UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DIVISIÓN DE CIENCIAS JURÍDICAS, ECONÓMICAS Y SOCIALES
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA ECONÓMICA, FINANCIERA Y ACTUARIAL

DINÁMICA DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS: MODELO DE TRES FACTORES

- Tesis Doctoral presentada por Mercedes Galisteo Rodríguez para optar al título de Doctora en Ciencias Económicas y Empresariales.
- Directora de la Tesis: Dra. Hortènsia Fontanals Albiol.
- Programa de doctorado: Metódos Matemáticos en Economía Financiera. Bienio: 92-94

Junio de 2000

3.7.2 Convexidad factorial

El valor de un título puede ser aproximado a través de su duración. Se trata de una aproximación lineal a una función convexa y el error que se comete depende de la variación de los tipos de interés. Ahora bien, la aproximación será más correcta cuanto más pequeña sea la variación de los tipos de interés.

Se puede conseguir una mejor aproximación al precio del activo incluyendo en el cálculo de la variación del precio del título el término de segundo orden, que dentro de este contexto se denomina **convexidad.**

La duración obtenida para este modelo trifactorial de la estructura temporal, no es constante y varía por los cambios de las tres variables del modelo así como por el paso del tiempo. La convexidad indicará, pues, la tasa de variación de la duración cuando varían cada uno de los tres factores estocásticos del modelo. Se trata de un efecto de segundo orden. Su influencia en el valor de la cartera es menor en comparación con la influencia de la duración pero, para ciertas situaciones, como un elevado aumento de los tipos de interés, la convexidad puede llegar a ser bastante importante.

La convexidad queda definida por

$$
\begin{aligned}
\varrho_{s_1} &= -\tfrac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)} \sum_{j=1}^{n} c_j(t_j - t)P(t, s_1, s_2, l, t_j)R_{s_1 s_1} \\
\varrho_{s_2} &= -\tfrac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)} \sum_{j=1}^{n} c_j(t_j - t)P(t, s_1, s_2, l, t_j)R_{s_2 s_2} \qquad (3.107) \\
\varrho_{l} &= -\tfrac{1}{P^*(t,s_1,s_2,l,T)} \sum_{j=1}^{n} c_j(t_j - t)P(t, s_1, s_2, l, t_j)R_{ll}
\end{aligned}
$$

donde

$$R_{s_1 s_1} = \frac{\partial^2 R(t,s_1,s_2,l,t_j)}{\partial s_1^2}$$

$$R_{s_2 s_2} = \frac{\partial^2 R(t,s_1,s_2,l,t_j)}{\partial s_2^2} \tag{3.108}$$

$$R_{ll} = \frac{\partial^2 R(t,s_1,s_2,l,t_j)}{\partial l^2} \quad j = 1\,,\,2\,,\ldots\,,\,n$$

Para el caso de la obligación cupón cero $P^*(t,s_1,s_2,l,T) = P(t,s_1,s_2,l,T)$ y $c_j = 0\,\forall j < n$ y $c_n = 1$, y teniendo en cuenta los valores de las segundas derivadas parciales del precio de la obligación cupón cero (3.58)

$$\frac{\partial^2 P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_1^2} = P(t,s_1,s_2,l,T)B^2(\tau)$$

$$\frac{\partial^2 P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_2^2} = P(t,s_1,s_2,l,T)C^2(\tau) \tag{3.109}$$

$$\frac{\partial^2 P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial l^2} = P(t,s_1,s_2,l,T)D^2(\tau)$$

los factores convexidad respecto a las tres variables del modelo son

$$\varrho_{s_1} = \frac{1}{P(t,s_1,s_2,l,T)}\frac{\partial^2 P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_1^2} = B^2(\tau)$$

$$\varrho_{s_2} = \frac{1}{P(t,s_1,s_2,l,T)}\frac{\partial^2 P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial s_2^2} = C^2(\tau)$$

$$\varrho_{l} = \frac{1}{P(t,s_1,s_2,l,T)}\frac{\partial^2 P(t,s_1,s_2,l,T)}{\partial l} = D^2(\tau)$$

Para finalizar este apartado es interesante destacar que para la obligación cupón cero, las duraciones de cada factor estocástico coinciden con las funciones, que dependen del vencimiento, y que aparecen en el exponente del precio de la obligación, multiplicando a cada variable. Asimismo, la convexidad de cada factor se corresponde con el cuadrado de esta función. Simplemente se hace este comentario para establecer la analogía de esta duración factorial con la duración convencional, que en el caso de obligación cupón cero coincide con el vencimiento de la obligación.

CAPITULO IV

Aplicación Empírica

Capítulo 4

Aplicación Empírica

En este último capítulo se presenta la aproximación econométrica del modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés, desarrollado en el anterior capítulo.

En un primer apartado se explica el procedimiento que se va a seguir para la estimación del modelo, dividiendo este procedimiento en dos etapas diferenciadas. En la primera etapa se estiman los parámetros de difusión de los tres factores del modelo, utilizando el Método de los Momentos Generalizados de Hansen (1982). En la siguiente fase, una vez introducidos en la función de descuento los valores estimados de los parámetros de difusión, se estiman, a través de métodos de regresión no lineales, los coeficientes que determinan la forma funcional de los precios de mercado del riesgo asociados a las variables del modelo.

A continuación y para poder llevar a cabo la estimación descrita en el apartado anterior, se efectúa un análisis de los datos que se van a utilizar. Se analizan las *proxys* que van a representar las variables del modelo y se efectúa un estudio descriptivo de las mismas.

Finalmente, se comentan los resultados obtenidos en la estimación del modelo.

4.1 Estimación del modelo

Para la estimación del modelo trifactorial desarrollado de la estructura temporal de tipos de interés, se va a proceder de la siguiente forma. Se elige el precio de la obligación cupón cero libre de riesgo de insolvencia, $P(t, s_1, s_2, l, T)$, para su estimación. A partir de aquí, la curva de tipos de interés al contado así como la curva de tipos de interés *forward*, se obtienen a través de una simple transformación.[1] Esta función de descuento depende en cada instante de las tres variables del modelo y del vencimiento de la obligación. Pero, además, esta función de descuento precisa de algún método de estimación para su completa determinación, puesto que en su expresión analítica aparecen 14 coeficientes. Es decir, el precio de la obligación cupón cero, que es función de $s_1(t)$, $s_2(t)$ y $l(t)$ y que también depende del vencimiento considerado, queda totalmente especificada cuando, por algún método de estimación apropiado, se estiman los parámetros de difusión que caracterizan la evolución estocástica de las tres variables del modelo (k_i, μ_i, σ_i $i = 1, 2, 3$), así como los parámetros que definen los precios de mercado del riesgo de los tres factores (a, b, c, d, λ^*).

La estimación de esta función de descuento se efectúa en dos fases:

- En una primera fase se procede a estimar los parámetros de las ecuaciones diferenciales estocásticas que definen la dinámica en el tiempo de las tres variables del modelo.
- En una segunda fase, se sustituyen en la función de descuento los parámetros de difusión por los valores obtenidos en la etapa precedente y se estiman los

[1] Ver apartado 2 de capítulo 1 y apartado 4 y 5 de capítulo 3.

parámetros restantes, que hacen referencia a los precios de mercado del riesgo de las variables del modelo.

4.1.1 Estimación de los parámetros de difusión

Las ecuaciones diferenciales estocásticas que recogen la evolución dinámica de las tres variables del modelos son

$$
\begin{aligned}
ds_1(t) &= k_1\left(\mu_1 - s_1(t)\right)dt + \sigma_1 dz_1(t) \\
ds_2(t) &= k_2\left(\mu_2 - s_2(t)\right)dt + \sigma_2 dz_2(t) \\
dl(t) &= k_3\left(\mu_3 - l(t)\right)dt + \sigma_3\sqrt{l(t)}dz_3(t)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Las dos primeras variables, los *spreads*, siguen un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck, mientras que el tipo de interés al contado a largo plazo sigue un proceso raíz cuadrada.

Para estimar los parámetros de difusión de estas modelizaciones en tiempo continuo se utiliza la siguiente especificación en tiempo discreto (Brennan y Schwartz (1982), Dietrich-Campbell y Schwartz (1986), Sanders y Unal (1988), Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders (1992) y Moreno (1997), entre otros)

$$
\begin{aligned}
s_1(t) - s_1(t-1) &= \delta_1 + \beta_1 s_1(t-1) + \varepsilon_1(t) \\
s_2(t) - s_2(t-1) &= \delta_2 + \beta_2 s_2(t-1) + \varepsilon_2(t) \\
l(t) - l(t-1) &= \delta_3 + \beta_3 l(t-1) + \varepsilon_3(t)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

con

$$\begin{array}{ll} \mathrm{E}\left[\varepsilon_1(t)\right] = 0 & \mathrm{E}\left[\varepsilon_1^2(t)\right] = \sigma_1^2 \\ \mathrm{E}\left[\varepsilon_2(t)\right] = 0 & \mathrm{E}\left[\varepsilon_2^2(t)\right] = \sigma_2^2 \\ \mathrm{E}\left[\varepsilon_3(t)\right] = 0 & \mathrm{E}\left[\varepsilon_3^2(t)\right] = \sigma_3^2 l(t) \end{array} \tag{4.3}$$

y

$$\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1(t)\,,\, \varepsilon_2(t)\right) = \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1(t)\,,\, \varepsilon_3(t)\right) = \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_2(t)\,,\, \varepsilon_3(t)\right) = 0 \tag{4.4}$$

Esta discretización tiene la ventaja de permitir que la varianza de los cambios en el tipo de interés al contado a largo plazo dependa, directamente, del valor de este tipo de interés, tal y como especifica el proceso raíz cuadrada en tiempo continuo de este factor.

