



Estructuras de Dependencia aplicadas a la Gestión de Riesgos en Solvencia II

Antoni Ferri Vidal

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tdx.cat) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tdx.cat) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tdx.cat) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.



Universitat de Barcelona

UNIVERSITAT DE BARCELONA

ESTRUCTURAS DE DEPENDENCIA APLICADAS A LA GESTIÓN DE RIESGOS EN SOLVENCIA II

Tesis doctoral presentada por Antoni Ferri Vidal

bajo el Programa de Doctorado en Empresa de la Facultat d'Economia i Empresa
de la Universitat de Barcelona

Dirigida por el Dr. Lluís Bermúdez Morata
y la Dra. Montserrat Guillén Estany



Universitat de Barcelona

UNIVERSITAT DE BARCELONA

ESTRUCTURAS DE DEPENDENCIA APLICADAS A LA GESTIÓN DE RIESGOS EN SOLVENCIA II

Tesis doctoral presentada por Antoni Ferri Vidal
bajo el Programa de Doctorado en Empresa de la Facultat d'Economia i Empresa
de la Universitat de Barcelona

Dirigida por el Dr. Lluís Bermúdez Morata
y la Dra. Montserrat Guillén Estany

El doctorando

El director

El director

Barcelona, Septiembre 2013

Estructuras de Dependencia aplicadas a la Gestión de Riesgos en Solvencia II

Doctorando:

D. Antoni Ferri Vidal

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola.

Universitat de Barcelona.

Director:

Dr. Lluís Bermúdez Morata

Titular de Universidad. Departament de Matemàtica Financera i Actuarial.

Universitat de Barcelona.

Director:

Dra. Montserrat Guillén Estany

Catedrática de Universidad. Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola.

Universitat de Barcelona.

Texto impreso en Barcelona

Primera edición, Septiembre 2013

Tribunal de Tesis:

Presidente:

Dra. Mercedes Ayuso Gutiérrez

Catedrática de Universidad. Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola. Universitat de Barcelona.

Secretario:

Dr. Jose Luís Vilar Zanón

Titular de Universidad. Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Universidad Complutense de Madrid.

Vocal:

Dr. José Manuel Pavía Miralles

Catedrático de Universidad. Departament d'Economia Aplicada. Universitat de València.

Día de la defensa de tesis: 20 de Diciembre 2012

Als meus pares.

Agraïments

Desitjo donar el meu agraïment al grup de recerca RiskCenter de la Universitat de Barcelona pel seu recolzament en el desenvolupament d'aquesta tesi, especialment als directors, el Dr. Lluís Bermúdez Morata i la Dra. Montserrat Guillén Estany, sense el suport dels quals, aquesta tesi no hagués estat possible.

A tots els membres del Departament d'Econometria, Estadística i Economia Espanyola de la Universitat de Barcelona, per l'acollida en arribar a aquesta universitat, i a aquelles persones que m'animaren i em donaren el seu suport moral, molt especialment al Dr. Roberto Escuder Vallés de la Universitat de València, el meu total i sincer agraïment.

A la meva família, per la seva incondicional confiança al llarg de tots els anys, tant dintre com fora de l'àmbit acadèmic, i a tots els amics i persones que han fet possible que arribés fins aquí.

Igualment desitjo manifestar l'agraïment a l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (AGAUR) de la Generalitat de Catalunya pel suport econòmic rebut.

Moltes gràcies,

Antoni Ferri

Agost 2013

Índice general

Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
1 Introducción	1
1.1 Marco legislativo	2
1.1.1 Los Estudios de Impacto Cuantitativo	7
1.2 Literatura previa	12
1.3 Problemática	15
1.4 Objetivos y Planteamiento general	25
1.5 Estructura de la tesis	27
2 El Modelo Estándar	31
2.1 El Modelo Estándar en QIS	31
2.1.1 SCR suscripción no vida	33
2.1.2 El riesgo de primas y reservas no vida en QIS	34
2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida . .	38
2.2.1 El SCR del riesgo de primas y reservas no vida	39
2.2.2 Limitaciones del diseño de la fórmula estándar	45
2.2.3 Una propuesta de rediseño de la fórmula estándar	50
2.3 Implementación de la fórmula estándar	54

ÍNDICE GENERAL

3	El Modelo Interno	57
3.1	El Modelo Interno en Solvencia II	57
3.2	Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas	60
3.2.1	Definición del Modelo Interno y estimación del SCR	60
3.2.2	Limitaciones del Modelo Interno	64
4	Correlaciones en la estimación de los requerimientos de capital	71
4.1	Introducción	71
4.2	Base de datos	74
4.3	Análisis de sensibilidad del SCR a la matriz de correlación	79
4.3.1	Sensibilidad del SCR del Modelo Estándar	79
4.3.2	Sensibilidad del SCR del Modelo Interno	84
4.4	Estimación de correlaciones	86
4.5	Modelo Bayesiano	93
4.6	Aplicación de las estimaciones Bayesianas	97
5	Conclusiones	101
5.1	Resumen	101
5.2	Aportaciones	102
5.3	Futuras líneas de investigación	104
	Apéndice	107
A		107
A.1	El Valor en Riesgo	107
A.1.1	El Valor en Riesgo de una variable aleatoria Normal	107
A.1.2	El Valor en Riesgo de una variable aleatoria Lognormal	108
A.2	Metodología I para la calibración de los parámetros específicos de QIS-5	108
A.2.1	Desviación de primas por línea de negocio	108
A.2.2	Desviación de reservas por línea de negocio	109
A.3	Definición de cópula	110
A.4	Correlaciones entre las componentes del resultado neto por línea de negocio	111

B	113
B.1 Publicaciones del autor relacionadas con esta tesis	113
B.1.1 Artículos publicados	113
B.1.2 Artículos publicados en revistas indexadas	114
B.1.3 Capítulos y Working Papers	114
Bibliografía	115

Índice de figuras

1.1	Esquema de riesgos en Solvencia II	10
1.2	Incumplimiento de la propiedad de subaditividad del VaR.	20
4.1	Cuotas de Mercado.	78
4.2	Sensibilidad del SCR.	83
4.3	Densidad de la cópula Gaussiana bivalente.	91
4.4	Función de densidad normal bivalente.	91

Índice de tablas

2.1	Desviaciones de primas y reservas por línea de negocio.	54
2.2	Correlaciones entre líneas de negocio.	54
3.1	Parámetros de forma y escala de la distribución Generalizada Pareto.	69
3.2	Estimaciones del VaR y TVaR de una distribución tridimensional para distintas cópulas con marginales Pareto.	70
4.1	Correspondencia entre líneas de negocio de QIS-5 y ramos no vida.	76
4.2	Estadísticos descriptivos de las variables Primas netas, Siniestralidad neta, Gastos y Provisiones técnicas; por línea de negocio. . . .	76
4.3	Volúmenes de primas y reservas por línea de negocio.	80
4.4	Comparativa de desviaciones de primas y reservas por línea de negocio.	80
4.5	Estimación del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas.	81
4.6	Estimaciones del SCR del Modelo Estándar con distintas matrices de correlación entre líneas de negocio.	82
4.7	Predicciones de las componentes para la definición de parámetros de las distribuciones para el Modelo Interno.	85
4.8	Estimaciones del SCR del Modelo Interno.	86
4.9	Estimación SCR Modelo Estándar con correlaciones bayesianas. .	99
4.10	Estimación del SCR Modelo Interno con correlaciones bayesianas.	100
A.1	Correlaciones entre las componentes del resultado técnico por líneas de negocio definidas en QIS-5.	111

El hombre generalmente se convierte en aquello que cree ser . . . Si tengo la creencia de que puedo hacerlo, adquiriré la capacidad para hacerlo, incluso aunque no la tenga cuando he comenzado.

Mahatma Gandhi

CAPÍTULO

1

Introducción

En los últimos años el mapa asegurador del mercado español se ha visto modificado como consecuencia de la crisis financiera. Derivado del entorno de inestabilidad del mercado, el regulador europeo ha aprobado un nuevo marco legislativo que pretende garantizar la estabilidad financiera y la solvencia de las compañías aseguradoras a través del control de los riesgos a los que se exponen. En los distintos capítulos de esta tesis se analiza la forma en que el regulador pretende que las entidades garanticen su estabilidad, esto es, a través del proceso de fijación de los requerimientos de capital, y las herramientas con las cuales el regulador permite su obtención, es decir, el Modelo Estándar o un Modelo Interno. Se aborda la problemática de la estimación de los requerimientos de capital, las implicaciones de la utilización tanto del Modelo Estándar como de un Modelo Interno, así como el proceso de estimación de los parámetros necesarios para su implementación, con especial énfasis en la matriz de correlaciones.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Marco legislativo

La publicación en el *Official Journal of the European Union* de la Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo de 25 de Noviembre de 2009 sobre el acceso y ejercicio de la actividad aseguradora y reaseguradora, también conocida como Solvencia II, 2009/138/EC ¹, marca el punto de partida oficial en la puesta en marcha de medidas legislativas de control de riesgo en entidades aseguradoras. Si bien, con carácter previo, ya existía otra normativa, Solvencia II ha supuesto un cambio legislativo sobre el enfoque que las entidades aseguradoras deben mantener en relación a los riesgos que asumen como consecuencia de su actividad.

Solvencia II establece un marco legal común de aplicación en aquellas entidades aseguradoras con sede en alguno de los estados miembros de la Unión Europea para el acceso y ejercicio de la actividad aseguradora y reaseguradora. La Directiva está estructurada bajo el principio de los tres pilares. Estos pilares fijan los criterios y normas de carácter cuantitativo y cualitativo que las entidades deben acometer para garantizar su solvencia y estabilidad financiera.

El Pilar I presenta un conjunto de normas que determinan los criterios para la obtención de las necesidades de capital que una entidad debe mantener con un horizonte temporal anual, acordes al riesgo asumido por la entidad, que garantice un nivel de solvencia aceptable mediante la valoración económica, consistente con el mercado, del balance de una entidad. El Pilar I está dirigido a la determinación de los requerimientos financieros mínimos que garanticen en todo momento que los activos de que disponen las entidades son suficientes, en cantidad y en calidad, para hacer frente a los compromisos adquiridos bajo un cierto horizonte temporal.

Para ello, la valoración del balance bajo el Pilar I se debe realizar siguiendo criterios de mercado, es decir, tanto la valoración del activo como la del pasivo de una entidad debe ser consistente con aquella que se derivara de la libre interacción

¹<http://eur-lex.europa.eu/JOhtml.do?uri=OJ:L:2009:335:SOM:EN:HTML>. En adelante nos referiremos a ella por Solvencia II o por *la Directiva*.

de los agentes de mercado.

Por un lado, el activo del balance queda determinado por la valoración de mercado de las inversiones que realiza la entidad. Para aquellos activos que por su carácter poco líquido, o por cualquier otro motivo, no existe valor de mercado, la Directiva establece normas de valoración.

La valoración del pasivo de las entidades presenta ciertas dificultades inherentes a la actividad aseguradora puesto que viene determinado por el valor económico de las obligaciones que contraen las entidades con los asegurados, normalmente de carácter incierto en cuantía y/o del momento de su liquidación.

Asimismo, el Pilar I también determina la composición de los fondos propios de la entidad, es decir, la estructura de activos en que se respalda dicha parte del balance, además de las cuantías económicas (requerimientos de capital) de carácter legal que la Directiva establece.

El Pilar I considera por separado distintos niveles de protección. Un primer nivel quedaría constituido por la valoración de mercado de las provisiones técnicas, que deben reflejar una estimación consistente con el nivel de compromisos y un margen de ajuste de mercado. El segundo nivel del Pilar I quedaría determinado por los requisitos de solvencia. Dichos requisitos deben reflejar el riesgo asumido y garantizar la solvencia de las entidades. La Directiva marca un umbral mínimo de requerimientos económicos por debajo del cuál la entidad no podría seguir ejerciendo su actividad.

Los requisitos económicos del primer nivel de protección deben reflejar las obligaciones contraídas por la entidad mediante los contratos de seguros que suscribe. Este capital queda plasmado en la valoración de las provisiones técnicas. La valoración de las provisiones técnicas, a efectos de Solvencia II, debe representar, por una parte, el valor presente de la mejor estimación de los flujos económicos futuros que se deriven de las obligaciones contraídas de manera contractual (*best estimate*) y, por otra parte, un margen de riesgo (*risk margin*) que refleje la cuantía

1. INTRODUCCIÓN

que debería satisfacer una entidad, de manera inmediata, por el acuerdo voluntario entre ésta y otra entidad, de la transferencia de las obligaciones derivadas de los contratos de seguro suscritos, descontado el valor presente de la mejor estimación de los flujos económicos futuros que se deriven de las obligaciones.

Por otra parte, el objetivo de los requisitos económicos del segundo nivel de protección es cubrir las eventuales pérdidas inesperadas que una entidad pudiese sufrir como consecuencia de fluctuaciones inesperadas adversas en la siniestralidad. Esta parte de las necesidades de capital es denominada en la Directiva como *Solvency Capital Requirement* (SCR). Como se ha mencionado, el SCR tiene una cota inferior determinada por un umbral denominado *Minimum Solvency Capital Requirement* (MSCR), por debajo del cual una entidad no podría seguir operando.

La Directiva establece que el SCR debe ser obtenido mediante un modelo que refleje el perfil de riesgo de la entidad, y que sea adecuado atendiendo a la naturaleza, escala y complejidad de los riesgos asumidos por la misma. El modelo propuesto por el regulador es denominado en la Directiva como Fórmula General¹ de cálculo del capital de solvencia obligatorio.

Según el artículo 110 de la Directiva, el Modelo Estándar puede ser utilizado por las entidades utilizando los parámetros establecidos en la Directiva como *proxy* de mercado, o puede ser adaptado al perfil de riesgo propio de cada entidad mediante la estimación de nuevos parámetros específicos basados en la experiencia histórica de la entidad:

Cuando no proceda calcular el capital de solvencia obligatorio conforme a la fórmula estándar, ..., debido a que el perfil de riesgo de la empresa de seguros o de reaseguros se aparta significativamente de las hipótesis aplicadas en el cálculo de la fórmula estándar, las autoridades de supervisión, mediante decisión motivada, podrán exigir a

¹A pesar de que en la Directiva se refiere al modelo de cálculo del capital de solvencia obligatorio como Fórmula General, en esta tesis nos referiremos a él como Modelo Estándar.

esa empresa que sustituya un subconjunto de los parámetros utilizados para el cálculo de la fórmula estándar por parámetros específicos de dicha empresa . . .

Pueden existir diversas razones para que una entidad aseguradora decida reestimar los parámetros presentados por el regulador. Una posible razón puede derivarse de que las *proxy* sobrevaloren el verdadero perfil de riesgo de la entidad, lo que derivaría en un SCR mayor que el que se obtendría con el uso de parámetros propios. Por otra parte, otra razón para reestimar los parámetros podría venir determinada por el hecho de que la estructura de negocio de una compañía aseguradora no se adaptase a la propuesta por el regulador, es decir, que la entidad no operase en alguno de los ramos que conforman las líneas de negocio propuestas por el regulador o simplemente estructure de forma distinta las líneas de negocio, en cuyo caso debería estimar nuevos parámetros que reflejen su modelo de negocio para obtener el SCR.

Asimismo, la Directiva establece que bajo ciertos requisitos previos y autorización de la autoridad competente, el SCR pueda ser obtenido mediante un Modelo Interno. Este modelo puede considerar la totalidad o parte de los riesgos a los que la entidad se enfrenta. En este último caso, el modelo es denominado en la Directiva Modelo Interno Parcial.

Los requisitos que debe cumplir un Modelo Interno están relacionados a normas de aplicación y seguimiento, de forma que aquellas entidades que opten por la utilización de un Modelo Interno, total o parcial, para el cálculo de los requerimientos de capital de solvencia deben justificar su utilización y funcionamiento.

El Modelo Estándar es un conjunto de fórmulas y metodologías propuestas por el regulador con las que la entidad aseguradora puede obtener la cuantía correspondiente al SCR. Un Modelo Interno es un procedimiento propuesto por la entidad aseguradora que persigue la misma finalidad y propósitos que el Modelo Estándar, es decir, la obtención de los requerimientos de capital mediante un modelo que refleje el perfil de riesgo de la entidad. El SCR, obtenido con cualquiera de los

1. INTRODUCCIÓN

modelos permitidos por el regulador, debe estar calibrado de tal forma que se corresponda con el valor en riesgo¹ (VaR) de los fondos propios de la entidad, a un horizonte temporal anual, calculado con un nivel de confianza del 99,5 %.

El Pilar II describe los requisitos de carácter cualitativo que las entidades deben cumplir y que se traducen en todos aquellos procedimientos de carácter formal y de comunicación al regulador.

El Pilar II de la Directiva concierne a aquellos aspectos referentes a los procedimientos de supervisión y control por parte del regulador. Solvencia II está definida como una normativa de armonización para aquellas entidades que operen en los estados miembros de la Unión Europea, por lo que es necesario que los aspectos cuantitativos sean acompañados de otros aspectos de carácter cualitativo que logren una apropiada homogeneidad de los métodos y herramientas de supervisión y control a utilizar por los distintos reguladores locales de los estados miembros.

Estos requisitos incluyen también la obligación, para cualquier entidad, del control de riesgos a los que se somete mediante un modelo de gestión de riesgos, tanto cuantificables como no cuantificables. Este modelo de gestión es denominado por la Directiva como *Own Risk and Solvency Assessment*² (ORSA). El modelo ORSA es una herramienta de comunicación que debe servir básicamente a dos propósitos. El primero de ellos debe utilizarse como herramienta de ayuda en el proceso de toma de decisiones estratégicas, por tanto debe ser revisado continuamente cuando el perfil de riesgo de la entidad cambie significativamente, incorporando las decisiones estratégicas adoptadas.

El segundo propósito debe servir de herramienta de comunicación al regulador. El modelo ORSA debe proyectar las necesidades de capital de los años futuros y justificar las desviaciones que se produzcan entre los requerimientos proyectados

¹En el Anexo queda definido el valor en riesgo y su expresión analítica bajo hipótesis de normalidad y bajo hipótesis de lognormalidad de la variable aleatoria.

²http://www.gcactuaries.org/documents/ceiops_issues_paper_orisa.pdf

y los efectivamente calculados, cualquiera que fuera el modelo utilizado para ello. De este modo, el modelo ORSA debe ser una herramienta de calibración de cualquiera que fuese el modelo de cálculo del SCR elegido en el Pilar I.

Por último, en el Pilar III se presentan aquellas medidas que pretenden garantizar la transparencia y la disciplina en el mercado asegurador, a través de un conjunto de normas de comunicación de la información sobre la situación financiera y de solvencia de las entidades de cara al regulador local, así como las normas de comunicación y de transparencia de los reguladores locales de cara al regulador europeo.

El Pilar III establece las acciones a tomar, por parte del regulador y de las entidades, en el caso de que se produzcan desajustes en el cumplimiento de los requerimientos de las normas de valoración del Pilar I y/o de los requisitos establecidos en el Pilar II.

De este modo, el regulador europeo faculta a los reguladores locales para tomar las acciones necesarias que garanticen las normas impuestas en el Pilar I y II, y queda facultado para tomar acciones sobre los estados que incumplan los requisitos establecidos en la Directiva de comunicación y transparencia.

1.1.1 Los Estudios de Impacto Cuantitativo

Desde el año 2006 el *Committee of European Insurance and Occupational Pensions*¹ (CEIOPS) ha venido desarrollando, junto con diversas modificaciones de la Directiva hasta su versión final de 2009, una serie de informes basados en el impacto que sobre el balance, y más generalmente la valoración de las entidades, tendría la implantación de las distintas medidas propuestas en la Directiva.

Los modelos de cálculo de los requerimientos de capital que se presentaban en cada uno de estos estudios han sido entendidos como el desarrollo del Modelo

¹Desde 1 de Enero de 2011, *European Insurance and Occupational Pensions Authority* (EIO-PA)

1. INTRODUCCIÓN

Estándar al que se refiere Solvencia II. De este modo desde 2006 se han publicado los resultados de los denominados *Quantitative Impact Studies* (QIS). En ellos se han ido introduciendo los aspectos redactados en la Directiva y modificado los parámetros necesarios para el cálculo de los requerimientos de capital de solvencia, y analizando el resultado de la aplicación de los distintos cambios.

En total desde 2006 hasta 2010 han sido desarrollados cinco estudios. En estos informes se han presentado los resultados agregados por países y sectores sobre la situación financiera de las entidades participantes en base a los resultados que obtenían las entidades participantes de los requerimientos de capital acordes a los modelos propuestos en cada uno de los QIS. No han habido más estudios de impacto cuantitativo desde 2010 hasta la fecha, pero EIOPA sí ha publicado numerosos documentos donde expresa su opinión acerca de las medidas adoptadas en la implementación del Modelo Estándar, respuestas a cuestiones planteadas por las entidades participantes y sobre implementación de Modelos Internos, entre otros, lo que da una idea de que la puesta en marcha de los requisitos del Pilar I todavía son un proceso activo no concluido, como puede leerse en un documento de consulta de EIOPA de 15 de Junio de 2012¹

Las especificaciones técnicas deben ser consideradas como un trabajo en progreso, lo que significa que pueden estar sujetas a supresiones, cambios y mejoras. Por ejemplo, EIOPA está considerando la inclusión de un módulo que refleje el riesgo de inflación. Además, las técnicas y especificaciones propuestas en QIS no deben ser entendidas como propuestas de implementación de medidas del nivel dos. Han sido derivadas debido a la necesidad de llevar a cabo los estudios QIS y representan metodologías diseñadas para dar una primera visión del impacto de las propuestas de EIOPA, consistentes con los objetivos de QIS tal y como han sido fijados por la Comisión.

¹Draft Technical Specifications QIS of EIOPA's Advice on the Review of the IORP Directive: Consultation Paper.

<https://eiopa.europa.eu/consultations/consultation-papers/index.html>

En el segundo capítulo de esta tesis se lleva a cabo el análisis del SCR que se deriva del Modelo Estándar presentado en el último estudio de impacto cuantitativo (QIS-5), cuyo cálculo está basado en la agregación de los distintos capitales correspondientes a una estructura modular de las exposiciones a los riesgos generales que caracterizan a una entidad aseguradora.

La Directiva propone un nivel de desagregación de riesgos que distingue entre riesgo de suscripción, riesgo de mercado, riesgo de crédito y riesgo operacional, y para cada uno de ellos son tenidos en consideración distintos subniveles que tratan de reflejar de manera adecuada y genérica el perfil de riesgo de una compañía aseguradora representativa. La Figura 1.1 muestra los distintos módulos y subniveles o submódulos que son considerados en la Directiva para la obtención del SCR.

