UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISIÓN DE CIENCIAS JURÍDICAS, ECONÓMICAS Y SOCIALES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA ECONÓMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

DINÁMICA DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS: MODELO DE TRES FACTORES

- Tesis Doctoral presentada por Mercedes Galisteo Rodríguez para optar al título de Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales.
- Directora de la Tesis: Dra. Hortènsia Fontanals Albiol.
- Programa de doctorado: Metódos Matemáticos en Economía Financiera. Bienio: 92-94

Junio de 2000

a través de factores cuyas ecuaciones diferenciales estocásticas tienen parámetros dependientes del tiempo, de manera que éstos se calibran para que el modelo se ajuste a la estructura temporal actual. Ambos tienen la ventaja de replicar, perfectamente, la estructura temporal de tipos de interés inicial. Sin embargo, esta ventaja se vuelve desventaja cuando se considera que la estructura temporal actual debe ser estimada, ya que no se posee información de todos los tipos de interés de todos los vencimientos. De esta forma, estos modelos consistentes requieren de métodos de interpolación para estimar rendimientos de bonos que no se negocian en el mercado.

Por otra parte, estos modelos consistentes se basan en la hipótesis de que no existen oportunidades de arbitraje en la estructura temporal actual y esta hipótesis es cuestionable[27]. Así, la metodología de estos modelos consistentes no detecta la existencia de oportunidades de arbitraje y puede llevar a una infravaloración de ciertos activos derivados.[28]

2.4 Teoría de las expectativas

En la estructura temporal de tipos de interés están implícitas las expectativas sobre los tipos de interés futuros. La teoría de las expectativas recoge esta idea y en su formulación más pura afirma que el perfil de los tipos *forward* refleja, exactamente,

[27] Cornell y Shapiro (1989) demuestran empíricamente la presencia de arbitraje en bonos del Tesoro del gobierno inglés debido, aparentemente, al comportamiento de ciertos inversores japoneses.

[28] Fernández Navas (1998) demuestra empíricamente que los modelos consistentes replican mejor que los no consistentes los precios de los bonos, pero, sin embargo, valoran peor ciertos activos derivados. En concreto, los dos modelos unifactoriales no consistentes más populares, Vasicek (1977) y Cox, Ingersoll y Ross (1985) los compara con el modelo consistentes de Hull y White (1990) en la valoración de bonos, opciones sobre bonos, *caps* sobre tipos de interés y *swaptions*, para el mercado español.

las expectativas sobre los futuros tipos de interés a corto plazo

$$f(t\,,\,T) = \mathrm{E}_t[r(T)]\,. \tag{2.29}$$

Además, y en un contexto de total certidumbre, los futuros tipos de interés a corto plazo esperados tienen una influencia directa sobre los tipos de interés al contado a largo plazo, existentes en un momento dado, dada la relación entre los tipos a largo plazo y los tipos *forward.*

En este contexto de certidumbre, la función de descuento $P(t,T)$ aplicable en t para un plazo $\tau = T - t$, y el tipo de interés al contado vigente en t para un plazo τ, se relacionan a través de:

$$P(t,T) = \exp\{-R(t,T)(T-t)\} \tag{2.30}$$

y la relación de esta función de descuento con el tipo de interés instantáneo *forward*, viene dada por:

$$P(t,T) = \exp\{-\int_t^T f(t,s)ds\} \tag{2.31}$$

Así, se deduce:

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds$$

que el tipo de interés al contado para un plazo τ se puede concebir como una especie de media de los tipos de interés instantáneos *forward* prevalecientes para ese plazo. De esta forma y según la formulación pura de la hipótesis de las expectativas, si en la anterior expresión se sustituyen los tipos *forward* por los tipos de interés al contado esperados para los periodos sucesivos hasta T, el tipo de interés al contado para un plazo τ es resultado de las expectativas sobre los futuros tipos de interés a corto plazo esperados.

Sin embargo, la relajación de la hipótesis de plena certidumbre en cuanto a los tipos de interés futuros da lugar a las diferentes **versiones de la hipótesis de las expectativas.** A continuación se formalizan las distintas versiones de la hipótesis de las expectativas en su forma pura, es decir, en ausencia de primas de riesgo (Cox, Ingersoll y Ross (1981), pp.774-777).

1. **Teoría pura de las expectativas insesgadas** (*Unbiased expectations hypothesis*), asume que los tipos *forward* son iguales a los tipos de interés a corto plazo esperados para el futuro

$$f(t\,,\,T) = \mathrm{E}_t[r(T)] \tag{2.32}$$

   es decir, esta versión considera que los tipos de interés *forward* son estimadores insesgados de los tipos de interés futuros. Dada la definición de los tipos de interés *forward* instantáneos en función del precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia, la anterior relación se puede expresar

$$\frac{-\frac{\partial P_u(t,T)}{\partial T}}{P_u(t,T)} = \mathrm{E}_t[r(T)] \tag{2.33}$$

   Se ha utilizado el subíndice u, $P_u(t\,,\,T)$, para denotar que es la estructura de precios implícita en esta versión de la hipótesis de las expectativas.

2. **Teoría local de la hipótesis de las expectativas** (*Local expectations hypothesis*), establece que el rendimiento instantáneo esperado en t para una obligación con vencimiento en T, coincide con el tipo de interés instantáneo

actual

$$\mathrm{E}\left[\frac{\frac{\partial P_l(t,T)}{\partial t}}{P_l(t,T)}\right] = r(t) \tag{2.34}$$

Ya que $r(t)$ es una variable cierta y conocida y la elección del vencimiento de la obligación es arbitraria, la anterior relación implica la igualdad entre los rendimientos instantáneos esperados de las obligaciones de todos los vencimientos.

En este caso $P_l(t,T)$ denota la estructura de precios relativa a la versión local de la hipótesis de las expectativas.

3. **Hipótesis de rendimientos al vencimiento** (*Returns to maturity hypothesis*), establece la igualdad entre los rendimientos de dos estrategias de inversión alternativas. Los activos financieros con distintos plazos de amortización son perfectamente sustitutivos y así, se obtiene el mismo rendimiento ante una obligación con vencimiento en T, que ante la posibilidad de ir realizando futuras reinversiones en cada instante[29]

$$\frac{1}{P_r(t,T)} = \mathrm{E}\left[\exp\int_t^T r(s)ds\right] \tag{2.35}$$

Es decir, el rendimiento de mantener la obligación cupón cero que vence en T

[29]Se respeta en este apartado la formulación de Cox, Ingersoll y Ross (1981), pero la anterior relación en la nomenclatura que se viene utilizando en esta teis doctoral, se podría expresar

$$\frac{1}{P_r(t,T)} = \mathrm{E}\left[\exp\int_t^T f(t,s)ds\right]$$

ya que estos tipos instantáneos, excepto el del instante de observación, son todos tipos *forward*.

hasta su vencimiento es igual al rendimiento esperado para la serie de obligaciones que vencen en cada instante a lo largo de este plazo.

En este caso, la función $P(t,T)$ se expresa $P_r(t,T)$, para indicar que los precios deducidos a través de esta relación son los implícitos a la hipótesis de rendimientos al vencimiento.

4. **Hipótesis de tantos al vencimiento** (*Yields to maturity hypothesis*)

$$\frac{-1}{T-t}\ln P_y(t,T) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds\right] \tag{2.36}$$

El tanto de interés al contado en t para un plazo τ es equivalente a la serie de tantos de interés esperados para los sucesivos plazos instantáneos de todo el horizonte τ.

Si en esta expresión se derivan ambos lados de la igualdad respecto al vencimiento T, se llega a:

$$\frac{-\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}}{P(t,T)} = \mathrm{E}_t[r(T)]$$

y, por tanto, esta última relación coincide con la formulación de la hipótesis pura de las expectativas insesgadas. Por ello, en adelante, sólo se considerarán las tres primeras formulaciones de la hipótesis de las expectativas, ya que como se ha podido comprobar, la última versión presentada coincide con la hipótesis pura de las expectativas insesgadas.

Resulta fácil demostrar que bajo un ambiente de total certidumbre todas las versiones de la hipótesis de las expectativas son equivalentes. Ahora bien, y como se verá a continuación, cuando se relaja esta hipótesis las diferentes versiones son incompatibles entre sí.

Las distintas formulaciones de la teoría de las expectativas son inconsistentes entre sí, ya que en el mercado sólo se observa un conjunto de precios para las obligaciones cupón cero libres de riesgo de insolvencia. Por lo tanto, sólo se puede dar una de estas versiones para un mercado particular, porque según la desigualdad de Jensen, que será enunciada a continuación, cada una de ellas implica una estructura de precios diferente. En el contexto de estas teorías, las diferentes estructuras de precios son debidas a la aleatoriedad de los tipos de interés futuros y quedan caracterizadas por la desigualdad de Jensen.

La desigualdad de Jensen[30] afirma:

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } x \text{ es una variable aleatoria}\\[2ex] \text{y } g(x) \text{ es una función estrictamente convexa de } x\end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{E}\left[g(x)\right] > g\ (\mathrm{E}\left[x\right])$$

y, por otra parte

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } x \text{ es una variable aleatoria}\\[2ex] \text{y } g(x) \text{ es una función estrictamente cóncava de } x\end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{E}\left[g(x)\right] < g\ (\mathrm{E}\left[x\right])$$

La estructura de precios que se deriva para cada una de estas versiones de la hipótesis de las expectativas es la siguiente:

1. **Teoría pura de las expectativas insesgadas:**

$$\frac{-\frac{\partial P_u(t,T)}{\partial T}}{P_u(t,T)} = \mathrm{E}_t[r(T)]$$

[30] Anderson, N. et. al. (1996), pp.173-174.

integrando ambos lados de la igualdad

$$-\int_t^T \frac{\frac{\partial P_u(t,s)}{\partial s}}{P_u(t,s)} ds = \int_t^T \mathrm{E}_t[r(s)]ds$$

$$\ln P_u(t,T) - \ln P_u(t,t) = -\int_t^T \mathrm{E}_t[r(s)]ds$$

$$\ln P_u(t,T) = -\int_t^T \mathrm{E}_t[r(s)]ds$$

$$P_u(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T \mathrm{E}_t[r(s)]ds}$$

$$P_u(t,T) = \exp\left\{-\mathrm{E}_t\left[\int_t^T r(s)ds\right]\right\} \tag{2.37}$$

2. **Teoría local de la hipótesis de las expectativas**

$$\mathrm{E}\left[\frac{\frac{\partial P_l(t,T)}{\partial t}}{P_l(t,T)}\right] = r(t)$$

integrando la anterior expresión

$$\mathrm{E}\left[\int_t^T \frac{\frac{\partial P_l(s,T)}{\partial s}}{P_l(s,T)} ds\right] = \int_t^T r(s)ds$$

$$\mathrm{E}\left[\ln P_l(T,T) - \ln P_l(t,T)\right] = \int_t^T r(s)ds$$

$$\mathrm{E}\left[-\ln P_l(t,T)\right] = \int_t^T r(s)ds$$

$$P_l(t,T) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\right] \tag{2.38}$$

3. **Hipótesis de rendimientos al vencimiento**

$$\frac{1}{P_r(t\,,\,T)} = \mathrm{E}\left[\exp \int_t^T r(s)ds\right]$$

$$P_r(t\,,\,T) = \frac{1}{\mathrm{E}\left[\exp \int_t^T r(s)ds\right]} \tag{2.39}$$

Dada la estructura de precios deducida para cada versión de la hipótesis de las expectativas, la desigualdad de Jensen lleva a la siguiente relación

$$P_l(t,T) > P_u(t,T) > P_r(t,T) \qquad \forall t < T \tag{2.40}$$

y como que en el mercado sólo se observa una estructura de precios, las tres versiones de la hipótesis de las expectativas no pueden generar, simultáneamente, los precios existentes en un momento dado en un mercado particular. Las tres versiones de la hipótesis de las expectativas son mutuamente inconsistentes entre sí. Además, Cox, Ingersoll y Ross (1981) demuestran que la única versión de la hipótesis de las expectativas compatible con la ausencia de oportunidades de arbitraje es la teoría local de las expectativas.

A continuación, se definen las primas temporales y las relaciones de éstas con las diferentes versiones de la hipótesis de las expectativas. La estructura temporal de tipos de interés definirá unas determinadas primas temporales que van a permitir decidir sobre la consistencia de las distintas versiones de la teoría de las expectativas.

2.4.1 Primas temporales

La estructura temporal de tipos de interés de equilibrio así como el proceso estocástico del precio de la obligación definen, en cada instante, unas primas temporales. Las distintas versiones de la hipótesis de las expectativas implican diferentes valores para estas primas.

En la literatura financiera no hay mucho acuerdo sobre el término prima temporal. Según Anderson et al. (1996) las primas temporales se pueden clasificar en dos tipos:

- **Prima de rendimiento instantánea** o *instantaneous holding premium*
- **Prima a plazo instantánea** o *instantaneous forward premium*

La **prima de rendimiento instantánea** o **prima de riesgo instantánea** describe, en cada instante, la diferencia entre el rendimiento instantáneo esperado en t para la obligación con vencimiento en T y el tipo de interés instantáneo vigente en t. De esta forma, esta prima recoge, en cada instante, el exceso de rendimiento que los inversores exigen como compensación por la incertidumbre existente en cuanto a los rendimientos esperados de sus inversiones

$$h(t,T) = \mu(t,\vec{v}(t),T) - r(t) \tag{2.41}$$

En esta relación la prima a plazo instantánea se ha denotado por $h(t,T)$ y $\mu(t,\vec{v}(t),T)$ representa el rendimiento instantáneo esperado para la obligación cupón cero que vence en T y, como ha quedado explicitado en la sección 2 de este capítulo, depende en cada instante de las variables de estado consideradas en la modelización de la estructura temporal, así como del vencimiento de la obligación. Por otra parte, $r(t)$ es el tipo de interés instantáneo libre de riesgo.

Cada una de las versiones de la hipótesis de las expectativas implica un valor diferente para $\mu(t,\vec{v}(t),T)$. Si se considera la hipótesis de rendimientos al vencimiento

$$\frac{1}{P_r(t,T)} = \mathrm{E}\left[\exp\int_t^T r(s)ds\right]$$

y se deriva respecto al momento de observación t, se llega a

$$\mathrm{E}\left[\frac{d(\frac{1}{P(t,T)})}{P(t,T)}\right] = -r(t)dt$$

Aplicando el lema de Itô al proceso $\frac{1}{P(t,T)}$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\frac{d(\frac{1}{P(t,T)})}{\frac{1}{P(t,T)}} = \left(-\mu(t,\vec{v}(t),T) + \sigma^2(t,\vec{v}(t),T)\right)dt - \sigma(t,\vec{v}(t),T)dz(t)$$

donde $\sigma(t,\vec{v}(t),T)$ es la variación no esperada en el rendimiento de la obligación debida a cambios aleatorios de las variables del modelo.

Considerando

$$\mu(t,\vec{v}(t),T) = \mathrm{E}\left[\frac{d(\frac{1}{P(t,T)})}{P(t,T)}\right] = -r(t)dt$$

y la anterior ecuación diferencial estocástica, se deduce el siguiente valor para el rendimiento instantáneo esperado de la obligación

$$\mu(t,\vec{v}(t),T) = r(t) + \sigma^2(t,\vec{v}(t),T) \qquad (2.42)$$

De esta forma, y bajo la hipótesis de rendimientos al vencimiento, se espera que el rendimiento instantáneo de la obligación cupón cero exceda del correspondiente tipo de interés instantáneo libre de riesgo en $\sigma^2(t,\vec{v}(t),T)$.

Si se considera la hipótesis pura de las expectativas insesgadas

$$\frac{-\frac{\partial P_u(t,T)}{\partial T}}{P_u(t,T)} = \mathrm{E}_t[r(T)]$$

y se deriva con respecto al momento de observación t y se toma esperanza matemática, se llega a

$$\mathrm{E}_t[d\ln P(t,T)] = r(t)dt$$

Por el lema de Itô, el proceso estocástico $\ln P(t,T)$ se desarrolla en el tiempo según la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$d\ln P(t\,,T) = \left(\mu(t,\vec{v}(t),T) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,\vec{v}(t),T)\right)dt + \sigma(t,\vec{v}(t),T)dz(t)$$

lo que conduce a afirmar que también la hipótesis de las expectativas insesgadas conlleva que el rendimiento esperado de la obligación exceda del tipo de interés instantáneo sin riesgo

$$\mu(t,\vec{v}(t),T) = r(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,\vec{v}(t),T) \tag{2.43}$$

Por último, cabe recordar que la versión local de las expectativas afirma que el rendimiento instantáneo esperado de la obligación cupón cero coincide con el tipo de interés instantáneo sin riesgo

$$\mu(t,\vec{v}(t),T) = r(t) \tag{2.44}$$

Así, dado que $r(t)$ es conocido y, según los diferentes valores deducidos para el rendimiento instantáneo esperado de la obligación, se establece la siguiente relación de la prima de riesgo para cada una de las versiones de la hipótesis de las expectativas

$$h_l(t,T) < h_u(t,T) < h_r(t,T) \tag{2.45}$$

Evidentemente, $h_l(t,T)$ es nula. Es decir, la versión local de la hipótesis de las expectativas implica una prima de riesgo nula. Por lo tanto, las primas de riesgo asociadas a la teoría pura de las expectativas insesgadas ($h_u(t,T)$) y a la versión de rendimientos al vencimientos ($h_r(t,T)$) tomarán valores estrictamente positivos.

