'ordre n es defineix com el tensor

$$\mu_n(t, \underline{r}) = \frac{1}{N(t, \underline{r})} \int_{\underline{V}} (\underline{V} - \underline{v})^n f(t, \underline{r}, \underline{V}) d\underline{V} \quad (1.19)$$

on $(\cdot)^n$ representa la n -potència tensorial, i la diferència

$$\underline{u} = \underline{V} - \underline{v} \quad (1.20)$$

és l'anomenada velocitat residual de l'estrella, o velocitat referida al centroide.

En particular, es verifica

$$\begin{aligned} \mu_0(t, \underline{r}) &= 1 \\ \mu_1(t, \underline{r}) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (1.21)$$

i, en general, el moment centrat d'ordre n és un tensor de $\binom{n+2}{2}$ components, a cada una de les quals també anomenarem —fent un petit abús de llenguatge— moment. Expressarem les components de la següent forma

$$\mu_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{1}{N} \int_{\underline{V}} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_n} f \, d\underline{V} \quad (1.22)$$

on els índexs són del conjunt $\{r, \theta, z\}$ segons sigui la component de la velocitat.

És important el cas $n=2$, en el que al tensor simètric μ_2^{-1} , invers de μ_2 , se li associa l'el·lipsoide de velocitats residuals

$$\underline{u}^T \cdot \mu_2^{-1} \cdot \underline{u} = 1 \quad (1.23)$$

els semieixos del qual, referit als seus eixos, són les velocitats residuals típiques.

Considerant mostres estel·lars a l'entorn solar, que ja detallarem més endavant, es confeccionen les llistes de moments centrats. El mètode d'aquest càlcul estadístic està llargament explicat en els treballs de Núñez (1981), Torra (1984) i, més recentment, el de Figueras (1986), amb importants millores. Convindria recalcar que el càlcul de moments només té sentit localment, doncs, tant la velocitat del centroide com els moments són funció de \underline{r} , que haura de considerar-se comú a tota la mostra si volem que aquelles quantitats en siguin representatives. Com fa notar Chandrasekhar (1942), els moments estan ben definits si hi ha convergència quan el volum tendeix a zero. Les mostres estel·lars han d'estar convenientment triades en un entorn suficientment petit del sol, han de tenir una població considerable per a poder obtenir errors mínims, i, evidentment, han de ser no esbiaixades.

Segons les integrals primeres, el model farà predicció d'unes relacions entre els moments centrats, que s'hauran de contrastar amb les dades de les llistes observacionals. Així, si només es fa la hipòtesi d'estacionarietat del potencial, per tant, la funció de distribució seria funció exclusiva de I_1 , es verificarà (Orús, 1977) $\underline{v}=0$ —cada punt és un centroide immòbil— i les següents relacions, considerant tan sols els moments d'ordre igual o inferior al quart,

$$\begin{aligned} \mu_{rr} &= \mu_{\theta\theta} = \mu_{zz} \\ \mu_{rr\theta\theta} &= \mu_{rrzz} = \mu_{\theta\theta zz} \\ \mu_{rrrr} &= \mu_{\theta\theta\theta\theta} = \mu_{zzzz} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Els moments que no apareixen a (1.24), degut a la paritat de I_1 en les components de la velocitat, seran nuls.

Si a la hipòtesi d'estacionarietat del potencial se li afegeix la de simetria cilíndrica, la funció de distribució serà funció de I_1 i I_2 .

Llavors, en coordenades cilíndriques i notant la velocitat del centroide per

$$\underline{v} \equiv \begin{bmatrix} \Pi_0 \\ \Theta_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Π_0 i Z_0 seran nul·les i, en canvi, no ho serà Θ_0 . Serà un model amb rotació pura. Quant als moments, es complirà

$$\begin{aligned} \mu_{rr} &= \mu_{zz} \\ \mu_{rr\theta} &= \mu_{\theta zz} \\ \mu_{rr\theta\theta} &= \mu_{\theta\theta zz} & \mu_{rrrr} &= \mu_{zzzz} \end{aligned} \quad (1.26)$$

I també seran diferents de zero els moments $\mu_{\theta\theta}$, $\mu_{\theta\theta\theta}$, $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$ i μ_{rrzz} . En aquest model, veiem que hi pot haver alguns moments d'ordre imparell no nuls.

Si a més de les hipòtesis anteriors suposem la de separabilitat del potencial, la funció de distribució seria funció de I_1 , I_2 i I_3 . Com al cas anterior, Π_0 i Z_0 seran nul·les i, en general, Θ_0 no. Els moments diferents de zero seran dotze, a saber,

$$\begin{aligned}
& \mu_{rr} , \mu_{\theta\theta} , \mu_{zz} \\
& \mu_{rr\theta} , \mu_{\theta\theta\theta} , \mu_{\theta zz} \\
& \mu_{rrrr} , \mu_{\theta\theta\theta\theta} , \mu_{zzzz} , \mu_{rr\theta\theta} , \mu_{rrzz} , \mu_{\theta\theta zz}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

sense cap altre tipus de lligam. Per a obtenir lligams més concrets entre els moments i poder-los ajustar a relacions que presenten algunes mostres estel·lars s'ha de jugar amb adequades combinacions lineals de les anteriors integrals primeres. Així, Orús (1980) pren una funció de distribució de la forma

$$f = f(I_1 + (\lambda-1) I_3, I_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

i aleshores els moments verifiquen les relacions

$$\frac{\mu_{rr}}{\mu_{zz}} = \frac{\mu_{rr\theta}}{\mu_{\theta zz}} = \frac{\mu_{rr\theta\theta}}{\mu_{\theta\theta zz}} = \lambda$$

$$\frac{\mu_{rrrr}}{\mu_{zzzz}} = \lambda^2; \quad \frac{\mu_{rrrr}}{\mu_{rrzz}} = 3\lambda$$

que compleixen, en primera aproximació, algunes mostres estel·lars, essent en general diferents de zero els moments $\mu_{\theta\theta}$, $\mu_{\theta\theta\theta}$ i $\mu_{\theta\theta\theta\theta}$. Observi's, però, com a mesura que s'ha anat restringint el potencial, s'ha obtingut més llibertat pels moments. No obstant, sempre cal concretar la forma de la funció de distribució per a que produeixi els moments observats.

1.3- Sistemes estel·lars de Chandrasekhar

S'ha dit a l'apartat 1.1 que l'equació (1.4) pot ser considerada com una equació diferencial en derivades parcials lineal i no homogènia en el potencial U . En aquest cas s'ha de postular el tipus de funció de distribució, com a mínim la dependència en velocitat. Aquest és el camp que van explorar, entre altres, Eddington (1921), Oort (1928) i, diriem que definitivament, Chandrasekhar (1942), introduïnt les següents hipòtesis:

1) Per a cada punt es pot definir de manera única un centroide local amb velocitat \underline{v} , funció contínua del temps t i la posició \underline{r} . Posteriorment, s'exigirà que \underline{v} també sigui diferenciable.

2) La funció de distribució és del tipus Schwarzschild generalitzat, és a dir,

$$f(t, \underline{r}, \underline{V}) = \psi(Q + \sigma) \quad (1.28)$$

on

$$Q = \underline{u}^T \cdot A \cdot \underline{u} \quad (1.29)$$

essent

$$A = A(t, \underline{r}) \quad (1.30)$$

un tensor simètric de segon ordre, funció contínua i diferenciable del temps i la posició, i

$$\sigma = \sigma(t, \underline{r}) \quad (1.31)$$

un escalar, també funció contínua i diferenciable del temps i la posició.

3) Es verifica l'equació fonamental de la dinàmica estel·lar (1.4), amb potencial per unitat de massa $U(t, \underline{r})$.

Per tant, la qüestió que Chandrasekhar es planteja és: quins potencials —i sota quines condicions— són solució de (1.4), quan la funció de distribució és de la forma (1.28).

Portant (1.28) a (1.4),

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{df}{d(Q+\sigma)} \cdot \frac{D(Q+\sigma)}{Dt} = 0 \quad (1.32)$$

per tant,

$$\frac{D(Q+\sigma)}{Dt} \equiv \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{\nabla}_{\underline{r}}(Q+\sigma) - \underline{\nabla}_{\underline{r}} U \cdot \underline{\nabla}_{\underline{V}}(Q+\sigma) = 0 \quad (1.33)$$

Ara bé, per (1.20) i (1.29),

$$Q+\sigma = (\underline{V}-\underline{v})^T \cdot A \cdot (\underline{V}-\underline{v}) + \sigma \quad (1.34)$$

i si es defineix

$$\underline{\Delta} = \underline{A} \cdot \underline{v} \quad (1.35)$$

$$-\chi = \underline{v}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{v} + \sigma = \underline{\Delta} \cdot \underline{v} + \sigma \quad (1.36)$$

(1.34) es pot escriure com

$$Q + \sigma = \underline{v}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{v} - 2 \underline{\Delta} \cdot \underline{v} - \chi \quad (1.37)$$

Definim ara, seguint el formalisme introduït per Orús (1952), uns nous tensors:

El tensor deformació de A, simètric i de tercer ordre,

$$\text{def } A \equiv \frac{1}{3} [\nabla A + (\nabla A)^T + (\nabla A)^{TT}]$$

que per components és

$$\text{def } A \big|_{ijk} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \right)$$

El tensor de deformació de $\underline{\Delta}$, simètric i de segon ordre,

$$\text{def } \underline{\Delta} \equiv \frac{1}{2} [\nabla \underline{\Delta} + (\nabla \underline{\Delta})^T]$$

que per components és

$$\text{def } \underline{\Delta} \mid_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j} \right)$$

I el tensor de deformació de $\underline{\chi}$, un vector que verifica

$$\text{def } \underline{\chi} = \nabla \chi$$

Llavors, substituïnt (1.37) a (1.33) i fent ús dels tensors introduïts, s'obtenen les següents equacions:

$$\text{def } A = 0 \tag{1.38}$$

$$\text{def } \underline{\Delta} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \underline{\epsilon}} \tag{1.39}$$

$$\underline{A} \cdot \nabla U + \frac{\partial \Delta}{\partial t} = - \frac{1}{2} \nabla \chi \quad (1.40)$$

$$\underline{\Delta} \cdot \nabla U = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.41)$$

L'equació tensorial (1.38) és equivalent a deu d'escalars, la (1.39) a sis, l'equació vectorial (1.40) equival a tres equacions escalars i, la darrera, és una equació escalar.

El nostre propòsit és veure quines són les solucions, en el marc d'un model a simetria cilíndrica i no estacionari (Sala, 1986), per a aplicar-les posteriorment a l'estudi de la superposició de dues funcions de distribució de la forma (1.28). Observi's que les equacions (1.38) i (1.39) no depenen del potencial i, per tant, donada una funció de distribució, es resolen independentment de les (1.40) i (1.41). Aquestes, per dependre del potencial, sofriran algunes restriccions quan es faci l'esmentada superposició. Les estudiarem en capítols següents.

En un sistema de coordenades cilíndriques, essent

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \theta} = 0 \quad (1.42)$$

i recordant (1.5), l'equació (1.33) esdevé

$$\frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial t} + \Pi \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial r} + Z \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial z} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\Theta^2}{r} \right) \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial \Pi} -$$

$$- \frac{\Pi \Theta}{r} \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial \Theta} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial Z} = 0$$

Si expressem A i $\underline{\Delta}$ de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rz} \\ A_{r\theta} & A_{\theta\theta} & A_{\theta z} \\ A_{rz} & A_{\theta z} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_\theta \\ \Delta_z \end{bmatrix}$$

(1.37) passa a ser

$$Q+\sigma = A_{rr} \Pi^2 + 2A_{r\theta} \Pi\Theta + 2A_{rz} \Pi Z + A_{\theta\theta} \Theta^2 + 2A_{\theta z} \Theta Z + A_{zz} Z^2 -$$

$$- 2\Delta_r \Pi - 2\Delta_\theta \Theta - 2\Delta_z Z - \chi$$

I al resoldre (1.38) s'obté (Orús, 1977)

$$\begin{aligned} A_{rr} &= k_1 + k_4 z^2 + 2k_5 z \\ A_{r\theta} &= 0 \\ A_{rz} &= -k_4 r z - k_5 r \\ A_{\theta\theta} &= k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2 + 2k_5 z \\ A_{\theta z} &= k_6 r \\ A_{zz} &= k_3 + k_4 r^2 \end{aligned} \tag{1.43}$$

essent k_1, \dots, k_6 , en principi, funcions arbitràries del temps. Portant (1.43) a (1.39) es calcula $\underline{\Delta}$ (Català, 1972):

$$\begin{aligned}\Delta_r &= \frac{1}{2}\dot{k}_1 r + \dot{k}_5 r z \\ \Delta_\theta &= -\beta r + \dot{k}_6 r z \\ \Delta_z &= \frac{1}{2}\dot{k}_3 z - \dot{k}_5 r^2 + \delta\end{aligned}\tag{1.44}$$

amb les següents condicions addicionals: k_2 i k_4 han de ser constants i, β , en principi, funció del temps.

Si es pren el plà $z=0$ com a plà de simetria de la galàxia —hipòtesi que acceptarem—, ha de ser $k_5=0$ (Camm, 1941).

Donat que per $r=z=0$ s'ha de complir $\underline{v} = \underline{0}$, tindrem, segons (1.35) i (1.44), $\delta = 0$. A més, imposant que el plà $z=0$ també sigui de simetria per a la velocitat del centroide \underline{v} , Π_0 haurà de ser parella en z i Z_0 imparella. Invertint (1.35) i imposant la condició anterior s'arriba a $k_4 k_6 \beta = 0$. Al no poder ser $k_4=0$, doncs A no dependria de z , ni $\beta=0$, doncs al plà galàctic no hi hauria rotació, ens veiem obligats a adoptar $k_6=0$.

Amb les condicions anteriors, (1.43) i (1.44) es convertiran en

$$\begin{aligned}
A_{rr} &= k_1 + k_4 z^2 \\
A_{r\theta} &= 0 \\
A_{rz} &= -k_4 rz \\
A_{\theta\theta} &= k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2 \\
A_{\theta z} &= 0 \\
A_{zz} &= k_3 + k_4 r^2
\end{aligned}
\tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_r &= \frac{1}{2} \dot{k}_1 r \\
\Delta_\theta &= -\beta r \\
\Delta_z &= \frac{1}{2} \dot{k}_3 z
\end{aligned}
\tag{1.46}$$

essent

$$\det A = (k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2) (k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2) \tag{1.47}$$

La forma quadràtica (1.29) ha de ser definida (Ogorodnikov, 1965). A partir de (1.45), per a que (1.29) sigui definida positiva (Ledermann & Vajda, 1980), s'ha de verificar

$$\begin{aligned}
k_1 + k_4 z^2 &> 0 \\
(k_1 + k_4 z^2) (k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2) &> 0 \\
(k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2) (k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2) &> 0
\end{aligned}$$

mentre que per a que (1.29) sigui definida negativa,

$$\begin{aligned}
k_1 + k_4 z^2 &< 0 \\
(k_1 + k_4 z^2) (k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2) &> 0 \\
(k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2) (k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2) &< 0
\end{aligned}$$

És a dir, per a que (1.29) sigui definida, les funcions del temps k_1 i k_3 i les constants k_2 i k_4 han de tenir totes el mateix signe. Ara bé, segons (1.47), per a $r=z=0$,

$$\det A = k_1^2 k_3$$

i per tal de que el nombre d'estrelles per unitat de volum N sigui real, haurà de ser (Català, 1972) $k_3 > 0$. Per tant, les funcions del temps k_1 i k_3 i les constants k_2 i k_4 seran totes positives.

La solució pel potencial U i la funció χ surgeixen de la resolució de (1.40) i (1.41), que posant-les de forma explícita s'escriuen

$$(k_1 + k_4 z^2) \frac{\partial U}{\partial r} - k_4 r z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \ddot{k}_1 r = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (1.48)$$

$$-\dot{\beta} r = 0 \quad (1.49)$$

$$-k_4 r z \frac{\partial U}{\partial r} + (k_3 + k_4 r^2) \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \ddot{k}_3 z = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (1.50)$$

$$\frac{1}{2} \dot{k}_1 r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{2} \dot{k}_3 z \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.51)$$

De (1.49) es dedueix, immediatament, que β ha de ser constant.

Tanmateix, les solucions a les tres equacions restants no les exposarem aquí, doncs, no és aquest cas, estudiat per Sala (1986), el que ens interessa. Al plantejar el problema de superposició, les anteriors equacions queden lleugerament modificades, amb lo qual s'obté un conjunt més particular de solucions.

1.4- Relacions cinemàtiques

Tenint en compte (1.35), (1.45), (1.46) i (1.47) és fàcil obtenir \underline{v} :

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \frac{r}{2} \frac{\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_1 k_4 r^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2} \\ \Theta_0 &= - \frac{\beta r}{k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2} \\ Z_0 &= \frac{z}{2} \frac{k_1 \dot{k}_3 + \dot{k}_1 k_4 r^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2}\end{aligned}\tag{1.52}$$

Per a determinar la densitat estel·lar i els moments centrals s'efectua un canvi de base (Orús, 1977) de manera que la forma quadràtica (1.29) es transformi en una esfera

$$Q = s^2$$

i es defineix

$$\Phi_n(\sigma) = 2 \int_0^\infty s^{n+2} \psi(s^2 + \sigma) ds$$

aleshores, els moments (1.19) prenen la següent forma:
 Per a $n=0$,

$$\mu_0 = \frac{2\pi}{N \sqrt{\det A}} \Phi_0(\sigma)$$

que, recordant (1.21) i (1.47), permet aïllar N ,

$$N = \frac{2\pi \Phi_0(\sigma)}{\sqrt{(k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2) (k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2)}} \quad (1.53)$$

Pels moments de segon i quart ordre, expressats sota la forma (1.22), es té

$$\mu_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\Phi_2(\sigma)}{\Phi_0(\sigma)} A_{ij}^{-1} \quad (1.54)$$

$$\mu_{ijkl} = \frac{1}{15} \frac{\Phi_4(\sigma)}{\Phi_0(\sigma)} (A_{ij}^{-1} A_{kl}^{-1} + A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{jk}^{-1}) \quad (1.55)$$

que segons (1.54) es pot expressar com

$$\mu_{ijkl} = \frac{3}{5} \frac{\Phi_0(\sigma) \Phi_4(\sigma)}{[\Phi_2(\sigma)]^2} (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \quad (1.56)$$

complint-se, a més,

$$\mu_n = (\underline{0})^n \text{ per a } n \text{ imparell} \quad (1.57)$$

Calculant A^{-1} , per (1.45), i portant-ho a (1.54) s'obté fàcilment la relació entre els moments de segon ordre no nuls,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{rr}}{(k_3 + k_4 r^2)(k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2)} &= \frac{\mu_{rz}}{k_4 r z (k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2)} = \\ &= \frac{\mu_{\theta\theta}}{(k_1 k_3 + k_1 k_4 r^2 + k_3 k_4 z^2)} = \frac{\mu_{zz}}{(k_1 + k_4 z^2)(k_1 + k_2 r^2 + k_4 z^2)} \end{aligned} \quad (1.58)$$

essent

$$\mu_{r\theta} = \mu_{\theta z} = 0 \quad (1.59)$$

I a partir de (1.56), tenint en compte (1.59), s'obté

$$\mu_{rrr\theta} = \mu_{rr\theta z} = \mu_{r\theta\theta\theta} = \mu_{r\theta z z} = \mu_{\theta\theta\theta z} = \mu_{\theta z z z} = 0 \quad (1.60)$$

i pels moments no nuls,

$$\begin{aligned}
\rho &\equiv \frac{3}{5} \frac{\Phi_0(\sigma) \Phi_4(\sigma)}{[\Phi_2(\sigma)]^2} = \\
&= \frac{\mu_{rrrr}}{3\mu_{rr}^2} = \frac{\mu_{rrrz}}{3\mu_{rr} \mu_{rz}} = \frac{\mu_{rr\theta\theta}}{\mu_{rr} \mu_{\theta\theta}} = \frac{\mu_{rrzz}}{\mu_{rr} \mu_{zz} + 2\mu_{rz}^2} = \quad (1.61) \\
&= \frac{\mu_{r\theta\theta z}}{\mu_{rz} \mu_{\theta\theta}} = \frac{\mu_{rzzz}}{3\mu_{rz} \mu_{zz}} = \frac{\mu_{\theta\theta\theta\theta}}{3\mu_{\theta\theta}^2} = \frac{\mu_{\theta\theta zz}}{\mu_{\theta\theta} \mu_{zz}} = \frac{\mu_{zzzz}}{3\mu_{zz}^2}
\end{aligned}$$

El valor ρ acabat de definir equival a un terç de la curtosi o coeficient d'apuntament. Si la funció de distribució és d'Schwarzschild, ρ val exactament la unitat i, per tant, no depèn de σ . En qualsevol altre cas ρ serà funció de σ .

El fet de que siguin nuls els moments $\mu_{r\theta}$ i $\mu_{\theta z'}$ i no ho hagi de ser $\mu_{rz'}$, significa que la secció equatorial de l'el·lipsoide de moments (1.23) no és paral·lela al pla $r-\theta$. L'angle ε que el semieix major forma amb el pla $r-\theta$ compleix la relació

$$\tan 2\varepsilon = \frac{2\mu_{rz}}{\mu_{rr} - \mu_{zz}} \quad (1.62)$$

que, a partir de (1.58), equival a

$$\tan 2\varepsilon = \frac{2 rz}{\frac{k_3 - k_1}{k_4} + r^2 - z^2} \quad (1.63)$$

En particular, si fos $k_1 = k_3$, el semieix major apuntaria al centre galàctic.

Finalment, posarem de manifest que es satisfà la relació

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial r} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = \frac{\Pi_0}{r} + \frac{Z_0}{z} \quad (1.64)$$

essent

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial r} + \frac{\Pi_0}{r} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = 2 \frac{\Pi_0}{r} + \frac{Z_0}{z} \quad (1.65)$$

Per tant, el camp de velocitats dels centroides locals no serà, en general, solenoidal. Només resta puntualitzar que si s'ometen moltes altres relacions cinemàtiques, com per exemple les equacions hidrodinàmiques, és perquè no són tema del present treball.