El SCR es el resultado de agregar los distintos requerimientos de capital de cada módulo de riesgo considerado en dos pasos. Por un lado deben ser agregados los capitales correspondientes a los distintos subniveles considerados en cada módulo de riesgo principal, teniendo en cuenta la relación que tengan entre sí. Con ello se obtiene el requerimiento correspondiente a cada módulo de riesgo principal (suscripción, mercado, crédito y operacional). Por otra parte, la agregación de los requerimientos de capital correspondientes a cada módulo de riesgo principal debe llevarse a cabo teniendo en cuenta la relación existente entre ellos, con lo que finalmente se obtiene el requerimiento total de capital de solvencia, el SCR. En Solvencia II la relación entre los distintos módulos y submódulos para la agregación de los distintos requerimientos queda plasmada a través de las matrices de correlación entre las variables que representan los riesgos de los distintos módulos y submódulos.

A lo largo de todos los estudios de impacto cuantitativo y de la propia Directiva, uno de los aspectos clave son las matrices de correlación utilizadas para la agregación de los distintos requerimientos de capital de cada uno de los módulos y submódulos de riesgo. Un ejemplo de ello viene expresado en el artículo 104.3 de la Directiva:

1. INTRODUCCIÓN

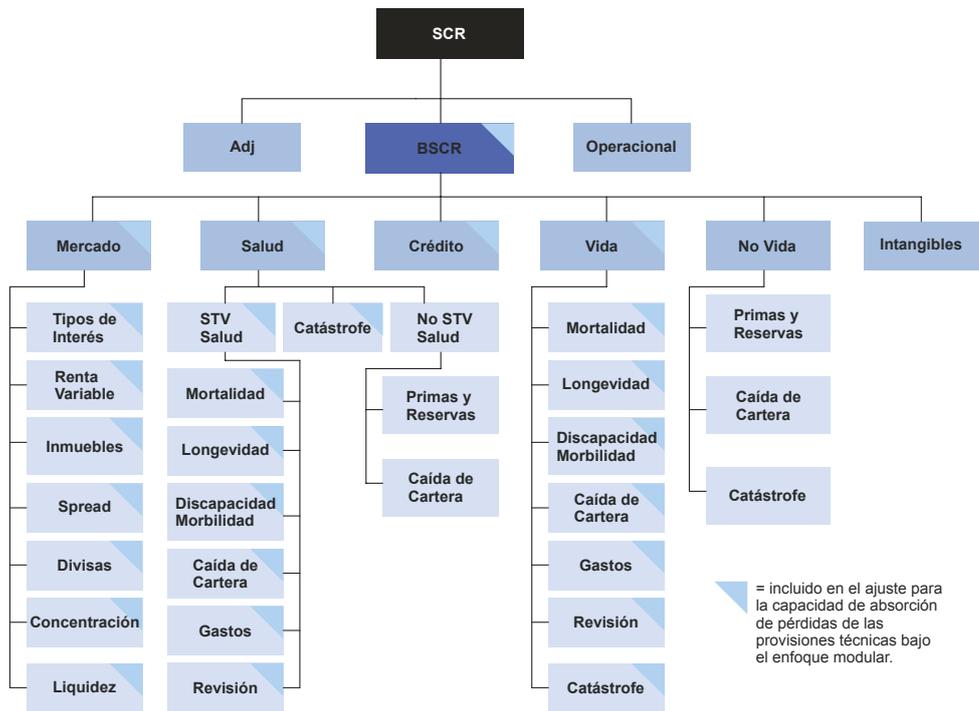


Figura 1.1: Esquema de riesgos en Solvencia II - Clasificación de riesgos bajo Solvencia II. Fuente: QIS-5

Los coeficientes de correlación para la agregación de los módulos de riesgo mencionados en el apartado 1 y la calibración del capital obligatorio para cada módulo de riesgo, darán lugar a un capital de solvencia obligatorio total acorde con los principios establecidos en el artículo 101.

En ningún artículo de la Directiva se realiza mención al tipo de correlación al que corresponden las matrices presentadas. Sin embargo en QIS-5 sí encontramos una clara mención específica sobre el tipo de correlación que se utiliza.

Para la agregación de los módulos de riesgo individuales con la finalidad de obtener el SCR, son aplicadas correlaciones lineales. El ajuste de los coeficientes de correlación pretende reflejar las potenciales estructuras de dependencia en las colas de las distribuciones, así como la estabilidad de cualquier hipótesis sobre la correlación bajo condiciones de stress.

Una prueba de la importancia que la Directiva otorga a las correlaciones viene reflejada en el artículo 111 de la Directiva:

A fin de velar por que todas las empresas de seguros y de reaseguros estén en igualdad de condiciones a la hora de calcular el capital de solvencia obligatorio a partir de la fórmula general, o tener en cuenta la evolución del mercado, la Comisión adoptará disposiciones de aplicación que establezcan lo siguiente:

- d) los parámetros de correlación, incluidos, si es necesario, los establecidos en el anexo IV, y los procedimientos para la actualización de dichos parámetros.*

A pesar de lo expuesto en el artículo 111, no se han desarrollado en los estudios de impacto cuantitativo los procedimientos o metodologías de actualización de los parámetros correspondientes a los coeficientes de correlación. Es más, en QIS-5 sólo se hace referencia explícita a los parámetros específicos de las entidades correspondientes a las desviaciones estándar¹.

¹QIS-5 Technical Specifications, SCR.10.1.

1. INTRODUCCIÓN

1.2 Literatura previa

Recientemente han sido publicados algunos trabajos que analizan las causas de la crisis financiera y las implicaciones en la regulación del mercado asegurador. Un ejemplo de ello es el trabajo de Ashby (2011) [3] en el que se exponen las causas desencadenantes de la crisis bancaria, los efectos que tuvo sobre el sector bancario y las implicaciones sobre los diferentes marcos reguladores en el sector asegurador. El autor recomienda poner un mayor énfasis en las herramientas de comunicación y regulación (el Pilar II y III) que en las referentes a la obtención de los requerimientos de capital (el Pilar I). En referencia a los efectos que la crisis financiera tuvo sobre el mercado asegurador, Kelly *et al.* (2012) [28] presentan un análisis de las causas que explican la mejor reacción del mercado asegurador canadiense ante la crisis, señalando como causa principal el mejor control regulador en Canadá en comparación a otros marcos reguladores.

También en relación al Pilar III, Höring y Gründl (2011) [24] analizan las prácticas de un conjunto de compañías aseguradoras acerca de las normas de transparencia y comunicación. En base a un índice de riesgo que proponen, se estudia la relación entre el alcance de la divulgación de los riesgos y características de las compañías aseguradoras con la finalidad de extraer conclusiones referentes a los motivos para la declaración de riesgos.

A pesar de que los trabajos más recientes estudian cómo la regulación y las medidas de transparencia pueden mejorar el funcionamiento de los mercados aseguradores, tanto en Europa como en Estados Unidos, (ver Klein (2012) [30]), también hay un gran número de trabajos que se han centrado más en la dinámica de la estimación de los requerimientos de capital de una entidad aseguradora. Paralelamente a la publicación del primer estudio de impacto cuantitativo fueron iniciadas diversas corrientes de discusión en relación al trabajo general de CEIOPS y de la implementación de la Directiva de Solvencia II, en particular. Algunos ejemplos del análisis acerca de la evolución de los trabajos de CEIOPS se encuentra en Alonso

http://ec.europa.eu/internalmarket/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf

y Albarrán (2008) [1], Sandström (2006, 2011) [35, 37] y Cruz (2009) [5].

Con carácter previo, Steffen (2008) [42] también describe las principales características del trabajo de CEIOPS y de la Directiva de Solvencia II, destacando la necesidad de mejorar el nivel de armonización de la regulación referente a la solvencia de las entidades que operen en Europa a través de la aplicación de los tres pilares de la Directiva.

Con este propósito, Doff (2008) [8] somete a Solvencia II a un test comparándolo con los criterios propuestos por Cummis *et al.* (1994) [6]. Tras el análisis, el autor concluye que la regulación propuesta en Solvencia II satisface la mayoría de estos criterios. Asimismo, Doff (2008) [8] apunta que algunos de los problemas asociados con el Pilar I, que tienen relación con algunos incentivos inadecuados en la aplicación del Modelo Estándar, pueden ser resueltos con la aplicación y desarrollo de los Pilares II y III.

Desde la publicación del último estudio de impacto cuantitativo, el trabajo de CEIOPS se ha centrado de manera prioritaria en cómo el Modelo Estándar debería ser implementado. Particularizando en el Pilar I de Solvencia II, algunos autores han examinado el proceso de estimación del SCR correspondiente al submódulo de riesgo de primas y reservas del negocio no vida mediante la aplicación tanto del Modelo Estándar como de diversas propuestas de Modelos Internos.

De este modo, Sandström (2007) [36] analiza el efecto de la consideración de un coeficiente de asimetría en la calibración del SCR. A través de algunos ejemplos, el autor señala las diferencias en las estimaciones del SCR obtenidas a través de la distribución Normal-Power calibrada y no calibrada mediante el coeficiente de asimetría. Teniendo en cuenta diversas medidas de riesgo, el autor señala que bajo la consideración de la hipótesis de normalidad, el SCR podía ser infraestimado.

También Pfeifer y Straussburger (2008) [34] tratan la problemática de la agregación del SCR global mediante el Modelo Estándar para riesgos incorrelaciona-

1. INTRODUCCIÓN

dos pero dependientes. Para ello asumen el VaR como medida de riesgo y diversas distribuciones, tanto simétricas como asimétricas, concluyendo finalmente que el Modelo Estándar infraestima el verdadero SCR bajo algunas estructuras de dependencia, aunque también es sobrestimado en algunos casos.

Más tarde, Savelli y Clemente (2009) [38] comparan la influencia del tamaño de la compañía en la estimación de los requerimientos de capital para el riesgo de primas no vida bajo la fórmula estándar propuesta en QIS-3 y mediante la adopción de una aproximación de un Modelo Interno basado en la agregación mediante cópulas.

Bajo las hipótesis que asumen en este trabajo, los autores señalan que la aproximación estándar sobreestima los requerimientos de capital en compañías de tamaño reducido. Posteriormente, Savelli y Clemente (2010) [39] presentan un método alternativo basado en la idea de que la fórmula estándar propuesta en QIS-3 debe ser ajustada mediante el factor de calibración propuesto por Sandström (2007) [36] y, de este modo, extender el modelo a distribuciones asimétricas. Asimismo, los autores comparan sus resultados con los que se derivan del uso de cópulas aplicando un método de agregación jerárquico bajo distintas hipótesis de estructuras de dependencia y correlación.

Otros autores han tratado también la agregación de otros tipos de riesgos distintos al de primas y reservas, por ejemplo, Embrechts y Puccetti (2006) [13] analizan el proceso de obtención de los requerimientos correspondientes a riesgo operacional a través del uso de cópulas.

A pesar del interés de estos trabajos en la estimación del SCR, ninguno ha puesto énfasis en la metodología para la estimación de las matrices de correlaciones necesarias para realizar las agregaciones de riesgos y poder de este modo tener en cuenta los posibles efectos de la diversificación. De hecho, Duverne y Le Douit (2009) [9] señalan esta cuestión en uno de sus trabajos en el que se discute la evaluación de obligaciones derivadas de los criterios de Solvencia II y de la International Financial Reporting Standards (IFRS), y en el que se identifican discrepancias entre el tratamiento del efecto de la diversificación entre carteras en

ambos proyectos normativos.

1.3 Problemática

En esta sección se analiza la problemática que presenta la estimación del SCR. En primer lugar es necesario conocer y comprender qué entiende Solvencia II por SCR. La Directiva, de conformidad con el procedimiento establecido en el artículo 251 del Tratado¹, establece que:

El capital de solvencia obligatorio debe corresponderse con el capital económico que han de poseer las empresas de seguros y de reaseguros para garantizar que no haya más de una ruina por cada 200 casos o, de forma alternativa, que las empresas todavía estén en situación, con una probabilidad del 99,5 % como mínimo, de cumplir sus obligaciones frente a los tomadores y beneficiarios de seguros en los próximos doce meses. Este capital económico debe calcularse sobre la base del verdadero perfil de riesgo de dichas empresas, teniendo en cuenta la incidencia de las posibles técnicas de reducción del riesgo, así como los efectos de la diversificación.

Además de esta definición, la sección cuarta de la Directiva hace referencia a cómo debe calcularse el SCR. De este modo el artículo 101 establece que:

El SCR cubrirá las actividades existentes y las nuevas actividades que se espere realizar en los siguientes doce meses. En relación con la actividad existente, solamente deberá cubrir las pérdidas imprevistas. El capital de solvencia obligatorio corresponderá al valor en riesgo de los fondos propios de base de una empresa de seguros o de reaseguros, con un nivel de confianza del 99,5 %, a un horizonte de un año.

¹ Opinión del Parlamento Europeo de 22 de Abril de 2009 (no publicada a en el *Official Journal of the European Union* fecha de publicación de la Directiva) y del Consejo de Decisión de Noviembre de 2009.

1. INTRODUCCIÓN

De la definición que Solvencia II considera del SCR y del modo en que plantea su cálculo se desprenden una serie de aspectos clave. Primero, el SCR es un capital único que representa una garantía parcial que como máximo debe admitir una posibilidad de ruina en un 5 % de los casos como consecuencia de pérdidas inesperadas. Segundo, el SCR debe ser calculado en base a un horizonte temporal anual, por tanto debe ser revisado año a año. Además el SCR ha de tener un carácter prospectivo, es decir, debe considerar no sólo la actividad existente, sino la actividad futura esperada. Tercero, dicho capital debe reflejar el perfil de riesgo de la entidad. En esta tesis proponemos que la determinación del perfil de riesgo de la entidad sea estimada a través del comportamiento estadístico conjunto de las variables aleatorias que representan cada uno de los riesgos a los que se enfrenta la entidad. Cuarto, el SCR debe ser obtenido teniendo en cuenta el posible efecto de la diversificación, si lo hubiera, en el proceso de agregación de las variables aleatorias que representan los distintos riesgos a los que se enfrenta la entidad. Quinto, el SCR debe ser obtenido mediante una medida de riesgo, lo que refuerza el hecho de la consideración que proponemos acerca de qué debe ser entendido por perfil de riesgo. Por último, sexto, las pérdidas imprevistas han de ser respaldadas por activos que pertenezcan a la estructura de fondos propios. La Directiva establece qué tipo de activos son adecuados para tal propósito. En general, el criterio es que sean activos altamente libres de riesgo de liquidez, y además establece límites cualitativos que determinan la composición de la estructura de fondos.

De los anteriores aspectos clave, dos resultan de interés por la problemática que entrañan, y que por tanto, serán objeto de estudio en esta tesis. En primer lugar, la determinación del perfil de riesgo y, en segundo lugar, cómo se puede tener en cuenta el posible efecto de la diversificación en la estimación del SCR.

Como se acaba de mencionar, el propósito es determinar, en primer lugar, el perfil de riesgo a través del comportamiento conjunto multivariante de las variables aleatorias que representen los riesgos a los que se enfrenta una entidad aseguradora.

El análisis de esta tesis queda restringido al submódulo de riesgo de primas y reservas perteneciente al módulo de suscripción no vida tal como se describe en la

Directiva. La primera meta es determinar qué variable aleatoria es representativa de dicho riesgo. Siguiendo el criterio de segmentación de Solvencia II del submódulo de primas y reservas, se considera un nivel de detalle correspondiente al análisis por líneas de negocio. El objetivo, pues, será, tras determinar la variable aleatoria relevante, determinar cómo se comportan conjuntamente las distintas líneas de negocio propuestas.

A partir de la determinación del comportamiento conjunto, podremos realizar la medición del riesgo asumido a través de la medida de riesgo propuesta en la Directiva para la obtención del SCR. Sin embargo, como se verá, la incorrecta estimación del comportamiento conjunto de la variable aleatoria correspondiente, o el desconocimiento de dicho comportamiento, puede desembocar en la infraestimación del requerimiento de capital.

El hecho de que el requerimiento de capital pueda ser infraestimado se desprende del hecho de que las variables aleatorias que representan los riesgos a los que se enfrenta la entidad aseguradora no sean subaditivas, sino superaditivas, es decir, no se produzca efecto diversificación. En este caso si el requerimiento de capital es obtenido en base a una medida de riesgo no apropiada y, sobre hipótesis erróneas acerca del comportamiento estadístico conjunto de las variables relevantes, el capital obtenido puede no estar reflejando adecuadamente el perfil de riesgo de la entidad.

El requerimiento de capital correspondiente al submódulo de riesgo de primas y reservas no vida se desprenderá de la medición, mediante la medida de riesgo propuesta en la Directiva, de una variable aleatoria que represente el comportamiento agregado de todas las líneas de negocio de la variable relevante que represente adecuadamente el riesgo de primas y reservas.

Como se ha mencionado anteriormente la medida de riesgo que la Directiva propone es el VaR. Esta medida de riesgo y sus propiedades han sido ampliamente estudiadas (ver Jorion (2007) [27]). El VaR no es una medida coherente de riesgo en el sentido de Artzner *et al.* (1999) [2]. Estos autores establecieron axiomas que

1. INTRODUCCIÓN

permiten clasificar las medidas de riesgo en dos grupos, medidas coherentes y medidas no coherentes de riesgo. Uno de los axiomas propuestos por Artzner *et al.* (1999) [2] es conocido como el axioma de *subaditividad*. Este axioma está basado en el concepto de diversificación de riesgos. En palabras de estos autores:

... the merge of two risks does not create extra risk.

Puede ser demostrado (ver Fang *et al.* (1990) [15] y Embrechts *et al.* (2002) [12]) que bajo ciertas condiciones, el VaR de una suma de variables aleatorias es mayor que la suma del VaR de cada una de las variables aleatorias individualmente consideradas, lo que quebrantaría uno de los aspectos clave antes descritos acerca de cómo la determinación del SCR debe ser llevada a cabo teniendo en cuenta los efectos de la diversificación.

Las condiciones bajo las cuales el VaR de la suma de variables aleatorias no cumple el axioma de *subaditividad* están relacionadas con el comportamiento estadístico de las variables aleatorias sobre las que se obtiene la medición del riesgo. Hay dos factores que influyen en este hecho. En primer lugar, el comportamiento estadístico marginal de cada variable aleatoria. En segundo lugar, el comportamiento estadístico conjunto de las variables aleatorias. De este modo, en condiciones de distribuciones fuertemente asimétricas, en cualquiera de los dos casos, el comportamiento estadístico marginal y/o el conjunto, el VaR de la suma de variables aleatorias no cumple el axioma de *subaditividad*.

En el siguiente ejemplo¹ extraído de Embrechts *et al.* (2005) [11] se puede observar cómo el VaR de la suma de variables aleatorias no es una medida que cumple el axioma de *subaditividad*.

Ejemplo 1.

Consideremos dos variables aleatorias (X_1, X_2) que representan los beneficios y pérdidas de dos carteras. Supongamos que ambas variables aleatorias se distribuyen según una distribución normal estándar y que la correlación entre ambas es

¹Traducción del autor a español del ejemplo 5.23.

cero. Construimos dos vectores aleatorios consistentes con esta información. El Modelo 1 sigue una distribución normal bivalente $X \sim N_2(0, I_2)$. El Modelo 2 es obtenido definiendo una variable aleatoria discreta, V , independiente tal que $P(V = 1) = P(V = -1) = 0,5$ y $(Y_1, Y_2) = (X_1, V \cdot X_1)$, siendo X_1 una variable aleatoria como cualquiera de las marginales descritas en el Modelo 1. El Modelo 2, obviamente, tiene marginales normales y correlación cero.

Esta situación puede ser interpretada como dos estados equiprobables del mercado: en un estado ($V = 1$) los rendimientos financieros en dos carteras son *comonótonos* y tenemos la certeza de obtener ganancias en las dos carteras o pérdidas en las dos carteras; en el segundo estado ($V = -1$), los rendimientos de las dos carteras son *contracomonótonos*, mientras que una cartera obtiene beneficios, la otra produce pérdidas, y viceversa. La Figura 1.2 representa una simulación de los VaR de la suma de variables aleatorias a distintos niveles de confianza (q) correspondientes al Modelo 1 y al Modelo 2 descritos en el ejemplo anterior. A través del gráfico de la Figura 1.2 se aprecia cómo a partir de un percentil determinado la subaditividad de la medida de riesgo falla.

Asimismo, en el ejemplo aparecen dos conceptos, el de *comonotonicidad* y el de *contracomonotonicidad*. Estos dos conceptos están relacionados con el comportamiento conjunto de las variables aleatorias implicadas. La *comonotonía* representa el caso de dependencia positiva más extremo, mientras que la *contracomonotonía* representa el caso de dependencia negativa más extremo. Para un mayor detalle acerca de estos conceptos, ver Joe (1997) [26] y Nelsen (1999) [33].

Por otra parte, bajo ciertas condiciones, el VaR cumple el axioma de *subaditividad*. Contrariamente al caso anterior, bajo un comportamiento estadístico simétrico, marginal y/o conjunto, el VaR refleja el efecto de diversificación. Puede ser demostrado (ver Embrechts *et al.* (2002) [12]) que bajo hipótesis de distribuciones normales, y más generalmente bajo hipótesis de distribuciones elípticas¹ el VaR es una medida de riesgo coherente.

¹Para más detalles sobre distribuciones elípticas, ver Neil (2002) [32].

