UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISIÓN DE CIENCIAS JURÍDICAS, ECONÓMICAS Y SOCIALES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA ECONÓMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

# DINÁMICA DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS: MODELO DE TRES FACTORES

- **Tesis Doctoral presentada por Mercedes Galisteo Rodríguez para optar al título de Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales.**
- **Directora de la Tesis: Dra. Hortènsia Fontanals Albiol.**
- **Programa de doctorado: Metódos Matemáticos en Economía Financiera. Bienio: 92-94**



**Junio de 2000**

*A mis padres,*
*gracias por todo.*

## AGRADECIMIENTOS


Es inevitable, al finalizar un trabajo de investigación, hacer balance de todos los años y esfuerzos que se han dedicado a él. El resultado más visible de este trabajo es, evidentemente, esta tesis doctoral. Pero, para satisfacción de una misma, el más gratificante es el convencimiento de que este trabajo es resultado de la ayuda y el apoyo de muchos amigos.

En primer lugar deseo dar las gracias de todo corazón a Hortènsia Fontanals, directora de esta tesis doctoral. De ella, he aprendido mucho. Ha sido el referente para mi carrera docente. Ha sido mi maestra en el difícil mundo de la investigación. Ha sido y es una gran amiga. Gracias por todas las horas dedicadas y por todos los momentos compartidos. Sin ella, este trabajo no habría sido posible.

Deseo agradecer a Antonio Alegre toda la ayuda prestada. En los primeros años me mostró los verdaderos valores de un profesor universitario. Gracias por sus enseñanzas, no sólo estocásticas, sino también humanas.

También deseo expresar mi gratitud al Dr. Eduardo Schwartz, que me ha demostrado que los sueños se pueden hacer realidad. Gracias por su atención y sus inestimables comentarios.

Gracias a Rosa M. Mayoral y Teresa Costa, por la ayuda y amistad de estos años. Gracias a Carmen Badía y Teresa Preixens por sus consejos y ánimos. Gracias a Manolita Bosch por su inestimable ayuda e interés. Gracias a Lourdes Gómez por su paciencia y dedicación. Gracias a Antoni Vidiella, Francisco Javier Sarrasí, Fernando Espinosa y Trinidad Sancho. En un momento u otro han tenido que sufrirme. Gracias a todos.

Gracias también al resto de profesores del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Está lleno de gente muy especial.

También tengo que agradecer a todos mis amigos y familiares su apoyo y paciencia durante estos años.

Deseo agradecer a mis padres todo lo que han hecho por mi. Ellos me han enseñado lo importante que es la familia y la amistad. A ellos les debo todo lo que soy. A ellos les dedico esta tesis doctoral.

Gracias a todos mis hermanos y cuñados por estar siempre ahí. Su apoyo siempre ha sido fundamental. El recordarlos en estos momentos me hace feliz. Gracias a todos mis sobrinos por los momentos de alegría.

Gracias, de forma especial, a Jordi. Su apoyo ha sido y es inestimable. Él, más que nadie, ha sufrido este trabajo. Gracias a él mi sufrimiento ha sido menor. *Gràcies per ser com ets i per estar sempre al meu costat.*

Barcelona, junio de 2000

# Índice

*The subject of modelling interest rates is still in its infancy ...*

P. Wilmott, S. Howison and J. Dewynne (1995)

# Prólogo

El objetivo de esta tesis doctoral se centra en el planteamiento, desarrollo y contrastación de un modelo dinámico de la estructura temporal de tipos de interés, que incorpora tres variables de estado.

El campo de estudio centrado en los tipos de interés es muy amplio y ha merecido una gran atención, tanto por parte de los académicos como por parte de los profesionales. Esta afirmación queda avalada por la extensa bibliografía sobre el tema, que en los últimos cinco años ha pasado de artículos a libros especializados sobre la materia, principalmente en su vertiente relacionada con opciones sobre tipos de interés.

De hecho, el estudio de la estructura temporal de tipos de interés como tal, se puede considerar instrumental, en el sentido que los tipos de interés se utilizan en todos los aspectos de la valoración financiera, en la obtención de medidas de riesgo y cobertura, dentro de la microeconomía y en política monetaria, en la vertiente macroeconómica.

Centrando la atención en la microeconomía, es necesario disponer de la curva de tipos de interés para realizar una valoración financiera cierta y de una modelización dinámica de la estructura de tipos, cuando lo que es preciso valorar son derivados sobre tipos de interés.

Para medir el riesgo de mercado que está asumiendo una cartera e incluso su riesgo de crédito, es necesaria la incorporación de los tipos de interés. Y finalmente, por lo que respecta a las técnicas de cobertura, los modelos, tanto estáticos como dinámicos de la estructura temporal de tipos de interés, están proporcionando nuevos conceptos de duración, en los que es posible separar los efectos de nivel, de pendiente y de curvatura. Estas aplicaciones demuestran la importancia de la estructura de tipos de interés como área de estudio, dentro de las finanzas.

Tal como consta como objetivo de la tesis, el trabajo se centra en un modelo dinámico que describe la evolución de la curva de tipos, mediante la definición de tres factores. El comportamiento temporal de estos factores se representa mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. Aplicando el lema de Itô, la condición de inexistencia de posibilidades de arbitraje y una definición funcional de los precios que el mercado asigna al riesgo, se obtiene una ecuación cierta en derivadas parciales de segundo orden, para el precio de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia. La ecuación que se obtiene en el modelo admite solución analítica, por separación de variables, por lo que es posible definir la función de descuento, para cualquier plazo, a partir de los valores de las tres variables de estado.

Obtenida la función de descuento, la definición de la estructura de tipos al contado y la de tipos implícitos es inmediata. También se obtienen las expresiones correspondientes a la prima de riesgo y prima *forward* asociadas al modelo. Finalmente, se deducen las expresiones de duración y convexidad asociadas a cada factor estocástico del modelo.

Esta tesis doctoral se ha estructurado en cuatro capítulos. El primer capítulo, **Estructura temporal de tipos de interés**, es de carácter introductorio. Se define el concepto de estructura temporal de tipos de interés, indicando que esta relación se puede establecer en un instante determinado, dando lugar a los modelos de ajuste de la estructura temporal o para un horizonte temporal, dando lugar a los modelos de evolución de la curva de tipos, objeto de estudio de esta tesis doctoral. En este capítulo introductorio se definen las principales magnitudes financieras que intervienen en el análisis de los tipos de interés. A continuación, se presentan las denominadas teorías clásicas sobre tipos de interés ya que, en última instancia, constituyen el antecedente histórico de los actuales desarrollos de la estructura temporal. Se dedica un apartado de este primer capítulo al análisis de variables temporales en tiempo continuo y en un contexto de incertidumbre, para introducir las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô, que van a modelizar el comportamiento de los factores estocásticos de los modelos dinámicos. Finalmente, se clasifican y comentan, en líneas generales, los principales modelos de ajuste de la curva de tipos, describiendo en particular el de Nelson y Siegel (1987) y el de Svensson (1994), ya que los datos que se utilizan para la contrastación empírica del modelo desarrollado en esta tesis doctoral, se obtienen a partir de ellos.

El segundo capítulo de la tesis, **Dinámica de la estructura temporal de tipos de interés**, se centra en los modelos dinámicos de la curva de tipos, dando más importancia a los denominados no consistentes, ya que el modelo que se desarrolla en el tercer capítulo pertenece a este grupo. En este capítulo y después de una clasificación general de los modelos dinámicos en consistentes y no consistentes y dentro de éstos, en modelos de equilibrio general y parcial, se plantea un modelo factorial de evolución de la estructura temporal, basado en la teoría de valoración por ausencia de oportunidades de arbitraje, no consistente con la estructura de tipos inicial y que considera $s$ factores o variables de estado. También se efectúa un análisis de la ecuación diferencial estocástica de las variables de estado, y se describen los procesos de difusión más utilizados. En este capítulo se resumen los principales modelos factoriales, antecedentes del desarrollo planteado en esta tesis. El capítulo finaliza con un planteamiento general de las diferentes versiones de la teoría de las expectativas en un contexto de incertidumbre, se definen las primas temporales, de riesgo y *forward*, y sus relaciones con las diferentes versiones de la hipótesis de las expectativas.

El tercer capítulo, **Modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés**, se inicia con el planteamiento del modelo propuesto de la dinámica de la estructura temporal. Ya se ha comentado que se trata de un modelo factorial que considera tres variables de estado: dos *spreads* y un tipo de interés al contado a largo plazo. De esta forma, se incorpora en esta dinámica, información de los diferentes tramos de la curva de tipos y se pueden considerar movimientos de nivel, pendiente y curvatura, en la evolución de la estructura temporal.

Los dos *spreads* se modelizan mediante procesos Ornstein-Uhlenbeck y el tipo de interés a largo plazo, mediante un proceso raíz cuadrada con reversión a la media. La suma de los tres factores es, precisamente, el tanto de interés instantáneo sin riesgo y además, se exige que sean ortogonales entre ellos. Así, y después de especificar la forma funcional de los precios de mercado del riesgo, en el siguiente apartado se obtiene el precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia y se analizan las propiedades de esta función de descuento obtenida. En siguientes apartados se obtienen y analizan la curva de tipos de interés al contado y la curva de tipos *forward*. A continuación, se deducen las expresiones correspondientes a la prima de riesgo y prima *forward*. Este tercer capítulo finaliza con la obtención de una duración y convexidad factorial. Se obtienen tres medidas de duración, una para cada factor estocástico del modelo.

En el último capítulo, **Aplicación empírica**, se efectúa la contrastación empírica del modelo. Los datos empleados son los proporcionados por el Servicio de Estudios del Banco de España (Nuñez, S. (1995)). Se escogen las *proxys* que van a representar los factores del modelo y se analizan, estadísticamente, estos datos que van a servir de input en la estimación. Se divide la estimación del modelo en dos fases. En la primera se estiman por el método de los momentos generalizados de Hansen (1982) los parámetros de difusión de las variables del modelo. A continuación y sustituyendo estos valores estimados en la función de descuento, se pueden estimar, por métodos de regresión no lineales, los coeficientes referentes a los precios de mercado del riesgo de los factores del modelo.

Finalmente, y a modo de resumen, se detallan las conclusiones de este trabajo. A continuación se adjuntan tres anexos. En el primero se presentan gráficamente las series temporales con las que se trabaja en el capítulo de aplicación empírica. En el anexo dos, se incluye el programa de mathcad 2000 utilizado en la segunda fase de estimación del modelo. En el último anexo, se efectúa un análisis gráfico del modelo. Se comprueban, empíricamente, una serie de propiedades de la función de descuento obtenida y se analiza el comportamiento de la curva de tipos, cuando cambian los parámetros que la definen.

# CAPITULO I

## Estructura temporal de tipos de interés

# Capítulo 1

# Estructura temporal de tipos de interés

En este primer capítulo introductorio se define la estructura temporal de tipos de interés que informa de la relación funcional entre los diferentes tipos de interés aplicables para los distintos plazos. Asimismo, se considera que esta relación está asociada a un instante o momento de observación y que por tanto, se puede obtener una relación como la expresada en cada instante de un determinado horizonte temporal. Los modelos que analizan la evolución en el tiempo de la curva de tipos son los denominados **modelos dinámicos** de la estructura temporal de tipos de interés y son objeto de estudio del presente trabajo. La evolución de la curva de tipos de interés para distintos plazos se puede describir a partir de la dinámica de magnitudes financieras equivalentes, tales como tipos de interés al contado, tipos de interés implícitos o funciones de descuento. Por ello, en un segundo apartado, se definen en el campo continuo todas estas magnitudes financieras, ya que van a intervenir en el desarrollo de la metodología dinámica de la estructura temporal. Evidentemente, todas estas magnitudes son variables aleatorias pero, dado el carácter introductorio de este apartado, se definen en el campo cierto.

A continuación se pasa revista a las denominadas teorías tradicionales de la estructura temporal de tipos de interés, Teoría de las expectativas, Teoría del hábitat preferido y Teoría de la segmentación de mercado, ya que, en última instancia, constituyen el antecedente de los actuales planteamientos del análisis de la curva de tipos. Las teorías tradicionales no están desarrolladas en base a un modelo de equilibrio de valoración financiera y, por tanto, no son suficientes para explicar los distintos rendimientos de activos de diferentes vencimientos. Surgen, de esta forma, modelos que intentan explicar la dinámica de la curva de tipos en un contexto de equilibrio fundamentado en la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero. Para facilitar el desarrollo de esta metodología, que será tratada en el siguiente capítulo, se dedica un apartado de este primer capítulo al análisis de variables temporales continuas en un contexto de incertidumbre.

Finalmente, se dedica el último apartado de este capítulo a los modelos estáticos o de ajuste de la curva de tipos de interés. No es objetivo de este trabajo un análisis exhaustivo de esta metodología de estimación de la relación tipo-plazo, pero se cree conveniente hacer constar las principales técnicas que se aplican para ajustar la curva a la información de que se dispone en un momento determinado. De hecho, y para la contrastación de los modelos dinámicos de la estructura temporal de tipos de interés, es necesario algún modelo de ajuste que proporcione la información necesaria para su validación empírica.

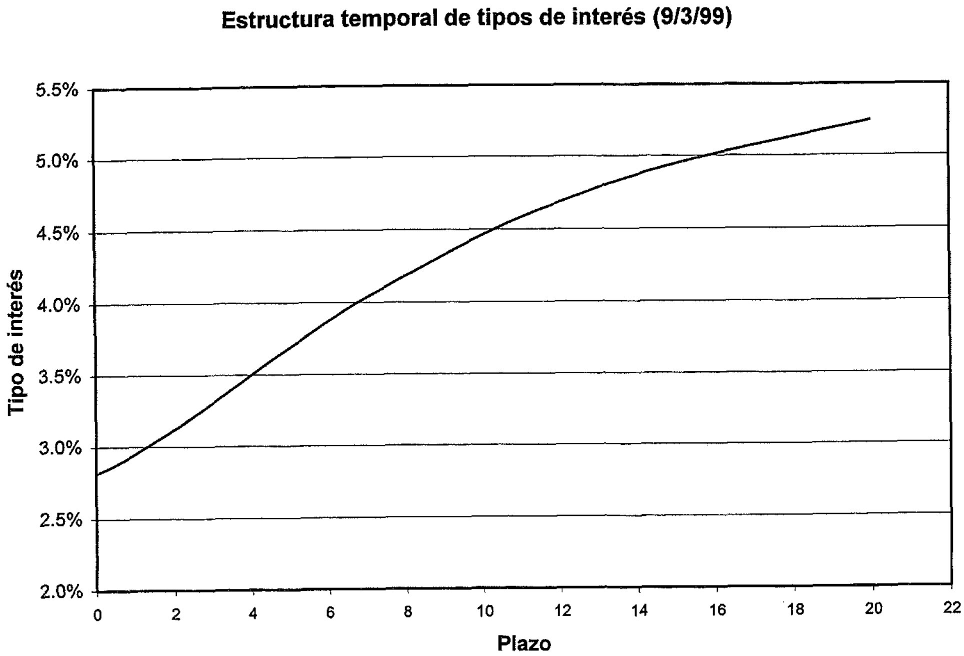
## 1.1 Introducción

La **estructura temporal de tipos de interés** es la relación funcional que informa, para un momento y mercado dados, de los diferentes tipos de interés al contado y el plazo al cual se refieren.

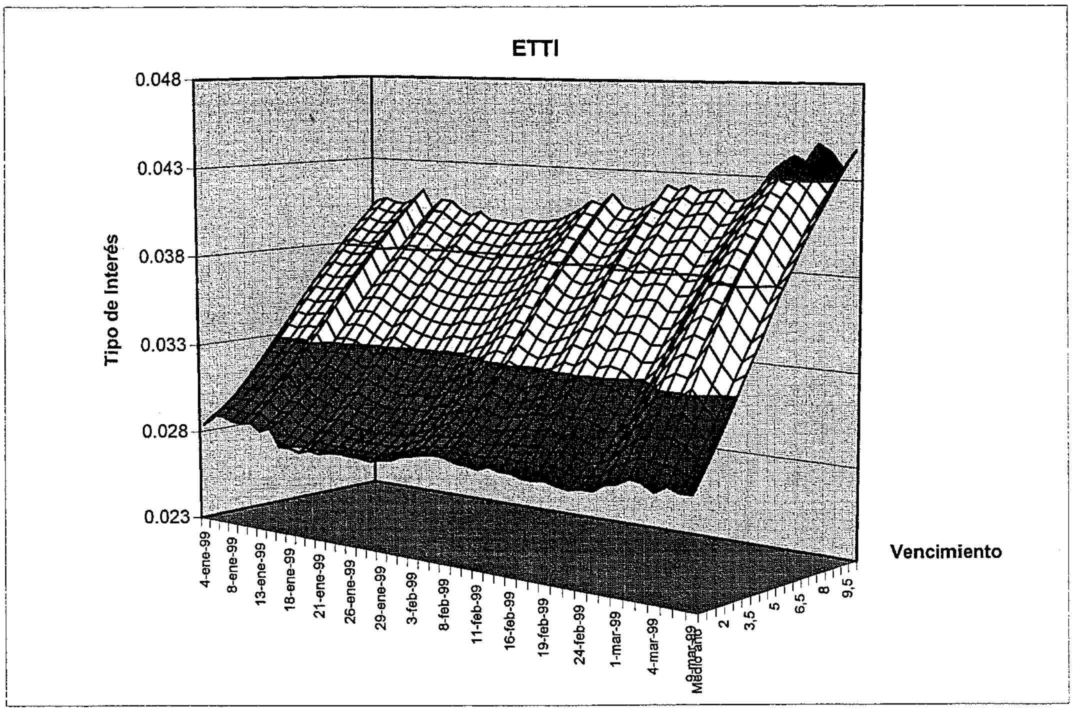
Se trata por tanto de una función cuya variable dependiente es el valor del tipo de interés al contado y cuya variable independiente es el plazo al que se refiere el tipo de interés. En la medida en que se considera que la negociación en los mercados financieros se efectúa en tiempo continuo, se puede determinar una relación como la expresada en cada instante[1]. Cuando se determina la estructura temporal en un instante determinado se ajusta esta función a la información que proporciona en ese instante el mercado financiero y así, se estima la estructura temporal de tipos de interés desde una perspectiva estática. Por otra parte, se puede analizar también la estructura temporal desde una perspectiva dinámica, incorporando en la relación funcional tipo de interés-plazo, la componente tiempo calendario o momento de observación de la relación funcional. De esta forma, y sin más preámbulos, podemos ya agrupar los modelos de la estructura temporal de tipos de interés en dos grandes apartados: los **modelos estáticos** y los **modelos dinámicos** o de evolución de la estructura temporal de tipos de interés.

La estructura temporal de tipos de interés para un momento dado se suele representar en un eje de coordenadas. El eje de abcisas recoge el tiempo o plazo de vigencia del tipo de interés y en el eje de ordenadas se presentan los diferentes valores para los tipos de interés. Se obtiene así una visualización gráfica, para un instante determinado, de los diferentes tipos de interés aplicables para el plazo al cual se refieren.

[1]A pesar de que el funcionamiento del mercado no es estrictamente continuo, se considera que la relación tipo de interés al contado y plazo está asociada a un determinado instante o momento de observación.




Cuando se considera la dinámica en el tiempo de la estructura temporal de tipos de interés, se añade un tercer eje, que recoge los diferentes instantes de observación de la relación tipo-plazo. De esta forma se obtiene una representación tridimensional de la estructura temporal de tipos de interés, que informa para un horizonte temporal determinado, de su evolución en el tiempo.




La representación gráfica de la estructura temporal de tipos de interés se suele denominar *curva de tipos de interés* o *curva cupón cero*, ya que los tipos de interés al contado que la componen son rendimientos asociados a títulos de renta fija cupón cero o emitidos al descuento.

En líneas generales, la curva de tipos de interés puede presentar, en un instante determinado, diferentes formas:

- **creciente o positiva**, cuando los tipos de interés son mayores a medida que el plazo al que se refieren se va ampliando. Muchos autores argumentan que esta es la situación que se puede calificar de normal, ya que a mayor plazo, el riesgo también es mayor y, por tanto, los tipos de interés han de reflejar una valoración creciente respecto del plazo.

- **decreciente o negativa**, cuando los tipos de interés al contado a corto plazo son más elevados que los del largo plazo, lo que se conoce también como una curva invertida. Se suele decir que esta situación es especial y que se da cuando el mercado apuesta en el corto o medio plazo por un descenso de los tipos de interés. Se suele presentar más cuanto mayores son los tipos de interés que se negocian en el mercado.

- **plana**, cuando los tipos de interés son iguales, o con muy escasas diferencias, independientemente del plazo. Esta situación se puede calificar de anómala y no estable, y se suele emplear como hipótesis de trabajo en determinados análisis.

- **oscilante o con jorobas**, cuando la curva presenta unos tramos ascendentes y otros descendentes. Se suele dar cuando en el mercado se dan situaciones de inestabilidad por diversas causas y ante la incertidumbre de los agentes participantes, el mercado presenta continuas variaciones.

Desafortunadamente, la estructura temporal de tipos de interés no puede ser observada directamente ya que ésta informa, exclusivamente, de la relación tipo-plazo[2] y en el mercado no se dispone de esta información para todos los plazos que se pueden considerar en un horizonte temporal. Es preciso y, más adelante se profundizará en este aspecto, deducir esta relación funcional a partir de la información disponible. Además, se pueden encontrar diferentes tipos de interés asociados a un mismo plazo y ello es debido a la variedad de factores que influyen en su determinación. Los tipos de interés observados reflejan efectos distintos del plazo. El más importante es el **riesgo de insolvencia** del emisor, que hace referencia al riesgo de

[2]Como señala Soledad Nuñez (1995, p.6) se trata de obtener el precio que el mercado pone al tiempo y, sin embargo, los tipos observados reflejan efectos diferentes del plazo y, por tanto, la obtención de la estructura temporal de tipos de interés requiere, en general, una estimación.

impago que comporta el título. Los agentes del mercado valoran este riesgo y si lo consideran elevado sólo están dispuestos a prestar su financiación si se les compensa a través de un mayor rendimiento. Así, los tipos de interés están afectados por una *prima de riesgo* que dependerá de cada deudor y de su clasificación crediticia. Para no incorporar el riesgo de insolvencia, en la estimación de la estructura temporal de tipos de interés, se utilizan rendimientos de títulos de renta fija emitidos por el estado para obtener, en la medida de lo posible, tipos de interés libres de riesgo de insolvencia.[3]

En definitiva, se trata de disponer de rendimientos de títulos de renta fija estatales, cupón cero o emitidos al descuento, que sean lo más homógeneos posible y que estén libres de otros posibles factores (fiscalidad, liquidez, características propias del título...) que distorsionan la relación tipo-plazo. La ventaja de utilizar deuda del Estado es que, aparte de proporcionar tipos libres de riesgo de insolvencia, se negocia en mercados secundarios suficientemente líquidos para una amplia gama de plazos.