2.1- Poblacions estel·lars

La primera vegada que s'introduí el concepte de poblacions estel·lars va ser amb Baade (1944). La ciutat de Los Angeles roman a les fosques per por a bombardeigs. Baade, des dels telescopis de Mount Wilson i aliè als afers bèl·lics, aprofità l'ocasió per a realitzar les observacions definitives que el conduïrien a distingir entre dos tipus de poblacions estel·lars. Amb anterioritat s'havien descobert les estrelles d'alta velocitat (Adams & Kohlschütter, 1914; Boss, 1918; Adams & Joy, 1919) i alguns astrònoms com Oort (1926), Trumpler (1930), Shapley (1930) i Bottlinger (1932, 1933) havien fet notar correlacions entre algunes propietats físiques i cinemàtiques i també havien remarcat algunes diferències entre cúmuls estel·lars.

Les observacions de Baade van centrar-se en les galàxies espirals M31, M32 i NGC205, i en les el·líptiques NGC147 i NGC185. La primera distinció fou entre estrelles del disc —especialment quan formaven part dels braços espirals— que anomenà població-I, i les estrelles de l'halo —component esferoidal, en general— que anomenà població-II. Remarcà la diferència dels seus diagrames H-R; per a la població-I semblant al dels cúmuls oberts de la nostra galàxia i per a la població-II semblant al dels cúmuls globulars de l'halo.

La separació de poblacions havia d'afectar, també, a l'edat, composició química, propietats cinemàtiques, etc. Dins la població-I s'hi consideren, fonamentalment, estrelles joves i calents (tipus O i B), variables cefeides i zones d'hidrògen ionitzat. Les estrelles d'aquesta població tenen poc contingut metàl·lic, és a dir, estan constituïdes quasi

exclusivament d'hidrògen i heli, i descriuen òrbites aproximadament circulars amb molt poca dispersió. Per contra, les estrelles de la població-II, molt més velles —de 1.0×10^{10} a 1.5×10^{10} anys— han sintetitzat elements metàlics a partir del reciclatge de material expulsat per estrelles de generacions anteriors i descriuen òrbites molt excèntriques amb molta dispersió.

La formulació, més o menys definitiva, dels criteris de separació entre poblacions es va establir en la Conferència Vaticana de 1957, recollida per O'Connell (1958) i reelaborada posteriorment per Blaauw (1965). Al passar els anys, la frontera divisòria entre poblacions ha esdevingut més difosa i s'ha introduït una gradació dins de cada població, depenent del paràmetre que s'emptra per a classificar, o s'han fet subdivisions segons es tracti d'estrelles gegants o nanes. Fent un estudi de l'evolució estel·lar dins els diferents tipus de galàxies, King (1971) recalca que la composició química ha de ser la base de la classificació per poblacions, mentre que van den Bergh (1975) i Mould (1982) es fonamenten en comparacions amb altres galàxies i en criteris cinemàtics. Un interessant resum i estat de la qüestió del tema de les poblacions estel·lars és el realitzat per Sandage (1986).

Quant a la composició química, mesurant la metalicitat a partir de la raó ferro:hidrògen referida a la del sol, donada pel paràmetre

$$[\text{Fe}/\text{H}] \equiv \log[n(\text{Fe})/n(\text{H})]_* - \log[n(\text{Fe})/n(\text{H})]_{\odot}$$

Bartkevicius (1980) considera com a estrelles de la població-I les que satisfan $[\text{Fe}/\text{H}] > -0.5$, essent les restants de població-II. Eggen (1983) posa la línia divisòria a $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.6$. Bond (1970, 1980) prefereix utilitzar la

nomenclatura d'estrelles joves ($[Fe/H] > -0.5$), velles ($-0.5 > [Fe/H] > -1.5$), de l'halo ($-1.5 > [Fe/H] > -3.0$) i a les restants les anomena de població-III. En efecte, cal mencionar l'existència d'una hipotètica població obscura o població-III, de la qual sembla que se'n té evidència dinàmica però no ha estat detectada en forma radiativa. Aquesta població comprendria estrelles degenerades, nanes negres, estrelles de neutrons, forats negres, etc. De totes maneres no afecta al nostre punt de treball.

Mihalas & Binney (1981) fan una síntesi dels diferents criteris i opten per parlar de component esferoidal i component del disc. La primera es pot subdividir, encara, en halo pobre en metalls i embalum ric en metalls, interpolant, si cal, una component esferoidal intermèdia. La component del disc, més complexa, la subdivideixen en població dels braços espirals, població jove del disc, població intermèdia del disc i població vella del disc. En general, s'haurà de combinar (Jaschek, 1985) tècniques espectroscòpiques, fotomètriques i cinemàtiques per a determinar el tipus de població a la que pertany un conjunt donat d'estrelles.

Actualment es tendeix a dividir la galàxia en tres regions ben diferenciades: disc prim, disc difós i component esferoidal extrema que, aproximadament, vindrien a coincidir amb població I dominant (però no única), població intermèdia i població II. Al disc prim li correspon (Norris, 1986, 1987; Van der Kruit, 1987; Wyse & Gilmore, 1986; Gilmore & Wyse, 1987) una escala d'altitud o altitud característica —suposant un decreixement exponencial de la massa en funció de l'altitud— d'uns 0.3 Kpc, al disc difós d'uns 1.3 Kpc i la component esferoidal extrema podria arribar a uns 30 Kpc del centre galàctic.

Quant a la metal·licitat, la població intermèdia o del disc difós estaria caracteritzada (Sandage, 1987; Strömgren, 1987 i els anteriors) per un índex [Fe/H] que oscil·laria, aproximadament, entre -0.40 i -0.80; el disc prim el tindria més gran, i la part esferoidal menor.

El comportament cinemàtic de cada regió galàctica respon a una disminució de rotació a mesura que ens allunyem del disc prim, així com un increment de la velocitat perpendicular al plà galàctic i un augment de la dispersió de les velocitats residuals. El fet es pot interpretar (Rees & Ostriker, 1977) com una variació del moment angular de la galàxia, que es va contraent a l'envellir, motiu pel qual les estrelles de més recent formació tenen una component rotacional de la velocitat més significativa que les estrelles més antigues. Entre els estudis més importants per a caracteritzar cinemàticament les distintes regions galàctiques es compten els de Kuiper (1948), Parenago (1954), Éinasto (1954, 1976), Eggen, Lynden-Bell & Sandage (1962), Feast (1962) i Oort (1965). Recentment, es tenen dades més acurades basades amb mostres estel·lars més extenses i, autors com Gotska (1973), Janes (1975), Chiu (1980a, 1980b), Mihalas & Binney (1981), Strömgren (1987), Wyse & Gilmore (1986), Gilmore & Wyse (1987) i Freeman (1987), donen uns valors aproximats pels semieixos de l'el·lipsoide de velocitats residuals $\sigma_{rr} : \sigma_{\theta\theta} : \sigma_{zz}$ que resumim seguidament:

població dels braços espirals	10: 5: 10
població jove del disc	20: 10: 10
població intermèdia jove del disc ...	30: 15: 15
població intermèdia vella del disc ...	40: 25: 20
població vella del disc	75: 50: 50
component esferoidal	150:120:120

Al capítol quart ens centrarem en mostres de l'entorn solar i farem una discussió més detallada d'aquests i d'altres valors.

Després del breu resum sobre poblacions estel·lars comentarem els intents més importants que hi ha hagut per a explicar la funció de distribució de les velocitats estel·lars tenint en compte la multiplicitat de poblacions. En aquest punt s'ha de fer una precisió important. En iniciar l'apartat hem mencionat que, abans d'introduïr el concepte de poblacions estel·lars, alguns astrònoms ja havien diferenciat grups d'estrelles amb comportaments cinemàtics essencialment diferents. Des d'aquest punt de vista, diriem estadístic, i prescindint de criteris purament astrofísics, és lícit parlar de sistemes estel·lars com una noció més general que la de població. El sistema pot coincidir amb alguna de les poblacions o amb alguna de les subdivisions de les poblacions depenent de la mostra total d'estrelles que es consideri.

Fou Kapteyn (1905) qui primerament, com a possible explicació de l'assimetria de la distribució de velocitats residuals, separà un grup estel·lar en dos corrents animats per diferents velocitats. Posteriorment Eddington (1914) determinà els paràmetres de la teoria de Kapteyn a partir dels moviments propis i veié que es podrien obtenir els mateixos resultats superposant dues distribucions esfèriques excèntriques. Kapteyn (1922) teoritzà el mètode dels dos corrents estel·lars resolent el problema com si es tractés d'una mescla de dos gasos amb distribució esfèrica que giraven en sentits contraris. El succeí Strömberg (1925) explicant un conjunt de mostres constituïdes per estrelles lentes i estrelles de gran velocitat a partir d'una funció de distribució producte de dues funcions simètriques amb diferents centres de simetria, una de les quals

—superposició de distribucions el·lipsoïdals concèntriques— corresponia a un subsistema esfèric amb gran dispersió i l'altra a un subsistema pla de poca dispersió. Quedava, així, consolidat el camí fonamental per a l'estudi de funcions de distribució asimètriques. Recordem, de passada, que altres models —de menys plausibilitat física— han intentat explicar l'assimetria o l'excés positiu que mostra la distribució de velocitats a partir de les observacions: distribucions logarítmico-normals (Schwarzschild, 1912), distribucions tipus Pearson (Adams, Strömberg & Joy, 1921; Kolkhidashvili, 1962), distribucions normals en diferents potències de les components (Vetešnik, 1959; Orús, 1975) o distribucions de Planck (Shatsova, 1965a, 1965b, 1968, 1971).

En la línia de superposició de distribucions d'Schwarzschild, que sembla la de més futur sobretot per a explicar el comportament de poblacions o sistemes, es poden prendre com a treballs de referència els de Gliese (1941) amb utilització de mètodes gràfics, Éinasto (1952, 1954, 1976) considerant —al darrer treball— la superposició de cinc el·lipsoïdes, Iwanovska (1966) amb una aproximació analítica a partir de dues gaussianes o Kondratev & Ozernoy (1982) superposant dos sistemes estel·lars a simetria esfèrica. Més recentment podem esmentar els treballs, també sobre superposició de gaussianes, que han realitzat Dessureau & Uppgren (1975) determinant, per a cada cas, el nombre de sistemes que es superposen i, Wyse & Gilmore (1986) proposant una superposició trimodal. Tots aquests autors es conformen, només, amb una explicació satisfactòria dels moments centrats de segon ordre i és per això que cal mencionar apart el treball de Ros (1983) que contempla els moments d'ordres tercer i quart, obtenint també les fórmules de superposició de dues distribucions tipus Schwarzschild generalitzat.

Els anteriors treballs, no obstant, no estan recolzats per cap model dinàmic que relacioni el comportament cinemàtic dels sistemes amb el potencial o forces que interactuen i expliqui la dependència temporal, ni tampoc tenen en compte la possible diferència entre les components no rotacionals de la velocitat dels centroides de cada subsistema.

És per aquestes raons que el present treball pren el model de sistema estel·lar introduït per Chandrasekhar (1942), desenvolupat posteriorment per Orús (1952), Català (1972), Sala (1986) i Sanz (1987), i aplica el mètode de superposició, generalitzant el treball de Ros (1983). Per tant, la superposició tridimensional que es resoldrà dependrà, a més de la velocitat, de la posició i del temps, explicarà els moments centrats d'ordres superiors, relacionarà els moments amb els potencials possibles i contemplarà la possibilitat d'una diferència qualsevol —no només en rotació— de la velocitat dels centroides de cada subsistema.

Observem que la verificació del nostre model a partir dels moments centrats de les velocitats residuals obligarà a prendre mostres d'estrelles veïnes del sol i, per tant, situades al plà galàctic, és a dir, a treballar pràcticament en la regió que hem anomenat disc prim. Aleshores, serà suficient una superposició de dos subsistemes, doncs quasi no hi trobarem cap estrella de població-II extrema. Ja retornarem al tema quan presentem les mostres estel·lars utilitzades.

2.2- Superposició de sistemes de Chandrasekhar

Suposem, com proposa Chandrasekhar (1942), que la funció de distribució d'un sistema estel·lar s'expressi com a suma de dues funcions de distribució que verifiquen les tres hipòtesis —conegudes amb el seu nom— que inclouen les relacions de la (1.28) a la (1.31), regentant, cada una, un subsistema estel·lar, que anomenarem sistema-I i sistema-II respectivament. Si els paràmetres que fan referència al sistema-I els notem amb primes i al sistema-II amb segones, podem escriure

$$f(t, \underline{r}, \underline{V}) = \psi' (Q' + \sigma') + \psi'' (Q'' + \sigma'') \quad (2.1)$$

$$Q' = \underline{u}^T \cdot A' \cdot \underline{u} \quad , \quad Q'' = \underline{u}^T \cdot A'' \cdot \underline{u}$$

El que s'ha dit als apartats 1.3 i 1.4 del capítol anterior serà aplicable a ψ' i ψ'' per separat. Les equacions (1.40) i (1.41) es plantejaran, per tant, per a cada subsistema, essent comú el potencial U , ja que representa el potencial creat per la massa del sistema estel·lar total. És d'esperar, doncs, que la solució que s'obtingui pel potencial es vegi afectada per la hipòtesi de superposició.

En efecte, plantegem les equacions (1.48), (1.50) i (1.51), per a cada subsistema, amb el següent canvi de variables

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2} r^2 \\ \zeta &= \frac{1}{2} z^2\end{aligned}\tag{2.2}$$

Llavors, pel subsistema ι -èssim tenim

$$\begin{aligned}(k_1^\iota + 2k_4^\iota \zeta) \frac{\partial U}{\partial \tau} - 2k_4^\iota \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \ddot{k}_1^\iota &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^\iota}{\partial \tau} \\ -2k_4^\iota \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + (k_3^\iota + 2k_4^\iota \tau) \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \ddot{k}_3^\iota &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^\iota}{\partial \zeta}\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\dot{k}_1^\iota \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \dot{k}_3^\iota \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi^\iota}{\partial \tau}$$

on ι pot ser (') o ('').

Ja s'ha dit, a l'apartat 1.3, que k_4^ι és, amb tota certesa, diferent de zero, llavors, dividint les anteriors equacions per k_4^ι i definint

$$K_1^\iota = \frac{k_1^\iota}{k_4^\iota}, \quad K_3^\iota = \frac{k_3^\iota}{k_4^\iota}\tag{2.4}$$

es pot eliminar χ de (2.3) i el sistema queda convertit en

$$\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \left(\tau - \zeta - \frac{K_1^l - K_3^l}{2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = 0$$

$$2\dot{K}_1^l \frac{\partial U}{\partial \tau} + (K_1^l + 2\zeta) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \tau} - 2\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{1}{2}K_1^l + \dot{K}_1^l \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{K}_3^l \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0$$

$$2\dot{K}_3^l \frac{\partial U}{\partial \zeta} + (K_3^l + 2\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - 2\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \tau} + \frac{1}{2}K_3^l + \dot{K}_3^l \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \dot{K}_1^l \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0$$

Definim

$$h^l \equiv \frac{K_1^l - K_3^l}{2} \quad (2.5)$$

i rescrivim l'anterior sistema com

$$\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - (\tau - \zeta - h^l) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$2\dot{K}_1^l \frac{\partial U}{\partial \tau} + K_1^l \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \tau} + 2\zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{2}K_1^l + \dot{K}_1^l \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{K}_3^l \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.7)$$

$$2\dot{K}_3^l \frac{\partial U}{\partial \zeta} + K_3^l \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{2}K_3^l + \dot{K}_3^l \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \dot{K}_1^l \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.8)$$

Si restem les equacions (2.6), (2.7) i (2.8) plantejades pel sistema-I, menys les mateixes plantejades pel sistema-II, i definim

$$H_1 \equiv K'_1 - K''_1 \quad (2.9)$$

$$H_3 \equiv K'_3 - K''_3$$

tindrem

$$(H_1 - H_3) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.10)$$

$$2\dot{H}_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} + H_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \tau} + \frac{1}{2}H_1 + \dot{H}_1 \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{H}_3 \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.11)$$

$$2\dot{H}_3 \frac{\partial U}{\partial \zeta} + H_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{1}{2}H_3 + \dot{H}_3 \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \dot{H}_3 \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.12)$$

El sistema format per les anteriors equacions n'és un de més general que el constituït per (2.6), (2.7) i (2.8). El potencial l'haurà de satisfer addicionalment, per a ser compatible amb la hipòtesi de superposició.

Estudiarem, en aquest apartat, el cas general en que el potencial no és separable, és a dir,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} \neq 0 \quad (2.13)$$

Aquí cal distingir tres casos, segons s'anul·lin dues H's, una o cap. Si $H_1=H_3=0$, és a dir,

$$\begin{aligned} K'_1 &= K''_1 \\ K'_3 &= K''_3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

llavors, la condició de superposició no afectaria per a res al potencial —el sistema constituït per (2.6), (2.7) i (2.8) conincidiria al plantejar-lo pels dos sistemes— i aquest tindria les mateixes solucions que en el cas d'un sol sistema estel·lar, estudiat per Sala (1986).

Si s'anul·la tan sols una de les H's, per exemple $H_1=0$, llavors, de (2.10) i (2.13) es dedueix immediatament $H_3=0$, reduïnt-se, el cas, a l'anterior.

Estudiem, doncs, el problema en la situació més general: H_1 i H_3 no nuls. Llavors, de (2.10) es dedueix immediatament

$$H \equiv H_1 = H_3 \quad (2.15)$$

que substituïnt-ho a (2.11) i (2.12) les transforma en

$$2\dot{H} \frac{\partial U}{\partial \tau} + H \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \tau} + \frac{1}{2}H + \dot{H} \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{H} \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.16)$$

$$2\dot{H} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + H \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{1}{2}H + \dot{H} \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \dot{H} \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.17)$$

En adonar-nos de la simetria que presenten aquestes equacions al permutar τ per ζ , podem afirmar que si

$$W_1 = U(\tau, \zeta) \quad (2.18)$$

és solució general de (2.16) i (2.17), llavors, també ho serà

$$W_2 = U(\zeta, \tau) \quad (2.19)$$

obtinguda de l'anterior al permutar τ per ζ .

Ara bé, tant (2.18) com (2.19) han de satisfer (2.6). Portant (2.18) a (2.6) es té

$$\tau \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} - (\tau - \zeta - h^t) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 W_1}{\partial \zeta^2} + 2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial \tau} - \frac{\partial W_1}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2.20)$$

Portant-hi, ara, (2.19), obtenim

$$\tau \frac{\partial^2 W_2}{\partial \tau^2} - (\tau - \zeta - h^L) \frac{\partial^2 W_2}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 W_2}{\partial \zeta^2} + 2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial \tau} - \frac{\partial W_2}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2.21)$$

que al permutar τ per ζ , es transforma en

$$\zeta \frac{\partial^2 W_1}{\partial \zeta^2} - (\zeta - \tau - h^L) \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau \partial \zeta} - \tau \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} + 2 \left(\frac{\partial W_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Sumant (2.20) amb (2.22) i recordant (2.13), arribem a

$$h^L = 0 \quad (2.23)$$

que per (2.5) i (2.4) equival a

$$\begin{aligned} K' &\equiv K'_1 = K'_3 & \Leftrightarrow & & k' &\equiv k'_1 = k'_3 \\ K'' &\equiv K''_1 = K''_3 & & & k'' &\equiv k''_1 = k''_3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Relació que generalitza la obtinguda per Chandrasekhar (1942) al estudiar el model a simetria cilíndrica amb $k_4=0$.

L'equació (2.6) es convertirà, doncs, en

$$\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - (\tau - \zeta) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2.25)$$

Per a veure en què es transformen les equacions (2.7) i (2.8) demostrarem, prèviament, que es satisfà la condició,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2.26)$$

En efecte, restant (2.16) i (2.17):

$$2\dot{H} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + H \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + \dot{H} \left(\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right) - \dot{H} (\tau - \zeta) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.27)$$

Si $\dot{H}=0$, és evident que es verifica (2.26), ja que, per hipòtesi, era $H \neq 0$. Si $\dot{H} \neq 0$, multiplicant (2.25) per \dot{H} i restant-la a (2.27) s'obté directament (2.26).

Amb (2.24) i (2.26), (2.7) i (2.8) s'escriuran

$$2\dot{K}^\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + K^\tau \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \tau} + \frac{1}{2} K^\tau + \dot{K}^\tau \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{K}^\tau \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.28)$$

$$2\dot{K}^\zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + K^\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \zeta} + \frac{1}{2} K^\zeta + \dot{K}^\zeta \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \dot{K}^\zeta \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.29)$$

equacions de la mateixa forma que (2.16) i (2.17), i que, consegüentment, tindran la mateixa solució formal.

El sistema d'equacions a que hem arribat finalment, (2.25), (2.28) i (2.29) —plantejat idènticament per a cada subsistema estel·lar—, és formalment el mateix que el corresponent a un sol sistema estel·lar amb $k_1=k_3$, estudiat per Sala (1986). La solució serà

$$U = A(t) (\tau + \zeta) + \frac{1}{K^L} V^L \left(\frac{\tau + \zeta}{K^L} \right) + \frac{W \left(\frac{\zeta}{\tau} \right)}{\tau + \zeta} \quad (2.30)$$

amb les següents condicions:

Si $A(t)$ és una funció arbitrària del temps, per a cada subsistema s'ha de complir

$$A(t) = \frac{-\ddot{K}^L}{2K^L} + \frac{\dot{K}^{L2}}{4K^{L2}} + \frac{c^L}{K^{L2}} \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{K'} V' \left(\frac{\tau + \zeta}{K'} \right) = \frac{1}{K''} V'' \left(\frac{\tau + \zeta}{K''} \right) \quad (2.32)$$

entenent-ho de la següent manera: c' i c'' són constants; V' , V'' i W són funcions arbitràries on les possibles parts del segon terme de (2.30) proporcionals a $(\tau+\zeta)$ i a $(\tau+\zeta)^{-1}$ s'han carregat al primer i al tercer termes, respectivament. Per tant, al segon terme de (2.30), a no ser que sigui nul, hi ha dependència temporal a través de les K^L i els tres termes són independents.