1. INTRODUCCIÓN

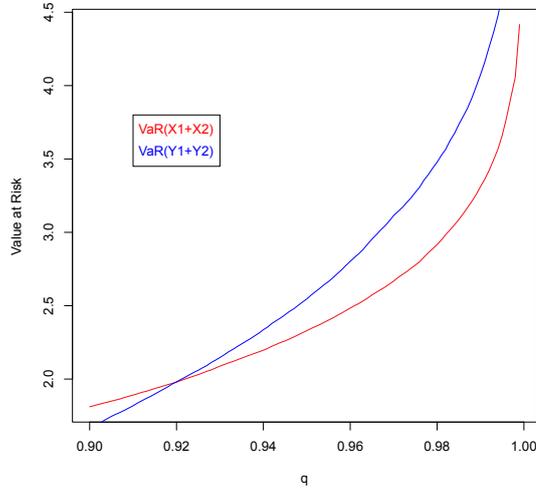


Figura 1.2: Incumplimiento de la propiedad de subaditividad del VaR. - VaR, a distintos niveles de confianza (q), para los riesgos $X_1 + X_2$ y $Y_1 + Y_2$ tal y como se describen el Ejemplo 1. Los dos riesgos tienen marginales normales y un coeficiente de correlación cero; pero $X_1 + X_2$ son independientes mientras que $Y_1 + Y_2$ son dependientes. Fuente: Propia a partir de Embrechts *et al.* (2005) [11]

¿De dónde proviene, pues, la elección que el regulador establece de la medida de riesgo en base a la cual obtener el requerimiento de capital? Si se asume que el regulador, en la definición del SCR que presenta en la Directiva, establece que el SCR es obtenido teniendo en cuenta los efectos de la diversificación y, además se asume que el regulador considera el caso en que el VaR es una medida que cumple el axioma de *subaditividad*, se podría pensar que el modelo propuesto en la Directiva, el Modelo Estándar, está basado en hipótesis de normalidad multivariante en cuanto a las variables aleatorias que representan los riesgos que considera la Directiva, como podemos ver a continuación.

Considérese el siguiente conjunto de variables aleatorias $X_i, i = \{1, \dots, d\}$ tales que el valor esperado y la varianza de cada una de ellas es $E[X_i] = 0$ y $V[X_i] = \sigma_{X_i}^2$. Además, por hipótesis se asume que cada variable aleatoria X_i se distribuye normalmente. Para cualquier variable aleatoria X_i con $E[X_i] = 0$ y $V[X_i] = \sigma_{X_i}^2$ el VaR a un nivel de confianza $\alpha \in [0; 1]$ bajo hipótesis de normalidad se define como $VaR_\alpha[X_i] = \Phi_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\sigma_{X_i}^2}$, siendo Φ_α la función de distribución

de una variable aleatoria normal estandarizada evaluada en el punto α , y Φ_α^{-1} su función inversa.

Se define la variable aleatoria que representa la suma de las variables X_i como $X = \sum_{i=1}^d X_i$. El valor esperado y la varianza de X serán $E[X] = 0$ y $V[X] = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j} \cdot \rho_{X_i X_j}$ respectivamente, siendo $\rho_{X_i X_j}$ el coeficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias X_i y X_j , $i, j = \{1, \dots, d\}$. El VaR de la suma X será entonces

$$\begin{aligned} VaR_\alpha [X] &= \Phi_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\sigma_X^2} = \\ &= \Phi_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j} \cdot \rho_{X_i X_j}} = \\ &= \sqrt{(\Phi_\alpha^{-1})^2 \cdot \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j} \cdot \rho_{X_i X_j}} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d VaR_\alpha [X_i] \cdot VaR_\alpha [X_j] \cdot \rho_{X_i X_j}}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) se corresponde con lo que la Directiva presenta como Modelo Estándar para la obtención del SCR *básico*¹ (BSCR). El BSCR se corresponde con el $VaR_\alpha [X]$ y el SCR de cada uno de los riesgos correspondientes a suscripción, crédito y mercado se corresponden con un $VaR_\alpha [X_i]$. El término *básico* se debe a que el SCR que se deriva del modelo es posteriormente ajustado con una cuantía para tener en cuenta la capacidad de absorción de pérdidas de las provisiones técnicas².

A cada módulo de riesgo considerado en Solvencia II le corresponde un SCR, y cada uno³ de estos requerimientos es obtenido agregando los SCR correspondientes a los distintos subniveles considerados en cada módulo principal de la misma forma y bajo las mismas hipótesis que en la ecuación (1.1).

¹Ver Figura 1.1

²QIS-5 Technical Specifications, SCR.1.2.

³Con la excepción del submódulo de riesgo de primas y reservas contenido en el módulo principal de riesgo de suscripción no vida, objeto del análisis de este trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

Por tanto, la hipótesis básica del Modelo Estándar es que las variables que representan los distintos riesgos y a través de los cuales se obtienen los requerimientos de capital siguen una distribución normal multivariante centrada en cero. Bajo esta hipótesis, la medida de riesgo propuesta en la Directiva cumple el axioma de *subaditividad* y refleja adecuadamente el efecto de diversificación de riesgos.

Según Solvencia II, el SCR se obtiene mediante una medida de riesgo, el VaR, que bajo la hipótesis acerca del comportamiento estadístico conjunto de las variables que representan los riesgos, es decir, el perfil de riesgo, es *subaditiva*, y refleja adecuadamente el efecto de diversificación al agregar las distintas variables que representan los riesgos.

En la medida que el perfil de riesgo de una entidad se aparte de las hipótesis del Modelo Estándar, el SCR puede ser infraestimado o sobreestimado. Por este motivo, una entidad que decida proponer un Modelo Interno para el cálculo del SCR basado en una medida de riesgo, deberá necesariamente determinar, en primer lugar, el comportamiento marginal de cada una de las variables aleatorias que representen cada riesgo y, en segundo lugar el comportamiento conjunto de éstas.

El segundo aspecto clave en la determinación del SCR según Solvencia II es la necesidad de tener en cuenta los posibles efectos de la diversificación. Ciñéndose a la definición de Artzner *et al.* (1999) [2] del axioma de *subaditividad* puede entenderse por efecto de diversificación la reducción que se produce en una medida de riesgo por el hecho de incorporar a la medición del riesgo de una variable aleatoria la agregación de otra(s) variable(s) aleatoria(s).

En dicho caso, lo que determinaría el efecto de la diversificación sería la elección de la medida de riesgo. En Solvencia II esta elección viene fijada por la Directiva, que considera el VaR como medida de referencia. Bajo el modelo propuesto en Solvencia II, basado como se acaba de ver en normalidad multivariante, y esta medida de riesgo, el efecto de la diversificación queda garantizado.

Sin embargo, en Solvencia II, no queda claramente definido el concepto de efecto de diversificación¹. El Modelo Estándar utiliza las matrices de correlación con dos finalidades. La primera finalidad es la agregación de los cuantiles, el VaR, que representan cada uno de los requerimientos de capital asociados a cada variable aleatoria que, a su vez, representa un riesgo considerado en la Directiva. La segunda finalidad es la estimación de parámetros necesarios para la obtención del requerimiento de capital de algún riesgo en particular.

Así, el efecto de diversificación también puede ser entendido como el efecto de reducción que se produce en la estimación de algunos de los parámetros de los que depende el modelo, por ejemplo, la varianza o la desviación estándar de la suma de variables aleatorias. Es bien conocido que la varianza de la suma de dos variables aleatorias, $V[X + Y] = \sigma_{X+Y}^2$, es igual a

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \rho_{XY} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y, \quad (1.2)$$

siendo σ_X , la desviación típica de X y ρ_{XY} el coeficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias X e Y .

Claramente, el signo del coeficiente de correlación lineal determinará que la varianza de la suma, σ_{X+Y}^2 , sea mayor o menor que la suma de varianzas $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Por tanto, se produciría el efecto diversificación en la varianza de la suma de variables aleatorias si el coeficiente de correlación es negativo.

No deben ser confundidos estos dos puntos de vista aquí planteados acerca del concepto del efecto de diversificación, el de diversificación en la medida de riesgo y el de diversificación en la estimación de los parámetros. Bajo la hipótesis estadística del Modelo Estándar (normalidad multivariante) y la medida de riesgo

¹La definición de efecto de diversificación viene recogida en el artículo 11.37 de la Directiva: *La reducción de la exposición al riesgo de seguros y de reaseguros y grupos relacionados con la diversificación de sus negocios, que resulta del hecho de que el resultado negativo de un riesgo puede ser compensado por un resultado más favorable de otro riesgo, cuando esos riesgos no están completamente correlacionados.*

1. INTRODUCCIÓN

considerada en la Directiva (VaR), la diversificación en la medida de riesgo está garantizada sea cual sea el efecto, incremento o decremento, de la diversificación en los parámetros de los que depende el Modelo Estándar (ver Embrechts *et al.* (2002) [12]). Es posible que se produzca el efecto diversificación en los parámetros (por ejemplo, en la varianza) y, simultáneamente, que no se produzca este mismo efecto en la medida de riesgo, VaR, como consecuencia del incumplimiento de la hipótesis de normalidad multivariante.

Una entidad que decida estimar el SCR basándose en el Modelo Estándar ajustado a su perfil de riesgo, es decir estimando nuevos parámetros para su utilización en el modelo, deberá tener en cuenta únicamente el efecto diversificación en los parámetros, puesto que el efecto diversificación en la medida de riesgo queda garantizado por las hipótesis del Modelo Estándar.

Una entidad que decida estimar el SCR basándose en un Modelo Interno, deberá tener en cuenta tanto el efecto diversificación en parámetros como el efecto diversificación en la medida de riesgo si las hipótesis estadísticas del Modelo Interno se apartan de las del Modelo Estándar.

Aquellas entidades que pretendan estimar el SCR mediante el Modelo Estándar pueden decidir entre utilizar los parámetros establecidos por el regulador como *proxy* o realizar estimaciones de los parámetros derivadas de la propia experiencia de su cartera. Más adelante, en el siguiente capítulo, se estudiará cómo una entidad puede implementar el Modelo Estándar ajustado a su propia experiencia.

Sin embargo, como se vio al final de la subsección 1.1.1, ni Solvencia II, ni QIS-5, no dan indicaciones sobre cómo deben ser estimadas las matrices de correlación necesarias para la estimación de nuevos parámetros ajustados al perfil de riesgo de la entidad, por lo que, en este estudio de impacto, no se permiten sustituir los parámetros del Modelo Estándar correspondientes a las correlaciones. En su lugar se ofrecen unas matrices de correlación predeterminadas como *proxy* de mercado. Este hecho puede provocar que el *efecto diversificación* en los parámetros pueda ser sobrevalorado o infravalorado, y por tanto no reflejen adecuadamente el

perfil de riesgo de la entidad.

En esta tesis se propondrá una metodología para la estimación de las correlaciones entre líneas de negocio a partir de la experiencia de cada entidad aseguradora para su utilización en el cálculo del SCR del submódulo de riesgo de primas y reservas perteneciente al módulo de riesgo de suscripción no vida cuando se opte, previa autorización del regulador competente, por el uso del Modelo Estándar con parámetros específicos, o bien, por un Modelo Interno.

1.4 Objetivos y Planteamiento general

Con la finalidad de reducir la dimensión del Modelo Estándar, este trabajo se centrará en el submódulo de riesgo de primas y reservas perteneciente al módulo de riesgo de suscripción no vida tal y como se describe éste en la Directiva. El propósito básico será pues, determinar el SCR correspondiente a dicho submódulo.

Para ello, se hará uso de la fórmula¹ que determina el Modelo Estándar para el cálculo del requerimiento correspondiente a dicho submódulo en sus dos vertientes, la que utiliza los parámetros establecidos en QIS-5, y la ajustada con parámetros específicos ajustados al perfil de riesgo de la entidad, así como también a través de una modificación de la variable aleatoria implícita en el Modelo Estándar y una propuesta de Modelo Interno.

Analizada en la sección anterior la problemática de la estimación del requerimiento de capital de solvencia descrito en la Directiva de Solvencia II y definido el propósito básico de los diferentes capítulos de esta tesis, la estimación del SCR correspondiente al submódulo de riesgo de primas y reservas del módulo de riesgo de suscripción no vida, se plantean los siguientes tres objetivos.

¹En adelante nos referiremos al modelo para el cálculo del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas por *fórmula estándar*.

1. INTRODUCCIÓN

El primer objetivo es definir bajo qué hipótesis estadísticas se sustenta el Modelo Estándar para el submódulo de riesgo de primas y reservas con la finalidad de, primero, poder justificar la conveniencia o no de su utilización y, segundo, para el caso en que se quiera utilizar el Modelo Estándar con parámetros específicos, poder realizar estimaciones de los parámetros que sean consistentes con el modelo en aquellos parámetros donde ni la Directiva, ni QIS, proporciona estimadores ni metodologías para su obtención, así como para constatar que los estimadores que proporciona para algunos parámetros son consistentes con las hipótesis del modelo.

Para ello es necesario analizar el concepto de riesgo de primas y reservas y, posteriormente, desvelar qué variable aleatoria subyace en la fórmula estándar para el cálculo del SCR correspondiente a dicho submódulo de riesgo.

Basándose en las hipótesis de la fórmula estándar, se propondrá una modificación de la variable aleatoria implícita que sea más consistente con las hipótesis estadísticas subyacentes en el modelo. Será propuesta una modificación que se adecue de mejor forma a la definición dada en QIS de dicha variable aleatoria, con la finalidad de que exista una mayor consistencia entre la definición de la fórmula estándar y de la expresión que ésta toma.

El segundo objetivo es construir un Modelo Interno que sea comparable con el Modelo Estándar y compatible en cuanto a los parámetros de los que dependa.

Para lograrlo, se considerará una variable que sea representativa del riesgo de primas y reservas y que sea consistente con la definición del artículo 101 de la Directiva, es decir, que el SCR que se derive de la consideración de dicha variable tenga en cuenta la actividad existente y la actividad futura esperada.

El modelo que se propondrá estará basado en la medición del riesgo a través de una medida de riesgo, obtenida a partir de una simulación Monte Carlo de un vector de variables aleatorias, donde cada componente del vector represente el comportamiento marginal de la variable aleatoria considerada por línea de negocio. La herramienta estadística que se utilizará para realizar la simulación multivariante

será la cópula.

Para obtener una estimación del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas ajustada al perfil de riesgo mediante el Modelo Estándar, esto es, utilizando parámetros específicos, éstos habrán de ser previamente estimados. Del mismo modo, para poder obtener el SCR que se derive del Modelo Interno, los parámetros de los que dependan las cópulas deberán ser estimados.

Este es el punto de partida para el tercer objetivo que se pretende alcanzar. Como se mencionó en la sección anterior, no hay referencia alguna en la Directiva ni en QIS acerca de qué metodología debe ser utilizada para la estimación de las matrices de correlación para el Modelo Estándar en general, y en particular, las necesarias para el cálculo del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas mediante la fórmula estándar. Tampoco se presenta ningún estimador para la obtención de dichas matrices.

Así pues, el tercer objetivo consistirá en proponer un estimador con el que obtener las matrices de correlación necesarias, que sean sustituibles por aquellas que presenta el regulador como *proxy* y que, al mismo tiempo, sean consistentes con la fórmula estándar y aplicables en un Modelo Interno. Con ello se logrará cubrir en primer lugar el vacío en la Directiva y en QIS-5 acerca de cómo deben ser estimadas las correlaciones y, en segundo lugar, poder utilizar los principios que sustentan el Modelo Estándar con parámetros específicos.

1.5 Estructura de la tesis

El Capítulo 2 presenta la estructura del Modelo Estándar a partir del análisis de la variable aleatoria implícita en la fórmula para el cálculo del requerimiento de capital correspondiente al riesgo de suscripción en el negocio de no vida, con la finalidad de desvelar e interpretar los parámetros e hipótesis críticas que afecten significativamente a dicho cálculo y de mejorar la comprensión del modelo y las

1. INTRODUCCIÓN

implicaciones en su utilización.

En el Capítulo 2 también se discuten las posibles limitaciones del Modelo Estándar, y se propone una modificación de la variable aleatoria considerada en el modelo que salve estas limitaciones.

En el Capítulo 3 se plantea y desarrolla un Modelo Interno partiendo de la definición de una variable aleatoria que sea representativa del riesgo de primas y reservas. Para ello se considera la predicción del resultado técnico por línea de negocio para el ejercicio en vigor. Se propone un modelo basado en la agregación de variables aleatorias mediante la utilización de cópulas. El objetivo es obtener una cuantía a través de la estimación de una medida de riesgo proveniente de la simulación de un vector de variables aleatorias que refleje el comportamiento estadístico de la variable riesgo de primas y reservas por línea de negocio, que pueda ser entendida como capital de solvencia.

Queda patente en los capítulos anteriores que una de las claves para la obtención del SCR es la determinación de los parámetros de los que dependen los modelos, especialmente la determinación de la estructura de dependencia (cópulas) entre variables aleatorias, así como las medidas de dependencia (correlación¹). Este es el objetivo del Capítulo 4.

Existe un cierto consenso en que las matrices de correlación presentadas en Solvencia II (también en QIS) han sido obtenidas en base al *juicio experto* del regulador. Hay argumentos para pensar que estas *proxy* de mercado tienen un carácter conservador.

En primer lugar, son únicas para todo el ámbito de aplicación geográfico de Solvencia II. Este hecho conduce a preguntarse si la relación que existe entre variables aleatorias es independiente del área geográfica, o si de modo contrario, existen

¹El término correlación aquí es utilizado en sentido amplio para referirse a la dependencia o asociación entre variables aleatorias. En el caso de que en este trabajo sea necesario referirse a algún tipo de correlación en particular, se hará mención explícita.

factores que sean específicos de determinadas regiones o estados que afecten de forma distinta a la relación entre variables aleatorias que representen riesgos. En segundo lugar, observando las matrices de correlación que se han ido presentando a lo largo de los distintos QIS, parece ser que el regulador haya adoptado un criterio cualitativo en la estimación de correlaciones. Parece que el criterio seguido por el regulador es el de asignar un valor al coeficiente de correlación entre dos variables que se corresponda con una calificación de la relación existente entre ambas de tipo cualitativo: correlación nula, baja, media o alta, y que a lo largo de los distintos estudios de impacto cuantitativo se haya cambiado el valor asignado a cada una.

Una ventaja que se puede atribuir a las matrices de correlación presentadas en Solvencia II es que están dotadas de cierto grado de estabilidad en el tiempo. El hecho de que vengan impuestas en la Directiva y de que los coeficientes oscilen entre cuatro valores, (0; 0,25; 0,50; 0,75), hace que, incluso a lo largo de distintos estudios QIS, las matrices no hayan variado significativamente.

Así pues, el Capítulo 4 se dedica al estudio de cómo pueden ser estimadas las correlaciones a efectos de utilización en un modelo, bien el Modelo Estándar o un Modelo Interno, para la estimación del SCR. Partiendo de la definición de variable aleatoria implícita en el modelo de referencia para el cálculo del SCR, se presenta qué metodologías podrían ser utilizadas para estimar dichas correlaciones. En primer lugar, se adopta un enfoque basado en la estimación a partir de datos históricos. Este enfoque es puramente cuantitativo, y se contraponen al que al parecer ha adoptado el regulador. Una desventaja de este método, es que se necesita una base de datos suficientemente extensa para que los resultados sean representativos de la relación existente entre dos variables aleatorias cualesquiera. Además, este método es altamente sensible a los valores que tomen las variables, lo que puede provocar cambios significativos entre las matrices a medida que incorporamos nuevos datos a la serie y se reestima la matriz.

Por último, como solución alternativa, se introduce la metodología bayesiana en la estimación de la matriz de correlación. La metodología bayesiana permite obtener estimaciones que incorporen información *a priori* e información empírica,

1. INTRODUCCIÓN

así como la obtención de estimaciones a partir de otras estimaciones provenientes de distintos estudios. En estadística bayesiana, se consideran los parámetros de una distribución como variables aleatorias con una cierta función de densidad. En el caso que nos ocupa, consideraremos el coeficiente de correlación como una variable aleatoria y se asumirá una distribución de probabilidad para ella. Haciendo hipótesis sobre la variabilidad de la información *a priori* y empírica, obtendremos una nueva estimación (bayesiana o *a posteriori*) para el coeficiente de correlación.

Como información *a priori*, se considerará la matriz que presenta el regulador como *proxy*, y como información empírica, las estimaciones históricas que se hayan obtenido procedentes de la base de datos. El resultado será una estimación de la matriz de correlación que incorpore las dos fuentes de información, la cualitativa y la cuantitativa.

Finalmente, en el Capítulo 5 se recogen las conclusiones que se obtienen tras realizar todo el análisis expuesto en los capítulos precedentes, y se presentan las futuras líneas de trabajo que se consideran interesantes para el desarrollo de Modelos Internos en el marco de Solvencia II.

Se piensa que lo justo es lo igual, y así es; pero no para todos, sino para los iguales.

Aristóteles

CAPÍTULO

2

El Modelo Estándar

2.1 El Modelo Estándar en QIS

El objetivo de este capítulo es analizar el modelo para el riesgo de primas y reservas no vida presentado en QIS-5, y que se presume que es el desarrollo de aquél al que las normas de Solvencia II se refiere. En primer lugar se describe brevemente el Modelo Estándar para el cómputo de los requerimientos de capital totales siguiendo la notación propuesta en QIS-5, y posteriormente será desarrollado el modelo para el submódulo de riesgo de primas y reservas, objeto del análisis de esta tesis.

Como vimos en el capítulo anterior, el cálculo del SCR está basado en la agregación de los requerimientos de capital correspondientes a los distintos módulos y submódulos de riesgo teniendo en cuenta las correlaciones existentes entre ellos, asumiendo que las variables aleatorias que representan los riesgos considerados en la Directiva se distribuyen mediante una distribución normal multivariante centrada en cero.

Los riesgos considerados son el riesgo de mercado, crédito, suscripción vida, suscripción no vida, suscripción salud, activos intangibles y riesgo operacional. El SCR total es obtenido a través de la suma del capital básico de solvencia (*BSCR*),

2. EL MODELO ESTÁNDAR

más un término que refleja la capacidad de absorción de pérdidas e impuestos diferidos de las provisiones técnicas (Adj), y el requerimiento de capital de solvencia correspondiente al riesgo operacional¹ ($SCR_{operacional}$).

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{operacional} \quad (2.1)$$

El $BSCR$ se corresponde con la agregación de los diversos requerimientos de capital de cada uno de los riesgos que son considerados en el $BSCR$, teniendo en cuenta la relación existente entre las variables aleatorias que los representan a través del coeficiente de correlación lineal.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{\forall i,j} \rho_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intangibles} \quad (2.2)$$

El primer sumando de la ecuación (2.2) se corresponde con la ecuación (1.1) del capítulo anterior. Cada requerimiento de capital del primer sumando de (2.2) es obtenido a través del valor en riesgo de la variable aleatoria correspondiente al riesgo considerado y, además, bajo la hipótesis de normalidad multivariante centrada en cero.

El segundo sumando de la ecuación (2.2) se corresponde con el requerimiento de capital de los activos intangibles.

En la ecuación (2.2), ρ_{ij} es el coeficiente de correlación lineal entre cada par de variables aleatorias correspondientes a los riesgos asociados. Bajo la hipótesis acerca de la distribución del vector de variables aleatorias que representan los riesgos considerados, el coeficiente de correlación lineal produce una correcta agregación, tanto de las variables aleatorias, como de sus cuantiles.