Por su carácter instrumental la estructura temporal de tipos de interés se aplica en distintos ámbitos. En una primera taxonomía de carácter general, hay que diferenciar la utilización de la estructura temporal de tipos de interés en un entorno macro y micro. Una de las variables macroeconómicas básicas es, precisamente, el tipo de interés. Actualmente, ya existe bastante bibliografía donde, para modelizar variables macros de la economía productiva, se incorpora el tipo de interés como va-

[3]El riesgo de insolvencia de activos de renta fija estatales es valorado a través de unas empresas de calificación o *rating* independientes. Las dos más conocidas son *Standard & Poor's* y *Moody's*, aunque existen otras muchas empresas en este sector (*Fitch Investors Service*, *Duff & Phelps*, *McCarthy*...). En los paises integrantes de la C.E.E., aparte de la información suministrada por las anteriores empresas, existen calificaciones más o menos conocidas realizadas por los intermediarios financieros implicados en operaciones de lanzamiento de empréstitos (Diez de Castro, L. y J. Mascareñas (1991), pp. 62-63).

riable exógena.[4] Dentro de este ámbito, el conocimiento de la estructura temporal de tipos de interés también es útil como un indicador para la política monetaria. La estructura temporal, junto a otras herramientas, es útil para analizar las condiciones en las que la política monetaria ha de actuar, las perspectivas de cumplimiento del objetivo establecido, la percepción por parte de los agentes del tono de la política monetaria y su grado de confianza en el mantenimiento del mismo en el futuro (Nuñez, S. (1995), pp.6-7).

En cuanto a las aplicaciones de carácter financiero de la estructura temporal existen, básicamente, dos grandes líneas de aplicación, como son

- la valoración de activos derivados sobre tipos de interés
- y la cobertura o evaluación de estrategias de gestión de carteras de renta fija.

En los últimos años, el volumen negociado en activos derivados sobre tipos de interés se ha visto incrementado de forma espectacular, pero el cambio realmente importante, ha sido de tipo cualitativo. De esta forma, se ha puesto de manifiesto la necesidad de ofrecer técnicas de valoración más acorde con estos nuevos activos.

Los activos derivados sobre tipos de interés clásicos, como los *caps*, *fllors* y *swaptions*, son los denominados de primera generación. Estos derivados dependen, generalmente, de un tipo *forward* o un tipo *swap*. Para la valoración de este tipo de

[4]Existe un gran número de trabajos que postulan una relación entre la estructura temporal de tipos de interés y el crecimiento económico. Harvey (1988), a través de un modelo de valoración de activos de capital basado en el consumo, demuestra que la estructura temporal real esperada contiene información que puede ser usada para predecir el consumo futuro. Estrella y Hardouvelis (1991) muestran, empíricamente, que la diferencia entre un tipo a largo y un tipo de interés a corto plazo es un buen predictor de la actividad económica. La estructura de tipos predice no sólo la probabilidad de una recesión sino también la severidad de la misma. Estos resultados han sido confirmados por otros autores y con metodologías distintas (Plosser y Rouwenhorst (1994), Haubrich y Dombrosky (1996) y Dueker (1997), entre otros).

derivados se utiliza la solución analítica de Black 76.

Actualmente, la lista de las denominadas opciones exóticas es casi imposible de enumerar. Sin embargo, a grandes rasgos, se pueden diferenciar las opciones dependientes del tiempo (*path-dependent options*) de las opciones barrera (*barrier options*) que se suelen denominar de segunda y tercera generación, respectivamente.

Las opciones barrera pueden ser valoradas como *caps* y *fllors* que se activan o desactivan cuando un determinado tipo de interés es superior o inferior a un determinado nivel, en el momento del tiempo estipulado. Así, por ejemplo, en las *tigger notes* se activa o desactiva un *swap* asociado en función del nivel de un tipo de interés . Es importante destacar que el plazo del tipo de interés que activa o desactiva el *swap* no tiene porque coincidir con el plazo del tipo que genera los pagos en el *swap.* Si la activación o desactivación puede producirse en diferentes momentos del tiempo, la opción barrera será además *path-dependent.* Para estas opciones de segunda y tercera generación, es interesante utilizar modelos de la estructura temporal de tipos de interés que recojan, además del factor nivel, otros posibles factores como cambios de pendiente y curvatura en la curva de tipos de interés.

Por otra parte, la determinación de la dinámica de la estructura temporal permite definir medidas del riesgo, asociado a variaciones de los tipos de interés, más refinadas, lo que, evidentemente, posibilita un mejor control de la eficacia de las estrategias de gestión de carteras de renta fija.[5] En este sentido, la **duración** de una cartera es una pieza clave para su **inmunización financiera**. El teorema de la inmunización de Fisher y Weil (1971), en su formulación más simple y para carteras finalistas, exige la igualdad entre la duración de la cartera y el horizonte de planificación del inversor. Dicho de otro modo, si se liquida la cartera en su duración, la rentabilidad inicial indicativa del nivel del tipo de interés en el mercado en el momento de su constitución se mantiene, independientemente de las variaciones futuras de los tipos de interés. Sin embargo, una estrategia de inmunización como la descrita

[5]Nave, J.M. (1988), pp.103.

no tiene en consideración la dinámica en el tiempo de ambas magnitudes, duración y horizonte de planificación del inversor, hecho que puede llevar a la pérdida de la condición de cartera inmunizada. Así, se precisa de un análisis del problema de la inmunización fundamentado en estrategias dinámicas y que, en líneas generales, permitan la reestructuración continuada de la cartera a lo largo de todo el periodo de inversión, de manera que la duración de ésta se vaya ajustando al horizonte de planificación del inversor.

Este tipo de estrategias dinámicas son complejas y variadas y dependen, en buena medida, del conjunto de hipótesis que se establecen sobre el riesgo de tipo de interés. En este sentido, cabe destacar las que inciden sobre la definición de la estructura temporal y su evolución en el tiempo. La mayoría de los trabajos al respecto sólo han tomado en consideración desplazamientos paralelos de la curva y así, llevan implícitos un riesgo de inmunización, derivado de otros posibles cambios de la estructura temporal de tipos de interés. A partir de aquí, desarrollos posteriores de la inmunización financiera se han dirigido o bien a la elección de la estrategia que está menos expuesta a este riesgo de inmunización, o bien a la reducción activa de este riesgo, mediante formulaciones de la dinámica de la estructura temporal más acorde con la realidad. Dentro de esta segunda línea se han desarrollado numerosos trabajos que partiendo de modelos de ajuste de la curva de tipos suponen movimientos estocásticos de la misma (aditivos, multiplicativos o logarítmicos). No obstante, estos modelos, aparte de tener que definir explícitamente los movimientos futuros de la curva de tipos, pueden dar lugar a oportunidades de arbitraje. Por ello, en la actualidad se le da más importancia a la definición de la duración estocástica a partir de modelos dinámicos de la estructura temporal de tipos de interés, basados en la teoría de valoración por ausencia de arbitraje. De esta forma, el propio modelo, implícitamente, genera los movimientos futuros de la curva y, lo que es más importante, en el marco de un equilibrio de ausencia de oportunidades de arbitraje.

Finalmente, se destacan otras aplicaciones de la estructura temporal de tipos de interés en el ámbito financiero, como son: la construcción y contrastación de las diferentes versiones de la teoría de las expectativas, contrastación de los efectos de la fiscalidad sobre determinados instrumentos financieros, análisis del riesgo de insolvencia sobre activos financieros y construcción de modelos que analizan la existencia de arbitraje entre títulos de renta fija, entre otras.

## 1.2 Definición de las principales magnitudes

En el anterior apartado se ha definido la estructura temporal de tipos de interés como la relación funcional que informa de los tipos de interés al contado vigentes para cada plazo. Asimismo, se han identificado estos tipos de interés como rendimientos de títulos de renta fija, cupón cero o emitidos al descuento, libres de riesgo de insolvencia. Es preciso, por tanto, definir con exactitud todas estas magnitudes financieras y otras que se pueden deducir a partir de las primeras y que también van a jugar un papel de suma importancia en este análisis.

Un título de renta fija representa la obligación para el emisor o vendedor del mismo de pagar en una/s futuras/s fecha/s determinda/s una/s cantidad/es, también determinada/s, al poseedor del activo financiero. Actualmente, la modalidad de empréstito más utilizada es la denominada **americana**[6] en la que el emisor paga periódicamente cupones, con interés fijo o variable, y amortiza el título por su nominal[7] en la fecha establecida en el contrato de emisión. La periodificación anual en el pago de cupones es la más común en nuestro mercado. El mercado americano suele pagar cupones con frecuencia semestral. Otra modalidad interesante de empréstito es el **cupón cero**. Su importancia se debe más a efectos teóricos que a efectos prácticos, ya que sirve de referencia al tratarse de una operación elemen-

[6]Meneu, V., M.P. Jordà y M.T. Barreira (1994), p.68.

[7]El título también puede ser amortizado por un importe superior o inferior a su nominal si existen primas de amortización.

tal, es decir, una operación en la que tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un único capital financiero[8]. El cupón cero paga los intereses acumulados al final de la operación junto con el nominal, por lo tanto, permite la determinación de la rentabilidad de la operación de forma analítica, salvando las hipótesis restrictivas que presenta la tasa interna de rendimiento, que se obtiene de un título americano.[9]

Se ha expuesto anteriormente que los títulos de renta fija emitidos por el estado son los más adecuados para determinar la estructura temporal de tipos de interés, ya que los rendimientos asociados a estos activos financieros están más libres de riesgo de insolvencia. En el caso español, el estado emite letras del tesoro, bonos y obligaciones. Las letras del tesoro son valores de renta fija a corto plazo representados exclusivamente mediante anotaciones en cuenta. Se crearon en junio de 1987, cuando se puso en funcionamiento el Mercado de Deuda Pública en Anotaciones. Actualmente, el importe mínimo de cada petición es de 1000 euros y las peticiones de importe superior han de ser múltiples de 1000 euros. Son valores emitidos al descuento mediante subasta, por lo que su precio de adquisición es inferior al nominal del título, que el poseedor del mismo recibirá en la fecha de vencimiento. Así, la diferencia entre el precio de adquisición y el nominal del activo es el interés total que se obtiene si se mantiene la letra hasta su vencimiento. Actualmente el Tesoro emite letras a seis meses, un año y dieciocho meses. Por tratarse de valores a corto plazo, los precios de estos activos suelen variar moderadamente en el mercado secundario.

Por otra parte, los bonos y obligaciones del Estado son valores con características idénticas salvo en su plazo, que en el caso de los bonos es de tres y cinco años y en el caso de las obligaciones es de diez, quince y treinta años. Como ya se ha comentado, estos títulos pagan intereses anuales en forma de cupón y el valor nominal de cada uno de ellos es de 1000 euros, siendo el valor mínimo de negociación también de

[8]Rodríguez, A.M. (1994), p.12

[9]Rodríguez, A.M. (1994), pp.205.

1000 euros. Las emisiones de estos títulos se lleva a cabo mediante tramos sucesivos a fin de alcanzar un volumen en circulación elevado que asegure un alto grado de liquidez. Se emiten mediante subasta competitiva.

Desde julio de 1997[10], existe la posibilidad de segregación de los bonos y obligaciones del estado: son los denominados *strips* de deuda pública. Así, cada título se puede segregar en $n$ valores o *strips*, uno por cada pago del bono[11], que se negocian, cada uno de ellos, de forma individual. Con ello, se obtienen $n$ títulos cupón cero cuya fecha de vencimiento y valor de reembolso coinciden con los de los cupones y principal del activo original. Con estos nuevos títulos el estado cubre la demanda de este tipo de activo financiero, especialmente atractivo para ciertos inversores. Además, se permite hacer la operación inversa a la descrita, es decir, la reconstrucción del activo originario a partir de los bonos cupón cero procedentes de la segregación. Aunque el estado comenzó a emitir valores segregables en julio de 1997, la negociación de los *strips* resultantes no se inició hasta enero de 1998.

De esta forma, la estructura temporal de tipos de interés se podría obtener a partir de títulos de renta fija estatales, cupón cero o emitidos al descuento, cuyo precio se determina multiplicando el importe del pago que efectúa el título en su fecha de vencimiento, por la función de descuento para el plazo correspondiente al vencimiento del activo. Sin embargo, el Tesoro, como se ha comentado, sólo emite letras a 6 meses, 1 año y 18 meses y el volumen de negociación de bonos y obligaciones cupón cero del mercado secundario no es suficiente para este propósito. Aunque, como se ha constatado anteriormente, existe la posibilidad, por parte de algunos

[10](B.O.E.) 20 de Junio de 1997: esta norma autoriza el desarrollo de un nuevo instrumento de Deuda del Estado de relevancia para la financiación futura del Tesoro: los "bonos segregables". Se trata de bonos y obligaciones del Estado en los que es posible la segregación de sus cupones y el principal, dando lugar a valores de rendimiento implícito que se negocian de forma separada, así como su posterior reconstitución.

[11]Por ejemplo, en el caso de un bono a 5 años, se podrían obtener 6 *strips*: uno por cada pago de cupón anual y un sexto por el pago del nominal al cabo de 5 años.

participantes en el mercado, de crear valores de este tipo mediante la segregación de los distintos flujos de los bonos del estado. El volumen de negociación de los *strips* ha sido considerable en el año 1998, alcanzando cotas superiores a los 2000 millones de euros en los meses de abril y octubre. Así pues, estos activos proporcionan una buena fuente de estimación de la estructura temporal de tipos de interés. Ahora bien, se ha de tener presente que reciben un tratamiento fiscal diferente al resto de obligaciones no segregables emitidas por el estado, ya que los sujetos pasivos están exentos de retención sobre los cupones de bonos segregables. Ello significa que para la obtención de una estructura temporal de tipos de interés correcta no deberían mezclarse estos títulos con deuda del estado cuyos rendimientos sí que están sujetos a retenciones a cuenta.

Tradicionalmente, la estructura temporal de tipos de interés se estimaba a partir de bonos con cupón, ya que, hasta la aparición de lo *strips*, no existían activos cupón cero para vencimientos superiores al año. En este sentido, un bono que paga $n$ cupones es equivalente a una cartera compuesta por $n$ bonos cupón cero, cada uno de ellos con vencimiento coincidente con una de las fechas de pago de cupón y con principal igual al cupón, excepto el de plazo $n$, cuyo principal sería el del bono más su cupón.

A continuación se presentan todos estos conceptos considerando una economía en tiempo continuo, dado que su formalización matemática está más desarrollada.

Así, $P(t,T)$ representa el precio o valor en en $t, t \in [0\,,T]$ de una obligación cupón cero emitida por el estado que promete el pago de 1 unidad monetaria, en su fecha de vencimiento $T, T \geq t$. El valor de cualquier título de renta fija se determina actualizando hasta el momento de valoración todos los pagos que promete el título. Para el caso que nos ocupa el precio de la obligación cupón cero se determina a través de la siguiente expresión

$$P(t,T) = \exp\{-R(t,T)(T-t)\} \tag{1.1}$$

donde $R(t, T)$ es el tipo de interés vigente en $t$, para el plazo $\tau = T - t$. Este tipo de interés es el **tipo de interés al contado o spot** en $t$ para el plazo $\tau$ o, equivalentemente, el rendimiento en $t$ de la obligación cupón cero que vence en $T$.

La función $P(t, T)$ es la **función de descuento** aplicable en $t$ para el plazo $\tau$ y, por tanto, esta función es la que permite calcular el valor en $t$ de cualquier pago situado en $T$, simplemente multiplicando la cuantía del pago, por la función de descuento apropiada.

El tipo de interés al contado $R(t, T)$, para el plazo $\tau$, es el tipo de interés de capitalización compuesta continua que rige en el mercado en el instante de valoración $t$ para operaciones elementales de ese plazo discreto, que presenta naturaleza de nominal anual, y que se obtiene a partir del precio de la obligación cupón cero, a través de

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} \tag{1.2}$$

Estos tantos de interés son la forma más habitual de presentar la estructura temporal de tipos de interés y como se ha visto, se corresponden con rendimientos de obligaciones cupón cero libres de riesgo de insolvencia. De ahí que la estructura temporal de tipos de interés se denomine curva de tipos de interés al contado o curva cupón cero. En la anterior expresión se puede observar que fijando el instante de valoración $t$ y dando diferentes valores al vencimiento de la obligación $T$, se obtiene la curva de tipos de interés al contado. La forma de esta curva dependerá de la estructura de mercado de los precios de las obligaciones cupón cero.

En la modelización de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés aparece un tipo de interés al contado de suma importancia: el **tanto de interés instantáneo**, $r(t)$, que es un tipo de interés nominal *spot*, de capitalización compuesta continua, vigente en $t$ para un plazo infinitesimal de tiempo $dt$ y que, evidentemente, se corresponde con

$$r(t) = \lim_{T \longrightarrow t} R(t,T) \tag{1.3}$$

Este tanto se puede interpretar como el rendimiento de la obligación cupón cero que vence en el mismo instante de observación de la estructura temporal, es decir $r(t) = R(t\,,\,t)$.

Aplicando la definición del tanto de interés instantáneo y resolviendo por la regla de L'Hôpital la indeterminación que surge al calcular el límite, se llega a

$$r(t) = \lim_{T \longrightarrow t} -\frac{\ln P(t\,,\,T)}{T-t} =$$

$$= \lim_{T \longrightarrow t} \frac{-\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}}{P(t\,,\,T)} = -\frac{\partial P(t\,,\,t)}{\partial t} \tag{1.4}$$

El tipo de interés instantáneo en $t$ indica cómo varía en el tiempo el precio de la obligación que vence en ese mismo instante.

Por otra parte, en la estructura temporal de tipos de interés esta implícita la estructura de **tipos de interés *forward* o tantos de interés a plazo**. El tipo de interés *forward* de capitalización compuesta continua, vigente en $t$, el momento actual de valoración y que regirá en $T$ para un plazo futuro discreto $\Delta t$, $f(t,T,T+\Delta t)$, se determina a partir de

$$P(t\,,\,T+\Delta t) = P(t\,,\,T)\cdot \exp\left\{-f(t\,,\,T\,,\,T+\Delta t)\Delta t\right\} \tag{1.5}$$

resultando

$$f(t\,,\,T\,,\,T+\Delta t) = \frac{-\ln \frac{P(t,T+\Delta t)}{P(t,T)}}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{\ln P(t\,,\,T+\Delta t) - \ln P(t\,,\,T)}{\Delta t} \tag{1.6}$$

De esta forma, se puede definir el **tipo de interés** *forward* **instantáneo**, $f(t\,,T)$ como el tipo de interés implícito en $t$, aplicable en $T$ para un plazo infinitesimal $dt$. Este tanto se determina a partir del cálculo del siguiente límite

$$f(t\,,T) = \lim_{\Delta t \longrightarrow o} f(t\,,T\,,T+\Delta t) \tag{1.7}$$

y resolviendo por la regla de L'Hôpital la indeterminación del anterior límite se obtiene

$$f(t\,,T) = \frac{-\frac{\partial P(t\,,T)}{\partial T}}{P(t\,,T)} \tag{1.8}$$

El tipo de interés *forward* instantáneo se define a través de la anterior relación que es la definición de la derivada elástica de la función de descuento respecto al plazo hasta el vencimiento y, por tanto, informa del crecimiento de la función $P(t\,,T)$, en términos porcentuales.

A partir de la definición del tipo de interés *forward* instantáneo se llega a la siguiente expresión para el precio de la obligación cupón cero

$$f(t\,,T) = \frac{-\frac{\partial P(t\,,T)}{\partial T}}{P(t\,,T)} = -\frac{\partial \ln P(t\,,T)}{\partial T}$$

$$\int_t^T -f(t\,,s)ds = \int_t^T \mathrm{d}\ln P(t\,,s)ds = \ln P(t\,,T)$$

$$P(t\,,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t\,,s)ds\right\} \tag{1.9}$$

Así, si

$$P(t,T) = \exp\left\{-R(t,T)(T-t)\right\}$$

y

$$P(t\,,\,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t\,,\,s)ds\right\}$$

entonces

$$\exp\left\{-R(t,T)(T-t)\right\} = \exp\left\{-\int_t^T f(t\,,\,s)ds\right\} \tag{1.10}$$

y aplicando logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad

$$R(t,T)(T-t) = \int_t^T f(t\,,\,s)ds$$

y derivando, se llega a

$$\frac{\partial R(t\,,\,T)}{\partial T}(T-t) + R(t\,,\,T) = f(t\,,\,T) \tag{1.11}$$

A partir de esta expresión se deducen dos relaciones muy importantes. Por un lado, la misma expresión informa que el tipo de interés *forward* instantáneo es una función lineal del plazo, de manera que el tipo *forward* vigente en $t$ y aplicable en $T$ para el plazo $dt$ es el tipo de interés al contado vigente en $t$ para el plazo discreto $T - t = \tau$, más la variación de este tanto respecto al plazo, por el plazo discreto $\tau$.

Por otro lado, si de la anterior expresión se despeja la variación del tipo de interés al contado respecto al plazo hasta el vencimiento, se llega a

$$\frac{\partial R(t\,,\,T)}{\partial T} = \frac{f(t\,,\,T) - R(t\,,\,T)}{T-t} \tag{1.12}$$

La derivada de la curva de tantos de interés al contado respecto al plazo hasta el vencimiento indica que la variación en el tiempo de la estructura temporal de tipos de interés esta ligada a los tantos *forward* a través de la anterior expresión. En líneas generales se puede afirmar que cuando el tanto de interés *forward* instantáneo, aplicable en T, sea superior al tipo de interés al contado para un plazo $\tau$, la curva de tipos de interés será una función creciente respecto al plazo y cuando el *forward* instantáneo sea inferior al tipo al contado, la estructura temporal de tipos de interés será decreciente respecto al plazo hasta el vencimiento.