Así, los parámetros de difusión de las variables y los coeficientes utilizados en la discretización, presentan la siguiente relación

$$\begin{array}{ll} k_1 = -\beta_1 & \mu_1 = -\frac{\delta_1}{\beta_1} \\ k_2 = -\beta_2 & \mu_2 = -\frac{\delta_2}{\beta_2} \\ k_3 = -\beta_3 & \mu_3 = -\frac{\delta_3}{\beta_3} \end{array} \tag{4.5}$$

El método empleado para la estimación de estos parámetros es el **Método de los Momentos Generalizados de Hansen (1982)** (GMM).[2] Las características propias de este método lo hacen especialmente idóneo para la estimación de procesos de tipos de interés en tiempo continuo. Esta técnica de estimación no requiere que

[2]Para un análisis exhaustivo de este método de estimación ver Greene, W.H. (1993), cap.13.

los cambios en la variable se distribuyan de forma normal y ello es especialmente interesante para el caso de $l(t)$, puesto que este factor al seguir un proceso estocástico raíz cuadrada, se distribuye según una χ^2 no centrada. El método de los momentos generalizados sólo requiere que la distribución de los cambios en la variable sea estacionaria y ergódica[3]. De esta forma, los estimadores G.M.M. son consistentes incluso para distribuciones heterocedásticas y autocorrelacionadas. Además, el problema de agregación temporal que surge en una estimación de un proceso continuo con datos discretos y que influye en la distribución de los errores, se suaviza con esta técnica de estimación[4].

4.1.2 Estimación de las funciones de los precios de mercado del riesgo

Como se ha comentado anteriormente, en la función de descuento o precio de la obligación cupón cero aparecen 14 coeficientes o parámetros a estimar. De ellos, 9 hacen referencia al comportamiento estocástico de los factores del modelo, en concreto

$$k_i\,,\,\mu_i\,,\,\sigma_i \quad i=1,2,3\;.$$

Por ello, una vez estimados estos parámetros de difusión de las variables del modelo, éstos son sustituidos en la función de descuento. De esta forma, en esta

[3]Ver Hamilton, J.D. (1994), pp.43-47 para definición de distribución estacionaria y ergódica. Por otra parte, en el anexo I, figura IV, se adjuntan los resultados del test de estacionariedad *Augmented Dickey-Fuller*, de las series de las diferencias de los tres factores del modelo, tanto para la muestra completa (02-01-91/30-12-94) como para la segunda muestra (02-01-95/09-03-99). Los resultados demuestran que ds_1, ds_2 y dl, para los dos periodos considerados, son series estacionarias.

[4]El método de los momentos generalizados ha sido utilizado por otros autores como Harvey (1988), Longstaff (1989), Chan, Karolyi, Longstaff y Sanders (1992), Longstaff y Schwartz (1992) y Moreno (1997), entre otros.

función de descuento sólo faltan por estimar cinco coeficientes: a, b, c, d y λ^*, es decir, los parámetros de las funciones de los precios de mercado del riesgo asociados a los tres factores del modelo.

Existe evidencia empírica (Brennan y Schwartz (1982), Campbell (1986), Moreno (1997) y Gómez y Martínez (1999)) de que los precios que el mercado asigna al riesgo de cada factor varían a lo largo del tiempo. Por ello, en la modelización de estos precios se ha supuesto una función lineal para los *spreads* y un precio proporcional a la raíz cuadrada del valor del tipo de interés a largo plazo, para el tercer factor. Así, estos precios quedan formalmente definidos según las funciones:

$\lambda_1(t\,,\,s_1) = a + bs_1(t)$ Precio de mercado del riesgo del primer *spread*

$\lambda_2(t\,,\,s_2) = c + ds_2(t)$ Precio de mercado del riesgo del segundo *spread*

$\lambda_3(t\,,\,l) = \frac{\lambda^* \sqrt{l(t)}}{\sigma_3}$ Precio de mercado del riesgo del tipo de interés a largo plazo

En el desarrollo del modelo trifactorial de la estructura temporal, se ha comentado que estos precios del riesgo dependen de la información suministrada, en cada instante, por el mercado. Más concretamente, dependen de la función de utilidad de un agente representativo y de su actitud frente al riesgo. Esta problemática hace que se plantee, en esta fase de estimación, dos posibles alternativas:

- En primer lugar, se podría efectuar una estimación en cada momento de observación, de los coeficientes de las funciones representativas de los precios del riesgo de cada factor.

  En este caso, y para la estimación de estos parámetros se deberían aplicar métodos de regresión no lineales, dada la forma funcional de la función de descuento. En concreto, se debería aplicar una regresión no lineal para cada instante de observación. Se trataría de estimar los coeficientes señalados en cada momento de observación y para ello sería preciso disponer de diferentes valores de la función de descuento en cada uno de esos momentos. Es decir, sería preciso disponer de precios de obligaciones cupón cero libres de riesgo de insolvencia de diferentes vencimientos, para poder llevar a cabo la regresión en cada instante de observación. En definitiva, se trataría de disponer de datos de corte transversal, es decir, de una matriz de datos cuyas filas indicarían momentos de observación y cuyas columnas informarían de precios de obligaciones cupón cero de diferentes vencimientos.

Las funciones que representan los precios del riesgo de cada factor son de parámetro constante. Por ello, una vez estimados los coeficientes a , b , c , d y λ^*, para cada momento de observación y con el fin de obtener un valor constante para toda la muestra, se podría calcular el valor medio de todas estas estimaciones.

- En segundo lugar y ya que se considera que es precisamente la información del mercado la que hace variar estos precios del riesgo, también sería oportuno estimar estos coeficientes justo en el momento en que se pretende utilizar el modelo. De esta forma no es necesario modelizar estas funciones de los precios del riesgo, a través de valores medios. Se cree acertada esta segunda estrategia, puesto que, evidentemente, estos coeficientes estimados pueden presentar un alto grado de dispersión, y así, su valor medio ser poco representativo.[5]

Evidentemente, para llevar a cabo la estimación global descrita es preciso, previamente, efectuar un análisis de los datos que se van a emplear como *input* en esta estimación. Esta cuestión es tratada a continuación y es el paso previo y necesario antes de empezar con el procedimiento de estimación descrito.

[5]Ver Moreno, M. (1997).

4.2 Análisis de las series de tipos de interés

Para la estimación de los coeficientes que caracterizan la función de descuento del modelo, el primer paso consiste, evidentemente, en la recopilación de los datos necesarios para ello. Así, es preciso disponer de series de tipos de interés al contado libres de riesgo, para la determinación de los tres factores del modelo y la estimación de sus parámetros de difusión. Y en una segunda fase, es preciso disponer de precios de obligaciones cupón cero de diferentes vencimientos, para la estimación de los parámetros relacionados con los precios de mercado del riesgo de las variables escogidas.

El primer problema surge cuando se intentan recopilar tipos de interés al contado libres de riesgo de insolvencia, es decir, rendimientos asociados a obligaciones cupón cero libres de riesgo, puesto que el mercado no dispone de esta información para todos los plazos que se quieran considerar. Esta cuestión ha sido ampliamente tratada en el primer capítulo de esta tesis.

Dado que para el próposito de estimación de los coeficientes de difusión de las variables del modelo es conveniente disponer de información diaria de tipos de interés al contado, se opta por emplear algún método de ajuste de la estructura temporal de tipos de interés. En concreto se utiliza una base de datos propuesta por Soledad Núñez (1995), del Servicio de Estudios del Banco de España. En ella aparecen los coeficientes necesarios para ajustar la curva de tipos de interés al contado libres de riesgo. En concreto se dispone de los coeficientes estimados para el ajuste de la curva del 2 de enero de 1991 hasta el 30 de diciembre de 1994 por el **método de Nelson y Siegel** (1987) y de los coeficientes necesarios para obtener los diferentes tipos de interés, del 2 de enero de 1995 hasta el 9 de marzo de 1999 por el **método de Svenson** (1994).[6] De esta forma se dipone de tipos de interés al contado libres

[6] Estos dos métodos de ajuste de la estructura temporal de tipos de interés han sido brevemente descritos en el capítulo 1, apartado 6.

de riesgo de insolvencia y para cualquier plazo. En concreto se ha obtenido una muestra para el periodo que va del 1 de enero de 1991 hasta el 9 de marzo de 1999, contabilizándose en este periodo, un total de 2025 observaciones.

En el desarrollo del modelo se asumió la hipótesis de que los tres factores de la estructura temporal tenían que estar representados por tres *proxys* ortogonales, ya que se asumió la incorrelación entre los tres procesos de Wiener que afectan a la evolución estocástica de las variables. Por ello, el primer paso en la estimación del modelo consiste en efectuar un análisis para la identificación de tres variables de estado independientes entre sí. Más concretamente y dada la modelización de los factores del modelo a través de ecuaciones diferenciales estocásticas, se pretende analizar la independencia entre las diferencias de tres variables de estado. Así, se van calculando matrices de coeficientes de correlación lineal entre las diferencias de tres variables, que se van eligiendo de forma arbitraria. En definitva, se ha ido cambiando aleatoriamente el plazo de los tipos de interés al contado analizados, hasta llegar a tres variables que presentan diferencias con coeficientes de correlación lineal lo más pequeños posible.

La definición de las tres variables de estado del modelo es:

$$\text{Primer } \textit{spread} \longrightarrow s_1 = r - m$$

da la diferencia entre un tipo de interés a corto plazo y un tipo de interés del tramo medio de la curva de tipos al contado.

$$\text{Segundo } \textit{spread} \longrightarrow s_2 = m - l$$

expresa la diferencia entre el tipo de interés a medio plazo y un tipo de interés al contado a largo plazo.

$$\text{Tipo de interés al contado a largo plazo} \longrightarrow l$$

A continuación se presentan algunos resultados obtenidos en el cálculo de los coeficientes de correlación lineal entre las diferencias de diferentes variables:

$$\begin{array}{c} \\ ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0.371781 & -0.226933 \\ & 1 & -0.311849 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $r \longrightarrow$ tipo de interés a 3 meses
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 4 años
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 7 años

$$\begin{array}{c} \\ ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0.343583 & -0.142414 \\ & 1 & -0.311849 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $r \longrightarrow$ tipo de interés a 1 mes
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 4 años
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 7 años

$$\begin{array}{c} \\ ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0.325462 & -0.118370 \\ & 1 & -0.311849 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $r \longrightarrow$ tipo de interés a 1 quincena
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 4 años
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 7 años

$$\begin{array}{c} \\ ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.325056 & -0.266510 \\ & 1 & -0.517813 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $r \longrightarrow$ tipo de interés a 1 mes
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 1 año
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 3 años

$$\begin{array}{c} \\ ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0.348747 & -0.231922 \\ & 1 & -0.247044 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $r \longrightarrow$ tipo de interés a 1 mes
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 3 años
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 5 años