De las anteriores dos expresiones (2.1) y (2.2) y bajo la hipótesis de normalidad se desprende que, tanto el riesgo operacional como el riesgo correspondiente a activos intangibles son independientes del $BSCR$ y del resto de riesgos considerados,

¹Ver Figura 1.1

respectivamente.

A continuación, en la siguiente sección se presenta el desarrollo del Modelo Estándar para la obtención del SCR correspondiente al riesgo de suscripción no vida, según el modelo propuesto en QIS-5.

2.1.1 SCR suscripción no vida

En cada uno de los módulos de riesgo mencionados en el apartado anterior se tienen en cuenta diversos subniveles o submódulos. En particular, para el cálculo del requerimiento de capital correspondiente al riesgo de suscripción en no vida deben tenerse en cuenta tres submódulos, el riesgo de primas y reservas (NL_{pr}), el riesgo de caída de cartera (NL_{des}) y el riesgo catástrofe (NL_{cat}).

El riesgo de primas y reservas (NL_{pr}) es el riesgo de que el volumen de primas y/o reservas no sea suficiente para atender los compromisos adquiridos, bien sea por inadecuación en las hipótesis de tarificación, o por fluctuaciones inesperadas de la siniestralidad. El riesgo de caída de cartera (NL_{des}) debe cubrir los desajustes que se produzcan en la cartera como consecuencia del ejercicio de opciones implícitas en los contratos que supongan la rescisión o prórroga de las obligaciones que se deriven de los contratos. El requisito de capital correspondiente al riesgo de catástrofe (NL_{cat}) debe ser suficiente para cubrir pérdidas extremas inesperadas derivadas de eventos consecuencia de fenómenos naturales y/o provocados por acciones humanas. El requerimiento de capital de solvencia para el riesgo de suscripción no vida (SCR_{NV}) debe ser obtenido a través de la siguiente ecuación:

$$SCR_{NV} = \sqrt{\sum_{\forall k,l} \rho_{kl} \cdot SCR_{NL_k} \cdot SCR_{NL_l}} \quad (2.3)$$

En la ecuación (2.3) SCR_{NL_k} , SCR_{NL_l} , representan los requerimientos de capital correspondientes a NL_{pr} , NL_{des} y NL_{cat} , y ρ_{kl} el coeficiente de correlación

2. EL MODELO ESTÁNDAR

lineal entre las variables aleatorias que representan cada uno de estos riesgos.

De nuevo, y como ya se señalaba anteriormente, el requerimiento de capital es obtenido mediante la agregación de los requerimientos de capital de los distintos riesgos, y bajo las mismas hipótesis que son consideradas para la obtención del SCR vistas en (1.1).

Aunque la Directiva no menciona a qué nivel de detalle deben ser calculados los requerimientos de capital correspondientes al riesgo de suscripción, QIS-5 exige que el submódulo de riesgo de primas y reservas sea obtenido, tanto el correspondiente a vida como el de no vida y salud, teniendo en cuenta un nivel de detalle correspondiente a, como mínimo, una segmentación por líneas de negocio.

2.1.2 El riesgo de primas y reservas no vida en QIS

En esta subsección se analiza el riesgo objeto de esta tesis, el riesgo de primas y reservas. El objetivo de esta sección es analizar el modelo estadístico que es asumido en la fórmula de cálculo del requerimiento de capital correspondiente a este riesgo.

Este submódulo de riesgo combina el tratamiento de dos fuentes de riesgo de suscripción no vida, el riesgo de prima y el riesgo de reserva.

El apartado segundo del artículo 105 de la Directiva presenta una definición de qué debe comprender el riesgo de suscripción:

El módulo de riesgo de suscripción del seguro no de vida reflejará el riesgo derivado de obligaciones de seguro no de vida, atendiendo a los siniestros cubiertos y los procesos seguidos en el ejercicio de la actividad. En él, se tendrá en cuenta la incertidumbre de los resultados de las empresas de seguros y de reaseguros en relación con las obligaciones de seguro y de reaseguro vigentes y las nuevas actividades que se espere realizar en los siguientes doce meses. Se calculará, [. . .], como

una combinación del capital obligatorio correspondiente a al menos los siguientes submódulos:

- 1. riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de los pasivos por seguros, debido a fluctuaciones en relación con el momento de ocurrencia, la frecuencia y gravedad de los sucesos asegurados, y el momento e importe de la liquidación de siniestros (riesgo de prima y de reserva en los seguros no de vida);*
- 2. riesgo de pérdida o de modificación adversa del valor de los pasivos por seguros, debido a una notable incertidumbre en las hipótesis de tarificación y constitución de provisiones correspondientes a sucesos extremos o excepcionales (riesgo de catástrofe en los seguros no de vida).*

Más explícitamente, QIS-5 define el riesgo de prima y reserva como:

- 1. El riesgo de prima es el resultante de la fluctuación en el vencimiento, frecuencia y severidad de los eventos asegurados. El riesgo de prima incluye el riesgo de que las provisiones por primas [no consumidas] no sean suficientes para atender las reclamaciones o necesiten ser incrementadas.*
- 2. El riesgo de reservas es el resultante de la fluctuación en vencimientos y cuantías de las liquidaciones de reclamaciones.*

Tal y como define la Directiva el riesgo de primas y reservas, este debe tener cuenta la incertidumbre en los resultados de las empresas de seguro. A continuación, por tanto, se define la relación que existe entre el riesgo de primas y reservas y el resultado de las empresas de seguros. El resultado técnico al final del ejercicio puede ser definido de la siguiente manera:

Definición 1 *Resultado técnico al final del ejercicio. El beneficio o pérdida al final de un ejercicio.*

El *Resultado técnico al final del ejercicio* depende de los ingresos y gastos derivados de la actividad que desarrolla una entidad a lo largo del ejercicio. Dichos

2. EL MODELO ESTÁNDAR

ingresos y gastos vienen determinados en la *Cuenta Técnica de Perdidas y Ganancias* de una entidad.

Las principales partidas de ingresos vienen dadas por la suscripción de primas, si bien pueden haber resultados positivos derivados de inversiones. En el desarrollo del modelo del riesgo que nos ocupa no consideraremos este último tipo de ingresos dado que se considera que queda incluido en el módulo de riesgo de mercado.

Del mismo modo, las principales partidas de gastos vienen determinadas por los pagos por siniestralidad y los gastos afectos a ésta, incluyendo la siniestralidad del ejercicio y la derivada de ejercicios anteriores.

En la *Cuenta Técnica de Perdidas y Ganancias* también son tenidos en cuenta el resultado neto del reaseguro cedido y aceptado, y las variaciones en la valoración de mercado de los activos de la compañía. De nuevo, al igual que en el caso de los ingresos derivados de inversiones, tampoco se consideran las plus(minus)valías de activos, ni el efecto del reaseguro.

En estos términos, del modo en que lo hizo Gisler (2009) [21], podemos definir una expresión para el *Resultado técnico al final del ejercicio*, R_t , a partir de las siguientes variables $X_t = \{x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}\}$, donde cada componente $x_{i,t}, i = \{1, 2, 3, 4\}$ del vector de variables aleatorias X_t representa las siguientes magnitudes:

1. $x_{1,t}$, ingresos por primas netas de reaseguro al final del ejercicio t .
2. $x_{2,t}$, pagos por siniestralidad del ejercicio t neta de reaseguro al final del ejercicio t .
3. $x_{3,t}$, volumen de gastos totales al final del ejercicio t .
4. $x_{4,t}$, variación de la cuenta de provisiones por siniestros pendientes de liquidación de ejercicios anteriores a t , al final del ejercicio t .

2.1 El Modelo Estándar en QIS

El resultado técnico a final del ejercicio queda expresado en función de las componentes $x_{i,t}$, $i = \{1, 2, 3, 4.\}$ del modo definido en la ecuación (2.4). Estas componentes pueden ser obtenidas a partir de la información contenida en el estado contable referente a la cuenta de resultados de las entidades.

$$R_t = x_{1,t} - x_{2,t} - x_{3,t} - x_{4,t}. \quad (2.4)$$

Si bien las componentes $x_{i,t}$, $i = \{1, 2, 3, 4.\}$ tienen una definición clara, es conveniente realizar un inciso sobre la definición de la componente $x_{4,t}$.

En la *Cuenta Técnica de Perdidas y Ganancias* los pagos por siniestralidad de ejercicios anteriores $x_{4,t}$ se realiza con cargo a la cuenta de provisiones para siniestros pendientes de liquidación. Al final del ejercicio la posición de esta cuenta de balance refleja una variación con respecto a la posición al inicio del ejercicio. La variable $x_{4,t}$ se define, pues, como la variación en la cuenta de provisiones. Entonces,

$$x_{4,t} = PT^{01-01-t} - PT^{31-12-t}. \quad (2.5)$$

En la ecuación (2.5), $PT^{01-01-t}$ representa la cuenta de provisiones para siniestros pendientes de liquidación al inicio del ejercicio t . Es la mejor estimación (*best estimate*) de los pagos futuros pendientes derivados de siniestros producidos anteriormente al ejercicio t . A lo largo del ejercicio se producen pagos por siniestralidad con cargo a esta cuenta. Al final del ejercicio t se obtiene la nueva posición de la cuenta como el *best estimate* para el ejercicio siguiente, $PT^{31-12-t}$. La ecuación (2.4) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} R_t &= x_{1,t} - x_{2,t} - x_{3,t} - x_{4,t} = \\ &= x_{1,t} - x_{2,t} - E[x_{2,t}] + E[x_{2,t}] - x_{3,t} - x_{4,t}. \\ R_t &\simeq E[(x_{1,t} - E[x_{2,t}] - x_{3,t})] - (x_{2,t} - E[x_{2,t}]) - x_{4,t}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El paso de la ecuación (2.4) a (2.6) se realiza asumiendo que el valor esperado del volumen de primas netas de reaseguro, $x_{1,t}$ y el total de gastos, $x_{3,t}$ pueden ser

2. EL MODELO ESTÁNDAR

sustituidos por los valores correspondientes a sus respectivos volúmenes, y que el valor esperado de la variación de la cuenta de provisiones, $E[x_{4,t}]$, es nulo, es decir, la provisión a final del ejercicio coincide con el *best estimate* realizado al inicio del ejercicio.

Bajo estas condiciones el *Resultado técnico al final del ejercicio* tiene tres componentes.

1. El resultado técnico esperado al final del ejercicio, $E[(x_{1,t} - E[x_{2,t}] - x_{3,t})]$.
2. La desviación en la siniestralidad al final del ejercicio respecto de su valor esperado, $(x_{2,t} - E[x_{2,t}])$.
3. La variación de la cuenta de provisiones por siniestros pendientes de liquidación de ejercicios anteriores a t , al final del ejercicio t , $x_{4,t}$.

La segunda componente de la variable *Resultado técnico al final del ejercicio*, $(x_{2,t} - E[x_{2,t}])$, es lo que la Directiva (y QIS) establece como riesgo de prima, es decir, la fluctuación en el vencimiento, frecuencia y severidad de los eventos asegurados.

La tercera componente de la variable *Resultado técnico al final del ejercicio*, $-x_{4,t}$, es lo que la Directiva (y QIS) establece como riesgo de reserva, es decir, la fluctuación en vencimientos y cuantías de las liquidaciones de reclamaciones.

Por tanto, para modelizar el riesgo de primas y reservas es necesario definir previamente dos variables aleatorias que representen respectivamente las componentes segunda y tercera del *Resultado técnico al final del ejercicio*.

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

A lo largo de toda la Directiva puede ser observado que, a excepción del riesgo de primas y reservas, los distintos requerimientos de capital correspondientes a ca-

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

da módulo y submódulo son obtenidos asumiendo una hipótesis de normalidad en cuanto a las variables aleatorias que representan los riesgos se refiere.

El riesgo de primas y reservas no vida asume que la hipótesis acerca de la distribución de la variable aleatoria implícita que representa dicho riesgo es lognormal.

A continuación se analiza el modelo que se presenta en QIS-5 para la obtención del requerimiento de capital correspondiente a este riesgo.

2.2.1 El SCR del riesgo de primas y reservas no vida

Según QIS-5, el SCR correspondiente al submódulo de riesgo de primas y reservas (NL_{pr}) es obtenido mediante el producto de dos componentes. Por una parte, una medida de volumen denominada V , y por otra parte, una aproximación al VaR calculado con un nivel de confianza del 99.5 % a un horizonte temporal anual, $\rho(\sigma)$, asumiendo que la variable aleatoria implícita se distribuye lognormalmente.

$$NL_{pr} = V \cdot \rho(\sigma). \quad (2.7)$$

La medida de volumen representa la agregación de diversas medidas de volumen, cada una de ellas perteneciente a una línea de negocio, $V_i, i = \{1, 2, \dots, d\}$.

$$V = \sum_{i=1}^d V_i. \quad (2.8)$$

Cada V_i es obtenida teniendo en cuenta dos medidas de volumen adicionales, una que representa el volumen de primas netas de reaseguro, suscritas o ingresadas, por línea de negocio en el momento del tiempo t ($P_{t,i}$), y otra que representa el volumen de provisiones técnicas (*best estimate*) en el momento del tiempo t ($R_{t,i}$) por línea de negocio, así como un factor corrector por diversificación geográfica que tiene en cuenta el número de distintas zonas geográficas, $j = \{1, 2, \dots, m\}$.

2. EL MODELO ESTÁNDAR

$$V_i = \max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\} + \sum_{j=1}^m R_{t,i,j} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} D_i \right), \quad (2.9)$$

donde D_i es el coeficiente por diversificación geográfica definido como

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^m \max \left\{ \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t-1,i,j}^{written}, \sum_{j=1}^m P_{t,i,j}^{earned} \right\} \right)^2}. \quad (2.10)$$

El interés de la formula estándar para el cálculo del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas reside en el análisis de la variable aleatoria implícita en la expresión $\rho(\sigma)$. El parámetro del que depende dicha expresión, σ , es conocido como *desviación estándar combinada*. A continuación se desarrolla dicha expresión.

Para cualquier variable aleatoria lognormal $Y \sim \log(\mu_y, \sigma_y^2)$ la función generadora de momentos es,

$$E[Y^k] = e^{k \cdot \mu_x + k^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{2}},$$

siendo $Y = e^X$, $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, μ_y y σ_y^2 el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria Y , respectivamente y, μ_x y σ_x^2 el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria X , respectivamente.

Sea una variable aleatoria lognormal Y tal que su valor esperado es $E[Y] = \mu_y$ y su varianza $V[Y] = \sigma_y^2$.

El coeficiente de variación de la variable aleatoria Y , $CoVa[Y]$, se define como el cociente $\frac{D[Y]}{E[Y]}$, siendo $D[Y] = \sigma_y$ la desviación estándar de Y .

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

Haciendo uso de la función generadora de momentos de una variable aleatoria lognormal, el valor esperado y la varianza de Y son:

$$E[Y] = e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}}$$

y

$$V[Y] = e^{2\mu_x + \sigma_x^2} \cdot (e^{\sigma_x^2} - 1),$$

respectivamente.

De este modo, el coeficiente de variación al cuadrado es,

$$CoVa^2[Y] = \frac{V[Y]}{E^2[Y]} = \frac{e^{2\mu_x + \sigma_x^2} \cdot (e^{\sigma_x^2} - 1)}{(e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}})^2} = e^{\sigma_x^2} - 1.$$

La desviación estándar de la variable X puede ser expresada en términos del coeficiente de variación de la variable Y :

$$\sigma_x = \sqrt{\log(CoVa^2[Y]) + 1}.$$

Asimismo el valor esperado de la variable X puede ser expresado en términos de la variable aleatoria Y :

$$E[Y] = e^{\mu_x + \frac{(\sqrt{\log(CoVa^2[Y]) + 1})^2}{2}}$$

$$\log(E[Y]) = \mu_x + \frac{(\sqrt{\log(CoVa^2[Y]) + 1})^2}{2}.$$

Despejando el término μ_y se obtiene,

$$\begin{aligned} \mu_x &= \log(E[Y]) - \frac{(\sqrt{\log(CoVa^2[Y]) + 1})^2}{2} = \\ &= \log(E[Y]) - \frac{1}{2} \log(CoVa^2[Y] + 1) = \end{aligned}$$

2. EL MODELO ESTÁNDAR

$$\log(E[Y]) - (\log(\text{CoVa}^2[Y]) + 1)^{\frac{1}{2}} = \log\left(\frac{E[Y]}{\sqrt{\text{CoVa}^2[Y] + 1}}\right).$$

El Mean value-at-risk¹ (Mean-VaR) de una variable aleatoria lognormal, Y , se define $\text{VaR}_\alpha[Y] - E[Y] = e^{\mu_x + z_\alpha \cdot \sigma_x} - E[Y]$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Mean-VaR}[Y] &= e^{\log\left(\frac{E[Y]}{\sqrt{\text{CoVa}^2[Y] + 1}}\right) + z_\alpha \cdot \sqrt{\log(\text{CoVa}^2[Y] + 1)}} - E[Y] = \\ &= e^{\log\left(\frac{E[Y]}{\sqrt{\text{CoVa}^2[Y] + 1}}\right)} \cdot e^{z_\alpha \cdot \sqrt{\log(\text{CoVa}^2[Y] + 1)}} - E[Y] = \\ &= \left(\frac{E[Y]}{\sqrt{\text{CoVa}^2[Y] + 1}}\right) \cdot e^{z_\alpha \cdot \sqrt{\log(\text{CoVa}^2[Y] + 1)}} - E[Y] = \\ &= E[Y] \cdot \left(\frac{e^{z_\alpha \cdot \sqrt{\log(\text{CoVa}^2[Y] + 1)}}}{\sqrt{\text{CoVa}^2[Y] + 1}} - 1\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) se corresponde con la expresión que QIS-5 da para la aproximación del valor en riesgo $\rho(\sigma)$ bajo las siguientes hipótesis:

1. La variable aleatoria subyacente en el modelo es lognormal.
2. El valor esperado de la variable aleatoria subyacente en el modelo es uno.
3. El parámetro *desviación estándar combinada* del modelo coincide con el coeficiente de variación al cuadrado de la misma variable aleatoria.
4. La aproximación al valor en riesgo al que QIS-5 se refiere con la definición de $\rho(\sigma)$ es en realidad el Mean value-at-risk bajo las tres hipótesis anteriores, es decir,

¹El Mean value-at-risk para cualquier variable aleatoria se define como la diferencia entre el valor en riesgo de una variable aleatoria y su valor esperado.

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

$$\rho(\sigma) = \left(\frac{e^{z_\alpha \cdot \sqrt{\log(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{\sigma^2+1}} - 1 \right). \quad (2.12)$$

En la ecuación (2.12) el parámetro σ es conocido en QIS-5 como *desviación estándar combinada*. El término *combinada* proviene de la manera en que la variable aleatoria de la que procede este parámetro es obtenida, esto es combinando dos variables, una que representa el riesgo de primas y otra que refleja el riesgo de reservas. Además esta variable aleatoria ha de reflejar el comportamiento conjunto de las diversas líneas de negocio.

Por tanto, para definir la variable implícita¹ en $\rho(\sigma)$ es necesario tener en cuenta que ésta ha de representar adecuadamente el riesgo de primas y reservas, con un nivel de detalle de, al menos, el correspondiente al análisis por línea de negocio.

Suponemos que es conocida la variable aleatoria que representa el riesgo de primas por línea negocio U_i , y la variable aleatoria que representa el riesgo de reservas por línea de negocio, W_i , para un cierto número d de líneas de negocio, $i = \{1, 2, \dots, d\}$.

Gisler (2009) [21] definió la variable aleatoria relevante, Z_i , como una mixtura de las variables aleatorias U_i y W_i ponderadas por unas medidas de volumen utilizadas para obtener la medida de volumen presentada en (2.8), P_i y R_i , que permite representar el comportamiento agregado de primas y reservas por línea de negocio.

$$Z_i = \frac{U_i \cdot P_i + W_i \cdot R_i}{P_i + R_i}. \quad (2.13)$$

Si se pretendiera obtener una variable aleatoria, Z , que representase el riesgo de primas y reservas y que tuviese en cuenta el comportamiento agregado de las líneas de negocio, una manera de obtenerla sería a través de una mixtura de las variables Z_i donde las ponderaciones fueran una medida de volumen que tuviese en

¹Por simplicidad se elimina el subíndice que hace referencia al momento temporal y a la zona geográfica.

2. EL MODELO ESTÁNDAR

cuenta tanto las primas como las reservas por línea de negocio, como por ejemplo $S_i = P_i + R_i$, esto es:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^d Z_i \cdot S_i}{\sum_{i=1}^d S_i}. \quad (2.14)$$

La desviación típica de Z , $D[Z] = \sigma_Z$, resultaría en,

$$\sigma_Z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_{Z_i} \cdot S_i \cdot \sigma_{Z_j} \cdot S_j \cdot \rho_{Z_i Z_j}}{\left(\sum_{i=1}^d S_i\right)^2}}. \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) depende de las desviaciones típicas de las variables aleatorias Z_i y del coeficiente de correlación lineal, $\rho_{Z_i Z_j}$, entre cada par Z_i, Z_j .

Las desviaciones típicas σ_{Z_i} pueden ser obtenidas a través de (2.13).

$$\sigma_{Z_i} = \sqrt{\frac{\sigma_{U_i}^2 \cdot P_i^2 + \sigma_{W_i}^2 \cdot R_i^2 + 2 \cdot \rho_{U_i W_i} \cdot \sigma_{U_i} \cdot \sigma_{W_i} \cdot P_i \cdot R_i}{(P_i + R_i)^2}}. \quad (2.16)$$

En (2.16) aparece la varianza de las primas por línea de negocio, $V[U_i] = \sigma_{U_i}^2$, la varianza por línea de negocio de la reserva, $V[W_i] = \sigma_{W_i}^2$ y el coeficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias U_i y W_i , $\rho_{U_i W_i}$.

A pesar de que en QIS-5 no se hace referencia a cual es la variable aleatoria implícita en $\rho(\sigma)$ y sólo se menciona la distribución a la que pertenece, la metodología de obtención de la *combinación estándar combinada*, σ presentada en QIS-5 se corresponde con las ecuaciones (2.16) y (2.15), por lo que se puede presumir que la variable aleatoria lognormal a la que QIS-5 se refiere es la definida en (2.14), y que la desviación típica obtenida en (2.15) se corresponde con el parámetro *desviación estándar combinada* y, para guardar consistencia con (2.12), ha de coincidir con el coeficiente de variación de la propia variable aleatoria Z .