## 1.3 Teorías clásicas sobre la estructura temporal de tipos de interés

Las teorías sobre la estructura temporal de tipos de interés intentan explicar las relaciones entre los rendimientos de las obligaciones cupón cero libres de riesgo, de todos los vencimientos. Es decir, se pretende analizar la relación existente entre los tipos de interés al contado libres de riesgo y el plazo al cual se refieren.

La primeras modelizaciones de la estructura temporal se centraron en las relaciones entre los tipos de interés *forward*, que están implícitos en la estructura temporal de tipos de interés, y los tipos de interés al contado esperados para un momento futuro. Así la versión de la **hipótesis pura de las expectativas** afirma que los tantos *forward* actuales son los tipos *spot* futuros esperados. En contraste con esta hipótesis, la **hipótesis de la preferencia por la liquidez** argumenta que los tantos *forward* siempre exceden de los correspondientes tipos *spot* futuros en una prima de liquidez, que requieren los agentes como compensación por el mayor riesgo de capital inherente en las obligaciones a largo plazo.

La **hipótesis de la segmentación de mercado** supone que no hay una relación sistemática entre los rendimientos de los activos de plazos distintos, puesto que se configuran como instrumentos negociados en mercados independientes. Los tipos de interés para cada vencimiento se determinan por la oferta y demanda de fondos de ese vencimiento.

Por último, **la teoría del hábitat preferido**, de la que la teoría de la preferencia por la liquidez es un caso particular, constituye un análisis mucho mas complejo, puesto que considera que los agentes de la economía presentan cierta adversión al riesgo y, por tanto, prefieren invertir y endeudarse en el plazo de su hábitat. Así esta teoría de la estructura temporal de los tipos de interés surge como una versión modificada de la teoría de la prima de la liquidez, ya que permite que la prima de liquidez de los bonos a largo plazo sea tanto positiva como negativa, reconociendo de esta forma que las obligaciones a largo plazo no son, necesariamente, más arriesgadas que las obligaciones a corto plazo para los inversores que tienen un horizonte de inversión a largo plazo. Por esta razón los precios de las obligaciones de los diferentes vencimientos están relacionados con las preferencias de los inversores con respecto a sus horizontes de inversión. Según esta teoría los tipos *forward* no presentan unas relaciones sistemáticas con respecto a los tipos de interés futuros esperados.

A continuación se van a analizar, con un poco más de detalle, estas teorías tradicionales de la estructura temporal de tipos de interés que constituyen el antecedente de las actuales teorías de la estructura temporal.

En estas teorías y para la determinación de la estructura temporal de tipos de interés se consideran 4 factores básicos (Ezquiaga Domínguez, I. (1990)):

- el riesgo
- el hábitat o periodo en que un inversor dispone de fondos prestables o en que un prestatario precisa de recursos
- las expectativas
- la incertidumbre

Las combinaciones de las diversas consideraciones que pueden hacerse sobre estos elementos configuran los distintos enfoques de las teorías clásicas de la estructura de tipos de interés. Por otra parte, todas estas teorías, que no intentan más que justificar las diferencias de rendimientos entre activos de renta fija cupón cero a plazos distintos, buscan respuesta a dos cuestiones:

1. determinar si existen primas de riesgo o de liquidez para compensar al inversor que renuncia a su hábitat en busca de una mayor rentabilidad
2. determinar si las expectativas que forman los agentes son racionales.

### 1.3.1 El enfoque de las expectativas puras

Este enfoque se basa en la idea central de que las expectativas sobre los futuros tipos de interés al contado a corto plazo tienen una influencia directa sobre los tipos de interés al contado a largo plazo. Es decir, la estructura temporal de tipos de interés se explica sólo en función de los tipos de interés futuros esperados por el consenso del mercado.

La versión pura de la hipótesis de las expectativas está formulada en un contexto de total certidumbre acerca de los futuros tipos de interés y en este contexto y en ausencia de costes de transacción, el tipo de interés *forward* para un determinado plazo debe coincidir con el futuro tipo de interés al contado para ese mismo plazo. Cualquier desviación entre estos dos tantos daría lugar a oportunidades de arbitraje que llevarían a una reducción de esta diferencia.

Los participantes en el mercado son indiferentes al riesgo[12] y, por tanto, no están sujetos a su hábitat, ni aprecian cambios en el nivel de incertidumbre existente en el mercado. En el contexto de las teorías tradicionales de la estructura temporal de tipos de interés, la incertidumbre hace referencia al grado de dificultad que encuentran los agentes de mercado en preveer el comportamiento de las variables relevantes

[12]Cox, Ingersoll y Ross (1985a) prueban que no es necesaria la neutralidad al riesgo para la formulación de las expectativas puras.

en el futuro, es decir, el grado de dificultad en formar sus expectativas en un mercado eficiente.

Según este enfoque de la teoría de las expectativas, los agentes toman posiciones en títulos a corto y largo plazo, sólo en función de sus propias expectativas, y el hecho de que existan diferentes tipos asociados a un mismo plazo se explica porque el consenso del mercado es resultado de las distintas opiniones sobre la evolución futura de los tipos de interés.

Así, los tipos de interés forward reflejan exactamente los tipos de interés esperados para un momento futuro

$$f(t\,,T) = \mathrm{E}_t[r(T)] \tag{1.13}$$

y, por tanto, los tipos de interés a largo plazo se pueden concebir como algún tipo de media de los tipos a corto plazo vigentes en el futuro; de ahí que las expectativas sobre estos tipos influyan en la forma que adopta la estructura temporal de tipos de interés en cada momento.

Ahora bien, esta versión de la hipótesis de las expectativas se basa en la total ausencia de incertidumbre acerca de los futuros tipos de interés. Cuando se relaja esta hipótesis surgen diferentes versiones de este enfoque, que se tratan en otras secciones de esta tesis[13].

Concluyendo se puede afirmar que la teoría pura de las expectativas afirma que cuando la forma de la curva de tipos es creciente es indicativo de que existen unas expectativas de subida de los tipos de interés a corto plazo y cuando la forma de la curva es decreciente, es señal de que existe la expectativa de que los tipos de interés a corto plazo bajen. Por último, una estructura plana es indicativo de un consenso

[13] Ver capítulo 2, apartado 4.

de estabilidad de los actuales niveles de los tipos de interés.[14]

Esta teoría fue desarrollada en sus inicios por Fisher (1896) y posteriormente, otros autores continuaron la misma línea, entre ellos cabe destacar: Lutz (1940), Wherle (1958), Malkiel (1962) y Michaelsen (1963).

### 1.3.2 El enfoque del hábitat preferido

Los agentes participantes del mercado tienen cierta adversión al riesgo que condiciona sus estrategias de inversión, de manera que tienden a adoptar posiciones concordantes con su hábitat, es decir, invierten o se endeudan al plazo de su hábitat. Sin embargo, como su adversión al riesgo no es total, toman posiciones diferentes de sus horizontes de inversión, siempre y cuando estas posiciones ofrezcan unas compensaciones vía primas de riesgo. Por ello, como factores determinantes de la estructura temporal de tipos de interés se consideran el nivel de incertidumbre y de expectativas.

Modigliani y Sutch (1966) trabajaron en este enfoque y argumentaron que de acuerdo a esta teoría, las primas de riesgo pueden ser tanto positivas como negativas y su valor absoluto dependerá del nivel de incertidumbre existente en cada momento en el mercado. La explicación de la estructura temporal que ofrece la teoría del hábitat preferido es compleja y requiere de un análisis exhaustivo de la oferta y demanda de activos por plazos.

La **teoría de la preferencia por la liquidez** es un caso particular de este enfoque, cuando se supone que existen primas de riesgo siempre positivas, porque se considera que los agentes son adversos al riesgo y siempre prefieren la liquidez y el corto plazo. Así, los agentes reciben unas primas de liquidez para afrontar el riesgo inherente en sus inversiones a largo plazo. Por tanto, los tipos *forward* son superiores a los tipos de interés a corto plazo esperados en el futuro, porque existe

[14]Meneu, V., E. Navarro y M.T. Barreira (1992), pp.33.

una prima de riesgo siempre positiva

$$f(t\,,T) > \mathrm{E}_t[r(T)]\,. \tag{1.14}$$

Los tipos *forward* contienen dos componentes, un tipo de interés al contado esperado para el futuro y la correspondiente prima de riesgo de liquidez. Numerosos trabajos afirman que ésta aumenta, a una tasa decreciente, con el plazo al que está referida.

Para finalizar, esta teoría de la preferencia por la liquidez interpreta una estructura de tipos de interés creciente con unas expectativas sobre los futuros tipos de interés iguales a los actuales, mientras que si se espera una bajada de los futuros tipos de interés, la estructura temporal presentaría una forma decreciente. La forma creciente de la curva de tipos está también relacionada con unas expectativas de subida de los tipos de interés al contado.[15]

### 1.3.3 El enfoque de la segmentación

Esta teoría supone que no existe una relación sistemática entre los rendimientos de activos de plazos distintos, que se determinan a partir de la igualdad entre la oferta y la demanda de los mismos, para cada uno de los plazos.

La adversión al riesgo es total y los agentes de mercado hacen coincidir el plazo de sus inversiones con sus hábitats. Así, en la evolución de los tipos de interés no influyen ni las expectativas ni los cambios que se puedan considerar en el nivel de incertidumbre. En este contexto, la estructura temporal no se determina en un mercado único, sino que se considera que éste está segmentado en función de los plazos. En cada segmento tiene lugar un proceso independiente de determinación de precios, que tiene en cuenta la oferta y demanda de cada plazo concreto, así

[15]Meneu, V., E. Navarro y M.T. Barreira (1992), pp.34-35.

como los impedimentos y rigideces en los movimientos de fondos en los diferentes mercados.

Aunque quizá es de las versiones menos estudidas de la teoría de las expectativas (Culberston (1957), Fama (1984), Mankiw y Summers (1984)) puede llegar a explicar ciertas diferencias entre plazos cortos y largos.

## 1.4 Planteamientos actuales de la estructura temporal de tipos de interés

Las distintas versiones tradicionales de la hipótesis de las expectativas intentan explicar la estructura temporal de tipos de interés. Estos enfoques alternativos se han presentado como teorías, pero de hecho no constituyen resultados conclusivos de un modelo de equilibrio de la estructura temporal. En realidad obtienen las diversas relaciones entre los rendimientos de los activos considerando ciertas hipótesis sobre adversión al riesgo, relevancia de las expectativas de los agentes, grado de dificultad en formar estas expectativas y consideraciones sobre el hábitat de los inversores. Pero, la explicación de la estuctura temporal de tipos de interés no se efectúa en un modelo de equilibrio que tenga en cuenta los diversos factores de riesgo que pueden actuar en la determinación de los tipos de interés al contado.

Las denominadas teorías tradicionales de la estructura temporal de tipos de interés están formuladas, básicamente, en un ambiente determinista. En la década de los setenta las turbulencias de los mercados financieros pusieron de manifiesto la necesidad de desarrollar el análisis de la estructura temporal en un entorno estocástico. Teniendo en cuenta que una de las principales aplicaciones de la estructura de tipos es la valoración de activos derivados sobre tipos de interés, podría parecer natural extender los modelos intertemporales de valoración de activos de capital o de los primeros modelos de valoración de opciones (Black and Scholes (1973)), a la determinación de la curva de tipos. Sin embargo, una teoría de la estructura temporal de tipos de interés no constituye una extensión de un modelo de valoración de activos de capital, porque el riesgo de los activos derivados sobre tipos de interés no se puede diversificar de la misma forma que el riesgo de la renta variable. La renta fija presenta rendimientos altamente correlacionados. Por otra parte, la fórmula de valoración de opciones de Black and Scholes no se puede extender, directamente, a la valoración de activos derivados sobre tipos de interés, porque el riesgo de mercado no está asociado a un activo financiero, sino a un tipo de interés al contado.

Así, surgen teorías propias de la estructura temporal de tipos de interés, que se basan en modelos de valoración por ausencia de oportunidades de arbitraje y que, en un entorno estocástico, determinan la dinámica de la estructura de tipos.

En este punto, es útil recordar que los modelos que explican la relación entre tipos de interés y plazo, se agrupan en dos bloques bien diferenciados:

1. **Modelos estáticos**, que son modelos de ajuste a través de los cuales y para un instante determinado, se estima la relación tipo de interés-plazo.

2. **Modelos dinámicos** o modelos que incorporan la componente momento de valoración de la estructura temporal y que analizan, para un horizonte temporal determinado, la evolución de la relación tipo de interés y plazo.

Este trabajo centra la atención en los modelos dinámicos de la estructura temporal de tipos de interés. En ellos se efectúa el estudio dinámico de las relaciones entre los rendimientos de obligaciones cupón cero, libres de riesgo, de diferentes vencimientos, en un contexto de incertidumbre y, en la mayoría de los casos, en una economía en tiempo continuo. Para introducir las magnitudes financieras que intervienen en esta modelización, en la siguiente sección se realiza un análisis descriptivo de las mismas, bajo las hipótesis de continuidad e incertidumbre.

## 1.5 Modelización de variables económicas en tiempo continuo y bajo incertidumbre

Para determinar la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés la mayoría de los modelos consideran como variable dependiente el precio de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia, que paga una unidad monetaria a su vencimiento $P(t\,,T)$. Con la determinación de esta función y a partir de la transformación oportuna, se puede deducir la curva de tipos al contado $R(t\,,T)$, así como la curva de tipos *forward* $f(t\,,T)$.

En el actual contexto de los modelos dinámicos de la estructura temporal, se considera que el precio de la obligación cupón cero en cada instante, depende del vencimiento de la obligación y de un vector de variables de estado

$$\vec{v}(t) = \{v_1(t)\,,\, v_2(t)\,,\, \dots\,,\, v_s(t)\} \tag{1.15}$$

cuyas componentes representan las fuentes de incertidumbre y, por tanto, de riesgo existentes en el mercado.

De esta forma, el precio de la obligación cupón cero, así como los tantos al contado y los *forward*, se reescriben para indicar su dependencia de los factores de riesgo del modelo

$$\begin{aligned} P(t\,,T) &\longrightarrow P(t\,,\vec{v}(t)\,,T) \\ R(t\,,T) &\longrightarrow R(t\,,\vec{v}(t)\,,T) \\ f(t\,,T) &\longrightarrow f(t\,,\vec{v}(t)\,,T) \end{aligned}$$

El precio de la obligación, así como las demás funciones, varía no sólo por el vencimiento que se considere, sino también por los cambios de estas variables de estado que reflejan el estado de la economía en cada instante.

Las variables de estado que denotan los factores de riesgo de los modelos dinámicos de la estructura de tipos son, como se ha indicado en la notación que se les ha dado, variables temporales. En este sentido, se cree conveniente analizar, en líneas generales, la modelización de este tipo de variables dentro de la metodología que nos ocupa.

La modelización de la evolución en el tiempo de los factores determinantes de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, evidentemente, se puede efectuar en tiempo discreto o en tiempo continuo. La mayoría de los modelos, así como el modelo que se propone en el tercer capítulo de esta tesis, se desarrollan en tiempo continuo, por ello, el análisis que se va a presentar a continuación se enmarca en una economía en tiempo continuo.

La dinámica determinista de una cierta variable que varía en el tiempo, $v(t)$[16], puede ser descrita por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(t\,,\, v(t)) \tag{1.16}$$

ecuación diferencial de primer orden que relaciona una función de la variable con su variación o primera derivada respecto del tiempo, con $t \in [0\,,\, T]$ y con condición inicial $x(0) = x_0$, que proporciona la solución particular de la anterior ecuación diferencial.

Esta ecuación recoge la trayectoria determinista de evolución de la variable, es decir, describe la evolución continua de la variable $v(t)$ en el tiempo, a través de una función $f(t\,,\, x(t))$ que denota la tendencia determinista de la variable o variación esperada de la variable, en cada instante, por el paso del tiempo.

En el actual contexto de los modelos dinámicos de la estructura temporal, la evolución en el tiempo de ésta, se efectúa bajo la hipótesis de existencia de incertidumbre, por ello, la anterior ecuación se reescribe para considerar que la dinámica

[16] Para simplificar el análisis y sin perder por ello generalidad, se considera una sola variable de estado o factor de riesgo en la determinación de la estructura temporal.

de la variable no queda explicada, únicamente, por una tendecia derminista, sino que la variable, en cada instante, varía también por *shocks* aleatorios implícitos a la incertidumbre existente en este tipo de modelizaciones. Así, en la anterior ecuación se puede introducir la incertidumbre, afectando a la dinámica de la variable a través de un proceso estocástico de Wiener[17] con una función $\sigma(t\,,\,v(t)) > 0$, resultando

$$dv(t) = f(t\,,\,v(t))dt + \sigma(t\,,\,v(t))dz(t) \tag{1.17}$$

[17]Un proceso de Wiener o movimiento browniano estándard $\{z(t\,,\,\omega)\,,\,t \in [0\,,\,\infty)\,,\,\omega \in \Omega\}$, que para simplificar la notación se reescribe $z(t)$, es un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega\,,\,\Im\,,\,P)$ que cumple las siguientes propiedades (Malliaris, A.G. (1982), pp.36-37):

1. $z(0) = 0$, por convención se asume que el proceso empieza en 0.

2. $z(t)$ es un proceso con incrementos estacionarios e independientes; es decir, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ son momentos de tiempo, para $H \in \Re^1$:

$$P\left[z_{t_i} - z_{t_{i-1}} \in H_i \text{ para } i \leq n\right] = \prod_{i \leq n} P\left[z_{t_i} - z_{t_{i-1}} \in H_i\right] \;,$$

   lo que significa que la probabilidad de la intersección de sucesos es igual al producto de las probabilidades de los mismos. Además, debido también a la independencia de los incrementos, el proceso de Wiener es un proceso Markov. La historia pasada del proceso no influye en su evolución futura, de manera que el comportamiento futuro del proceso depende sólo de su estado actual y no de cómo se ha llegado hasta él.

3. Para $0 \leq s < t$, el incremento $z_t - z_s$ tiene la siguiente distribución

$$P\left[z_t - z_s \in H\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_H \exp\left[-\frac{x^2}{2(t-s)}\right] dx$$

   lo que equivale a decir que cada incremento se distribuye de forma normal con media 0 y varianza $\nu^2(t-s)$. Si se asume que $\nu^2 = 1$, el proceso está estandarizado y así la varianza del proceso es $t-s$.

ecuación diferencial estocástica[18] a menudo denominada **ecuación diferencial de Itô**, con condición inicial $v(0) = v_0$[19] y $t \in [0\,, T]$, ya que si $dz(t)$ es un proceso estocástico, $dv(t)$ también es un proceso estocástico porque es una transformación de $dz(t)$.

Así, la dinámica de la variable $v(t)$ queda explicada por una tendencia determinista $(f(t\,, v(t)))$ y por una componente estocástica que con una función $\sigma(t\,, v(t))$ recoge los *shocks* del proceso de Wiener sobre la evolución de la variable $v(t)$. El proceso estocástico definido por la anterior ecuación diferencial estocástica se denomina

---

Además, el proceso de Wiener, que queda definido de forma axiomática a través de las tres anteriores propiedades y que también se puede definir como límite del camino aleatorio discreto, es un proceso de trayectorias continuas y no diferenciables.

El proceso de Wiener $z(t)$ se puede representar en su forma diferencial $dz(t)$ o como la integral estocástica del proceso estocástico ruido blanco

$$z(t) = \int_0^t d\xi(s)ds$$

con lo que la diferencial del proceso de Wiener es

$$dz(t) = \xi(t)dt$$

siendo $\xi(t)dt$ una expresión simbólica en la que $\xi(t)$ es un ruido blanco o proceso gaussiano estándard. Cabe destacar que la representación diferencial del proceso de Wiener es la más utilizada en la literatura financiera.

[18]Si se considera un espacio de probabilidad $(\Omega\,, F\,, P)$ en el que el proceso estocástico $v(t)$ y el proceso de Wiener $dz(t)$ están definidos, para $\omega \in \Omega$ y $t \in [0\,, T]$, la anterior ecuación toma la siguiente notación

$$dv(t\,, \omega) = f(t\,, v(t\,, \omega))dt + \sigma(t\,, v(t\,, \omega))dz(t\,, \omega)$$

pero para simplificar la notación se suele obviar la dependencia de estos procesos estocásticos de los elementos del conjunto de estados.

[19]Evidentemente, $v(0)$ es una variable aleatoria, pero se asume la hipótesis de que el valor al inicio de esta variable aleatoria es una constante $v_0$.

**proceso de difusión** o proceso de Markov con trayectorias continuas.

Por último, cabe destacar en este punto que el precio de la obligación cupón cero, así como los tipos al contado y los tipos *forward* al ser funciones de las variables de estado, son procesos estocásticos porque resultan de las transformaciones de los procesos estocásticos representativos de las variables del modelo. Así

$$\begin{aligned} P(t\,,\vec{v}(t)\,,T) &\longrightarrow P(t\,,\vec{v}(t)\,,T\,,\omega) \\ R(t\,,\vec{v}(t)\,,T) &\longrightarrow R(t\,,\vec{v}(t)\,,T\,,\omega) \\ f(t\,,\vec{v}(t)\,,T) &\longrightarrow f(t\,,\vec{v}(t)\,,T\,,\omega) \end{aligned}$$

estas funciones denotan su dependencia del espacio de probabilidad $(\Omega\,,\Im\,,F_t\,,P)$, con $\omega_i \in \Omega$, el conjunto finito de sucesos posibles, $\Im$ la $\sigma$-álgebra o conjunto de sucesos medibles, $F_t$ la filtración generada por el movimiento browniano de orden $s$ y $P$ es una medida de probabilidad.

## 1.6 Modelos estáticos de la estructura temporal de tipos de interés

Dentro del ámbito de estudio de la estructura temporal, en los últimos años han adquirido una importancia creciente los modelos dinámicos de la curva de tipos de interés. Sin embargo, los modelos de ajuste de la curva tipo-plazo son fundamentales, tanto por sus aplicaciones específicas como por su utilización en los modelos dinámicos, ya que permiten la cuantificación de las variables explicativas de éstos. En particular, existe una línea de modelos dinámicos que toman como dada la curva actual y a partir de ella modelizan su evolución en el tiempo, en el marco de un modelo de valoración financiera estocástica. Para este tipo de modelos, denominados consistentes[20], es primordial el conocimiento de la relación tipo de interés-plazo.

[20] Esto modelos se explican en el capítulo 2, apartado 3.