La **prima a plazo instantánea** da, en cada instante, la diferencia entre el tipo de interés instantáneo *forward* y el tipo de interés instantáneo esperado para un momento futuro

$$\pi(t,T) = f(t,\vec{v}(t),T) - \mathrm{E}_t[r(T)] \tag{2.46}$$

Un valor positivo de esta prima indica que el tipo *forward* instantáneo excede del correspodiente tipo de interés instantáneo esperado.

La relación existente entre el tipo instantáneo *forward* y la prima de rendimiento instantánea es positiva

$$\frac{\partial f(t,T)}{\partial h(t,T)} > 0 \tag{2.47}$$

Al aumentar la prima de riesgo, es decir, al aumentar el rendimiento instantáneo esperado, disminuye la función de descuento y así, para obtener un precio de la obligación menor, los tipos *forward* instantáneos han de aumentar. De forma análoga, al aumentar los tipos de interés *forward*, el precio de la obligación o función de descuento disminuye y ello implica un aumento del rendimiento instantáneo esperado de la obligación, ya que para obtener una función de descuento menor, ha de aumentar el tipo al que se descuentan los flujos de caja futuros. De esta forma y dado que las diferentes versiones de la hipótesis de las expectativas no especifican el tipo de interés instantáneo esperado para un momento futuro, la relación existente entre las primas de riesgo según las distintas versiones de las expectativas, conlleva la siguiente relación entre las primas *forward*

$$\pi_l(t,T) < \pi_u(t,T) < \pi_r(t,T) \tag{2.48}$$

En este caso, la teoría de las expectativas insesgadas implica una prima *forward* nula. Por lo tanto, según la anterior desigualdad, la versión local de las expectativas insesgadas define una prima *forward* negativa, mientras que la versión de rendimientos al vencimiento define una prima *forward* estrictamente positiva. Por último, se hace constar que dado que la teoría de las expectativas insesgadas y la versión local son mutuamente inconsistentes, la prima de riesgo y la prima *forward* nunca serán simultáneamente nulas.

La única versión de la hipótesis de las expectativas que implica que los tipos *forward* reflejan exactamente los tipos a corto plazo futuros es la teoría pura de las expectativas insesgadas. Esta teoría sólo se cumple en un ambiente de total certidumbre. Entonces, si las expectativas actuales se deducen a través de otra versión de la teoría de las expectativas, es decir, si se considera la existencia de incertidumbre en el mercado, existirá una **prima forward**. En este sentido, cabe señalar que la existencia de arbitrajistas en el mercado haría que los tipos de interés *forward* no difieran mucho de los tipos de interés al contado existentes en fechas futuras.

Como se ha comentado anteriormente, la única versión de la teoría de las expectativas compatible con un equilibrio de no arbitraje es la local[31], que implica, una prima de riesgo nula. Así, por definición, la existencia de primas de riesgo contradice la versión local de la hipótesis de las expectativas, que requiere la igualdad entre el rendimiento instantáneo esperado de cualquier obligación con el tipo de interés instantáneo sin riesgo. Existe, sin embargo, una versión ajustada al riesgo de la teoría local de las expectativas, que se cumple en un equilibrio de no arbitraje, cuando la prima de riesgo instantánea es proporcional a las volatilidades del rendimiento de la obligación

$$\mu\left(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T\right)-r(t)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\left(t\,,\,\vec{v}(t)\right)\rho_i\left(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T\right)$$

[31]Cox, Ingersoll y Ross (1981) demuestran la inconsistencia de la teoría de las expectativas insesgadas y de la versión de rendimientos al vencimiento con un equilibrio en el mercado financiero de ausencia de arbitraje.

siendo $\lambda_i(t, \vec{v}(t))$ los precios de mercado del riesgo asociados a cada uno de los factores evolutivos de la estructura temporal de tipos de interés.

La estructura de precios de las obligaciones está determinada, en este caso, por esta versión ajustada al riesgo de la teoría local de las expectativas

$$P_l(t,T) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_t^T r^*(s)ds\right\}\right] \qquad (2.49)$$

donde $r^*(s)$ es igual al tipo de interés instantáneo actual en el momento t, $r^*(t) = r(t)$, y para cada instante futuro se determina a través del proceso del tipo de interés ajustado al riesgo

$$dr^*(s) = (\beta(t, r(t), T) - \lambda(t, r(t),)\sigma(t, r(t), T))\,dt + \sigma(t, r(t), T)dz(t) \qquad (2.50)$$

proceso diferente del verdadero proceso de difusión del tipo de interés instantáneo. El proceso $dr^*(s)$ no es más que una herramienta para determinar el precio de las obligaciones ajustado al riesgo y en ningún caso es observable en el mercado.

Con la hipótesis local de las expectativas, la prima de riesgo se anulaba y la prima *forward* tomaba un valor negativo. Con la versión local ajustada al riesgo, la prima de riesgo es diferente de 0 y, por lo tanto, no existe una relación unívoca entre el signo de ésta y el signo de la prima *forward*. El signo de la prima *forward* dependerá, dada la relación positiva entre los tipos *forward* y la prima de riesgo, del valor absoluto de la prima de rendimiento instantánea.

CAPITULO III

Modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés

Capítulo 3

Modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés

En este capítulo se presenta un modelo dinámico de la estructura temporal de tipos de interés, basado en la teoría de valoración por ausencia de oportunidades de arbitraje, que considera tres variables de estado o factores que conducen la evolución de la curva de tipos. Estas tres variables son un tanto de interés al contado a largo plazo y dos *spreads* entre tipos de interés al contado: diferencia entre corto y medio y diferencia entre medio y largo plazo. Con la definición de estas tres variables de estado se incorpora información de diferentes tramos de la curva de tipos al contado.

Los dos *spreads* se modelizan mediante procesos Ornstein-Uhlenbeck para permitir que ambas variables puedan tomar tanto valores positivos como negativos. El tanto de interés a largo plazo se describe a través de un proceso raíz cuadrada, evitándose, en este caso, que este tipo de interés alcance un valor negativo y permitiéndose también que la volatilidad del proceso varíe con el nivel de la variable. De esta forma se puede recoger, en la modelización de esta variable, la heterocedasticidad de la serie del tipo de interés a largo plazo.

Este modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés, al no partir de un equilibrio general de la economía, exige determinar de forma exógena los precios de mercado del riesgo de los factores del modelo. La evidencia empírica pone de manifiesto la variabilidad de estos precios en el tiempo, por ello, se modelizan como funciones que dependen del valor de la variable.

Se asume que los tres factores del modelo son independientes, lo que permite la obtención de una solución analítica. De esta forma, se facilita la implementación práctica del modelo y además se pueden estudiar, analíticamente, las propiedades que se derivan de la estructura temporal de tipos de interés.

A continuación, se analizan las primas temporales asociadas al modelo: la prima a plazo instantánea y la prima de riesgo instantánea. La obtención de estas primas permite decidir sobre la consistencia de las diferentes versiones de la hipótesis de las expectativas. Se rechaza la hipótesis pura de las expectativas insesgadas y se comprueba que se verifica la hipótesis local de las expectativas ajustada al riesgo.

Finalmente, se analiza la gestión del riesgo de tipo de interés en el contexto del modelo desarrollado, obteniéndose unas medidas de duración y convexidad relacionadas con los factores evolutivos de la estructura temporal de tipos de interés. Así, se obtiene una duración trifactorial que permite, en el contexto de un modelo de equilibrio de la estructura temporal, cuantificar riesgos derivados de desplazamientos no paralelos de la curva de tipos.

3.1 Planteamiento de un modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés

En esta sección se plantea, en una economía en tiempo continuo y bajo las hipótesis inherentes a la existencia de un mercado perfecto[1], un modelo dinámico-estocástico de la estructura temporal de tipos de interés, que incorpora 3 variables de estado. Este modelo, que queda enmarcado dentro de los no consistentes o factoriales, describe la evolución estocástica del precio de la obligación cupón cero imponiendo la condición de no arbitraje en el mercado y, por tanto, imponiendo un equilibrio parcial en la economía.

Se define $P(t, \vec{v}(t), T, \omega_i)$ el precio en t de una obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia, que paga una unidad monetaria en su fecha de vencimiento T, como una función que en el momento de valoración t, $t \in [0, T] \in \Re^+$, depende del vencimiento de la obligación T, $T = t + \tau, T > t$, del vector de variables de estado $\vec{v}(t)$ y de $\omega_i \in \Omega$, donde Ω representa el espacio de probabilidad subyacente. Para simplificar la notación $P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T\,,\,\omega_i) = P(t\,,\,\vec{v}(t)\,,\,T)$.

El vector de las variables de estado $\vec{v}(t)$ es un vector de dimensión tres

$$\vec{v}(t) = \{s_1(t),\, s_2(t)\,,\, l(t)\} \tag{3.1}$$

ya que se considera que, en cada instante del tiempo, existen 3 fuentes de riesgo o

[1] Ver capítulo 2, apartado 2.2.1.

incertidumbre representadas por las 3 variables de estado siguientes:

$s_1(t)$: primer *spread*

$s_2(t)$: segundo *spread*

$l(t)$: tanto de interés al contado a largo plazo

La definición de estas variables de estado es la siguiente

$$s_1(t) = r(t) - m(t) \tag{3.2}$$

el primer *spread* se define como la diferencia entre dos tantos de interés al contado sin riesgo, $r(t)$, que es el tanto de interés instantáneo y, por tanto, es un punto del inicio de la curva de tipos de interés al contado y $m(t)$, tanto de interés a medio plazo y que representa un punto del tramo medio de la curva.

Por otra parte

$$s_2(t) = m(t) - l(t) \tag{3.3}$$

el segundo *spread* da la diferencia entre el tanto de interés al contado a medio plazo (considerado también para la definición del primer *spread*) y un tanto de interés al contado a largo plazo, que se corresponde con un punto del final de la estructura temporal de tipos de interés.

La evolución en el tiempo de las variables del modelo queda recogida en el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$ds_1(t) = k_1 (\mu_1 - s_1(t))\, dt + \sigma_1 dz_1(t)$$

$$ds_2(t) = k_2 (\mu_2 - s_2(t))\, dt + \sigma_2 dz_2(t) \tag{3.4}$$

$$dl(t) = k_3 (\mu_3 - l(t))\, dt + \sigma_3 \sqrt{l(t)} dz_3(t)$$

que recoge el comportamiento de un proceso de Markov conjunto con trayectorias continuas. Estos procesos estocásticos son estacionarios y, por tanto, las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas son independientes del tiempo.

Los dos primeros factores, el primer y segundo *spread*, se modelizan mediante un proceso Ornstein-Uhlenbeck, proceso con reversión a la media y de varianza constante. Así, $k_1 (\mu_1 - s_1(t))$ es la tendencia instantánea esperada de los cambios en el primer *spread* y $k_2 (\mu_2 - s_2(t))$ lo es para el segundo *spread*. Este término tendencia refleja un comportamiento del proceso con reversión a la media, de manera que el proceso tiende con una velocidad de ajuste $k_i > 0$ $(i = 1, 2)$ hacia un valor medio a largo plazo μ_i $(i = 1, 2)$.

Por otra parte, al ser el coeficiente de difusión de la ecuación diferencial estocástica un término constante $(\sigma_i > 0, i = 1, 2)$ la volatilidad de los *spreads* no se ve afectada por los niveles de las variables. Además, este proceso permite tanto valores positivos como negativos para los *spreads*, que para nuestro caso es totalmente idóneo, ya que estas variables de estado no son tipos de interés al contado, sino diferencias entre éstos y, por tanto, estas diferencias pueden ser tanto positivas como negativas.

La variable $s_1(u)$ condicionada por su valor en t, $s_1(t)(\, t \leq u)$ se distribuye como una normal y la esperanza y varianza condicionadas del proceso son las siguientes

(Vasicek (1977), p.185)

$$
\begin{aligned}
&E_t\left[s_1(u)\right] = s_1(t)e^{-k_1(u-t)} + \mu_1\left(1 - e^{-k_1(u-t)}\right) \\
&Var_t\left[s_1(u)\right] = \left(\tfrac{\sigma_1^2}{2k_1}\right)\left(1 - e^{-2k_1(u-t)}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \leq u
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

El segundo *spread* $s_2(t)$, se distribuye también de forma normal y tiene las mismas expresiones para su esperanza y varianza condicionadas, con sus parámetros específicos

$$
\begin{aligned}
&E_t\left[s_2(u)\right] = s_2(t)e^{-k_2(u-t)} + \mu_2\left(1 - e^{-k_2(u-t)}\right) \\
&Var_t\left[s_2(u)\right] = \left(\tfrac{\sigma_2^2}{2k_2}\right)\left(1 - e^{-2k_2(u-t)}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t \leq u
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Para estos dos factores, el primer y segundo *spread*, se puede comprobar que cuando la velocidad de ajuste del proceso k_i $(i = 1, 2)$ tiende a infinito, la esperanza condicionada de la variable de estado correspondiente tiende a μ_i $(i = 1, 2)$ es decir, tiende al valor medio a largo plazo y la varianza condicionada del proceso tiende a 0.

Por contra, cuando la velocidad de ajuste se aproxima a 0, la esperanza condicionada del proceso tiende al actual valor de la variable de estado y la varianza condicionada a $\sigma_i^2(u-t)$. Formalmente

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k_i \longrightarrow \infty} E_t\left[s_i(u)\right] = \mu_i \qquad i = 1, 2 \qquad \lim_{k_i \longrightarrow \infty} Var_t\left[s_i(u)\right] = 0 \qquad i = 1, 2 \\
&\lim_{k_i \longrightarrow 0} E_t\left[s_i(u)\right] = s_i(t) \qquad i = 1, 2 \quad \lim_{k_i \longrightarrow 0} Var_t\left[s_i(u)\right] = \sigma_i^2(u-t)\ i = 1, 2
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

La dinámica de la tercera variable de estado $l(t)$, el tanto de interés al contado a largo plazo, se modeliza mediante el siguiente proceso de difusión

$$dl(t) = k_3 (\mu_3 - l(t))\, dt + \sigma_3 \sqrt{l(t)} dz_3(t) \tag{3.8}$$

proceso raíz cuadrada que, al igual que el proceso Ornstein-Uhlenbeck, presenta reversión a la media con una velocidad de ajuste $k_3 > 0$ y un valor de la tendencia esperada a largo plazo $\mu_3 > 0$. En este proceso la volatilidad instantánea de los cambios de la variable es un término no constante y no lineal $\sigma_3\sqrt{l(t)}$ ($\sigma_3 > 0$) y sensible a los niveles de la variable. Es decir, el proceso especificado permite que la varianza de los cambios en $l(t)$ sea proporcional al nivel de la variable. Así, este proceso de difusión modeliza el comportamiento heterocedástico del tipo de interés al contado a largo plazo. Además, el proceso posee una barrera reflectante en 0, pero si adicionalmente se impone la condición $2k_3\mu_3 \geq \sigma_3^2$ se asegura que la variable $l(t)$ sea estrictamente positiva (Cox, Ingersoll y Ross (1985b), p.391).