Si V^l és no nul·la, cosa que només pot succeir quan el potencial depèn del temps, desenvolupant els dos membres de (2.32) en sèrie de potències, s'arriba fàcilment a

$$\frac{K'}{K''} = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k'}{k''} = \text{const.} \quad (2.33)$$

Resumint els possibles casos de potencial no separable, tenim,

- a) Si $K'_1 = K''_1$ o $K'_3 = K''_3$, la forma del potencial no es veu afectada per la condició de superposició.
- b) Si $K'_1 \neq K''_1$ i $K'_3 \neq K''_3$, s'ha de verificar (2.24), és a dir,

$$k' \equiv k'_1 = k'_3$$

$$k'' \equiv k''_1 = k''_3$$

i el potencial ha de ser de la forma (2.30) amb les condicions (2.31) i (2.32). En particular, per a la solució general d'un potencial no estacionari hi hauria proporcionalitat entre k' i k'' .

2.3- Potencials particulars

Veurem dues restriccions interessants del potencial, les conseqüències de les quals ja han estat mencionades a l'apartat 1.1: són el potencial separable i el potencial estacionari.

Comencem estudiant el cas de potencial separable. Llavors es complirà

$$U(t, \tau, \zeta) = U_1(t, \tau) + U_2(t, \zeta) \tag{2.34}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0$$

Demostrarem que, també en aquest cas, es verifica (2.26). En efecte, derivant (2.7) respecte a ζ , considerant (2.34) i simplificant,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = -\zeta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \tag{2.35}$$

i derivant-ho respecte a τ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0 \tag{2.36}$$

Derivant, ara, (2.8) respecte a τ , considerant (2.34) i simplificant,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = -\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad (2.37)$$

Substituïnt (2.36) a (2.37) queda demostrat (2.26).

Llavors, (2.6), (2.7) i (2.8) es converteix en

$$\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) = 0$$

$$2\dot{K}_1^\iota \frac{\partial U}{\partial \tau} + K_1^\iota \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \tau} + \frac{1}{2}K_1^\iota + \dot{K}_1^\iota \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2.38)$$

$$2\dot{K}_3^\iota \frac{\partial U}{\partial \zeta} + K_3^\iota \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{1}{2}K_3^\iota + \dot{K}_3^\iota \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0$$

Recordant (2.34), veiem que les equacions (2.10), (2.11) i (2.12) no introdueixen cap novetat a (2.38), consegüentment, la solució serà la corresponent a un potencial separable amb un sol sistema estel·lar (Sala, 1986):

$$U = A(t) (\tau + \zeta) + \frac{B}{\tau} + \frac{C}{\zeta} \quad (2.39)$$

amb la única condició per a cada població

$$A(t) = \frac{-\ddot{K}_1^t}{2K_1^t} + \frac{\dot{K}_1^{t^2}}{4K_1^{t^2}} + \frac{c_1^t}{K_1^{t^2}} = \frac{-\ddot{K}_3^t}{2K_3^t} + \frac{\dot{K}_3^{t^2}}{4K_3^{t^2}} + \frac{c_3^t}{K_3^{t^2}} \quad (2.40)$$

i essent c_1' , c_1'' , c_3' , c_3'' , B i C constants. A més, per a que no hi hagi cap singularitat al plà galàctic, s'haurà de considerar $C=0$.

El primer terme del potencial (2.39) s'interpreta com el creat a l'interior d'una esfera homogènia (Ogorodnikov, 1965), que cal associar a l'halo galàctic. El segon dels termes és el potencial necessari per a que les trajectòries estel·lars segueixin una espiral logarítmica (Jeans, 1923) i mantinguin, amb el temps, la seva forma (Orús, 1954).

Per tant, quan el potencial és separable, la superposició no restringeix la forma del potencial, que és la (2.39) amb la condició (2.40).

Passem a estudiar el potencial estacionari. En principi, cal distingir tres modalitats segons es tracti d'un potencial no separable en els casos a) i b) de l'apartat anterior o d'un potencial separable, vist recentment. Veurem, però, que aquestes tres modalitats de potencial estacionari es poden estudiar com si es tractes d'una de sola, doncs els hi correspon la mateixa forma general de potencial.

En efecte, si ens trobem en el cas a) de potencial no separable —verificant-se (2.14)—, la condició d'estacionarietat

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

permet transformar les equacions (2.6), (2.7) i (2.8) de la següent forma:

Derivant (2.6) respecte al temps obtenim

$$\dot{h}^{\iota} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.42)$$

que per (2.13) i recordant (2.5) es redueix a

$$\begin{aligned} \dot{K}' &\equiv \dot{K}'_1 = \dot{K}'_3 \\ \dot{K}'' &\equiv \dot{K}''_1 = \dot{K}''_3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Llavors, (2.7) i (2.8) es converteixen en

$$2\dot{K}^{\iota} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2} K^{\iota} + \dot{K}^{\iota} \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{K}^{\iota} \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \quad (2.44)$$

$$2\dot{K}^{\iota} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} K^{\iota} + \dot{K}^{\iota} \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \dot{K}^{\iota} \tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0$$

sistema d'equacions que no varia al permutar τ per ζ .

Aplicant aquí el mateix raonament que s'havia aplicat a les equacions (2.16) i (2.17) de l'apartat anterior arribem a les mateixes conclusions (2.23) i (2.24) que en el cas b):

$$k'_1 = k'_3 \quad \text{i} \quad k''_1 = k''_3$$

Per tant, el potencial solució és de la forma (2.30), però la estacionarietat, com ja s'havia esmentat, obliga a prendre V^l nul·la i la funció $A(t)$ constant.

Pel que s'acaba de demostrar, el cas b) de l'apartat anterior, quan el potencial no depèn del temps, coincideix amb el cas a), sense la relació (2.14). Aleshores, continua valent la solució (2.30) amb V^l nul·la.

En ambdós casos, la relació (2.31) no pot dependre del temps i el potencial no separable i estacionari es podrà escriure sota l'expressió

$$U = A (\tau + \zeta) + \frac{B(\zeta/\tau)}{\tau} \quad (2.45)$$

on A és una constant.

Finalment, si el potencial és separable, és a dir, és el (2.39) amb la condició (2.40) i, a més, és estacionari, és evident que ens trobem en un cas particular de (2.45). Eliminant a (2.39) la singularitat al plà galàctic i comparant-ho amb (2.45) tenim,

$$B(\zeta/\tau) = \text{const.} \quad (2.46)$$

Concloïm, doncs, que, en qualsevol cas, (2.45) és la forma general d'un potencial estacionari.

Vegem les conseqüències d'imposar la condició

$$A(t) = \text{const.}$$

a (2.40) o, en particular, a (2.31).

Fent la hipòtesi de que aquesta constant ha de ser positiva per a que el potencial degut a aquest terme generi una força de tipus atractiu, definim

$$\omega^2 = 4 A \quad (2.47)$$

Llavors, les condicions (2.31) i (2.40) les escriurem, tenint en compte (2.47), com

$$\frac{\omega^2}{4} = \frac{-\ddot{K}_j^t}{2K_j^t} + \frac{\dot{K}_j^{t2}}{4K_j^{t2}} + \frac{C_j^t}{K_j^{t2}} \quad ; \quad j=1,3 \quad (2.48)$$

Treballarem amb $K_1 \neq K_3$ (el cas $K_1 = K_3$ es pot considerar un cas particular). Si escrivim (2.48) com

$$\omega^2 K_j^{\ell 2} + 2K_j^{\ell} \ddot{K}_j^{\ell} - \dot{K}_j^{\ell 2} - 4c_j^{\ell} = 0$$

i ho derivem respecte al temps, tenim

$$2\omega^2 K_j^{\ell} \dot{K}_j^{\ell} + 2\dot{K}_j^{\ell} \ddot{K}_j^{\ell} + 2K_j^{\ell} \ddot{K}_j^{\ell} - 2\dot{K}_j^{\ell} \ddot{K}_j^{\ell} = 0$$

i simplificant,

$$\omega^2 = - \frac{K_j^{\ell}}{\dot{K}_j^{\ell}} \quad (2.49)$$

La solució a (2.49) és

$$K_j^{\ell} = P_j^{\ell} \cos(\omega t + Q_j^{\ell}) + R_j^{\ell} \quad (2.50)$$

amb les condicions que facin les K's positives, com s'ha dit a l'apartat 1.3, a saber,

$$R_j^{\ell} > P_j^{\ell} > 0 ; j=1,3 \quad (2.51)$$

Així, (2.50) ens proporcionaria, en cas de ser el potencial estacionari, l'evolució temporal de cada subsistema.

2.4- Conseqüències cinemàtiques

Estudiarem quin és el significat de les diferents relacions obtingudes entre les k 's, segons sigui el potencial adoptat, interpretant-ho a partir de la velocitat del centroide i dels moments de cada subsistema.

Posem el tensor A en funció dels moments: invertint (1.54), si definim, per a cada subsistema,

$$\gamma^{\iota} \equiv \frac{1}{3} \frac{\Phi_2^{\iota}(\sigma^{\iota})}{\Phi_0^{\iota}(\sigma^{\iota})} \quad (2.52)$$

on ι pot ser (') o (''), tindrem

$$A_{ij}^{\iota} = \gamma^{\iota} \mu_{ij}^{\iota -1} \quad (2.53)$$

on $\mu_{ij}^{\iota -1}$ és l'element ij del tensor invers de μ_2^{ι} . De manera explícita, tenint en compte (1.59),

$$\begin{aligned}
A_{rr}^{\ell} &= \frac{\gamma^{\ell}}{\det \mu_2^{\ell}} \mu_{\theta\theta}^{\ell} \mu_{zz}^{\ell} \\
A_{r\theta}^{\ell} &= 0 \\
A_{rz}^{\ell} &= \frac{\gamma^{\ell}}{\det \mu_2^{\ell}} \mu_{\theta\theta}^{\ell} \mu_{rz}^{\ell} \\
A_{\theta\theta}^{\ell} &= \frac{\gamma^{\ell}}{\det \mu_2^{\ell}} (\mu_{rr}^{\ell} \mu_{zz}^{\ell} - \mu_{rz}^{\ell 2}) \\
A_{\theta z}^{\ell} &= 0 \\
A_{zz}^{\ell} &= \frac{\gamma^{\ell}}{\det \mu_2^{\ell}} \mu_{rr}^{\ell} \mu_{\theta\theta}^{\ell}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

amb

$$\det \mu_2^{\ell} = \mu_{\theta\theta}^{\ell} (\mu_{rr}^{\ell} \mu_{zz}^{\ell} - \mu_{rz}^{\ell 2}) \tag{2.55}$$

Comencem estudiant el cas a) de potencial no separable de l'apartat 2.2, on

$$K_1 \equiv K'_1 = K''_1 \quad \text{i} \quad K_3 \equiv K'_3 = K''_3$$

Llavors, per (2.4),

$$\frac{k'_1}{k''_1} = \frac{k'_3}{k''_3} = \frac{k'_4}{k''_4} \quad (2.56)$$

Observant (1.45) es dedueixen immediatament les següents relacions,

$$\frac{A'_{rr}}{A''_{rr}} = \frac{A'_{rz}}{A''_{rz}} = \frac{A'_{zz}}{A''_{zz}} = \frac{k'_4}{k''_4} \quad (2.57)$$

Tenint en compte (2.54) i simplificant, traduïm l'anterior relació a moments,

$$\frac{\mu'_{rr}}{\mu''_{rr}} = \frac{\mu'_{rz}}{\mu''_{rz}} = \frac{\mu'_{zz}}{\mu''_{zz}} = \frac{\gamma''}{\gamma'} \frac{k'_4 (\mu'_{rr} \mu'_{zz} - \mu'^2_{rz})}{k''_4 (\mu''_{rr} \mu''_{zz} - \mu''^2_{rz})} \quad (2.58)$$

d'on

$$\frac{k'_4}{k''_4} = \frac{\gamma'}{\gamma''} \frac{\mu''_{rr}}{\mu'_{rr}} \quad (2.59)$$

Una conseqüència de (2.58) és

$$\frac{\mu'_{rr} - \mu'_{zz}}{\mu'_{rz}} = \frac{\mu''_{rr} - \mu''_{zz}}{\mu''_{rz}} \quad (2.60)$$

sempre que μ_{rz}^t siguin no nuls.

Aleshores, si recordem (1.62), podem afirmar que els el·lipsoïdes (1.24) dels dos sistemes estaran igualment orientats, o sigui,

$$\varepsilon' = \varepsilon'' + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.61)$$

Observant les expressions (1.52), corresponents a la velocitat del centroid, es comprova fàcilment que (2.56) obliga a

$$\begin{aligned} \Pi'_0 &= \Pi''_0 \\ Z'_0 &= Z''_0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

i, segons la relació existent entre K_1 i K_3 a cada subsistema —recordem que en el cas que s'estudia és innecessari escriure superíndexs per a especificar el subsistema—, es podran distingir tres casos (Sala, 1986):

Si $K_1 = K_3$, es verifica

$$\frac{\Pi'_0}{Z'_0} = \frac{\Pi''_0}{Z''_0} = \frac{r}{z} \quad (2.63)$$

que equival a dir que la velocitat de cada centroide té la direcció del centre galàctic. El potencial solució, en aquest cas, és el (2.30).

Si $\frac{\dot{K}_1}{K_1} = \frac{\dot{K}_3}{K_3}$, es continua complint (2.63) i el potencial

solució és (Sala, 1988)

$$U = \mathcal{A}(t) (u + w) + \frac{1}{u - w} \left[\mathcal{F}\left(\frac{u}{K_1 - K_3}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{w}{K_1 - K_3}\right) \right] \quad (2.64)$$

essent

$$\mathcal{A}(t) = - \frac{1}{4(K_1 - K_3)} \left(\ddot{K}_1 - \ddot{K}_3 + \frac{(\dot{K}_1 - \dot{K}_3)^2}{2(K_1 - K_3)} \right) \quad (2.65)$$

\mathcal{F} una funció arbitrària i amb les noves variables u i w verificant

$$u + w = K_1 + K_3 + 2(\tau + \zeta)$$

(2.66)

$$u - w = \left[[K_1 + K_3 + 2(\tau + \zeta)]^2 - 4[K_1 K_3 + 2(K_1 \tau + K_3 \zeta)] \right]^{1/2}$$

Si $\frac{\dot{K}_1}{K_1} \neq \frac{\dot{K}_3}{K_3}$ es compleix

$$\frac{\Pi'_0}{Z'_0} = \frac{\Pi''_0}{Z''_0} = \frac{r \dot{k}'_1 \dot{k}'_3 + \dot{k}'_1 \dot{k}'_4 r^2 + \dot{k}'_3 \dot{k}'_4 z^2}{z \dot{k}'_1 \dot{k}'_3 + \dot{k}'_1 \dot{k}'_4 r^2 + \dot{k}'_3 \dot{k}'_4 z^2} = \frac{r \dot{k}''_1 \dot{k}''_3 + \dot{k}''_1 \dot{k}''_4 r^2 + \dot{k}''_3 \dot{k}''_4 z^2}{z \dot{k}''_1 \dot{k}''_3 + \dot{k}''_1 \dot{k}''_4 r^2 + \dot{k}''_3 \dot{k}''_4 z^2} \quad (2.67)$$

i el potencial solució (Sala, 1986) és de la forma (2.39).

També indicar que la funció χ , definida a (1.36), complirà, com es dedueix de (1.48), (1.50), (1.51) i (2.56),

$$\frac{\frac{\partial \chi'}{\partial r}}{\frac{\partial \chi''}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial \chi'}{\partial z}}{\frac{\partial \chi''}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \chi'}{\partial t}}{\frac{\partial \chi''}{\partial t}} = \frac{k'_4}{k''_4}$$

i, per tant,

$$\chi' = \frac{k'_4}{k''_4} \chi'' + \text{const.} \quad (2.68)$$

Es posa en evidència que, cinemàticament parlant, aquest és un model bastant restringit: dos dels semieixos dels el·lipsoides de velocitat són proporcionals i les velocitats dels centroides —degut a la hipòtesi de simetria cilíndrica— només difereixen en la component de rotació. Des del punt de vista de superposició de sistemes a simetria cilíndrica, el cas que tractem seria interessant si no es tingués constància del fenomen de la desviació del vèrtex (Mayor, 1972; Oblak, 1983; Figueras, 1986; Sanz, 1987) manifestat, en particular, pel moment $\mu_{r\theta'}$, que sembla no ser nul. Com veurem al capítol següent —a l'apartat 3.3— la relació (2.62) proporcionaria la nul·litat d'alguns dels moments centrats, en particular de $\mu_{r\theta}$. Ens veurem, doncs, obligats a deixar de banda aquest cas.

Passem a veure el cas b) de potencial no separable de l'apartat 2.2. S'havia deduït (2.24):

$$\begin{aligned} k' &\equiv k'_1 = k'_3 \\ k'' &\equiv k''_1 = k''_3 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Llavors, de (1.45), es dedueix

$$\frac{A'_{rr} - A'_{zz}}{A''_{rr} - A''_{zz}} = \frac{A'_{rz}}{A''_{rz}} = \frac{k'_4}{k''_4} \quad (2.70)$$

i, com abans, per (2.54)

$$\frac{\mu'_{rr} - \mu'_{zz}}{\mu''_{rr} - \mu''_{zz}} = \frac{\mu'_{rz}}{\mu''_{rz}} = \frac{\gamma''}{\gamma'} \frac{k'_4 (\mu'_{rr} \mu'_{zz} - \mu'^2_{rz})}{k''_4 (\mu''_{rr} \mu''_{zz} - \mu''^2_{rz})} \quad (2.71)$$

No tenim, en aquest cas, la proporcionalitat entre dos dels semieixos dels el·lipsoides, però, en canvi, continuem amb el·lipsoides de igual orientació: es verifica, igualment, (2.60) i (2.61), amb la particularitat de que, com s'ha dit a l'apartat 1.4, el semieix major de cada el·lipsoide apunta al centre galàctic.

Quant a les velocitats dels centroides, es veu, a partir de (1.52), que es compleix

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{k}^l}{k^l} = \frac{\Pi_0^l}{r} = \frac{Z_0^l}{z} \quad (2.72)$$

Una conseqüència de l'anterior és (2.63), on, també, la velocitat de cada centroide té la direcció del centre galàctic. I una altra es dedueix de restar ordenadament les equacions de (2.72):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{k'}{k''} \right) = \frac{\Pi'_0 - \Pi''_0}{r} = \frac{Z'_0 - Z''_0}{z} \quad (2.73)$$

En particular, si aquest potencial fos no estacionari de la forma més general possible —expressió completa de (2.30)— es verificaria (2.33) i, (2.73) es reduiria a (2.62). Si es donés aquesta situació, l'argumentació que s'ha fet pel cas a) també serviria aquí. Si el nostre propòsit ha d'incloure l'explicació de la desviació del vèrtex, s'ha de considerar el potencial (2.30) amb V^t nul·la.

La restricció dels casos anteriors a potencial estacionari és immediata. En efecte, el cas a), com s'ha demostrat a l'apartat anterior, inclouria també la relació (2.69) i, per tant, la relació (2.67) es convertiria en la (2.63). Quant al cas b) no s'introdueix cap modificació a les relacions ja obtingudes i vàlides per a V^t nul·la.

Si el potencial és separable, aleshores sobre les k 's no hi ha cap restricció a excepció de (2.40). Si s'ignora la funció que allà anomenàvem $A(t)$, no se'n pot treure cap conseqüència, però si, com en el corresponent cas de potencial estacionari, es concreta la seva forma, llavors es pot deduir, com s'ha vist, la dependència temporal del sistema.

3.1- Superposició de distribucions d'Schwarzschild

Cosiderem una funció de distribució obtinguda a partir de la superposició (2.1), de distribucions quadràtiques.

Escriurem les quantitats N , \underline{v} i μ_n , definides a l'apartat 1.2, amb primes, segones o sense indicatiu, en funció de la referència que facin a la primera població, segona o total.

El problema que ens proposem resoldre és determinar aquestes quantitats per a les poblacions parcials, considerant com a dades les de la mostra total. El primer a fer serà escriure els moments totals en funció dels parcials.

Per la densitat estel·lar, tindrem

$$N = N' + N'' \quad (3.1)$$

Dividint per N i definint

$$n' = \frac{N'}{N}, \quad n'' = \frac{N''}{N} \quad (3.2)$$

la tornem a escriure en la nova forma

$$1 = n' + n'' \quad (3.3)$$

Semblantment, per la velocitat mitjana i els moments centrats,

$$N \underline{v} = N' \underline{v}' + N'' \underline{v}'' \quad (3.4)$$

que amb (3.2) es converteix en

$$\underline{v} = n' \underline{v}' + n'' \underline{v}'' \quad (3.5)$$

Definim, aquí, unes noves variables: en primer lloc la diferència de velocitats dels centroides de les poblacions parcials, als quals podem anomenar subcentroides,

$$\underline{w} = \underline{v}' - \underline{v}'' \quad (3.6)$$

i la velocitat residual de la població total,

$$\underline{u} = \underline{V} - \underline{v} \quad (3.7)$$

i, a continuació, les velocitats residuals parcials, és a dir, referides als respectius subcentroides,

$$\underline{u}' = \underline{V} - \underline{v}' \quad (3.8)$$

$$\underline{u}'' = \underline{V} - \underline{v}''$$

La velocitat residual total (3.7) es podrà escriure en funció de les parcials (3.8) i la diferència de velocitats dels subcentroides (3.6) com

$$\underline{u} = \underline{u}' + n''\underline{w} = \underline{u}'' - n'\underline{w} \quad (3.9)$$

Per a calcular els moments centrats d'ordres superiors, necessitarem l'ajut d'un nou tensor, definit com segueix:

Si A_m i B_n són dos tensors simètrics d'ordres m i n respectivament i $S(p)$ representa el grup de les permutacions dels p -elements, definim, per components, el tensor

$$A_m * B_n |_{i_1 i_2 \dots i_{m+n}} \equiv \frac{n!m!}{(m+n)!} \sum_{\alpha \in S(m+n)} A_{\alpha i_1 \dots \alpha i_m} B_{\alpha i_{m+1} \dots \alpha i_{m+n}} \quad (3.10)$$

que, evidentment és simètric i compleix relació

$$A_m * B_n = B_n * A_m \quad (3.11)$$

És fàcil comprovar, d'acord amb (3.10), la relació

$$(\underline{a} + \underline{b})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\underline{a})^{n-k} * (\underline{b})^k \quad (3.12)$$

Els moments centrats es calcularan, segons (1.19), (2.1), (3.7) i (3.9), de la següent forma,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{1}{N} \int_{\underline{V}} (\underline{u})^n \psi' d\underline{V} + \frac{1}{N} \int_{\underline{V}} (\underline{u})^n \psi'' d\underline{V} = \\ &= \frac{1}{N} \int_{\underline{V}} (\underline{u}' + n''\underline{w})^n \psi' d\underline{V} + \frac{1}{N} \int_{\underline{V}} (\underline{u}'' - n'\underline{w})^n \psi'' d\underline{V} \end{aligned}$$

Aplicant (3.12),

$$\begin{aligned} \mu_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ \int_{\underline{V}} (\underline{u}')^{n-k} * (n''\underline{w})^k \psi' d\underline{V} + \int_{\underline{V}} (\underline{u}'')^{n-k} * (-n'\underline{w})^k \psi'' d\underline{V} \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ n' \mu'_{n-k} * (n''\underline{w})^k + n'' \mu''_{n-k} * (-n'\underline{w})^k \right\} \end{aligned}$$

I finalment,

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ n' n''^k \mu'_{n-k} + (-1)^k n'' n'^k \mu''_{n-k} \right\} * (\underline{w})^k \quad (3.13)$$

Per a $n=0$ i $n=1$, és immediat, per pròpia definició,

$$\mu_0 = \mu'_0 = \mu''_0 = 1 \quad (3.14)$$

$$\mu_1 = \mu'_1 = \mu''_1 = \underline{0}$$

Per a $n=2$, aplicant (3.13),

$$\mu_2 = n' \mu'_2 + n'' \mu''_2 + 2n' n'' (\mu'_1 - \mu''_1) * \underline{w} + (n' n''^2 + n'' n'^2) (\underline{w})^2$$

que per (3.2) i (3.14) es converteix en

$$\mu_2 = n' \mu'_2 + n'' \mu''_2 + n' n'' (\underline{w})^2 \quad (3.15)$$

Donat que μ_2 és un tensor simètric de segon ordre, (3.15) constitueix un sistema de sis relacions independents.