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.343394 & -0.280739 \\ & 1 & -0.247044 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} r \longrightarrow & \text{tipo de interés a 2 meses} \\ m \longrightarrow & \text{tipo de interés a 3 años} \\ l \longrightarrow & \text{tipo de interés a 5 años} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.197811 & -0.031104 \\ & 1 & -0.829299 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} r \longrightarrow & \text{tipo de interés a 1 mes} \\ m \longrightarrow & \text{tipo de interés a 3 años} \\ l \longrightarrow & \text{tipo de interés a 15 años} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.320935 & -0.085244 \\ & 1 & -0.475505 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} r \longrightarrow & \text{tipo de interés a 1 mes} \\ m \longrightarrow & \text{tipo de interés a 2 años} \\ l \longrightarrow & \text{tipo de interés a 6 años} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.372488 & -0.119405 \\ & 1 & -0.357689 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} r \longrightarrow & \text{tipo de interés a 1 mes} \\ m \longrightarrow & \text{tipo de interés a 3.5 años} \\ l \longrightarrow & \text{tipo de interés a 7 años} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.336985 & 0.015484 \\ & 1 & -0.627857 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{ll} r \longrightarrow & \text{tipo de interés a 1 mes} \\ m \longrightarrow & \text{tipo de interés a 2 años} \\ l \longrightarrow & \text{tipo de interés a 9 años} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.389084 & -0.093115 \\ & 1 & -0.408678 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde
$r \longrightarrow$ tipo de interés a 1 mes
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 3 años
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 7 años

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} ds_1 & ds_2 & dl \end{array} \\ \begin{array}{c} ds_1 \\ ds_2 \\ dl \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -0.346934 & -0.031248 \\ & 1 & -0.524457 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde
$r \longrightarrow$ tipo de interés a 1 mes
$m \longrightarrow$ tipo de interés a 2 años
$l \longrightarrow$ tipo de interés a 7 años

De la información presentada, se desprenden las siguientes conclusiones:

- Cuando la variable l se aproxima a través de tipos de interés a más largo plazo, al entrar esta variable en la definición del segundo *spread*, aumenta la correlación entre dl y ds_2.

- Si se decide aproximar la variable m a través de tipos de interés con un plazo mayor, se reduce la correlación entre ds_2 y dl, aunque aumenta un poco la dependencia entre ds_1 y ds_2 y entre ds_1 y dl.

- Si para reducir estos coeficientes de correlación lineal que han aumentado al aproximar m por un tipo a más largo plazo, se opta por aumentar el plazo del tipo de interés que va a representar l, vuelve a aumentar la correlación entre ds_2 y dl.

- Cuando se aproximan las tres variables por tipos de interés al contado a más largo plazo, los resultados no mejoran.

En definitiva, se opta por los siguientes tipos de interés al contado:

$$r \longrightarrow \quad \text{tipo de interés a 1 mes}$$
$$m \longrightarrow \quad \text{tipo de interés a 3 años}$$
$$l \longrightarrow \quad \text{tipo de interés a 5 años}$$

de manera que los tres factores del modelo van a estar representados por las siguientes *proxys*:[7]

$$s_1 \longrightarrow \quad \text{diferencia entre el tipo a 1 mes y el tipo a 3 años}$$
$$s_2 \longrightarrow \quad \text{diferencia entre el tipo de interés a 3 años y el tipo a 5 años}$$
$$l \longrightarrow \quad \text{tipo de interés a 5 años}$$

A continuación, se procede a efectuar un análisis estadístico-descriptivo de los tres factores seleccionados. Evidentemente y dada la modelización que se efectúa de las variables en el modelo trifactorial de la estructura temporal, se da más énfasis al estudio de las diferencias de estas variables, es decir, de ds_1, ds_2 y dl.

Las series del primer *spread*, del segundo *spread* y del tipo de interés a 5 años se representan en la figura I (ver anexo 1).

El primer factor, el primer *spread*, alcanza un valor máximo del 0.055037 y un valor mínimo del -0.034629.[8] Para la muestra considerada el valor medio de esta

[7] Se es consciente de que los tres factores del modelo no son estrictamente independientes. En este sentido, se quiere hacer constar que la independencia de los factores es una hipótesis de trabajo del modelo y que, evidentemente, según la muestra de tipos de interés considerada, se cumplirá en mayor o menor grado. Lo que es cierto es que los tipos de interés de diferentes vencimientos no están perfectamente correlacionados y aún es más cierto que existe más grado de independencia entre un *spread* y un tipo de interés al contado. En la muestra considerada en este trabajo el grado de independencia no es muy bajo, pero al respecto cabe mencionar también que los datos de esta muestra se han obtenido de un modelo de ajuste y, por tanto, llevan implícita una interdependencia entre ellos. Sin embargo, por hipótesis, se asume que los tres factores seleccionados tienen procesos de Wiener incorrelacionados.

[8] En esta sección los valores de las series analizadas se expresan en tanto por uno.

diferencia entre el tipo de interés a 1 mes y el tipo de interés a 3 años ha sido del 0.001066. Además, presenta una tendencia marcadamente alcista entre septiembre de 1992 y junio de 1993 y desde febrero de 1995 hasta diciembre del mismo año. De abril a agosto de 1994 invierte la tendencia y esta serie decrece. Desde diciembre de 1995, esta diferencia de tipos de interés se suaviza y va fluctuando entorno al 0.

El segundo *spread* presenta un valor medio de -0.001917. Hasta mayo de 1993, esta diferencia entre el tipo de interés a 3 años y el tipo de interés a 5 años es positiva y a partir de entonces pasa a ser una diferencia negativa. Su valor máximo es de 0.006574 y su valor mínimo es de -0.006466.

La serie del tipo de interés a 5 años presenta su valor máximo en septiembre de 1992 (0.138630). A partir de entonces y hasta febrero de 1994 decrece para pasar luego a una tendencia alcista, que acaba en febrero de 1995. A partir de esa fecha el tipo de interés a 5 años va decreciendo. Alcanza un valor mínimo del 0.032837, mientras que su valor medio ha sido del 0.086509.

Las series que representan las diferencias de las tres variables del modelo se presentan en la figura II (anexo 1). La serie diferencias del primer *spread* alcanza un valor máximo de 0.017845, un valor mínimo de -0.20775 y presenta un valor medio de -3.10E-06. Se observa, claramente, que a partir de 1995 estas diferencias del primer *spread* se suavizan considerablemente.

La serie diferencias del segundo *spread* presenta unos valores más pequeños que la serie diferencias del primer *spread*, de manera que el valor medio se sitúa en el 3.49E-06, el valor máximo en el 0.002640 y el valor mínimo en el -0.002928. Esta serie, al igual que la anterior, presenta un comportamiento más suave a partir de 1995, de manera que las diferencias del segundo *spread* a partir de entonces, son mucho menores.

La serie de las diferencias del tipo de interés a 5 años también presenta valores más pequeños a partir de 1995, aunque aquí la diferencia no es tan considerable como en las dos series anteriores. El valor medio de esta serie es del -4.70E-05, el valor máximo es del 0.004854 y el valor mínimo es del -0.004990.

A continuación se resumen las principales variables estadísticas, tanto de las series de los tres factores del modelo, como de las series de las diferencias de estos factores:

Estadísticos de las variables de estado

Variable	s_1	s_2	l
n	2025	2025	2025
Media	0.001066	−0.001917	0.086509
Desv. Estándard	0.012287	0.003153	0.027388
Mediana	0.001159	−0.003033	0.091640
Máximo	0.055037	0.006574	0.138630
Mínimo	−0.034629	−0.006466	0.032837
Coef. Asimetría	−0.183269	0.682540	−0.389210
Coef. Curtosis	4.147849	2.027270	1.875450

Estadísticos de las diferencias de las variables de estado

Variable	ds_1	ds_2	dl
n	2024	2024	2024
Media	$-3.10\text{E}-06$	$-3.49\text{E}-06$	$-4.70\text{E}-05$
Desv. Estándard	0.002354	0.000382	0.000835
Mediana	$1.74\text{E}-05$	$3.39\text{E}-06$	$-5.38\text{E}-05$
Máximo	0.017845	0.002640	0.004854
Mínimo	−0.020775	−0.002928	−0.004990
Coef. Asimetría	−0.202487	−0.163034	0.159371
Coef. Curtosis	14.52536	10.95606	8.031323

Dada la modelización que se efectúa de los tres factores en el modelo trifactorial de la estructura temporal, sería conveniente contrastar que las series de las diferencias de las tres variables del modelo se aproximan a una distribución normal. Para ello el coeficiente de asimetría debería estar cercano a 0. De la información resumida en la anterior tabla, se observa que este coeficiente es de -0.202487 para la serie de las diferencias en el primer *spread*, de -0.163034 para la serie de las diferencias en el segundo *spread* y de 0.159371 para la serie de las diferencias en el tipo de interés a 5 años. Un valor positivo de este coeficiente indica que la cola superior es más gruesa que la cola inferior. El coeficiente de curtosis debería tomar valores cercanos a 3. Para las series analizadas, las de las diferencias de las variables, los valores de este coeficiente son 14.52536, 13.95606 y 8.031323, para el primer *spread*, segundo *spread* y tipo de interés a 5 años, respectivamente. Cuando el coeficiente de curtosis excede de 3 indica que la distribución de la serie tiene un apuntamiento alto en los valores centrales.[9]

4.3 Resultados de la estimación de los parámetros de difusión

Para la estimación de los coeficientes de difusión se ha utilizado el programa estadístico **e-views 2.0**, ya que reúne todas las técnicas estadísticas necesarias y permite trabajar, de forma operativa, con un número muy elevado de observaciones.