La variable $l(u)$ condicionada por su valor en t, $l(t)$ $(t \leq u)$ sigue una distribución χ^2 no centrada, con esperanza y varianza (Cox, Ingersoll y Ross (1985b), p.392)

$$E_t\left[l(u)\right] = l(t)e^{-k_3(u-t)} + \mu_3\left(1 - e^{-k_3(u-t)}\right)$$

$$Var_t\left[l(u)\right] = l(t)\left(\tfrac{\sigma_3^2}{k_3}\right)\left(e^{-k_3(u-t)} - e^{-2k_3(u-t)}\right) + \mu_3\left(\tfrac{\sigma_3^2}{2k_3}\right)\left(1 - e^{-k_3(u-t)}\right)^2 \qquad \forall t \leq u \tag{3.9}$$

Las propiedades de la distribución de los futuros tipos de interés a largo plazo son también las deseadas. Así, cuando la velocidad de ajuste del proceso k_3 tiende a infinito, la esperanza condicionada del tanto de interés a largo plazo tiende a μ_3, es decir, al valor medio a largo plazo del proceso y la varianza condicionada se anula. Cuando la velocidad de ajuste se aproxima a 0, la esperanza condicionada del proceso tiende al actual valor de la variable de estado y la varianza condicionada a $l(t)\sigma_3^2(u-t)$

$$\begin{aligned} &\lim_{k_3 \longrightarrow \infty} E_t\left[l(u)\right] = \mu_3 \quad \lim_{k_3 \longrightarrow \infty} Var_t\left[l(u)\right] = 0 \\ &\lim_{k_3 \longrightarrow 0} E_t\left[l(u)\right] = l(t) \quad \lim_{k_3 \longrightarrow 0} Var_t\left[l(u)\right] = l(t)\sigma_3^2(u-t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por otra parte, dz_1, dz_2 y dz_3 son procesos estándard Gauss-Wiener y presentan las propiedades habituales

$$\begin{aligned} &E\left[dz_1\right] = E\left[dz_2\right] = E\left[dz_3\right] = 0 \\ &(dz_1)^2 = (dz_2)^2 = (dz_3)^2 = dt \end{aligned} \tag{3.11}$$

Además, para facilitar una solución analítica del modelo, las tres variables de estado se suponen ortogonales y ello implica

$$E\left[dz_1 dz_2\right] = E\left[dz_1 dz_3\right] = E\left[dz_2 dz_3\right] = 0 \tag{3.12}$$

Las tres variables del modelo se han modelizado a través de procesos con reversión a la media. Existe cierta evidencia empírica de este comportamiento tanto para tipos de interés al contado como para diferencias entre éstos[2], aunque algunos trabajos concluyen que esta evidencia empírica no es muy fuerte (Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders (1992))). Además, es más probable que un *spread* tenga reversión hacia un valor medio a largo plazo, que un tipo de interés al contado (Brennan y Schwartz (1982)). Al respecto cabe mencionar que este comportamiento se exige a los tres factores no tanto por la evidencia empírica que se deduce de algunos trabajos, sino

[2]Fontanals, H. y S. Zúñiga (1999).

más bien para asegurar una distribución adecuada de las variables. Es decir, con este comportamiento de reversión a la media se pretende evitar una excesiva dispersión de los factores del modelo y, por otra parte, se pretende recoger también una propiedad deseada para la distribución de las variables y es que valores elevados vayan seguidos más por decrementos que por incrementos y a la inversa.

A partir de las hipótesis formuladas se llega a la siguiente ecuación diferencial estocástica para la evolución en el tiempo del rendimiento instantáneo de la obligación cupón cero

$$\frac{d\,P(\,t\,, s_1\,, s_2\,, l\,, T\,)}{P(\,t\,, s_1\,, s_2\,, l\,, T\,)} = \mu\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)\,dt +$$

$$+\rho_1\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)\,dz_1(t) + \rho_2\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)\,dz_2(t) + \rho_3\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)\,dz_3(t) \tag{3.13}$$

en la que

$\mu\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)$: rendimiento instantáneo esperado en t para la obligación con vencimiento en T $(T > t)$.

$\rho_1\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)$: volatilidad en t del rendimiento de la obligación con vencimiento en T $(T > t)$ debida a cambios no esperados del primer *spread.*

$\rho_2\,(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)$: volatilidad en t del rendimiento de la obligación con vencimiento en T $(T > t)$ debida a cambios no esperados del segundo *spread.*

$\rho_3(t, s_1, s_2, l, T)$: volatilidad en t del rendimiento de la obligación con vencimiento en T ($T > t$) debida a cambios no esperados del tanto de interés al contado a largo plazo.

Por el lema de Itô

$$\begin{aligned}
\mu(t, s_1, s_2, l, T) = {} & \tfrac{1}{P(\cdot)}\left[k_1(\mu_1 - s_1(t))P_{s_1} + k_2(\mu_2 - s_2(t))P_{s_2} + k_3(\mu_3 - l(t))P_l + \right. \\
& \left. + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 P_{s_1 s_1} + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 P_{s_2 s_2} + \tfrac{1}{2}\sigma_3^2 l(t) P_{ll} + P_t\right] \\
\rho_1(t, s_1, s_2, l, T) = {} & \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_1 P_{s_1} \\
\rho_2(t, s_1, s_2, l, T) = {} & \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_2 P_{s_2} \\
\rho_3(t, s_1, s_2, l, T) = {} & \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_3\sqrt{l(t)}P_l
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial P(\cdot)}{\partial s_1} = P_{s_1} & \frac{\partial P(\cdot)}{\partial s_2} = P_{s_2} & \frac{\partial P(\cdot)}{\partial l} = P_l & \frac{\partial P(\cdot)}{\partial t} = P_t \\
\frac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_1^2} = P_{s_1 s_1} & \frac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_2^2} = P_{s_2 s_2} & \frac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial l^2} = P_{ll} &
\end{array} \tag{3.15}$$

tal y como es habitual en la literatura financiera.

A continuación se considera una cartera formada por cuatro obligaciones cupón cero con diferentes vencimientos $T_1 = t + \tau_1$, $T_2 = t + \tau_2$, $T_3 = t + \tau_3$ y $T_4 = t + \tau_4$ y con proporciones relativas que se denotan por x_1, x_2, x_3 y x_4, respectivamente, y que han de verificar $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$. La cartera debe estar formada por 4 obligaciones cupón cero porque el modelo es trifactorial y, por tanto, incorpora tres fuentes de incertidumbre.

El valor de la cartera en t, $V(t\,,\,x_i\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)$ viene dado por

$$V(t\,,\,x_i\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)=\sum_{i=1}^{4}x_iP(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T_i) \tag{3.16}$$

y el rendimiento de la misma presenta la siguiente dinámica estocástica

$$\frac{dV(t\,,\,x_i\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)}{V(t\,,\,x_i\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T)}=\sum_{i=1}^{4}x_i\frac{dP(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T_i)}{P(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T_i)} \tag{3.17}$$

Sustituyendo en la anterior expresión la variación, en términos relativos, del precio de cada una de las cuatro obligaciones, se llega a

$$\begin{gathered}\frac{d\;V(t\,,x_i\,,s_1\,,s_2\,,l\,,T)}{V(t\,,x_i\,,s_1\,,s_2\,,l\,,T)}=\\ =\sum_{i=1}^{4}x_i\left[\mu(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T_i)dt+\sum_{j=1}^{3}\rho_j(t\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l\,,\,T_i)dz_j(t)\right]\end{gathered} \tag{3.18}$$

La cartera se ha formado para imponer un equilibrio en el mercado financiero consistente en evitar oportunidades de arbitraje. Por ello, se considera que en cada instante el rendimiento de la cartera, que se ajusta de forma continua y de manera que cualquier cambio en la composición de la misma se financia internamente, es cierto. Por tanto, las proporciones a invertir en cada una de las cuatro obligaciones han de ser tales que, por un lado, se eliminen las variaciones en el rendimiento de la cartera debidas a cambios no esperados de las variables de estado, y por otro, se iguale el rendimiento instantáneo esperado de la misma al tanto de interés instantáneo sin riesgo, $r(t)$. Así, las proporciones a invertir en cada obligación han de ser tales que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones lineal y homogéneo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} x_i \rho_j(t, s_1, s_2, l, T_i) = 0 \qquad j = 1,2,3 \\ &\sum_{i=1}^{4} x_i \left(\mu(t, s_1, s_2, l, T_i) - r(t)\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

cuya matriz de coeficientes del sistema asociada es:

$$\begin{pmatrix} \rho_1(t,\vec{v}(t),T_1) & \rho_1(t,\vec{v}(t),T_2) & \rho_1(t,\vec{v}(t),T_3) & \rho_1(t,\vec{v}(t),T_4) \\ \rho_2(t,\vec{v}(t),T_1) & \rho_2(t,\vec{v}(t),T_2) & \rho_2(t,\vec{v}(t),T_3) & \rho_2(t,\vec{v}(t),T_4) \\ \rho_3(t,\vec{v}(t),T_1) & \rho_3(t,\vec{v}(t),T_2) & \rho_3(t,\vec{v}(t),T_3) & \rho_3(t,\vec{v}(t),T_4) \\ \mu(t,\vec{v}(t),T_1) - r(t) & \mu(t,\vec{v}(t),T_2) - r(t) & \mu(t,\vec{v}(t),T_3) - r(t) & \mu(t,\vec{v}(t),T_4) - r(t) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga solución diferente de la nula se debe asegurar que el rango de la matriz de coeficientes del sistema sea menor que 4. Así, se exige que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo y para ello, debe existir un vector $\vec{\lambda}$ de dimensión 3 y componentes

$$\vec{\lambda} = \left(\lambda_1(t, s_1, s_2, l)\,,\, \lambda_2(t, s_1, s_2, l)\,,\, \lambda_3(t, s_1, s_2, l)\right) \tag{3.21}$$

que verifique

$$\begin{aligned} \mu(t, s_1, s_2, l, T) - r(t) = \lambda_1(t, s_1, s_2, l)\rho_1(t, s_1, s_2, l, T) + \\ + \lambda_2(t, s_1, s_2, l)\rho_2(t, s_1, s_2, l, T) + \lambda_3(t, s_1, s_2, l)\rho_3(t, s_1, s_2, l, T) \end{aligned} \tag{3.22}$$

es decir, que verifique que la última fila de la matriz de coeficientes del sistema es combinación lineal del resto. Hay que destacar que las componentes del vector $\vec{\lambda}$ son independientes del vencimiento, puesto que los vencimientos de las cuatro obligaciones que forman la cartera han sido elegidos de forma arbitraria y, por tanto, se ha de cumplir esta relación para cualquier vencimiento.

La ecuación (3.22) expresa la prima instantánea de riesgo $(\mu(t, s_1, s_2, l, T) - r(t))$ de una obligación cupón cero para cualquier vencimiento. Esta prima es la suma de 3 componentes $\rho_1(t, s_1, s_2, l, T)$, $\rho_2(t, s_1, s_2, l, T)$ y $\rho_3(t, s_1, s_2, l, T)$ es decir, las volatilidades del rendimiento de la obligación debidas a cambios aleatorios en las tres variables de estado, ponderadas por $\lambda_1(t, s_1, s_2, l)$, $\lambda_2(t, s_1, s_2, l)$ y $\lambda_3(t, s_1, s_2, l)$.

La prima instantánea de riesgo recoge el exceso de rendimiento sobre el tanto de interés sin riesgo que requieren los agentes como compensación por el riesgo asumido frente a una posible variación en el precio de la obligación, debida a una variación no esperada de cada una de las variables de estado. Por ello, las funciones $\lambda_1(t, s_1, s_2, l)$, $\lambda_2(t, s_1, s_2, l)$ y $\lambda_3(t, s_1, s_2, l)$ se interpretan como los **precios de mercado del riesgo** asociados a cada uno de los tres factores del modelo. Así por ejemplo $\lambda_1(t, s_1, s_2, l)$ es el precio que el mercado da al riesgo asociado a la primera variable de estado, el primer *spread*, ya que $\rho_1(t, s_1, s_2, l, T)$ es la variación no esperada en el rendimiento de una obligación que vence en T y que viene inducida por cambios inesperados de $s_1(t)$. De forma análoga, la segunda y tercera componente del vector $\vec{\lambda}$, es decir, $\lambda_2(t, s_1, s_2, l)$ y $\lambda_3(t, s_1, s_2, l)$ se conocen como el precio de mercado del riesgo asociado al segundo *spread* y al tanto de interés al contado a largo plazo, respectivamente.

Normalmente, $\rho_1(t, s_1, s_2, l, T)$, $\rho_2(t, s_1, s_2, l, T)$ y $\rho_3(t, s_1, s_2, l, T)$ son negativas[3],

[3] Ver (3.14) y propiedad 5 de la función de descuento (capítulo 3, apartado 3) y Richard, S.F. (1978), pp.48.

por lo tanto, la relación, en cuanto a signo, entre la prima instantánea de riesgo $(\mu(t, s_1, s_2, l, T) - r(t))$ y los precios que el mercado da a las tres fuentes de riesgo del modelo es inversa. Las funciones $\lambda_1(t, s_1, s_2, l)$, $\lambda_2(t, s_1, s_2, l)$ y $\lambda_3(t, s_1, s_2, l)$ dada su definición, dependen de la estructura preferencial del decisor, es decir, de su función de utilidad. Dado que este modelo no parte de un equilibrio general de la economía, el vector $\vec{\lambda}$ debe ser determinado de forma exógena. En la sección 3 se especifica su forma funcional así como las implicaciones que tiene para el modelo.

Sustituyendo en la ecuación (3.22) $\mu(\cdot)$, $\rho_1(\cdot)$, $\rho_2(\cdot)$ y $\rho_3(\cdot)$ por (3.14) se obtiene la siguiente ecuación en derivadas parciales cierta de segundo orden

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left[\sigma_1^2 P_{s_1 s_1} + \sigma_2^2 P_{s_2 s_2} + \sigma_3^2 l(t) P_{ll}\right] + \left[k_1(\mu_1 - s_1(t)) - \lambda_1(t, s_1, s_2, l)\sigma_1\right] P_{s_1} + \\
&\quad + \left[k_2(\mu_2 - s_2(t)) - \lambda_2(t, s_1, s_2, l)\sigma_2\right] P_{s_2} + \\
&\quad + \left[k_3(\mu_3 - l(t)) - \lambda_3(t, s_1, s_2, l)\sqrt{l(t)}\sigma_3\right] P_l + \\
&\quad + P_t - r(t) P(t, s_1, s_2, l, T) = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

La solución de esta ecuación en derivadas parciales sujeta a la correspondiente condición de contorno, proporciona la expresión del valor en t de una obligación cupón cero libre de riesgo, para cualquier vencimiento.

3.2 Obtención del precio de una obligación cupón cero

Para obtener la función de descuento, es decir, la expresión del precio en t de la obligación cupón cero, es preciso solucionar la ecuación en derivadas parciales (3.23) sujeta a la condición final de que al vencimiento la obligación paga 1 unidad monetaria, es decir

$$P(T, s_1, s_2, l, T) = 1 \tag{3.24}$$

Previamente, es preciso especificar la forma funcional de los precios de mercado del riesgo asociados a cada una de las tres variables de estado.

Existe evidencia empírica de la variabilidad en el tiempo de los precios de mercado del riesgo (Brennan y Schwartz (1982), Campbell (1986), Moreno (1997) y Gómez-Martínez (1999)). Por ello, en este trabajo se asume la siguiente estructura funcional

$$\begin{aligned} \lambda_1(t, s_1) &= a + bs_1(t) \\ \lambda_2(t, s_2) &= c + ds_2(t) \\ \lambda_3(t, l) &= \tfrac{\lambda^* \sqrt{l(t)}}{\sigma_3} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Para los dos *spreads* se supone una variación lineal con el objetivo de que estos precios dependan de los niveles de las variables y así, como primera aproximación, se elige la variación lineal.[4] Para el tanto de interés a largo plazo se asume el precio de mercado del riesgo propuesto por Cox, Ingersoll y Ross (1985b) ya que $l(t)$ sigue el mismo proceso de difusión que la variable de estado considerada por estos autores en su modelo.

Así, sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales (3.23), las funciones

[4]En Schaefer y Schwartz (1984) asumen para el *spread* un precio de mercado del riesgo constante, pero indican que sin mucha dificultad, el modelo se podría generalizar para incluir el caso de función lineal como precio que el mercado pone al riesgo asociado al *spread*.