Pero además, y teniendo en cuenta que en el mercado no son observables todos los tipos de interés al contado para todos los vencimientos, para el resto de modelos dinámicos también es fundamental la determinación estática de la estructura temporal como *input* en la estimación y, principalmente, en la contrastación de los modelos.

Sin pretender entrar de forma exhaustiva en el ámbito de los modelos estáticos de la estructura temporal, se cree interesante efectuar un pequeño resumen de los principales métodos de ajuste de la curva de tipos de interés, para conocer, en líneas generales, las principales técnicas que se aplican para la determinación de los tipos al contado, para todos los vencimientos, y las principales funciones que los expresan.

Existe un gran abanico de modelos de ajuste de la curva y, así, una gran diversidad de criterios de clasificación de los mismos. Siguiendo a Morini, S.(1998), se propone la siguiente clasificación:

1. Modelos no econométricos, que extraen tipos implícitos en precios de activos financieros a partir de técnicas recursivas.

2. Modelos de rendimientos, que parten de la curva de la tasa interna de rentabilidad.

3. Modelos de precios, que derivan los tipos de interés al contado a partir de los precios de los títulos de renta fija.

Los **modelos no econométricos** son los más sencillos, pero no presentan un grado de ajuste satisfactorio. Proporcionan información discreta y, por tanto, para obtener la estructura para un continuo de plazos, se deben aplicar técnicas de interpolación. Se basan en procedimientos iterativos y se suelen aplicar directamente sobre cotizaciones de títulos de renta fija o de activos derivados que se negocian en el mercado. De esta forma, estos métodos no econométricos se suelen clasificar según el instrumento financiero utilizado.

- **Títulos de renta fija**

Si se tiene un total de $n$ bonos[21] y, por tanto, $n$ ecuaciones de precios[22] y un total de $n$ fechas de pago, los tantos de interés al contado $R(t\ ,\ T_i)\ ,\ i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ n$, son solución de este conjunto de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas, dado que precio, cupón y fechas de pago son variables conocidas. Este sistema puede resolverse fácilmente de forma recursiva: es el denominado método *bootstrapping* para la determinación de la estructura temporal. Ahora bien, para disponer de tal sistema es necesario que uno de los títulos tenga un solo pago pendiente (o dos títulos que venzan en la misma fecha tengan dos pagos pendientes...), que los bonos considerados tengan todos las mismas fechas de pago de cupón y que en cada una de estas fechas venza algún bono. Estos requisitos hacen que esta técnica no sea aplicable en el mercado español ya que no existen títulos suficientes para disponer de la muestra deseada. En el mercado español existen una media de 12 bonos diarios. En mercados como el alemán, donde el

[21]Cada título de renta fija puede ser equiparado a una cartera compuesta por títulos cupón cero, cuyas fechas de vencimiento coinciden con las fechas de pago de cupón de los mismos.

[22]La ecuación del precio del bono $j$-ésimo en $t$, $P_j(t)$ es

$$P'_j(t) + cc_j(t) = c_j \sum_{i=1}^{v}(1 + R(\tau_{ij}))^{-\tau_{ij}} + 100(1 + R(\tau_{ij}))^{-\tau_{ij}} \qquad j = 1\ ,\ \ldots\ ,\ n$$

donde

$j = 1\ ,\ \ldots\ ,\ n$ denota el bono correspondiente, siendo el bono 1 el de menor vida y el bono $n$ el de mayor vida.

$P'_j(t)$ es el precio en base 100 en $t$, momento actual, del bono $j$-ésimo ex-cupón.

$cc_j(t)$ es el cupón corrido desde la fecha que se cobró el último cupón hasta $t$.

$c_j$ es el cupón de bono $j$.

$\tau_{ij}$ es el periodo de tiempo expresado en años entre $t$ y la fecha de pago del cupón $i$ ($i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ v$), para el bono $j$.

$R(\tau_{ij})$ es el tipo de interés al contado para el plazo $\tau_{ij}$.

número medio de bonos que cotizan diariamente asciende a 130, el método de *bootstrapping* es aplicable. En el mercado americano también se utiliza este método.

- **FRA's**

Los FRA's son contratos a plazo de tipos de interés y surgen del acuerdo entre dos partes, que mantienen posiciones en el mercado cuya reacción es contraria ante la evolución de los tipos de interés. Ambas partes intentan neutralizar el impacto de cambios en los tipos de interés, intercambiando sus repercusiones. Como son tipos que se negocian en el mercado se puede aplicar un método iterativo para obtener tipos FRA's de otros plazos, pero existe el problema de que sólo se disponen de tipos FRA's para el corto plazo.

- **Swaps**

Los *swaps* de tipos de interés son contratos de permuta financiera de intereses. A través de estos instrumentos se acuerdan intercambios de dos flujos de pagos por intereses sobre un mismo nominal, a lo largo de un periodo de tiempo determinado. Para nuestro propósito interesan los *Coupon Swaps*, tipo fijo contra tipo variable, ya que la parte fija del mismo equivale a un bono a la par, emitido el día en que se negocia el *swap*, con una vida igual a su plazo y tasa interna de rentabilidad y cupón igual al tipo fijo del *swap*. Así, si se dispone de tipos *swaps* para un conjunto de plazos consecutivos, es posible obtener la estructura temporal a partir de un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas, a través de un procedimiento iterativo.

- **Futuros**

En este caso y también con algún método iterativo es posible obtener tipos de interés al contado a partir de precios de los contratos de futuros sobre tipos de interés.

Los **modelos de rendimientos** utilizan las tasas internas de rendimiento de títulos financieros como aproximaciones de los tipos de interés al contado. Su principal ventaja reside en su simplicidad pero, evidentemente, la rentabilidad de un título que no sea cupón cero, no se puede identificar con un tipo de interés al contado. Además, la relación entre la curva de rendimientos y la curva de tipos al contado es compleja y más aún si se tiene presente toda la problemática que entraña la determinación de la T.I.R., en valores con pago periódico de cupones[23]. De esta forma, existe una diferencia, debida al efecto del cupón, entre la curva de tipos y la curva de rendimientos, habitualmente, denominada sesgo del cupón. La curva de rendimientos subestima cuando es creciente y sobreestima cuando es decreciente, la verdadera estructura de tipos de interés, aumentando el sesgo con el vencimiento y el importe del cupón.[24]

Dentro de esta metodología de ajuste de la curva, se destacan los siguientes modelos: Cohen, Kramer y Waugh (1966), Fisher (1966), Bradley y Crane (1973), Echols y Elliot (1976), Analistas Financieros Internacionales (1993) y Hunt (1995a).

En los **modelos de precios** se emplean las técnicas matemáticas de aproximación de funciones para ajustar, directamente, la curva de tipos de interés al contado. De esta forma, se emplean tipos de interés *spot* libres de riesgo y a través de formulaciones alternativas, la mayoría de estos modelos ajustan la función de descuento. Las técnicas matemático-econométricas más utilizadas son los *splines* y polinomios.

Existen numerosos modelos propuestos en este ámbito, de entre los que destacamos, por orden cronológico: McCulloch (1971-1975), Schaefer (1981), Fong y Vasicek (1982), Carleton, Chambers y Waldman (1984), Shea (1984), Nelson y Siegel

[23]Rodríguez, A.M. (1994), pp.205. y Morini, S. (1998).

[24]Fontanals, H. y Galisteo, M. (1995), pp.25-37.

(1987), Steeley (1991), Contreras y Navarro (1993), Svensson (1994) y Hunt (1995b).

Dado el objetivo de esta tesis doctoral, no se cree adecuado incluir la exposición de todos estos modelos de ajuste de la estructura temporal. Sin embargo, y ya que en el último capítulo de esta tesis se utilizan datos procedentes de dos de estos modelos, sí que se cree conveniente destacar, brevemente, sus principales características.

Los modelos empleados en el capítulo de aplicación empírica de esta tesis son el **método de Nelson y Siegel** y el **método de Svenson.** A partir de ellos se obtienen tipos de interés al contado y precios de obligaciones cupón cero, para la estimación del modelo dinámico de la estructura temporal propuesto en esta tesis doctoral.

Ambos métodos estiman la función de descuento, exigiendo de ésta que sea una función monótonamente decreciente, positiva, que sea igual a la unidad para un plazo nulo y que se anule para un plazo infinito.

Por su parte, el método de Nelson y Siegel (1987) supone que los tipos de interés *forward* son asintóticos a un cierto nivel, lo que implica que estos tipos de interés *forward* sean casi idénticos para plazos muy elevados. Esta condición se cumple si el tipo *forward* instantáneo, que Nuñez, S. (1995) simboliza por $\varphi_m$, es la solución de una ecuación diferencial de segundo orden en $m$, con raices reales iguales, es decir

$$\varphi_m = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau} \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)$$

donde $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ y $\tau$ son los parámetros a estimar.

De esta forma, integrando la anterior ecuación entre 0 y $m$ y dividiendo por $m$, se obtiene el correspondiente tipo de interés al contado en capitalización continua y para un plazo de $m$ años, $r_m$

$$r_m = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\tau}{m}\left(1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)\right) - \beta_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) \tag{1.18}$$

La función de descuento en el momento de observación $t$, $d_t(m)$, y los tipos de interés al contado de capitalización continua se relacionan a través de

$$d_t(m) = \exp\left(-mr_m^t\right)$$

por ello, en este método se llega a la siguiente función de descuento

$$d(m) = \exp\left[-\beta_0 m - (\beta_1+\beta_2)\tau\left(1-\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)\right) + \beta_2 m\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)\right]$$

La ecuación que se estima es el precio de la obligación en la que aparece la anterior función de descuento, ya que el precio de la obligación se expresa como el valor de todos los pagos que promete el título, actualizados, precisamente, a través de la función de descuento obtenida.

Svensson (1994) supone también que los tipos de interés *forward* convergen, asintóticamente, hacia un cierto nivel, pero, con el objeto de aportar una mayor flexibilidad a la estructura de tipos *forward*, añade un término adicional a la forma funcional del tipo *forward* instantáneo

$$\varphi_m = \beta_0 + \beta_1\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) + \beta_2\frac{m}{\tau}\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) + \beta_3\frac{m}{\tau_1}\exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)$$

En este caso, aparecen dos nuevos coeficientes a estimar $\beta_3$ y $\tau_1$, pero en cualquier caso la expresión del tipo de interés al contado de capitalización continua para un plazo discreto de $m$ años es

$$r_m = \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\frac{\tau}{m}\left(1-\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)\right) - \beta_2\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) +$$

$$+\beta_3\frac{\tau_1}{m}\left(1-\exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)\right) - \beta_3\exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \tag{1.19}$$

El Servicio de Estudios del Banco de España proporciona los coeficientes diarios desde 1991 hasta la actualidad de estos dos métodos de ajuste de la curva de tipos. La justificación de la elección de estos métodos se encuentra en Soledad Nuñez (1995).

Para el periodo comprendido entre 91-94 se aplicó el método de Nelson y Siegel, por lo que facilitan estimaciones diarias de $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ y $\tau$. A partir de 1995 se implementó el método de Svensson y, así, se facilitan 6 coeficientes cada día ($\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\tau$ y $\tau_1$), que permiten definir el tipo de interés al contado para todos los plazos.

# CAPITULO II

## Dinámica de la estructura temporal de tipos de interés

# Capítulo 2

# Dinámica de la estructura temporal de tipos de interés

En este segundo capítulo se efectúa una clasificación general de los distintos modelos dinámico-estocásticos de la estructura temporal de tipos de interés. Se opta por clasificarlos, en un primer estadio, en función de las variables explicativas que consideran. De esta forma, los modelos que incorporan información de toda la curva de tipos de interés inicial para describir su dinámica, se denominan modelos consistentes de la estructura temporal. Por otra parte, los modelos no consistentes o factoriales sólo consideran como variables explicativas de la evolución en el tiempo de la curva de tipos, una o varias variables de estado.

A lo largo de este capítulo se le da más importancia a la metodología de los modelos no consistentes, ya que el modelo propuesto en el tercer capítulo de esta tesis se incluye en este grupo. Por ello, se dedica un extenso apartado de este capítulo al desarrollo de un modelo general, en tiempo continuo, de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, basado en la teoría de valoración estocástica por ausencia de arbitraje, que considera $s$ variables de estado o factores evolutivos de la estructura temporal de tipos de interés. Este modelo general pertenece al grupo de modelos no consistentes, ya que sólo toma información puntual de la curva de tipos de interés. El modelo presentado, además, no parte de un equilibrio general de la economía y, por lo tanto, queda dentro de los denominados de equilibrio parcial. A pesar de la distinción clásica de los modelos factoriales en modelos de equilibrio general y parcial, el desarrollo de la metodología de valoración es la misma. La diferencia se halla, principalmente, en que los del equilibrio intertemporal, implícitamente, generan la dinámica estocástica de los factores evolutivos de la estructura temporal, así como los precios de mercado del riesgo asociados al modelo, tal como se verá a lo largo de este capítulo.

A continuación se resumen los principales modelos factoriales o no consistentes, ya que constituyen el antecedente del modelo desarrollado en esta tesis doctoral. Finalmente, se dedica un apartado de este capítulo al desarrollo de la teoría de las expectativas en un contexto de incertidumbre. También, se definen las primas temporales y las relaciones de éstas con las diferentes versiones de la hipótesis de las expectativas.

## 2.1 Introducción

Los modelos dinámicos de la estructura temporal de tipos de interés analizan la evolución en el tiempo de la relación tipo de interés-plazo. Estos modelos estocástico-dinámicos de la estructura temporal pueden agruparse en dos grandes metodologías: los **modelos consistentes** y los **modelos no consistentes** con la estructura temporal de tipos de interés. Los primeros describen la dinámica de la estructura temporal incorporando información de toda la curva de tipos, de manera, que replican de forma perfecta la estructura de tipos actual. Los no consistentes o factoriales describen los movimientos de la curva incorporando sólo información puntual de la misma, a partir de la especificación de variables exógenas, denominadas variables de estado. Ambas metodologías serán explicadas con más detalle en el apartado dos de este capítulo.

Los modelos no consistentes o **factoriales**, que son los que más interesan dado el objetivo de esta tesis, eligen como variable dependiente para explicar la evolución de la estructura temporal, el precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia. Consideran que este precio o función de descuento, aparte de depender del vencimiento considerado, depende también de una o unas variables de estado, que constituyen las fuentes de incertidumbre existentes en el mercado. El objetivo es modelizar la dinámica de esta función de descuento y a partir de aquí deducir, a través de la transformación oportuna[1], la dinámica de los tipos de interés al contado y de los tipos *forward*.

Estos modelos factoriales se pueden agrupar en dos categorías: los denominados de **equilibrio general** y los de **equilibrio parcial**. En los primeros se parte de la descripción de la economía real y de consideraciones sobre las preferencias de un inversor representativo para modelizar la estructura temporal de tipos de interés. Estos modelos parten de un equilibrio intertemporal del mercado de activos financieros y utilizan la metodología propia de la optimización dinámica estocástica (Cox, Ingersoll y Ross (1985b) y Longstaff y Schwartz (1992), entre otros). En el enfoque de equilibrio parcial se establece por hipótesis la evolución estocástica de las variables de estado y la forma funcional de los precios de mercado del riesgo asociados a estas variables (Merton (1973), Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1979) y Schaefer y Schwartz (1984), entre otros).

Ambas metodologías, la de equilibrio general y parcial, a pesar de tener puntos de partida distintos, tienen idénticos desarrollos. Es decir, tanto los modelos que quedan dentro del enfoque de equilibrio general como los que quedan dentro del de

[1] Ver capítulo 1, apartado 2.

equilibrio parcial, modelizan el rendimiento de una obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia mediante una ecuación diferencial estocástica. Esta función de descuento, como se ha comentado anteriormente, depende no sólo del vencimiento de la obligación sino también de los factores de riesgo existentes en el mercado, representados por las variables de estado. En el caso de los modelos de equilibrio general, es el propio modelo el que genera la dinámica estocástica de estos factores. Es decir, la propia economía real, con la serie de hipótesis que se efectúan sobre ella, determina endógenamente el proceso estocástico de los factores evolutivos del precio de la obligación. Cuando el modelo es de equilibrio parcial se determina exógenamente la evolución estocástica de los factores del modelo. En este sentido cabe argumentar, que dado el grado de desarrollo actual de toda esta metodología, existen numerosos trabajos, tanto empíricos cono teóricos, que hacen que la elección del proceso estocástico de las variables de estado no sea, en modo alguno, arbitraria.

A partir de aquí y aplicando el criterio de inexistencia de oportunidades de arbitraje en el mercado financiero, se llega a una ecuación cierta en derivadas parciales en la que intervienen los precios de mercado del riesgo de los factores del modelo. En el caso de equilibrio general, el modelo, con sus hipótesis de partida, define implícitamente estas funciones, mientras que en el caso de equilibrio parcial, la forma de estos precios se determina, normalmente, de forma exógena. En este sentido, se ha de ser consciente de que una mala especificación de estos parámetros puede llevar a introducir un desequilibrio vía arbitraje y, por otra parte, se ha de tener presente, en la medida que la operatividad del modelo lo permita, la evidencia empírica a favor de la variabilidad en el tiempo de estos precios dèl riesgo.

A continuación se desarrolla un modelo estándard de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, en tiempo continuo, no consistente con la estructura temporal actual, basado en la teoría de valoración en ausencia de oportunidades de arbitraje y que considera $s$ variables de estado o factores evolutivos de la curva de tipos. Este modelo general queda enmarcado dentro de los denominados modelos factoriales y de equilibrio parcial.[2]

## 2.2 Modelos factoriales no consistentes

### 2.2.1 Modelo general

En este apartado se plantea un modelo general para la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, imponiendo un equilibrio parcial en la economía, consistente en evitar oportunidades de arbitraje en el mercado financiero.

Se considera una economía en tiempo continuo, en un intervalo $[0, T] \in \Re^+$ y que verifica las hipótesis inherentes a la existencia de un mercado financiero perfecto (Devolder, P. (1993), pp.50-51):

- ningún inversor domina sobre los demás
- todos los participantes del mercado poseen la misma información
- no hay costes de transacción, impuestos ni restricciones sobre la venta al descubierto
- y los títulos son infinitamente divisibles.

Se considera que la economía está representada por el espacio completo de probabilidad $(\Omega, \Im, F_t, Q)$, donde $\Omega$ es el conjunto finito de sucesos posibles $\omega_i$, $\Im$ es la $\sigma$-álgebra o conjunto de sucesos medibles, $F_t$ es una filtración en $t$, $t \in [0, T]$,

[2]La metodología empleada en el desarrollo de este modelo estándard es también válida para los modelos de equilibrio general, a partir del punto en que éstos se centran en la obtención de la dinámica del precio de la obligación, en función de los resultados obtenidos del equilibrio de partida de la economía real.

generada por un movimiento browniano de orden $s$ y $Q$ es la medida de probabilidad asociada.

Se asume que el estado de la economía, en cualquier instante del tiempo, está representado por un vector de variables de estado de dimensión $s$, $\vec{v}(t)$, cuyas componentes representan los factores de riesgo o incertidumbre del modelo

$$\vec{v}(t) = \{v_1(t)\,,\, v_2(t)\,,\, \ldots\,,\, v_s(t)\}\ . \tag{2.1}$$

La dinámica en el tiempo de estas variables de estado está descrita por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dv_i(t) = \beta_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))\,dt + \sigma_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))\,dz_i(t) \qquad i = 1\,,2\,,\ldots\,,s \tag{2.2}$$

donde $\beta_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))$ es la tendencia instantánea esperada de los cambios en la variable de estado $v_i(t)$, $\sigma_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))$ es el coeficiente de difusión o volatilidad de los cambios de la variable $v_i(t)$ y $dz_i(t)$ es el proceso de Wiener correspondiente a $v_i(t)$, con las siguientes propiedades:

- $E\,[dz_i] = 0$
- $(dz_i)^2 = dt$
- $E\,[dz_i dz_j] = \eta_{ij} dt$, con $i \neq j$, la correlación instantánea entre los procesos de Wiener.

Las $s$ variables de estado que caracterizan a la economía siguen un proceso de Markov conjunto con trayectorias continuas, o **proceso de difusión**, lo que implica que las realizaciones pasadas de las variables no influyen en la determinación de su evolución futura. Es decir, el proceso no tiene memoria y el valor de las variables en un instante futuro depende, exclusivamente, de los valores actuales, que de alguna forma ya recogen toda la historia pasada de estas variables. Formalmente, considerando la evolución estocástica de las $s$ variables de estado:

$$dv_i(t) = \beta_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))\,dt + \sigma_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))\,dz_i(t) \qquad i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,s$$

el proceso $dv_i(t)$ es markoviano, si la probabilidad de que $dv_i(t)$ tome un valor dado en $t_n$, $d\tilde{v}_i(t_n)$, condicionada a los valores que ha tomado en el pasado, $d\tilde{v}_i(t_0)$, $d\tilde{v}_i(t_1)$, . . . . , $d\tilde{v}_i(t_{n-1})$, es:

$$P\,(dv_i(t_n) = d\tilde{v}_i(t_n)/dv_i(t_0) = d\tilde{v}_i(t_0)\,,\,dv_i(t_1) = d\tilde{v}_i(t_1)\,,\,\ldots\,,\,dv_i(t_{n-1}) = d\tilde{v}_i(t_{n-1})) =$$

$$= P\,(dv_i(t_n) = d\tilde{v}_i(t_n)/dv_i(t_{n-1}) = d\tilde{v}_i(t_{n-1})) \qquad i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,s \qquad (2.3)$$

De esta forma y en nuestro contexto, dados los valores de las variables de estado en $t$, la evolución de éstas hasta un momento futuro $T$, $T > t$, está completamente determinada por los elementos exógenos de la estructura temporal y por las realizaciones del movimiento browniano entre $t$ y $T$. Más específicamente, la filtración $F_t$ respecto a la cual se calculan las esperanzas y que, en términos generales, describe el proceso de "aprender sin olvidar", es el caso especial de un proceso de Markov que consiste, simplemente, en el valor de las variables de estado en $t$.

En la mayoría de los modelos estas variables representan tantos de interés al contado o diferencias entre éstos. Otros modelos utilizan variables de la economía real, como la tasa de inflación e, incluso, algunos modelos emplean como variables explicativas, coeficientes que intervienen en la ecuación diferencial estocástica de alguna variable, tales como su volatilidad o tendencia esperada a largo plazo.