Como se ha comentado en el primer apartado de este capítulo, estos coeficientes se estiman a través del método de los momentos generalizados de Hansen (1982) y, así, se considera la discretización (4.2) con (4.3) y (4.4). Es importante recordar que esta técnica de estimación es apropiada incluso para series heterocedásticas y autocorrelacionadas.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la estimación de estos coeficientes de difusión de los tres factores del modelo, para la muestra completa

[9]Normalmente, la mayoría de las variables financieras, tienen incrementos con distribuciones que presentan un apuntamiento alto en los valores centrales. Sin embargo, el excesivo apuntamiento de estas tres series podría ser debido a la existencia de *outliers* en la muestra considerada. Se debería comprobar si eliminando estos valores extremos (normalmente los que sobrepasan 3 veces la desviación estándard) la distribución de las series es más normal.

que va del 2 de enero de 1991 hasta el 9 de marzo de 1999. En una primera tabla se muestran los valores estimados para los coeficientes de las discretizaciones, indicando, entre paréntesis, el valor del estadístico t

Variable	δ	β	σ
s_1	1.67E − 05	−0.015773	0.002243
	(0.504708)	(−3.274507)	(16.78965)
s_2	−1.48E − 05	−0.005088	0.000263
	(−1.913291)	(−2.537925)	(20.85694)
l	−2.14E − 05	−0.000274	0.002566
	(−0.410654)	(−0.387329)	(30.19562)

A partir de los anteriores valores estimados para los coeficientes de las discretizaciones y considerando su relación con los parámetros de difusión (4.5), se calculan los valores de estos coeficientes de las ecuaciones diferenciales estocásticas de las variables del modelo. Es decir, en la siguiente tabla se presentan la velocidad de ajuste, el valor medio a largo plazo y el coeficiente de volatilidad de cada factor

Variable	k	μ	σ
s_1	0.015773	0.000735433	0.002243
s_2	0.005088	−0.002908805	0.000263
l	0.000274	−0.078102189	0.002566

Los coeficientes de volatilidad de los tres factores son significativos, observándose que el segundo *spread*, como era de esperar, es el que presenta un coeficiente de difusión menor ($\sigma_1 = 0.002243$, $\sigma_2 = 0.000263$ y $\sigma_3 = 0.002566$). Del análisis descriptivo que se ha efectuado en el apartado 2 de este capítulo, se desprende una menor volatilidad en la serie diferencias del segundo *spread.*

Para la muestra analizada se observa que el primer *spread* es el que presenta una velocidad de ajuste mayor ($k_1 = 0.015773$) y significativa. Para los otros dos factores la velocidad de ajuste es menor ($k_2 = 0.005088$ y $k_3 = 0.000274$) y para el tipo de interés a largo plazo no es significativa. Así pues, la reversión a la media en esta muestra considerada sólo se verifica, empíricamente, para el primer factor.

El primer *spread* tiende a largo plazo a un valor positivo ($\mu_1 = 0.000735433$), mientras que el segundo *spread* tiende hacia una media negativa ($\mu_2 = -0.002908805$). Para el tipo de interés a largo plazo, sorprendentemente, se llega a un valor medio a largo plazo negativo ($\mu_3 = -0.078102189$). No es tan relevante el hecho de que este parámetro tome un valor negativo, pero si se tiene en cuenta que este valor medio se obtiene de

$$\mu_3 = -\frac{\delta_3}{\beta_3}$$

entonces, los resultados de la estimación muestran que para este factor la reversión a la media no es nada significativa y así, el valor obtenido para μ_3.

Por otra parte, la muestra considerada es muy amplia y en ella se han utilizado, tal como se comentó anteriormente, dos modelos de ajuste para obtener los datos[10]. Así, se cree conveniente efectuar una nueva estimación de estos coeficientes de difusión sobre una muestra que va del 2 de enero de 1995 hasta el 9 de marzo de 1999. De esta forma, se cree que la estimación de los coeficientes de difusión estará menos sesgada, ya que los datos empleados son de un mismo modelo de ajuste (Svensson (1994)). Además, en esta segunda muestra el comportamiento de los tipos de interés es más homogéneo.

A continuación se resumen los resultados obtenidos en esta nueva estimación de los parámetros de difusión de los factores del modelo, para el periodo que va del 2 de enero de 1995 hasta el 9 de marzo de 1999, contabilizándose un total de 1040 observaciones. En la primera tabla aparecen los valores estimados para los coeficientes de las discretizaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas y en la segunda tabla aparecen los valores calculados para los parámetros de difusión, según (4.5).

[10]Como ha quedado explicado en el apartado 2 de este capítulo, los datos empleados en la estimación empírica del modelo son los facilitados por el Servicio de Estudios del Banco de España. En concreto, se dispone de los coeficientes para obtener tipos de interés al contado para el periodo que va del 2 de enero de 1991 hasta el 30 de diciembre de 1994 por el método de Nelson y Siegel (1987) y para el periodo comprendido entre el 2 de enero de 1995 hasta el 9 de marzo de 1999, se dispone de los coeficientes necesarios para ajustar la curva de tipos al contado por el método de Svensson (1994).

Variable	δ	β	σ
s_1	$-9.01\text{E}-08$	-0.009872	0.000703
	(-0.004929)	(-3.066698)	(25.46330)
s_2	$-5.98\text{E}-05$	-0.015401	0.000176
	(-3.018953)	(-3.034838)	(27.51124)
l	$3.78\text{E}-05$	-0.001703	0.002437
	(0.735314)	(-2.027921)	(30.14282)

Variable	k	μ	σ
s_1	0.009872	$9.12\text{E}-06$	0.000703
s_2	0.015401	-0.003882	0.000176
l	0.001703	0.0221961	0.002437

En el anexo 1, figura III, se adjuntan las principales variables estadísticas y representaciones gráficas de las series diferencias del primer *spread*, diferencias del segundo *spread* y diferencias del tanto de interés a largo plazo, para esta segunda muestra, ya que se cree pueden ayudar a entender los resultados de esta nueva estimación.

Para el primer *spread*, la media a largo plazo a la que tiende el proceso se ha hecho más pequeña, casi nula, ya que esta segunda muestra es más homogénea. El comportamiento de los tipos de interés es más similar y por ello esta primera diferencia tiende hacia un valor menor ($\mu_1 = 9.12\mathrm{E}-06$), con una velocidad de ajuste $k_1 = 0.009872$. En esta línea, el coeficiente de volatilidad se ha reducido y se sitúa en $\sigma_1 = 0.000703$.

La media a largo plazo a la que tiende el segundo *spread* continúa siendo negativa y además con un valor similar al obtenido para la muestra global ($\mu_2 = -0.003882$). Sin embargo, en esta segunda estimación sí que es significativo el parámetro μ_2, al igual que la velocidad de ajuste del proceso, $k_2 = 0.015401$, que ha aumentado en relación a la primera estimación. Así, para esta segunda muestra se comprueba, empíricamente, la reversión a la media del segundo factor. La volatilidad del proceso continúa siendo significativa y para esta segunda muestra toma un valor muy similar al tomado para la muestra global ($\sigma_2 = 0.000176$).

En esta segunda estimación, el tipo de interés a largo plazo toma un valor medio esperado positivo, que se sitúa entorno al 2.21%. La reversión a la media es muy débil y, para esta segunda estimación, la velocidad de ajuste aumenta hasta $k_3 = 0.001703$. El valor del coeficiente de volatilidad no varía mucho ($\sigma_3 = 0.002437$).

Dado que la estimación de los parámetros de difusión es más significativa en esta segunda muestra, se opta por estos segundos valores estimados.

4.4 Análisis de los precios de las obligaciones cupón cero

Una vez estimados los parámetros de difusión (k_i, μ_i, σ_i, $i = 1, 2, 3.$), se sustituyen en la función de descuento, de manera, que sólo restan por estimar los parámetros referentes a las funciones de los precios del riesgo de cada factor (a, b, c, d y λ^*).

En esta fase de estimación, como se ha comentado anteriormente, se puede optar por efectuar una estimación de estos parámetros en cada momento de observación y extraer un valor medio, para los coeficientes de las funciones de estos precios del riesgo. Sin embargo, también se cree oportuno efectuar una sola estimación de estos parámetros, en el momento en que se pretenda utilizar el modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés. Esta segunda opción se justifica por varias razones. En primer lugar, los precios asociados al riesgo de cada factor se deducen de la información del mercado y, por tanto, éstos varían en cada instante. La variabilidad de estos precios, en el modelo propuesto, se soluciona asumiendo una variación lineal, para los precios del riesgo asociados a los *spreads* y una variación proporcional a la raíz cuadrada del valor de la variable, para el tipo de interés a largo plazo. Una vez asumida esta estructura funcional para los precios que el mercado asigna a los factores de riesgo, se cree oportuno especificar los coeficientes de estas variaciones, por la información que proporciona el mercado en el momento en que se desea determinar la función de descuento asociada al modelo.

De esta forma y para la estimación de los 5 coeficientes restantes, se utilizan los precios de obligaciones cupón cero, libres de riesgo de insolvencia, de diferentes vencimientos. En concreto, y por el método de Svensson (1994), se determinan para el 18 de febrero de 1999[11] los precios de 32 obligaciones cupón cero, o funciones de

[11]Esta fecha se corresponde con el momento de observación 2001 de la base de datos proporcionada por el Servicio de Estudios del Banco de España, que en total contempla una muestra de 2025 observaciones.

descuento, cuyos vencimientos son: 1 día, 1 semana, 2 semanas, 3 semanas, 1 mes, 1 mes y medio, 2 meses, 2 meses y medio, 3 meses, 3 meses y medio, 4 meses, 4 meses y medio, 6 meses, 8 meses, 1 año, 2 años, 3 años, 4 años, 5 años, 6 años, 7 años, 8 años, 9 años, 10 años, 11 años, 12 años, 13 años, 14 años, 15 años, 17 años, 20 años y 25 años.

4.5 Resultados de la estimación de los precios de las obligaciones cupón cero

Para la estimación de los parámetros de las funciones de los precios del riesgo de los factores, se ha utilizado el programa matemático **Mathcad 2000**. El criterio utilizado para la estimación de estos coeficientes ha sido la minimización de la suma de los errores al cuadrado. Así, esta fase de estimación se ha resuelto de la siguiente forma. Se ha construido un programa para minimizar la suma de la diferencia al cuadrado entre los valores de los precios de las 32 obligaciones cupón cero y la función de descuento del modelo, correspondiente a los 32 vencimientos considerados. Previamente, se han sustituido, en la función de descuento, los valores estimados de los parámetros de difusión.