Per a $n=3$,

$$\begin{aligned} \mu_3 = & n' \mu'_3 + n'' \mu''_3 + 3 n' n'' (\mu'_2 - \mu''_2) * \underline{w} + \\ & + 3(n' n''^2 \mu'_1 + n'' n'^2 \mu''_1) * (\underline{w})^2 + (n' n''^3 - n'' n'^3) (\underline{w})^3 \end{aligned}$$

En ser les funcions de distribució que es superposen de tipus quadràtic, els moments centrats parcials d'ordre imparell s'anularan. Llavors, emprant altre cop (3.3),

$$\mu_3 = 3n'n''(\mu_2' - \mu_2'') * \underline{w} + n'n''(n'' - n') (\underline{w})^3 \quad (3.16)$$

Conjunt constituït per deu relacions.

Per a $n=4$,

$$\begin{aligned} \mu_4 = & n'\mu_4' + n''\mu_4'' + 4n'n''(\mu_3' - \mu_3'') * (\underline{w}) + \\ & + 6(n'n''^2\mu_2' + n''n'^2\mu_2'') * (\underline{w})^2 + 4(n'n''^3\mu_1' - n''n'^3\mu_1'') * (\underline{w})^3 + \\ & + (n'n''^4 + n''n'^4) (\underline{w})^4 \end{aligned}$$

Recurrim, en aquest punt, a la hipòtesi de que les funcions de distribució que es superposen són d'Schwarzschild. Aleshores, a més de ser nuls els moments parcials imparells, es compleixen —com ja s'ha vist al primer capítol, a (1.61) amb $\rho=1$ — les següents relacions entre els moments de quart i segon ordre, que expressarem fent ús de la nova notació introduïda a (3.10):

$$\mu_4' = 3 \mu_2' * \mu_2' \quad (3.17)$$

$$\mu_4'' = 3 \mu_2'' * \mu_2''$$

Així, μ_4 s'escriurà com

$$\begin{aligned} \mu_4 = & 3n' \mu'_2 * \mu'_2 + 3n'' \mu''_2 * \mu''_2 + \\ & + 6n'n''(n''\mu'_2 + n'\mu''_2) * (\underline{w})^2 + n'n''(1-3n'n'') (\underline{w})^4 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Corresponent, per components, a un total de quinze relacions.

Iniciem una sèrie de passos per a facilitar el tractament del problema i simplificar la notació. Definirem els següents tensors de segon ordre,

$$a_2 = n'\mu'_2 + n''\mu''_2 \quad (3.19)$$

$$b_2 = \mu'_2 - \mu''_2$$

Convindrà, aquí, invertir les equacions (3.19), per a, al darrer pas de la resolució del problema, calcular els moments parcials. Així,

$$\mu'_2 = a_2 + n''b_2 \quad (3.20)$$

$$\mu''_2 = a_2 - n'b_2$$

Evidentment, a_2 i b_2 són tensors simètrics i és fàcil comprovar que verifiquen

$$n' \mu'_2 \otimes \mu'_2 + n'' \mu''_2 \otimes \mu''_2 = a_2 \otimes a_2 + n'n'' b_2 \otimes b_2 \quad (3.21)$$

$$n' \mu'_2 * \mu'_2 + n'' \mu''_2 * \mu''_2 = a_2 * a_2 + n'n'' b_2 * b_2 \quad (3.22)$$

$$n'' \mu'_2 + n' \mu''_2 = a_2 + (n'' - n') b_2 \quad (3.23)$$

Utilitzant aquestes darreres relacions, tornarem a escriure μ_2 , μ_3 i μ_4 d'una forma més compacta. En efecte, pels de segon i tercer ordre, (3.15) i (3.16) es converteixen directament en

$$\mu_2 = a_2 + n'n'' (\underline{w})^2 \quad (3.24)$$

$$\mu_3 = 3n'n'' b_2 * (\underline{w}) + n'n'' (n'' - n') (\underline{w})^3 \quad (3.25)$$

Previ a reescriure els moments de quart ordre, calculem, a partir de (3.24),

$$\begin{aligned} a_2 * a_2 &= (\mu_2 - n'n'' (\underline{w})^2) * (\mu_2 - n'n'' (\underline{w})^2) = \\ &= \mu_2 * \mu_2 - 2n'n'' \mu_2 * (\underline{w})^2 + (n'n'')^2 (\underline{w})^4 \end{aligned}$$

i, substituïnt-ho a (3.22) i a (3.18),

$$\begin{aligned} \mu_4 = & 3 \mu_2' \mu_2'' - 6n'n'' \mu_2' \underline{w}^2 + 3(n'n'')^2 \underline{w}^4 + 3n'n'' b_2' b_2'' + \\ & + 6n'n''(a_2 + (n''-n') b_2) \underline{w}^2 + n'n''(1-3n'n'') \underline{w}^4 \end{aligned}$$

Reagrupant termes i usant (3.24),

$$\begin{aligned} \mu_4 = & 3 \mu_2' \mu_2'' + 3n'n'' (b_2 + (n''-n') \underline{w}^2) \underline{w}^2 + 3n'n'' (b_2 + (n''-n') \underline{w}^2) \underline{w}^2 - \\ & - 2n'n''(1-3n'n'') \underline{w}^4 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Fins aquí hem expressat els moments totals μ_2 , μ_3 i μ_4 (un total de 31) a partir dels parcials μ_2' i μ_2'' (un total de 12) —o, si es vol, les variables equivalents a_2 , b_2 —, n' , n'' i \underline{w} . Recordem, però, que n' i n'' estaven relacionades per (3.3).

3.2- Moments centrats

Es tractarà, doncs, de solucionar un sistema de 31 equacions no lineals —les sis de (3.24), les deu de (3.25) i les quinze de (3.26)— amb 14 incògnites, obtenint, així, un conjunt addicional de 17 equacions de lligadura.

Vegem com es resoldria el problema en el cas més general, en el que es coneguessin tots els moments totals.

Potser seria convenient d'indicar en aquest punt que, si bé en el següent capítol introduïrem algunes simplificacions per a subsanar la deficiència d'algunes dades experimentals que fan prohibitiva l'aplicació d'alguna de les següents fórmules, el mètode aquí desenvolupat serà aplicable, si el destí no ens juga cap mala passada, quan hagi finalitzat la missió espacial Hipparcos destinada a recollir dades astromètriques d'unes 120.000 estrelles. Esperem que, d'aquí a uns tres o quatre anys, es pugui disposar de taules de moments centrats de les velocitats residuals per a diverses mostres estel·lars amb errors mínims.

Fem un canvi de variables:

$$\underline{D} = \sqrt{n'n''} \underline{w} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \sqrt{n'n''} \left(b_2 + (n''-n') (\underline{w})^2 \right) = \\ &= \sqrt{n'n''} b_2 + \left(\sqrt{\frac{n''}{n'}} - \sqrt{\frac{n'}{n''}} \right) (\underline{D})^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$q = \sqrt{\frac{n''}{n'}} - \sqrt{\frac{n'}{n''}} \quad (3.29)$$

Observi's que C_2 és, com μ_2 i b_2 , un tensor simètric. Escrivim, també, les corresponents fórmules de inversió. Podem expressar q de la següent manera:

$$q = \frac{n'' - n'}{\sqrt{n' n''}} = \sqrt{\frac{1}{n' n''} - 4} \quad (3.30)$$

Llavors, aïllant n'

$$n' = \frac{1}{2} + \frac{q}{\sqrt{q^2 + 4}} \quad (3.31)$$

Hem adoptat el conveni de signes que correspon a considerar

$$n' \geq n''$$

I finalment, de (3.28) i (3.29),

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{n' n''}} \left(C_2 - q (\underline{D})^2 \right) \quad (3.32)$$

En lloc de treballar amb μ_4 , ho farem amb un nou tensor simètric de quart ordre, a saber,

$$\nu_4 = \mu_4 - 3 \mu_2^* \mu_2 \quad (3.33)$$

Amb les noves notacions, (3.24), (3.25) i (3.26) queden així de simples:

$$\mu_2 = a_2 + (\underline{D})^2 \quad (3.34)$$

$$\mu_3 = 3 C_2^* \underline{D} - 2q (\underline{D})^3 \quad (3.35)$$

$$\nu_4 = 3 C_2^* C_2 - 2(q^2 + 1) (\underline{D})^4 \quad (3.36)$$

Començarem tractant els moments de tercer ordre, construint un sistema de deu equacions equivalent a (3.35).

En components, quan els tres índexs són iguals, tenim,

$$\mu_{iii} = 3 C_{ii} D_i - 2q D_i^3 \quad (3.37)$$

d'on, aïllant C_{ii} ,

$$C_{ii} = \frac{\mu_{iii} + 2q D_i^3}{3 D_i} \quad (3.38)$$

Quan hi ha dos índexs iguals,

$$\mu_{iik} = C_{ii} D_k + 2 C_{ik} D_i - 2q D_i^2 D_k \quad (3.39)$$

Substituïnt (3.38) a (3.39) i aïllant C_{ik} ,

$$C_{ik} = \frac{3 \mu_{iik} D_i - \mu_{iii} D_k}{6 D_i^2} + \frac{2}{3} q D_i D_k \quad (3.40)$$

Quan els tres índexs són, en general, distints,

$$\mu_{ijk} = C_{ij} D_k + C_{ik} D_j + C_{jk} D_i - 2q D_i D_j D_k \quad (3.41)$$

Substituïnt (3.38) a (3.41), i reordenant s'obté

$$\begin{aligned} 2 \mu_{ijk} D_i^2 D_j - 2 \mu_{ijj} D_i D_j D_k + \mu_{iii} D_j^2 D_k - \\ - \mu_{iik} D_i D_j^2 - \mu_{jjk} D_i^3 + \mu_{ijj} D_i^2 D_k = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Les quatre equacions de (3.42) —una per a $i \neq j \neq k \neq i$ i tres per a $i = j \neq k$ —, seran el primer grup de relacions que considerarem substitutiu de (3.25).

Posem-les de forma explícita, fent ús, per a major comprensió, el conjunt d'índexs $\{ r, \theta, z \}$.

$$\mu_{rrr} D_{\theta}^3 - 3 \mu_{rr\theta} D_r D_{\theta}^2 + 3 \mu_{r\theta\theta} D_r^2 D_{\theta} - \mu_{\theta\theta\theta} D_r^3 = 0 \quad (3.43)$$

$$\mu_{\theta\theta\theta} D_z^3 - 3 \mu_{\theta\theta z} D_{\theta} D_z^2 + 3 \mu_{\theta z z} D_{\theta}^2 D_z - \mu_{z z z} D_{\theta}^3 = 0 \quad (3.44)$$

$$\mu_{z z z} D_r^3 - 3 \mu_{r z z} D_z D_r^2 + 3 \mu_{r r z} D_z^2 D_r - \mu_{r r r} D_z^3 = 0 \quad (3.45)$$

$$2 \mu_{r\theta z} D_{\theta}^2 D_z - 2 \mu_{\theta\theta z} D_r D_{\theta} D_z + \mu_{\theta z z} D_r D_{\theta}^2 - \\ - \mu_{r\theta\theta} D_{\theta} D_z^2 + \mu_{\theta\theta\theta} D_r D_z^2 - \mu_{r z z} D_{\theta}^3 = 0 \quad (3.46)$$

Aquest conjunt de quatre equacions homogènies i de tercer grau en D_i , permet, a partir de qualsevol parella d'elles —suposant, per exemple, $D_{\theta} \neq 0$ (Ros, 1983)—, determinar els quocients

$$d_r = D_r / D_{\theta} \quad i \quad d_z = D_z / D_{\theta} \quad (3.47)$$

(essent $d_{\theta} = 1$) i en queden dues com a lligams.

Per a escriure les sis relacions que falten, escrivim els moments de quart ordre definint

$$p^2 = q^2 + 1 \quad (3.48)$$

Aleshores, (3.36), per components, serà:

$$v_{i i j k} + 2p^2 D_i^2 D_j D_k = C_{i i} C_{j k} + 2 C_{i j} C_{i k} \quad (3.49)$$

(conjunt constituït per quinze equacions repartides de la següent forma: 3 per a $i=j=k$, 3 per a $i \neq j \neq k \neq i$, 3 per a $i \neq j=k$, 6 per a $i=j \neq k$).

Obtindrem una sèrie de relacions entre moments de tercer, segon i quart ordre —representats, els darrers, a través de les v 's— construint, a tal fet, les següents combinacions lineals de moments:

$$E_{ij} = v_{iiii} d_j^4 - 4v_{iiij} d_i d_j^3 + 6v_{iijj} d_i^2 d_j^2 - 4v_{ijjj} d_i^3 d_j + v_{jjjj} d_i^4$$

$$Z_{ij} = v_{iiii} d_j^4 - 2v_{iiij} d_i d_j^3 + 2v_{iijj} d_i^3 d_j - v_{jjjj} d_i^4$$

(3.50)

$$\xi_{ij} = \mu_{iii} d_j^2 - 2\mu_{iij} d_i d_j + \mu_{ijj} d_i^2$$

$$\zeta_{ij} = d_i (\mu_{iij} d_j - \mu_{ijj} d_i)$$

Per a $i=j$ aquestes quantitats es fan nul·les i, a més, es verifiquen les següents relacions de dependència

$$E_{ij} = E_{ji}$$

$$Z_{ij} = -Z_{ji}$$

$$\xi_{ij} = \xi_{ji}$$

$$d_j \zeta_{ij} = -d_i \zeta_{ji}$$

La tercera igualtat, demostrable a partir de (3.42) i, les restants, immediates. Per aquest motiu, només considerarem les independents, és a dir, aquelles que els índexs verifiquin la condició $i < j$.

Observi's que, al haver calculat les d 's a partir de les equacions (3.43) a (3.46), els nous paràmetres E_{ij} , Z_{ij} , ξ_{ij} i ζ_{ij} estan totalment determinats.

Es comprova, fàcil però pacientment, a partir de (3.40), (3.49) i (3.50), que es satisfà

$$\left[C_{ii} d_j^2 - 2C_{ij} d_i d_j + C_{jj} d_i^2 \right]^2 = \frac{E_{ij}}{3} = \frac{\xi_{ij}^2}{D_i^2} \quad (3.51)$$

$$\left[C_{ii} d_j^2 - C_{jj} d_i^2 \right] \left[C_{ii} d_j^2 - 2C_{ij} d_i d_j + C_{jj} d_i^2 \right] = \frac{Z_{ij}}{3} = \frac{\xi_{ij} \zeta_{ij}}{D_i^2}$$

I combinant adequadament les dues de (3.51) arribem a

$$D_i^2 = \frac{3 \xi_{ij}^2}{E_{ij}} = \frac{3 \xi_{ij} \zeta_{ij}}{Z_{ij}} \quad (3.52)$$

Conjunt de sis equacions independents, al considerar $i < j$, que generalitzen, en la nova notació, les obtingudes per Ros (1983).

Resumint, el sistema de deu equacions (3.35) ha quedat substituït per les quatre de (3.42) i les sis de (3.52), de forma que s'han calculat les tres components de \underline{D}

i han quedat set relacions de lligadura, expressades totes elles a partir, directa o indirectament, dels moments totals.

Coneixent, ja, les D_i (a excepció del signe), ens disposem a calcular les incògnites restants, a partir de les quinze equacions (3.49).

Separem aquest sistema en cinc subsistemes:

$$v_{iiii} + 2p^2 D_i^4 = 3C_{ii}^2 \quad [3 \text{ eqs.}] \quad (3.49a)$$

$$v_{iijj} + 2p^2 D_i^2 D_j^2 = C_{ii} C_{jj} + 2C_{ij}^2 \quad [3 \text{ eqs. per a } i \neq j] \quad (3.49b)$$

$$v_{iiij} + 2p^2 D_i^3 D_j = 3C_{ii} C_{ij} \quad [3 \text{ eqs. per a } i < j] \quad (3.49c)$$

$$C_{ij} = C_{ji} \quad [3 \text{ eqs. per a } i < j] \quad (3.49d)$$

$$v_{iijk} + 2p^2 D_i^2 D_j D_k = C_{ii} C_{jk} + 2C_{ij} C_{ik} \quad [3 \text{ eqs. per a } i \neq j \neq k \neq i] \quad (3.49e)$$

De (a) i (c) obtenim

$$C_{ij} = \pm \frac{v_{iiij} + 2p^2 D_i^3 D_j}{\sqrt{3(v_{iiii} + 2p^2 D_i^4)}} \quad , \quad i < j \quad (3.53)$$

que portant-ho a (d) ho transformarà en un sistema de tres equacions amb una única incògnita: p^2 —o si es prefereix n' —, determinat totalment a partir dels moments totals i

les D_i^2 . Aquest sistema es pot escriure de manera compacta, definint

$$F_{ij} = 4 D_i^2 D_j^2 E_{ij}$$

$$G_{ij} = 2[\nu_{ijjj} d_i^4 - 2\nu_{jjjj} \nu_{iiij} d_i^3 d_j + 2\nu_{iiii} \nu_{ijjj} d_i d_j^3 - \nu_{iiij} d_j^4]$$

$$H_{ij} = \frac{\nu_{iiii} \nu_{ijjj}^2 - \nu_{jjjj} \nu_{iiij}^2}{D_{\theta}^4}$$

com

$$F_{ij} p^4 + G_{ij} p^2 + H_{ij} = 0, \quad i < j \quad (3.54)$$

D'aquest sistema de tres equacions, equivalent a (d), se'n pot treure el valor òptim de p , que substituït a (a) i (b) ens donarà els valors C_{ii} , C_{ij} . Finalment, considerarem (c) i (e) com a lligadures, les quals serviran per a fixar els signes, que fins ara estaven per determinar.

Només quedarà fer marxa enrera i obtenir a_2 i b_2 per (3.34) i (3.32), i els moments parcials μ_2' i μ_2'' per (3.20).

3.3- Distribucions a simetria cilíndrica

En el mètode general que acabem d'exposar hem escrit expressions que contenen moments totals que, com veurem al següent capítol, estan, en la pràctica, mal determinats o són gairebé nuls (inferiors al doble del seu error). Moguts per l'esperit de no fer intervenir quantitats d'aquesta mena fins que no es sàpiguen millor, i també, de construir un model el més simple possible, estudiarem la superposició de dues funcions de distribució d'Schwarzschild amb simetria cilíndrica, tractades als apartats 1.3 i 1.4.

D'acord amb (1.59), que aplicarem a cada subsistema, tindrem,

$$\mu'_{r\theta} = \mu''_{r\theta} = \mu'_{\theta z} = \mu''_{\theta z} = 0 \quad (3.55)$$

Aquest cas correspon a la superposició de dues poblacions tals que cada una d'elles presenta la distribució de masses i la velocitat dels centroïdes locals simètriques respecte al plà galàctic $z=0$.

Llavors, per (3.19),

$$a_{r\theta} = a_{\theta z} = b_{r\theta} = b_{\theta z} = 0 \quad (3.56)$$

Substituïnt aquests valors, a (3.34),

$$\mu_{r\theta} = D_r D_\theta \quad (3.57)$$

$$\mu_{\theta z} = D_\theta D_z \quad (3.58)$$

Recordem, en aquest punt, la referència al moment $\mu_{r\theta}$ feta a l'apartat 2.4. Si es satisfesia la primera de (2.62), per (3.6) i (3.27) el moment seria nul i no hi hauria desviació del vèrtex, en contra del que veurem a les mostres del següent capítol.

Dividint entre sí les anteriors equacions, definirem

$$h \equiv \frac{D_z}{D_r} = \frac{\mu_{\theta z}}{\mu_{r\theta}} \quad (3.59)$$

Portant (3.57) i (3.58) a (3.28),

$$C_{r\theta} = C_{\theta r} = q \mu_{r\theta} \quad (3.60)$$

$$C_{\theta z} = C_{z\theta} = q \mu_{\theta z} \quad (3.61)$$

Per tant, de les sis components desconegudes de C_2 tan sols en queden quatre per a determinar.