Cuando las variables de estado representan tipos de interés al contado o *spreads*, que es lo más habitual, es conveniente ver cuáles son las propiedades distribucionales implícitas en el proceso estocástico especificado, ya que éstas pueden ayudar a determinar hasta qué punto el proceso estocástico elegido es el razonable.

Así y de forma resumida, se pueden enumerar las siguientes propiedades deseables para el comportamiento de los tipos de interés al contado o para las diferencias entre éstos (Rebonato, R. (1996), pp.175-176)

- La distribución del proceso debería ser consistente con ciertas expectativas de valores probables. Por ejemplo, si la variable es un tipo de interés al contado sería interesante modelizarla a través de un proceso que evite valores negativos y si la variable considerada es un *spread* entre tipos de interés, sería idóneo, en este caso, optar por un proceso que permita tanto valores positivos como negativos. En este sentido, también resulta adecuado especificar las variables de estado a través de distribuciones que no presenten una dispersión exagerada, es decir, evitar procesos que no garanticen una distribución acotada para los valores de la variable.

- Se observa que valores elevados de los tipos de interés van seguidos más por decrementos que por incrementos y, por contra, valores pequeños de los tantos, van seguidos más por incrementos que por decrementos.

- Los tipos de diferentes vencimientos no están perfectamente correlacionados. Se observa que el grado de correlación es baja para los tipos del tramo corto de la curva, mientras que los tipos correspondientes a plazos largos, hacia el final de la curva, presentan grados de correlación más elevados.

- La volatilidad de tipos de diferentes vencimientos debe ser diferente. Para tipos a corto plazo se debería exigir una mayor volatilidad que para los tipos a más largo plazo.

- Las series de tipos de interés no son homocedásticas. Se cree conveniente hacer depender la volatilidad de los tipos de interés del nivel absoluto de la variable.

Evidentemente, resulta difícil plasmar todas estas propiedades en la modelización de las variables de estado. Por tanto, se debe intentar reflejar el mayor número de propiedades deseadas en el proceso estocástico que va a modelizar el comportamiento de la variable y, en todo caso, elegir aquellas más convenientes para los objetivos del modelo y el grado de operatividad analítica que se desee.

En cualquier caso y ya no sólo en nuestro contexto sino en la mayoría de disciplinas científicas, existen modelos aparentemente pobres porque incorporan hipótesis poco realistas y que sin embargo funcionan de forma eficiente. Por contra, otros modelos que incorporan hipótesis más realistas y avanzadas son incapaces de cumplir sus objetivos. De hecho, se debe ser consciente de que un modelo nunca explicará todos los aspectos conocidos de un fenómeno determinado.

La información contenida en la evolución de la curva de tipos de interés se puede obtener, de forma alternativa, a través de tipos de interés al contado, tipos de interés *forward* o funciones de descuento, ya que la relación existente entre estas tres curvas permite, dada una magnitud financiera, determinar a través de una transformación, las otras dos magnitudes. Como se planteó en el primer capítulo de esta tesis:

- la función de descuento se puede obtener a partir de los tipos de interés al contado o de los tantos *forward*

$$P(t\,,T) = \exp\{-\int_t^T f(t\,,s)ds\} = \exp\{-R(t\,,T)(T-t)\}$$

- la curva de tipos de interés al contado se puede obtener, directamente, a partir del precio de la obligación cupón cero o función de descuento

$$R(t\,,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t\,,T)$$

- y la curva de tipos a plazo se obtiene también a partir de la expresión del precio de la obligación

$$f(t,T) = \frac{-\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}}{P(t,T)}$$

Así, la elección de una u otra magnitud financiera es una cuestión de pura conveniencia, ya que, una vez determinada una de estas curvas, la especificación de las otras dos no requiere más que una simple transformación.

En este modelo general de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés se elige el precio de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia y se determina su evolución en el tiempo imponiendo la inexistencia de posibilidades de arbitraje en el mercado.[3]. El precio de la obligación es un proceso estocástico ya que depende de las variables de estado del modelo que, en cada instante, son variables aleatorias que representan las fuentes de riesgo o incertidumbre que actúan en este modelo. Por tanto, el precio de la obligación cupón cero varía por el paso del tiempo y por las variaciones de las variables de estado, cuyo comportamiento estocástico se modeliza mediante una adecuada ecuación diferencial estocástica.

El lema de Itô permite determinar la ecuación diferencial estocástica del precio de la obligación que modeliza su evolución dinámica en el tiempo. A continuación, se utiliza un argumento de arbitraje que elimina la aleatoriedad implícita en la función de descuento, ya que conduce al establecimiento de una ecuación en derivadas parciales cuya solución es la función de descuento determinista, vigente en el m nto de valoración. Así, en este modelo se elimina la aleatoriedad o incerti entes al proceso estocástico del precio de la obligación vía exclusión de arbitraje, pero, esta condición de no arbitraje que establece

los financieros parte del concepto de equilibrio de no arbitraje. De he de arbitraje cuando dos activos (o carteras equivalentes) están mal Esta "mala valoración" permite que un inversor consiga un be lemente vendiendo el activo sobrevalorado y utilizando parte valorado. Un modelo de valoración de títulos que admita stable.

depend

la ecuación en derivadas parciales incorpora el riesgo de mercado a través de los denominados **precios de mercado del riesgo** asociados a los factores del modelo. En la ecuación en derivadas parciales se especifica a través de estos precios, unas determinadas funciones que representan la valoración de los participantes del mercado, del riesgo que se deriva de posibles variaciones de los factores del modelo. El principal resultado de la condición de no arbitraje es la independencia de estos precios del vencimiento de la obligación.

La imposición de un equilibrio en el mercado financiero consistente en la exclusión de oportunidades de arbitraje es uno de los conceptos fundamentales subyacentes en la teoría de valoración de activos derivados y en la teoría de cobertura de carteras de renta fija. Esta condición de no arbitraje implica que no existan nunca oportunidades de conseguir un beneficio instantáneo libre de riesgo. Más explícitamente, tales oportunidades no pueden existir para un periodo de tiempo significativo sin que los precios, en el mercado financiero, se muevan para eliminarlas. La correcta valoración financiera en un contexto de equilibrio financiero conlleva, pues, la aplicación de este principio, que conduce, por otra parte, a las actuales modelizaciones de la valoración financiera estocástica.

La mayoría de las teorías financieras de valoración suponen la existencia de inversiones libres de riesgo con rendimientos garantizados, tales como las emisiones de deuda pública. Así, por ejemplo, el mayor rendimiento garantizado que un agente puede conseguir con una cartera de activos, es el que obtendría si colocase el equivalente de la cartera en deuda pública. En el contexto de los modelos dinámicos de la estructura temporal, la aplicación de exclusión de oportunidades de arbitraje se efectúa vía la obtención de un rendimiento garantizado, representado, en cada instante, por un tanto de interés al contado libre de riesgo o rendimiento asociado a un título de renta fija cupón cero y emitido por el estado [4].

Además y para asegurar la ausencia de oportunidades de arbitraje en este modelo general de la estructura temporal, es necesario efectuar una serie de restricciones sobre la clase de estrategias financieras que pueden llevar a cabo los agentes económicos. Básicamente, estas restricciones son de dos tipos. En primer lugar, se exige que estas estrategias estén adaptadas a $F_t$, lo que implica que, en cualquier instante, una estrategia financiera dada sólo debe depender de la información disponible hasta ese momento. En segundo lugar, sólo se permiten estrategias autofinanciadas. Una vez construida una cartera inicial, no pueden haber flujos de entrada ni de salida, ya que cualquier cambio en la composición de la cartera se financia internamente.

El argumento de arbitraje utilizado en este modelo general de estructura temporal, que conduce a una ecuación en derivadas parciales para el precio de la obligación cupón cero, es similar al empleado por Black and Scholes (1973) en su modelo de valoración de opciones. Existe, sin embargo, una gran diferencia: la variable de estado en el modelo de Black and Scholes es el precio de un activo financiero negociable. En este modelo de estructura temporal de tipos de interés, las variables de estado no son precios de activos financieros sino que, normalmente, son tipos de interés. Ello obliga a efectuar hipótesis sobre los precios de mercado del riesgo asociados a tales variables, ya que el modelo no parte de un equilibrio general de la economía y, por tanto, estos precios no son endógenos al modelo. Evidentemente estas funciones dependen de la estructura preferencial de un decisor representativo.

A continuación se desarrolla, formalmente, un modelo dinámico general de la estructura temporal de tipos de interés, a través del precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia. Se considera que actúan $s$ fuentes de riesgo representadas por las $s$ variables de estado antes explicitadas y se impone un equilibrio

[4] Este tipo de interés instantáneo al contado libre de riesgo se simboliza por $r(t)$ y ha quedado definido en el capítulo 1, apartado 2.

de no arbitraje en el mercado financiero, para garantizar una correcta valoración financiera estocástica .

El precio en $t$ de una obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia, que paga una unidad monetaria a su vencimiento $T = t+\tau$, $T > t$, es una función que depende del vector de variables de estado $\vec{v}(t)$, del vencimiento de la obligación $T$ y del espacio de probabilidad subyacente y se denota por $P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T\,,\,\omega_i)$, con $t \in [0\,,\,T] \in \Re^+$ y $\omega_i \in \Omega$, donde $\Omega$ es el conjunto de sucesos posibles del espacio de probabilidad. Para simplificar la notación $P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T\,,\,\omega) = P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) = P(\tau\,,\,\vec{v}(t))$ con $\tau = T - t$, e incluso en ocasiones $P(\cdot)$. [5]

El rendimiento instantáneo de la obligación se desarrolla en el tiempo de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial estocástica que describe los cambios, en términos relativos, del precio de la obligación en periodos de tiempo infinitesimal:

$$\frac{dP(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)}{P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)} = \mu\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)\,dt + \sum_{i=1}^{s} \rho_i\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)\,dz_i(t) \tag{2.4}$$

donde $\mu\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)$ es el rendimiento esperado en $t$ de la obligación con vencimiento en $T$ y para un periodo infinitesimal y $\rho_i\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)$ es la variación instantánea no esperada en $t$ del rendimiento de la obligación, debida a cambios aleatorios de la variable de estado $v_i(t)$.

Por el lema de Itô:

$$\begin{aligned}\mu\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) = {} & \frac{1}{P(\cdot)}\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\beta_i(t\,,\,\vec{v}(t))P_{v_i} + \frac{1}{2}\sigma_i^2(t\,,\,\vec{v}(t))P_{v_iv_i}\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=i+1}^{s}\sigma_i(t\,,\,\vec{v}(t))\sigma_j(t\,,\,\vec{v}(t))\eta_{ij}P_{v_iv_j}\right) + P_t\right]\end{aligned} \tag{2.5}$$

[5] Esta última abreviación en la notación se utilizará indistintamente para otras funciones, una vez hayan sido ya especificadas sus dependencias

$$\rho_i\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) = \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_i(t\,,\,\vec{v}(t))P_{v_i} \qquad i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,s \tag{2.6}$$

donde el subíndice de $P$ denota derivada parcial de la función $P(\cdot)$, como es habitual en la literatura financiera

$$\tfrac{\partial P(\cdot)}{\partial v_i} = P_{v_i} \qquad \tfrac{\partial P(\cdot)}{\partial t} = P_t$$

$$\tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial v_i^2} = P_{v_i v_i} \quad \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial v_i \partial v_j} = P_{v_i v_j}$$

Para evitar oportunidades de arbitraje y obtener así un modelo estable de la estructura temporal, se considera una cartera con $s+1$ obligaciones cupón cero de diferentes vencimientos arbitrarios $T_1 = t+\tau_1$, $T_2 = t+\tau_2$, $\ldots$, $T_{s+1} = t+\tau_{s+1}$ y con proporciones relativas que se denotan por $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_{s+1}$ y que verifican $\sum\limits_{i=1}^{s+1} x_i = 1$. El número de obligaciones cupón cero que forman la cartera es $s+1$ porque en el modelo se han considerado $s$ variables de estado, es decir, $s$ fuentes de incertidumbre.

El valor en $t$ de la cartera $V(t\,,\,x_i\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i)$ viene dado por la siguiente expresión:

$$V(t\,,\,x_i\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i) = \sum_{i=1}^{s+1} x_i P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i) \tag{2.7}$$

y el rendimiento de ésta, se desarrolla en el tiempo de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dV(t\,,\,x_i\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i)}{V(t\,,\,x_i\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i)} = \sum_{i=1}^{s+1} x_i \left[\mu(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i)dt + \sum_{j=1}^{s} \rho_j(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i)dz_j(t)\right] \tag{2.8}$$

La cartera se ajusta de forma continua y las proporciones de las $s+1$ obligaciones que forman la cartera varían continuamente en el tiempo (de hecho, aunque para simplificar la notación se ha obviado, las variables $x_i$ son función del tiempo). Así, las proporciones a invertir en cada obligación para evitar oportunidades de arbitraje han de ser tales que la cartera se ajuste, instantáneamente, sin riesgo. La cartera no posee riesgo en el sentido de que, en cada instante, el cambio en el valor de la cartera para un periodo infinitesimal es conocido, es decir:

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i \rho_j \left(t\,,\, \vec{v}(t)\,,\, T_i\right) = 0 \qquad j = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, s \tag{2.9}$$

En un mercado de obligaciones en el que se eliminan las oportunidades de arbitraje, la cartera compuesta por $s+1$ obligaciones cupón cero ha de proporcionar, en un instante determinado $t$, el tanto de interés instantáneo sin riesgo $r(t)$:

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i \left(\mu\left(t\,,\, \vec{v}(t)\,,\, T_i\right)\right) = r(t)$$

es decir:

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i \left(\mu\left(t\,,\, \vec{v}(t)\,,\, T_i\right) - r(t)\right) = 0 \tag{2.10}$$

Todo ello lleva a considerar el siguiente sistema de $s+1$ ecuaciones con $s+1$

incógnitas, que garantiza la exclusión de oportunidades de arbitraje:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{s+1} x_i \rho_1 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i) = 0 \\
&\sum_{i=1}^{s+1} x_i \rho_2 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i) = 0 \\
&\vdots \\
&\sum_{i=1}^{s+1} x_i \rho_s (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i) = 0 \\
&\sum_{i=1}^{s+1} x_i (\mu (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_i) - r(t)) = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Sistema de ecuaciones lineal y homogéneo, cuya matriz asociada $A$ es:

$$\text{A} = \begin{pmatrix}
\rho_1 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_1) & \rho_1 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_2) & \dots & \rho_1 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_{s+1}) \\
\rho_2 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_1) & \rho_2 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_2) & \dots & \rho_2 (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_{s+1}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\rho_s (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_1) & \rho_s (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_2) & \dots & \rho_s (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_{s+1}) \\
\mu (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_1) - r(t) & \mu (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_2) - r(t) & \dots & \mu (t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T_{s+1}) - r(t)
\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Para que el anterior sistema de ecuaciones tenga solución diferente de la nula, el determinante de la matriz asociada $A$ ha de ser nulo y dado que el vencimiento de las $s+1$ obligaciones que componen la cartera se ha elegido arbitrariamente, debe existir un vector $\vec{\lambda}$ de dimensión $s$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1(t\,,\,\vec{v}(t))\,,\,\lambda_2(t\,,\,\vec{v}(t))\,,\,\ldots\,,\,\lambda_s(t\,,\,\vec{v}(t)))$, independiente del vencimiento de la obligación, que verifique[6]:

$$\mu\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) - r(t) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))\,\rho_i\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) \tag{2.13}$$

ecuación que expresa la prima de riesgo instantánea en $t$ $(\mu\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) - r(t))$ o diferencia entre el rendimiento instantáneo esperado de la obligación y el tanto de interés instantáneo sin riesgo, como combinación lineal de las volatilidades en el rendimiento de la obligación debidas a cambios no esperados de las variables de estado ( $\rho_i\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)$ ), ponderadas por los precios de mercado del riesgo asociados a cada una de las $s$ variables ( $\lambda_i\,(t\,,\,\vec{v}(t))$ ).

Estos precios de mercado del riesgo de las variables de estado se pueden interpretar como el precio que el mercado da a las fuentes de riesgo existentes en el modelo y que, evidentemente, se traducen en variaciones no esperadas en el rendimiento de la obligación debidas a cambios de las variables del modelo.

En este modelo de equilibrio parcial de la estructura temporal de tipos de interés, los precios de mercado del riesgo de cada uno de los factores deben ser determinados exógenamente, pero no de forma arbitraria, porque la especificación elegida ha de ser consistente con la exclusión de las oportunidades de arbitraje. En otras palabras, las oportunidades de arbitraje que se excluyen al imponer la condición de no arbitraje, pueden volverse a introducir debido a una mala especificación de estos precios de mercado del riesgo (Cox, Ingersoll y Ross (1985b), pp.398).

Estos precios dependen de la función de utilidad de un inversor representativo,

[6]Para garantizar una solución del sistema de ecuaciones homogéneo planteado, diferente de la nula, se ha de garantizar que el sistema sea compatible indeterminado. De esta forma, se exige que la matriz asociada y, así la matriz ampliada, tenga rango inferior a $s+1$, que es precisamente el número de incógnitas del sistema.

de su actitud ante el riesgo, y ello lleva a afirmar, por tanto, que este tipo de formulación no está libre de preferencias, ya que estos precios de mercado del riesgo dependen de la estructura preferencial de los agentes sobre el riesgo.

En líneas generales, cuando se considera un inversor adverso al riesgo, la prima de riesgo es positiva y los precios de mercado del riesgo negativos. Si el inversor es propenso al riesgo, la prima es negativa y los precios de riesgo positivos. Esta relación inversa, en cuanto a signo, entre prima de riesgo instantánea y precio de mercado del riesgo se deduce de la relación existente entre ambos conceptos. Como la prima instantánea de riesgo es combinación lineal de las variaciones no esperadas en el rendimiento de la obligación, dada la definición de estas volatilidades:

$$\rho_i\,(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T) = \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_i(t\,,\,\vec{v}(t))P_{v_i} \qquad i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,s$$

se puede comprobar que, como la función de descuento es una función positiva, $P(\cdot) > 0$, los coeficientes de difusión de las variables son positivos $\sigma_i > 0$ y la relación entre el precio de la obligación cupón cero y las variables de estado[7] es, normalmente, una relación inversa, $P_{v_i} < 0$ (Richard, S.F. (1978), p.48), estos parámetros de volatilidad son negativos.

Cuando los precios de mercado del riesgo sean todos negativos implicarán una prima de riesgo positiva y a la inversa, cuando sean todos positivos, la prima de riesgo resultante será negativa, reflejo de una actitud propensa al riesgo.

Asumiendo que los coeficientes de volatilidad del rendimiento de la obligación son negativos y que en la modelización de la estructura temporal interviene una sola variable de estado ($s = 1$) esta relación inversa, en cuanto a signo, es unívoca. Así, la prima de riesgo instantánea queda definida por

$$\mu\,(t\,,\,v_1(t)\,,\,T) - r(t) = \lambda_1\,(t\,,\,v_1(t))\,\rho_1\,(t\,,\,v_1(t)\,,\,T) \tag{2.14}$$

[7]Ver propiedad 5 de la función de descuento del apartado 3, del capítulo 3.

y es fácil comprobar que el signo negativo de $\lambda_1(t, v_1(t))$ implica un signo positivo para $\mu(t, v_1(t), T) - r(t)$, la prima de riesgo instantánea.

Cuando en esta modelización intervienen más factores se mantiene esta relación cuando todos los precios de mercado del riesgo toman el mismo signo. Si no es así, el signo de la prima de riesgo dependerá no sólo del signo, sino también del valor absoluto de todos estos precios.

Finalmente, si en la relación (2.13) se sustituye $\mu(t, \vec{v}(t), T)$ y $\rho_i(t, \vec{v}(t), T)$ por (2.5) y (2.6), respectivamente, se llega a:

$$\frac{1}{P(t, \vec{v}(t), T)}\left[\sum_{i=1}^{s}\left(\beta_i(t, \vec{v}(t))P_{v_i} + \frac{1}{2}\sigma_i^2(t, \vec{v}(t))P_{v_iv_i}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=i+1}^{s}\sigma_i(t, \vec{v}(t))\sigma_j(t, \vec{v}(t))\eta_{ij}P_{v_iv_j}\right) + P_t\right] - r(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(t, \vec{v}(t))\frac{1}{P(t, \vec{v}(t), T)}\sigma_i(t, \vec{v}(t))P_{v_i}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2(t, \vec{v}(t))P_{v_iv_i}\right) + \sum_{i=1}^{s}\left(\beta_i(t, \vec{v}(t)) - \lambda_i(t, \vec{v}(t))\sigma_i(t, \vec{v}(t))\right)P_{v_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=i+1}^{s}\sigma_i(t, \vec{v}(t))\sigma_j(t, \vec{v}(t))\eta_{ij}P_{v_iv_j}\right) + P_t - r(t)P(t, \vec{v}(t), T) = 0 \quad (2.15)$$

ecuación en derivadas parciales, cuya solución con la adecuada condición final de que al vencimiento la obligación paga 1 unidad monetaria

$$P(T, \vec{v}(t), T) = 1 \quad (2.16)$$

es la expresión del valor en $t$ de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia o función de descuento aplicable en $t$, para los diferentes vencimientos que se quieran considerar.

Evidentemente, para solucionar la anterior ecuación previamente se ha de efectuar alguna hipótesis sobre la forma funcional de los precios de mercado del riesgo de las variables del modelo. Al respecto, cabe destacar la evidencia empírica en favor de su variación en el tiempo (Brennan-Schwartz (1982), Campbell (1986), Moreno (1997) y Gómez-Martínez (1999)), aunque la mayoría de los modelos efectúen la hipótesis de que estos precios son constantes.

Por otra parte, algunos modelos factoriales de evolución de la estructura temporal que consideran más de una variable de estado suponen que éstas son ortogonales, y que no existe correlación entre los procesos de Wiener

$$E\left[dz_i dz_j\right] = 0 \text{ con } i \neq j \; \forall i, j \tag{2.17}$$

hipótesis que se suele asumir para facilitar una solución analítica de la ecuación en derivadas parciales y que, además, se considera adecuada porque de esta forma se está asumiendo que las variables explicativas de la función de descuento, la variable a explicar, son independientes y, estadísticamente, es lo más idóneo.