En definitiva se ha minimizado la siguiente función

$$\min. \sum_{i=1}^{32} \left(\hat{P}_i - P(\tau_i, s_1, s_2, l)\right)^2 \tag{4.6}$$

en la que $\hat{P}_i$ representa el precio de la obligación cupón cero, o función de descuento observada, para cada uno de los 32 vencimientos y $P(\tau_i,, s_1, s_2, l)$, es la expresión del precio de la obligación para cada vencimiento. Para simplificar el prograna de minimización, la expresión de la función de descuento se ha reescrito de la siguiente forma

$$P(\tau, s_1, s_2, l) = A_1(\tau)A_2(\tau)A_3(\tau)\exp\left\{-B(\tau)s_1(t) - C(\tau)s_2(t) - D(\tau)l(t)\right\}$$

donde:

$$A_1(\tau) = \exp\left\{-\frac{0.000703^2}{4q_1}B^2(\tau) + \left(\frac{\alpha_1}{q_1} - \frac{0.000703^2}{2q_1^2}\right)(B(\tau)-\tau)\right\}$$

$$B(\tau) = \frac{1-e^{-q_1\tau}}{q_1}$$

$$A_2(\tau) = \exp\left\{-\frac{0.000176^2}{4q_2}C^2(\tau) + \left(\frac{\alpha_2}{q_2} - \frac{0.000176^2}{2q_2^2}\right)(C(\tau)-\tau)\right\}$$

$$C(\tau) = \frac{1-e^{-q_2\tau}}{q_1}$$

$$A_3(\tau) = \left[\frac{2g\exp\left\{(q_3+g)\frac{\tau}{2}\right\}}{(q_3+g)\left(\exp\{g\tau\}-1\right)+2g}\right]^{\frac{2\mu_3 q_3}{\sigma_3^2}}$$

$$D(\tau) = \frac{2\left(\exp\{g\tau\}-1\right)}{(q_3+g)\left(\exp\{g\tau\}-1\right)+2g}$$

$$g = \left(q_3^2 + 2\cdot 0.002437^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

De esta forma, y teniendo en cuenta (3.29), (3.34), (3.36), (3.40) y (3.42), se establecen las siguientes relaciones entre las variables a minimizar y los parámetros de las funciones de los precios del riesgo de cada factor

$$
\begin{array}{lcl}
\alpha_1 = k_1\mu_1 - a\sigma_1 & \longrightarrow & a = \frac{\alpha_1 - k_1\mu_1}{-\sigma_1} \\
\alpha_2 = k_1\mu_2 - c\sigma_2 & \longrightarrow & c = \frac{\alpha_2 - k_2\mu_2}{-\sigma_2} \\
q_1 = k_1 + b\sigma_1 & \longrightarrow & b = \frac{q_1 - k_1}{\sigma_1} \\
q_2 = k_2 + d\sigma_2 & \longrightarrow & d = \frac{q_2 - k_2}{\sigma_2} \\
q_3 = k_3 + \lambda^* & \longrightarrow & \lambda^* = q_3 - k_3
\end{array}
\tag{4.7}
$$

En el anexo 2, se adjunta el programa de minimización programado para Mathcad 2000, que proporciona los valores de α_1, α_2, q_1, q_2 y q_3 que minimizan la suma de los errores al cuadrado.[12] En este mismo anexo se incluyen los *inputs* utilizados en esta estimación, es decir, los precios de las obligaciones cupón cero para los 32 vencimientos antes mencionados y facilitados por el Servicio de Estudios del Banco de España.

Los resultados obtenidos son los siguientes

$$\alpha_1 = 0.00051 \qquad \alpha_2 = -0.000205 \tag{4.8}$$

$$q_1 = 0.014953 \qquad q_2 = 0.017901 \qquad q_3 = -0.011493 \tag{4.9}$$

[12] El valor mínimo de esta suma es de 0.00005012437, como se puede apreciar en el anexo II.

Teniendo en cuenta los valores estimados para los parámetros de difusión

$$k_1 = 0.009872 \qquad k_2 = 0.015401 \qquad k_3 = 0.001703$$

$$\mu_1 = 9.12\mathrm{E}-06 \quad \mu_2 = -0.003882 \quad \mu_3 = 0.0221961$$

$$\sigma_1 = 0.000703 \qquad \sigma_2 = 0.000176 \qquad \sigma_3 = 0.002437$$

y (4.7), se deducen los valores estimados para los parámetros de las funciones de los precios de mercado del riesgo de cada factor

$$\begin{aligned} a &= -0.725334 \\ b &= 7.227596 \\ c &= 0.825000 \\ d &= 14.204545 \\ \lambda^* &= -0.013196 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Para los coeficientes anteriores y teniendo en cuenta los valores de los tres factores en el momento de estimación (18-02-1999)[13], los precios de mercado del riesgo de

[13] $s_1 = -0.00401055$, $s_2 = -0.00321906$ y $l = 0.035018114$

cada variable son

$$\lambda_1(t,s_1) = a + bs_1(t) = \lambda_1(t,-0.004010) = -0.754316$$

$$\lambda_2(t,s_2) = c + ds_2(t) = \lambda_2(t,-0.003219) = 0.779275$$

$$\lambda_3(t,l) = \frac{\lambda^*\sqrt{l(t)}}{\sigma_3} = \lambda_3(t,0.035018) = -1.013286$$

Para el pimer *spread* y el tipo de interés al contado a largo plazo se deduce un precio de mercado del riesgo negativo, mientras que para el segundo *spread*, el precio de riesgo es positivo. Al no presentar todos estos precios el mismo signo, no se puede afirmar nada, a priori, sobre el signo de la prima de riesgo en ese instante.[14]

En el anexo III, se presenta la función de descuento estimada para este modelo trifactorial de la estructura temporal de tipos de interés. A continuación, se comprueban, empíricamente, las propiedades analítico-financieras de esta función de descuento. En este mismo anexo, se presenta la curva de tipos de interés al contado asociada y se analiza, gráficamente, su comportamiento para distintos valores de los parámetros que la caracterizan.

[14]Ver capítulo 3, apartado 6.

CONCLUSIONES

Conclusiones

Como conclusión de este trabajo se ha creído conveniente ofrecer un resumen global de la investigación realizada. Así, en este último apartado, no sólo se expondrán las aportaciones y resultados más relevantes de esta tesis doctoral, sino que también se pretende describir el contenido de la misma, de una forma resumida. Es decir, se pretende describir de forma secuencial la investigación desarrollada: el objeto de estudio del trabajo, la metodología e instrumental necesarios para su entendimiento, los antecedentes y soluciones aportadas por otros autores, la aportación propiamente dicha de esta tesis, su intento de convalidación y sus carencias y posibles mejoras para posteriores investigaciones.

Esta tesis doctoral se centra en el estudio de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés. Por ello el trabajo realizado se inició con el entendimiento del concepto de estructura temporal, como relación que informa de los tipos de interés aplicables para los distintos plazos. Es decir, se trata de poder determinar el precio que el mercado pone al plazo y ofrecer una relación como la expresada, para un horizonte temporal. Así, y en una primera fase de estudio, se intentaron clarificar todos estos conceptos básicos, pero no por ello inmediatos. Esta primera fase de estudio ha quedado reflejada en el primer capítulo, de carácter introductorio, de la tesis. En él, se definen las principales magnitudes financieras que intervienen en el análisis de los tipos de interés y se plantean las teorías denominadas clásicas de la estructura temporal, como antecedentes de los actuales desarrollos.

Los actuales planteamientos de la estructura temporal se desarrollan en un entorno estocástico y de ahí, que la dinámica de las variables que intervienen en el análisis de la curva de tipos, quede afectada por un proceso de Wiener, en concordancia con el actual contexto de la valoración financiera estocástica.

Como se ha comentado y ha quedado reflejado en esta tesis, la investigación se ha centrado en el estudio de la dinámica de la curva de tipos de interés. Por ello, en el segundo capítulo de esta tesis se efectúa una clasificación de los modelos dinámicos de la estructura temporal. Esta clasificación, en modo alguno definitiva, es reflejo de la fase de estudio en que se intentó recopilar la literatura existente sobre el tema. En esta fase se decidió también, por motivos que después se irán exponiendo, la línea que iba a seguir el modelo que se pretendía desarrollar, como aportación de esta investigación.

En líneas generales, los modelos dinámicos de la estructura temporal de tipos de interés han quedado agrupados en modelos consistentes y no consistentes de la estructura temporal. Estos útimos, denominados en la literatura financiera modelos factoriales, consideran que la evolución en el tiempo de la estructura de tipos depende de una o varias variables de estado, denominadas factores, y se diferencian claramente de los denominados en esta tesis, modelos consistentes, ya que éstos toman información de toda la estructura temporal para modelizar su dinámica.

El modelo presentado en esta tesis es un modelo dinámico-no consistente de la estructura temporal de tipos de interés, basado en la teoría de valoración por ausencia de oportunidades de arbitraje, y que considera tres variables de estado. Por ello se le da más importacia a esta metodología y, aparte de resumir los principales modelos que pertenecen a este grupo, en el segundo capítulo de la tesis, también se efectúa un planteamiento de un modelo general de s factores, con procesos de Wiener correlacionados.

Cuando se plantea y desarrolla un modelo factorial de la estructura temporal, se ha de decidir sobre una serie de cuestiones:

- si el modelo parte de un equilibrio general de la economía o, por contra, es un modelo de equilibrio parcial.
- el número de factores que describen la dinámica de la curva de tipos.
- y si se ha elegido el enfoque de equlibrio parcial, como es el caso, se ha de decidir

sobre la evolución estocástica de las variables, así como sobre los precios que el mercado asigna al riesgo de variación de éstas.

Los modelos de equilibrio general (Cox, Ingersoll y Ross (1985b) y Longstaff y Schwartz (1992), entre otros) parten de la descripción de la economía real, de consideraciones sobre la evolución estocástica de una o más variables reales y de las preferencias de un inversor representativo, para deducir, endógenamente, la evolución estocástica de los factores de la estructura temporal, así como los precios de mercado del riesgo de éstos.

Por contra, si se opta por el enfoque de equilibrio parcial, exógenamente se decide la evolución estocástica de las variables del modelo, así como la forma funcional de los precios de mercado del riesgo. El enfoque de equilibrio general presenta claras ventajas sobre el enfoque de equilibrio parcial, ya que la estructura temporal y su dinámica son determinadas endógenamente. Sin embargo, esta clara ventaja no lo es tanto cuando se entiende que esta deducción implícita al modelo viene impuesta por las hipótesis de partida que se efectúan sobre las variables de la economía real. Además, siguiendo a Duffie y Kan (1996), si se supone una dinámica estocástica, más o menos adecuada, para los factores de la estructura temporal, no sería muy difícil englobarla dentro de un modelo de equilibrio general, basado en un agente representativo con una función de utilidad y consumo apropiadas.

Así, en este trabajo no se plantea una economía de equilibrio general que dé soporte a la dinámica propuesta para los factores evolutivos de la estructura de tipos. En este sentido es importante destacar que actualmente existen numerosos trabajos, tanto teóricos como empíricos, que hacen que esta elección no sea en modo alguno arbitraria.