Començarem tractant els moments de quart ordre. Escriurem les quinze equacions de (3.49) per parts, per a diferents conjunts d'índexs, i aplicarem (3.57), (3.58), (3.60) i (3.61). Considerem, primerament, el següent sistema

de tres equacions,

$$\begin{aligned}
 v_{rr\theta\theta} + 2(q^2+1)D_r^2 D_\theta^2 &= C_{rr} C_{\theta\theta} + 2C_{r\theta}^2 \\
 v_{\theta\theta z z} + 2(q^2+1)D_\theta^2 D_z^2 &= C_{\theta\theta} C_{zz} + 2C_{\theta z}^2 \\
 v_{r\theta\theta z} + 2(q^2+1)D_r D_\theta^2 D_z &= C_{rz} C_{\theta\theta} + 2C_{r\theta} C_{\theta z}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

que, prèvia definició de

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_{rr\theta\theta} &\equiv v_{rr\theta\theta} + 2\mu_{r\theta}^2 = \mu_{rr\theta\theta} - \mu_{rr} \mu_{\theta\theta} \\
 \bar{v}_{\theta\theta z z} &\equiv v_{\theta\theta z z} + 2\mu_{\theta z}^2 = \mu_{\theta\theta z z} - \mu_{\theta\theta} \mu_{z z} \\
 \bar{v}_{r\theta\theta z} &\equiv v_{r\theta\theta z} + 2\mu_{r\theta} \mu_{\theta z} = \mu_{r\theta\theta z} - \mu_{\theta\theta} \mu_{rz}
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

es transformarà en

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_{rr\theta\theta} &= C_{rr} C_{\theta\theta} \\
 \bar{v}_{\theta\theta z z} &= C_{\theta\theta} C_{zz} \\
 \bar{v}_{r\theta\theta z} &= C_{rz} C_{\theta\theta}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Aquest sistema el podem expressar de la següent forma

$$K \equiv \frac{1}{C_{\theta\theta}} = \frac{C_{rr}}{\bar{v}_{rr\theta\theta}} = \frac{C_{zz}}{\bar{v}_{\theta\theta zz}} = \frac{C_{rz}}{\bar{v}_{r\theta\theta z}} \quad (3.65)$$

Per a calcular el valor K de (3.65) tornem a (3.49). Considerem aquest altre sistema de tres equacions

$$\begin{aligned} v_{rrrr} + 2(q^2+1) D_r^4 &= 3 C_{rr}^2 \\ v_{\theta\theta\theta\theta} + 2(q^2+1) D_\theta^4 &= 3 C_{\theta\theta}^2 \\ v_{zzzz} + 2(q^2+1) D_z^4 &= 3 C_{zz}^2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Multipliquem la primera per $D_\theta^4 D_z^4$, la tercera per $D_r^4 D_\theta^4$ i restem, tenint sempre present (3.57) i (3.58).

$$v_{rrrr} \mu_{\theta z}^4 - v_{zzzz} \mu_{r\theta}^4 = 3(C_{rr}^2 \mu_{\theta z}^4 - C_{zz}^2 \mu_{r\theta}^4) \quad (3.67)$$

Si escrivim part de (3.65) de la següent forma

$$K^2 = \frac{C_{rr}^2}{\bar{v}_{rr\theta\theta}^2} = \frac{C_{zz}^2}{\bar{v}_{\theta\theta zz}^2} = \frac{C_{rr}^2 \mu_{\theta z}^4 - C_{zz}^2 \mu_{r\theta}^4}{\bar{v}_{rr\theta\theta}^2 \mu_{\theta z}^4 - \bar{v}_{\theta\theta zz}^2 \mu_{r\theta}^4}$$

aplicant (3.67), obtindrem

$$K^2 = \frac{1}{3} \frac{\nu_{rrrr} \mu_{\theta z}^4 - \nu_{zzzz} \mu_{r\theta}^4}{\bar{\nu}_{rr\theta\theta}^2 \mu_{\theta z}^4 - \bar{\nu}_{\theta\theta zz}^2 \mu_{r\theta}^4} \quad (3.68)$$

Amb el valor K de (3.68), les equacions (3.65) ens permetran calcular les incògnites de C_2 que faltaven.

Per al càlcul de \underline{D} i n' (a partir de q) retrocedim a (3.66). Ho escrivim com

$$2(q^2+1) = \frac{3C_{rr}^2 - \nu_{rrrr}}{D_r^4} = \frac{3C_{\theta\theta}^2 - \nu_{\theta\theta\theta\theta}}{D_\theta^4} = \frac{3C_{zz}^2 - \nu_{zzzz}}{D_z^4} \quad (3.69)$$

o bé, tenint en compte (3.57) i (3.58), eliminem la dependència en les D 's de (3.69),

$$\begin{aligned} 2(q^2+1) &= \frac{\sqrt{(3C_{rr}^2 - \nu_{rrrr})(3C_{\theta\theta}^2 - \nu_{\theta\theta\theta\theta})}}{\mu_{r\theta}^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(3C_{\theta\theta}^2 - \nu_{\theta\theta\theta\theta})(3C_{zz}^2 - \nu_{zzzz})}}{\mu_{\theta z}^2} \end{aligned} \quad (3.70)$$

De (3.70) s'obté q i de (3.69) D_r , D_θ i D_z .

Continuem amb (3.49):

$$\begin{aligned}
v_{rr\theta z} + 2(q^2+1)D_r^2 D_\theta D_z &= C_{rr} C_{\theta z} + 2C_{r\theta} C_{rz} \\
v_{r\theta zz} + 2(q^2+1)D_r D_\theta D_z^2 &= C_{r\theta} C_{zz} + 2C_{rz} C_{\theta z}
\end{aligned}
\tag{3.71}$$

Fent, de nou, ús de (3.57), (3.58), (3.60) i (3.61), les equacions anteriors es transformaran en

$$\begin{aligned}
v_{rr\theta z} + 2(q^2+1) \mu_{r\theta} D_r D_z &= q(C_{rr} \mu_{\theta z} + 2C_{rz} \mu_{r\theta}) \\
v_{r\theta zz} + 2(q^2+1) \mu_{\theta z} D_r D_z &= q(C_{zz} \mu_{r\theta} + 2C_{rz} \mu_{\theta z})
\end{aligned}
\tag{3.72}$$

d'entre les quals eliminem C_{rz} :

$$v_{rr\theta z} \mu_{\theta z} - v_{r\theta zz} \mu_{r\theta} = q(C_{rr} \mu_{\theta z}^2 + 2C_{zz} \mu_{r\theta}^2)
\tag{3.73}$$

De (3.65) se'n dedueix

$$K = \frac{C_{rr} \mu_{\theta z}^2 - C_{zz} \mu_{r\theta}^2}{\bar{v}_{rr\theta\theta} \mu_{\theta z}^2 - \bar{v}_{\theta\theta zz} \mu_{r\theta}^2}$$

que combinant-ho amb (3.73) dóna una nova estimació de q :

$$q = \frac{1}{K} \frac{v_{rr\theta z} \mu_{\theta z} - v_{r\theta z z} \mu_{r\theta}}{\bar{v}_{rr\theta\theta} \mu_{\theta z}^2 - \bar{v}_{\theta\theta z z} \mu_{r\theta}^2} \quad (3.74)$$

Continuem, encara, amb quatre equacions més de (3.49), que serviran com a lligams,

$$v_{rrr\theta} + 2(q^2+1)D_r^3 D_\theta = 3C_{rr} C_{r\theta}$$

$$v_{r\theta\theta\theta} + 2(q^2+1)D_r D_\theta^3 = 3C_{r\theta} C_{\theta\theta}$$

$$v_{\theta\theta\theta z} + 2(q^2+1)D_\theta^3 D_z = 3C_{\theta\theta} C_{\theta z}$$

$$v_{\theta z z z} + 2(q^2+1)D_\theta D_z^3 = 3C_{\theta z} C_{zz}$$

I, tal com s'ha fet anteriorment, es transformen en

$$v_{rrr\theta} + 2(q^2+1) \mu_{r\theta} D_r^2 = 3q \mu_{r\theta} C_{rr}$$

$$v_{r\theta\theta\theta} + 2(q^2+1) \mu_{r\theta} D_\theta^2 = 3q \mu_{r\theta} C_{\theta\theta}$$

$$v_{\theta\theta\theta z} + 2(q^2+1) \mu_{\theta z} D_\theta^2 = 3q \mu_{\theta z} C_{\theta\theta}$$

$$v_{\theta z z z} + 2(q^2+1) \mu_{\theta z} D_z^2 = 3q \mu_{\theta z} C_{zz}$$

(3.75)

Si eliminem $C_{\theta\theta}$ d'entre les dues del mig obtindrem una nova relació entre moments totals,

$$\frac{\mu_{\theta z}}{\mu_{r\theta}} = \frac{\nu_{\theta\theta\theta z}}{\nu_{r\theta\theta\theta}} \quad (3.76)$$

Finalment, ja només en queden tres de les quinze de (3.49). Anem a escriure-les tot seguit, doncs també seran útils per a tancar el sistema.

$$\begin{aligned} \nu_{rrzz} + 2(q^2+1)D_r^2 D_z^2 &= C_{rr} C_{zz} + 2C_{rz}^2 \\ \nu_{rrrz} + 2(q^2+1)D_r^3 D_z &= 3C_{rr} C_{rz} \\ \nu_{rzzz} + 2(q^2+1)D_r D_z^3 &= 3C_{rz} C_{zz} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Veurem, tot seguit, com es simplifiquen, en aquest model, les deu equacions dels moments de tercer ordre.

Aplicant (3.60) i (3.61) a cinc de les equacions (3.35) s'obté

$$\mu_{rr\theta} = C_{rr} D_{\theta} \quad (3.78a)$$

$$\mu_{r\theta\theta} = C_{\theta\theta} D_r \quad (3.78b)$$

$$\mu_{\theta zz} = C_{zz} D_{\theta} \quad (3.78c)$$

$$\mu_{\theta\theta z} = C_{\theta\theta} D_z \quad (3.78d)$$

$$\mu_{r\theta z} = C_{rz} D_{\theta} \quad (3.78e)$$

D'aquest conjunt en treurem relacions entre moments totals. En efecte, multiplicant (a) i (b), i recordant (3.57) i (3.65), s'obté

$$\mu_{rr\theta} \mu_{r\theta\theta} = \bar{v}_{rr\theta\theta} \mu_{r\theta} \quad (3.79)$$

D'entre (a) i (c), dividint i tenint en compte (3.65),

$$\frac{\mu_{rr\theta}}{\mu_{\theta zz}} = \frac{\bar{v}_{rr\theta\theta}}{\bar{v}_{\theta\theta zz}} \quad (3.80)$$

Dividint (b) i (d), i recordant (3.59),

$$\frac{\mu_{\theta z}}{\mu_{r\theta}} = \frac{\mu_{\theta\theta z}}{\mu_{r\theta\theta}} \quad (3.81)$$

Multiplicant (b) i (e), per (3.57) i (3.65),

$$\mu_{r\theta\theta} \mu_{r\theta z} = \bar{v}_{r\theta\theta z} \mu_{r\theta} \quad (3.82)$$

En faltaria escriure una quinta per a completar el sistema. Podem utilitzar (a), però considerant (3.46), (3.57) i (3.65), l'expressarem de la següent manera:

$$d_r = \frac{\mu_{r\theta}}{D_\theta^2} = \frac{\mu_{r\theta} C_{rr}^2}{\mu_{rr\theta}^2}$$

$$d_r = \frac{\mu_{r\theta} \bar{v}_{rr\theta\theta}^2}{\mu_{rr\theta}^2} K^2 \quad (3.83)$$

Escriurem les fórmules (3.79), (3.80) , (3.81) i (3.82) interrelacionades:

$$\frac{\mu_{r\theta\theta}}{\mu_{r\theta}} = \frac{\mu_{\theta\theta z}}{\mu_{\theta z}} = \frac{\bar{v}_{rr\theta\theta}}{\mu_{rr\theta}} = \frac{\bar{v}_{r\theta\theta z}}{\mu_{r\theta z}} = \frac{\bar{v}_{\theta\theta z z}}{\mu_{\theta z z}} \quad (3.84)$$

Continuem amb relacions on intervenen moments de tercer ordre. Aplicant (3.60) i (3.61) a (3.40),

$$q \mu_{r\theta} = \frac{3 \mu_{rr\theta} D_r - \mu_{rrr} D_\theta}{3 D_r^2} = \frac{3 \mu_{r\theta\theta} D_\theta - \mu_{\theta\theta\theta} D_r}{3 D_\theta^2} \quad (3.85)$$

$$q \mu_{\theta z} = \frac{3 \mu_{\theta z z} D_\theta - \mu_{\theta\theta\theta} D_z}{3 D_\theta^2} = \frac{3 \mu_{\theta z z} D_z - \mu_{z z z} D_\theta}{3 D_z^2} \quad (3.86)$$

Notem que les segones igualtats de cada equació equivalen a (3.43) i (3.44), i, d'altra banda, les dues primeres igualtats no són independents. En efecte, les escrivim com

$$2q \mu_{r\theta} D_\theta^2 + \mu_{\theta\theta\theta} D_r = 3 \mu_{r\theta\theta} D_\theta$$

$$2q \mu_{\theta z} D_\theta^2 + \mu_{\theta\theta\theta} D_z = 3 \mu_{\theta\theta z} D_\theta$$

que, per (3.81), són equacions proporcionals. Ens quedarem, per tant, amb les tres següents:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{3 \mu_{rr\theta} D_r - \mu_{rrr} D_\theta}{3 D_r^2 \mu_{r\theta}} = \frac{3 \mu_{r\theta\theta} D_\theta - \mu_{\theta\theta\theta} D_r}{3 D_\theta^2 \mu_{r\theta}} = \\
 &= \frac{3 \mu_{\theta zz} D_z - \mu_{zzz} D_\theta}{3 D_z^2 \mu_{\theta z}} \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Les dues relacions que falten per a arribar a la desena seran, una, la deduïda de (3.35),

$$\mu_{\theta\theta\theta} = 3 C_{\theta\theta} D_\theta - 2q D_\theta^3$$

de la qual aïllem q,

$$q = \frac{3 C_{\theta\theta} D_\theta - \mu_{\theta\theta\theta}}{2 D_\theta^3} \quad (3.88)$$

i l'altra, una nova versió de (3.45), que escriurem combinant-la amb (3.59) i (3.87): Dividint (3.45) per D_θ^3 obtenim

$$h^3 \mu_{rrr} - \mu_{zzz} = 3h (h \mu_{rrz} - \mu_{rzz}) \quad (3.89)$$

ara bé, dels segon i quart membres de (3.87) es dedueix

$$\frac{3 \mu_{rr\theta} d_r - \mu_{rrr}}{3 \mu_{\theta zz} d_z - \mu_{zzz}} = \frac{\mu_{r\theta} D_r^2}{\mu_{\theta z} D_z^2} = \frac{1}{h^3} \quad (3.90)$$

A partir de (3.89) i (3.90) s'arriba fàcilment a

$$d_r = \frac{h \mu_{rrz} - \mu_{rzz}}{h^2 \mu_{rr\theta} - \mu_{\theta zz}} \quad (3.91)$$

Abans de donar per acabat l'apartat, podriem veure la simplificació que s'introduïria si ens situessim al plà galàctic $z=0$. En aquest cas, a més de (3.55) es compliria, com es pot veure a partir de (1.52) i (1.58),

$$z'_0 = z''_0 = \mu'_{rz} = \mu''_{rz} = 0 \quad (3.92)$$

Aleshores, per (3.6), (3.27) i (3.47),

$$w_z = D_z = d_z = 0 \quad (3.93)$$

I per (3.19),

$$a_{rz} = b_{rz} = 0 \quad (3.94)$$

De les dues anteriors se'n dedueix, observant (3.28),

$$C_{rz} = 0 \quad (3.95)$$

I portant aquests valors a (3.34), (3.35) i (3.36),

$$\mu_{rz} = \mu_{\theta z} = 0$$

$$\mu_{rrz} = \mu_{\theta\theta z} = \mu_{zzz} = \mu_{r\theta z} = 0$$

$$v_{rrrz} = v_{rzzz} = v_{\theta\theta\theta z} = v_{\theta zzz} = v_{rr\theta z} = v_{r\theta\theta z} = 0$$

Òbviament, en aquest cas, es compleix $\bar{v}_{\theta\theta z z} = v_{\theta\theta z z}$ i (3.66) es transforma en

$$K \equiv \frac{\sqrt{\frac{1}{3} v_{zzzz}}}{v_{\theta\theta z z}} = \frac{1}{C_{\theta\theta}} = \frac{C_{rr}}{\bar{v}_{rr\theta\theta}} = \frac{C_{zz}}{v_{\theta\theta z z}} \quad (3.96)$$

La primera de (3.77) esdevé

$$v_{rrzz} = C_{rr} C_{zz}$$

que passaria a ampliar el conjunt (3.64) i que al combinar-la

amb (3.96) donaria

$$v_{zzzz} \bar{v}_{rr\theta\theta} = 3 v_{rrzz} v_{\theta\theta zz} \quad (3.97)$$

Una conseqüència addicional és $h = 0$, el que transforma (3.91) en

$$d_r = \frac{\mu_{rzz}}{\mu_{\theta zz}} \quad (3.98)$$

Aquestes darreres fórmules, i les que d'elles se'n podrien deduir, seran útils per a veure fins a quin punt es pot afirmar que les mostres estel·lars amb que es treballa estan al plà galàctic.

3.4- Fórmules d'acotació i càlcul d'errors

En la resolució numèrica d'un problema mitjançant qualsevol algoritme, sol passar que les dades inicials estan afectades d'uns marges d'error que, a mesura que arribem a la solució, malauradament, es van amplificant. Llavors el que cal fer és millorar l'algoritme i, si es pot, aconseguir-ne un que partint de dades molt inexactes —en el pitjor dels casos— ens proporcioni resultats significatius i amb errors mínims. Evidentment, això quasi mai és possible si només es pretén fer depurant l'aritmètica de l'algoritme. És necessari recolzar-se en un marc teòric que permeti acotar els marges d'error que es van obtenint en el càlcul.

Durant tot el procés, el càlcul d'errors no es farà a base d'aproximacions lineals, ja que, d'una banda, només són vàlides quan els errors són de poca magnitud i, d'altra banda, amb càlculs successius els errors s'amplifiquen de manera desproporcionada. Farem ús, doncs, de l'aritmètica d'interval (Moore, 1966), on s'associa a la parella valor numèric-marge d'error el corresponent interval. Es consideren, així, ni més ni menys que tots els resultats possibles de cada operació entre intervals.

Vegem com el model teòric adoptat al fer la superposició ens perfila els errors dels resultats obtinguts.

Distingirem dos conjunts d'acotacions. El primer, el que, a partir del model proposat, permetrà reduir els errors de les dades inicials. El segon, el que, pel mateix motiu, delimitarà els errors d'algunes incògnites.

Comencem amb el primer conjunt d'acotacions. En l'apartat anterior s'han vist una sèrie de relacions entre els moments de la mostra total (sense que intervingui cap de les incògnites). Són (3.76) i (3.84), que aglutina quatre igualtats. Totes aquestes igualtats es poden tractar d'una en

una, i són de la forma

$$\frac{N_1}{D_1} = \frac{N_2}{D_2} \quad (3.99)$$

El problema es pot plantejar amb els següents termes: Al paràmetre N_1 li correspòn un valor numèric mitjà n_1 amb un marge d'error Δn_1 . Ho resumirem dient que a N_1 li correspòn l'interval $[n_1 \pm \Delta n_1]$. A D_1 li correspòn l'interval $[d_1 \pm \Delta d_1]$. El seu quocient dóna com a resultat l'interval $[q_1 \pm \Delta q_1]$. El mateix succeeix amb N_2 i D_2 , que tenen com a intervals associats $[n_2 \pm \Delta n_2]$ i $[d_2 \pm \Delta d_2]$, donant com a quocient l'interval $[q_2 \pm \Delta q_2]$. Adoptem com a quocient comú la intersecció dels dos intervals $[q_1 \pm \Delta q_1]$ i $[q_2 \pm \Delta q_2]$, representada per $[q \pm \Delta q]$. Òbviament, el valor Δq serà menor o igual que Δq_1 i Δq_2 . Vegem com afecta aquest aminorament de l'error del quocient als errors del numerador i denominador.

En un gràfic numerador-denominador (n-d), un valor

$$Q \equiv \frac{n}{d} = \text{const}$$

serà el pendent de la recta que passa per l'origen, representant de tots els punts del plà n-d que tenen igual quocient Q .

Llavors, com es pot veure gràficament (figura-1), la intersecció de cada rectangle d'error $[n_i \pm \Delta n_i] \times [d_i \pm \Delta d_i]$ ($i=1,2$) amb la regió angular constituïda per les rectes anteriors que tenen pendent $Q \in [q \pm \Delta q]$ determinarà els valors possibles d' N_i i D_i . Fixat un d'aquests valors de Q (en general es pot prendre $Q=q$), la intersecció de la

corresponent recta amb cada un dels rectangles d'error determina un segment que, projectat sobre els eixos de coordenades, dóna els nous intervals de variació $[n_i^Q \pm \Delta n_i^Q] \subseteq [n_i \pm \Delta n_i]$ i $[d_i^Q \pm \Delta d_i^Q] \subseteq [d_i \pm \Delta d_i]$.

Per a cada Q es complirà

$$n_i^Q = Q d_i^Q \quad ; \quad \Delta n_i^Q = Q \Delta d_i^Q \quad ; \quad i=1,2 \quad (3.100)$$

i adoptarem

$$N_i = n_i^Q \pm \Delta n_i^Q \quad ; \quad D_i = d_i^Q \pm \Delta d_i^Q \quad ; \quad i=1,2 \quad (3.101)$$

Amb aquest procediment s'haurà fet, de manera immediata, l'acotació d'errors de dotze dades inicials, essencials per a la resolució del problema.

El segon conjunt d'acotacions, l'obtindrem d'imposar, sobre els elements de la diagonal dels tensors μ'_2 i μ''_2 , la condició

$$\mu'_{ii} > 0 \quad ; \quad \mu''_{ii} > 0 \quad ; \quad i=r, \theta, z. \quad (3.102)$$

que, òbviament, està implícita en la definició d'aquests tensors.