Bajo esta hipótesis de independencia de las variables de estado se obtiene la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s}\sigma_i^2(t\,,\,\vec{v}(t))P_{v_iv_i}\right) + \sum_{i=1}^{s}\left(\beta_i(t\,,\,\vec{v}(t)) - \lambda_i(t\,,\,\vec{v}(t))\sigma_i(t\,,\,\vec{v}(t))\right)P_{v_i}+$$

$$+\,P_t - r(t)P\left(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T\right) = 0 \tag{2.18}$$

La ecuación en derivadas parciales a la que se llega para determinar la dinámica del precio de la obligación cupón cero es conocida como la **ecuación de difusión del**

**calor.** Sus propiedades la hacen especialmente atractiva para numerosos modelos de la matemática aplicada. Se trata de una ecuación lineal, de segundo orden y del tipo parabólico.[8]

### 2.2.2 Ecuación diferencial estocástica de las variables de estado

Los primeros modelos factoriales consideran una sola variable de estado, el **tipo de interés instantáneo sin riesgo** $r(t)$, que se modeliza mediante un proceso de difusión[9] de la forma

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma r(t)^{\beta} dz(t) \tag{2.19}$$

donde $dz(t)$ es un proceso Gauss-Wiener y $k$ , $\mu$ , $\sigma$ y $\beta$ son parámetros. Cuando $\beta \in [0\,,\,1]$ se asegura la existencia de una solución única[10].

Esta especificación general incluye los modelos unifactoriales más importantes que han aparecido en la literatura financiera, así como las modelizaciones del conjunto de variables de estado que consideran los diferentes modelos multifactoriales no consistentes de la estructura temporal de tipos de interés. Por ello, a continuación, se detallan los procesos estocásticos del tipo de interés instantáneo más utilizados en la modelización de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, teniendo presente que se emplea la variable tipo de interés instantáneo porque es la variable más utilizada en todos estos modelos.

1. **Proceso browniano aritmético**

[8] En Fontanals, H, R. Lacayo y J. Vives (1999) se ofrecen métodos matemáticos alternativos de resolución de esta ecuación.

[9] Como quedó definido en el capítulo 1, apartado 5, de esta tesis, un proceso de difusión es un proceso estocástico de Markov con trayectorias continuas.

[10] Vetzal, K.R. (1994), p.143.

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dz(t) \tag{2.20}$$

La anterior ecuación diferencial de Itô, con parámetro constante tanto para la tendencia instantánea esperada de los cambios de la variable, como para el coeficiente de difusión, define un **proceso browniano aritmético**, con tendencia $\mu$ y volatilidad $\sigma$. Este proceso de difusión es apropiado para modelizar variables económicas que crecen a una tasa lineal y que presentan una aleatoriedad creciente con el tiempo.

Cuando $r(t)$ sigue un proceso browniano aritmético, el tipo de interés instantáneo puede tomar tanto valores positivos como negativos. Además, para $u > t$, la distribución de $r(u)$ condicionada a $r(t)$ es normal, con las siguientes expresiones para la esperanza y varianza condicionadas (Shimko, D.C. (1992), pp.9)

$$E_t\left[r(u)\right] = r(t) + \mu(u - t)$$

$$Var_t\left[r(u)\right] = \sigma^2(u - t) \tag{2.21}$$

$$\forall t \leq u$$

Este proceso es apropiado para variables que tanto pueden tomar valores positivos como negativos, que se distribuyen de forma normal y con varianza que se incrementa linealmente en el tiempo, de manera que para plazos infinitos se hace infinita.

Este proceso ha sido utilizado por Merton (1973) en su modelo unifactorial de la estructura temporal, así como por Kraus-Smith (1993) en un modelo que considera tres factores en la modelización de la dinámica de la estructura de tipos.

2. **Proceso Ornstein-Uhlenbeck**

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma dz(t) \tag{2.22}$$

La anterior ecuación diferencial estocástica describe un **proceso de difusión Ornstein-Uhlenbeck.** El proceso $r(t)$ es un proceso con reversión a la media[11] y con coeficiente de difusión constante. De esta forma, el proceso tiende con una velocidad de ajuste $k > 0$, hacia un valor asintótico a largo plazo $\mu$ y presenta volatilidad constante. Es decir, el proceso del tipo de interés instantáneo sin riesgo tiende al valor medio esperado a largo plazo $\mu$ y va fluctuando entorno a este valor con una magnitud $\sigma$. Esta modelización del tipo de interés instantáneo permite tanto valores positivos como negativos para esta variable, aunque éstos últimos con una probabilidad pequeña.

El proceso Ornstein-Uhlenbeck es un proceso Markov con incrementos distribuidos de forma normal y con distribución estacionaria[12] y la esperanza y varianza condicionadas del proceso son las siguientes (Vasicek. O. (1977),

[11]Los procesos estocásticos con reversión a la media son apropiados para tipos de interés y tasas de inflación, ya que tienden a valores a largo plazo estables y no representan activos negociables (Shimko, D.C. (1992), pp.12).

[12]El proceso Ornstein-Uhlenbeck es conocido también como caminata aleatoria elástica y en contraste con la caminata aleatoria, que es un proceso no estable y que después de un periodo de tiempo considerable alcanza valores infinitos, posee una distribución estacionaria que garantiza que los valores de la variable no sean exageradamente elevados.

p.185)

$$E_t\left[r(u)\right] = r(t)e^{-k(u-t)} + \mu\left(1 - e^{-k(u-t)}\right)$$
$$Var_t\left[r(u)\right] = \left(\tfrac{\sigma^2}{2k}\right)\left(1 - e^{-2k(u-t)}\right) \qquad (2.23)$$
$$\forall t \leq u$$

Vasicek (1977) utilizó esta modelización en su modelo unifactorial de la estructura temporal de tipos de interés y en las dos últimas décadas ha sido ampliamente empleado por otros muchos investigadores (Boyle (1980), Schaefer-Schwartz (1984) y Moreno (1997), entre otros).

3. **Proceso raíz cuadrada**

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma r(t)^{\frac{1}{2}} dz(t) \qquad (2.24)$$

Este proceso estocástico, normalmente conocido como **proceso raíz cuadrada**, presenta también reversión a la media[13], de manera que el proceso tiende con una velocidad de ajuste $k > 0$ hacia un valor medio a largo plazo $\mu > 0$. En este caso, pero, el coeficiente de difusión no es constante sino que varía con el valor de la variable en cada instante. De esta forma, el proceso posee una barrera reflectante en 0, de manera que si $r(t)$ alcanza el valor nulo, inmediatamente volverá a tomar valores estrictamente positivos[14]. Sin embargo, si $2k\mu \geq \sigma^2$, la tendencia hacia arriba es lo suficientemente grande para hacer el origen inaccesible y, así, el tipo de interés instantáneo sólo toma valores estrictamente positivos. En cualquier caso, la singularidad del coeficiente de

[13]Para $k$ , $\mu > 0$, se corresponde con un proceso autoregresivo de primer orden en tiempo continuo (Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b), p. 391).

[14]El proceso sólo puede tomar el valor 0 si $\sigma^2 > 2k\mu$ .

difusión en el origen implica que un tipo de interés inicialmente no negativo nunca pueda convertirse en un valor negativo.

Este proceso fue propuesto por Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b) para el tipo de interés instantáneo en su modelo unifactorial[15]. Además, la varianza absoluta del tipo de interés aumenta cuando aumenta el nivel del tipo de interés y, por último, la variable $r(u)$ condicionada por su valor en $t$, $r(t)$ $(t \leq u)$ sigue una distribución $\chi^2$ no centrada, con esperanza y varianza (Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b), p.392)

$$E_t\left[r(u)\right] = r(t)e^{-k(u-t)} + \mu\left(1 - e^{-k(u-t)}\right)$$

$$Var_t\left[r(u)\right] = r(t)\left(\frac{\sigma^2}{k}\right)\left(e^{-k(u-t)} - e^{-2k(u-t)}\right) + \mu\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right)\left(1 - e^{-k(u-t)}\right)^2 \quad \forall t \leq u \tag{2.25}$$

Entre otros, los siguientes autores han empleado el proceso raíz cudadrada en la modelización de las variables de estado: Richard (1978), Schaefer-Schwartz (1984), Longstaff-Schwartz (1992) y Chen (1996).

4. **Proceso browniano geométrico**

$$dr(t) = \mu r(t)dt + \sigma r(t)dz(t) \tag{2.26}$$

En este caso, el comportamiento del tipo de interés instantáneo en el tiempo está representado por un **proceso browniano geométrico** de coeficientes $\mu$ y $\sigma$. Este proceso es apropiado para variables económicas que crecen exponencialmente a una tasa media dada por $\mu$ y con volatilidad proporcional al nivel

[15]El proceso raíz cuadrada también es conocido como proceso C.I.R. en referencia al artículo de Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b).

de la variable. El proceso presenta aleatoriedad creciente con el tiempo y para plazos infinitos la varianza del proceso se hace también infinita. El proceso asegura la positividad de la variable cuando éste empieza por un valor positivo, pero presenta una barrera absorvente en 0, de manera que si el proceso alcanza este valor permanece en él.

La distribución condicionada de $r(u)$ dado $r(t)$ es lognormal, con esperanza y varianza condicionadas dadas por (Courtadon, G. (1982), pp.92)[16]

$$\begin{aligned} E_t\left[r(u)\right] &= r(t)e^{\mu(u-t)} \\ Var_t\left[r(u)\right] &= r(t)^2 e^{2\mu(u-t)}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \\ &\qquad \forall t \leq u \end{aligned} \tag{2.27}$$

Según este proceso, el tipo de interés instantáneo esperado en un futuro muy lejano es 0 cuando $\mu < 0$, se hace infinito cuando $\mu > 0$ y es igual a $r(t)$ en el caso de $\mu = 0$, es decir

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} E_t\left[r(u)\right] = \lim_{u \longrightarrow \infty} r(t)e^{\mu(u-t)} = \begin{cases} \text{si } \mu < 0 \longrightarrow 0 \\ \text{si } \mu = 0 \longrightarrow r(t) \\ \text{si } \mu > 0 \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Por ello, Dothan (1978) utiliza un proceso browniano geométrico para el tipo

[16]Dadas estas propiedades esta modelización es adecuada para precios de activos financieros, ya que los cambios proporcionales en éstos son independientes e identicamente distribuidos de forma normal.

de interés instantáneo pero sin tendencia

$$dr(t) = \sigma r(t)dz(t) \tag{2.28}$$

para evitar tipos de interés esperados nulos e infinitos. Sin embargo, cuando $\mu = 0$, el tipo de interés instantáneo tiende a 0, es decir

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} r(t) = 0$$

ya que de

$$dr(t) = \mu r(t)dt + \sigma r(t)dz(t)$$

se obtiene el siguiente resultado

$$r(t) = r(0)\mathrm{e}^{\left((\mu-\sigma^2/2)t+\sigma z(t)\right)}$$

En resumen, y dada la ecuación diferencial estocástica que define el proceso de difusión genérico utilizado en la modelización del tipo de interés instantáneo

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma r(t)^{\beta} dz(t)$$

numerosos modelos imponen $k$ , $\mu > 0$, para garantizar un comportamiento del tipo instantáneo con reversión a la media (Entre los modelos unifactoriales destacan: Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) y entre los modelos que consideran más de un factor: Richard (1978), Boyle (1980), Schaefer-Schwartz (1984), Longstaff-Schwartz (1992), Moreno (1997), y Chen (1996) [17] ). De esta forma $r(t)$ siempre

[17] Se ha de tener presente que en todos estos modelos aparecen dos o tres factores que determinan la dinámica de la estructura temporal. Cada modelo define sus propios factores y en la mayoría de los casos no se corresponden con el tipo de interés instantáneo. Sin embargo, éstos se modelizan con procesos con reversión a la media.

tiende hacia el valor medio a largo plazo $\mu$, a una velocidad de ajuste $k > 0$, y no alcanza valores arbitrariamente grandes (o negativos si el proceso no especifica una barrera reflectante en 0).

Este comportamiento de reversión a la media del tipo de interés instantáneo se exige, en numerosas ocasiones, para asegurar una distribución acotada de la variable. Si se considera que tanto la tendencia instantánea esperada de los cambios en la variable como el coeficiente de difusión, no dependen del nivel de la variable y, en todo caso, pueden depender o no del tiempo, se está imponiendo un comportamiento no adecuado a la evolución en el tiempo de la variable. Esta distribución con el paso del tiempo puede llevar a valores exageradamente altos o bajos. Para evitar este comportamiento, en líneas generales, se puede optar por dos alternativas (Rebonato, R. (1996), pp.177-182):

- imponer una volatilidad decreciente con el paso del tiempo
- imponer una tendencia con reversión a la media

Si se opta por la primera alternativa, se establece una contradicción. Si la volatilidad decrece con el paso del tiempo se está asumiendo que la incertidumbre disminuye en el tiempo o, lo que es lo mismo, que se sabe más sobre un momento futuro que sobre un momento más actual. Esta alternativa puede llevar incluso a valores negativos de la volatilidad de la variable y, en todo caso, establece una volatilidad que, con el paso del tiempo, tiende a 0.

Así, la alternativa para evitar una excesiva dispersión del tipo de interés instantáneo es imponer una tendencia del proceso con reversión a la media. Además, este comportamiento recoge también una propiedad deseada para la variable, ya que garantiza que valores elevados vayan seguidos más por decrementos que por incrementos y a la inversa.

Además, si $k$, $\mu > 0$ y $\beta \neq 0$, el proceso especificado impone una barrera reflectante en 0, de manera que si $r(t)$ alcanza un valor nulo, instantáneamente se convierte en positivo. Este comportamiento del tanto de interés instantáneo es muy deseable, ya que la ausencia de arbitraje en el mercado se consigue igualando el rendimiento instantáneo de la obligación a $r(t)$. Por tanto, es más que deseable que este tipo de interés nominal de capitalización compuesta para un plazo infinitesimal sea siempre positivo.

### 2.2.3 Clasificación

Los modelos factoriales y no consistentes de la estructura temporal de tipos de interés se clasifican en **modelos unifactoriales** y **modelos multifactoriales**, atendiendo al número de factores o variables de estado que emplean para la modelización de la dinámica de la curva de tipos.

Como su nombre indica, los modelos unifactoriales son aquellos que sólo emplean una variable de estado en la modelización de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés. La mayoría de los modelos unifactoriales, como se ha comentado anteriormente, utilizan como factor explicativo de la dinámica de la estructura temporal, el tipo de interés instantáneo libre de riesgo. Así, estos modelos consideran que el precio de la obligación en cada instante es función del vencimiento de la obligación y de una sola variable de estado, el tipo de interés instantáneo. De esta forma, la curva de tipos de interés en cada instante quedará determinada por el actual valor del tipo de interés instantáneo.

Estos modelos unifactoriales presentan el inconveniente de que los rendimientos de las obligaciones de todos los vencimientos están perfectamente correlacionados. En otras palabras, estos modelos no recogen, a través de otros factores, otros impactos que puedan afectar de distinta forma a los rendimientos de las obligaciones con diferentes vencimientos. Es interesante destacar que el hecho de que los rendimientos de todas las obligaciones estén perfectamente correlacionados no es sinónimo de que la curva de tipos al contado sólo pueda sufrir cambios paralelos. Es decir, en estos modelos unifactoriales no se puede asegurar, en general, que los movimientos de la estructura a lo largo del tiempo sean sólo en nivel[18]. Por otra parte, cuando el tanto de interés instantáneo presenta reversión a la media, el rendimiento de la obligación perpétua es constante[19].

Los principales modelos unifactoriales se detallan en la siguiente tabla y algunos de ellos serán explicados con detalle en el siguiente apartado de esta sección.

[18]J. Hull (1997) afirma que un modelo unifactorial implica que todos los tipos de interés se muevan en la misma dirección en un intervalo pequeño de tiempo, pero no con la misma magnitud. Así, estos modelos no suponen una misma forma para la estructura de tipos a lo largo del tiempo. Concretamente, W. Phoa (1992) demuestra que los cambios en la estructura temporal deducida para el modelo de Vasicek (1977) dependen del valor del coeficiente de la velocidad de ajuste. Para valores estándards de este parámetro, el modelo genera cambios en pendiente en la curva de tipos al contado. Sin embargo y a pesar de la veracidad de las anteriores afirmaciones, los modelos unifactoriales no permiten una gran variedad de formas para la estructura temporal de tipos de interés.

[19]Vetzal (1992), pp.145.

**Modelos unifactoriales**

| Autores | Factores y procesos estocásticos | Precio de mercado del riesgo |
|---|---|---|
| Merton(1973) | $dr = \rho dt + \sigma dz$ | $\lambda$ |
| Vasicek(1977) | $dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz$ | $\lambda$ |
| Dothan(1978) | $dr = \sigma r dz$ | $\lambda$ |
| Constatinides-Ingersoll(1984) | $dr = \sigma r^{3/2} dz$ | $\lambda$ |
| Cox-Ingersoll-Ross(1985*b*) | $dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^{1/2} dz$ | $\frac{\lambda r^{1/2}}{\sigma}$ |

En un esfuerzo para conseguir modelos menos restrictivos, algunos autores proponen modelos que consideran dos variables de estado. Estos modelos aparte de explicar un mayor porcentaje de la variación de los tipos de interés al contado, solventan el problema de que los movimientos de los precios de las obligaciones de todos los vencimientos estén perfectamente correlacionados, ya que al incorporar dos fuentes de riesgo, actúan dos shoks en la determinación de la dinámica de la curva de tipos de interés.

Richard (1978) desarrolla un modelo bifactorial en el que las variables de estado son el tanto de interés real instantáneo y la inflación. Cada uno de estos factores se modeliza mediante un proceso raíz cuadrada, es decir, mediante un proceso estocástico con reversión a la media y con varianza en función del nivel de la variable. Este modelo implica también que el rendimiento de la obligación de vencimiento infinito sea constante. Se llega a una solución analítica, suponiendo incorrelación entre los factores del modelo. Boyle (1980) presenta también un modelo bifactorial, similar al anterior en cuanto a la definición de las variables, en el que cada factor se modeliza mediante un proceso Ornstein-Uhlenbeck, es decir, mediante un proceso con reversión a la media y de varianza constante. Se llega a una solución analítica para el caso de independencia entre las variables del modelo.

Brennan y Schwartz (1979) consideran también dos variables de estado, el tanto de interés instantáneo y el rendimiento de la obligación perpétua, incorporando, de esta forma, información del tramo final de la curva de tipos al contado. El modelo resultante no llega a una solución analítica.

Schaefer y Schwartz (1984) presentan un modelo bifactorial de la estructura de tipos con una solución aproximada, al considerar como factores evolutivos de la estructura temporal, el rendimiento de la obligación perpétua y el *spread* entre éste y el tipo de interés instantáneo. La primera variable se modeliza mediante un proceso raíz cuadrada, no necesariamente con reversión a la media, y el *spread* mediante un proceso Ornstein-Uhlenbek. La suma de estos dos factores es, precisamente, el tanto de interés instantáneo y, con el objetivo de facilitar una aproximación analítica como solución de la ecuación en derivadas parciales, se consideran ambas variables incorrelacionadas.

Cox, Ingersoll y Ross (1985b) presentan, de forma análoga al trabajo de Richard (1978), un modelo bifactorial en el que los efectos reales y nominales del tipo de interés instantáneo, se presentan como factores independientes.

Pennacchi (1991) presenta un modelo similar al de Richard (1978) y Boyle (1980), en el que las variables de estado son el tipo de interés instantáneo real y la tasa de inflación, pero supone que ambos factores están correlacionados.

Longstaff y Schwartz (1992) desarrollan un modelo bifactorial de equilibrio intertemporal, utilizando una versión de dos factores del modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985b), de manera que dos factores independientes no identificados siguen un proceso raíz cuadrada con reversión a la media. Efectuando un cambio de variable, modelizan la dinámica de la estructura temporal a través del tanto de interés instantáneo y la varianza instantánea de los cambios en este tipo de interés. Una propiedad particularmente interesante que presenta el modelo es que los precios de las obligaciones de mayor vencimiento no son siempre funciones decrecientes del tipo instantáneo. Chen y Scott (1992) llegan a un modelo muy similar al anterior.

A continuación se enumeran, a modo de resumen, los principales modelos bifactoriales, destacando el proceso estocástico elegido para las variables de estado, así como la forma funcional de los precios de mercado del riesgo asociados:

**Modelos bifactoriales**

| Autores | Factores y procesos estocásticos | Precio de mercado del riesgo |
|---|---|---|
| Richard(1978) | $dR = -a(R - R^*)dt + \sigma_R R^{1/2} dz_R$ | $\lambda_R R^{1/2}$ |
| | $d\pi = -c(\pi - \pi^*)dt + \sigma_\pi \pi^{1/2} dz_\pi$ | $\lambda_\pi \pi^{1/2}$ |
| Brennan-Schwartz(1979) | $dr = r[\alpha \ln(l/pr) + (1/2)\sigma_1^2]dt + \sigma_1 r dz_r$ | $\lambda$ |
| | $dl = l(l - r + \sigma_2^2 + \lambda_2 \sigma_2)dt + l\sigma_2 dz_2$ | eliminado |
| Boyle(1980) | $dR = \alpha_R(\gamma_R - R)dt + \sigma_R dz_R$ | $\lambda$ |
| | $dj = \alpha_j(\gamma_j - j)dt + \sigma_j dz_j$ | $\lambda$ |
| Schaefer-Schwartz(1984) | $ds = m(\mu - s)dt + \gamma dz_1$ | $\lambda$ |
| | $dl = \beta_2(s, l, t)dt + \sigma l^{1/2} dz_2$ | eliminado |

| | | |
|---|---|---|
| Longstaff-Schwartz(1992) | $dX = (a - bX)dt + cX^{1/2}dz_2$ | $0$ |
| | $dY = (d - eY)dt + fY^{1/2}dz_3$ | $\lambda$ |
| Moreno(1997) | $ds = K_1(\mu_1 - s)dt + \sigma_1 dz_1$ | $a + bs(t)$ |
| | $dl = k_2(\mu_2 - l)dt + \sigma_2 dz_2$ | $c + dl(t)$ |

Finalmente, y siguiendo un orden natural, han aparecido modelos que consideran tres variables de estado. Estos modelos permiten considerar una mayor variedad de formas para la curva de tipos al contado. En estos modelos trifactoriales, la estructura temporal en un instante determinado es función de tres variables y podrá, por tanto, variar en nivel, pendiente y convexidad. Kraus y Smith (1993) presentan un modelo que considera tres factores, el tipo de interés instantáneo, su tendencia y la tendencia de esta tendencia. Modelizan cada uno de estos factores mediante procesos brownianos aritméticos, es decir, mediante procesos estocásticos con tendencia esperada y coeficiente de difusión constantes. En una misma línea, Chen (1996) considera como factores evolutivos de la estructura de tipos, el tanto de interés instantáneo, la media a largo plazo de este tipo instantáneo y su volatilidad. De esta forma, se asume que tanto la tendencia esperada como la volatilidad del tipo de interés instantáneo son estocásticas. En este modelo, las variables se describen a través de procesos raíz cuadrada.