$\lambda_1(t, s_1, s_2, l)$, $\lambda_2(t, s_1, s_2, l)$ y $\lambda_3(t, s_1, s_2, l)$ por (3.25) se obtiene

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\left[\sigma_1^2 P_{s_1 s_1} + \sigma_2^2 P_{s_2 s_2} + \sigma_3^2 l(t) P_{ll}\right] + \left[k_1\left(\mu_1 - s_1(t)\right) - \left(a + b s_1(t)\right)\sigma_1\right] P_{s_1} + \\ + \left[k_2\left(\mu_2 - s_2(t)\right) - \left(c + d s_2(t)\right)\sigma_2\right] P_{s_2} + \left[k_3\left(\mu_3 - l(t)\right) - \lambda^* l(t)\right] P_l + \\ + P_t - r(t) P(t, s_1, s_2, l, T) = 0\end{gathered} \tag{3.26}$$

A partir de (3.2) y (3.3) se deduce que el tanto de interés sin riesgo es suma de los tres factores del modelo. Es decir

$$r(t) = s_1(t) + s_2(t) + l(t) \tag{3.27}$$

Sustituyendo $r(t)$ por la suma de las tres variables del modelo en (3.26) y reagrupando términos, se llega a

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\left[\sigma_1^2 P_{s_1 s_1} + \sigma_2^2 P_{s_2 s_2} + \sigma_3^2 l(t) P_{ll}\right] + q_1\left(\hat{\mu}_1 - s_1(t)\right) P_{s_1} + q_2\left(\hat{\mu}_2 - s_2(t)\right) P_{s_2} + \\ + q_3\left(\hat{\mu}_3 - l(t)\right) P_l + P_t - \left(s_1(t) + s_2(t) + l(t)\right) P(t, s_1, s_2, l, T) = 0\end{gathered} \tag{3.28}$$

donde

$$\begin{aligned} q_1 &= k_1 + b\sigma_1 & \hat{\mu}_1 &= \tfrac{k_1\mu_1 - a\sigma_1}{q_1} \\ q_2 &= k_2 + d\sigma_2 & \hat{\mu}_2 &= \tfrac{k_2\mu_2 - c\sigma_2}{q_2} \\ q_3 &= k_3 + \lambda^* & \hat{\mu}_3 &= \tfrac{k_3\mu_3}{q_3} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dado que por hipótesis las variables de estado son ortogonales, por separación de variables, $P(t, s_1, s_2, l, T)$ se puede descomponer en el producto de 3 procesos

$$P(t, s_1, s_2, l, T) = X(t, s_1, T) \cdot Y(t, s_2, T) \cdot Z(t, l, T) \tag{3.30}$$

de manera que $X(t, s_1, T)$ es solución de la siguiente ecuación lineal en derivadas parciales

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 X_{s_1 s_1} + q_1 (\hat{\mu}_1 - s_1(t)) X_{s_1} + X_t - s_1(t) X(t, s_1, T) = 0 \tag{3.31}$$

sujeta a la condición final

$$X(T, s_1, T) = 1 \qquad \forall s_1 \tag{3.32}$$

cuya solución es (Vasicek (1977), pp.185-186)

$$X(t, s_1, T) = A_1(\tau) e^{-B(\tau) s_1(t)}\ , \quad \tau = T - t \tag{3.33}$$

donde

$$A_1(\tau) = \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + s_1^* (B(\tau) - \tau)\right\} \tag{3.34}$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-q_1 \tau}}{q_1} \tag{3.35}$$

y

$$s_1^* = \hat{\mu}_1 - \frac{\sigma_1^2}{2q_1^2} \tag{3.36}$$

Para solucionar la ecuación

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 X_{s_1 s_1} + q_1 (\hat{\mu}_1 - s_1(t)) X_{s_1} + X_t - s_1(t) X(t, s_1, T) = 0$$

sujeta a la condición final

$$X(T, s_1, T) = 1 \qquad \forall s_1$$

se efectúa la sustitución $\tau = T - t$, quedando

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 X_{s_1 s_1} + q_1 \left(\hat{\mu}_1 - s_1(t)\right) X_{s_1} - X_\tau - s_1(t) X(\tau, s_1) = 0$$

$$X(0, s_1) = 1 \qquad \forall s_1$$

y se postula la siguiente solución

$$X(\tau, s_1) = e^{m(\tau) - n(\tau) s_1(t)}$$

Así, las derivadas parciales de $X(\tau, s_1)$, son

$$X_{s_1} = -n(\tau) X$$

$$X_{s_1 s_1} = n^2(\tau) X$$

$$X_\tau = (m'(\tau) - n'(\tau) s_1(t)) X$$

en las que se ha obviado la dependencia de la función $X(\tau, s_1)$ para no recargar la resolución.

Sustituyendo el valor de estas derivadas parciales en la ecuación en derivadas parciales, se llega a

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 n^2(\tau) X - \left(q_1 \hat{\mu}_1 - q_1 s_1(t)\right) n(\tau) X - (m'(\tau) - n'(\tau) s_1(t)) X - s_1(t) X = 0$$

y dividiendo por X y reagrupando términos se obtiene

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 n^2(\tau) - q_1 \hat{\mu}_1 n(\tau) - m'(\tau) + (q_1 n(\tau) - 1 + n'(\tau)) s_1(t)) = 0$$

Se trata de una ecuación lineal en $s_1(t)$ que se anula cuando los correspondientes coeficientes son 0. Así, esta ecuación es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} q_1 n(\tau) - 1 + n'(\tau) = 0 & n(0) = 0 \\ \\ \frac{1}{2}\sigma_1^2 n^2(\tau) - q_1\hat{\mu}_1 n(\tau) - m'(\tau) = 0 & m(0) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación se soluciona por separación de variables. Así, se tiene

$$n' = -(q_1 n(\tau) - 1)$$
$$\frac{dn}{q_1 n(\tau) - 1} = -d\tau$$

que integrando, directamente, ambos lados de la igualdad conduce a

$$\frac{1}{q_1}\ln(q_1 n(\tau) - 1) = -\tau + c$$

Despejando la función $n(\tau)$ y determinando el valor de la constante de integración se llega a

$$n(\tau) = \frac{1}{q_1}(c'' e^{-q_1\tau} + 1)$$

que con la condición $n(0) = 0$, se convierte en

$$n(\tau) = \frac{1 - e^{-q_1\tau}}{q_1}$$

Para solucionar la segunda ecuación del sistema, se sustituye $n(\tau)$ por la expresión obtenida

$$m'(\tau) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 n^2(\tau) - q_1\hat{\mu}_1 n(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_1^2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1}\right)^2 - q_1\hat{\mu}_1\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{1-2\mathrm{e}^{-q_1\tau}+\mathrm{e}^{-2q_1\tau}}{q_1^2} - q_1\hat{\mu}_1\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1} =$$

$$= \frac{\sigma_1^2 - 2q_1^2\hat{\mu}_1}{2q_1^2} + \frac{q_1^2\hat{\mu}_1 - \sigma_1^2}{q_1^2}\mathrm{e}^{-q_1\tau} + \frac{\sigma_1^2}{2q_1^2}\mathrm{e}^{-2q_1\tau}$$

Aplicando el método de variables separables e integrando ambos lados de la igualdad se llega a

$$m(\tau) = \frac{\sigma_1^2 - 2q_1^2\hat{\mu}_1}{2q_1^2}\tau - \frac{q_1^2\hat{\mu}_1 - \sigma_1^2}{q_1^3}\mathrm{e}^{-q_1\tau} - \frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau} + c$$

y considerando que en $\tau = 0$, $m(0) = 0$, entonces

$$-\frac{q_1^2\hat{\mu}_1 - \sigma_1^2}{q_1^3} - \frac{\sigma_1^2}{4q_1^3} + c = 0$$

$$c = \frac{4q_1^2\hat{\mu}_1 - 3\sigma_1^2}{4q_1^3}$$

Finalmente

$$m(\tau) = \frac{4q_1^2\hat{\mu}_1 - 3\sigma_1^2}{4q_1^3} + \frac{\sigma_1^2 - 2q_1^2\hat{\mu}_1}{2q_1^2}\tau - \frac{q_1^2\hat{\mu}_1 - \sigma_1^2}{q_1^3}\mathrm{e}^{-q_1\tau} - \frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau}$$

Por tanto, sustituyendo $m(\tau)$ y $n(\tau)$, en la función $X(\tau, s_1(t))$

$$X(\tau, s_1) = \mathrm{e}^{m(\tau)-n(\tau)s_1(t)}$$

se obtiene

$$X(\tau, s_1) = \exp\left\{\frac{4q_1^2\hat{\mu}_1 - 3\sigma_1^2}{4q_1^3} + \frac{\sigma_1^2 - 2q_1^2\hat{\mu}_1}{2q_1^2}\tau - \frac{q_1^2\hat{\mu}_1 - \sigma_1^2}{q_1^3}\mathrm{e}^{-q_1\tau} - \frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau} - \right.$$

$$-\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1}\right)s_1(t)\bigg\}$$

Para simplificar la notación se considera que

$$B(\tau)=\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1}$$

$$A_1(\tau)=\exp\left\{\frac{4q_1^2\hat{\mu}_1-3\sigma_1^2}{4q_1^3}+\frac{\sigma_1^2-2q_1^2\hat{\mu}_1}{2q_1^2}\tau-\frac{q_1^2\hat{\mu}_1-\sigma_1^2}{q_1^3}\mathrm{e}^{-q_1\tau}-\frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau}\right\}$$

Esta última función $A_1(\tau)$, se puede reescribir en función de $B(\tau)$, efectuando las siguientes simplificaciones

$$A_1(\tau)=\exp\left\{\left(\frac{\hat{\mu}_1}{q_1}-\frac{3\sigma_1^2}{4q_1^3}\right)+\left(\frac{\sigma_1^2}{2q_1^2}-\hat{\mu}_1\right)\tau+\left(\frac{\sigma_1^2}{q_1^3}-\frac{\hat{\mu}_1}{q_1}\right)\mathrm{e}^{-q_1\tau}-\frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau}\right\}=$$

$$=\exp\left\{\left(\frac{\hat{\mu}_1}{q_1}-\frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}-\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}\right)+\left(\frac{\sigma_1^2}{2q_1^2}-\hat{\mu}_1\right)\tau+\left(\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}+\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}-\frac{\hat{\mu}_1}{q_1}\right)\mathrm{e}^{-q_1\tau}-\frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau}\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}+\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}\mathrm{e}^{-q_1\tau}-\frac{\sigma_1^2}{4q_1^3}\mathrm{e}^{-2q_1\tau}+\frac{\hat{\mu}_1}{q_1}-\frac{\hat{\mu}_1}{q_1}\mathrm{e}^{-q_1\tau}-\hat{\mu}_1\tau-\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}+\frac{\sigma_1^2}{2q_1^3}\mathrm{e}^{-q_1\tau}+\frac{\sigma_1^2}{2q_1^2}\tau\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1}\right)^2+\left(\hat{\mu}_1-\frac{\sigma_1^2}{2q_1^2}\right)\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-q_1\tau}}{q_1}-\tau\right)\right\}$$

$$A_1(\tau)=\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B^2(\tau)+s_1^*\left(B(\tau)-\tau\right)\right\}$$

donde

$$s_1^*=\hat{\mu}_1-\frac{\sigma_1^2}{2q_1^2}$$

Por otra parte $Y(t, s_2, T)$ se obtiene solucionando la siguiente ecuación en derivadas parciales, de forma análoga a la anterior ecuación

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 Y_{s_2 s_2} + q_2\left(\hat{\mu}_2 - s_2(t)\right)Y_{s_2} + Y_t - s_2(t)Y(t, s_2, T) = 0 \tag{3.37}$$

sujeta a la condición

$$Y(T, s_2, T) = 1 \qquad \forall s_2 \tag{3.38}$$

con (Vasicek (1977), pp.185-186)

$$Y(t, s_2, T) = A_2(\tau)e^{-C(\tau)s_2(t)}\ , \quad \tau = T - t \tag{3.39}$$

donde

$$A_2(\tau) = \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C^2(\tau) + s_2^*\left(C(\tau) - \tau\right)\right\} \tag{3.40}$$

$$C(\tau) = \frac{1 - e^{-q_2\tau}}{q_2} \tag{3.41}$$

y

$$s_2^* = \hat{\mu}_2 - \frac{\sigma_2^2}{2q_2^2} \tag{3.42}$$

Y $Z(t, l, T)$ es solución de

$$\frac{1}{2}\sigma_3^2 l(t) Z_{ll} + q_3\left(\hat{\mu}_3 - l(t)\right)Z_l + Z_t - l(t)Z(t, l, T) = 0 \tag{3.43}$$

$$Z(T, l, T) = 1 \qquad \forall l \tag{3.44}$$

con (Cox, Ingersoll y Ross (1985b), p.393)

$$Z(t,l,T) = A_3(\tau)e^{-D(\tau)l(t)}\ , \quad \tau = T - t \tag{3.45}$$

donde

$$A_3(\tau) = \left[\frac{2g\exp\left\{(q_3+g)\frac{\tau}{2}\right\}}{(q_3+g)\left(\exp\{g\tau\}-1\right)+2g}\right]^{\frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}} \tag{3.46}$$

$$D(\tau) = \frac{2\left(\exp\{g\tau\}-1\right)}{(q_3+g)\left(\exp\{g\tau\}-1\right)+2g} \tag{3.47}$$

$$g = \left(q_3^2 + 2\sigma_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.48}$$

Para solucionar la tercera ecuación se considera $\tau = T - t$ y la ecuación en derivadas parciales queda

$$\frac{1}{2}\sigma_3^2 l(t) Z_{ll} + q_3\left(\hat{\mu}_3 - l(t)\right) Z_l - Z_\tau - l(t)Z(t,l,T) = 0$$

$$Z(0,l) = 1 \qquad \forall l$$

A continuación, se postula una solución del tipo

$$Z(\tau,l) = \mathrm{e}^{m(\tau)-n(\tau)l(t)}$$

donde

$$Z_l = -n(\tau)Z$$

$$Z_{ll} = n^2(\tau)Z$$

$$Z_\tau = (m'(\tau) - n'(\tau)l(t))Z$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación en derivadas parciales y simplificando, la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{2}\sigma_3^2 l(t) n^2(\tau) Z - (q_3\hat{\mu}_3 - q_3 l(t))\, n(\tau) Z - (m'(\tau) - n'(\tau) l(t)) Z - l(t) Z = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_3^2 n^2(\tau) + q_3 n(\tau) - 1 + n'(\tau)\right) l(t) - q_3\hat{\mu}_3 - m'(\tau) = 0$$

ecuación lineal en $l(t)$ que se anula sólo cuando el coeficiente que acompaña a la variable y el término independiente son 0. Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} n'(\tau) = -\frac{1}{2}\sigma_3^2 n^2(\tau) - q_3 n(\tau) + 1 & n(0) = 0 \\ \\ m'(\tau) = -q_3\hat{\mu}_3 n(\tau) & m(0) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación del sistema es una ecuación de Ricati y se puede solucionar completando el cuadrado

$$-\frac{1}{2}\sigma_3^2 n^2(\tau) - q_3 n(\tau) + 1 = \frac{\sigma_3^2}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}}{\sigma_3^2}\right)^2 - \left(n + \frac{q_3}{\sigma_3^2}\right)^2\right]$$

De esta forma y después de separar variables la primera ecuación queda

$$\frac{dn}{\left(\frac{\sqrt{q_3^2+2\sigma_3^2}}{\sigma_3^2}\right)^2 - \left(n + \frac{q_3}{\sigma_3^2}\right)^2} = \frac{\sigma_3^2}{2} d\tau$$

e integrando ambos lados[5]

$$\frac{\sigma_3^2}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{\sigma_3^2}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}}\left(n + \frac{q_3}{\sigma_3^2}\right)\right] = \frac{\sigma_3^2}{2}\tau + c$$

[5] $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{x}{a}$

La constante de integración se determina utilizando la condición $n(0) = 0$

$$c = \frac{\sigma_3^2}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{q_3}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \right]$$

y así

$$\frac{\sigma_3^2}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{\sigma_3^2 n(\tau) + q_3}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \right] = \frac{\sigma_3^2}{2}\tau + \frac{\sigma_3^2}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{q_3}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \right]$$

Para despejar $n(\tau)$ se multiplica la anterior ecuación por $\frac{\sqrt{q_3^2+2\sigma_3^2}}{\sigma_3^2}$, simplificando y tomando tgh en ambos lados de la igualdad[6], la ecuación se convierte en

$$\frac{\sigma_3^2 n(\tau) + q_3}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} = \mathrm{tgh} \left(\frac{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}}{2}\tau + \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{q_3}{\sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}} \right] \right)$$

A continuación se efectúa la siguiente transformación: $2\gamma = \sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}$ y la ecuación queda

$$\frac{\sigma_3^2 n(\tau) + q_3}{2\gamma} = \mathrm{tgh} \left(\gamma\tau + \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{q_3}{2\gamma} \right] \right)$$

$$\sigma_3^2 n(\tau) + q_3 = 2\gamma \mathrm{tgh} \left(\gamma\tau + \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{q_3}{2\gamma} \right] \right)$$

$$n(\tau) = \frac{1}{\sigma_3^2} \left(-q_3 + 2\gamma \mathrm{tgh} \left(\gamma\tau + \mathrm{tgh}^{-1} \left[\frac{q_3}{2\gamma} \right] \right) \right)$$

La anterior ecuación se puede simplificar teniendo en cuenta

$$\mathrm{tgh}(a + b) = \frac{\mathrm{tgh}\, a + \mathrm{tgh}\, b}{1 + \mathrm{tgh}\, a \,\mathrm{tgh}\, b}$$

[6] $\mathrm{tgh}\left(\mathrm{tgh}^{-1} a\right) = a$

resultando

$$n(\tau) = \frac{1}{\sigma_3^2}\left(-q_3 + 2\gamma\frac{\operatorname{tgh}\gamma\tau + \operatorname{tgh}\operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]}{1 + \operatorname{tgh}\gamma\tau\operatorname{tgh}\operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_3^2}\left(-q_3 + 2\gamma\frac{\frac{q_3}{2\gamma} + \operatorname{tgh}\gamma\tau}{1 + \frac{q_3}{2\gamma}\operatorname{tgh}\gamma\tau}\right) = \frac{1}{\sigma_3^2}\left(-q_3 + 2\gamma\frac{\frac{q_3}{2} + \cosh\gamma\tau + \operatorname{senh}\gamma\tau}{\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2\gamma}\operatorname{senh}\gamma\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_3^2}\left(-q_3 + 2\gamma\frac{\frac{q_3}{2} + \cosh\gamma\tau + \gamma\operatorname{senh}\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_3^2}\left(\frac{-\frac{q_3^2}{2} + \operatorname{senh}\gamma\tau + 2\gamma^2\operatorname{senh}\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_3^2}\left(\frac{\left(-\frac{q_3^2}{2} + 2\gamma^2\right)\operatorname{senh}\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}\right) =$$

y como que $2\gamma = \sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}$ entonces $\sigma_3^2 = 2\gamma^2 - \frac{q_3^2}{2}$ y la función $n(\tau)$ queda

$$n(\tau) = \frac{\operatorname{senh}\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}$$