La primera aplicació de (3.102) serà a (3.19). En

ser n' i n'' positives, podem afirmar que

$$a_{ii} = n' \mu'_{ii} + n'' \mu''_{ii} > 0$$

i, per (3.34), arribem al següent conjunt de tres acotacions per a \underline{D} :

$$\mu_{ii} > D_i^2 \quad (3.103)$$

Si substituïm (3.32) i (3.34) a (3.26), obtindrem, pels elements diagonals,

$$\mu'_{ii} = \mu_{ii} + \sqrt{\frac{n''}{n'}} C_{ii} - \frac{n''}{n'} D_i^2$$

$$\mu''_{ii} = \mu_{ii} - \sqrt{\frac{n'}{n''}} C_{ii} - \frac{n'}{n''} D_i^2$$

Per a no carregar la notació, definirem, momentàniament, una nova variable

$$x = \sqrt{\frac{n''}{n'}} \quad (3.104)$$

que permetrà escriure les anteriors equacions de la següent forma

$$\mu'_{ii} = \mu_{ii} + x C_{ii} - x^2 D_i^2 \quad (3.105)$$

$$\mu''_{ii} = \mu_{ii} - \frac{C_{ii}}{x} - \frac{D_i^2}{x^2}$$

Aplicant (3.102) obtenim, pel sistema (3.105), dos conjunts de condicions, que es poden resumir en la següent línia:

$$x D_i^2 - \frac{\mu_{ii}}{x} < C_{ii} < x \mu_{ii} - \frac{D_i^2}{x} \quad (3.106)$$

En total són sis desigualtats més, que s'han d'interpretar com acotacions de C_{ii} per a x , D_i i μ_{ii} donats. Se'n pot donar, no obstant, una altra versió en la que, suposant C_{ii} , D_i i μ_{ii} determinats, ens interressi acotar x . Alehores, tenint en compte que x és sempre positiu, la condició (3.102) aplicada a (3.105) dóna la nova versió de (3.106):

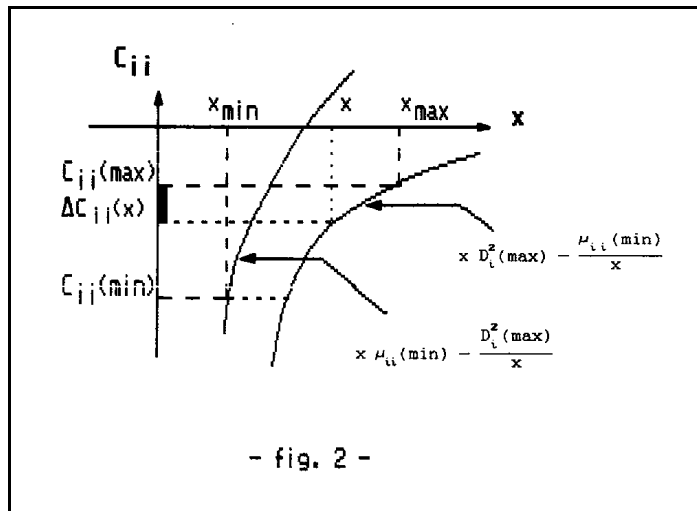
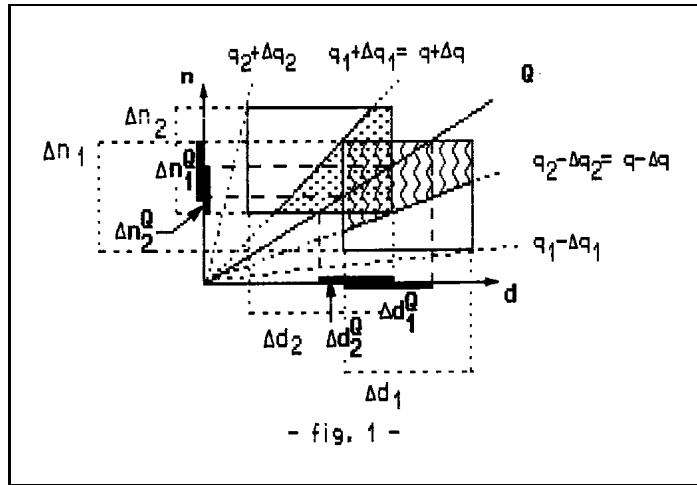
$$\frac{C_{ii} + \sqrt{C_{ii}^2 + 4 \mu_{ii} D_i^2}}{2 \mu_{ii}} < x < \frac{C_{ii} + \sqrt{C_{ii}^2 + 4 \mu_{ii} D_i^2}}{2 D_i^2} \quad (3.107)$$

Aplicant (3.103), (3.106) i (3.107) segons convingui, delimitarem els errors de \underline{D} , μ_{ii} i, a través de x , de n' i n'' .

Quan, al següent capítol, fem aplicació dels tres conjunts de fórmules anteriors, ja en detallarem el seu ús, doncs, les dades s'hauran de computar en el seu valor més desfavorable dintre de l'interval d'error associat, per exemple, per a un valor x fixat, la relació (3.106), donat que les quantitats que hi intervenen són positives, s'ha d'interpretar com

$$x D_i^2(\max) - \frac{\mu_{ii}(\min)}{x} < C_{ii} < x \mu_{ii}(\min) - \frac{D_i^2(\max)}{x}$$

de forma que el membre de l'esquerra proporciona una cota inferior per a C_{ii} , i el de la dreta, superior.



4.1- Mostres de l'entorn solar

Aplicarem el nostre model amb tres mostres estel·lars de les quals es coneixen els moments centrats fins a quart ordre. Abans de descriure-les recordarem el que es deia al final de l'apartat 2.1 sobre la localització de les mostres. En efecte, comentavem que a l'entorn solar n'hi havia prou en superposar dos sistemes perquè podem admetre que no ens moviem del disc primari, per tant, no era d'esperar trobar quantitats significatives d'estrelles de la població-II extrema. Falta, però, delimitar el que entenem per entorn solar i això es fa determinant la regió per a la que és vàlid el mateix centre local. Si es pren un entorn massa extens, la rotació galàctica desfigura l'aleatorietat de la distribució de velocitats i els moments centrats de la mostra perden el seu significat. Diversos autors (Shatsova, 1967; Chiu, 1980a) defensen la validesa d'una mostra local fins als 300-500 pc, podent-se prendre, a efectes cinemàtics, el limit superior de 500 pc. D'altres més recents, com Oblak (1983) i Palous & Piskunov (1985), fixen la màxima distància heliocèntrica a 400 pc. Per tant, les mostres que utilitzarem satisfaran aquesta condició.

La mostra més antiga amb que treballarem serà la que pren com a base el "Catalogue of Nearby Stars" de Gliese (1969), constituït per 1529 estrelles distribuïdes uniformement per totes les latituds galàctiques, amb paral·laxis més grans que $0''.045$, és a dir, distàncies menors que 22 pc. Se'l considera, junt amb el de Wooley (1970), el catàleg més complet d'estrelles pròximes.

Del total d'estrelles, 1132 tenen dades suficients per a calcular les velocitats espacials i, per tant, els moments. Aquest catàleg inclou paral·laxis (fotomètrica, espectromètrica i trigonomètrica), moviments pròpis, velocitat radial, magnitud visual, índexs de color B-V i U-B, tipus espectral, classe de lluminositat, etc.

D'aquest catàleg, Erickson (1975) en va extreure una submostra en la que donava, per primera vegada, els valors dels moments de tercer i quart ordre. La selecció que va fer Erickson es fonamentà en els següents criteris: (a) S'excloïen les estrelles de les quals es desconeixia l'error probable de la seva paral·laxi. (b) Es prescindia de les nanes blanques simples i dels sistemes múltiples dels que només s'havia mesurat la velocitat radial en una component nana blanca. (c) S'eliminaven els sistemes amb una component subnana, per no ser representatives del disc galàctic. (d) No es tenien en compte els sistemes dels que es desconeixia la classe de lluminositat d'alguna de les seves components, per si incloïen subnanes. Després d'aplicar aquests criteris encara quedaven 869 estrelles més el sol.

Posteriorment, Gliese & Jahreiss (1979) han completat el primer catàleg de Gliese afegint-hi 294 estrelles amb paral·laxis majors o iguals a $0''.045$. Dissortadament, per a la majoria d'aquestes estrelles no es coneixen simultàniament la velocitat radial i el tipus espectral, i tan sols 27 estrelles o sistemes satisfan els criteris abans esmentats. Llavors, tal com fa Ros (1983, 1985, 1987), preferim treballar amb la mostra d'Erickson per a poder fer comparació de resultats.

Escrivim, a la taula-1, els valors que, tant per a Erickson com per a Ros en la seva mostra-3, tenen els moments centrats de la distribució de velocitats i les velocitats heliocèntriques del centroide (U_0, V_0, W_0) , amb els corresponents errors standard.

MOSTRA D'ERICKSON (869*)

	km s^{-1}	
U_0	-10.3	± 1.4
V_0	-20.5	0.9
W_0	-7.6	0.7
	$\times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$	
μ_{rr}	13.0	± 0.8
$\mu_{r\theta}$	1.1	0.4
μ_{rz}	-0.2	0.3
$\mu_{\theta\theta}$	6.0	0.4
$\mu_{\theta z}$	0.2	0.2
μ_{zz}	3.5	0.3
	$\times 10^3 \text{ km}^3 \text{ s}^{-3}$	
μ_{rrr}	-5.0	± 6.1
$\mu_{rr\theta}$	-13.4	3.1
μ_{rrz}	2.0	2.6
$\mu_{r\theta\theta}$	-0.2	2.7
$\mu_{r\theta z}$	-0.8	1.4
$\mu_{rz z}$	-1.1	1.4
$\mu_{\theta\theta\theta}$	-13.7	2.9
$\mu_{\theta\theta z}$	-0.1	1.4
$\mu_{\theta z z}$	-2.1	0.9
$\mu_{z z z}$	0.6	1.3
	$\times 10^5 \text{ km}^4 \text{ s}^{-4}$	
μ_{rrrr}	65.6	± 9.4
$\mu_{rrr\theta}$	4.3	3.6
μ_{rrrz}	-2.9	3.3
$\mu_{rr\theta\theta}$	14.3	2.7
$\mu_{rr\theta z}$	-0.1	1.3
$\mu_{rrz z}$	8.9	1.5
$\mu_{r\theta\theta\theta}$	0.2	2.7
$\mu_{r\theta\theta z}$	0.2	1.2
$\mu_{r\theta z z}$	-0.1	0.7
$\mu_{rz z z}$	-0.9	1.0
$\mu_{\theta\theta\theta\theta}$	16.8	3.2
$\mu_{\theta\theta\theta z}$	0.7	1.4
$\mu_{\theta\theta z z}$	3.7	0.8
$\mu_{\theta z z z}$	0.5	0.7
$\mu_{z z z z}$	6.1	1.1

taula-1

La mostra que acabem de descriure és altament representativa de l'entorn solar però, al contenir només 869 estrelles, dóna uns errors standard —recordem que inversament proporcionals a la mida de la mostra— relativament grans, motiu pel qual cercarem mostres més extenses.

La següent mostra a la que aplicarem la teoria de la superposició és la que confeccionà Torra (1984) a partir de diversos catàlegs i que consta de 3822 estrelles. El catàleg de partida fou el "Bright Stars Catalogue", publicat per Hoffleit (1964), amb 9091 estrelles. Se li afegiren les 3522 estrelles del catàleg FK4 i suplements, quart catàleg fonamental elaborat per l'Astronomisches Rechen-Institut, publicat per Fricke & Kopff (1963), i considerat com el sistema de referència que més s'aproxima a un de inercial. El FK4 és un catàleg astromètric, sense dades de tipus astrofísic, que va completar Morin (1973). S'amplià, també, amb 500 estrelles del "512 FK4/FK4 Supplement Distant Stars" de Fricke (1977) amb dades astrofísiques de Sinzi (1972), del que s'eliminaren 12 estrelles sense velocitat radial. Aquest catàleg conté estrelles a més de 100 pc i amb velocitat residual inferior a 35 km s^{-1} respecte al centroide de Delhaye (1965). Finalment, s'hi adjuntaren les estrelles del "Catalogue of Nearby Stars" de Gliese (1969), ja comentat en la mostra anterior.

Del processament d'estrelles amb velocitat radial i paral·laxi conegudes, comparant amb els catàlegs S.A.O. i AGK3, Torra obtingué una mostra de 3822 estrelles, situades majoritàriament (un 96%) a una distància menor que 500 pc del sol. El catàleg resultant no està exent d'esbiaixament, doncs les estrelles de paral·laxi coneguda són les que tenen moviments propis més elevats (Hanson, 1979a, 1979b, 1983). El

catàleg conté, doncs, un nombre considerable d'estrelles d'alta velocitat i, a més, amb errors molt alts. Per a corregir aquest excés, Torra extreu dues submostres amb estrelles de velocitat menor que 100 km s^{-1} i 65 km s^{-1} respectivament, i considera òptima pel seu treball la darrera. Nosaltres, no obstant, ens veiem obligats a treballar amb la mostra original, ja que les estrelles que s'han eliminat en les altres dues pertanyien majoritàriament a la població-II (Jaschek, 1985), de més gran dispersió.

A la taula-2 tenim, per a aquesta mostra de Torra, els moments centrats de la distribució de velocitats i les velocitats heliocèntriques del centroide (U_0, V_0, W_0), amb els seus errors standard.

Els moments que tenien un error superior al propi valor han estat considerats nuls. Cara als càlculs posteriors, però, s'hi consideraran, com és costum, tots aquells que el doble de l'error superi el seu valor. Observi's que la disminució dels errors associada a l'augment del nombre d'estrelles no ha pogut véncer l'augment dels errors que han introduït les estrelles d'alta velocitat. Caldrà, doncs, interpretar els resultats a partir d'aquesta mostra com un esbós qualitatiu del que realment passa a l'entorn solar i aconseguir una mostra que la millori.

Mentre esperem la realització de la missió astromètrica Hipparcos, que proporcionarà nombroses i acurades dades per a la confecció de millors catàlegs, disposem, sortosament, d'una excel·lent mostra elaborada per Figueras (1986) a partir del catàleg S.A.O.

La mostra ha estat obtinguda a partir del màxim de paràmetres astromètrics i cinemàtics per a calcular la velocitat espacial de cada estrella de la forma que a continuació s'explica.

MOSTRA DE TORRA (3822*)

	km s^{-1}	
U_0	-13.0	± 0.8
V_0	-20.2	0.6
W_0	-8.4	0.5
	$\times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$	
μ_{rr}	26.1	± 3.5
$\mu_{r\theta}$	2.5	2.0
μ_{rz}	0.0	0.0
$\mu_{\theta\theta}$	13.6	2.0
$\mu_{\theta z}$	0.0	0.0
μ_{zz}	8.5	1.3
	$\times 10^4 \text{ km}^3 \text{ s}^{-3}$	
μ_{rrr}	-33.7	± 26.5
$\mu_{rr\theta}$	-33.3	14.4
μ_{rrz}	-6.3	4.8
$\mu_{r\theta\theta}$	0.0	0.0
$\mu_{r\theta z}$	0.0	0.0
$\mu_{rz z}$	-5.9	4.8
$\mu_{\theta\theta\theta}$	-31.2	12.1
$\mu_{\theta\theta z}$	0.0	0.0
$\mu_{\theta z z}$	-2.8	1.5
$\mu_{z z z}$	-10.1	6.8
	$\times 10^7 \text{ km}^4 \text{ s}^{-4}$	
μ_{rrrr}	47.8	± 22.5
$\mu_{rrr\theta}$	0.0	0.0
μ_{rrrz}	0.0	0.0
$\mu_{rr\theta\theta}$	15.1	9.9
$\mu_{rr\theta z}$	0.0	0.0
$\mu_{rrz z}$	4.2	2.4
$\mu_{r\theta\theta\theta}$	0.0	0.0
$\mu_{r\theta\theta z}$	-0.8	0.6
$\mu_{r\theta z z}$	0.7	0.5
$\mu_{r z z z}$	0.0	0.0
$\mu_{\theta\theta\theta\theta}$	0.0	0.0
$\mu_{\theta\theta\theta z}$	15.6	8.2
$\mu_{\theta\theta z z}$	0.0	0.0
$\mu_{\theta\theta z z}$	1.1	0.3
$\mu_{\theta z z z}$	0.0	0.0
$\mu_{z z z z}$	6.7	3.9

taula-2

Ochsenbein (1980), a partir del catàleg S.A.O. (1966) i el de Identificacions Estel·lars (Ochsenbein et al., 1981), va recopilar la informació astrofísica coneguda de les 258997 estrelles del catàleg original. D'aquesta nova versió, subministrada pel Centre de Données Stellaires de l'Observatoire de Strasbourg, Figueras ha seleccionat 20674 estrelles amb velocitat radial coneguda i ha calculat la paral·laxi resultant de 12824 estrelles. Una de les aventatges més importants d'aquesta mostra és que les paral·laxis no han estat calculades via trigonomètrica, el que produïa en altres mostres un esbiaixament cap a moviments propis elevats. Al seu treball, Figueras s'interessa pel comportament cinemàtic de les estrelles que no són d'alta velocitat i, per tant, elimina totes les que tenen una velocitat residual respecte al centre de Delhaye (1965) superior a 65 km s^{-1} .

Els interessos del present treball són diferents als seus, doncs ens interessa una mostra que contingui precisament estrelles d'alta velocitat, justament per fer separació de sistemes. Li hem demanat una submostra de les 12824 estrelles, amb les següents característiques: (a) Que la distància heliocèntrica màxima sigui de 300 pc, valor que, com ja s'ha dit al començar l'apartat, assegura la significància dels valors estadístics locals de la mostra. Cara a disminuir els errors dels moments centrats, també convé: (b) que l'error relatiu en la distància sigui menor al 30%, (c) que l'error relatiu en la velocitat tangencial sigui menor al 50% i (d) que la velocitat residual sigui menor que 300 km s^{-1} , mesura encaminada a eliminar unes poques estrelles (concretament 16) que, o bé pels errors en la velocitat extraordinàriament grans, o bé per pertànyer a una població extrema, distorsionen totalment els valors dels moments centrats de la mostra.

MOSTRA DE FIGUERAS (7398*)

	km s^{-1}	
U_0	-11.7	± 0.4
V_0	-19.6	0.3
W_0	-7.7	0.2
	$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$	
μ_{rr}	1227	± 34
$\mu_{r\theta}$	131	21
μ_{rz}	9	14
$\mu_{\theta\theta}$	725	33
$\mu_{\theta z}$	19	14
μ_{zz}	403	18
	$\text{km}^3 \text{s}^{-3}$	
μ_{rrr}	-8451	± 4348
$\mu_{rr\theta}$	-22031	2810
μ_{rrz}	-2200	1615
$\mu_{r\theta\theta}$	-5128	3007
$\mu_{r\theta z}$	-1674	1228
μ_{rzz}	-1230	1340
$\mu_{\theta\theta\theta}$	-41347	6151
$\mu_{\theta\theta z}$	-1510	1842
$\mu_{\theta z z}$	-7377	1510
μ_{zzz}	-4780	2838
	$\times 10^3 \text{ km}^4 \text{s}^{-4}$	
μ_{rrrr}	9856	± 905
$\mu_{rrr\theta}$	475	528
μ_{rrrz}	371	292
$\mu_{rr\theta\theta}$	3357	448
$\mu_{rr\theta z}$	32	181
μ_{rrzz}	1498	175
$\mu_{r\theta\theta\theta}$	529	602
$\mu_{r\theta\theta z}$	197	180
$\mu_{r\theta z z}$	155	128
μ_{rzzz}	176	210
$\mu_{\theta\theta\theta\theta}$	8520	1429
$\mu_{\theta\theta\theta z}$	-98	374
$\mu_{\theta\theta z z}$	1477	199
$\mu_{\theta z z z}$	59	250
μ_{zzzz}	2630	574

taula-3

La mostra final que, molt gentilment ens ha proporcionat Figueras, conté un total de 7398 estrelles representatives de l'entorn solar i presenta els següents moments centrats i velocitats heliocèntriques del centroide (U_0, V_0, W_0) , amb els corresponents errors standard. Està a la taula-3.

Veiem que la mostra acabada de descriure té uns errors substancialment menors que les anteriors i compta amb un nombre prou gran d'estrelles com per a poder fer un discerniment estadístic de dos sistemes. No obstant això, cal reconèixer que encara estem lluny d'una mostra òptima, doncs molts dels moments anteriors han de suposar-se nuls per no sobrepassar el doble del seu error. Per tant, l'aplicació del mètode analític de superposició que hem desenvolupat als capítols anteriors ens donarà uns resultats que hem d'interpretar, sobretot, de forma qualitativa, doncs, si bé és difícil obtenir resultats exactes a partir de dades precises, és impossible fer-ho a partir de dades imprecises.

4.2- Determinació dels moments

En les fórmules destinades al càlcul de moments, obtingudes al capítol 3, intervenen gairebé tots els moments. Tanmateix, si observem les taules de moments de les tres mostres de l'anterior apartat, ens adonem que molts moments tenen un error del mateix ordre o superior i, per tant, ens veurem obligats a fer una selecció d'aquelles fórmules a fi de no incrementar els errors dels resultats.

D'entre els moments de segon ordre, $\mu_{rr'}$, $\mu_{\theta\theta}$ i μ_{zz} són clarament diferents de zero. El moment $\mu_{r\theta'}$, que dóna idea de la desviació del vèrtex, és petit davant dels anteriors però, sobretot en la mostra de Figueras, no es pot suposar nul. Els dos restants, μ_{rz} i $\mu_{\theta z'}$, són pràcticament nuls, fet que cal interpretar com una conseqüència de la proximitat de les mostres al plà galàctic $z=0$, doncs en aquest cas, a (3.34) serien nuls —per (3.94) i (3.56)— a_{rz} i $a_{\theta z'}$, i també s'anularien —per ser proporcionals a z , com es veu a partir de (1.52), (3.6) i (3.27)— les components corresponents a $(D)^2$.

Quant als moments de tercer ordre, són clarament distints de zero $\mu_{rr\theta'}$, $\mu_{\theta\theta\theta}$ i $\mu_{\theta zz'}$, mentre que els restants són ambigüament nuls. En particular sembla que μ_{rrr} i $\mu_{r\theta\theta}$ comencen a notar-se diferents de zero.

Els moments de quart ordre referenden, en primera aproximació, una distribució de velocitats quadràtica, doncs els únics que tenen valors significatius són $\mu_{rrrr'}$, $\mu_{rr\theta\theta'}$, $\mu_{\theta\theta\theta\theta'}$, $\mu_{rrzz'}$, $\mu_{\theta\theta zz}$ i μ_{zzzz} .