Singh (1995) efectúa un análisis de componentes principales para extraer los factores que explican un mayor porcentaje de la variación total de los tipos de interés al contado. Extrae tres componentes pricipales, que no son más que combinaciones lineales de los tipos de interés al contado, y las modeliza cada una de ellas a través de un proceso raíz cuadrada. Se trata, por tanto, de una versión de tres factores del modelo multifactor de Cox, Ingersoll y Ross (1985b).

**Modelos trifactoriales**

| Autores | Factores y procesos estocásticos | Precio de mercado del riesgo |
|---|---|---|
| Kraus-Smith(1993) | $dr = \mu dt + \sigma dz_1$ | $\lambda$ |
| | $d\mu = mdt + sdz_2$ | $\lambda$ |
| | $d\alpha = dm - d\sigma^2 = bdt + \nu dz_3$ | $\lambda$ |
| Chen(1995) | $dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{\sigma} r^{1/2} dz_1$ | $\lambda$ |
| | $d\theta = \nu(\bar{\theta} - \theta)dt + \xi \theta^{1/2} dz_2$ | $\lambda$ |
| | $d\sigma = \mu(\bar{\sigma} - \sigma)dt + \eta \sigma^{1/2} dz_3$ | $\lambda$ |

En otra línea, Langetieg (1980) desarrolla un modelo multifactorial de la estructura temporal de tipos de interés. El modelo considera que el tanto de interés instantáneo es combinación lineal de $n$ factores, que se modelizan mediante procesos Ornstein-Uhlenbek. Se permite, por tanto, que la estructura temporal pueda describir en su dinámica múltiples jorobas.

Cox, Ingersoll y Ross (1985b) presentan una variedad de generalizaciones de su modelo unifactorial. Incluyen una versión en la que la media a largo plazo del tipo instantáneo varía aleatoriamente. El carácter estocástico del nivel de reversión del tipo instantáneo hace que el precio de los bonos dependa de la trayectoria seguida por este factor hasta su valor actual.

Los modelos factoriales más importantes, tanto por su repercusión posterior como por su valor científico, serán explicados de forma resumida en el siguiente apartado.

### 2.2.4 Resumen de los principales modelos factoriales

Es una tarea difícil intentar resumir los principales modelos dinámico-no consistentes de la estructura temporal de tipos de interés, ya que en las últimas décadas éstos han proliferado de una forma muy importante. El objetivo de esta sección no es, por tanto, describir todos y cada uno de estos modelos, sino reflejar las principales características de aquellos más importantes, tanto por su valor científico como por su aplicación posterior, como incluso por su valor histórico.

En esta sección, además, se centra la atención en los modelos no consistentes y factoriales de la estructura temporal de tipos de interés, no sólo por su importancia y grado de desarrollo actual, sino también porque el modelo que se propone y analiza en el siguiente capítulo de esta tesis, queda enmarcado en esta metodología y por ello, se cree conveniente dar más énfasis a este tipo de modelos.

Para no distorsionar el objetivo de esta sección no se desarrollan de forma exhaustiva cada uno de los modelos que se presentan y, básicamente, se resaltan las principales características diferenciadoras de cada uno de ellos. Todos y cada uno de los modelos que se citan en esta sección son casos particulares del modelo general que se acaba de desarrollar y, por lo tanto, la formulación de cada uno de ellos no es más que una simplificación del modelo general expuesto en el apartado uno de esta sección. Así, de cada modelo se destacan los siguientes puntos:

1. si el modelo parte de un equilibrio general o parcial de la economía
2. el número de factores que considera el modelo
3. la evolución estocástica de éstos así como las características que ésta dinámica estocástica implica para los futuros valores de las variables del modelo
4. hipótesis acerca de los precios de mercado del riesgo asociados a los factores
5. obtención o no de solución analítica

1. Los modelos no consistentes con la estructura temporal de tipos de interés han quedado agrupados en modelos de equilibrio general y de equilibrio parcial. El modelo general de la estructura temporal de tipos de interés presentado en este capítulo se corresponde con los de equilibrio parcial pero, al respecto, cabe decir, como se ha comentado en secciones anteriores, que esta misma metodología es aplicable a los de equilibrio general. En estos últimos la dinámica del precio de la obligación está descrita también por una ecuación diferencial estocástica e imponiendo la condición de no arbitraje se deduce la estructura temporal de equilibrio. Ahora bien, el propio modelo establece la naturaleza estocástica de los factores que gobiernan la dinámica de la estructura de tipos, así como la naturaleza de los precios de mercado del riesgo de las variables del modelo. El modelo Cox, Ingersoll y Ross (1985b) es el modelo de equilibrio general por excelencia y se explicará, de forma resumida, en esta misma sección.

2. Respecto al número de factores que considera el modelo, se ha de recordar que los modelos unifactoriales presentan el inconveniente de que los rendimientos de las obligaciones de todos los vencimientos están perfectamente correlacionados. Este inconveniente se soluciona incorporando un mayor número de factores que determinan la dinámica de la estructura temporal. Así, cuando se

incorporan dos factores en el modelo, actúan dos schocks en la determinación de la curva de tipos y los rendimientos de las obligaciones no están perfectamente correlacionados. Además, con dos factores se puede identificar un efecto nivel y pendiente en la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés. La inclusión de un tercer factor permitiría identificar el efecto curvatura en la curva de tipos. Precisamente, uno de los principales objetivos que se pretende con la modelización que se propone al final del trabajo, es establecer un modelo dinámico de la estructura temporal de tipos de interés que recoja posibles cambios de nivel, de pendiente y de convexidad en la curva de tipos de interés.

3. En esta presentación de los principales modelos de la estructura temporal de tipos de interés también se destacan las propiedades distribucionales de las variables de estado del modelo. La elección del proceso estocástico de los factores del modelo es una cuestión a tener en cuenta para determinar, hasta qué punto, el modelo considerado puede ajustarse a la realidad que pretende replicar.

4. En cuarto lugar se ha de tener presente, como se ha comentado anteriormente, que en los denominados modelos de equilibrio parcial es necesario efectuar alguna hipótesis acerca de los precios de mercado del riesgo de las variables del modelo. En este tipo de modelos, a diferencia de lo que ocurre con los de equilibrio general, estos precios son parámetros exógenos. En este sentido, la especificación de los precios de mercado del riesgo no debe ser arbitraria, puesto que una mala especificación de los mismos puede ser contraria a la ausencia de oportunidades de arbitraje. Además, estos parámetros dependen de la estructura preferencial de un inversor representativo y de su actitud ante el riesgo. El valor de estos precios lo proporciona en cada instante el mercado y numerosos trabajos al respecto concluyen que son parámetros que varían a lo largo del tiempo (Brennan-Schwartz (1982), Campbell (1986), Moreno (1997) y Gómez-Martínez (1999)).

5. Por último, se hace mención en cada modelo de la obtención o no de una solución analítica porque, desafortunadamente, pocos modelos llegan a ella.

A continuación se presentan los principales modelos factoriales y no consistentes de la estructura temporal de tipos de interés, según el número de factores que consideran y por orden cronólogico.

## Vasicek (1977)

Es uno de los principales modelos unifactoriales de la estructura temporal de tipos de interés. En este modelo se considera que la única fuente de incertidumbre es el tipo de interés instantáneo sin riesgo, $r(t)$, que sigue el siguiente proceso de difusión:

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz$$

con $\alpha > 0$. Así, el tipo de interés instantáneo sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck, con reversión a la media y coeficiente de difusión constante. Este proceso tiende con una velocidad de ajuste $\alpha > 0$ hacia un valor medio a largo plazo $\gamma$ y va fluctuando, de forma errática y continua, en torno a este valor. De esta forma se garantiza que la variable no alcance valores excesivamente grandes. Sin embargo, el proceso descrito permite que la variable tome valores tanto positivos como negativos, aunque éstos últimos con una probabilidad pequeña, sobre todo para valores altos de $\alpha$ y $\gamma$.

El proceso del tipo de interés instantáneo posee una distribución estacionaria y la variable $r(s)$, condicionada por su valor en $t$, se distribuye como una normal, con la siguiente esperanza y varianza condicionadas:

$$E_t\left[r(s)\right] = \gamma + \left(r(t) - \gamma\right) e^{-\alpha(s-t)}$$

$$Var_t\left[r(s)\right] = \frac{\rho^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(s-t)}\right)$$

$$\forall t \leq s$$

Este modelo es de equilibrio parcial y, por tanto, exige determinar de forma exógena el precio de mercado del riesgo asociado a la única variable de estado del modelo. Vasicek supone que este precio es constante $(\lambda(t\,,\,r(t)) = q)$

A través de un argumento de arbitraje se llega a la ecuación en derivadas parciales para el precio de la obligación cupón cero, que con la condición de que al vencimiento la obligación paga una unidad monetaria, proporciona la dinámica del precio de la obligación. Así, el modelo posee solución analítica y ello facilita su estudio e implementación práctica

$$P(t,s,r) = \exp\left[\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(s-t)}\right)(R(\infty)-r)-(s-t)R(\infty)\right.$$
$$\left.-\frac{\rho^2}{4\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha(s-t)}\right)^2\right]\;,\quad t\leq s$$

donde:

$$R(\infty) = \gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$$

## Dothan (1978)

La única variable de estado que conduce la dinámica de la estructura de tipos de interés, el tipo de interés instantáneo, se desarrolla en el tiempo de acuerdo a un proceso browniano geométrico sin tendencia:

$$dr(t) = \sigma r(t)dz(t)$$

que garantiza que la variable $r(t)$ sólo alcance valores positivos y que implica una distribución lognormal para la misma. Este proceso posee una barrera absorvente en 0, de manera que si la variable alcanza este valor permanece en él de forma indefinida. Además, la varianza del proceso tiende a infinito en el tiempo:

$$Var_t\left[r(u)\right] = r^2(u)e^{\sigma^2(u-t)} \qquad \forall t \leq u$$

El modelo desarrollado es de equilibrio parcial y Dothan considera constante el precio de mercado del riesgo asociado al tipo de interés instantáneo. Ofrece una solución analítica para el caso especial de que este parámetro sea nulo ( $\lambda = 0$ ). Así, el precio de la obligación cupón cero se expresa

$$P(r,\tau) = \frac{1}{\pi^2}x^p \int_0^\infty \sin\left(2x^{1/2}\text{sinh}a\right) \int_0^\infty \exp\left[-(4p^2+\mu^2)\frac{s}{4}\right]$$

$$\mu\text{cosh}\frac{\pi\mu}{2}\left[\Gamma\left(-p+i\frac{\mu}{2}\right)\right]^2 \sin(\mu a)d\mu da + \frac{2}{\gamma(2p)}x^p K_{2p}(2x^{1/2})$$

donde

$$x = \frac{2}{\sigma^2}r \qquad s = \frac{\sigma^2}{2}\tau \quad \text{y} \quad p = \frac{1}{2}+\gamma$$

## Cox-Ingersoll-Ross (1985)

Junto al modelo de Vasicek (1977), es el modelo unifactorial de la estructura temporal de tipos de interés más importante desarrollado en las dos últimas décadas. Pero este modelo, a diferencia de los anteriores, parte de un equilibrio general de la economía para determinar la evolución de la estructura de tipos de interés. Se trata de un modelo de equilibrio general intertemporal para la valoración de activos financieros: las expectativas de futuros eventos, la adversión al riesgo, las características de inversiones alternativas y las preferencias de los agentes, juegan un papel fundamental en la determinación de la dinámica de la estructura de tipos. Ahora bien, esta dinámica se deduce también a partir de la ausencia de oportunidades de arbitraje del mercado financiero y, por tanto, responde a la misma metodología que los clásicos modelos de no arbitraje. Sin embargo, el propio modelo deduce, endógenamente, la evolución estocástica de la variable del modelo, así como la forma funcional del precio de mercado del riesgo asociado a dicha variable, como consecuencia de las condiciones de equilibrio impuestas a las variables de la economía real. Así pues, estos autores deducen la estructura temporal de equilibrio en el marco de un comportamiento maximizador y de unas expectativas racionales.

La variable de estado es el tipo de interés instantáneo sin riesgo, $r(t)$, que es variable independiente del precio de la obligación cupón cero. La dinámica en el tiempo del tipo de interés instantáneo se dessarrolla según la ecuación diferencial estocástica:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dz$$

con $k\,, \theta > 0$ y que modeliza un proceso raíz cuadrada, con reversión a la media, pero con volatilidad variable en función del valor de la variable en cada instante. Este proceso garantiza que la variable tienda a un valor medio a largo plazo $\theta > 0$ con una velocidad $k > 0$, y así la variable con el paso del tiempo no alcanza valores extremadamente elevados. Además, el proceso posee una barrera reflectante en 0, de manera que se garantiza que la variable tome sólo valores positivos, ya que si el proceso alcanza el valor nulo, inmediatamente pasa a tomar valores positivos. Cuando se impone la condición $2k\theta > \sigma^2$, se asegura que la variable tome valores sólo estrictamente positivos.

La distribución de $r(s)$, condicionada por su valor en $t$, $r(t)$, es una $\chi^2$ no centrada con las siguientes expresiones para la esperanza y varianza condicionadas

$$E_t\left[r(s)\right] = r(t)e^{-k(s-t)} + \theta\left(1 - e^{-k(s-t)}\right)$$



$$Var_t\left[r(s)\right] = r(t)\left(\frac{\sigma^2}{k}\right)\left(e^{-k(s-t)} - e^{-2k(s-t)}\right) + \theta\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right)\left(1 - e^{-k(s-t)}\right)^2$$

$$\forall t \leq s$$

El lema de Itô, la ausencia de oportunidades de arbitraje, la condición final de que al vencimiento la obligación cupón cero paga 1 unidad monetaria y la expresión que el propio modelo deduce, endógenamente, para el precio del mercado del riesgo asociado al tipo de interés instantáneo

$$\lambda(t,r)=\frac{\lambda\sqrt{r(t)}}{\sigma}$$

conducen a la obtención de la expresión de la función de descuento o precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia

$$P(r,t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

donde

$$A(t,T)=\left[\frac{2\gamma \mathrm{e}^{[(k+\lambda+\gamma)(T-t)]/2}}{(\gamma+k+\lambda)\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]^{2k\theta/\sigma^2}$$

$$B(t,T)=\frac{2\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+k\lambda)\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}$$

$$\gamma=\left((k+\lambda)^2+2\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

## Richard (1978)

En este modelo se supone que el tipo de interés real instantáneo, $R(t)$, y la tasa de inflación instantánea, $\pi(t)$, son las variables de estado que determinan la dinámica de la estructura de tipos. La dinámica en el tiempo de estas variables está dada por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dR(t)=-a(R-R^*)dt+\sigma_R R^{1/2}dZ_R(t)$$

$$d\pi(t)=-c(\pi-\pi^*)dt+\sigma_\pi \pi^{1/2}dZ_\pi(t)$$

ecuaciones que indican que los dos factores del modelo siguen un proceso raíz cuadrada, es decir, ambos factores se describen a través de procesos con reversión a la media y varianza variable en función del valor de la variable. Por conveniencia se supone independencia entre ambos factores, de manera que los procesos de Wiener no están correlacionados. Además, el modelo no parte de un equilibrio general de la economía y, por tanto, se establecen, exógenamente, los precios de mercado del riesgo asociados a los dos factores:

$$\lambda_R(R,\pi,t) = \lambda_R R^{1/2} \qquad \lambda_\pi(R,\pi,t) = \lambda_\pi \pi^{1/2}$$

A partir de todas estas hipótesis y solucionando la ecuación en derivadas parciales a la que se llega, a partir de la ecuación diferencial estocástica del precio de la obligación y el criterio de eliminación de oportunidades de arbitraje, se obtiene la expresión de la función de descuento para este modelo bifactorial de la estructura temporal

$$P(R,\pi,\tau) = \left[\mathrm{e}^{\gamma\tau}(\nu + \gamma\mathrm{e}^{-\epsilon\tau})/\epsilon\right]^{-\psi} \left[\mathrm{e}^{\gamma\tau}(\mu + \lambda\mathrm{e}^{-\theta\tau})/\theta\right]^{-\Theta}$$

$$\times\exp\left[-R\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\epsilon\tau}}{\nu + \gamma\mathrm{e}^{-\epsilon\tau}}\right) - \pi\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\theta\tau}}{\mu + \lambda\mathrm{e}^{-\theta\tau}}\right)(1-\sigma_P^2)\right]$$

donde:

$$\epsilon = [(a + \sigma_R \Theta_R)^2 + 2\sigma_R^2]^{1/2} > 0$$

$$\gamma = -\tfrac{1}{2}(a + \sigma_R \Theta_R) + \tfrac{1}{2}\epsilon > 0$$

$$\nu = \gamma + (a + \sigma_R \Theta_R) > 0$$

$$\psi = 2aR^* / \sigma_R^2 > 0$$

$$\theta = [(c + \sigma_\pi \Theta_\pi)^2 + 2\sigma_\pi^2 (1 - \sigma_P^2)]^{1/2} > 0$$

$$\lambda = -(c + \sigma_\pi \Theta_\pi)/2 + \theta/2 > 0$$

$$\mu = \lambda + (c + \sigma_\pi \Theta_\pi) > 0$$

$$\Theta = 2c\pi^* / \sigma_\pi^2 > 0$$

## Brennan y Schwartz (1979)

Estos autores desarrollan un modelo de equilibrio parcial de la estructura temporal de tipos de interés, basado en la hipótesis de que toda la estructura temporal, en cualquier instante del tiempo, se expresa como función del tipo de interés instantáneo, $r(t)$, y un tipo de interés al contado a largo plazo, $l(t)$. Asumen que los dos factores que determinan la estructura de tipos siguen el siguiente sistema genérico de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dr = \beta_1(r, l, t)dt + \eta_1(r, l, t)dz_1$$

$$dl = \beta_2(r, l, t)dt + \eta_2(r, l, t)dz_2$$

y suponen que ambos factores no son independientes y que, por tanto, la correlación entre los dos procesos de Wiener, $dz_1$ , $dz_2$, es

$$\mathrm{E}\left[dz_1 dz_2\right] = \rho dt\,.$$

Aplicando un criterio de valoración financiera basado en la ausencia de oportunidades de arbitraje, llegan a la ecuación en derivadas parciales para el precio de la obligación cupón cero. Esta ecuación, junto a la condición de contorno de que al vencimiento la obligación paga 1 unidad monetaria, proporciona el precio de la obligación cupón cero, aplicable en cualquier instante y para cualquier vencimiento.

Además, identifican el tipo de interés a largo plazo como el rendimiento de una obligación perpétua. De esta forma, y teniendo presente que este rendimiento es función del precio de un activo negociable, obtienen el precio de mercado del riesgo asociado a esta variable de estado:

$$\lambda_2(r,l,t) = -\frac{\eta_2}{l} + \frac{(\beta_2 - l^2 + rl)}{\eta_2}$$

Esta identificación del precio del riesgo del segundo factor permite que la ecuación en derivadas parciales del precio de la obligación sea independiente de este parámetro y de $\beta_2(r,l,t)$, el parámetro tendencia del rendimiento de la obligación perpétua. De la expresión de $\lambda_2(r,l,t)$ se deduce la forma funcional de este parámetro tendencia. Además, y para evitar tipos de interés negativos, asumen un coeficiente de difusión para ambos factores que varía con el valor de la variable. Todo ello, junto a la hipótesis de que el tipo instantáneo tiende, estocásticamente, hacia una función del actual tipo de interés a largo plazo, lleva a la siguiente especificación para la dinámica estocástica de las variables del modelo:

$$dr = r(\alpha \ln(\tfrac{l}{pr} + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2)dt + r\sigma_1 dz_1$$

$$dl = l(l - r + \sigma_2^2 + \lambda_2\sigma_2)dt + l\sigma_2 dz_2$$

El modelo no llega a una solución analítica.

## Boyle (1980)

En este modelo propuesto por Boyle se considera que la estructura temporal está determinada por dos variables de estado estocásticas: el tipo de interés instantáneo real, $R(t)$, y la tasa de inflación esperada, $j(t)$. Además, la dinámica de estas dos variables puede ser descrita, con carácter general, por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dR(t) = \lambda_R(R, j)dt + \sigma_R(R, j)dz_R$$

$$dj(t) = \lambda_j(R, j)dt + \sigma_j(R, j)dz_j$$

donde $\lambda_R$ y $\sigma_R$ representan la tendencia y varianza instantáneas del proceso $R(t)$. En un primer estadio de presentación de este modelo, se considera que la covariaza instantánea entre los procesos de Wiener $dz_R$ y $dz_j$, es $\sigma_{Rj}$. Para completar la especificación del modelo se efectúa la hipótesis acerca de los cambios en el nivel de precios, $\pi(t)$, a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$d\pi(t) = j(t)dt + \sigma_\pi(R, j)dz_\pi$$

de manera que el primer término de la ecuación $(j\,dt)$ expresa la inflación esperada en cada instante, mientras que el segundo $(\sigma_\pi dz_\pi)$ representa la inflación no anticipada, es decir, los cambios no esperados en el nivel de precios. Así, el tipo de interés al contado nominal en cada instante, está dado por

$$r(t) = R(T) + j(t) - \sigma_\pi^2$$

Aplicando el lema de Itô al precio de la obligación cupón cero que paga 1 unidad monetaria a su vencimiento y que es función de los dos factores estocásticos antes descritos, se llega a la ecuación diferencial estocástica de la dinámica de este precio. A partir de aquí y aplicando el criterio de eliminación de oportunidades de arbitraje, se llega a la ecuación en derivadas parciales del precio de la obligación, cuya solución proporciona la función de descuento determinista.

Para llegar a una solución analítica, se efectúan las siguientes hipótesis:

- el proceso de difusión para cada una de las dos variables de estado es del tipo Ornstein-Uhlenbeck, es decir, con reversión a la media y coeficiente de volatilidad constante

$$dR = \alpha_R(\gamma_R - R)dt + \sigma_R dz_R$$

$$dj = \alpha_j(\gamma_j - j)dt + \sigma_j dz_j$$

- los dos procesos están incorrelacionados y, por tanto, $\sigma_{Rj} = 0$.