Para determinar $m(\tau)$, se soluciona la segunda ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, sustituyendo $n(\tau)$ por

$$n(\tau) = \frac{1}{\sigma_3^2}\left(-q_3 + 2\gamma\operatorname{tgh}\left(\gamma\tau + \operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]\right)\right)$$

y así, separando variables

$$dm = -\frac{q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\left(-q_3 + 2\gamma\operatorname{tgh}\left(\gamma\tau + \operatorname{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]\right)\right)d\tau$$

e integrando ambos lados[7]

$$m(\tau) = -\frac{q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\left(-q_3\tau + 2\log\cosh\left(\gamma\tau + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]\right)\right) + c$$

Con la condición $m(0) = 0$, se determina el valor de c

$$c = 2\frac{q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\cosh\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]$$

y sustituyendo y simplificando

$$m(\tau) = \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\left(\frac{q_3}{2}\tau - \log\cosh\left(\gamma\tau + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]\right) + \log\cosh\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]\right) =$$

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{e^{\frac{q_3}{2}\tau}\cosh\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]}{\cosh\left(\gamma\tau + \mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]\right)} =$$

y utilizando la propiedad de la función trigonométrica del coseno hiperbólico

$$\cosh(a+b) = \cosh a\cosh b + \mathrm{senh}\, a\,\mathrm{senh}\, b$$

la anterior ecuación se transforma en

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{e^{\frac{q_3}{2}\tau}\cosh\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]}{\cosh\gamma\tau\cosh\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right] + \mathrm{senh}\,\gamma\tau\,\mathrm{senh}\,\mathrm{tgh}^{-1}\left[\frac{q_3}{2\gamma}\right]} =$$

y teniendo en cuenta

$$\cosh\mathrm{tgh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{senh}\,\mathrm{tgh}^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

de la última expresión se calcula

$$\cosh\mathrm{tgh}^{-1}\frac{q_3}{2\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{q_3}{2\gamma}\right)^2}}$$

[7] $\int \mathrm{tgh}\, x\, dx = \log\cosh x$

que por la relación antes establecida de que $2\gamma = \sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}$, conduce a

$$\cosh \operatorname{tgh}^{-1} \frac{q_3}{2\gamma} = \frac{2\gamma^2}{\sigma_3^2}$$

Se procede de la misma forma para

$$\operatorname{senh} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{q_3}{2\gamma} = \frac{\frac{q_3}{2\gamma}}{\sqrt{1 - \left(\frac{q_3}{2\gamma}\right)^2}} = \frac{q_3\gamma}{\sigma_3^2}$$

De esta manera, la expresión de $m(\tau)$ se simplifica de la siguiente forma

$$m(\tau) = \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log \frac{e^{\frac{q_3}{2}\tau}\frac{2\gamma^2}{\sigma_3^2}}{\frac{2\gamma^2}{\sigma_3^2}\cosh\gamma\tau + \frac{q_3\gamma}{\sigma_3^2}\operatorname{senh}\gamma\tau} =$$

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log \frac{e^{\frac{q_3}{2}\tau}\frac{\gamma}{\sigma_3^2}}{\frac{\gamma}{\sigma_3^2}\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2\sigma_3^2}\operatorname{senh}\gamma\tau}$$

Finalmente

$$m(\tau) = \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log \frac{\gamma e^{\frac{q_3}{2}\tau}}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}$$

La solución completa de la ecuación diferencial asociada al proceso $Z(\tau, l(t))$ es

$$Z(\tau, l(t)) = \exp\left\{\frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log \frac{\gamma e^{\frac{q_3}{2}\tau}}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau} - \left(\frac{\operatorname{senh}\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}\right) l(t)\right\}$$

Para adaptar esta solución a la utilizada en este modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés y a la obtenida en Cox, Ingersoll y Ross (1985b), se efectúan los siguientes pasos:

$$n(\tau) = \frac{\operatorname{senh}\gamma\tau}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau}$$

y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}\left(e^{2x} - 1\right)}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}\left(e^{2x} + 1\right)}{2}$$

entonces $n(\tau)$ se puede expresar

$$n(\tau) = \frac{e^{-\gamma\tau}\frac{\left(e^{2\gamma\tau}-1\right)}{2}}{\gamma e^{-\gamma\tau}\frac{\left(e^{2\gamma\tau}+1\right)}{2} + \frac{q_3}{2}e^{-\gamma\tau}\frac{\left(e^{2\gamma\tau}-1\right)}{2}} =$$

$$= \frac{2\left(e^{2\gamma\tau} - 1\right)}{2\gamma\left(e^{2\gamma\tau} - 1 + 2\right) + q_3\left(e^{2\gamma\tau} - 1\right)} = \frac{2\left(e^{2\gamma\tau} - 1\right)}{\left(2\gamma + q_3\right)\left(e^{2\gamma\tau} - 1\right) + 4\gamma}$$

y ya que

$$g = \sqrt{(k_3 + \lambda^*)^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2} = 2\gamma$$

se llega a

$$n(\tau) = \frac{2\left(\exp\{g\tau\} - 1\right)}{\left(g + q_3\right)\left(\exp\{g\tau\} - 1\right) + 2g} = B(\tau)$$

Por otra parte

$$m(\tau) = \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{\gamma e^{\frac{q_3}{2}\tau}}{\gamma\cosh\gamma\tau + \frac{q_3}{2}\operatorname{senh}\gamma\tau} =$$

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{\gamma e^{q_3/2\tau}}{\gamma e^{-\gamma\tau}\frac{\left(e^{2\gamma\tau}+1\right)}{2} + \frac{q_3}{2}e^{-\gamma\tau}\frac{\left(e^{2\gamma\tau}-1\right)}{2}} =$$

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{4\gamma e^{(q_3/2+\gamma)\tau}}{2\gamma\left(e^{2\gamma\tau} - 1 + 2\right) + \frac{q_3}{2}\left(e^{2\gamma\tau} - 1\right)} =$$

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{4\gamma e^{(q_3/2+\gamma)\tau}}{\left(2\gamma+\frac{q_3}{2}\right)\left(e^{2\gamma\tau}-1\right)+4\gamma} =$$

$$= \frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}\log\frac{2ge^{(q_3+g)\tau/2}}{\left(q_3+g\right)\left(e^{g\tau}-1\right)+2g} =$$

$$= \log\left[\frac{2g\exp\left\{(q_3+g)\,\tau/2\right\}}{(q_3+g)\left(\exp\left\{g\tau\right\}-1\right)+2g}\right]^{\frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}} = \log A_3(\tau)$$

Finalmente

$$A_3(\tau) = \left[\frac{2g\exp\left\{(q_3+g)\,\tau/2\right\}}{(q_3+g)\left(\exp\left\{g\tau\right\}-1\right)+2g}\right]^{\frac{2q_3\hat{\mu}_3}{\sigma_3^2}} = \log A_3(\tau)$$

Así, la expresión del precio en t de la obligación cupón cero es

$$P(\tau,s_1,s_2,l) = A_1(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau)\exp\left\{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)\right\} \quad (3.49)$$

Para simplificar $A_1(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau) = A(\tau)$ y así, la función de descuento se puede expresar como

$$P(\tau,s_1,s_2,l) = A(\tau)\exp\left\{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)\right\} \quad (3.50)$$

3.3 Estudio del precio de una obligación cupón cero

La función $P(t, s_1, s_2, l, T) = P(\tau, s_1, s_2, l)$ es el precio en t de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia, que paga 1 unidad monetaria en la fecha de vencimiento T. Por tanto, representa la función de descuento que permite calcular el valor actual de cualquier pago futuro, multiplicando su valor nominal por la función de descuento apropiada en cada momento.

A continuación se analiza esta función de descuento obtenida para comprobar su adecuación a las propiedades analíticas y financieras propias de una función de descuento.

No se puede afirmar nada sobre el signo de los coeficientes de las funciones representativas de los precios de mercado del riesgo de las tres variables, pero en cuanto a los parámetros utilizados en su modelización dinámica, se puede asegurar que si existe reversión a la media, los coeficientes de la velocidad de ajuste de los procesos, hacia el valor esperado a largo plazo, son positivos

$$k_i > 0 \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.51}$$

y además, por definición, los coeficientes de difusión de las ecuaciones diferenciales estocásticas son parámetros positivos, así como la media esperada del tanto de interés al contado a largo plazo

$$\sigma_i > 0 \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.52}$$

$$\mu_3 > 0 \tag{3.53}$$

Las propiedades que verifica la función de descuento obtenida en este modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés son

1. La función de descuento es una función positiva para plazos de vencimiento estrictamente positivos

$$P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} > 0 \tag{3.54}$$

ya que

$$B(\tau) = \frac{1-e^{-q_1\tau}}{q_1} > 0 \, , \, \forall \tau > 0$$

con independencia del signo de $q_1 = k_1 + b\sigma_1$.

$$C(\tau) = \frac{1-e^{-q_2\tau}}{q_2} > 0 \, , \, \forall \tau > 0$$

con independencia del signo de $q_2 = k_2 + d\sigma_2$.

$$D(\tau) = \frac{2\left(\exp\{g\tau\}-1\right)}{(q_3+g)\left(\exp\{g\tau\}-1\right)+2g} > 0 \, , \, \forall \tau > 0$$

con independencia del signo de $q_3 = k_3 + \lambda^*$.

Por otra parte

$$A_1(\tau) = \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B^2(\tau) + s_1^*\left(B(\tau)-\tau\right)\right\} > 0 \, , \, \forall \tau > 0$$

y

$$A_2(\tau) = \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C^2(\tau) + s_2^*\left(C(\tau)-\tau\right)\right\} > 0 \, , \, \forall \tau > 0$$

Y finalmente

$$A_3(\tau) = \left[\frac{2g\exp\left\{(q_3+g)\frac{\tau}{2}\right\}}{(q_3+g)\left(\exp\{g\tau\}-1\right)+2g}\right]^{\frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}} > 0 \, , \, \forall \tau > 0 \, .$$

2. El precio de la obligación cupón cero a su vencimiento es igual a la unidad

$$P(0, s_1, s_2, l) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} P(\tau, s_1, s_2, l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} A_1(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau)e^{-B(\tau)s_1(T)-C(\tau)s_2(T)-D(\tau)l(T)} = 1 \qquad (3.55)$$

ya que

$$A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} A_i(\tau) = 1 \quad i = 1, 2, 3$$

$$B(0) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} B(\tau) = 0$$

$$C(0) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} C(\tau) = 0$$

$$D(0) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} D(\tau) = 0$$

3. La función de descuento se anula para valores muy elevados de las variables de estado

$$\lim_{s_1 \longrightarrow \infty} P(\tau, s_1, s_2, l) = \lim_{s_1 \longrightarrow \infty} A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} = 0$$

$$\lim_{s_2 \longrightarrow \infty} P(\tau, s_1, s_2, l) = \lim_{s_2 \longrightarrow \infty} A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} = 0 \qquad (3.56)$$

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} P(\tau, s_1, s_2, l) = \lim_{l \longrightarrow \infty} A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} = 0$$

4. Se comprueba que la función de descuento aumenta cuando una de las tres variables de estado tiende a 0

$$\begin{aligned}
&\lim_{s_1 \longrightarrow 0} P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)e^{-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} > P(\tau, s_1, s_2, l) \\
&\lim_{s_2 \longrightarrow 0} P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-D(\tau)l(t)} > P(\tau, s_1, s_2, l) \qquad (3.57) \\
&\lim_{l \longrightarrow 0} P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)} > P(\tau, s_1, s_2, l)
\end{aligned}$$

5. El precio de la obligación es una función decreciente y convexa respecto a los tres factores del modelo

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial P(\cdot)}{\partial s_1} = P(\tau, s_1, s_2, l)\,(-B(\tau)) < 0 \quad \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_1^2} = P(\tau, s_1, s_2, l)B^2(\tau) > 0 \\
&\tfrac{\partial P(\cdot)}{\partial s_2} = P(\tau, s_1, s_2, l)\,(-C(\tau)) < 0 \quad \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_2^2} = P(\tau, s_1, s_2, l)C^2(\tau) > 0 \qquad (3.58) \\
&\tfrac{\partial P(\cdot)}{\partial l} = P(\tau, s_1, s_2, l)\,(-D(\tau)) < 0 \quad \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial l^2} = P(\tau, s_1, s_2, l)D^2(\tau) > 0
\end{aligned}$$

Asimismo, las expresiones de las derivadas parciales cruzadas son

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_1 \partial s_2} = \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_2 \partial s_1} = P(\tau, s_1, s_2, l)\,(-B(\tau))\,(-C(\tau)) > 0 \\
&\tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_1 \partial l} = \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial l \partial s_1} = P(\tau, s_1, s_2, l)\,(-B(\tau))\,(-D(\tau)) > 0 \qquad (3.59) \\
&\tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s_2 \partial l} = \tfrac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial l \partial s_2} = P(\tau, s_1, s_2, l)\,(-C(\tau))\,(-D(\tau)) > 0
\end{aligned}$$

6. Para vencimientos elevados ($\tau \longrightarrow \infty$) la función de descuento se anula

$$P(\infty, s_1, s_2, l) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} P(\tau, s_1, s_2, l) =$$

$$\lim_{\tau \longrightarrow \infty} A_1(\tau) A_2(\tau) A_3(\tau) \mathrm{e}^{-B(\tau)s_1(t) - C(\tau)s_2(t) - D(\tau)l(t)} = 0 \tag{3.60}$$

ya que

$$B(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} B(\tau) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-q_1 \tau}}{q_1} = \frac{1}{q_1} > 0$$

$$C(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} C(\tau) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-q_2 \tau}}{q_2} = \frac{1}{q_2} > 0$$

y aplicando Hôpital

$$D(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} D(\tau) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{2\left(\mathrm{e}\{g\tau\} - 1\right)}{(q_3 + g)\left(\mathrm{e}^{g\tau} - 1\right) + 2g} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{2\mathrm{e}^{g\tau} g}{(q_3 + g)\mathrm{e}^{g\tau} g} = \frac{2}{q_3 + g} > 0$$

Además

$$A_1(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} A_1(\tau) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + s_1^* \left(B(\tau) - \tau\right)\right\} = 0$$

$$A_2(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} A_2(\tau) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2}{4q_2} C^2(\tau) + s_2^* \left(C(\tau) - \tau\right)\right\} = 0$$

$$A_3(\infty) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} A_3(\tau) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \left[\frac{2g\mathrm{e}^{(q_3+g)\frac{\tau}{2}}}{(q_3+g)\left(\mathrm{e}^{g\tau}-1\right)+2g} \right]^{\frac{2\mu_3 q_3}{\sigma_3^2}} =$$

resolviendo por Hôpital el anterior límite, se llega a

$$= \left(\lim_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{2g\mathrm{e}^{(q_3+g)\frac{\tau}{2}} \frac{q_3+g}{2}}{(q_3+g)\mathrm{e}^{g\tau} g} \right)^{\frac{2\mu_3 q_3}{\sigma_3^2}} = \left(\lim_{\tau \longrightarrow \infty} \mathrm{e}^{(q_3+g)\frac{\tau}{2} - g\tau} \right)^{\frac{2\mu_3 q_3}{\sigma_3^2}} =$$

$$= \left(\lim_{\tau \longrightarrow \infty} \mathrm{e}^{(q_3-g)\frac{\tau}{2}} \right)^{\frac{2\mu_3 q_3}{\sigma_3^2}}$$

El valor de este límite depende del signo de $(q_3 - g)$, de manera que

$$\text{si} \begin{cases} q_3 - g > 0 \longrightarrow \lim_{\tau \longrightarrow \infty} A_3(\tau) = \infty \\ \\ q_3 - g < 0 \longrightarrow \lim_{\tau \longrightarrow \infty} A_3(\tau) = 0 \end{cases}$$

así, se exige

$$q_3 - g < 0 \longrightarrow q_3 < g$$

y como que $g = \sqrt{q_3^2 + 2\sigma_3^2}$ siempre se cumplirá esta condición.