Exposarem, a continuació, les relacions que, en vistes als moments no negligibles, ens resoldran el problema de superposició:

a) Càlcul de les components de v_4 i en especial de $\bar{v}_{rr\theta\theta'}$, $\bar{v}_{\theta\theta zz}$ i $\bar{v}_{r\theta\theta z'}$, amb els respectius errors.

b) Ajust dels valors no negligibles que apareixen a (3.84), així com dels seus errors, seguint el mètode explicat a l'apartat 3.4 en el primer conjunt d'acotacions (3.100) i (3.101).

c) Determinació de K , $C_{rr'}$, $C_{\theta\theta'}$, C_{zz} i C_{rz} a partir de (3.65), amb els errors corresponents.

d) Càlcul de d_r —definit a (3.47)— a partir de (3.43), ja que és la que conté els moments de tercer ordre més ben determinats. L'estimació de d_r també es podria fer a partir de (3.83) i (3.91), però és molt més grollera degut a que intervenen errors majors.

e) Determinació i acotació de D_r , D_θ i D_z a partir de (3.57), (3.58) i (3.103), i verificació de (3.44), (3.45) i (3.46).

f) Estimació de q —definida a (3.29)— a partir de (3.88), junt amb el seu marge d'error. Les que es fan amb (3.70), (3.74) i (3.87) són imprecises.

g) Delimitació de l'interval de variació de q mitjançant les tres de (3.107), a partir de la variable addicional x —definida a (3.104)—, entenent que el valor mínim de C_{ii} ens determina la x mínima i el valor màxim de C_{ii} la x màxima (figura-2). Finalment ens quedem amb

l'interval intersecció. Recordem, com s'ha dit al final de l'apartat 3.4, que de cada paràmetre cal prendre el valor més desfavorable dins el marge d'error permès.

h) Per a cada valor de q dins el seu interval de possibilitats, acotació dels marges d'error de $C_{rr'}$, $C_{\theta\theta'}$, C_{zz} i C_{rz} a partir de (3.106).

i) Determinació, per a q fixat, de les proporcions n' i n'' —per (3.31)—, de les components de a_2 i b_2 —per (3.32) i (3.34)—, dels moments parcials de cada subsistema (o velocitats típiques) —per (3.20)— i de la diferència de velocitats dels dos subcentroïdes —per (3.27)—.

j) Resolució dels marges de variació total de cada magnitud.

Vegem els resultats obtinguts en cada cas:

I) Mostra d'Erickson:

En primer lloc exposem les dades inicials significatives, és a dir, que no estan desfigurades pel seu error i que s'utilitzen als càlculs posteriors, abans i després d'haver fet les acotacions de b).

	valors inicials	valors inicials acotats
$\mu_{r\theta}$	$\times 10^2$ 1.1 \pm 0.4	$\times 10^2$ 1.1 \pm 0.4
$\mu_{rr\theta}$ $\mu_{\theta zz}$	$\times 10^3$ -13.4 \pm 3.1 -2.1 \pm 0.9	$\times 10^3$ -13.4 \pm 3.1 -2.1 \pm 0.5
$\bar{v}_{rr\theta\theta}$ $\bar{v}_{\theta\theta zz}$	$\times 10^5$ 6.5 \pm 3.7 1.6 \pm 1.1	$\times 10^5$ 6.7 \pm 3.5 1.0 \pm 0.5
v_{rrzz} $v_{\theta\theta\theta\theta}$ v_{zzzz}	$\times 10^5$ 4.3 \pm 2.1 6.0 \pm 4.6 2.4 \pm 1.6	

Seguint el procediment explicat s'han obtingut els resultats de la taula-4.

n'	σ'_{rr}		σ''_{rr}		w_r	
	$\sigma'_{\theta\theta}$	σ'_{zz}	$\sigma''_{\theta\theta}$	σ''_{zz}	w_θ	w_z
	min	max	min	max	min	max
0.56	22.7	23.1	47.0	47.3	9.3	12.8
	6.3	17.3	6.3	21.6	30.5	47.7
	9.8	9.9	25.9	25.9	0.0	3.4
0.59	23.7	23.9	47.5	47.8	9.4	12.9
	6.3	16.5	6.3	22.6	30.8	48.1
	10.5	10.6	26.2	26.3	0.0	3.4
0.61	24.5	24.7	48.1	48.4	9.5	13.0
	6.3	15.7	6.3	23.8	31.1	48.6
	11.1	11.2	26.5	26.6	0.0	3.5
0.64	25.3	25.5	48.6	49.0	9.6	13.2
	6.3	15.0	6.3	25.1	31.5	49.3
	11.6	11.7	26.9	27.0	0.0	3.5
0.67	26.0	26.2	49.2	49.6	9.8	13.4
	6.3	14.3	6.3	26.5	32.1	50.2
	12.1	12.2	27.3	27.4	0.0	3.6
0.69	26.7	26.9	49.9	50.3	10.0	13.7
	6.3	13.7	6.3	28.0	32.8	51.3
	12.6	12.7	27.8	27.9	0.0	3.7
0.72	27.4	27.5	50.6	51.0	10.3	14.1
	6.3	13.0	6.3	29.7	33.7	52.6
	13.1	13.1	28.2	28.4	0.0	3.8
0.74	28.1	28.2	51.3	51.9	10.6	14.5
	6.3	12.4	6.3	31.7	34.7	54.3
	13.5	13.5	28.8	28.9	0.0	3.9
0.77	28.7	28.8	52.2	52.8	11.0	15.1
	6.3	11.8	6.3	33.9	36.0	56.3
	13.9	14.0	29.4	29.5	0.0	4.0
0.80	29.3	29.4	53.2	53.9	11.5	15.7
	6.3	11.2	6.3	36.5	37.6	58.8
	14.3	14.4	30.0	30.2	0.0	4.2
0.82	29.9	30.0	54.3	55.1	12.1	16.6
	6.3	10.6	6.3	39.7	39.6	52.0
	14.7	14.8	30.8	31.0	0.0	4.4

taula-4

Analitzant els marges de variació, veiem que el tant per ú de població del subsistema-I varia entre

$$0.56 \leq n' \leq 0.82$$

La diferència de velocitats dels subcentroïdes és

$$\begin{aligned} w_r &= 13 \pm 4 \\ w_\theta &= 46 \pm 16 \\ w_z &= 2 \pm 2 \end{aligned} \quad (\text{km s}^{-1})$$

I les velocitats residuals típiques (arrel quadrada dels corresponents moments):

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 26 \pm 4 & \sigma''_{rr} &= 51 \pm 4 \\ \sigma'_{\theta\theta} &= 12 \pm 6 & \sigma''_{\theta\theta} &= 23 \pm 17 \\ \sigma'_{zz} &= 12 \pm 3 & \sigma''_{zz} &= 29 \pm 3 \end{aligned} \quad (\text{km s}^{-1})$$

$$\sigma'_{rz}, \sigma''_{rz} \approx 0 ; \quad \sigma'_{r\theta} = \sigma''_{r\theta} = \sigma'_{\theta z} = \sigma''_{\theta z} = 0$$

$$\sigma' = 31 \pm 7 \quad \sigma'' = 63 \pm 17$$

II) Mostra de Torra:

Les dades inicials abans i després d'haver fet les acotacions són:

	valors inicials	valors inicials acotats
$\mu_{r\theta}$	$\times 10^2$ 2.5 \pm 2.0	$\times 10^2$ 2.5 \pm 2.0
$\mu_{rr\theta}$ $\mu_{\theta zz}$	$\times 10^4$ -33.3 \pm 14.4 -2.8 \pm 1.5	$\times 10^4$ -33.3 \pm 14.4 -2.8 \pm 1.2
$\bar{v}_{rr\theta\theta}$ $\bar{v}_{\theta\theta zz}$	$\times 10^7$ 14.7 \pm 10.0 1.0 \pm 0.3	$\times 10^7$ 11.8 \pm 4.0 1.0 \pm 0.3
v_{rrrr} v_{rrzz} $v_{\theta\theta\theta\theta}$ v_{zzzz}	$\times 10^7$ 45.8 \pm 23.0 4.0 \pm 2.5 15.0 \pm 8.4 6.5 \pm 4.0	

Seguint el procediment explicat s'han obtingut els resultats de la taula-5.

n'	σ'_{rr}		σ''_{rr}		w_r	
	$\sigma'_{\theta\theta}$	σ'_{zz}	$\sigma''_{\theta\theta}$	σ''_{zz}	w_θ	w_z
	min	max	min	max	min	max
0.71	25.5	26.5	83.0	84.9	15.2	29.3
	14.2	25.3	14.2	54.4	16.8	75.3
	14.8	15.2	48.0	48.9	0.3	13.0
0.74	27.5	28.3	84.2	86.3	15.6	30.0
	14.2	24.4	14.2	57.1	17.2	77.1
	15.8	16.2	48.8	49.7	0.3	13.3
0.76	29.3	29.9	85.5	87.8	16.0	30.8
	14.2	23.6	14.2	60.1	17.6	79.2
	16.8	17.1	49.6	50.7	0.3	13.6
0.78	30.9	31.5	87.0	89.5	16.5	31.8
	14.2	22.7	14.2	63.5	18.2	81.7
	17.8	18.0	50.5	51.6	0.3	14.0
0.80	32.5	33.0	88.5	91.3	17.1	32.9
	14.2	21.9	14.2	67.3	18.8	84.6
	18.6	18.9	51.5	52.8	0.3	14.6
0.82	34.1	34.5	90.2	93.4	17.8	34.3
	14.2	21.1	14.2	71.7	19.6	88.2
	19.5	19.7	52.6	54.0	0.3	14.2
0.84	35.6	35.9	92.2	95.7	18.7	36.0
	14.2	20.3	14.2	76.9	20.6	92.5
	20.3	20.5	53.8	55.4	0.4	15.9
0.86	37.0	37.3	94.4	98.4	19.7	38.0
	14.2	19.5	14.2	83.2	21.8	97.8
	21.2	21.3	55.2	57.1	0.4	16.8
0.88	38.5	38.7	96.9	101.7	21.1	40.7
	14.2	14.7	14.2	90.9	23.3	104.6
	22.0	22.1	56.9	51.1	0.4	18.0
0.90	39.9	40.1	100.0	105.6	22.9	44.2
	14.2	18.0	14.2	100.8	25.3	113.6
	22.8	22.9	58.9	61.5	0.4	19.5
0.92	41.5	41.6	103.7	110.7	25.5	49.1
	14.2	17.2	14.2	114.2	28.1	126.2
	23.7	23.7	61.5	64.7	0.5	21.7

taula-5

Els expressem en funció del seu marge de variació.
 El tant per ú de població del subsistema-I:

$$0.71 \leq n' \leq 0.92$$

La diferència de velocitats dels subcentroides:

$$\begin{aligned} w_r &= 32 \pm 17 \\ w_\theta &= 72 \pm 55 \\ w_z &= 11 \pm 11 \end{aligned} \quad (\text{km s}^{-1})$$

I les velocitats residuals típiques:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 34 \pm 8 & \sigma''_{rr} &= 97 \pm 14 \\ \sigma'_{\theta\theta} &= 20 \pm 6 & \sigma''_{\theta\theta} &= 64 \pm 50 \\ \sigma'_{zz} &= 19 \pm 5 & \sigma''_{zz} &= 56 \pm 8 \end{aligned} \quad (\text{km s}^{-1})$$

$$\sigma'_{rz}, \sigma''_{rz} \approx 0 ; \quad \sigma'_{r\theta} = \sigma''_{r\theta} = \sigma'_{\theta z} = \sigma''_{\theta z} = 0$$

$$\sigma' = 44 \pm 11 \quad \sigma'' = 129 \pm 53$$

III) Mostra de Figueras:

Les dades inicials abans i després d'haver fet les acotacions són:

	valors inicials		valors inicials acotats	
$\mu_{r\theta}$	131	± 21	131	± 21
$\mu_{rr\theta}$ $\mu_{\theta zz}$	-22031 -7377	± 2810 1510	-21163 -8140	± 1943 747
$\bar{v}_{rr\theta\theta}$ $\bar{v}_{\theta\theta zz}$	$\times 10^5$ 24.7	± 5.1	$\times 10^5$ 27.5	± 2.4 0.9
v_{rrrr} v_{rrzz} $v_{\theta\theta\theta\theta}$ v_{zzzz}	$\times 10^5$ 53.4	11.6		
	10.1	2.1		
	69.4	15.7		
	21.4	6.2		

S'han obtingut els resultats que es mostren a la taula-6.

n'	σ'_{rr}		σ''_{rr}		w_r	
	$\sigma'_{\theta\theta}$	σ'_{zz}	$\sigma''_{\theta\theta}$	σ''_{zz}	w_θ	w_z
	min	max	min	max	min	max
0.79	10.3	10.4	73.6	73.8	12.2	14.3
	5.7	9.2	5.7	28.2	55.1	65.1
	5.4	5.5	42.9	43.0	0.6	3.1
0.80	11.7	11.8	74.3	74.6	12.5	14.6
	5.7	9.0	5.7	29.0	56.0	66.3
	6.3	6.3	43.4	43.5	0.6	3.2
0.81	13.0	13.0	75.2	75.4	12.7	14.8
	5.7	8.9	5.7	29.8	57.0	67.5
	7.1	7.1	43.9	44.0	0.6	3.2
0.82	14.1	14.2	76.0	76.3	12.9	15.1
	5.7	8.7	5.7	30.7	58.1	68.8
	7.8	7.8	44.4	44.5	0.6	3.3
0.83	15.2	15.3	77.0	77.2	13.2	15.4
	5.7	8.6	5.7	31.7	59.4	70.2
	8.5	8.5	45.0	45.1	0.6	3.3
0.84	16.3	16.3	77.9	78.2	13.5	15.8
	5.7	8.4	5.7	32.7	60.7	71.8
	9.1	9.1	45.6	45.7	0.6	3.4
0.85	17.3	17.3	79.0	79.3	13.8	16.1
	5.7	8.2	5.7	33.8	62.1	73.5
	9.7	9.7	46.2	46.3	0.6	3.5
0.86	18.2	18.2	80.1	80.4	14.2	16.6
	5.7	8.1	5.7	35.0	63.8	75.4
	10.2	10.2	46.9	47.0	0.6	3.6
0.87	19.1	19.1	81.3	81.7	14.6	17.0
	5.7	7.9	5.7	36.4	65.6	77.5
	10.7	10.8	47.7	47.8	0.7	3.7
0.88	20.0	20.0	82.6	83.0	15.0	17.6
	5.7	7.8	5.7	37.8	67.6	79.9
	11.3	11.3	48.5	48.6	0.7	3.8

taula-6

Tant per ú de població del subsistema-I:

$$0.79 \leq n' \leq 0.88$$

Diferència de velocitats dels subcentroides:

$$\begin{aligned} w_r &= 15 \pm 3 \\ w_\theta &= 68 \pm 12 \\ w_z &= 2 \pm 2 \end{aligned} \quad (\text{km s}^{-1})$$

Velocitats residuals típiques:

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 15 \pm 5 & \sigma''_{rr} &= 78 \pm 5 \\ \sigma'_{\theta\theta} &= 8 \pm 2 & \sigma''_{\theta\theta} &= 22 \pm 16 \\ \sigma'_{zz} &= 8 \pm 3 & \sigma''_{zz} &= 46 \pm 3 \end{aligned} \quad (\text{km s}^{-1})$$

$$\sigma'_{rz}, \sigma''_{rz} \approx 0 ; \quad \sigma'_{r\theta} = \sigma''_{r\theta} = \sigma'_{\theta z} = \sigma''_{\theta z} = 0$$

$$\sigma' = 19 \pm 6 \quad \sigma'' = 93 \pm 17$$

En el pròxim capítol interpretarem els resultats i els compararem amb els d'altres autors.

4.3- Discussió dels resultats

En el cas de la mostra d'Erickson, la comparació de resultats es pot fer directament amb els que obté Ros (1983) per la seva mostra-3 i, en general, per a totes les mostres, podem comparar amb les dades que, diversos autors, consideren representatives per a l'entorn solar.

En començar per la mostra d'Erickson hem de recordar que Ros treballa sota les hipòtesis $\Pi'_0 = \Pi''_0$ i $Z'_0 = Z''_0$ —traduït a la nostra notació $w_r = w_z = 0$ — les quals equivalen a considerar un model de rotació galàctica pura. La primera de les hipòtesis, en particular, té com a conseqüència, tant en el model de Ros com en el nostre, ignorar el fenomen de desviació del vèrtex manifestat a través del moment $\mu_{r\theta}$. En el present estudi, aquestes hipòtesis no es consideren, amb lo qual obtenim un model més general i amb resultats menys restrictius.

Els resultats que dona Ros són

$$0.50 \leq n' \leq 0.87$$

$$w_{\theta} = 28 \pm 6 \quad (\text{km s}^{-1})$$

$$\begin{array}{ll} \sigma'_{rr} = 25.5 \pm 5.5 & \sigma''_{rr} = 54 \pm 7 \\ \sigma'_{\theta\theta} = 13.5 \pm 5.5 & \sigma''_{\theta\theta} = 38.5 \pm 8.5 \\ \sigma'_{zz} = 9.5 \pm 5.5 & \sigma''_{zz} = 30.5 \pm 4.5 \end{array} \quad (\text{km s}^{-1})$$

Comprovem que aquestes dades són del tot concordants amb les nostres. Concretament, el mètode aquí utilitzat ha permès acotar més el marge de variació de les proporcions dels subsistemes, és a dir, de n' . El mateix es podria dir de les velocitats residuals standard σ_{rr} i σ_{zz} de cada subsistema. On surgeix una lleugera diferència és al comparar $\sigma''_{\theta\theta}$ i $w_{\theta'}$, doncs el valor que dóna Ros per a la velocitat residual standard és sensiblement superior al nostre a canvi d'una menor diferència de rotació dels dos subcentroïdes; motivat, sens dubte, per haver ignorat $\mu_{r\theta}$.

Quant a l'alt percentatge de població del subsistema-II —realment població intermèdia vella del disc— que, tant Ros com nosaltres, obtenim cal recordar (Hanson, 1983) l'esbiaixament que sofreixen algunes mostres, com les extreïtes del catàleg de Gliese, cap a estrelles d'alts moviments transversals. Semblantment ens trobarem amb la mostra de Torra, en canvi, ja hem mencionat que la forma de selecció que realitza Figueras per a la seva mostra està pràcticament exempta d'aquest inconvenient.

Vegem quins són els resultats que donen diferents autors al respecte. Per a comparar la mostra d'Erickson amb alguna de característiques similars, podem associar (Mihalas & Binney, 1981; Allen, 1976) les estrelles A a la població-I i les RR Lyrae a la població intermèdia del disc; Delhaye (1965) dóna per als semieixos $\sigma'_{rr}:\sigma'_{\theta\theta}:\sigma'_{zz}$ de les estrelles A els valors 22:13:9 (km s^{-1}), concordants amb els nostres resultats de la mostra d'Erickson. També per a estrelles de població-I Dyer (1956) dóna els valors 31:20:17. Gotska (1974), a partir de variables Mira, que poden cobrir tot el rang de poblacions (Feast, 1963), obté 32:20:14. Sandage & Fouts (1987), per a una població-I sense mescla, 28:17:17, tots en harmonia amb els nostres.

Quant a estrelles de població intermèdia, per a estrelles RR Lyrae de curt període Karimova & Pavlovskaya (1976) obté per als semieixos $\sigma''_{rr}:\sigma''_{\theta\theta}:\sigma''_{zz}$ els valors 38:28:22. Oort (1965), 60:54:34. Gotska (1974), per a variables Mira de població intermèdia, 51:34:29. Chiu (1980a), 50:38:33. Tots, valors pròxims als nostres.

Si passem a la mostra de Torra ens adonem immediatament que el subsistema-II ja no és susceptible de ser considerat població intermèdia, sinó que és, sense ser totalment extrema població-II. És una conseqüència d'haver ampliat el radi de la mostra. Podem comparar-la amb les que estudien Wyse & Gilmore (1986) explicant les mostres de Chiu (1980b) a partir d'una superposició trimodal. Aquests autors caracteritzen la població-I (estrelles del disc prim) amb uns semieixos de l'el·lipsoide de velocitats de 35:25:20 i la població vella del disc (estrelles del disc difós) amb 80:60:60. Veiem, doncs, que la concordància entre els nostres resultats i els que acabem d'exposar és total.

Si es compara amb els valors de Mihalas & Binney (1981), aquests donen per a la població més jove del disc (estrelles A, F; gegants tipus A-K; algunes nanes G, K, M i blanques; etc.) uns semieixos de 20:10:10, per a una població intermèdia jove (estrelles tipus solar; nanes G, algunes nanes tipus K i M; algunes subgegants i gegants rojes; etc.) 35:20:15, per a una població intermèdia vella (algunes nanes K, M i blanques; algunes subgegants i gegants vermelles; variables de llarg període, etc.) 60:35:40 i, per a la component esferoidal, 100:75:50 per a subnanes i 160:100:120 per a variables RR Lyrae de període superior a 0.^d45. Davant d'aquesta casuística podem interpretar la superposició dels dos sistemes de la mostra de Torra simplement com una separació entre estrelles joves del disc i estrelles velles del disc més estrelles de la component esferoidal.

Per a la mostra de Figueras podem prendre com a referència les mateixes fonts de comparació anteriors, tenint present que és de radi acotat (300 pc), és a dir, més representativa de l'entorn solar que la de Torra, i que no observa l'esbiaixament cap a estrelles d'alta velocitat. En el primer que es nota és en la proporció d'estrelles de la població-I que s'obté: del 79% al 88%, més elevat que el de les anteriors mostres, com ha de ser. No es tenen, però, mostres d'aquestes característiques per a fer una bona comparació, però podem prendre com a estimacions les que proporcionen Kuiper (1948) d'un 81% i Einasto (1954) d'un 79%. Les característiques de cada subsistema, pel present cas, responen a una separació més fina que les anteriors. El primer subsistema correspondria a una població jove força pura, mentre que el segon subsistema correspondria a una barreja de població intermèdia i població vella del disc.

Comentem, ara, què succeeix amb la diferència de velocitat dels subcentroïdes. A mesura que la població envellaix, la rotació es fa, en promig, més lenta. El fet es posa de manifest, sobretot, en la diferència de rotació dels dos subcentroïdes, produïnt-se un valor w_{θ} positiu.