Sin embargo, para poder definir (2.14) previamente se ha asumido conocidas dos variables aleatorias, una que representa el riesgo de primas por línea de negocio, U_i , y otra que representa el riesgo de reserva por línea de negocio, W_i , de las que surgen sus respectivas varianzas $\sigma_{U_i}^2$ y $\sigma_{W_i}^2$ necesarias para poder obtener las

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

desviaciones estándar por línea de negocio definidas en (2.16).

Los valores que toman $\sigma_{U_i}^2$ y $\sigma_{W_i}^2$, así como las matrices de correlación que contienen los coeficientes $\rho_{Z_i Z_j}$ y $\rho_{U_i W_j}$ vienen dados en QIS-5 como *proxy* de mercado. No obstante, QIS-5 permite que en el caso de las varianzas $\sigma_{U_i}^2$ y $\sigma_{W_i}^2$, los valores predeterminados puedan ser sustituidos por valores propios que reflejen de manera más adecuada el perfil de riesgo de la entidad aseguradora.

Aunque directamente no se hace mención a cómo se definen las variables aleatorias que representan U_i y W_i , QIS-5 sí presenta diversas metodologías¹ para que puedan ser derivadas sus respectivas varianzas. A partir de cómo se definen los modelos implícitos en las metodologías para la obtención de las varianzas de U_i y W_i , a pesar de que no es asumida ninguna distribución de probabilidad para ninguna de las dos variables aleatorias, puede ser inferido que, mientras U_i se refiere a una variable que representa el riesgo de primas por línea de negocio, W_i se refiere a una variable que representa el riesgo de reservas por línea de negocio, ambas definidas en las componentes segunda y tercera de la ecuación (2.6).

En la siguiente sección se analizará qué expresiones explícitas son utilizadas para modelizar las variables U_i y W_i bajo la fórmula estándar.

De modo contrario a como sucede en el caso de las varianzas de las variables U_i y W_i , QIS-5 no define ninguna metodología ni estimador para la obtención de las matrices de correlación que contienen los coeficientes $\rho_{Z_i Z_j}$ y $\rho_{U_i W_j}$. Al final del capítulo se analizarán las razones.

2.2.2 Limitaciones del diseño de la fórmula estándar

La hipótesis básica de la fórmula estándar para el cálculo del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas es que la variable aleatoria implícita en el modelo se

¹En el Anexo se presenta la Metodología I para la obtención de los parámetros específicos de la entidad correspondientes a la desviación estándar del riesgo de primas y reservas.

2. EL MODELO ESTÁNDAR

distribuye lognormalmente.

En la ecuación (2.12), que representa la aproximación al valor en riesgo de la variable aleatoria implícita en el modelo, hemos asumido que esta tiene un valor esperado unitario y una varianza determinada. Se puede afirmar que si se acepta que la variable aleatoria definida en (2.14), Z , es la subyacente en el modelo, el valor esperado $E[Z] = 1$ y que el parámetro *desviación estándar combinada* se corresponde con $CoVa_Z$, siendo $CoVa_Z$ el coeficiente de variación de Z .

Admitiendo que las variables aleatorias U_i y W_i de las que depende la variable Z_i (y por ende, la variable Z) representan respectivamente el *loss ratio* por línea de negocio y el *reserve ratio* por línea de negocio, podemos definir matemáticamente las expresiones de U_i y W_i , y comprobar si la variable Z se adecua a las hipótesis asumidas en la ecuación (2.12).

Definición 2 *'Loss ratio' por línea de negocio.* Sea la variable aleatoria $U_i = \left(\frac{N}{E[N]}\right)_i$, $i = \{1, 2, \dots, d.\}$ el *loss ratio* de la línea de negocio i -ésima, siendo N la variable aleatoria siniestralidad neta de reaseguro y $E[N]$ su valor esperado.

Definición 3 *'Reserve ratio' por línea de negocio.* Sea la variable aleatoria $W_i = \left(\frac{M}{E[M]}\right)_i$, $i = \{1, 2, \dots, d.\}$ el *reserve ratio* de la línea de negocio i -ésima, siendo M la variable aleatoria que representa la reserva a 31-12-XX y $E[M]$ el *best estimate* de la reserva o reserva a 01-01-XX.

Fácilmente puede ser comprobado que los valores esperados y las varianzas de U_i y W_i son $E[U_i] = 1$, $E[W_i] = 1$, $V[U_i] = \sigma_{U_i}^2 = CoVa_{N_i}^2$ y $V[W_i] = \sigma_{W_i}^2 = CoVa_{M_i}^2$.

Con esta información se puede verificar que el valor esperado $E[Z_i] = 1$ y que la ecuación (2.16) que se corresponde con la varianza de Z_i puede ser reescrita en términos de la suma de los productos cruzados de los coeficientes de variación $CoVa_{N_i}$ y $CoVa_{M_i}$ ponderados por las medidas de volumen correspondientes, y además coincide con el coeficiente de variación de Z_i , $CoVa_{Z_i}$.

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

$$CoVa_{Z_i} = \sqrt{\frac{CoVa_{N_i}^2 \cdot P_i^2 + CoVa_{M_i}^2 \cdot R_i^2 + 2 \cdot \rho_{U_i W_i} \cdot CoVa_{N_i} \cdot CoVa_{M_i} \cdot P_i \cdot R_i}{(P_i + R_i)^2}} \quad (2.17)$$

Queda patente que la definición de la variable aleatoria Z es compatible con las hipótesis de partida de la ecuación (2.12), pues de igual forma que en el caso expuesto para la variable Z_i pueden ser verificados el valor esperado $E[Z] = 1$ y la varianza $V[Z] = \sigma_Z^2 = CoVa_Z^2$.

No obstante, se identifican dos claras limitaciones en la definición de la variable aleatoria implícita en el modelo, Z . La primera limitación puede repercutir en una infraestimación del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas.

La construcción de la variable aleatoria definida en la ecuación (2.13) es una combinación de dos variables aleatorias ponderada por sus respectivas medidas de volumen. Sin embargo, estas dos variables mantienen un vínculo. Mientras que U_i representa la siniestralidad experimentada, W_i representa de algún modo la provisión para la parte de siniestralidad definida en U_i pendiente de liquidación.

El hecho de utilizar las medidas de volumen referentes a la siniestralidad y a las provisiones como ponderaciones para definir la variable Z_i puede provocar una distorsión en la variabilidad de Z_i . Supongamos que en un momento del tiempo una entidad en funcionamiento deja de suscribir una determinada línea de negocio, i . En dicho caso la medida de volumen correspondiente a dicha línea de negocio al inicio del periodo siguiente, P_i , sería cero.

Sin embargo, dejar de suscribir una determinada línea de negocio no eliminaría totalmente el riesgo soportado por la entidad en dicha línea de negocio. La entidad continuaría expuesta al riesgo de reserva derivado de siniestros pendientes de liquidación y/o declaración en el momento en que se dejó de suscribir nuevo negocio.

Esto provocaría que la varianza de Z_i , σ_{Z_i} , definida en la ecuación (2.16), pudiese ser infraestimada como consecuencia de la pérdida de la información contenida

2. EL MODELO ESTÁNDAR

en la correlación entre las variables U_i y W_i . Para clarificar este hecho, supongamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.

Una entidad en funcionamiento sólo opera en una línea de negocio, i . Al inicio de un ejercicio t presentaba los siguientes valores basados en diez años de experiencia $P_i = 7$, $R_i = 7$, $\sigma_{U_i} = 9$ y $\sigma_{W_i} = 6$. La correlación entre las variables U_i y W_i es 0,5. La varianza de la variable Z_i para esta compañía al inicio del ejercicio t , σ_{Z_i} , sería:

$$\sigma_{Z_i,t} = \sqrt{\frac{9^2 \cdot 7^2 + 6^2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7}{(7 + 7)^2}} = 6. \quad (2.18)$$

Dado que la entidad solamente opera en una línea de negocio, la varianza de Z coincide con la de Z_i . Supóngase ahora que en algún momento posterior al inicio del ejercicio t la entidad deja de suscribir¹ nuevo negocio de la línea i , por lo que a partir de dicho momento $P_i = 0$. Además, al inicio del siguiente periodo, $t + 1$, a pesar de tener una observación más en el histórico, por simplicidad, supóngase también que el resto de valores se mantienen constantes. Al inicio del ejercicio $t + 1$, la varianza de Z_i para esta compañía vendría dada por:

$$\sigma_{Z_i,t+1} = \sqrt{\frac{9^2 \cdot 0 + 6^2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 0 \cdot 7}{(0 + 7)^2}} = 6. \quad (2.19)$$

Al inicio del ejercicio $t + 1$ la compañía dejaría de estar expuesta al riesgo de primas por el hecho de haber dejado de suscribir nuevo negocio, hecho reflejado en que la medida de volumen correspondiente es nula. Sin embargo, en el paso de (2.18) a (2.19) se pierde la información correspondiente a la correlación entre las variables U_i y W_i , lo que podría resultar en una infraestimación² de $\sigma_{Z_i,t+1}$.

¹Se asume que los contratos en vigor son a prima única o que están completamente desembolsados, por lo que no existen primas pendientes de cobro.

²Técnicamente podría resultar también en una sobreestimación, dependiendo del signo de la correlación. Si se toma como referencia las correlaciones de QIS-5, se estaría infraestimando, puesto que el signo de los coeficientes de correlación es positivo o nulo en todas las líneas de negocio.

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

Esta situación persistiría en el tiempo en la medida que no fuese liquidada toda la siniestralidad correspondiente a dicha línea de negocio. El SCR podría estar siendo gravemente infraestimado como consecuencia, por ejemplo, del incremento de la inflación o de cambios legislativos que provocasen mayores compensaciones de siniestros envueltos en procesos judiciales.

Estos hechos no son triviales, pues es práctica habitual entre entidades la compra venta de carteras de asegurados y/o de obligaciones derivadas de contratos de seguros, por lo que se podría dar la situación de medidas de volumen nulas, por lo que incluso en entidades que no operasen solamente en una única línea de negocio podrá producirse infraestimación o sobreestimación de la varianza de la variable Z . Asimismo, también es habitual que en reclamaciones de siniestros por responsabilidad civil exista un proceso judicial que demore en el tiempo las posibles liquidaciones, por lo que el pago final pueda estar afectado por la inflación o por decisiones de carácter legal, lo que también podría resultar en infraestimaciones o sobreestimaciones.

La segunda limitación, presentada en Ferri *et al.* (2011) [17], también se deriva del efecto que produce la utilización de medidas de volumen en la estimación del SCR derivado de la fórmula estándar.

Como apuntaban los autores, las entidades tienen un gran incentivo a utilizar modelos alternativos al Modelo Estándar. Para una entidad que decida utilizar el Modelo Estándar con los parámetros preestablecidos, el SCR dependerá únicamente de la medida de volumen, V .

Este hecho provoca un contrasentido en uno de los objetivos de Solvencia II como se puede inferir a partir del apartado SCR.1.15 de la Sección 2^a de las especificaciones técnicas de QIS-5 promulga el principio de proporcionalidad en la aplicación del Modelo Estándar:

El principio de proporcionalidad tiene por objeto apoyar la aplicación consistente de los requisitos basados en los principios de solvencia a

2. EL MODELO ESTÁNDAR

todos los aseguradores .

Básicamente, el párrafo anterior señala la filosofía de Solvencia II, a una entidad que soporte un mayor riesgo le corresponde un mayor SCR.

Sin embargo, aquellas entidades con un mayor volumen de provisiones estarían penalizadas con un mayor requerimiento de solvencia, puesto que la medida de volumen, V , se incrementaría proporcionalmente al volumen de provisiones. Un entidad que, por prudencia, dotase un volumen mayor de provisiones arbitrariamente mayor al necesario, debería dotar un mayor SCR simultáneamente. De este modo el principio de proporcionalidad se vería quebrantado.

Por otra parte, el modelo no tiene en cuenta el recargo de seguridad de las primas puesto que la medida de volumen P_i considera los volúmenes suscritos de primas y no las primas puras.

De este modo, aquellas entidades que apliquen un mayor recargo de seguridad sobre la prima pura se verían penalizadas con un mayor requerimiento de capital de solvencia. Contrariamente, aquellas entidades que cometiesen errores de tarificación (es decir, presentaran insuficiencia de primas) se beneficiarían de una reducción del requerimiento de capital de solvencia, lo que quebrantaría de nuevo el principio de proporcionalidad.

2.2.3 Una propuesta de rediseño de la fórmula estándar

Identificada la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar, las hipótesis sobre las que descansa el modelo y algunas de las limitaciones operativas en la aplicación del mismo, en esta sección se (re)define la variable aleatoria implícita en $\rho(\sigma)$ con la finalidad de dotar a la fórmula de mayor consistencia con las propias hipótesis, y reducir o eliminar las dos limitaciones operativas identificadas en la sección anterior.

Hemos visto como la hipótesis básica para derivar la expresión $\rho(\sigma)$ es que la variable aleatoria, Z , subyacente se distribuye lognormalmente con una esperanza

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

unitaria y una varianza determinada. Sin embargo, esta variable queda definida por dos variables, una que representa el riesgo de primas por línea de negocio, U_i , y otra que representa el riesgo de reservas por línea de negocio, W_i , sobre las que no se realiza ninguna hipótesis acerca de su distribución.

Para (re)definir la nueva variable implícita en la fórmula estándar se hace uso de las definiciones de U_i y W_i presentadas anteriormente. A diferencia de QIS-5, se asume que estas dos variables se distribuyen lognormalmente.

Definimos una variable aleatoria homóloga a Z_i a la que denotamos por Z_i^* .

$$Z_i^* = \prod_{i=1}^d U_i \cdot W_i. \quad (2.20)$$

La variable Z_i^* se distribuirá lognormalmente por ser el producto de dos variables aleatorias lognormales. Los parámetros de la distribución de Z_i^* se desprenden de los parámetros de U_i y W_i , y pueden ser obtenidos a través de la función generadora de momentos de la distribución lognormal. De este modo, el valor esperado de Z_i^* , $E[Z_i^*] = \mu_{Z_i^*}$ y su varianza $V[Z_i^*] = \sigma_{Z_i^*}^2$.

Si consideramos la variable transformada logarítmicamente, $\ln(Z_i^*)$ tenemos que la distribución resultante es normal con parámetros asociados a los parámetros de las variables transformadas $\ln(U_i)$ y $\ln(W_i)$, es decir, $E[\ln(Z_i^*)] = \mu_{\ln(U_i)} + \mu_{\ln(W_i)}$ y $V[\ln(Z_i^*)] = \sigma_{\ln(U_i)}^2 + \sigma_{\ln(W_i)}^2 + 2 \cdot Cov[\ln(U_i), \ln(W_i)]$, esto es, los parámetros de la distribución normal asociada a la distribución lognormal de las variables U_i y W_i .

$$\ln(Z_i^*) \sim N \left(\underbrace{\mu_{\ln(U_i)} + \mu_{\ln(W_i)}}_{\mu_{\ln(Z_i^*)}}, \underbrace{\sigma_{\ln(U_i)}^2 + \sigma_{\ln(W_i)}^2 + 2 \cdot Cov[\ln(U_i), \ln(W_i)]}_{\sigma_{\ln(Z_i^*)}^2} \right), \quad (2.21)$$

2. EL MODELO ESTÁNDAR

siendo $Cov [ln(U_i), ln(W_i)]$ la covarianza entre las variables aleatorias $ln(U_i)$ y $ln(W_i)$ y que puede ser expresada en función del coeficiente de correlación lineal entre ambas variables, $\rho_{ln(U_i)ln(W_i)}$,

$$Cov [ln(U_i), ln(W_i)] = \rho_{ln(U_i)ln(W_i)} \cdot \sqrt{\sigma_{ln(U_i)}^2} \cdot \sqrt{\sigma_{ln(W_i)}^2}.$$

Análogamente, definimos una variable aleatoria homóloga a Z y la denotamos por Z^* .

$$Z^* = \prod_{i=1}^d Z_i^* \quad (2.22)$$

Del mismo modo que en el caso de la variable aleatoria definida en las ecuaciones (2.20) y (2.21), podemos obtener la esperanza y la varianza de la variable transformada $ln(Z^*)$. Los parámetros de la distribución de $ln(Z^*)$ quedarían definidos de la siguiente manera:

$$E [ln(Z^*)] = \sum_{i=1}^d \mu_{Z_i^*} \quad (2.23)$$

y

$$V [ln(Z^*)] = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sigma_{Z_i^*} \cdot \sigma_{Z_j^*} \cdot \rho_{Z_i^* Z_j^*}. \quad (2.24)$$

Si seguimos el esquema de cálculo para el requerimiento de capital definido en la ecuación (2.7), tendremos que, por una parte, definir una medida de volumen y, por otra, una aproximación al VaR.

Suponemos que la medida de volumen se define de igual forma que en QIS-5 y que la aproximación al valor en riesgo a la que se refiere QIS-5 queda realizada a través de un cambio de escala en la medida de riesgo Mean-VaR de la siguiente forma:

2.2 El Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida

$$\text{Mean-VaR}^*(Z^*) = \frac{\text{Mean-VaR}(Z^*)}{E[Z^*]}. \quad (2.25)$$

Teniendo en cuenta la definición del VaR de una variable aleatoria lognormal presentada en el Anexo y la definición de Mean-VaR realizada anteriormente, la nueva aproximación al VaR queda definida pues, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Mean-VaR}(Z^*) &= e^{\mu_{\ln(Z^*)} + z_\alpha \cdot \sqrt{V[\ln(Z^*)]}} - E[Z^*] = \\ &= e^{\mu_{\ln(Z^*)} + z_\alpha \cdot \sqrt{V[\ln(Z^*)]}} - e^{\mu_{\ln(Z^*)} + \frac{V[\ln(Z^*)]}{2}} = \\ &= E[Z^*] \cdot \left(\frac{e^{\mu_{\ln(Z^*)} + z_\alpha \cdot \sqrt{V[\ln(Z^*)]}}}{e^{\left(\mu_{\ln(Z^*)} + \frac{V[\ln(Z^*)]}{2}\right)}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{Mean-VaR}^*(Z^*) = \left(e^{\frac{z_\alpha \cdot \sqrt{V[\ln(Z^*)]} \cdot (1 - \sqrt{V[\ln(Z^*)]})}{2}} - 1 \right). \quad (2.27)$$

Las hipótesis sobre las que descansa (2.27) son:

1. La variable aleatoria subyacente en el modelo es lognormal.
2. La aproximación al valor en riesgo considerada se define como el cociente del Mean-VaR y el valor esperado de la variable aleatoria subyacente.

La definición de esta nueva variable aleatoria y de la nueva aproximación del VaR respeta la hipótesis básica acerca de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar de QIS-5 (lognormalidad) y la metodología de cálculo del SCR definida en la ecuación (2.7) (producto de medida de riesgo por medida de volumen), a la vez que se dota al modelo de una mayor consistencia con las hipótesis de partida.

Además, anulando las medidas de volumen relacionadas con la siniestralidad y las provisiones como factor ponderador en la determinación de la variable Z_i , se consigue evitar la primera limitación presentada en la sección anterior (compárese la varianza definida en la ecuación 2.16 y la varianza que aparece en la ecuación 2.21) relacionadas con la estimación de la varianza de Z_i . Con la nueva variable,

2. EL MODELO ESTÁNDAR

aunque se dejase de suscribir una determinada línea de negocio, el término relacionado con la correlación entre las variables U_i y W_i no quedaría anulado, por lo que en posteriores ejercicios a aquel en que se dejase de suscribir una línea de negocio, el riesgo de reservas en dicha línea de negocio continuaría estando presente.

2.3 Implementación de la fórmula estándar

Una compañía que pretenda obtener el SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas mediante el uso de la fórmula estándar puede decidir entre utilizar los parámetros establecidos por el regulador como *proxy*, en la Tabla 2.1 y 2.2 se presentan los propuestos en QIS-5, o realizar estimaciones de los parámetros derivadas de la propia experiencia de su cartera.

Tabla 2.1: Desviaciones de primas y reservas (%) por línea de negocio.

Línea de negocio	σ_{pr}	σ_{res}
I	10	9,5
II	7	10
III	17	14
IV	10	11
V	15	11
VI	21,5	19
VII	6,5	9
VIII	5	11
IX	13	15
X	17,5	20
XI	17	20
XII	16	20

Fuente: QIS-5

Tabla 2.2: Correlaciones entre líneas de negocio.

Línea de negocio	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
I	1											
II	0,50	1										
III	0,50	0,25	1									
IV	0,25	0,25	0,25	1								
V	0,50	0,25	0,25	0,25	1							
VI	0,25	0,25	0,25	0,25	0,50	1						
VII	0,50	0,50	0,25	0,25	0,50	0,50	1					
VIII	0,25	0,50	0,50	0,50	0,25	0,25	0,25	1				
IX	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	1			
X	0,25	0,25	0,25	0,50	0,25	0,25	0,25	0,50	0,25	1		
XI	0,25	0,25	0,25	0,25	0,50	0,50	0,50	0,25	0,50	0,25	1	
XII	0,25	0,25	0,50	0,50	0,25	0,25	0,25	0,50	0,50	0,25	0,25	1

Fuente: QIS-5

2.3 Implementación de la fórmula estándar

Como se ha visto, la fórmula estándar depende de la desviación estándar correspondiente a la variable aleatoria que representa el riesgo de primas por línea de negocio, la desviación estándar de la variable aleatoria que representa el riesgo de reserva por línea de negocio, la correlación entre las variables aleatorias que representan los riesgos de primas y reservas por línea de negocio, y la correlación entre los pares de variables aleatorias que representan conjuntamente el riesgo de primas y reservas por línea de negocio.

Por tanto, una entidad que decida estimar nuevos parámetros basados en su propia experiencia debe, en primer lugar, definir los estimadores necesarios para la obtención de los parámetros correspondientes a las distintas desviaciones estándar y correlaciones, y en segundo lugar, decidir la información necesaria y la metodología para realizar dichas estimaciones.

En la Directiva no se especifica cómo abordar la estimación de los distintos parámetros necesarios para el cálculo del SCR. Debemos recurrir a las especificaciones técnicas de QIS-5 para obtener indicaciones sobre este aspecto. En la Sección 2, subsección 10^a (SCR.10), con el objetivo de revisar la calibración de las *proxy* de mercado propuestos por el regulador, se anima a los participantes en este estudio de impacto a calcular los parámetros específicos, basados en la experiencia propia de cada entidad, necesarios para la utilización de la fórmula estándar. Para el caso que ocupa esta tesis, el módulo de suscripción no vida, los parámetros de la fórmula estándar que pueden ser sustituidos en este estudio de impacto por parámetros específicos de cada entidad son las desviaciones estándar de los riesgos de primas y reservas.