Finalmente, resulta

$$A_3(\infty) = \left(\lim_{\tau \longrightarrow \infty} \mathrm{e}^{(q_3-g)\frac{\tau}{2}} \right)^{\frac{2\mu_3 q_3}{\sigma_3^2}} = 0$$

Se comprueba, por tanto, que el precio de la obligación para vencimientos muy elevados se anula

$$\lim_{\tau \longrightarrow \infty} P(\tau, s_1, s_2, l) =$$

$$= A_1(\infty)A_2(\infty)A_3(\infty)\exp\{-B(\infty)s_1(t) - C(\infty)s_2(t) - D(\infty)l(t)\} = 0$$

7. El precio de la obligación es una función decreciente (creciente) respecto al plazo hasta el vencimiento (al tiempo o momento de valoración). Para comprobar esta propiedad se calcula el signo de la derivada de la función de descuento respecto al plazo hasta el vencimiento de la obligación (τ) y respecto al tiempo calendario (t), respectivamente

$$\frac{\partial P(\cdot)}{\partial \tau} = A'(\tau)\cdot e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} + A(\tau)\cdot\left[e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)}\right]' =$$

$$= \frac{A(\tau)}{A(\tau)}\cdot\left[A'(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)} + A(\tau)\cdot e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(-B'(\tau)s_1(t) - C'(\tau)s_2(t) - D'(\tau)l(t))\right]$$

$$\frac{\partial P(\cdot)}{\partial \tau} = P(\tau, s_1, s_2, l)\left[\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} - B'(\tau)s_1(t) - C'(\tau)s_2(t) - D'(\tau)l(t)\right] < 0 \tag{3.61}$$

ya que

$P(\tau, s_1, s_2, l) > 0$

$\left[\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} - B'(\tau)s_1(t) - C'(\tau)s_2(t) - D'(\tau)l(t)\right] < 0$

A continuación se calculan las derivadas que aparecen en la anterior expresión para demostrar el signo negativo de la misma y, por tanto, el decrecimiento del precio de la obligación respecto del vencimiento.

$$B'(\tau) = e^{-q_1\tau} \quad \longrightarrow \quad B'(\tau) > 0\,, \forall \tau > 0$$

$$C'(\tau) = \mathrm{e}^{-q_2\tau} \quad \longrightarrow \; C'(\tau) > 0 \;, \forall \tau > 0$$

$$D'(\tau) = \frac{4\mathrm{e}^{g\tau} g^2}{\left[(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g\right]^2} \quad \longrightarrow \; D'(\tau) > 0 \;, \forall \tau > 0$$

$$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} =$$

$$= \frac{\left(A_1'(\tau)A_2(\tau) + A_1(\tau)A_2'(\tau)\right)A_3(\tau) + A_1(\tau)A_2(\tau)A_3'(\tau)}{A_1(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau)} =$$

$$= \frac{A_1'(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau) + A_1(\tau)A_2'(\tau)A_3(\tau) + A_1(\tau)A_2(\tau)A_3'(\tau)}{A_1(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau)}$$

$$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} = \frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} + \frac{A_2'(\tau)}{A_2(\tau)} + \frac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)}$$

donde

$$A_1'(\tau) = A_1(\tau)\left[-2\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B(\tau)B'(\tau) + s_1^*\left(B'(\tau)-1\right)\right] < 0 \;, \forall \tau > 0$$

y así

$$\frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} = \left[-2\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B(\tau)B'(\tau) + s_1^*\left(B'(\tau)-1\right)\right] < 0 \;, \forall \tau > 0 \,.$$

Por otra parte

$$A_2'(\tau) = A_2(\tau)\left[-2\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C(\tau)C'(\tau) + s_2^*\left(C'(\tau)-1\right)\right] < 0 \;, \forall \tau > 0$$

y así

$$\frac{A_2'(\tau)}{A_2(\tau)} = \left[-2\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C(\tau)C'(\tau) + s_2^*(C'(\tau)-1)\right] < 0\,, \forall\tau > 0\,.$$

Finalmente

$$A_3'(\tau) = 2\frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\left[\frac{2g\mathrm{e}^{\frac{(q_3+g)\tau}{2}}}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g}\right]^{\frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[2g\mathrm{e}^{\frac{(q_3+g)\tau}{2}}\frac{q_3+g}{2}\right][(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g] - \left[2g\mathrm{e}^{\frac{(q_3+g)\tau}{2}}\right][(q_3+g)\mathrm{e}^{g\tau}g]}{[(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g]^2}$$

reagrupando términos

$$A_3'(\tau) = 2\frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}A_3(\tau)\left[\frac{2g\mathrm{e}^{\frac{(q_3+g)\tau}{2}}}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g}\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[2g\mathrm{e}^{\frac{(q_3+g)\tau}{2}}\frac{q_3+g}{2}\right][(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g] - \left[2g\mathrm{e}^{\frac{(q_3+g)\tau}{2}}\right][(q_3+g)\mathrm{e}^{g\tau}g]}{[(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g]^2}$$

y así

$$\frac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)} = \frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\left[\frac{(\frac{q_3+g}{2})[(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g] - [(q_3+g)\mathrm{e}^{g\tau}g]}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g}\right] =$$

simplificando

$$= \frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\left[\frac{\frac{(q_3+g)^2}{2}(\mathrm{e}^{g\tau}-1) + (q_3+g)g(1-\mathrm{e}^{g\tau})}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau}-1)+2g}\right] =$$

$$= \frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2} \left[\frac{(\mathrm{e}^{g\tau} - 1)\left[\frac{(q_3+g)^2}{2} - (q_3+g)g\right]}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1) + 2g} \right] =$$

$$= \frac{2\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2} \left[\frac{(\mathrm{e}^{g\tau} - 1)(q_3+g)\left(\frac{q_3-g}{2}\right)}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1) + 2g} \right]$$

y finalmente

$$\frac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)} = \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2} \left[\frac{(q_3^2 - g^2)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1)}{(q_3+g)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1) + 2g} \right] < 0 \,, \forall\tau > 0$$

ya que

$$g = \sqrt{q_3^2 + g} \,, \quad \text{entonces} \quad q_3^2 < g^2 \,.$$

Así, se llega a

$$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} = \frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} + \frac{A_2'(\tau)}{A_2(\tau)} + \frac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)} < 0 \,, \ \forall\tau > 0.$$

En este punto se matiza la primera propiedad deducida para esta función de descuento que aseguraba la positividad de la función. Efectivamente, $P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t) - C(\tau)s_2(t) - D(\tau)l(t)} > 0$, pero además como

$$P(0, s_1, s_2, l) = 1$$
$$P(\infty, s_1, s_2, l) = 0$$

y la función es decreciente respecto al plazo hasta el vencimiento, se puede afirmar que el precio de la obligación será una función comprendida entre 0 y 1

$$0 < P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t) - C(\tau)s_2(t) - D(\tau)l(t)} < 1 \,. \tag{3.62}$$

Además, también se demuestra por el signo deducido para las anteriores derivadas de las componentes del precio de la obligación, que ésta es una función creciente respecto al momento de valoración t

$$\frac{\partial P(\cdot)}{\partial t} = P(t, s_1, s_2, l, T)\left[-\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t)\right] > 0 \qquad \forall \tau > 0 \tag{3.63}$$

Para analizar la función de descuento ha sido preciso estudiar el valor y signo de cada una de sus componentes para plazos de vencimiento estrictamente positivos, nulos y para plazos de vencimiento que tienden a infinito. También ha sido preciso estudiar el valor y signo de las primeras derivadas de estas componentes. Los resultados obtenidos se resumen en los siguientes cuadros

Cuadro 1

	$\tau > 0$	$\tau \longrightarrow 0$	$\tau \longrightarrow \infty$
$B(\tau)$	$B(\tau) > 0$	0	$\frac{1}{q_1} > 0$
$A_1(\tau)$	$A_1(\tau) > 0$	1	0
$C(\tau)$	$C(\tau) > 0$	0	$\frac{1}{q_2} > 0$
$A_2(\tau)$	$A_2(\tau) > 0$	1	0
$D(\tau)$	$D(\tau) > 0$	0	$\frac{2}{q_3+g} > 0$
$A_3(\tau)$	$A_3(\tau) > 0$	1	0

Cuadro 2

	$\tau > 0$	$\tau \longrightarrow 0$	$\tau \longrightarrow \infty$
$B'(\tau)$	$B'(\tau) > 0$	1	0
$C'(\tau)$	$C'(\tau) > 0$	1	0
$D'(\tau)$	$D'(\tau) > 0$	1	0
$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)}$	$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} < 0$	0	$\frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}(q_3 - g) - s_1^* - s_2^*$

En el cuadro 2 se han incluído también los valores, para plazos hasta el vencimiento nulos e infinitos, de las derivadas de las componentes de la función de descuento, ya que éstos serán utilizados, posteriormente, en el estudio de los tipos de interés al contado y *forward*. Estos resultados se muestran a continuación:

$$B'(\tau) = \mathrm{e}^{-q_1\tau} \begin{cases} B'(0) = 1 \\ \\ B'(\infty) = \lim\limits_{\tau \longrightarrow \infty} \mathrm{e}^{-q_1\tau} = 0 \end{cases}$$

$$C'(\tau) = \mathrm{e}^{-q_2\tau} \begin{cases} C'(0) = 1 \\ \\ C'(\infty) = \lim\limits_{\tau \longrightarrow \infty} \mathrm{e}^{-q_2\tau} = 0 \end{cases}$$

$$D'(\tau) = \frac{4\mathrm{e}^{g\tau} g^2}{\left[(q_3 + g)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1) + 2g\right]^2} \begin{cases} D'(0) = \frac{4g^2}{4g^2} = 1 \\ \\ D'(\infty) = \lim\limits_{\tau \longrightarrow \infty} \dfrac{4\mathrm{e}^{g\tau} g^2}{\left[(q_3 + g)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1) + 2g\right]^2} = \\ = \lim\limits_{\tau \longrightarrow \infty} \dfrac{2g^2}{\left[(q_3 + g)(\mathrm{e}^{g\tau} - 1) + 2g\right](q_3 + g)} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} = \frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} + \frac{A_2'(\tau)}{A_2(\tau)} + \frac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)}$$

$$\frac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} = \left[-2\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B(\tau)B'(\tau) + s_1^*\left(B'(\tau)-1\right)\right]$$

$$\begin{cases} \frac{A_1'(0)}{A_1(0)} = \left[-2\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B(0)B'(0) + s_1^*\left(B'(0)-1\right)\right] = 0 \\ \\ \frac{A_1'(\infty)}{A_1(\infty)} = \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty}\left[-2\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B(\tau)B'(\tau) + s_1^*\left(B'(\tau)-1\right)\right] = \\ \\ \qquad = \left[-2\frac{\sigma_1^2}{4q_1}B(\infty)B'(\infty) + s_1^*\left(B'(\infty)-1\right)\right] = -s_1^* \end{cases}$$

$$\frac{A_2'(\tau)}{A_2(\tau)} = \left[-2\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C(\tau)C'(\tau) + s_2^*\left(C'(\tau)-1\right)\right]$$

$$\begin{cases} \frac{A_2'(0)}{A_2(0)} = \left[-2\frac{\sigma_2^2}{4q_1}C(0)C'(0) + s_2^*\left(C'(0)-1\right)\right] = 0 \\ \\ \frac{A_2'(\infty)}{A_2(\infty)} = \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty}\left[-2\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C(\tau)C'(\tau) + s_2^*\left(C'(\tau)-1\right)\right] = \\ \\ \qquad = \left[-2\frac{\sigma_2^2}{4q_2}C(\infty)C'(\infty) + s_2^*\left(C'(\infty)-1\right)\right] = -s_2^* \end{cases}$$

$$\frac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)} = \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\left[\frac{(q_3^2-g^2)(e^{g\tau}-1)}{(q_3+g)(e^{g\tau}-1)+2g}\right]$$

$$\begin{cases} \frac{A_3'(0)}{A_3(0)} = \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\left[\frac{(q_3^2-g^2)(e^{g0}-1)}{(q_3+g)(e^{g0}-1)+2g}\right] = 0 \\ \\ \frac{A_3'(\infty)}{A_3(\infty)} = \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty}\frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\left[\frac{(q_3^2-g^2)(e^{g\tau}-1)}{(q_3+g)(e^{g\tau}-1)+2g}\right] = \\ \\ \qquad = \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty}\frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}\frac{(q_3^2-g^2)}{(q_3+g)} = \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}(q_3-g) \end{cases}$$

Así

$$\frac{A'(\tau)}{A(\tau)}\begin{cases} \frac{A'(0)}{A(0)} = \frac{A_1'(0)}{A_1(0)} + \frac{A_2'(0)}{A_2(0)} + \frac{A_3'(0)}{A_3(0)} = 0 \\[2ex] \frac{A'(\infty)}{A(\infty)} = \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty} \dfrac{A'(\tau)}{A(\tau)} = \\[2ex] \qquad = \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty} \dfrac{A_1'(\tau)}{A_1(\tau)} + \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty} \dfrac{A_2'(\tau)}{A_2(\tau)} + \lim\limits_{\tau\longrightarrow\infty} \dfrac{A_3'(\tau)}{A_3(\tau)} = \\[2ex] \qquad = -s_1^* - s_2^* + \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}(q_3 - g) \end{cases}$$

3.4 Obtención y estudio de la curva de tipos de interés al contado: estructura temporal de tipos de interés

La estructura temporal de tipos de interés puede ser especificada, alternativamente, a través de los precios de las obligaciones cupón cero libres de riesgo, de los tipos de interés al contado o de los tipos de interés implícitos. Así, si

$P(t, s_1, s_2, l, T)$: precio en t de la obligación cupón cero que paga 1 unidad monetaria en su fecha de vencimiento T

$R(t, s_1, s_2, l, T)$: tipo de interés al contado en t para el plazo $\tau = T - t$

$f(t, s_1, s_2, l, T)$: tipo de interés instantáneo implícito en t y aplicable en T para el plazo dt

la relación entre estas tres funciones es la siguiente

$$P(t, s_1, s_2, l, T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t, s_1, s_2, l, u)\, du\right\} = \\ = \exp\{-R(t, s_1, s_2, l, T)(T-t)\} \tag{3.64}$$

Se trata de determinar a partir de la función de descuento obtenida en la sección anterior, la curva de tipos de interés al contado, a través de la siguiente transformación

$$R(t, s_1, s_2, l, T) = R(\tau, s_1, s_2, l) = -\tfrac{1}{\tau}\ln P(\tau, s_1, s_2, l)$$

$$R(\tau, s_1, s_2, l) = -\tfrac{1}{\tau}\ln\left[A(\tau)e^{-B(\tau)s_1(t)-C(\tau)s_2(t)-D(\tau)l(t)}\right] = \\ = -\tfrac{\ln A(\tau)}{\tau} + \tfrac{B(\tau)}{\tau}s_1(t) + \tfrac{C(\tau)}{\tau}s_2(t) + \tfrac{D(\tau)}{\tau}l(t) \tag{3.65}$$

A partir de los resultados de los cuadros 1 y 2 del apartado anterior, se demuestran las siguientes propiedades para la curva de tipos de interés al contado:

1. El tanto de interés al contado para un plazo infinitesimal coincide con $r(t)$. Es

decir, la curva de tipos de interés al contado empieza en el valor del tanto de interés instantáneo sin riesgo

$$R(0\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} R(\tau\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \left(-\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} s_1(t) + \frac{C(\tau)}{\tau} s_2(t) + \frac{D(\tau)}{\tau} l(t) \right)$$

y resolviendo por la regla de L'Hôpital las anteriores indeterminaciones

$$R(0\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + \lim_{\tau \longrightarrow 0} B'(\tau)s_1(t) + \lim_{\tau \longrightarrow 0} C'(\tau)s_2(t) + \lim_{\tau \longrightarrow 0} D'(\tau)l(t) =$$

$$= s_1(t) + s_2(t) + l(t) = r(t) \tag{3.66}$$

2. El tanto de interés al contado para plazos muy elevados es independiente de las variables de estado

$$R(\infty\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} R(\tau\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow \infty} \left(-\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau} s_1(t) + \frac{C(\tau)}{\tau} s_2(t) + \frac{D(\tau)}{\tau} l(t) \right)$$

y por la regla de L'Hôpital

$$R(\infty\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow \infty} -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + \lim_{\tau \longrightarrow \infty} B'(\tau)s_1(t) + \lim_{\tau \longrightarrow \infty} C'(\tau)s_2(t) + \lim_{\tau \longrightarrow \infty} D'(\tau)l(t) =$$

$$= s_1^* + s_2^* + \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}(g - q_3) \tag{3.67}$$

3. El tanto de interés al contado es una función lineal y creciente respecto a las variables de estado del modelo

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1} &= \frac{B(\tau)}{\tau} > 0 \quad \frac{\partial^2 R(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1^2} = 0 \\ \frac{\partial R(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_2} &= \frac{C(\tau)}{\tau} > 0 \quad \frac{\partial^2 R(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_2^2} = 0 \\ \frac{\partial R(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial l} &= \frac{D(\tau)}{\tau} > 0 \quad \frac{\partial^2 R(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial l^2} = 0 \end{aligned} \tag{3.68}$$