En efecte, es considera que ens trobem a una distància galactocèntrica de $r_0 \approx 8$ kpc (un resum de les més recents estimacions han estat publicades per Feast, 1987) i, a la posició solar, la velocitat mitjana de rotació al voltant del centre galàctic és $\Theta_0 \approx 220$ km s⁻¹ (Norris, 1987). A manera de mostreig es pot indicar (Norris, 1987; Freeman, 1987; Sandage & Fouts, 1987) que, a l'entorn solar, la població intermèdia jove del disc posseeix una velocitat de rotació d'uns 205 km s⁻¹, la població intermèdia vella del disc d'uns 190 km s⁻¹, la població més vella del disc d'uns 120 km s⁻¹ i la component esferoidal es manté quasi estacionària.

Per a la mostra d'Erickson hem resolt que els dos subsistemes que superposavem es podien considerar, l'un, de població-I i, l'altre, de població intermèdia vella. Efectivament, la diferència mitjana de rotació $w_{\theta} \approx 46 \text{ km s}^{-1}$ proporciona una rotació pel segon subsistema de $\Theta''_0 \approx 188 \text{ km s}^{-1}$, que correspon perfectament a la població intermèdia vella.

Per a la mostra de Torra, la diferència mitjana de rotació és de $w_{\theta} \approx 72 \text{ km s}^{-1}$, donant, en promig, una rotació pel segon subsistema de $\Theta''_0 \approx 159 \text{ km s}^{-1}$. Per tant, el segon subsistema conté població més envellida que la de la mostra d'Erickson. Efectivament, aquesta velocitat de rotació és la característica d'una mescla de poblacions velles del disc i, potser, una petita part de component esferoidal.

Per a la mostra de Figueras, la diferència mitjana de rotació és de $w_{\theta} \approx 68 \text{ km s}^{-1}$. La rotació mitjana del subsistema d'estrelles més velles és, en aquest cas, $\Theta''_0 \approx 163 \text{ km s}^{-1}$. Efectivament, també s'ajusta a una mescla de població intermèdia vella i de població vella del disc.

Per a les restants components de \underline{w} , especialment w_r , ja que w_z pràcticament s'anul·la al plà galàctic, nosaltres també n'especifiquem un comportament: essent w_r positiu, com és en els tres casos estudiats, hem d'interpretar-ho com un expandiment més ràpid de la població més jove. No disposem de dades concretes per a fer comparacions, però el fet concorda perfectament amb l'expandiment observat (Lindblad, 1983; Clube, 1985; Lyngå, 1985) a la zona corresponent al cinturó de Gould, constituïda per estrelles molt joves, principalment de tipus B, que possiblement constitueixen el braç espiral. Conseqüentment, és un fenomen local i no sistemàtic, semblantment al de la

desviació del vèrtex, segons la interpretació —correntment acceptada— que en donen Mihalas & Binney (1981), i que el nostre model també prediu.

Finalment, reiterarem la deficiència de les dades actuals, que impossibiliten un càlcul més exacte de z . Per w_z hem obtingut, en les tres mostres estudiades, errors de la mateixa magnitud que el propi valor, per tant, hem d'acceptar trobar-nos just sobre el plà galàctic. Per aquest motiu no es poden utilitzar les relacions (2.63) i (2.71), que corresponien al cas b) de l'apartat 2.2. Recordem que el cas a) d'aquell apartat quedava descartat de forma instantània sempre que fos $w_r \neq 0$ i, pel mateix motiu, el cas més general de potencial no estacionari del cas b). Podem concloure, doncs, que la solució al nostre problema de superposició ens condueix a un potencial, la forma més general del qual és —com ja s'havia comentat— l'expressada a (2.45).

4.4- Conclusions

L'objectiu del treball ha estat estudiar les implicacions d'una superposició de dos sistemes estel·lars amb comportaments cinemàtics diferents, és a dir, governats per dues funcions de distribució independents. Per a cada un dels subsistemes s'ha adoptat el model de Chandrasekhar (1942) a simetria cilíndrica, desenvolupat posteriorment per Orús (1952), Català (1972) i Sala (1986), en el cas general d'un sistema no estacionari.

En resoldre el sistema d'equacions diferencials de Chandrasekhar, plantejat alhora pels dos subsistemes amb potencial comú, s'obtenen diversos lligams cinemàtics que es tradueixen en relacions entre els moments de la distribució de velocitats, a la vegada que es fa selecció dels potencials solució.

En efecte, després d'explicar, al primer capítol, els fonaments de la teoria de Chandrasekhar sota la hipòtesi de simetria cilíndrica i sense restriccions d'estacionarietat, s'han exposat les conseqüències cinemàtiques que el model comporta i que, per tant, són aplicables a cada un dels subsistemes en superposició. La resolució del potencial —recordem que es tracta del problema invers de Jeans, on es postula la funció de distribució i el potencial roman com a incògnita— s'ha suspès fins al segon capítol, on s'ha posat de manifest la transformació que sofreix el sistema d'equacions quan es planteja per partida doble i amb potencial comú. Obviant el cas en que ambdós sistemes siguin equivalents, és a dir, amb coeficients proporcionals, —associat a subsistemes que només difereixen en moviment de rotació, que no contempen la desviació del

vèrtex i que tenen proporcionals els semieixos μ_{rr} i μ_{zz} de l'el·lipsoide de velocitats— la solució general del potencial en superposició mena a sistemes que verifiquen, cada un, la relació $k_1=k_3$. Aquesta igualtat comporta la mateixa orientació dels dos el·lipsoïdes de velocitats, apuntant el semieix major cap al centre de la galàxia. La velocitat dels respectius centroides tindria, en aquest cas, també la mateixa direcció. Recordem que ha aparegut un terme del potencial que, en cas de no anular-se provocaria, l'equivalència dels dos sistemes amb $k'=k''$. S'estudien, tanmateix, dos potencials particulars: el separable, que no restringeix en res els paràmetres dels el·lipsoïdes, i l'estacionari, que porta també a la relació $k_1=k_3$ per a cada subsistema, amb les mateixes conseqüències cinemàtiques que abans. Quan el potencial és estacionari es pot determinar l'evolució temporal dels paràmetres del model i en posem un exemple.

Ros (1983) va estudiar la dependència entre moments totals i parcials fins a quart ordre quan es superposaven determinades funcions de distribució de la forma $f(I_1, I_2, I_3)$, particularitzant-ho a certes distribucions el·lipsoïdals i d'Schwarzschild, sempre, però, considerant rotació pura dels centroides. En el present estudi se'n fa la generalització dins el marc del nostre model tridimensional i no estacionari, i és dóna explicació de la totalitat dels moments centrats fins a quart ordre —que són els que es coneixen al moment present—, incloïnt-hi tots els de tercer ordre i els emparentats amb la desviació del vèrtex.

Així, al tercer capítol, s'han obtingut de manera sintètica les fórmules generals dels moments totals en funció dels parcials, en particular, quan les distribucions són d'Schwarzschild, sense cap altra mena d'hipòtesi, i s'ha exposat un mètode general per a arribar a determinar els

moments parcials, percentatge de població de cada subsistema, etc. a partir dels moments totals, que són els que es tenen com a dades. Durant aquest procés s'han anat obtenint importants relacions entre els diversos moments de primer, segon, tercer i quart ordre. Totes elles generalitzen les que es tenien fins ara, ja que no es fa cap hipòtesi sobre la nul·litat de cap d'ells. No obstant, algunes posseeixen certa complexitat, que desapareix quan s'introdueixen les hipòtesis de simetria cilíndrica pel sistema i de simetria respecte al pla galàctic per a la velocitat dels subcentroides. D'acord amb les relacions que el model imposa, s'han dissenyat dos mètodes d'acotació d'errors, l'un basat en aritmètica intervàlica i l'altre fonamentat en desigualtats que verifiquen alguns dels paràmetres. Les fórmules d'acotació d'errors són de gran utilitat al fer l'aplicació de la teoria exposada a mostres estel·lars que tenen moments poc definits.

Finalment, al quart i darrer capítol s'ha fet aplicació del model a tres mostres estel·lars de l'entorn solar. La de Erickson (1975), constituïda per 869 estrelles dins una esfera de 22 pc amb centre al sol, ja utilitzada per Ros (1983) i que ha estat útil per a comparar els resultats; la de Torra (1984), constituïda per 3822 estrelles gairebé totes fins a una distància de 500 pc i, finalment, la de Figueras (1987), amb dades molt més acurades que les anteriors i composta per 7398 estrelles dins un radi de 300 pc centrat al sol. En les tres mostres s'ha realitzat la separació dels subsistemes i s'ha associat cada un, d'acord amb criteris cinemàtics, a algun tipus de població estel·lar.

Així, s'ha vist que la mostra de Erickson contenia entre un 50 i un 87% de població-I, essent la població del subsistema-II més aviat població intermèdia; es recorda (Hanson, 1983) que la mostra de Erickson està esbiaixada cap a estrelles d'alta velocitat i, per això, és gran la

presència de subsistema-II. La mostra de Torra, també sensiblement esbiaixada en el mateix sentit que la anterior, contenia del 71 al 92% de població-I; però, per ser més extensa en nombre i dimensions, els subsistemes contenien poblacions menys pures. En darrer lloc, la mostra de Figueras, degut a la major quantitat d'estrelles que conté, a la selecció que se'n fa i al càlcul de les paral·laxis per mètodes espectrofotomètrics, era la que permetia, pels seus errors menors, veure més clarament els resultats de la superposició: una proporció d'entre el 79 i el 88% de població-I, fent una separació clàssica entre estrelles joves del disc i estrelles velles del disc i permetent apreciar clarament el fenomen d'expandiment més ràpid de les estrelles joves, generalment associat al cinturó de Gould.

En la discussió de l'apartat anterior es comparen resultats amb els d'altres autors, quan n'hi ha, observant bona concordància o millora dels resultats, ja que no hem d'oblidar que el nostre model no exclou el moviment no rotacional dels centroides ni la desviació del vèrtex.

El model exposat permet, des d'un punt de vista pràctic, determinar i separar mitjançant criteris purament cinemàtics les poblacions que componen una determinada mostra estel·lar i deixa oberta, per a quan es tinguin dades més precises, la possibilitat d'estudiar la seva evolució espacial i temporal. Des d'un punt de vista teòric, associa als possibles potencials solució del sistema de Chandrasekhar les restriccions cinemàtiques que comporta la coexistència de dos subsistemes, donant peu a generalitzar-ho a més de dos subsistemes.

- Adams, W.S.; Joy, A.H. 1919. *Astrophys. J.* **49**, 179.
- Adams, W.S.; Kohlschütter, A. 1914. *Astrophys. J.* **39**, 341.
- Adams, W.S.; Strömberg G.; Joy, A.H. 1921. *Astrophys. J.* **54**, 9.
- Allen, C.W. 1976. *Astrophysical Quantities*. The Athlone Press, University of London.
- Arnold, V.I. 1978. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag. New York.
- Baade, W. 1944. *Astrophys. J.* **100**, 137.
- Bartkevicius, A. 1980. *Bull. Vilnius* **51**, 109.
- Bergh, S.v.d. 1975. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **13**, 217.
- Blaauw, A. 1965. *Galactic Structure*. Eds. Blaauw and Schmidt. Univ. of Chicago Press.
- Bond, H.E. 1970. *Astrophys. J. Suppl.* **22**, 117.
- Bond, H.E. 1980. *Astrophys. J. Suppl.* **44**, 1517.
- Boss, B.J. 1918. *Pop. Astron.* **26**, 686.
- Bottlinger, K.F. 1932. *Ergebnisse d. Exakten Naturwiss.* **11**, 31.
- Bottlinger, K.F. 1933. *Veröff. Univ. Sternw. Berlin* **10**, No. 2.
- Camm, G.L. 1941. *M.N.R.A.S.* **101**, 4.
- Català, M.A. 1972. *Urania* no. 275, Tarragona.
- Cubarsí, R. 1982. *Tesi de llicenciatura*. Univ. Barcelona.
- Cuble, S.V.M. 1985. *The Milky Way Galaxy*, p145. Proceedings of the 106th symposium of the IAU. Eds. Woerden, H. van et al. (Dordrecht: Reidel).
- Chandrasekhar, S. 1942. *Principles of Stellar Dynamics*. Univ. of Chicago Press.

- Chiu, L-T.G. 1980a. *Astron. J.*, **85**, 812.
- Chiu, L-T.G. 1980b. *Astrophys. J. Suppl.* **44**, 31.
- Delhaye, J. 1965. *Galactic Structure*, p61. Eds. Blaauw and Schmidt. Univ. of Chicago Press.
- Dessureau, R.L.; Uppgren, A.R. 1975. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **87**, 737.
- Dyer, E.R. 1956 *Astron. J.*, **61**, 64.
- Eddington, A.S. 1914. *Stellar movements and the structure of the universe*. Macmillan. London.
- Eddington, A.S. 1921. *A.N. Jubiläumsnummer* 9.
- Eggen, O.J. 1980. *Astrophys. J. Suppl.* **51**, 183.
- Eggen, O.J.; Lynden-Bell, D.; Sandage, A.R. 1962. *Astrophys. J.* **136**, 748.
- Éinasto, J. 1952. *Tartu Obs. Pub.* **32**, No. 4.
- Éinasto, J. 1954. *Tartu Obs. Pub.* **32**, No. 6.
- Éinasto, J. 1976. *Stars and galaxies from observational points of view*, p363. *Proceedings of the Third European Astronomical Meeting*. Ed. E.K. Kharadze. Tbilisi.
- Erickson, R.R. *Astrophys. J.* **195**, 343.
- Feast, M.W. 1963. *M.N.R.A.S.* **125**, 367.
- Feast, M.W. 1987. *The Galaxy*, p1. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).
- Figueras, F. 1986. *Tesi doctoral*. Univ. Barcelona.
- Freeman, K.C. 1987. *The Galaxy*, p291. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).
- Fricke, W. 1952. *Astron. Nachr.* **280**, 183.
- Fricke, W. 1977. *Veroff. der Astronomischen Rechen-Institut* No. 28. Heidelberg.

- Fricke, W.; Kopff, 1963 Fourth Fundamental Catalogue. Veroff. der Astronomischen Rechen-Institut, No.10. Heidelberg.
- Fujimoto, M. 1980. *Publs. Astr. Soc. Japan*, **32**, 89.
- Gilmore, G.; Wyse, R.F.G. 1987. *The Galaxy*, p247. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).
- Gliese, W. 1941. *Astron. Nachr.* **272**, 97.
- Gliese, W. 1969. *Catalogue of Nearby Stars*. Veroff. der Astronomischen Rechen-Institut, No.2. Heidelberg.
- Gliese, W.; Jahreiss, H. 1979. *Astron. Astrophys. Supp.* **38**, 423.
- Gotska, T.G. 1973. *Astron. Zh.* **50**, 1034.
- Hanson, R.B. 1979a. *M.N.R.A.S.* **186**, 357.
- Hanson, R.B. 1979b. *M.N.R.A.S.* **186**, 875.
- Hanson, R.B. 1983. *The Nearby Stars and the Stellar Luminosity Function*, p51. IAU Coll. 76. Eds. Davis Philip, A.B.; Upgren, A.R.
- Hoffleit, D. 1964. *Yale Catalogue of Bright Stars*. New Haven.
- Iwanovska, W. 1966. *Vistas in Astronomy* **7**, 133.
- Janes, K.A. 1975. *Astrophys. J. Suppl.* **29**, 161.
- Jaschek, C. 1985. *La composition chimique des étoiles dans le voisinage solaire*, p5. VIIe Journée de Strasbourg.
- Jeans, J.H. 1923. *M.N.R.A.S.* **84**, 60.
- Kapteyn, J.C. 1905. *Star Streaming* British Association for the Advancement of Science, Report 257.
- Kapteyn, J.C. 1922. *Astrophys. J.* **55**, 302.
- Karimova, D.K.; Pavlovskaya, E.D. 1976. *Stars and galaxies from observational points of view*, p363. Proceedings of the Third European Astronomical Meeting. Ed. E.K. Kharadze. Tbilisi.

- King, I.R. 1971. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **83**, 377.
- Kolkhidashvili, M.G. 1962. *Byul. Abastumansk. Astrofiz. Observ.* **27**, 108.
- Kondratev, B.P.; Ozernoy, L.M. 1982. *Astrophys. and Space Science* **84**, 431.
- Kruit, P.C. van der. 1987. *The Galaxy*, p27. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).
- Kuiper, G.P. 1948. *Astron. J.*, **53**, 194.
- Kurth, R. 1957. *Introduction to the mechanics of stellar systems*. Pergamon Press. London.
- Lacey, C.G. 1984. *Formation and Evolution of Galaxies and Large Structures in the Universe*, p351. Eds. Audouze, J.; Tran Thanh Van, J. (Dordrecht: Reidel).
- Ledermann, W.; Vajda, S. 1980. *Algebra (Handbook of Applicable Mathematics, Vol. I)* Wiley. Chichester.
- Lindblad, P.O. 1983. *Kinematics, Dynamics and Structure of the Milky Way*. Ed. Shuter, W.L.H. Vancouver Workshop.
- Lin, C.C.; Shu, F.H. 1964. *Astrophys. J.* **140**, 646.
- Lynga, G. 1985. *The Milky Way Galaxy*, p133. Proceedings of the 106th symposium of the IAU. Eds. Woerden, H. van et al. (Dordrecht: Reidel).
- Mayor, M. 1972. *Astron. Astrophys.* **18**, 97.
- Mihalas, D.; Binney, J. 1981. *Galactic Astronomy*. W.H. Freeman and Company. San Francisco.
- Moore, R.E. 1966. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Morin, D. 1973. *Bull. du Centre de Données Stellaires* No. 10. Strasbourg.
- Mould, J.R. 1982. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **20**, 91.
- Norris, J.E. 1986. *Astrophys. J. Suppl.* **61**, 667.

- Norris, J.E. 1987. *The Galaxy*, p297. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).
- Núñez, J.1981. Tesi doctoral. Univ. Barcelona.
- O'Connell, D.J.K. 1958. Ric. Astr. Specola Vaticana, 5.
- Oblak, E. 1983. Astron. Astrophys. **123**, 238.
- Ochsenbein, F. 1980. CDS Inform. Bull. **19**, 74.
- Ochsenbein, F.; Bischoff, M.; Egret, D. 1981. Astron. Astrophys. Supp. **43** , 259.
- Ogorodnikov, K.F. 1965. *Dynamics of Stellars Systems*. Pergamon Press. London.
- Oort, J.H. 1926. Groningen Pub. No. 40.
- Oort, J.H. 1928. B.A.N. **4**, 269.
- Oort, J.H. 1965. *Galactic Structure*. Stars & Stellar Systems, Vol. V. Eds. Blaauw and Schmidt. Univ. of Chicago Press.
- Orús, J.J. de. 1952. *Collectanea Mathematica*, Vol. V. Barcelona.
- Orús, J.J. de. 1954. *Archives Internationals d'Histoire des Sciences*, **27**, 141.
- Orús, J.J. de. 1975. *Actas de la I Asamblea Nacional de Astronomia y Astrofísica*, p121. Tenerife.
- Orús, J.J. de. 1977. *Apuntes de Dinámica Galáctica*. Univ. Barcelona.
- Palous, J.; Piskunov, A.E. 1985. Astron. Astrophys. **143**, 102.
- Parenago, P.P. 1954. *Kurs zvezdnoj astronomii*. Moskva.
- Perek, L. 1962. *Distribution of mass in oblate stellar systems*, p217. *Advances in Astronomy and Astrophysics*, Vol. I. Ed. Zdeněk Kopal. Academic Press. New York.

- Rees, M.J.; Ostriker, J.P. 1977. M.N.R.A.S. **179**, 541.
- Ros, R.M. 1983. Tesi doctoral. Univ. Barcelona.
- Ros, R.M. 1985. Rev. Mexicana Astron. Astrof. **11**, 23.
- Ros, R.M. 1987. Rev. Mexicana Astron. Astrof. **15**, 65.
- S.A.O. 1965. Catalogue of 258997 stars. Smithsonian Institution, Washington, D.C.
- Sala, F. 1986. Tesi doctoral. Univ. Barcelona.
- Sandage, A.R. 1987. *The Galaxy*, p321. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).
- Sandage, A.R. 1986. Ann. Rev. Astron. Astrophys. **24**, 421.
- Sandage, A.R.; Fouts, G. 1987. Astron. J. **93**, 74.
- Sanz, J. 1987. Tesi doctoral. Univ. Barcelona.
- Schwarzschild, K. 1912. Astron. Nachr. **190**, 361.
- Shapley, H. 1930. *Star Clusters*. Harvard University Press. Cambridge, Mass.
- Shatsova, R.B. 1965a. Astron. Zh. **42**, 160.
- Shatsova, R.B. 1965b. Astron. Zh. **42**, 581.
- Shatsova, R.B. 1967. Astron. Zh. **44**, 396.
- Shatsova, R.B. 1968. Astron. Zh. **45**, 1254.
- Shatsova, R.B. 1971. Astron. Zh. **48**, 126.
- Sinzi, A.M. 1972. *Research in Hydrography and Oceanography*. Hydrogr. Dept. Tokyo.
- Spitzer, L.; Schwarzschild, M. 1951. Astrophys. J. **114**, 385.
- Spitzer, L.; Schwarzschild, M. 1953. Astrophys. J. **118**, 106.
- Strömberg, G. 1925. Astrophys. J. **61**, 363.
- Strömgren, B. 1987. *The Galaxy*, p229. Eds. Gilmore, G.; Carswell, R.F. (Dordrecht: Reidel).

- Torra, J. 1984. Tesi doctoral. Univ. Barcelona.
- Tumpler, R.J. 1930. Lick Obs. Bull. **14**, 154.
- Vetesnik. 1959. B.A.C. **10**, 81.
- Wielen, R. 1977. Astron. Astrophys. **60**, 263.
- Wooley, R.v.d.R. 1970. Royal Obs. Annals, 5.
- Wyse, R.F.G.; Gilmore, G. 1986. Astron. J. **91**, 855.

Aquesta veu que ara començo
amb prou feines a conèixer em diu
també que el record d'aquell
treball curosament executat fins
al final m'ajudarà a suportar les
llargues angúnies de la llibertat
i la vagabunderia.

BECKETT, *Molloy*.