En la misma subsección se proponen diversas metodologías para la estimación de las desviaciones estándar de las variables que representan los riesgos de primas y de reservas. Los parámetros específicos a utilizar en la fórmula estándar se derivan de un Modelo de Credibilidad que considera, por una parte, las *proxy* de mercado propuestas por el regulador (σ_m) y, por otra parte, las estimaciones que resultan de utilizar los datos de la entidad aseguradora (σ_e) y cualquiera de las dos

2. EL MODELO ESTÁNDAR

metodologías propuestas. Los factores de credibilidad (c) vienen también predefinidos, pero en general dependen del número de observaciones que han sido consideradas para la obtención de los parámetros específicos y de la línea de negocio considerada. Para cada línea de negocio, $i = \{1, 2, \dots, d\}$ los parámetros específicos de las desviaciones estándar (σ_i) se obtienen mediante la fórmula de credibilidad:

$$\sigma_i = c \cdot \sigma_e + (1 - c) \cdot \sigma_m \quad (2.28)$$

Sin embargo en QIS-5 no se permiten sustituir los parámetros de la fórmula estándar correspondientes a las correlaciones. Por esta razón, no se presentan metodologías ni estimadores para obtener, por ejemplo, las correlaciones entre líneas de negocio.

En el Capítulo 4 se propone una metodología para la estimación de las correlaciones entre líneas de negocio a partir de la experiencia de cada entidad aseguradora para su utilización en el cálculo del SCR del submódulo de riesgo de primas y reservas perteneciente al módulo de riesgo de suscripción no vida cuando se opte, previa autorización del regulador competente, por el uso del Modelo Estándar con parámetros específicos, o bien, por un Modelo Interno.

Inspirándose en el Modelo de Credibilidad propuesto en las especificaciones técnicas de QIS-5 para las desviaciones estándar se plantea un modelo, basado en la metodología bayesiana, para la estimación de los coeficientes de correlación entre dos líneas de negocio de la variable aleatoria implícita para el riesgo de primas y reservas.

Se piensa por el contrario que lo justo es lo desigual, y así es, pero no para todos, sino para los desiguales.

Aristóteles

CAPÍTULO

3

El Modelo Interno

3.1 El Modelo Interno en Solvencia II

La Directiva (art. 100) establece que:

El capital de solvencia obligatorio se calculará, bien con arreglo a la fórmula general [...], bien mediante un modelo interno [...].

Las entidades que opten por el uso de un Modelo Interno para el cálculo del SCR deben ser autorizadas previamente por el regulador. Los requisitos mínimos que debe cumplir un Modelo Interno para que sea autorizado vienen descritos en los artículos 120 a 125 de la Directiva.

No obstante, una entidad que obtenga el SCR a través de un Modelo Interno, total o parcial, deberá obtenerlo también mediante el Modelo Estándar (art.112.7).

Los requisitos a que se refieren los artículos 118 a 123 están relacionados con pruebas de utilización del modelo (art.120), normas sobre la calidad estadística del modelo, tanto de los datos que se utilizan como del modelo en sí mismo (art.121), normas de calibración del modelo y del capital de solvencia (art.122), normas acerca de la asignación de pérdidas o ganancias que se deriven de los requerimientos de

3. EL MODELO INTERNO

capital de los distintos segmentos de riesgo (art.123), normas de validación del modelo, es decir revisión de las hipótesis sobre las que subyace el modelo, (art.124), y normas sobre la documentación donde se refleje el funcionamiento del modelo (art.125).

Aunque no se hace mención directa a que un Modelo Interno necesariamente deba estar basado, total o parcialmente, en una distribución de probabilidad, la propia Directiva induce a que así sea. De este modo en el texto de la Directiva (art. 121.1) podemos encontrar referencias a este hecho:

El modelo interno y, en particular, el cálculo de la previsión de distribución de probabilidad en que se basa [. . .],

o también (art. 121.2),

Los métodos utilizados para efectuar el cálculo de la previsión de distribución de probabilidad se basarán en técnicas actuariales y estadísticas adecuadas [. . .]

No obstante el Modelo Interno no necesariamente debe estar basado en estas técnicas, sino que es una herramienta para servir a un fin (art. 119.4)

Sea cual sea el método de cálculo elegido, el método interno deberá servir para clasificar el riesgo en grado suficiente, de modo que exista la garantía de que se aplicará extensamente y ocupará un lugar destacado en el sistema de gobernanza de las empresas de seguros y de reaseguros, en particular en lo que atañe a su sistema de gestión de riesgos y sus procesos de toma de decisiones, así como a la asignación del capital.

A través de los distintos estudios de impacto cuantitativo que han venido sucediéndose a lo largo de los últimos años, el regulador, además de examinar el efecto que sobre el mercado han tenido las normas de cálculo de los requerimientos de capital derivados del Modelo Estándar, requería, de aquellas entidades que pretendían

3.1 El Modelo Interno en Solvencia II

utilizar en el futuro un Modelo Interno, los resultados del capital de solvencia derivados de su propio modelo, y las hipótesis, parámetros y procedencia de los datos de los que estos se derivan.

La sección 3 de QIS-5 hace referencia a una serie de documentos anexos¹ y accesorios al *reporting* que las entidades debían realizar para la presentación de resultados, y que también podían ser utilizados a modo de guía a tener en cuenta para establecer y cumplir los requisitos que un Modelo Interno debía satisfacer.

En estos documentos se hace mención a que un Modelo Interno debe permitir la modelización de dependencias entre los distintos riesgos a distintos niveles y se proponen distintas aproximaciones, entre las que destacan el uso de cópulas².

El Modelo Interno que se propone en este capítulo para la obtención del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas está basado en la simulación de un vector de variables aleatorias donde cada componente del vector representa el comportamiento estadístico de cada variable aleatoria asociada a una línea de negocio. La simulación en la que se basa el modelo utiliza la cópula como herramienta para la modelización de las dependencias entre las variables aleatorias asociadas a las líneas de negocio.

¹Ver por ejemplo, QIS-5 Qualitative Questionnaire on Internal Models y Stock-Taking report on the use of Internal Models in Insurance.

https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/QIS5/QIS5-qualitative-questionnaire-internal-model-20100719.pdf

https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/Stock-taking-report-on-the-use-of-Internal-Models-in-Insurance.pdf

²El concepto de cópula fue introducido por Sklar (1959) [40]. En el Anexo es presentada la definición formal de una cópula.

3. EL MODELO INTERNO

3.2 Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas

Un Modelo Interno no necesariamente debe estar basado en una estructura modular de riesgos en el sentido que plantea Solvencia II. A pesar de ello, en esta propuesta de modelo se mantiene una estructura similar a la del Modelo Estándar con la finalidad de estimar un capital que sea comparable a aquél que se obtiene del Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas del módulo de suscripción no vida.

3.2.1 Definición del Modelo Interno y estimación del SCR

El Modelo Interno que se presenta en esta sección está basado en la agregación de un vector de variables aleatorias donde cada componente del vector representa la predicción del resultado neto por línea de negocio.

El resultado neto por línea de negocio es obtenido mediante la Definición 1 definida en el capítulo anterior y la ecuación (2.4).

Las predicciones de las cuatro variables que conforman el resultado neto por línea de negocio que se definen en la ecuación (2.4), $x_{1,t}$, $x_{2,t}$, $x_{3,t}$ y $x_{4,t}$, son estimadas a través de un modelo de regresión lineal simple. A través de estas predicciones son obtenidas las predicciones del resultado neto por línea de negocio. Posteriormente, cada predicción del resultado neto por línea de negocio es agregada para obtener la predicción total del resultado neto.

El SCR derivado del Modelo Interno es estimado como la diferencia entre el VaR obtenido con un nivel de confianza del 99,5 %, y horizonte temporal anual, y el valor esperado de la predicción del resultado neto agregado, tras realizar una simulación de la distribución de probabilidad de esta misma variable mediante el uso de cópulas.

3.2 Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas

Con la finalidad de clarificar el modelo propuesto, a continuación se introduce la notación utilizada.

Sea $Y_t^{i,s}$ el conjunto de datos históricos en el momento del tiempo t , $t = \{0, 1, \dots, T\}$, para la i -ésima, $i = \{1, 2, \dots, d\}$, línea de negocio y la s -ésima componente del resultado neto, $s = \{x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}\}$.

La recta de regresión del modelo para el periodo $[0; T]$ viene dada por

$$\tilde{Y}_t^{i,s} = \beta_0^{i,s} + \beta_1^{i,s} \cdot t + \epsilon_t^{i,s}, \quad (3.1)$$

donde $\epsilon_t^{i,s}$ denota un término de perturbación aleatorio. Asumimos que el valor esperado del término de perturbación es $E[\epsilon_t^{i,s}] = 0$ y que la varianza, $V[\epsilon_t^{i,s}]$, es constante a lo largo del tiempo.

Extrapolando el modelo de la ecuación (3.1) se puede observar que el valor esperado de la variable aleatoria $\tilde{Y}_{T+1}^{i,s}$ puede ser obtenido a partir del modelo de predicción. A través del método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) pueden ser obtenidos los parámetros del modelo de regresión, de manera que $\hat{Y}_{T+1}^{i,s} = \hat{\beta}_0^{i,s} + \hat{\beta}_1^{i,s} \cdot (T + 1)$, donde $\hat{\beta}_0^{i,s}$ y $\hat{\beta}_1^{i,s}$ se corresponden con las estimaciones MCO.

El valor esperado de $\tilde{Y}_{T+1}^{i,s}$ puede ser estimado a través de $\hat{Y}_{T+1}^{i,s}$, y su varianza $V[\tilde{Y}_{T+1}^{i,s}] = V[\epsilon_t^{i,s}]$ también se desprende de la estimación MCO del término de perturbación aleatorio de la ecuación (3.1).

Con estas estimaciones, se está en disposición de estimar los momentos primero y segundo de la variable aleatoria considerada en el modelo multivariante, predicción del resultado neto agregado, \tilde{R}_{T+1} , dado que se define como

$$\tilde{R}_{T+1} = \sum_{i=1}^d \tilde{R}_{T+1}^i = \sum_{i=1}^d \left(\tilde{Y}_{T+1}^{i,x_{1,T+1}} - \tilde{Y}_{T+1}^{i,x_{2,T+1}} - \tilde{Y}_{T+1}^{i,x_{3,T+1}} - \tilde{Y}_{T+1}^{i,x_{4,T+1}} \right). \quad (3.2)$$

De este modo, para una línea de negocio i , se obtiene que:

3. EL MODELO INTERNO

$$E \left[\tilde{R}_{T+1}^i \right] = \sum_{\forall s} E \left[\tilde{Y}_{T+1}^{i,s} \right] = \sum_{\forall s} \hat{Y}_{T+1}^{i,s} \quad (3.3)$$

y

$$\begin{aligned} V[\tilde{R}_{T+1}^i] &= \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s D[\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}] \cdot D[\tilde{Y}_{T+1}^{i,n}] \cdot \rho_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m} \tilde{Y}_{T+1}^{i,n}} = \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s D[\epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}}] \cdot D[\epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,n}}] \cdot \rho_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m} \tilde{Y}_{T+1}^{i,n}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.4), $D[\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}]$ representa la desviación estándar de la variable aleatoria $\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}$ definida como la raíz cuadrada de su varianza, y $\rho_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m} \tilde{Y}_{T+1}^{i,n}}$ es el coeficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias $\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}$ y $\tilde{Y}_{T+1}^{i,n}$ definido por

$$\rho_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m} \tilde{Y}_{T+1}^{i,n}} = \frac{Cov \left[\epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}}, \epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,n}} \right]}{\sqrt{V[\epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}}]} \cdot \sqrt{V[\epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,n}}]}} \quad m, n = \{x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}\}. \quad (3.5)$$

$$\text{con } \epsilon_{\tilde{Y}_{T+1}^{i,m}} = \left(Y_{T+1}^{i,m} - \hat{Y}_{T+1}^{i,m} \right).$$

La esperanza y la varianza de \tilde{R}_{T+1}^i pueden ser estimadas de manera trivial para cada línea de negocio a partir de los datos observados y de la estimación del modelo (3.1). No obstante, se necesitarían más hipótesis para conocer la distribución de \tilde{R}_{T+1}^i .

La problemática surge a partir de la agregación del resultado neto por línea de negocio. Para realizar dicha agregación, se consideran dos familias de distribuciones multivariantes, la cópula Gaussiana y la cópula t-Student¹.

Para el comportamiento marginal se proponen dos conjuntos de distribuciones, la Gaussiana y la t-Student, de modo que finalmente, se analizarán cuatro posibilidades que se corresponden con la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas,

¹Para un mayor detalle sobre estas cópulas, ver Demarta y McNeil(2005) [7].

3.2 Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas

cóputa Gaussiana con marginales t-Student, cóputa t-Student con marginales Gaussianas y cóputa t-Student con marginales t-Student.

El parámetro de dependencia en dichas cóputas es la correlación lineal entre cada par de variables aleatorias representadas en las marginales, $\rho_{\tilde{R}_{T+1}^i \tilde{R}_{T+1}^j}$. En el caso que tratamos, las marginales se corresponden con la variable aleatoria \tilde{R}_{T+1}^i , $i = \{1, \dots, d\}$, es decir, la predicción del resultado neto por línea de negocio, de forma que el parámetro de dependencia de las cóputas Gaussiana t-Student es la matriz de correlación lineal entre las predicciones de los resultados netos por línea de negocio que puede ser estimada por

$$\rho_{\tilde{R}_{T+1}^i \tilde{R}_{T+1}^j} = \frac{\text{Cov}[\epsilon_{\tilde{R}_{T+1}^i}, \epsilon_{\tilde{R}_{T+1}^j}]}{\sqrt{V[\epsilon_{\tilde{R}_{T+1}^i}]} \sqrt{V[\epsilon_{\tilde{R}_{T+1}^j}]}} \quad i, j = \{1, \dots, d\}. \quad (3.6)$$

con $\epsilon_{\tilde{R}_{T+1}^i} = (R_{T+1}^i - \hat{R}_{T+1}^i)$.

Sea $Z \in \mathbb{R}^d$ el vector d-dimensional de variables aleatorias cuyas componentes se corresponden con las variables \tilde{R}_{T+1}^i . Pueden ser ajustadas marginales Gaussianas a cada componente de Z dadas $E[\tilde{R}_{T+1}^i]$ y $V[\tilde{R}_{T+1}^i]$, de forma que la cóputa Gaussiana sea:

$$C_P^{Ga}(Z) = C\left(F_{R_{T+1}^1}^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_{R_{T+1}^d}^{\leftarrow}(u_d)\right), \quad (3.7)$$

siendo P la matriz de correlación lineal de dimensión $d \times d$ y marginales Gaussianas, $F_{R_{T+1}^i}$, con valor esperado $E[\tilde{R}_{T+1}^i]$ y varianza $V[\tilde{R}_{T+1}^i]$, y $F_{R_{T+1}^i}^{\leftarrow}$ la función inversa generalizada de $F_{R_{T+1}^i}$.

La cóputa t-Student tiene un parámetro más a ser considerado, los grados de libertad. El objetivo es ajustar una distribución conjunta cuyo comportamiento en la cola sea más *pesado* que en el caso Gaussiano. De este modo, se asume una distribución t-Student con pocos grados de libertad. A mayor número de grados de libertad mayor similitud en el comportamiento de la cóputa t-Student a la cóputa Gaussiana.

3. EL MODELO INTERNO

Sea $Q \in \mathbb{R}^d$ el vector d-dimensional de variables aleatorias cuyas componentes se corresponden con las variables \tilde{R}_{T+1}^i , y v un número de grados de libertad. Pueden ser ajustadas marginales t-Student a cada componente de Q dadas $E[\tilde{R}_{T+1}^i]$ y $V[\tilde{R}_{T+1}^i] = \frac{v}{v-2}$. Dada la matriz de correlación lineal entre las variables \tilde{R}_{T+1}^i la cópula t-Student es:

$$C_{v,P}^t(Q) = t_v^n(t_v^{\leftarrow}(u_1), \dots, t_v^{\leftarrow}(u_n)). \quad (3.8)$$

donde $t_v(u)$ es la distribución univariante t-Student centrada en cero con v grados de libertad y $t_v^{\leftarrow}(u)$ es su función inversa generalizada.

Los dos casos restantes considerados en el análisis, es decir, la cópula Gaussiana con marginales t-Student y la cópula t-Student con marginales Gaussianas son simuladas de manera análoga a la expuesta en los casos anteriores.

3.2.2 Limitaciones del Modelo Interno

En la propuesta de Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas han sido utilizadas las cópulas como herramientas de agregación de las variables aleatorias que representan cada uno de los riesgos. En el caso que se consideró, la variable aleatoria de interés es la predicción del resultado neto por línea de negocio.

Las cópulas elegidas para obtener el valor en riesgo de la distribución agregada del resultado neto fueron la cópula Gaussiana y la cópula t-Student. Como se vio en la Sección 1.2, la subaditividad de la medida de riesgo VaR depende de la distribución de las variables aleatorias marginales y de la distribución conjunta de dichas variables aleatorias.

En el Modelo Interno propuesto, tanto las distribuciones marginales como las conjuntas, son distribuciones simétricas pertenecientes a la familia de distribuciones elípticas. Bajo estas distribuciones el VaR cumple el axioma de subaditividad.

3.2 Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas

En el Capítulo 2 también se vio que la hipótesis del Modelo Estándar sobre la distribución implícita era la distribución normal multivariante centrada en cero, por lo que la subaditividad de la medida de riesgo estaba garantizada.

No obstante, bajo las hipótesis que se asumen en el Modelo Estándar y en la propuesta de Modelo Interno para la obtención del SCR a través de la medida de riesgo VaR, implícitamente se asume que los riesgos representados por las variables aleatorias son subaditivos, es decir, existe un beneficio en términos de reducción en la medida de riesgo al tratar los riesgos de forma conjunta.

A continuación se discute qué sucede en el caso de que se considere una medida de riesgo como el VaR para obtener una estimación de capital proveniente de la agregación de variables que representan riesgos no subaditivos, es decir, superaditivos como se veía en Ferri *et al.* (2012) [18].

Falta de comprensión en el concepto de VaR como medida de riesgo

Las medidas de riesgo son habitualmente utilizadas para determinar una cuantía económica que cubra pérdidas inesperadas. Artzner *et al.* (1999) [2] propusieron algunas propiedades deseables que una medida de riesgo debía satisfacer para ser considerada una medida de riesgo coherente. De manera formal, supongamos que tenemos n variables aleatorias, $X_i, i = \{1, \dots, n\}$ y su suma, $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces se dice que la medida de riesgo ρ satisface la propiedad de subaditividad si, y sólo si, para toda X_i

$$\rho(S) \leq \sum_{i=1}^n \rho(X_i). \quad (3.9)$$

A pesar de que existen diversas medidas de riesgo, esta sección se centra en dos medidas de riesgo basadas en la distribución de pérdidas, el VaR y el Tail Value-at-Risk (TVaR). Estas medidas de riesgo pretenden describir el riesgo de una cartera. La medida mas popular es el VaR dado que es utilizada en Basilea III y en Solvencia II como herramienta para calibrar los requerimientos de capital de solvencia.

3. EL MODELO INTERNO

Básicamente, el VaR es un cuantil de una función de distribución. Esta medida de riesgo no es una medida coherente de riesgo dado que no satisface la propiedad (3.9) para toda X_i , a pesar de que si lo hace en el caso de que toda X_i se distribuya normalmente, y más generalmente, en el caso de que se distribuya mediante distribuciones pertenecientes a la familia elíptica, como puede verse en Fang *et al.* (1990) [15] y Embrechts *et al.* (2002) [12].

Para cualquier variable aleatoria, el VaR se define como el ínfimo valor, dado un nivel de confianza $\alpha \in [0, 1]$, de la función de distribución de una variable aleatoria X que cumpla que la probabilidad de que un valor x exceda un cierto umbral x no sea mayor que $1 - \alpha$. Habitualmente esta probabilidad se toma como 0,05 o menor.

$$VaR_\alpha[X] = \text{ínfimo}\{x/P(X \geq x) = 1 - \alpha\} = F_X^{\leftarrow}(\alpha) \quad (3.10)$$

donde F_X denota la función de distribución de X y F_X^{\leftarrow} la función inversa de F_X .

Es algo habitual en el contexto de gestión de riesgos hacer una elección de $1 - \alpha$ basada en un largo periodo de tiempo. Por ejemplo, Solvencia II realiza esta elección en base a la ocurrencia de un evento cada doscientos años, es decir, una frecuencia del 0,5%. Por este motivo, esta medida de riesgo es conocida como una medida basada en la frecuencia. Describe el comportamiento de la variable hasta el cuantil α -ésimo, pero no da información acerca de cómo se comporta la variable en cuantiles mayores.

Mientras que el VaR no ofrece información sobre la cola de la distribución, el TVaR sí lo hace. Esta medida de riesgo se define como el valor esperado de todos los cuantiles mayores al VaR. Formalmente,

$$TVaR_\alpha[X] = E[X|x \geq VaR_\alpha[X]] \quad (3.11)$$

donde $E[\cdot|\cdot]$ denota el operador esperanza condicional.

3.2 Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas

El TVaR es una medida que describe el comportamiento de la cola de la distribución. Da información, el valor esperado, de aquellos valores mayores al VaR. Dos distribuciones distintas podrían tener el mismo VaR dado un nivel de confianza, pero distintos TVaR como consecuencia de los distintos comportamientos de las respectivas variables aleatorias en las colas de las distribuciones.

El hecho de no sólo considerar la elección de $1 - \alpha$, sino también los valores de la distribución mayores al cuantil α -ésimo hace que el TVaR sea conocida como una medida de riesgo basada en la severidad. El TVaR es una medida de riesgo subaditiva dado que satisface la condición (3.9) como puede verse en Embrechts *et al.* (2005) [11].

A pesar de las definiciones matemáticas del VaR y del TVaR existe una falta de comprensión al tratar de asimilar una medida de riesgo a un capital económico para cubrir pérdidas inesperadas, lo que sucede, por ejemplo, en el caso del VaR.