3.5 Obtención y estudio de la curva de tipos de interés implícitos

En esta sección se deduce la curva de tipos de interés implícitos o *forward* asociada al modelo, a partir de la definición

$$f(t, s_1, s_2, l, T) = f(\tau, s_1, s_2, l) = -\frac{\frac{\partial P(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial \tau}}{P(\tau, s_1, s_2, l)} \tag{3.69}$$

Por tanto

$$f(\tau, s_1, s_2, l) = -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t) \tag{3.70}$$

A partir de los resultados de los cuadros 1 y 2 se deducen las siguientes propiedades de la curva *forward*

1. La función $f(\tau, s_1, s_2, l)$ es estrictamente positiva para plazos hasta el vencimiento

estrictamente positivos

$$f\,(\tau\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) = -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t) > 0\;,\;\forall\tau > 0 \tag{3.71}$$

2. Al igual que el tanto de interés al contado, el tipo de interés implícito coincide, en el origen, con el tanto de interés instantáneo sin riesgo

$$f\,(0\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} f\,(\tau\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0}\left(\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t)\right) =$$

$$= s_1(t) + s_2(t) + l(t) = r(t) \tag{3.72}$$

3. El tanto de interés implícito tiende al mismo valor asintótico que el tanto de interés al contado

$$f\,(\infty\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} f\,(\tau\,,\,s_1\,,\,s_2\,,\,l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow \infty}\left(\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t)\right) =$$

$$= s_1^* + s_2^* + \frac{\hat{\mu}_3 q_3}{\sigma_3^2}(g - q_3) \tag{3.73}$$

4. El tanto de interés *forward* es función lineal y creciente respecto a los tres factores del modelo

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_1} = B'(\tau) > 0 & \frac{\partial^2 f(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_1^2} = 0 \\ \frac{\partial f(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2} = C'(\tau) > 0 & \frac{\partial^2 f(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2^2} = 0 \\ \frac{\partial f(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l} = D'(\tau) > 0 & \frac{\partial^2 f(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l^2} = 0 \end{array} \tag{3.74}$$

Se puede comprobar que el comportamiento de la curva de tipos al contado y la curva *forward* es muy similar. Ambas empiezan en $r(t)$ y presentan la misma asíntota. Además, la variación del tanto de interés al contado respecto al plazo hasta el vencimiento también está ligada al tanto de interés *forward*, ya que se cumple:

$$\frac{\partial R(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial \tau} = \frac{f(\tau,s_1,s_2,l) - R(\tau,s_1,s_2,l)}{\tau} \tag{3.75}$$

3.6 Análisis de las primas temporales

Las expectativas de mercado sobre los futuros tantos de interés pueden deducirse del precio de las obligaciones cupón cero y de la actual estructura temporal. Así, para nuestro modelo, el proceso estocástico del precio de la obligación y la curva *forward* implícita en la estructura temporal de tipos de interés definirán, en cada instante, unas primas temporales. Estas primas nos van a permitir decidir sobre la consistencia de las diferentes versiones de la hipótesis de las expectativas.

Según Anderson *et al* (1996), las primas temporales se pueden clasificar en dos tipos:

1. **Prima a plazo instantánea** o *instantaneous forward premium*

2. **Prima de rendimiento instantánea** o *instantaneous holding premium*

La **prima a plazo instantánea** $\pi(t, s_1, s_2, l, T)$ se define como la diferencia entre el tanto de interés *forward* instantáneo y el tipo de interés instantáneo esperado para un momento futuro

$$\pi(t, s_1, s_2, l, T) = \pi(\tau, s_1, s_2, l) = f(t, s_1, s_2, l, T) - E_t[r(T)] \tag{3.76}$$

El valor esperado del tipo de interés instantáneo es

$$E_t[r(T)] = E_t\left[s_1(T) + s_2(T) + l(T)\right] = E_t[s_1(T)] + E_t[s_2(T)] + E_t[l(T)] = {}^{8}$$

$$= \left(1 - e^{-k_1\tau}\right)\mu_1 + e^{-k_1\tau}s_1(t) + \left(1 - e^{-k_2\tau}\right)\mu_2 + e^{-k_2\tau}s_2(t) +$$

$$+ \left(1 - e^{-k_3\tau}\right)\mu_3 + e^{-k_3\tau}l(t) \tag{3.77}$$

[8]Las variables $s_1(T)$, $s_2(T)$ condicionadas por su valor en t, $s_1(t)$, $s_2(t)$($t \leq T$) se distribuyen como una normal y, como se planteó en el primer apartado de este capítulo, las esperanzas condicionadas de estas variables son las siguientes

$$E_t\left[s_1(T)\right] = s_1(t)e^{-k_1(T-t)} + \mu_1\left(1 - e^{-k_1(T-t)}\right) \ , \forall t \leq T$$

$$E_t\left[s_2(T)\right] = s_2(t)e^{-k_2(T-t)} + \mu_2\left(1 - e^{-k_2(T-t)}\right) \ , \forall t \leq T$$

La variable $l(T)$ condicionada por su valor en t, $l(t)$ $(t \leq T)$ sigue una distribución χ^2 no centrada, con la siguiente expresión para su esperanza condicionada

$$E_t\left[l(T)\right] = l(t)e^{-k_3(T-t)} + \mu_3\left(1 - e^{-k_3(T-t)}\right) \ , \forall t \leq T$$

Sustituyendo este valor y el obtenido para el tipo de interés *forward* en la definición de esta prima se obtiene

$$\pi(\tau, s_1, s_2, l) = -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t) + \left(e^{-k_1\tau} - 1\right)\mu_1 - e^{-k_1\tau}s_1(t) +$$

$$+ \left(e^{-k_2\tau} - 1\right)\mu_2 - e^{-k_2\tau}s_2(t) + \left(e^{-k_3\tau} - 1\right)\mu_3 - e^{-k_3\tau}l(t)$$

y reagrupando términos

$$\pi(\tau, s_1, s_2, l) = -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + \left(e^{-k_1\tau} - 1\right)\mu_1 + \left(e^{-k_2\tau} - 1\right)\mu_2 + \left(e^{-k_3\tau} - 1\right)\mu_3 +$$

$$+ \left(B'(\tau) - e^{-k_1\tau}\right)s_1(t) + \left(C'(\tau) - e^{-k_2\tau}\right)s_2(t) + \left(D'(\tau) - e^{-k_3\tau}\right)l(t) \qquad (3.78)$$

El valor y signo de esta prima dependerá, en cada instante, de los valores de las tres variables de estado del modelo así como del vencimiento de la obligación. Además, al no ser nula se puede afirmar que no se verifica la hipótesis pura de las expectativas insesgadas, que implica que los tantos *forward* reflejan exactamente los tantos de interés futuros esperados. Esta versión de la hipótesis de las expectativas sólo se cumple en ausencia de primas de riesgo.

Las propiedades que se derivan de esta prima son

1. En el origen la prima a plazo instantánea se anula

$$\pi(0, s_1, s_2, l) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \pi(\tau, s_1, s_2, l) =$$

$$\lim_{\tau \longrightarrow 0} \left(-\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + \left(e^{-k_1\tau} - 1\right)\mu_1 + \left(e^{-k_2\tau} - 1\right)\mu_2 + \left(e^{-k_3\tau} - 1\right)\mu_3 + \right.$$

$$+\left(B'(\tau)-e^{-k_1\tau}\right)s_1(t)+\left(C'(\tau)-e^{-k_2\tau}\right)s_2(t)+\left(D'(\tau)-e^{-k_3\tau}\right)l(t)\Big)=0 \tag{3.79}$$

2. Para plazos hasta el vencimiento muy elevados esta prima no depende de las variables de estado

$$\pi(\infty,s_1,s_2,l)=\lim_{\tau\longrightarrow\infty}\pi(\tau,s_1,s_2,l)=$$

$$\lim_{\tau\longrightarrow\infty}\left(-\frac{A'(\tau)}{A(\tau)}+\left(e^{-k_1\tau}-1\right)\mu_1+\left(e^{-k_2\tau}-1\right)\mu_2+\left(e^{-k_3\tau}-1\right)\mu_3+\right.$$

$$\left.+\left(B'(\tau)-e^{-k_1\tau}\right)s_1(t)+\left(C'(\tau)-e^{-k_2\tau}\right)s_2(t)+\left(D'(\tau)-e^{-k_3\tau}\right)l(t)\right)=$$

$$=s_1^*+s_2^*+\frac{\hat{\mu}_3q_3}{\sigma_3^2}(g-q_3)-(\mu_1+\mu_2+\mu_3) \tag{3.80}$$

3. La prima a plazo instantánea es lineal respecto a las variables del modelo

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_1}=B'(\tau)-e^{-k_1\tau} & \frac{\partial^2\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_1^2}=0\\ \frac{\partial\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2}=C'(\tau)-e^{-k_2\tau} & \frac{\partial^2\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2^2}=0\\ \frac{\partial\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l}=D'(\tau)-e^{-k_3\tau} & \frac{\partial^2\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l^2}=0\end{array} \tag{3.81}$$

En cuanto al crecimiento o decrecimiento de esta prima respecto a los factores del modelo se puede argumentar lo siguiente. Si se considera, por ejemplo, la primera variable de estado, el primer *spread* $s_1(t)$, se observa que la prima a plazo tendrá una relación lineal creciente o decreciente en función del signo de

$$\frac{\partial \pi(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1} = B'(\tau) - \mathrm{e}^{-k_1 \tau}$$

es decir

cuando $B'(\tau) > \mathrm{e}^{-k_1 \tau}$ la prima es creciente respecto $s_1(t)$

cuando $B'(\tau) < \mathrm{e}^{-k_1 \tau}$ la prima es decreciente respecto $s_2(t)$

Así, teniendo en cuenta que

$$B'(\tau) = \mathrm{e}^{-q_1 \tau}$$

se debe analizar el signo de

$$\frac{\partial \pi(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1} = \mathrm{e}^{-q_1 \tau} - \mathrm{e}^{-k_1 \tau}$$

como que $q_1 = k_1 + b\sigma_1$, resulta

$$\frac{\partial \pi(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1} = \mathrm{e}^{-(k_1 + b\sigma_1)\tau} - \mathrm{e}^{-k_1 \tau} = \mathrm{e}^{-k_1 \tau} \left(\mathrm{e}^{-b\sigma_1 \tau} - 1 \right)$$

De manera que

- si $b < 0 \longrightarrow \mathrm{e}^{-b\sigma_1 \tau} > 1 \longrightarrow \frac{\partial \pi(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1} > 0$, y la prima a plazo instantánea es una relación lineal creciente respecto al primer *spread.*
- si $b > 0 \longrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-b\sigma_1 \tau} < 1 \longrightarrow \frac{\partial \pi(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_1} < 0$, y la prima a plazo instantánea es una relación lineal decreciente respecto al primer *spread.*

Además, cuando esta prima a plazo sea una relación lineal creciente respecto al primer *spread*, el precio de mercado del riesgo asociado a este factor será una relación lineal decreciente respecto a $s_1(t)$, ya que

$$\lambda_1(t\,,\,s_1) = a + bs_1(t)$$

y, por tanto, el coeficiente b es la pendiente de esta función lineal que se ha supuesto para el precio de mercado del riesgo del primer *spread*.

Por contra, cuando la prima sea una relación lineal decreciente respecto al primer *spread*, el precio de mercado del riesgo asociado a esta variable será una función lineal creciente respecto a la misma.

En el análisis de la relación entre la prima a plazo instantánea y el segundo *spread* se llega a las mismas conclusiones. Así

$$\frac{\partial \pi(\tau, s_1, s_2, l)}{\partial s_2} = \mathrm{e}^{-q_2\tau} - \mathrm{e}^{-k_2\tau} =$$

$$= \mathrm{e}^{-(k_2+d\sigma_2)\tau} - \mathrm{e}^{-k_2\tau} = \mathrm{e}^{-k_2\tau}\left(\mathrm{e}^{-b\sigma_2\tau} - 1\right)$$

De manera que

- si $d < 0 \longrightarrow \mathrm{e}^{-d\sigma_2\tau} > 1 \longrightarrow \frac{\partial \pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2} > 0$, la prima a plazo instantánea es una relación lineal creciente respecto al segundo *spread* y el precio de mercado del riesgo asociado a este factor es una función lineal decreciente respecto a $s_2(t)$.
- si $d > 0 \longrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-d\sigma_2\tau} < 1 \longrightarrow \frac{\partial \pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2} < 0$, la prima a plazo instantánea es una relación lineal decreciente respecto al segundo *spread* y el precio de mercado del riesgo asociado a este factor es una función lineal creciente respecto a $s_2(t)$.

En cuanto a la variabilidad de la prima respecto al tanto de interés al contado a largo plazo sólo se afirma que

- si $D'(\tau) > e^{-k_3\tau} \longrightarrow \frac{\partial\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l} > 0$, y la prima a plazo instantánea será una relación lineal creciente respecto a $l(t)$.
- si $D'(\tau) < e^{-k_3\tau} \longrightarrow \frac{\partial\pi(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l} < 0$, y la prima a plazo instantánea será una relación lineal decreciente respecto a $l(t)$.

Por otra parte, la **prima de rendimiento instantánea**, $h(t,s_1,s_2,l,T)$ que también se conoce como **prima de riesgo**, recoge el exceso de rendimiento que los inversores exigen como compensación por la incertidumbre existente en cuanto a los rendimientos esperados de sus inversiones

$$h(t,s_1,s_2,l,T) = h(\tau,s_1,s_2,l) = \mu(t,s_1,s_2,l,T) - r(t) \tag{3.82}$$

Por definición del modelo

$$\mu(t,s_1,s_2,l,T) = \lambda_1(t,s_1)\rho_1(t,s_1,s_2,l,T) + \lambda_2(t,s_2)\rho_2(t,s_1,s_2,l,T) + \tag{3.83}$$

$$+\lambda_3(t,l)\rho_3(t,s_1,s_2,l,T) + r(t)$$

y calculando $\rho_1(t, s_1, s_2, l, T)$, $\rho_2(t, s_1, s_2, l, T)$ y $\rho_3(t, s_1, s_2, l, T)$, por su definición[9]

$$\begin{aligned} \rho_1(\tau, s_1, s_2, l) &= \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_1 P_{s_1} = -B(\tau)\sigma_1 < 0 \\ \rho_2(\tau, s_1, s_2, l) &= \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_2 P_{s_2} = -C(\tau)\sigma_2 < 0 \\ \rho_3(\tau, s_1, s_2, l) &= \tfrac{1}{P(\cdot)}\sigma_3\sqrt{l(t)}P_l = -D(\tau)\sigma_3\sqrt{l(t)} < 0 \end{aligned} \tag{3.84}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(\tau, s_1, s_2, l) = {} & (a + bs_1(t))\left(-B(\tau)\sigma_1\right) + (c + ds_2(t))\left(-C(\tau)\sigma_2\right) + \\ & + \frac{\lambda^*\sqrt{l(t)}}{\sigma_3}\left(-D(\tau)\sigma_3\sqrt{l(t)}\right) + r(t) \end{aligned} \tag{3.85}$$

Finalmente, la expresión de la prima de riesgo instantánea es

$$h(\tau, s_1, s_2, l) = -B(\tau)\sigma_1(a + bs_1(t)) - C(\tau)\sigma_2(c + ds_2(t)) - D(\tau)\lambda^* l(t) \tag{3.86}$$

Se observa que el signo de esta prima depende del que a su vez tengan los precios de mercado del riesgo asociados a cada una de las tres variables de estado. Así, cuando todos estos precios son negativos (positivos) la prima es positiva (negativa). Sin embargo, cuando estos precios toman diferente signo, a priori no se puede afirmar nada sobre el signo de la prima, ya que éste dependerá también del valor de cada uno de estos precios.

La existencia de esta prima contradice la versión local de la hipótesis de las expectativas que implica que los rendimientos esperados de obligaciones de todos los

[9] Es interesante recordar el valor negativo de las volatilidades del rendimiento de la obligación, propiedad que implicará una relación inversa, en cuanto a signo, entre la prima de riesgo instantánea y los precios de mercado del riesgo de los tres factores, cuando todos éstos presentan el mismo signo.

vencimientos son iguales. Sin embargo, existe una versión ajustada al riesgo de esta hipótesis, que es la que verifica nuestro modelo, y que se cumple en un equilibrio de no arbitraje, cuando la prima de riesgo es proporcional a las volatilidades del rendimiento de la obligación.