En cuanto al número de factores que conducen la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés, los primeros modelos consideran una sola variable, el tanto de interés instantáneo sin riesgo (Vasicek (1977), Dothan (1978) y Cox, Ingersoll y Ross (1985b)). Este tipo de modelos presentan el inconveniente de que los rendimientos de las obligaciones de todos los vencimientos están perfectamente correlacionados. Para solucionar este inconveniente surgen modelos de dos factores (Richard (1978), Brennan y Schwartz (1979), Schaefer y Schwartz (1984), Longstaff y Schwartz (1992) y Moreno (1997)) y de tres factores (Kraus y Smith (1993) y Chen (1996)).

El modelo desarrollado en esta tesis doctoral es de tres factores y, por tanto, solventa el problema de la correlación perfecta entre los rendimientos de las obligaciones de todos los vencimientos. Además, con la elección de tres factores, el modelo ofrece una mayor variedad de formas para la curva de tipos al contado. Los factores elegidos han sido, dos *spreads* (diferencia entre un tipo a corto y un tipo a medio plazo y diferencia entre el tipo a medio y un tipo a largo plazo) y un tanto de interés al contado a largo plazo. La elección y definición de estas variables ha estado motivada por diferentes causas. En primer lugar, se pretende recoger información de los diferentes tramos de la curva de tipos de interés, del inicio, del tramo medio y del final de la curva. En segundo lugar, se pretende llegar a un modelo con solución analítica porque, desafortunadamente, en este campo existen pocos modelos que lleguen a ella. Con este objetivo se eligen tres factores cuya suma es precisamente el tanto de interés instantáneo sin riesgo. Además, y dada la evidencia empírica a favor de la independencia entre un *spread* y un tipo de interés a largo plazo, se optó por desdoblar el *spread* en dos y tomar estas dos diferencias más el tipo de interés a largo plazo, como factores explicativos de la estructura temporal de tipos de interés. De esta forma, se puede aplicar el método de separación de variables a la ecuación en derivadas parciales a la que llega el modelo y obtener así, la expresión analítica del precio de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia y válida para cualquier plazo.

La función de descuento obtenida en este modelo permite obtener, analíticamente, la curva de tipos de interés al contado y la curva de tipos *forward*, que son formas alternativas de informar sobre la estructura temporal de tipos de interés. En esta tesis se analizan las propiedades, analíticas y financieras, que se derivan de estas tres curvas y se observa que todas ellas son altamente apropiadas.

El modelo presentado permite recoger un alto porcentaje de variación de los tipos de interés, como demuestran numerosos trabajos empíricos realizados para el mercado español. La mayoría de estos trabajos se basan en el análisis de componentes principales para concluir que, para el mercado español, lo idóneo es modelizar la variación o dinámica de la estructura temporal a través de tres factores, ya que éstos llegan a explicar más del 95% de la variación total de los tipos de interés (Navarro y Nave (1995) y Benito (1999)).

Por otra parte, las principales aplicaciones de la estructura temporal son la valoración de activos derivados sobre tipos de interés y la cobertura y gestión del riesgo de tipo de interés, en carteras de renta fija. El modelo desarrollado está más encaminado a esta segunda aplicación de gestión del riesgo. De esta forma, queda aún más justificada la elección de tres variables, porque así se consigue cubrir el denominado riesgo de la curva cupón cero, es decir, el ocasionado por variaciones no uniformes de la estructura de tipos. Por ello y debido a la elección de tres factores para la modelización de la dinámica de la estructura de tipos, se pueden obtener tres medidas de duración estocásticas, una para cada factor estocástico del modelo. En la misma línea, se llega a una convexidad generalizada o factorial, una para cada factor.

Según Benito, S. (1999), desde el punto de vista del desarrollo de estrategias de inmunización, los resultados obtenidos en su trabajo sugieren que utilizar una medida de duración que cubre sólo frente a desplazamientos paralelos de la estructura de tipos, puede generar resultados poco satisfactorios. Concretamente, los resultados obtenidos mediante técnicas de cointegración, indican que podría ser adecuado utilizar una medida de la duración bidimensional, cuando el horizonte de planificación es de largo plazo. Cuando la operación de cobertura se extiende a un horizonte de corto y medio plazo, es necesario considerar un mayor número de variables, al menos tres.

Una vez decidido el número de factores y su definición, se deben determinar las ecuaciones diferenciales estocásticas que van a modelizar su dinámica. Para los *spreads* se ha optado por un proceso Ornstein-Uhlenbeck, es decir, un proceso estocástico con reversión a la media y coeficiente de difusión constante. En el apartado de contrastación empírica del modelo, se comprueba la reversión de los *spreads* hacia un valor medio a largo plazo. Además, se opta por un proceso con volatilidad constante que permite valores negativos para la variable, ya que estas diferencias entre tipos de interés al contado pueden ser tanto positivas como negativas.

Para el tipo de interés a largo plazo, se opta por un proceso raíz cuadrada con reversión a la media, para recoger el carácter heterocedástico de este tipo de interés al contado y evitar así, que éste tome valores negativos, ya que este proceso estocástico presenta una barrera reflectante en 0. Cabe mencionar que para el conjunto de la muestra considerada en la contrastación empírica del modelo (2 de enero de 1991 hasta 9 de marzo de 1999), se comprueba que el tipo a largo plazo no tiene reversión a la media. Si se consideran sólo los años de 1995 hasta 1999, se observa cierta reversión, pero muy débil. Es claro que este factor y para futuras investigaciones debería modelizarse sin reversión hacia un valor medio.

Establecida la evolución estocástica de los tres factores del modelo, se asume que el precio que el mercado asigna al riesgo de los dos *spreads* es una función lineal del propio *spread*. Con esta estructura funcional se pretende establecer un precio del riesgo variable. Así, para el tanto de interés a largo plazo se asume el precio propuesto por Cox, Ingersoll y Ross (1985b), de manera que éste es proporcional a la raíz cuadrada del valor del tipo de interés a largo plazo en cada instante. Es de destacar que a pesar de la evidencia empírica de la variabilidad en el tiempo de estos precios del riesgo, existen pocos modelos con precios variables.

Finalmente, y a partir de todas las anteriores hipótesis, se establece por el lema de Itô y con un criterio de eliminación de las oportunidades de arbitraje, la ecuación cierta en derivadas parciales de segundo orden, para el precio de la obligación cupón cero, libre de riesgo de insolvencia. Esta ecuación, junto a la condición final de que al vencimiento la obligación paga una unidad monetaria, presenta solución analítica, por separación de variables. Es importante que el modelo llegue a una expresión analítica para la función de descuento, ya que ello permite su estudio, tanto matemático como financiero. De hecho, uno de los objetivos perseguidos en esta investigación era, precisamente, plantear un modelo factorial con solución analítica.

La función de descuento obtenida se analiza y se comprueba, analíticamente, el cumplimiento de sus principales propiedades financieras. En el anexo III de esta tesis, se comprueban, empíricamente, algunas de estas propiedades.

A partir del precio de la obligación cupón cero se deducen la curva de tipos de interés al contado y la curva de tipos de interés *forward*. Estas dos curvas se analizan, también analíticamente, y se observa un comportamiento análogo. Ambas empiezan en el valor del tipo de interés instantáneo y presentan el mismo valor asintótico. En el anexo III se analiza gráficamente la curva de tipos al contado, para diferentes valores de los coeficientes que la caracterizan.

En este trabajo también se obtienen las primas temporales asociadas al modelo. Como ya se ha indicado, se obtiene la prima *forward* y la prima de riesgo instantánea. El valor obtenido para la primera permite afirmar que el modelo desarrollado no está acorde con la hipótesis pura de las expectativas insesgadas, que afirma que los tipos de interés *forward* coinciden con los futuros tipos de interés esperados. Además, la expresión obtenida para la prima de riesgo instantánea permite afirmar que el modelo es compatible con la hipótesis local de las expectativas ajustada al riesgo, que se da cuando la prima de riesgo es proporcional a las variaciones no esperadas en el rendimiento de la obligación, debidas a cambios aleatorios de los factores de riesgo del modelo.

Para concluir, se desea destacar que los principales objetivos perseguidos en esta investigación han sido satisfactoriamente alcanzados. En primer lugar, se ha conseguido construir un nuevo modelo dinámico de la estructura temporal de tipos de interés. Los méritos más destacados del modelo propuesto son, básicamente

- la consideración de tres factores estocásticos para la dinámica de la curva de tipos,
- la obtención de una solución analítica,
- y la modelización de los precios que el mercado asigna a los factores del modelo a través de funciones de las propias variables.

Estos logros en la modelización de la dinámica de la estructura temporal permiten, a su vez, ciertas ventajas, que ya se han ido comentando a lo largo de este apartado. A modo de resumen se destaca que

- la consideración de tres factores conduce a un modelo que recoge cambios de nivel, pendiente y curvatura, en la curva de tipos y, además, la definición de éstos, permite recoger información de los diferentes tramos de la curva, para modelizar su dinámica en el tiempo.
- El llegar a un modelo con solución analítica permite obtener expresiones para las principales magnitudes financieras que intervienen en el análisis de los tipos de interés y así, se pueden analizar analíticamente, la función de descuento, la curva de tipos al contado y la curva de tipos *forward.*
- La estructura funcional asumida para los precios del riesgo permite que éstos varíen en el tiempo.

Sin embargo, y como toda propuesta de modelización del comportamiento de un fenómeno, el modelo presentado puede ser mejorado. Del analísis teoríco y empírico del mismo, se propone para futuras investigaciones, que el tipo de interés al contado a largo plazo no presente reversión a la media y, por otro lado, sería también muy idóneo permitir que los precios de mercado del riesgo asociados a los factores, sean función del tiempo calendario.

Finalmente, y si se continuase en la línea del modelo desarrollado en esta tesis, el modelo ideal sería aquel que dictase la realidad del momento. Es decir, se debería emplear una muestra de tipos de interés sin riesgo y, mediante un análisis de componentes principales, detectar cuantos factores se necesitan para explicar el mayor porcentaje de variación de los tipos de interés al contado. A continuación y a través de una adecuada estimación, deducir la dinámica estocástica de estos factores selecionados y permitir que los precios de mercado del riesgo asociados a estos factores sean variables dependientes del tiempo. Evidentemente, este modelo debería ser resuelto por algún procedimiento numérico.