Es frecuente interpretar el VaR como el valor que no será excedido con una probabilidad α . Si, como es habitual, la variable aleatoria considerada es la pérdida de una cartera, esta definición es equivalente a la pérdida que no será excedida con una probabilidad α , o la máxima pérdida dado α como señalaba Jorion (2007) [27]. Esta interpretación no es completamente correcta dado que la máxima pérdida, generalmente, no viene dada por el VaR, dado un nivel de confianza, como se ve a continuación.

La desigualdad (3.9) muestra una cota superior para $\rho(S)$ que es $\sum_{i=1}^n \rho(X_i)$. Una falta de comprensión común se desprende de esta cota. Sólo en el caso de riesgos diversificables podemos encontrarnos con una cota de estas características. En el caso de riesgo no diversificables esta cota no se cumple de manera general.

Como Embrechts *et al.* (2003) [10] mostraron, si se considera el VaR como medida de riesgo y una secuencia de variables aleatorias comonótonas $X_i, i = \{1, \dots, n\}$ entonces $VaR_\alpha[S] = VaR_\alpha[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n VaR_\alpha[X_i]$, lo que es conocido como la cota comonótona. A pesar de ello, este no es el peor caso que

3. EL MODELO INTERNO

puede ser observado, por lo que la comonotonicidad no necesariamente conlleva a la peor pérdida que una entidad puede experimentar. Es posible encontrar estructuras de dependencia entre variables aleatorias X_i tales que el VaR de su suma exceda la cota comonótona.

Trasladando este hecho a la definición de VaR se puede concluir que es posible obtener pérdidas mayores a aquellas provenientes del caso de variables comonótonas dado α . Entonces, $\sum_{i=1}^n VaR_\alpha[X_i]$ no es la máxima pérdida que puede producirse dado α .

Generalmente la subaditividad del VaR falla en aquellos casos donde se tienen variables aleatorias con colas muy pesadas, lo que es el caso de variables relacionadas con riesgos catastróficos y operacionales. La subaditividad también falla en el caso de variables aleatorias asimétricas y en algunos casos donde se imponen algunas estructuras de dependencia especiales en el comportamiento conjunto de las marginales.

En Embrechts *et al.* (2005) [11] se muestra que cuando se consideran distribuciones Pareto, el VaR no satisface la propiedad de subaditividad. Además, en el caso específico de esperanza infinita de la variable aleatoria, el VaR no satisface la propiedad de subaditividad para ningún nivel de confianza. En cualquier otro caso, hay un nivel de confianza hasta el cual el VaR satisface la propiedad de subaditividad, y a partir del cual no. El siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 3.

En este ejemplo se muestra la no subaditividad de la medida de riesgo VaR. Para este ejemplo se ha considerado la variable aleatoria siniestralidad neta de tres líneas de negocio de la serie histórica presentada en el Capítulo 4, en particular se han considerado las líneas de negocio I, V y VI.

Se asume que cada línea de negocio se comporta estadísticamente mediante una distribución Pareto. Los parámetros de cada distribución marginal derivados

3.2 Modelo Interno para el riesgo de primas y reservas

Tabla 3.1: Parámetros de forma y escala de la distribución Generalizada Pareto.

Línea de negocio	Forma	Escala
I	0,93	0,30
V	0,95	0,23
VI	0,75	0,19

Fuente: Propia

del ajuste de la distribución a los datos se muestran en la Tabla 3.1.

Tras el ajuste de cada línea de negocio a su correspondiente distribución, se realiza una simulación Monte Carlo y se obtiene el VaR y el TVaR de la distribución agregada para distintos niveles de confianza. Para el comportamiento conjunto de las variables aleatorias se imponen diversas cópulas, lo que es equivalente a la consideración de distintas estructuras de dependencia.

En primer lugar, son ajustados dos casos de dependencia extremos. El primero, la cópula comótona de Fréchet, que refleja el caso de comonotonía entre variables aleatorias. El segundo, la cópula de independencia, que refleja el caso de independencia entre variables aleatorias. Finalmente, se ajustan dos copulas más. La cópula Clayton, una cópula muy asimétrica, y la cópula Frank, una cópula simétrica, pero con un comportamiento muy pesado en las colas, con dos parámetros de dependencia (θ) cada una.

La Tabla 3.2 muestra los valores del VaR y TVaR para diversos niveles de confianza. Bajo la hipótesis de comonotonía, que conduce a la cota comonótona, el VaR infraestima, es decir, no cumple la propiedad de subaditividad, el riesgo comparado con aquel que se deriva del caso de independencia, de la cópula Clayton y de la cópula Frank, para todos los niveles de confianza hasta un punto entre 0, 90 y 0, 99, y tras el cual VaR satisface la propiedad de subaditividad.

Los valores en negrita indican donde la propiedad de subaditividad no es satisfecha comparada con el caso de comonotonía. Dado que el TVaR es una medida de riesgo que cumple los axiomas de coherencia de Artznet *et al.* (1999) [2], todos los

3. EL MODELO INTERNO

Tabla 3.2: Estimaciones del VaR y TVaR* a partir de diez mil simulaciones de una distribución tridimensional para distintas cópulas con marginales Pareto.

VaR						
n.c.	cópula independencia	cópula Clayton		cópula Frank		cópula comonótona
		$\theta = 1$	$\theta = 2$	$\theta = 1$	$\theta = 2$	
0,8	3,41	3,53	3,57	3,45	3,48	2,67
0,9	6,36	6,78	6,99	6,59	6,85	5,78
0,99	47,69	49,6	50,7	50,02	50,17	53,33
0,999	398,05	396,45	421,82	371,26	401,18	435,69
TVaR						
n.c.	cópula independencia	cópula Clayton		cópula Frank		cópula comonótona
		$\theta = 1$	$\theta = 2$	$\theta = 1$	$\theta = 2$	
0,8	23,14	25,09	26,76	24,78	31,59	32,66
0,9	41,7	45,34	48,57	44,84	58,35	61,49
0,99	289,28	318,72	347,22	315,22	446,51	488,76
0,999	1868,51	2151,37	2419,51	2163,13	3409,88	3777,41

Fuente: Propia / n.c.: nivel de confianza /* Miles de millones de Euros

valores bajo la cópula de independencia, la cópula de Clayton y la cópula Frank, son menores que los obtenidos bajo la cópula comonótona, a todos los niveles de confianza, como era esperado. En el caso de TVaR una mayor hipótesis sobre el grado de dependencia entre variables aleatorias implica mayores valores de la medida de riesgo para todos los niveles de confianza.

La lógica de la validación nos permite movernos entre dos límites: el dogmatismo y el escepticismo.

Paul Ricoeur

CAPÍTULO

4

Correlaciones en la estimación de los requerimientos de capital

4.1 Introducción

En el Capítulo 2 fue analizada la fórmula estándar para el riesgo de primas y reservas. Operativamente, la fórmula estándar depende de dos tipos de parámetros. En primer lugar lo que QIS-5 denomina *desviación estándar combinada* y, en segundo lugar, de dos matrices de correlación, la de correlación entre las variables aleatorias que representan los riesgos de primas y de reservas por línea de negocio, y la de correlación entre los pares de variables aleatorias que representan conjuntamente el riesgo de primas y reservas por línea de negocio.

La *desviación estándar combinada* es un parámetro que se obtiene de forma recursiva a través de la agregación de, en primer lugar, las desviaciones estándar de las variables que representan el riesgo de primas y de reservas por línea de negocio mediante los coeficientes de correlación entre ambas variables y, en segundo lugar, las desviaciones estándar de las variables aleatorias que representan conjuntamente

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

el riesgo de primas y reservas por línea de negocio mediante los coeficientes de correlación entre los pares de variables.

En el Capítulo 2 también se presentó una propuesta de rediseño de la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar para el riesgo de primas y de reservas. A pesar de esta modificación, el modelo propuesto en la fórmula estándar no fue modificado, es decir, el SCR se siguió obteniendo a través del Mean-VaR de la distribución de la variable aleatoria implícita, por lo que la estimación de los parámetros continuó siendo una de las claves del modelo.

En el Capítulo 3 se presentó una propuesta de Modelo Interno basado en la obtención del SCR a través de la estimación de una medida de riesgo correspondiente a la distribución de una variable aleatoria, la predicción del resultado neto, que era obtenida mediante la simulación de un vector de variables aleatorias en el que las componentes marginales representaban la predicción del resultado neto por línea de negocio.

La simulación propuesta está basada en la utilización de cópulas. En particular se estudió la dinámica del modelo a través de la cópula Gaussiana y de la cópula t-Student. Estas dos cópulas están parametrizadas mediante los coeficientes de la matriz de correlación lineal entre las variables aleatorias representadas en las componentes marginales del vector de variables aleatorias.

De nuevo, de igual modo que en la fórmula estándar presentada en el Capítulo 2, la estimación de las matrices de correlación es un aspecto clave para la obtención del SCR.

En este capítulo se analiza cómo la matriz de correlación puede ser estimada, tanto para su uso en el Modelo Estándar como en un Modelo Interno. En particular, el análisis se centra en la matriz de correlación entre líneas de negocio del riesgo de suscripción no vida.

En primer lugar, la primera sección de este capítulo muestra una descripción de la base de datos utilizada para obtener, tanto las estimaciones de los parámetros necesarios para el Modelo Estándar y el Modelo Interno, como las estimaciones del SCR que se deriva de ambos modelos.

A continuación, en la siguiente sección, se realiza un análisis de sensibilidad del SCR ante cambios en la matriz de correlación entre líneas de negocio, tanto a través del Modelo Estándar, como del Modelo Interno propuesto en el Capítulo 3. Con ello se pretende señalar la incidencia de dichos parámetros en la estimación de los requerimientos y justificar la necesidad de estimación de nuevos parámetros ajustados al perfil de riesgo de la entidad.

Posteriormente, se estudian las metodologías para realizar las estimaciones de la matriz de correlación, así como analizar qué tipo de correlación sería más adecuado en cada uno de los modelos, el Modelo Estándar y el Modelo Interno.

Como metodología alternativa, se introduce el uso de los modelos bayesianos como una forma particular de aplicación de los Modelos de Credibilidad para realizar las estimaciones de la matriz de correlación.

Bühlmann y Gisler (2005) [4] presentaron la teoría de la credibilidad multivariante. Algunos otros autores, Englund *et al.* (2008) [14], han intentado el desarrollo de reglas de tarificación que tienen en cuenta la relación entre diversas líneas de negocio para casos en los que el asegurado tiene, o puede tener, diversos contratos en una misma entidad aseguradora.

Finalmente, tras realizar las estimaciones de la matriz de correlación, se muestran los resultados de las estimaciones del SCR que se derivan de la aplicación de las matrices de correlación estimadas mediante la metodología bayesiana en los Modelos Estándar e Interno.

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

4.2 Base de datos

En esta sección se presenta la base de datos que será utilizada a lo largo de este capítulo para ilustrar la obtención las estimaciones del requerimiento de capital, tanto mediante el Modelo Estándar como con el Modelo Interno.

A partir de la Memoria Estadística Anual de Entidades Aseguradoras publicada por la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones¹(DGSFP) sobre balances y cuentas técnicas del negocio no vida correspondientes al período 2000-2010 para el conjunto de entidades que operan en el mercado español, ha sido extraída la información necesaria para el cálculo del requerimiento de capital de solvencia correspondiente al submódulo de riesgo insuficiencia de primas y reservas del negocio no vida.

Los datos recogidos están referidos al conjunto del mercado y corresponden a la información agregada de Sociedades Anónimas, Mutuas, Mutualidades de Previsión Social y Reaseguradoras. Asimismo, la información publicada corresponde a los ramos actualmente vigentes en la normativa contable, esto es, a los ramos (a) Accidentes, (b) Enfermedad, (c) Asistencia sanitaria, (d) Transporte de cascos, (e) Transporte de mercancías, (f) Incendio, (g) Otros daños a bienes, (h) Responsabilidad civil de vehículos a motor, (i) Vehículos a motor, otras garantías, (j) Responsabilidad civil, (k) Crédito, (l) Caución, (m) Pérdidas pecuniarias, (n) Defensa jurídica, (o) Asistencia, (p) Decesos, (q) Multirriesgo hogar, (r) Multirriesgo comercio, (s) Multirriesgo comunidades, (t) Multirriesgo industrial, (u) Otros multirriesgos y (w) Dependencia.

Para efectuar el cálculo del requerimiento de capital de solvencia se ha tenido en cuenta las nueve primeras líneas de negocio propuestas en QIS-5, (I) Responsabilidad civil de vehículos a motor, (II) Otro tipo de responsabilidades derivadas de vehículos a motor, (III) Marina, aviación y transporte, (IV) Incendio, (V) Responsabilidad civil, (VI) Crédito y caución, (VII) Defensa jurídica, (VIII) Asistencia,

¹<http://www.dgsfp.meh.es>

(IX) Diversos.

Se descarta la consideración de las líneas de negocio (X) Reaseguro no proporcional Inmuebles, (XI) Reaseguro no proporcional Daños y (XII) Reaseguro no proporcional Marina, aviación y transporte, dado que se considera que pueden producir una distorsión en los resultados ya que al tratarse de información de mercado agregada, obviamente existe una correlación perfecta negativa entre estas tres líneas de negocio, que corresponden a volúmenes de reaseguro aceptado, y aquellas líneas de negocio que ceden volúmenes a reaseguro.

La correspondencia entre los ramos presentados en la memoria y las líneas de negocio propuestas en QIS-5 se ha realizado teniendo en cuenta la recomendación que UNESPA¹ realizó a las entidades participantes en QIS-5. La Tabla 4.1 presenta dichas correspondencias. Como puede apreciarse, los ramos (a) Accidentes, (b) Enfermedad, (c) Asistencia sanitaria y (w) Dependencia no son asignados a ninguna línea de negocio de las consideradas por QIS-5. Ello es debido a que los ramos (a), (b), (c) y (w) no son considerados en el submódulo de riesgo insuficiencia de primas y reservas, sino en otro submódulo específico para dichos riesgos.

Para cada línea de negocio considerada se consideran las siguientes variables, 1) Primas suscritas netas de reaseguro, 2) Siniestralidad neta de reaseguro, 3) Gastos (incluyendo, gastos de explotación, gastos imputables a prestaciones y otros gastos) y 4) Provisiones técnicas (incluyendo, provisión de prestaciones pendientes de liquidación, provisión de prestaciones pendientes de declaración y provisión para gastos internos de liquidación de siniestros).

A continuación la Tabla 4.2 muestra algunos estadísticos descriptivos² de las variables consideradas. La Figura 4.1 muestra la participación relativa de cada variable considerada por línea de negocio sobre el total del mercado.

¹www.unespa.es/adjuntos/fichero_2591_20080227.xls

²Mínimo (Mín.), Primer cuartil (Cuart. 1º), Mediana (Mediana), Media (Promedio), Desviación típica (Desv.), Tercer cuartil (Cuart. 3º) y Máximo (Máx.)

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

Tabla 4.1: Correspondencia entre líneas de negocio de QIS-5 y ramos no vida.

Ramos	Líneas de negocio											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X*	XI*	XII*
a											•	
b												
c												
d			•									
e			•									•
f				•						•		
g				•						•		
h	•											
i		•										
j					•							
k						•						
l						•						
m									•			
n							•					
o								•				
p									•			
q				•						•		
r				•						•		
s				•						•		
t				•						•		
u				•						•		
v				•						•		
w				•						•		

Fuente: UNESPA / * Reaseguro no proporcional

Tabla 4.2: Estadísticos descriptivos* de las variables Primas netas, Siniestralidad neta, Gastos y Provisiones técnicas; por línea de negocio.

Líneas de negocio	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Primas netas de reaseguro									
Mín.	4,21	2,85	0,19	2,45	0,48	0,17	0,08	0,30	0,93
Cuart. 1º	5,34	3,69	0,24	3,38	0,72	0,23	0,11	0,38	1,13
Mediana	5,87	4,43	0,30	4,87	1,05	0,34	0,12	0,49	1,38
Promedio	5,75	4,15	0,31	4,69	1,00	0,33	0,13	0,50	1,41
Desv.	0,76	0,70	0,08	1,58	0,33	0,11	0,03	0,13	0,34
Cuart. 3º	6,30	4,68	0,39	5,89	1,28	0,42	0,16	0,63	1,67
Máx.	6,66	4,94	0,44	6,87	1,41	0,49	0,17	0,67	1,90
Siniestralidad neta de reaseguro									
Mín.	3,57	2,12	0,15	1,70	0,45	0,12	0,05	0,22	0,38
Cuart. 1º	4,14	2,49	0,16	2,35	0,58	0,16	0,07	0,27	0,46
Mediana	4,41	2,97	0,19	3,20	0,72	0,20	0,07	0,35	0,57
Promedio	4,34	2,91	0,21	3,09	0,71	0,43	0,07	0,36	0,57
Desv.	0,43	0,54	0,06	0,92	0,17	0,44	0,01	0,10	0,13
Cuart. 3º	4,71	3,40	0,25	3,88	0,89	0,55	0,08	0,45	0,67
Máx.	4,84	3,64	0,33	4,40	0,92	1,44	0,09	0,48	0,75
Gastos									
Mín.	1,03	0,70	0,01	0,69	0,10	-0,03	0,04	0,11	0,45
Cuart. 1º	1,22	0,82	0,02	0,88	0,12	-0,00	0,05	0,13	0,50
Mediana	1,33	0,96	0,04	1,14	0,17	0,03	0,05	0,16	0,56
Promedio	1,32	0,93	0,04	1,24	0,18	0,09	0,05	0,17	0,58
Desv.	0,17	0,14	0,02	0,43	0,06	0,14	0,00	0,04	0,10
Cuart. 3º	1,43	1,04	0,06	1,62	0,24	0,15	0,06	0,20	0,62
Máx.	1,63	1,10	0,08	1,84	0,26	0,35	0,07	0,23	0,76
Provisiones técnicas									
Mín.	4,87	0,74	0,28	1,30	1,89	0,38	0,03	0,01	0,08
Cuart. 1º	5,31	0,91	0,31	1,82	2,72	0,49	0,05	0,01	0,10
Mediana	6,18	1,04	0,42	2,43	3,55	0,55	0,05	0,02	0,14
Promedio	5,89	1,12	0,43	2,28	3,58	0,69	0,06	0,02	0,14
Desv.	0,68	0,29	0,12	0,56	1,10	0,35	0,02	0,01	0,04
Cuart. 3º	6,42	1,34	0,56	2,68	4,42	0,81	0,06	0,02	0,17
Máx.	6,67	1,59	0,59	2,96	5,11	1,62	0,12	0,06	0,21

Fuente: Propia / * Miles de millones de Euros

Las líneas de negocio con mayor volumen de primas suscritas son la I, II, y IV, con un promedio correspondiente al periodo 2000-2010 superior a 4,5 miles de millones de euros en todos los casos. Las líneas de negocio I, II y IV son las que mayor volatilidad entorno a los valores medios presentan, como se aprecia en los valores de la desviación típica, 0,76, 0,70 y 1,58 miles de millones de euros, respectivamente. Este hecho refleja la importancia de estas tres líneas de negocio en el mercado español. Como se puede ver en la Tabla 4.1, estas líneas de negocio se corresponden con los ramos relacionados con vehículos a motor, Responsabilidad civil derivada de vehículos a motor (I) y Vehículos a motor, otras garantías (II); y con los ramos relacionados con seguros multirriesgos en todas sus modalidades, Multirriesgo hogar, Multirriesgo comercio, Multirriesgo comunidades, Multirriesgo industrial y Otros multirriesgos (IV). Como es de esperar, los mayores volúmenes promedio de siniestros, gastos y provisiones técnicas se corresponden con estas líneas de negocio, con la particularidad de que el volumen promedio de provisiones técnicas es mayor que el de primas y siniestralidad en la línea de negocio I (Responsabilidad civil derivada de vehículos a motor).

El resto de las líneas de negocio, III, V, VI, VII, VIII y IX son relativamente menores en cuanto a volumen de primas promedio, no superando el millar de millones de euros en ningún caso, a excepción de la línea de negocio IX (1,41) que se corresponde con los ramos de Pérdidas pecuniarias y Decesos. Del mismo modo los volúmenes promedios de siniestralidad y gastos son acordes a los relativamente bajos promedios de primas en estas líneas de negocio. En el caso de las provisiones técnicas correspondientes a las líneas de negocio III, V y VI, es de destacar que, a diferencia del caso de las líneas II y IV, los promedios de provisiones son mayores que los promedios de primas y siniestralidad, 1,12, 0,43 y 3,58, respectivamente. Un hecho chocante, es el volumen promedio de provisiones de la línea de negocio V (3,58), que se corresponde con el ramo de Responsabilidad civil (distinta de la derivada de la circulación de vehículos a motor), siendo la segunda en importancia relativa en el mercado español, sólo por detrás de la línea de negocio I.