Las propiedades que se derivan de esta prima son

1. En el origen la prima de rendimiento instantánea se anula

$$h(0, s_1, s_2, l) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} h(\tau, s_1, s_2, l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} (-B(\tau)\sigma_1(a + bs_1(t)) - C(\tau)\sigma_2(c + ds_2(t)) - D(\tau)\lambda^* l(t)) = 0 \quad (3.87)$$

2. Para plazos hasta el vencimiento muy elevados esta prima depende del valor de los precios de mercado del riesgo de las variables del modelo

$$h(\infty, s_1, s_2, l) = \lim_{\tau \longrightarrow \infty} h(\tau, s_1, s_2, l) =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow \infty} (-B(\tau)\sigma_1(a + bs_1(t)) - C(\tau)\sigma_2(c + ds_2(t)) - D(\tau)\lambda^* l(t)) =$$

$$= -\frac{\sigma_1}{q_1}(a + bs_1(t)) - \frac{\sigma_2}{q_2}(c + ds_2(t)) - \frac{2\lambda^*}{q_3 + g} l(t) \quad (3.88)$$

3. Cuando b, d, $\lambda^* < (>) \, 0$ esta prima de rendimiento instantánea es lineal y creciente (decreciente) respecto a los factores del modelo

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_1} = -B(\tau)\sigma_1 b & \frac{\partial^2 h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_1^2} = 0 \\ \frac{\partial h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2} = -C(\tau)\sigma_2 d & \frac{\partial^2 h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial s_2^2} = 0 \\ \frac{\partial h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l} = -D(\tau)\lambda^* & \frac{\partial^2 h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial l^2} = 0 \end{array} \tag{3.89}$$

Es decir, cuando los precios de mercado del riesgo de los dos *spreads* decrezcan (crezcan) linealmente, esta prima crecerá (decrecerá) también linealmente respecto a estas variables. Para el tanto de interés a largo plazo, cuando el precio que da el mercado al riesgo asociado a esta variable sea negativo (positivo), esta prima crecerá (decrecerá) respecto a esta variable.

4. Cuando los precios de mercado del riesgo asociados a las tres variables del modelo sean todos ellos positivos (negativos), la prima instantánea de rendimiento será una función decreciente (creciente) respecto al plazo hasta el vencimiento. Cuando los precios que el mercado da al riesgo de cada uno de los factores del modelo tomen diferente signo, no se puede decir nada en cuanto a la variabilidad de la prima en el tiempo, ya que ésta dependerá también del valor de cada uno de estos precios.

$$\frac{\partial h(\tau,s_1,s_2,l)}{\partial \tau} = -\sigma_1(a+bs_1(t))B'(\tau) - \sigma_2(c+ds_2(t))C'(\tau) - \lambda^* l(t)D'(\tau) \tag{3.90}$$

3.7 Gestión del riesgo de tipo de interés

La dinámica de la curva de tipos de interés en el tiempo genera el denominado **riesgo de tipo de interés.** Es un riesgo estrictamente financiero que el mismo mercado provoca y que afecta, directamente, a las carteras compuestas por títulos de renta fija y activos derivados sobre tipos de interés.

Una variación en los tipos de interés provoca, por una parte, una variación en el precio de los activos, porque la oferta y demanda del mercado hacen que el precio de un título se ajuste para adaptarse al mercado. Por tanto, la valoración de una cartera fluctúa en función de los tipos de interés. Pero, por otra parte, una variación de los tipos también afecta a la futura retribución de los flujos de capital que genera la cartera y que se reinvierten, a medida que se producen, a los tipos de interés vigentes en cada momento.

Así, el riesgo derivado de la variación de los tipos de interés tiene dos vertientes:

- el **riesgo de precio** que afecta a los inversores cuando han de vender un activo al precio actual del mercado. Este precio es el resultado de descontar los flujos futuros del activo a los tipos de interés vigentes en el mercado.
- y el **riesgo de reinversión** que surge frente a la necesidad de reinvertir los cobros periódicos de los diferentes activos a los tipos de interés vigentes en el mercado.

En definitiva, la incertidumbre sobre la evolución futura de los tipos de interés hace que el inversor tenga que asumir una variación en la valoración de sus activos a lo largo del tiempo.

Afortunadamente, el efecto que una variación de los tipos de interés causa sobre el valor del título es inverso al que se produce por la reinversión de los flujos de la cartera. Es decir, el riesgo de tipo de interés se puede descomponer en dos efectos de signo contrario, que bajo ciertas hipótesis incluso se pueden llegar a compensar. Es como si el mismo problema, el riesgo de tipo de interés, tuviese implícita la solución, que se centra en el concepto de duración.

En el contexto de los modelos dinámicos de la estructura temporal, este riesgo de tipo de interés, normalmente, se considera que hace referencia al **riesgo de mercado** y al **riesgo de la curva cupón cero.**[10] El primero es el originado por cambios en nivel de la estructura temporal de tipos de interés, es decir, es el riesgo asociado a una variación uniforme de todos los tipos de interés al contado. Por otra parte, el riesgo de la curva cupón cero es el asociado a variaciones no paralelas de la curva de tipos de interés, es decir, el asociado a variaciones no uniformes de los tipos de interés.

La ventaja del modelo desarrollado en esta tesis doctoral es que al considerar tres factores estocásticos en la dinámica de la estructura temporal, se pueden considerar cambios de nivel, pendiente y curvatura en los movimientos de la curva de tipos y así, se contempla no sólo el riesgo de mercado, sino también el denominado riesgo de la curva cupón cero, es decir, el ocasionado por variaciones no uniformes en los tipos de interés.

Tradicionalmente, la gestión del riesgo de tipo de interés de carteras de renta fija, se ha limitado al uso de la duración convencional. En este sentido, la duración de Macaulay mide la sensibilidad de un activo respecto a cambios del tipo de interés, bajo la hipótesis de desplazamientos paralelos, en términos infinitesimales, de la estructura temporal de tipos de interés. De esta forma se cubre, eficientemente, el que se ha definido como riesgo de mercado.

En los últimos años ha adquirido importancia el riesgo de la curva cupón cero, que es significativo, sobre todo, en carteras donde se incluyen derivados sobre tipos de interés. Surgen numerosos trabajos que se centran en el desarrollo de medidas del riesgo de tipo de interés asociado a variaciones no uniformes de los tipos de interés

[10] Chen, L. (1996), pp.74-75.

(Bierwag, Kaufman y Toevs (1980), Gultekin y Rogalski (1984), Elton, Gruber y Michaely (1990), Leibowitz, Krasker y Nozari (1988), Klaffky, Ma y Nozari (1992), Waldman (1992) y Ho (1992), entre otros). El principal problema de todas estas medidas desarrolladas en las dos últimas décadas es que no están basadas en un modelo de estructura temporal de tipos de interés. La estructura temporal y la forma funcional de los desplazamientos de la curva se especifican de forma arbitraria y ello puede ser inconsistente con la dinámica de la curva de tipos e incluso con el principio de ausencia de oportunidades de arbitraje.

Por consiguiente, el modelo trifactorial de la estructura temporal presentado en esta tesis ofrece un contexto idóneo para el desarrollo del concepto de duración multifactorial, acorde con los movimientos paralelos y no paralelos de la curva de tipos.

A continuación, los conceptos de duración y convexidad se extienden al modelo de estructura temporal desarrollado, para medir el riesgo de tipo de interés respecto a los factores estocásticos del modelo.

3.7.1 Duración factorial

El precio en t de una obligación cupón cero que paga una unidad monetaria a su vencimiento T, es una función que depende de las tres variables del modelo $s_1(t)$, $s_2(t)$ y $l(t)$

$$P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)\exp\{-B(\tau)s_1(t) - C(\tau)s_2(t) - D(\tau)l(t)\} \tag{3.91}$$

Utilizando el lema de Itô, la ecuación diferencial estocástica que indica el cambio relativo del precio de la obligación cupón cero para un periodo infinitesimal, igual que en (3.13), es

$$dP(t, s_1, s_2, l, T) = (k_1(\mu_1 - s_1(t))P_{s_1} + k_2(\mu_2 - s_2(t))P_{s_2} + k_3(\mu_3 - l(t))P_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_1^2 P_{s_1 s_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 P_{s_2 s_2} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 l(t) P_{ll} + P_t\Big) dt +$$

$$+ \sigma_1 P_{s_1} dz_1(t) + \sigma_2 P_{s_2} dz_2(t) + \sigma_3 \sqrt{l(t)} P_l dz_3(t) \tag{3.92}$$

La componente determinista de esta ecuación $\mu(t, s_1, s_2, l, T)$ se corresponde con el término tendencia de la misma y, por tanto, denota el rendimiento instantáneo esperado de la obligación cupón cero. Así si

$$\mu(t, s_1, s_2, l, T) = (k_1(\mu_1 - s_1(t))P_{s_1} + k_2(\mu_2 - s_2(t))P_{s_2} + k_3(\mu_3 - l(t))P_l +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_1^2 P_{s_1 s_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 P_{s_2 s_2} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 l(t) P_{ll} + P_t\Big) \tag{3.93}$$

y considerando la forma funcional deducida para la función de descuento

$$P(\tau, s_1, s_2, l) = A(\tau)\exp\{-B(\tau)s_1(t) - C(\tau)s_2(t) - D(\tau)l(t)\}$$

entonces los valores de las derivadas parciales del precio de la obligación son ((3.58) y (3.63))

$$\begin{array}{ll} P_{s_1} = -B(\tau)P(\tau, s_1, s_2, l) & P_{s_1 s_1} = B^2(\tau)P(\tau, s_1, s_2, l) \\ P_{s_2} = -C(\tau)P(\tau, s_1, s_2, l) & P_{s_2 s_2} = C^2(\tau)P(\tau, s_1, s_2, l) \\ P_l = -D(\tau)P(\tau, s_1, s_2, l) & P_{ll} = D^2(\tau)P(\tau, s_1, s_2, l) \\ P_t = P(\tau, s_1, s_2, l)\left[-\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t)\right] & \end{array} \tag{3.94}$$

y la expresión para el rendimiento esperado de la obligación es

$$\mu(t, s_1, s_2, l, T) = [-k_1(\hat{\mu}_1 - s_1(t))B(\tau) - k_2(\hat{\mu}_2 - s_2(t))C(\tau) -$$

$$-k_3(\hat{\mu}_3 - l(t))D(\tau) + \frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 B^2(\tau) + \sigma_2^2 C^2(\tau) + \sigma_3^2 D^2(\tau) l(t)\right] -$$

$$\left. -\frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + B'(\tau)s_1(t) + C'(\tau)s_2(t) + D'(\tau)l(t)\right] P(\tau, s_1, s_2, l) \tag{3.95}$$

El rendimiento esperado de la obligación recoge las tendencias instantáneas esperadas de los cambios en los factores del modelo así como los términos de segundo orden, en los que aparecen las varianzas de las variables. Dado el objetivo de este apartado se va a obviar, en adelante, la forma funcional de $\mu(\cdot)$, sin perder por ello generalidad en el análisis.

Así, la dinámica del rendimiento de la obligación se expresa como

$$dP(t, s_1, s_2, l, T) = \mu(t, s_1, s_2, l, T)dt + \sigma_1 P_{s_1} dz_1(t) + \sigma_2 P_{s_2} dz_2(t) + \sigma_3 \sqrt{l(t)} P_l dz_3(t) \tag{3.96}$$

y si ahora se considera el precio de la obligación en función del tanto de interés al contado (3.64)

$$P(t, s_1, s_2, l, T) = \exp\{-R(t, s_1, s_2, l, T)(T - t)\} \tag{3.97}$$

los valores de las primeras derivadas parciales de la función de descuento son

$$P_{s_1} = -(T - t)R_{s_1}P(\tau, s_1, s_2, l) = -\tau R_{s_1}P(\tau, s_1, s_2, l)$$

$$P_{s_2} = -(T - t)R_{s_2}P(\tau, s_1, s_2, l) = -\tau R_{s_2}P(\tau, s_1, s_2, l) \tag{3.98}$$

$$P_l = -(T - t)R_l P(\tau, s_1, s_2, l) = -\tau R_l P(\tau, s_1, s_2, l)$$

y la ecuación diferencial estocástica asociada al rendimiento de la obligación

$$dP(t,s_1,s_2,l,T)=\mu(t,s_1,s_2,l,T)dt-(T-t)P(t,s_1,s_2,lT)\left[\sigma_1 R_{s_1}dz_1(t)+\right.$$

$$\left.+\sigma_2 R_{s_2}dz_2(t)+\sigma_3\sqrt{l(t)}R_l dz_3(t)\right] \qquad (3.99)$$

en la que

$$\begin{aligned} R_{s_1} &= \tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_1} \\ R_{s_2} &= \tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_2} \\ R_l &= \tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial l} \end{aligned} \qquad (3.100)$$

Por otra parte, una obligación que vence en T y que paga n cupones c_j en t_j, $j=1,2,\ldots,n\,(t_n=T)$, se puede considerar como una cartera formada por n obligaciones cupón cero, cuyo precio en t, $P^*(t,s_1,s_2,l,T)$ es

$$P^*(t,s_1,s_2,l,T)=P^*(\tau,s_1,s_2,l)=\sum_{j=1}^{n}c_jP(t,s_1,s_2,l,t_j) \qquad (3.101)$$

y cuya dinámica en el tiempo viene dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dP^*(\tau,s_1,s_2,l) &= \sum_{j=1}^{n}c_j\mu(t,s_1,s_2,l,t_j)dt- \\ &-\sum_{j=1}^{n}c_j(t_j-t)P(t,s_1,s_2,l,t_j)\sigma_1R_{s_1}dz_1(t)- \\ &-\sum_{j=1}^{n}c_j(t_j-t)P(t,s_1,s_2,l,t_j)\sigma_2R_{s_2}dz_2(t)- \\ &-\sum_{j=1}^{n}c_j(t_j-t)P(t,s_1,s_2,l,t_j)\sigma_3\sqrt{l(t)}R_ldz_3(t) \end{aligned} \qquad (3.102)$$

Ecuación que se puede expresar como

$$\frac{dP^*(t,s_1,s_2,l,T)}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)} = \frac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)}\mu^*(t,s_1,s_2,l,T)dt +$$

$$+ \varphi_{s_1}\sigma_1 dz_1(t) + \varphi_{s_2}\sigma_2 dz_2(t) + \varphi_l \sigma_3\sqrt{l(t)}dz_3(t) \tag{3.103}$$

donde

$$\mu^*(t,s_1,s_2,l,T) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(t,s_1,s_2,l,t_j)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{s_1} &= -\tfrac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)}\sum_{j=1}^{n} c_j(t_j - t)P(t,s_1,s_2,l,t_j)R_{s_1} \\
\varphi_{s_2} &= -\tfrac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)}\sum_{j=1}^{n} c_j(t_j - t)P(t,s_1,s_2,l,t_j)R_{s_2} \\
\varphi_l &= -\tfrac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)}\sum_{j=1}^{n} c_j(t_j - t)P(t,s_1,s_2,l,t_j)R_l
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Los parámetros φ_{s_1}, φ_{s_2} y φ_l miden la sensibilidad del rendimiento de la obligación respecto a cambios de los factores del modelo. Esta duración es diferente de la duración convencional en dos aspectos. Por una parte, tenemos tres duraciones, una para cada factor evolutivo de la estructura temporal y, por otra parte, hay un término extra en cada una de estas duraciones

$$\begin{aligned}
R_{s_1} &= \tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,t_j)}{\partial s_1} \\
R_{s_2} &= \tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,t_j)}{\partial s_2} \\
R_l &= \tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,t_j)}{\partial l} \quad j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{3.105}$$

que mide la sensibilidad del tanto de interés al contado respecto a cada uno de los tres factores estocásticos del modelo.

De esta forma, se ha definido una duración multifactorial que permite gestionar el riesgo de tipo de interés debido a fluctuaciones no uniformes de la estructura temporal. En la actual literatura financiera, estas duraciones factoriales se han venido denominando *duraciones funcionales* o *duraciones parciales.*

Para el caso de la obligación cupón cero $P^*(t, s_1, s_2, l, T) = P(t, s_1, s_2, l, T)$ y $c_n = 1$ y $c_j = 0\,\forall j < n$, las expresiones de φ_{s_1}, φ_{s_2} y φ_l son[11]

$$\begin{aligned}
\varphi_{s_1} &= -(T-t)\tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_1} = \tfrac{1}{P(t,s_1,s_2,l,T)}\tfrac{\partial P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_1} = -B(\tau)\\
\varphi_{s_2} &= -(T-t)\tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_2} = \tfrac{1}{P(t,s_1,s_2,l,T)}\tfrac{\partial P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_2} = -C(\tau)\\
\varphi_{l} &= -(T-t)\tfrac{\partial R(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial l} = \tfrac{1}{P(t,s_1,s_2,l,T)}\tfrac{\partial P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial l} = -D(\tau)
\end{aligned} \tag{3.106}$$

ya que según (3.58)

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_1} &= -P(t,s_1,s_2,l,T)B(\tau)\\
\tfrac{\partial P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_2} &= -P(t,s_1,s_2,l,T)C(\tau)\\
\tfrac{\partial P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial l} &= -P(t,s_1,s_2,l,T)D(\tau)
\end{aligned}$$

[11]En el anexo III se puede comprobar, empíricamente, que las funciones $B(\tau)$, $C(\tau)$ y $D(\tau)$ toman un valor muy aproximado al plazo de la obligación. No es de extrañar, pues, el resultado de estas tres duraciones.