- los precios de mercado del riesgo de ambas variables son constantes: $\psi_R$ y $\psi_j$, respectivamente.

Bajo estas hipótesis se llega a la siguiente expresión para el precio de la obligación cupón cero

$$P(t, R, j) = \exp[G + H]$$

donde:

$$G = F(\alpha_R, t, T)\left[\hat{R} - R\right] - (T-t)\hat{R} - \frac{\sigma_R^2}{4\alpha_R}\left[F(\alpha_R, t, T\right]^2$$

$$H = F(\alpha_j, t, T)\left[\hat{j} - j\right] - (T-t)(\hat{j} - \sigma_\pi^2) - \frac{\sigma_j^2}{4\alpha_j}\left[F(\alpha_j, t, T\right]^2$$

$$F(\alpha_R, t, T) = \frac{(1 - \exp[-\alpha_R(T-t)])}{\alpha_R}$$

$$F(\alpha_j, t, T) = \frac{(1 - \exp[-\alpha_j(T-t)])}{\alpha_j}$$

$$\hat{R} = \gamma_R - \frac{\sigma_R \psi_R}{\alpha_R} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_R^2}{\alpha_R^2}$$

$$\hat{j} = \gamma_j - \frac{\sigma_j \psi_j}{\alpha_j} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_j^2}{\alpha_j^2}$$

La solución obtenida indica que el precio de la obligación es producto de dos factores de descuento. El factor $\exp(G)$ a un tipo de interés real y el factor $\exp(H)$ descuenta a una tasa de inflación. La curva de tipos de interés al contado es, por lo tanto, resultado de una estructura temporal de tipos de interés reales y una estructura temporal asociada al coste de oportunidad del dinero.

## Schaefer-Schwartz (1984)

En este artículo se presenta una solución aproximada de un modelo de dos variables de estado de la estructura temporal de tipos de interés, similar al propuesto por Brennan y Schwartz (1979). En este caso, los factores que conducen la dinámica de la curva de tipos de interés son el rendimiento de la obligación perpétua, $l(t)$, y el *spread* entre éste y el tipo de interés instantáneo, $s(t)$. La elección de estas variables no es en modo alguno arbitraria, sino que se basa en la evidencia empírica de que ambos factores son ortogonales.[20]

Se asume que el *spread*, es decir, la variable que denota la diferencia entre el rendimiento de la obligación perpétua y el tipo de interés instantáneo, sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck, es decir, un proceso estocástico con reversión a la media y varianza constante. De esta forma, argumentan los autores, se permite que esta variable tome tanto valores positivos como negativos. Por otra parte, suponen que la varianza de los cambios en el rendimiento de la obligación perpétua depende del nivel de esta variable. Más exactamente, consideran que esta varianza es proporcional al valor de $l(t)$ en cada instante. Así, los procesos estocásticos propuestos para los factores del modelo son:

$$ds = m(\mu - s)dt + \gamma dz_1$$

$$dl = \beta_2(s, l, t)dt + \sigma\sqrt{l}dz_2$$

En este punto, consideran que el precio de mercado del riesgo del *spread* es un parámetro constante, $\lambda_1 = \lambda$. Sin embargo, y dado que el rendimiento de la obligación perpétua es inversamente proporcional al precio de esta obligación, aplicando la propia definición del precio de mercado del riesgo de $l(t)$, se llega a su expresión

[20]Ayres y Barry (1979-1980), Schaefer (1980) y Nelson y Schaefer (1983).

formal[21]

$$\lambda_2 = -\frac{\sigma}{l} + \frac{\beta_2(s,l,t) - l^2 + rl}{\sigma}$$

Por último, también consideran, como se ha adelantado en párrafos anteriores, que los dos factores del modelo son independientes y ello implica incorrelación entre los dos procesos de Wiener ($\mathrm{E}\left[dz_1 dz_2\right] = 0$).

Con todas estas hipótesis y aplicando el argumento de ausencia de oportunidades de arbitraje, se establece la ecuación en derivadas parciales del precio de la obligación cupón cero, asociada a este modelo bifactorial de la estructura temporal de tipos de interés. Esta ecuación sujeta a la condición final de que al vencimiento la obligación cupón cero paga 1 unidad monetaria, proporciona la función de descuento aplicable para cualquier horizonte temporal. Desafortunadamente, la ecuación en derivadas parciales no presenta solución analítica y requiere de procedimientos numéricos para llegar a una solución. Sin embargo, se obtiene una aproximación a esta solución resolviendo analíticamente la ecuación en derivadas parciales obtenida, en la que se efectúa la hipótesis de que uno de sus coeficientes es constante y por el método de

[21] El precio de mercado del riesgo asociado a $l(t)$, $\lambda_2(s,l,t)$, viene dado por

$$\lambda_2(s,l,t) = \frac{\mu(\tau) - r}{s_1(\tau)}$$

donde $\mu(\tau)$ representa el rendimiento instantáneo esperado de la obligación perpétua y $s_1(\tau)$ expresa la variación no esperada en el rendimiento de la obligación perpétua. Ambos parámetros son fácilmente deducibles, puesto que se tiene la expresión matemática del precio de la obligación perpétua y, por tanto, aplicando el lema de Itô a esta función conocida, se puede determinar, explícitamente, las componentes deterministas y estocásticas de la ecuación diferencial estocástica del rendimiento de la obligación perpétua.

separación de variables, se llega a una solución analítica.

## Longstaff-Schwartz (1992)

En este trabajo se desarrolla un modelo bifactorial de equilibrio general de la estructura temporal de tipos de interés. El modelo parte de una descripción de la economía subyacente y establece hipótesis acerca de la evolución estocástica de las variables relevantes de la economía real y de las preferencias de un inversor representativo.

Se establece la dinámica estocástica de dos variables de estado $X$ e $Y$, a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dX = (a - bX)dt + c\sqrt{X}dz_2$$

$$dY = (d - eY)dt + f\sqrt{Y}dz_3$$

Así, estas dos variables siguen un proceso raíz cuadrada, de manera que la varianza de los cambios en ambas variables es proporcional al valor de cada variable.

A continuación, se efectúa un cambio de variable, de manera que el precio de cualquier activo financiero se puede expresar en función de los dos factores evolutivos de la estructura temporal: el tipo de interés instantáneo, $r(t)$, y la volatilidad instantánea de los cambios en este tipo de interés, $V(t)$. En estas transformaciones aparecen parámetros relacionados con variables de la economía real y permiten deducir la evolución estocástica en el tiempo de $r(t)$ y $V(t)$.[22]

El modelo llega a una solución analítica por el método de separación de variables

$$P(r, V, \tau) = A^{2\gamma}(\tau B^{2\eta}(\tau)\exp\{k\tau + C(\tau)r + D(\tau)V\}$$

[22]La expresión de las ecuaciones diferenciales asociadas a $r(t)$ y $V(t)$ se pueden encontrar en Longstaff y Schwartz (1992), pp.1264.

donde:

$$A(\tau) = \frac{2\theta}{(\delta+\theta)(\exp(\theta\tau)-1)+2\theta}$$

$$B(\tau) = \frac{2\psi}{(v+\psi)(\exp(\psi\tau)-1)+2\psi}$$

$$C(\tau) = \frac{\alpha\theta(\exp(\psi\tau)-1)B(\tau)-\beta\psi(\exp(\theta\tau)-1)A(\tau)}{\theta\psi(\beta-\alpha)}$$

$$D(\tau) = \frac{\psi(\exp(\theta\tau)-1)A(\tau)-\theta(\exp(\psi\tau)-1)B(\tau)}{\theta\psi(\beta-\alpha)}$$

y

$$v = \xi + \lambda$$

$$\theta = \sqrt{2\alpha + \delta^2}$$

$$\psi = \sqrt{2\beta + v^2}$$

$$k = \gamma(\delta + \theta) + \eta(v + \psi)$$

Los coeficientes que aparecen en la expresión de esta función de descuento están relacionados con variables de la economía real y no se especifican en este resumen, dado que el modelo se ha presentado prescindiendo del desarrollo del equilibrio intertemporal de partida.

## Moreno (1997)

En este modelo de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, se considera que el precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia depende, únicamente, de dos factores: un tipo de interés al contado a largo plazo, $L(t)$, y el *spread*, $s(t)$, o diferencia entre el tipo de interés instantáneo y el tipo de interés a largo plazo. Ambos factores siguen un proceso Ornstein-Uhlenbeck, proceso estocástico con una componente tendencia que denota reversión a la media y un coeficiente de difusión constante:

$$ds = K_1(\mu_1 - s)dt + \sigma_1 dw_1$$

$$dL = K_2(\mu_2 - l)dt + \sigma_2 dw_2$$

Además, y con el objetivo de llegar a una solución analítica, se considera que ambas variables son ortogonales y, por lo tanto, se supone que los procesos de Wiener están incorrelacionados

$$\mathrm{E}\left[dw_1 dw_2\right] = 0\ .$$

El modelo desarrollado está dentro del grupo de modelos de equilibrio parcial y, por ello, determina exógenamente los precios del mercado del riesgo asociados a las dos variables del modelo. En este sentido, y para permitir que estos parámetros varíen en el tiempo, se supone que ambos son lineales respecto al valor de la variable

$$\lambda_1(t, s) = a + bs(t)$$

$$\lambda_2(t, L) = c + dL(t)$$

A continuación, se determina la ecuación en derivadas parciales del precio de la obligación, aplicando el criterio de eliminación de oportunidades de arbitraje. Dado que las variables del modelo son ortogonales, esta ecuación en derivadas parciales se soluciona aplicando el método de separación de variables. El resultado es que el valor en $t$ de la obligación cupón cero que paga una unidad monetaria a su vencimiento $T$, es

$$P(s, L, t, T) = A(\tau)\mathrm{e}^{-B(\tau)s - C(\tau)L}$$

donde $\tau = T - t$ y

$$A(\tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)$$

$$A_1(\tau) = \exp\left\{-\tfrac{\sigma_1^2}{4q_1}B^2(\tau) + s^*\left(B(\tau) - \tau\right)\right\}$$

$$A_2(\tau) = \exp\left\{-\tfrac{\sigma_2^2}{4q_2}C^2(\tau) + L^*\left(C(\tau) - \tau\right)\right\}$$

$$B(\tau) = \tfrac{1-e^{-q_1\tau}}{q_1}$$

$$C(\tau) = \tfrac{1-e^{-q_2\tau}}{q_2}$$

con

$$q_1 = k_1 + b\sigma_1 \qquad q_2 = k_2 + d\sigma_2$$

$$s^* = \hat{\mu}_1 - \tfrac{\sigma_1^2}{2q_1^2} \qquad L^* = \hat{\mu}_2 - \tfrac{\sigma_2^2}{2q_2^2}$$

$$\hat{\mu}_1 = \tfrac{k_1\mu_1 - a\sigma_1}{q_1} \qquad \hat{\mu}_2 = \tfrac{k_2\mu_2 - c\sigma_2}{q_2}$$

## Chen (1996)

Se trata de un modelo de tres factores de la estructura temporal de tipos de interés, basado en la teoría de valoración por ausencia de oportunidades de arbitraje. Las tres variables del modelo son: el tipo de interés instantáneo, $r(t)$, la media, $\theta(t)$, y la volatilidad de este tipo de interés instantáneo, $v(t)$. De esta forma, el modelo recoge la evidencia empírica de que tanto el valor medio esperado como la volatilidad del tipo de interés instantáneo son estocásticos. Así, la dinámica en el tiempo de estas variables se expresa a través de

$$dr(t) = K(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{v(t)}dz_1(t)$$

$$d\theta(t) = \nu(\bar{\theta} - \theta(t))dt + \xi\sqrt{\theta(t)}dz_2(t)$$

$$dv(t) = \mu(\bar{v} - v(t))dt + \eta\sqrt{v(t)}dz_3(t)$$

El tipo de interés instantáneo sigue un proceso de difusión del tipo Vasicek (1977), pero en una versión más general, puesto que se permite que los parámetros que caracterizan la evolución en el tiempo de esta variable (la media esperada y su volatilidad) varíen de forma estocástica. De esta forma y al haber especificado un proceso Ornstein-Uhlenbeck para $r(t)$, este factor tiende hacia un valor medio esperado, $\theta(t)$ que en este caso no es un parámetro constante, si no que varía en el tiempo. A su vez, $\theta(t)$, tiende hacia un valor constante a largo plazo, dado que se especifica su evolución estocástica a través de un proceso raíz cuadrada, es decir, proceso con reversión a la media y varianza proporcional al valor de la variable. Por otra parte, también se permite que la volatilidad del tipo instantáneo sea una variable aleatoria en cada instante y, en concreto, se especifica un proceso raíz cuadrada para este factor, con el propósito de evitar que esta volatilidad estocástica tome valores negativos en su recorrido.

Además, se asume la hipótesis de que los procesos de Wiener son mutuamente independientes[23], lo que permite resolver la ecuación en derivadas parciales del precio de la obligación por el método de separación de variables. Así, el valor en $t$ del precio de la obligación cupón cero que paga una unidad monetaria a su vencimiento $T$, es

$$P(r, \theta, v, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r - C(\tau)\theta - D(\tau)v}$$

[23]A pesar de la hipótesis de independencia entre los procesos de Wiener, el tipo de interés instantáneo está correlacionado con su media esperada a largo plazo y su volatilidad, a través de la ecuación diferencial estocástica especificada para este tipo de interés instantáneo.

donde

$$A(\tau) = \left(\frac{X^{\nu'/2k}(\Gamma J_G(Z)+Y_G(Z))}{\Gamma J_G(\sqrt{2}\xi/k)+Y_G(\sqrt{2}\xi/k)}\right)^{-\frac{2\nu\bar{\theta}}{\xi^2}} \times \left(\frac{X^{\rho}\mathrm{e}^{-\phi(X-1)}(\Lambda U(Q,S,2\phi X)+M(Q,S,2\phi X))}{\Lambda U(Q,S,2\phi)+M(Q,S,2\phi)}\right)^{-\frac{2\mu\bar{v}}{\eta^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{1-\mathrm{e}^{-k\tau}}{k}$$

$$C(\tau) = -\frac{\nu'}{\xi^2} - \frac{kZ[\Gamma(J_{G-1}(Z)-J_{G+1}(Z))+Y_{G-1}(Z)-Y_{G+1}(Z)]}{2\xi^2(\Gamma J_G(Z)+Y_G(Z))}$$

$$D(\tau) = \frac{2k}{\eta^2}\left[-\rho + \phi X + \frac{2X\Lambda Q\phi U(Q+1,S+1,2\phi X)}{\Lambda U(Q,S,2\phi X)+M(Q,S,2\phi X)} - \frac{2X\phi\frac{Q}{S}M(Q+1,S+1,2\phi X)}{\Lambda U(Q,S,2\phi X)+M(Q,S,2\phi X)}\right]$$

con

$$X = \mathrm{e}^{-k\tau} \qquad Z = \frac{\sqrt{2}\xi\mathrm{e}^{-k\tau/2}}{k}$$

$$\Gamma = -\frac{\xi\sqrt{2}Y_{G-1}(\sqrt{2}\xi/k)+2\nu' Y_G(\sqrt{2}\xi/k)-\xi\sqrt{2}Y_{G+1}(\sqrt{2}\xi/k)}{\xi\sqrt{2}J_{G-1}(\sqrt{2}\xi/k)+2\nu' J_G(\sqrt{2}\xi/k)-\xi\sqrt{2}J_{G+1}(\sqrt{2}\xi/k)}$$

$$\Lambda = -\frac{(\rho-\phi)M(Q,S;2\phi)-2\phi Q/SM(Q+1,S+1,2\phi)}{(\rho-\phi)U(Q,S;2\phi)+2\phi QU(Q+1,S+1;2\phi)}$$

$$G = \frac{\sqrt{2\xi^2+\nu'^2}}{k} \qquad Q = -\frac{\beta}{2\phi} + \frac{S}{2}$$

$$S = \frac{k+\sqrt{\mu'^2-4\alpha k^2}}{k} \qquad \rho = \frac{\mu'+\sqrt{\mu'^2-4\alpha k^2}}{2k}$$

$$\alpha = (1-2k\lambda_r)\frac{\eta^2}{4k^4} \qquad \beta = (k\lambda_r-1)\frac{\eta^2}{2k^4}$$

$$\phi = i\frac{\eta}{2k^2}$$

## 2.3 Modelos consistentes de la estructura temporal de tipos de interés

Dentro de los denominados modelos consistentes de la estructura temporal, destacan los trabajos de Ho y Lee (1986), Heath, Jarrow y Morton (1992), Hull y White (1990 y 1993) y Black, Derman y Toy (1990).[24] Ho y Lee (1986), pioneros de este enfoque de modelización de la estructura de tipos, toman exógenamente como dados los precios y procesos de las obligaciones actuales, de manera que modelizan la evolución de la estructura temporal a través de un modelo que permite un ajuste a la curva de tipos inicial, la observada. En una economía en tiempo discreto imponen una dinámica de la estructura de tipos acorde con la ausencia de oportunidades de arbitraje. Concretamente, el precio de la obligación fluctúa aleatoriamente en el tiempo a través de un proceso binomial. Sin embargo, algunos autores argumentan que existen desventajas en esta propuesta, ya que el modelo describe toda la estructura de volatidad a través de un solo parámetro y además, el modelo no incorpora reversión a la media.

Black, Derman y Toy (1990) desarrollan un modelo en la línea de Ho y Lee (1986), eliminando algunas de sus restricciones, pero incorporando otro problema y es que debido a la definición de la función de volatilidad, el tipo de interés instantáneo no presenta reversión a la media. Sin embargo, el proceso especificado para este factor asegura la positividad del tipo de interés. En este modelo tanto la tendencia esperada

[24]Los modelos no consistentes son denominados, habitualmente, modelos factoriales ya que la dinámica de la curva de tipos depende de una o varias variables de estado, denominadas factores. Más adelante se precisará en ello, pero se adelanta que dentro de los denominados modelos consistentes, existe un grupo de modelos que también hacen depender la dinámica de la curva de uno o más factores, pero estos factores son procesos estocásticos no estacionarios; es decir, estos factores se modelizan mediante procesos estocásticos con parámetros dependientes del tiempo. A este grupo de modelos, en esta tesis doctoral, no se les trata como modelos factoriales, sino como modelos consistentes con la estructura temporal.

del tanto de interés instantáneo como su volatilidad son parámetros que dependen del tiempo y así, el modelo no sólo replica la estructura temporal inicial sino también la actual estructura de volatilidades de los tipos de interés. No obstante, el modelo no presenta solución analítica y para poder implementar el modelo es necesario solucionar dos ecuaciones no lineales para cada punto de la curva de tipos.

Heath, Jarrow y Morton (1992) generalizan el modelo de Ho y Lee (1986) en una economía en tiempo continuo y considerando múltiples factores. En contraste con el modelo de Ho y Lee (1986) toman como dada la curva de tipos *forward* inicial y consideran que el vector de las variables de estado es la totalidad de la curva de tipos *forward*. Especifican su dinámica en el tiempo a través de un número finito de ecuaciones diferenciales estocásticas y, así, asumen que los tantos *forward* se mueven en el tiempo por un número finito de movimientos brownianos estándards. De esta forma, la formulación en tiempo continuo del modelo facilita la estimación de los parámetros de los procesos estocásticos, tan complicada en el modelo discreto de Ho y Lee (1986). Seguidamente, se imponen restricciones en la tendencia determinista del proceso para garantizar la ausencia de oportunidades de arbitraje. En este modelo la obtención de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés no depende, explícitamente, de los precios de mercado del riesgo, ya que éstos están implícitos en la estructura temporal actual. Es decir, los precios de mercado del riesgo son sustituidos por una función de volatilidades de los tipos *forward* de diferentes plazos, denominada estructura de volatilidades. Pero, desafortunadamente, el proceso resultante para el tanto de interés instantáneo es no markoviano. Esto dificulta la implementación del modelo desde un punto de vista computacional, ya que la evolución futura del tipo de interés instantáneo depende de toda su historia pasada y no sólo de su valor actual.[25]

[25]Investigaciones posteriores han intentado desarrollar casos específicos del modelo continuo de Heath, Jarrow y Morton (1992) que asegurasen la propiedad de Markov en la serie del tipo de interés a corto plazo, pero, generalmente, se ha llegado a formulaciones que requieren procesos que permiten tipos de interés negativos.

Hull y White (1990 y 1993)[26] en vez de tomar como vector de variables de estado la curva de tipos al contado o la curva de tipos *forward*, establecen un modelo de equilibrio en el que los parámetros del único factor evolutivo de la estructura temporal dependen del tiempo (en la misma línea que Black, Derman y Toy (1990)). Constituye un modelo de la estructura temporal mucho más general y con más flexibilidad para ajustarse a una curva de tipos y a una estructura de volatilidad dadas. Este modelo requiere de ciertas hipótesis acerca de la forma funcional del precio del mercado del riesgo asociado al tanto de interés instantáneo, aunque no exige su total especificación, ya que queda determinado por la información contenida en la estructura temporal inicial. Sin embargo, excepto para la extensión del modelo de Vasiceck, este enfoque no proporciona soluciones analíticas y, por tanto, se debe recurrir a métodos numéricos.

Jamshidian (1988) llega a una especificación en tiempo continuo del modelo de Ho y Lee (1986) en el que la tendencia esperada del tipo de interés instantáneo es un parámetro dependiente del tiempo y que es función de la curva de tipos *forward* actual. Sin embargo, este tipo de modelos son criticados porque la variable de estado no presenta reversión a la media y su volatilidad es un coeficiente constante y, por tanto, no impone una barrera reflectante en 0. Ello implica que la volatilidad de todos los tipos al contado y *forward* sea constante. Posteriormente, el mismo autor ha desarrollado modelos más generales que incorporan reversión a la media, pero con una volatilidad aún constante.

En resumen, los modelos consistentes de la estructura temporal de tipos de interés pueden agruparse en dos enfoques alternativos. El primer grupo englobaría modelos de la clase de Ho y Lee (1986), que utilizan precios de obligaciones, y de Heath, Jarrow y Morton (1992), que utilizan la curva de tipos *forward*. El segundo grupo englobaría modelos que describen la estructura temporal de tipos de interés

[26]En esta línea se encuentran también los trabajos de Jamshidian (1988, 1990 y 1991) y Black y Karasinski (1991).