Por otra parte y como futura línea de investigación se cree interesante aplicar el modelo desarrollado a la valoración de activos derivados sobre tipos de interés, especialmente derivados que incorporan pagos en todos los tramos de la curva y precisan del plazo medio y largo, además del corto.

BIBLIOGRAFIA

Alegre, A. y R.M. Mayoral (1994): Criterios de decisión financiera en capitalización estocástica. Una aplicación con el proceso de Wiener. Ponencias del II Foro de Finanzas, Madrid.

Analistas Financieros Internacionales (1993): La curva de tipos cupón-cero: estimación e interpretación. *Journal of Fixed Income*, vol4, no.1, pp.52-62.

Anderson, N., N. Breedon, M. Deacon, A. Derry y G. Murphy (1996): *Estimating and interpreting the yield curve.* John Wiley & Sons, England.

Arnold, L. (1974): *Stochastic differential equations. Theory and applications.* John Wiley and Sons, Inc., New York.

Ayres, H.R. y J.Y. Barry (1979): The equilibrium yield curve for government securities. *Financial Analysts Journal*, May/June, pp.31-39.

Ayres, H.R. y J.Y. Barry (1980): A theory of the U.S. treasury market equilibrium. *Management Science*, vol.26, pp.539-569.

Ayuso, J. y M.L. De la Torre (1991): Riesgo y volatilidad en el mercado interbancario. *Investigaciones Económicas (Segunda época)*, vol. XV, no.1, pp.89-119.

Balduzzi, P., S.R. Das, S. Foresi y R. Sundaram (1996): A simple approach to three-factor affine term Ssructure models. *Journal of Fixed Income*, dec., pp.43-53.

Benito, S. (1999): Análisis del mercado secundario de deuda pública. Factores comunes en la estructura temporal (ETTI). *VII Foro de Finanzas*, Valencia.

Bierwag, G.O., G.G. Kaufman y A. Toevs (1990): *Innovations in bond portfolio management: duration analysis and immunization.* Greenwich, Connecticut: JAI Press Inc.

Boero, G. y C. Torricelli (1995): A comparative evaluation of alternative models of the term structure of interest rates. *5th AFIR International Colloquium*, Bruxelles, vol.II, pp.671-708.

Black, F., E. Derman y W. Toy (1990): A one-factor model of interest rates and its applications to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, Jan.-Feb., pp.33-39.

Black, F. y P. Karasinski (1991): Bond and bonds option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, July-Aug., pp.52-59.

Black, F. y M. Scholes (1973): The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, pp.637-659.

Boyle, P.P. (1980): Recent models of the term structure of interest rates with actuarial applications. *Transactions of the 21st International Congress of Actuaries*, T4, pp.95-104.

Bradley, S.P. y D.B. Crane (1973): Management of commercial bank government security portfolios. An optimization approach under uncertainty. *Journal of Bank Research*, pp.18-30.

Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1977): Savings bonds, retractable bonds and callable bonds. *Journal of Financial Economics*, 5, pp.67-88.

Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1979): A continuous time approach to the pricing bonds. *Journal of Banking and Finance*, 3, pp.133-155.

Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1982): An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, pp.301-329.

Bühler, W., M. Uhrig-Homburg, U. Walter y T. Weber (1999): An empirical comparision of forward-rate and spot-rate models for valuing interest-rate options. *The Journal of Finance*, vol.LIV, no.1, pp.269-305.

Campbell, J.Y. (1986): A defense of traditional hyphoteses about the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, 41, pp.183-193.

Carleton, W.T., D.R. Chambers y D.W. Waldman (1984): A new approach to estimation of the term structure of interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* vol.19, no.3, pp.233-252.

Cohen, K.J., R.L. Kramer y W.H. Waugh (1966): Regression yield curves for U.S. government securities. *Management Science*, vol.13, no.4, pp.B168-B175.

Constantinides, G.M. y J.E. Ingersoll (1984): Optimal bond trading with personal taxes. *Journal of Financial Economics*, 13, pp.299-335.

Constantinides, G.M. (1992): A Theory of the nominal term structure of interest rates. *The Review of Financial Studies*, vol.5, no.4, pp.531-552.

Contreras, D. y E. Navarro (1993): Utilización de "splines" exponenciales para la estimación de la estructura temporal de tipos de interés en el mercado español. *Quaderns de Treball*, Universitat de Valencia, no.241.

Contreras, D., R. Ferrer, E. Navarro y J. Nave (1994): Estimación de la curva de tipos cupón cero en el mercado español de deuda pública. *VIII Congreso Nacional y IV Congreso Hispano-Francés de AEDEM*, Cáceres, vol.3, pp.207-220.

Contreras, D., R. Ferrer, E. Navarro y J. Nave (1994): Análisis factorial de la estructura temporal de tipos de interés en España. *II Foro de Finanzas*, Madrid.

Cornell, B. y A.C. Shapiro (1989): The mispricing of U.S. treasury bonds: a case study. *The Review of Financial Studies*, 2, pp.297-310.

Courtadon, G. (1982): The pricing of options on default-free bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.XVII, no.1, pp.75-100.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1979): Duration and the measurement of basis risk. *Journal of Business*, vol.52, no.1, pp.51-61.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1981): A re-examination of traditional hypothesis about the term structure of interest rates. *The Journal of Finance*, vol.XXXVI, no.4, pp.769-799.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985a): An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, vol.53, no.2, pp.363-384.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b): A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, vol.53, no.2, pp.385-407.

Cox, D.R. y H.D. Miller (1965): *The theory of stochastic processes.* Chapman & Hall, London.

Culbertson, J.M. (1957): The term structure of interest rates. *Quarterly Journal of Economics*, vol.71, no.4, pp.485-517.

Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff y A.B. Sanders (1992): An empirical comparision of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 3, pp.1209-1227.

Chen, L. (1996): Stochastic mean and stochastic volatility-a three-factor model of the term structure of interest rates and its applications in derivatives pricing and risk management. *Financial Markets, Institutions & Instruments*, vol.5, no.1, pp.3-88.

Chen, R.R. y L.O. Scott (1992): Pricing interest rate options in a two-factor Cox-Ingersoll-Ross model of the term structure. *The Review of Financial Studies*, 5, pp.613-636.

Devolder, P. (1993): *Finance Stochastique.* Editions de l'Université de Bruxelles.

Dietrich-Campbell, B. y E.S. Schwartz (1986): Valuing debt options: empirical evidence. *Journal of Financial Economics*, 16, pp.321-343.

Diez de Castro, L y J. Mascareñas (1991): *Ingeniería financiera. La gestión en los mercados financieros internacionales.* Serie McGraw-Hill de Management, Madrid.

Dothan, L.U. (1978): On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6, pp.59-69.

Dueker, M. (1997): Strengthening the case for the yield curve as a predictor of U.S. recessions. *The Federal Ban Reserve Bank of St. Louis Review*, vol.79, no.2, pp.41-51.

Duffie, D. y R. Kan (1996): A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, vol.6, no.4, pp.379-406.

Echols, M.E. y J.W. Elliot (1976): A quantitative yield curve model for estimating the term structure of interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, marzo, pp.87-114.

Elton, E.J., M.J. Gruber y R. Michaely (1990): The structure of spot rates and immunization. *Journal of Finance*, vol.45, no.2, pp.629-642.

Estrella, A. y G. Hardouvelis (1991): The term structure as a predictor of real economic activity. *Journal of Finance*, vol.46, no.2, pp.555-576.

Ezquiaga Domínguez, I. (1990): El análisis de la estrucutra temporal de los tipos de interés en el mercado español. *I.C.E.: Información Comercial Española*, no.688, pp.119-140.

Ezquiaga Domínguez, I. (1992): *Curso de Bolsa I.* Capítulo 3: Formación de precios y estrucutra temporal de los tipos de interés, pp.89-118. Instituto español de Analistas Financieros. Obra dirigida por J.L. Sánchez Fernández de Valderrama. Ariel Economía, Madrid.

Fama, E.F. (1984): Term premium in bond returns. *Journal of Financial Economics*, 13. pp.529-546.

Fernández Navas, J. (1997): La implementación del modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) en el mercado español de deuda (I). *Swaps & Productos Derivados*, 23, pp.23-24.

Fernández Navas, J. (1998): Pricing interest-rate derivatives with yield-curve term structure models in the spanish market. *Microeconomics/Finance & Game Theory Workshop at Univesitat Pompeu Fabra*, pp.1-41.

Fisher, I. (1896): Appreciation and interest. *Publications of the American Economic Association*, pp.23-29 y 88-92.

Fisher, D. (1966): Expectations, the term structure of interest rates and recent british experience. *Economica*, vol.13, no.131, pp.319-329.

Fisher, L. y R.L. Weil (1971): Coping with the risk of interest-rate fluctuations: returns to bondholders form naive and optimal strategies. *Journal of Business.* Octubre.

Fong, H.G. y O.A. Vasicek (1982): Term structure modelling using exponential splines. *Journal of Finance*, vol.37, no.2, pp.339-356.

Fontanals, H. y M. Galisteo (1997): Estructura temporal de tipos de interés. *Colección de publicaciones del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial*, no.35.

Fontanals, H., M. Galisteo y L. Gómez (1998): Dynamics of the term structure of interest rates: a two-factor model. *Documents de Treball de la Divisió de Ciències Jurídiques, Econòmiques i Socials. Col.lecció d'Economia*, E98/37.

Fontanals, H. y M. Galisteo (1998): Dinámica de la estructura temporal de tipos de interés: un modelo de tres factores. *VI Foro de Finanzas*, Ubeda, Jaén.

Fontanals, H. y M. Galisteo (1999): Dynamics of the term structure. *Second Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics*, Nápoles, Italia.

Fontanals, H., R. Lacayo y J. Vives (1999): Alternative solutions of the Black-Scholes equation. *Documents de Treball de la Divisió de Ciències Jurídiques, Econòmiques i Socials. Col.lecció d'Economia*, E99/58.

Fontanals, H. y S. Zúñiga (1999): Modelos de tasa de interés en Chile: una revisión. *VII Foro de Finanzas*, Valencia.

Freixas, X. (1992): Estructura temporal de los tipos de interés: hipótesis teóricas y resultados empíricos. *Investigaciones Económicas (Segunda época)*, vol.XVI, no.2, pp.187-203.

García de Bernardo, B. (1995): Estructura de los tipos de interés y teorías sobre la predicción de tipos de interés. *Perspectivas del Sistema Financiero*, no.50, pp.82-90.

Gibbons, M.R. y K. Ramaswamy (1993): A test of Cox, Ingersoll and Ross model of the term structure. *The Review of Financial Studies*, vol.6, no. 3, pp.619-658.

Gómez del Valle, L. y J. Martínez Rodríguez (1999): Pricing zero-coupon bonds with different market prices of risk. *2nd Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics*, Napoli, Italia.

Greene, W.H. (1993): *Econometric Analysis.* Second ed., New York University.

Gultekin, N.B. y R.J. Rogalsky (1984): The alternative duration specifications and the measurement of basis risk: empirical tests. *Journal Business*, vol.57, no.2, pp.241-264.

Hamilton, J.D. (1994): *Time Series Analysis.* Princeton University Press, New Jersey.

Hansen, L.P. (1982): Large sample properties of Generalized Method of Moments estimators. *Econometrica*, 50, pp.1029-1054.

Harvey, C. (1988): The real term structure and consumption growth. *Journal of Financial Economics*, no.22, pp.305-333.

Haubrich, J. y A. Dombrosky (1996): Predicting real growth using the yield curve. *Federal Reserve Bank of Cleveland*, vol.32, no.1, pp.26-35.

Heath, D., R. Jarrow y A. Morton (1987): Arbitrage, Continuous trading and margin requirements. *Journal of Finance*, 42, pp.1129-1142.

Heath, D., R. Jarrow y A. Morton (1990): Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp.419-440.

Heath, D., R. Jarrow y A. Morton (1992): Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, vol.60, no.1, pp.77-105.

Hicks, J. (1939): *Value and capital.* Oxford University Press, London. Versión traducida en Fondo de Cultura Económica, México (1974).

Ho, T.S.Y. y S.B. Lee (1986): Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, vol.XLI, no.5, pp.1011-1029.

Ho, T.S.Y. (1992): Key rate durations: measures of interest rate risks. *Journal of Fixed Income.*

Hull, J. y A. White (1990): Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, vol.3, no.4, pp.573-592.

Hull, J. y A. White (1993): One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.28, no.2, pp.235-254.

Hull, J.C.: *Options, futures and other derivatives.* 3ª edición,

Hunt, B.F. (1995a): Modelling the yields on australian coupon paying bonds. *School of Finance and Economics Working Paper*, Univ. of Technology Sidney, no.50.

Hunt, B.F. (1995b): Fitting parsimonious yield curve models to australian coupon bond data. *School of Finance and Economics Working Paper*, Univ. of Technology Sidney, no.51.

Jamshidian, F. (1988): The one-factor gaussian interest rate model: theory and implementation. *Working Paper, Merrill Lynch Capital Markets*, New York.

Jamshidian, F. (1990): The preference-free determination of bonds and option prices from the spot interest rate. *Advances in Futures and Options Research*, 4, pp.51-67.

Jamshidian, F. (1991): Bond and option valuation in the gaussian interest rate model. *Research in Finance*, 9, pp.131-170.

Jondeau, E y R. Ricati (1999): The expectation hypothesis of the term structure: tests on U.S., german, french and U.K. euro-rates. *Journal of International Money and Finance*, 18 (5), pp.725-750.

Jones, F.J. (1991): Yield curve strategies. *Journal of Fixed Income*, sept., pp.43-51.

Kraus, A. y M. Smith (1993): A simple multifactor term structure model. *The Journal of Fixed Income*, June, pp.19-23.

Langetieg, T.C. (1980): A multivariate model of the term structure. *Journal of Finance*, 35, pp.71-97.

Litterman, R. y J. Scheinkman (1991): Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, 1, pp.54-61.

Longstaff, F.A. (1989): A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 23, pp.195-224.

Longstaff, F.A. y E.S. Schwartz (1992): Interest rate volatility and the term structure: a two factor general equilibrium model. *Journal of Finance*, 47, pp.1259-1282.

Longstaff, F.A. y E.S. Schwartz (1993): Implementation of the Longstaff-Schwartz interest-rate model. *Journal of Fixed Income*, 3, pp.7-14.

Lutz, F. (1940): The structure of interest rates. *Quaterly Journal of Economics*, pp.36-63.

McCulloch, J.H. (1971): Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, vol.34, pp.19-31.

McCulloch, J.H. (1975): The tax-adjusted yield curve. *Journal of Finance*, vol.30, no.3, pp.811-830.

Malkiel, B. (1962): Expectations, bond prices and the term structure of interest rates. *Quaterly Journal of Economics*, vol.76, pp.197-218.

Malliaris, A.G. (1982): *Stochastic methods in economics and finance.* Advanced Text Books in Economics, North Holland.

Mankiw, N.G. y L.H. Summers (1984): Do long-term interest rates overreact to short-term interest rates? *Brooking Paper in Economic Activity*, pp.223-247.

Mayoral, R.M. (1997): *Análisis estocástico de las operaciones financieras y actuariales con riesgo de variación del tipo de interés.* Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona. Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial.

Meneu, V., E. Navarro y M.T. Barreira (1992): *Análisis y gestión del riesgo de interés.* Ariel Economía, Madrid.

Meneu, V., M.P. Jordà y M.T. Barreira (1994): *Operaciones financieras en el mercado español.* Ariel Economía, Madrid.

Merton, R.C. (1973): Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Sience*, 4, pp.141-183.

Michaelsen, J.B. (1963): The term structure of interest rates. *Quaterly Journal of Economics*, vol.78, pp.166-174.

Modigliani, F. y R. Sutch (1966): Innovations in interest rate policy. *American Economic Review*, May, pp.178-197.

Moreno, M. (1997): Asset pricing under a two-factor model of the term structure of interest rates. *Matemática de las Operaciones Financieras'97.* Editores: Alegre, A., Biayna, A. y Rodríguez. A. IV Congreso MOF, Barcelona, pp.609-658.

Morini, S. (1998): *Estimación de la Estructura Temporal de Tipos de interés. Propuestas alternativas.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. Departamento de Economía Financiera y Contabilidad.

Morini, S. (1999): Un análisis de los modelos de estimación de la estructura temporal de tipos de interés. *VII Foro de Finanzas*, Valencia.

Navarro, E. y J.M. Nave (1995): Dinámica de la estructura temporal de los tipos de interés del mercado español. *III Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras*, Las Palmas de Gran Canaria.

Navarro, E., R. Ferrer y J.M. Nave (1995): La volatilidad de las variaciones de los tipos de interés en la estimación de su estructura temporal. *Quaderns de Treball*, no.6 (nova època), pp.1-34.

Nave, J.M. (1998): *Estructura temporal de los tipos de interés e inmunización financiera en el mercado español.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. Departamento de Economía Financiera y Matemática.

Nelson, J. y S.M. Schaefer (1983): The dynamics of the term structure and alternative portfolio immunization strategies. *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization.* Bierwag, G.O., Kaufman, G.G. y Toevs, A., eds. Greenwich, CT: JAI Press.

Nelson, C.R. y A.F. Siegel (1987): Parsimoneous modelling of yield curves for U.S. treasury bills. *Journal of Business*, vol.60, no.4, pp.473-489.

Nuñez Ramos, S. (1995): Estimación de la estrucutra temporal de los tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos. *Banco de España. Servicio de Estudios. Documento de Trabajo*, no.9522, pp.1-55.

Pennacchi, G.G. (1991): Identifying the dynamics of real interest rates and inflation: evidence using survey data. *The Review of Financial Studies*, 4, pp.53-86.

Plosser, C. y K. Rouwenhorst (1994): International term structure and real economic growth. *Journal of Menetary Economics*, 33, pp.135-155.

Rebonato, R. (1996): *Interest-rate options models.* John-Wiley Sons, England.

Rico, P. (1999): La estrctura temporal de los tipos de interés en España: el modelo de Cox, Ingersoll y Ross. *Investigaciones Económicas*, vol.XXIII, no.3, pp.451-470.

Richard, S.F. (1978): An arbitrage model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6, pp.33-57.

Rodríguez, A. (1994): *Matemática de la financiación.* Ediciones S, Barcelona.

Rubio Irigoyen, G. (1989): Una introducción a los procesos de Itô: el modelo de valoración de activos de capital como condición suficiente para la valoración de opciones. *Revista española de Financiación y Contabilidad*, vol.60, pp.701-717.

Sanders, A.B. y H. Unal (1988): On the intertemporal stability of the short term rate of interest. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, pp.417-423.

Schaefer, S.M. (1980): Discussion. *Journal of Finance*, vol.35, pp.417-419.

Schaefer, S.M. (1981): Measuring a tax-especific term structure of interest rates in the market for british government securities. *Economic Journal*, no.91, pp.415-438.

Schaefer, S.M. y E.S. Schwartz (1984): A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.19, no.3, pp.413-424.

Shea, G.S. (1984): Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: equilibriums models and splines approximations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.19, no.3, pp.253-269.

Shimko, D.C. (1992): *Finance in continuous time. A primer.* University of Southern California. Kolb Publishing Company, U.S.A.

Singh, M.K. (1995): Estimation of multifactor Cox, Ingersoll and Ross term structure model: evidence on volatility structure and parameter stability. *Journal of Fixed Income*, pp.8-27.

Stapleton, R.C. (1999): Some recent developments in capital market theory: a survey. *Spanish Economic Review*, 1(1), pp.1-20.

Steeley, J.M. (1991): Estimating the Gilt-Edged term structure: basis splines and confidence intervals. *Journal of Bamking, Finance and Accounting*, vol.18, no.4, pp.513-529.

Subrahmanyam, M.G. (1996): The term structure of interest rates: alternatives approaches and their implications for the valuation of contingent claims. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 21, pp.7-28.

Svensson, L.E.O. (1994): Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. *Institute for International Economic Studies*, University of Stockholm, no.579.

Vasicek, O. (1977): An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, pp.177-188.

Vetzal, K.R. (1994): A survey of stochastic continuous time models of the term structure of interest rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 14, pp.139-161.

Wherle, L.S. (1958): Culbertson on interest structure: comment. *Quaterly Journal of Economics*, vol.72, pp.601-613.

Willmer R. (1996): A new tool for portfolio managers: level, slope and curvatura durations. *Journal of Fixed Income*, june, pp.48-59.

Wilmott, P., Howison, S. y Dewynne, J. (1995): *The mathematics of financial derivatives. A student introduction.* Cambridge University Press.