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

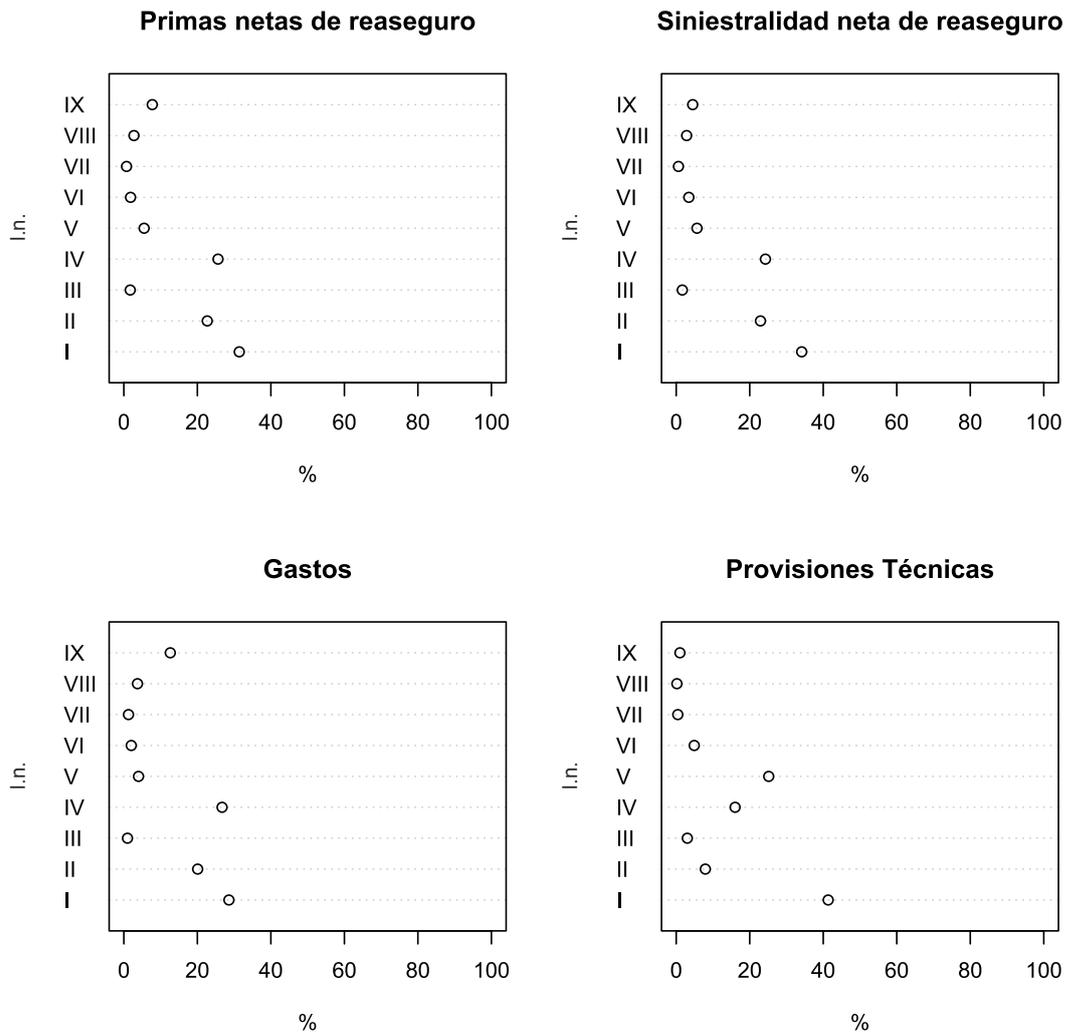


Figura 4.1: Cuotas de Mercado. - Participación relativa porcentual sobre total del mercado correspondiente al periodo 2000-2010 de primas netas de reaseguro, siniestralidad neta de reaseguro, gastos y provisiones técnicas, por línea de negocio (I.n.).
Fuente: Propia

4.3 Análisis de sensibilidad del SCR a la matriz de correlación

4.3.1 Sensibilidad del SCR del Modelo Estándar

A continuación, se presentan los resultados de las estimaciones que se desprenden del Modelo Estándar. La Tabla 4.5 muestra, en primer lugar, las estimaciones del SCR obtenidas a través de la aplicación de la fórmula estándar con los parámetros que QIS-5 presenta como *proxy* de mercado, tanto aquellos que representan las desviaciones estándar de los riesgos de primas y reservas, como las matrices de correlación necesarias para la obtención de la *desviación estándar combinada*.

En segundo lugar en la Tabla 4.5 muestra también la estimación del SCR del Modelo Estándar que se obtiene mediante nuevos parámetros para las desviaciones estándar de las variables que representan los riesgos de primas y reservas según la metodología uno presentada en QIS-5, pero manteniendo las correlaciones de QIS.

Por último, en la Tabla 4.5 se muestra la estimación del SCR derivada de la modificación de la variable aleatoria implícita en el Modelo Estándar que fue presentada en la subsección 2.2.3 del Capítulo 2.

Para obtener los valores de la medida de volumen, V , y la aproximación al VaR, $\rho(\sigma)$ del Modelo Estándar, se asumen las siguientes hipótesis con la finalidad de ajustar las estimaciones derivadas de los datos a los requisitos que QIS-5 propone para los *inputs* del modelo. En primer lugar, el volumen de primas suscrito en el ejercicio es igual al devengado. En segundo lugar, todos los contratos son a prima única, por lo que el valor actual de las primas futuras derivadas de contratos existentes con cobertura más allá del horizonte anual, es nulo. Además, se asume también que las cuantías correspondientes a las provisiones técnicas se corresponden con el *best estimate* a que se refiere QIS-5. Por último, el factor de diversificación geográfico es uno para todas las líneas de negocio. La Tabla 4.3 presenta las medidas de volumen por línea de negocio necesarias para el cálculo del

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

Tabla 4.3: Volúmenes* de primas (P) y reservas (R) por línea de negocio.

Línea de negocio	P_{2009}	P_{2010}	R_{2010}
I	5,78	5,15	5,22
II	4,81	4,54	1,00
III	0,42	0,30	0,59
IV	6,87	5,86	2,65
V	1,21	1,05	4,33
VI	0,49	0,41	0,90
VII	0,16	0,16	0,12
VIII	0,67	0,61	0,06
IX	1,89	1,90	0,21

Fuente: Propia / * Miles de millones de Euros

Tabla 4.4: Desviaciones de primas y reservas (%) por línea de negocio.

Línea de negocio	Modelo					
	QIS-5		QIS-5 específico		Modelo 2.2.3	
	σ_{pr}	σ_{res}	σ_{pr}	σ_{res}	σ_{pr}	σ_{res}
I	10	9,5	24,34	9,63	7	9,99
II	7	10	20,65	15,07	5,54	13,46
III	17	14	21,04	11,40	10,33	10,32
IV	10	11	23	10,02	7,18	8,79
V	15	11	19,96	15,97	26,60	15,69
VI	21,5	19	65,85	40,71	63,26	32,26
VII	6,5	9	22,63	29,40	14,27	29,08
VIII	5	11	25,18	30	2,71	28,62
IX	13	20	34,83	19,18	2,41	21,71

Fuente: Propia

SCR mediante la fórmula estándar.

La Tabla 4.4 muestra una comparativa de los parámetros correspondientes a las tres estimaciones de las desviaciones estándar, las propuestas por QIS-5, las obtenidas mediante la metodología uno propuesta en QIS-5 con datos propios, y las obtenidas con la variable aleatoria propuesta en la subsección 2.2.3.

Con la finalidad de hacer más sencilla la comparación entre estimaciones, y dado que los parámetros presentados en QIS-5 son estimaciones del coeficiente de variación de las variables aleatorias implícitas en el modelo¹, las estimaciones realizadas a partir de las hipótesis sobre las variables aleatorias presentadas en la ecuación (2.20) referentes al riesgo de primas y reservas, han sido pertinentemente transformadas en los respectivos coeficientes de variación.

¹Ver Sección 2.2.1

4.3 Análisis de sensibilidad del SCR a la matriz de correlación

Tabla 4.5: Estimación* del SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas.

Modelo	Estimación del SCR
Estándar	6,65
Estándar específico	13,64
Modelo 2.2.3	2,36

Fuente: Propia / * Miles de millones de Euros

En la Tabla 4.5 se aprecian diferencias significativas entre las estimaciones del SCR que se han obtenido mediante el Modelo Estándar, el Modelo Estándar con parámetros específicos y el Modelo Estándar con la modificación de la variable aleatoria implícita propuesta en el Capítulo 2.

La diferencia entre el SCR obtenido mediante el Modelo Estándar y el Modelo Estándar con parámetros específicos es debida a la mayor dispersión de los parámetros procedentes de la serie histórica.

Sin embargo, el SCR obtenido a través de aplicación de la modificación de la variable aleatoria propuesta en el Capítulo 2 es significativamente menor al obtenido mediante el Modelo Estándar y al Modelo Estándar con parámetros propios. Ello es debido a varias razones.

En primer lugar, a pesar de que tanto la variable aleatoria del Modelo Estándar como la variable aleatoria propuesta se distribuyen de la misma forma, lognormal, y proceden de la consideración de las mismas variables, el *loss ratio* y el *reserve ratio* por línea de negocio, el esquema de agregación, como se vio, es distinto. En el primer caso se trata de un esquema aditivo mientras que en el segundo es multiplicativo, lo que resulta en una estimación menor de algunos de los parámetros correspondientes a la desviación estándar de primas y reservas por línea de negocio, como consecuencia de que el logaritmo de suma de variables es mayor que el logaritmo del producto de las mismas variables, para ciertos valores.

En segundo lugar, para la agregación de las estimaciones de las desviaciones estándar de primas y reservas por línea de negocio correspondientes a la nueva

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

Tabla 4.6: Estimaciones* del SCR del Modelo Estándar con distintas matrices de correlación entre líneas de negocio.

Matriz de correlación	Estimación del SCR
Comonotonía	9,91
QIS-5	6,65
Incorrelación	4,06

Fuente: Propia / * Miles de millones de Euros

variable aleatoria propuesta, para la obtención del parámetro *desviación estándar combinada* se han utilizado las matrices de correlación estimadas empíricamente, lo que resulta en una estimación final del SCR más favorable.

Posteriormente, con la finalidad de obtener el recorrido completo del SCR que se deriva del Modelo Estándar, se ha realizado un análisis de sensibilidad a la matriz de correlación entre líneas de negocio del SCR del Modelo Estándar. Para ello, se han realizado diez mil simulaciones de la matriz de correlación entre líneas de negocio manteniendo el resto de parámetros constantes e igual a los propuestos en QIS-5.

La Tabla 4.6 muestra tres estimaciones del SCR del Modelo Estándar correspondientes a tres casos particulares de la matriz de correlación entre líneas de negocio, el caso comonótono, el caso de incorrelación, y el caso particular correspondiente a la matriz de correlación presentada en QIS-5.

En la Figura 4.2 se muestra el recorrido completo del SCR del Modelo Estándar frente a la matriz de correlación entre líneas de negocio, manteniendo el resto de parámetros constantes.

Como puede apreciarse en la Tabla 4.6, el requerimiento de capital de solvencia tiene una gran sensibilidad al cambio en la matriz de correlación entre líneas de negocio. Comparando los resultados del SCR obtenidos con la matriz de correlación propuesta en QIS-5, con el obtenido con la matriz de incorrelación, observamos que existe un amplio recorrido entre el capital calculado íntegramente con los paráme-

4.3 Análisis de sensibilidad del SCR a la matriz de correlación

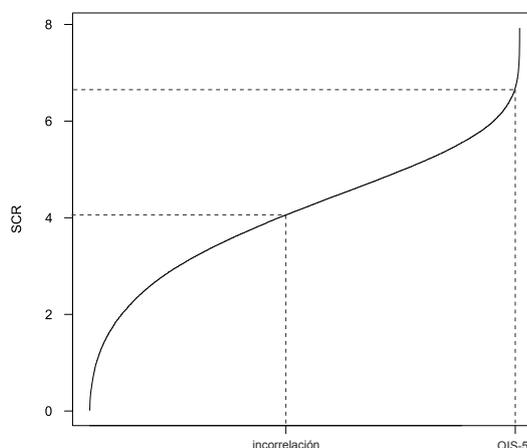


Figura 4.2: Sensibilidad del SCR. - Recorrido del SCR en función de la matriz de correlación entre líneas de negocio. Fuente: Ferri, Bermúdez y Alcañiz (2011) [16]

tros preestablecidos y el capital obtenido asumiendo incorrelación entre líneas de negocio.

Cuando se consideran cambios en la matriz de correlación entre líneas de negocio, el requerimiento de capital está acotado superiormente. La cota superior se produce en el caso de que la matriz de correlación esté formada por unos, es decir, correlación perfecta positiva (comonotonía) entre todas las líneas de negocio. En este caso, el requerimiento de capital de solvencia es de 9,91 miles de millones de euros. La matriz propuesta en QIS-5 produce un requerimiento de capital de 6,65 miles de millones de euros, mientras que si se considera incorrelación entre líneas de negocio el capital requerido es de 4,06 miles de millones de euros.

Por tanto, en el caso de que se parta de la situación propuesta en QIS-5, la reducción en el SCR, consecuencia de la modificación de la matriz de correlación entre líneas de negocio y asumiendo que la situación más favorable es la incorrelación entre líneas de negocio, es de 2,59 miles de millones de euros.

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

4.3.2 Sensibilidad del SCR del Modelo Interno

En esta sección se presentan las estimaciones del SCR que se obtienen del análisis de sensibilidad a las correlaciones entre líneas de negocio del Modelo Interno propuesto en el Capítulo 3. Para ello hacemos uso de la variable aleatoria propuesta en la ecuación (3.2), la predicción del resultado agregado neto resultante de la agregación a través de la simulación de un vector de variables aleatorias cuyas componentes representan la predicción del resultado neto por línea de negocio.

Los parámetros de las distribuciones marginales, esperanza y varianza¹, de dichas componentes se derivan de la serie temporal presentada en la sección primera del Capítulo 4 correspondiente al periodo 2000-2010 y pueden ser trivialmente obtenidas a través de (3.3) y (3.4), respectivamente.

Además, todas las variables de la serie temporal han sido deflactadas con la finalidad de obtener unidades monetarias constantes de 2010².

La Tabla 4.7 muestra las predicciones que se derivan del modelo de regresión presentado en (3.1) para el ejercicio 2011 de las componentes que conforman el resultado neto por línea de negocio.

La Tabla 4.7 muestra también los coeficientes de variación de las componentes que conforman la predicción del resultado neto por línea de negocio, definidos como el cociente entre la desviación típica y el valor esperado, en términos absolutos, de las respectivas componentes.

La Tabla 4.8 muestra los resultados de las estimaciones de los distintos requerimientos de capital obtenidos a través de las simulaciones de las cópulas consi-

¹En el Anexo se muestran las matrices de correlación lineal necesarias para estimar las varianzas de las predicciones del resultado neto por línea de negocio. Las estimaciones de estas matrices han sido obtenidas mediante el estimador habitual para la matriz de correlación lineal.

²Para deflactar la serie se ha utilizado los índices deflatores correspondientes a cada ejercicio disponibles en en la página web del Instituto Nacional de Estadística (INE). <http://www.ine.es>

4.3 Análisis de sensibilidad del SCR a la matriz de correlación

Tabla 4.7: Predicciones* de las componentes para la definición de parámetros de las distribuciones para el Modelo Interno.

Línea de negocio	\hat{Y}_{2011}^{i,x_1}	\hat{Y}_{2011}^{i,x_2}	\hat{Y}_{2011}^{i,x_3}	\hat{Y}_{2011}^{i,x_4}	(%) $CV_{x_1}^i$	(%) $CV_{x_2}^i$	(%) $CV_{x_3}^i$	(%) $CV_{x_4}^i$
I	6,33	4,86	1,36	-0,40	12,43	6,35	13,71	33,57
II	5,30	3,86	1,14	-0,11	6,75	4,04	8,29	56,65
III	0,45	0,29	0,08	0,01	12,07	174,27	13,01	0,88
IV	7,57	4,77	2,02	0,13	7,08	4,90	6,76	87,61
V	1,54	0,79	0,29	0,13	14,47	24,20	9,51	136,34
VI	0,54	1,07	0,32	-0,08	7,58	29,11	24,52	149,83
VII	0,19	0,09	0,07	0,004	8,14	7,87	4,98	94,93
VIII	0,74	0,53	0,24	0,005	6,59	8,04	8,14	94,13
IX	2,04	0,80	0,76	0,25	1,74	1,90	3,34	10,78

Fuente: Propia / * Miles de millones de Euros

deradas y de las marginales parametrizadas con los valores que se desprenden de la Tabla 4.7. En las simulaciones han sido consideradas cuatro hipótesis acerca de la matriz de correlación entre líneas de negocio: incorrelación, la matriz empírica derivada de los datos, una matriz cuyos valores coinciden con los de la matriz presentada en QIS-5 como *proxy* y la matriz de correlación comonótona.

En primer lugar, en la Tabla 4.8 se presentan los resultados obtenidos con la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas y posteriormente con marginales t-Student. A continuación, se muestran los resultados obtenidos con la cópula t-Student con marginales Gaussianas y t-Student. Todas las cópulas relacionadas con la distribución t-Student han sido consideradas con cuatro, diez y treinta y cinco grados de libertad.

Con la finalidad de poder realizar comparaciones con los requerimientos obtenidos con el Modelo Estándar, se han considerado la matriz de correlación de independencia, la estimada empíricamente, la matriz de correlación propuesta en QIS-5 y la matriz de correlación comonótona.

Para todos los casos considerados, los SCR obtenidos con marginales t-Student producen mayores valores que los obtenidos con marginales Gaussianas. En particular, el valor más pequeño de SCR es obtenido con la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas, seguido del obtenido con la cópula t-Student con marginales Gaussianas. Los SCR obtenidos con cópula Gaussiana con marginales t-Student

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

Tabla 4.8: Estimaciones* del SCR del Modelo Interno.

Matriz de correlación entre líneas de negocio incorrelación				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	5,00	-	-	-
4		8,03	5,64	9,01
10		5,76	5,27	6,18
35		5,21	5,09	5,31
Matriz de correlación entre líneas de negocio estimada				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	5,95	-	-	-
4		10,01	6,32	10,59
10		7,08	6,12	7,03
35		6,22	5,99	6,25
Matriz de correlación entre líneas de negocio QIS-5				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	8,03	-	-	-
4		13,09	8,71	14,38
10		9,46	8,38	9,89
35		8,39	8,15	8,51
Matriz de correlación entre líneas de negocio comotonía				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	11,79	-	-	-
4		21,03	11,81	21,02
10		14,49	11,85	14,56
35		12,51	11,82	12,44

Fuente: Propia / g.l.: grados de libertad / * Miles de millones de Euros

y con t-Student cópula con marginales t-Student producen resultados mayores. Se evidencia que la elección de marginales influencia claramente las estimaciones de SCR, así como el efecto de la consideración de distribuciones con colas pesadas, incluso en el caso de la cópula Gaussiana.

A medida que se considera un mayor número de grados de libertad en las distribuciones marginales t-Student, el SCR obtenido con las cópulas relacionadas con dichas marginales decrece y es convergente a los resultados obtenidos con la cópula Gaussiana con marginales Gaussianas. Este comportamiento relacionado con los grados de libertad era esperado y se observa bajo todas las hipótesis de correlación.

4.4 Estimación de correlaciones

Tanto la estimación del SCR que se deriva del Modelo Estándar como la que se deriva del Modelo Interno, tiene una gran sensibilidad a la matriz de correlaciones

4.4 Estimación de correlaciones

entre líneas de negocio, por lo que la estimación de ésta resulta crucial para la obtención de los requerimientos de capital.

Sin embargo, como se comentó en el Capítulo 2, en el estudio QIS-5 no se permitía a los participantes modificar la matriz de correlación propuesta en las especificaciones técnicas, por lo que no presentaba ninguna metodología ni estimador para la estimación de las matrices de correlación necesarias en el Modelo Estándar.

En esta sección se va a estudiar cómo se podrían realizar estas estimaciones y de este modo poder obtener el SCR que se ajuste completamente a la experiencia histórica de las entidades.

Habiendo identificado de forma inequívoca en el Capítulo 2 la variable aleatoria implícita en el Modelo Estándar, y definido en el Capítulo 3 una variable aleatoria para el Modelo Interno propuesto, en esta sección se proponen y discuten diversas alternativas para la estimación de la matriz de correlación entre líneas de negocio. Estas metodologías son extensibles a la estimación de la matriz de correlación entre los pares de variables que representan los riesgos de primas y reservas.

La matriz de correlación entre líneas de negocio presentada en QIS-5 representa una aproximación de mercado. Esta estimación puede estar basada en el *juicio experto* del regulador. Sin embargo, una compañía podría tener conocimiento a través de su propia experiencia, y estar en disposición de realizar un juicio sobre la (cor)relación que podría haber entre determinadas líneas de negocio, así como identificar potenciales eventos, y tenerlos en cuenta, o no, en las estimaciones de la correlación.

Una aproximación ampliamente extendida consiste en la determinación de grados cualitativos de la relación entre variables aleatorias. De esta forma puede ser considerada una correlación nula, baja, media o alta. Como se comentó en el Capítulo 1, este parece ser el criterio adoptado por el regulador. Dos variables aleatorias no correlacionadas tendrían un coeficiente de correlación igual a cero, dos variables aleatorias bajamente relacionadas tendrían un coeficiente de correlación igual

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

a un cuarto. Si la relación fuese media, el coeficiente sería un medio, mientras que si la relación fuese alta el coeficiente sería de tres cuartos.

Una ventaja de la consideración de estos juicios expertos es que son capaces de mantener un cierto grado de estabilidad a lo largo del tiempo. Sin embargo, el grado de subjetividad al que están sometidas es muy alto, de modo que la estimación es pobre y sujeta a un elevado grado de error.

Otra posibilidad es la realización de las estimaciones en base a un análisis cuantitativo. Aunque Solvencia II no hace referencia al tipo de correlación que debe ser considerada, se desprende de la ecuación (1.1) del Capítulo 1 que bajo la hipótesis de normalidad, el coeficiente de correlación lineal es un candidato adecuado.

¿Cabría la posibilidad de que existiese otro tipo de correlación compatible con el Modelo Estándar? Bajo la hipótesis del Modelo Estándar, normalidad multivariante, la respuesta es afirmativa. Iman y Conover (1982) [25] enuncian la condición necesaria y suficiente para que una matriz de correlación lineal sea simultáneamente una matriz de correlación por rangos. Básicamente, dicha condición exige que las variables aleatorias subyacentes pertenezcan a la misma distribución normal multivariante. De este modo, resulta indiferente la utilización de una matriz de correlación lineal o por rangos en una cópula Gaussiana de un vector de variables aleatorias multivariante normal.

Sin embargo en la sección 2.2 del Capítulo 2 se vio que, particularmente para el riesgo de primas y reservas, el Modelo Estándar asume una distribución lognormal para la variable aleatoria implícita.

Embrechts *et al.* (2002) [12] discutieron las implicaciones de la utilización de correlaciones lineales entre variables aleatorias distribuidas lognormalmente. Los autores mostraron que para valores dados de la varianza de variables aleatorias lognormales, la correlación lineal está dada y acotada. Los resultados muestran la imposibilidad de construir distribuciones lognormales multivariantes dadas las varianzas de las distribuciones marginales y una correlación lineal arbitraria. Este re-

sultado se debe a Höfding (1940) [23] y Fréchet (1957) [20] que establecieron las cotas que puede alcanzar la correlación entre dos variables aleatorias distribuidas lognormalmente. Este hecho confirma que la correlación lineal no es una medida adecuada de la dependencia entre variables aleatorias en general, aunque sí describe adecuadamente la dependencia entre variables cuya distribución conjunta sigue una distribución elíptica.

A pesar de ello puede ser asumido que en el modelo para el riesgo de primas y reservas no vida, las correlaciones que presenta QIS-5 son lineales, puesto que son utilizadas para la obtención de la desviación típica de la suma de variables aleatorias¹(*desviación estándar combinada*) mediante la agregación de los parámetros correspondientes a las desviaciones estándar de cada variable individual, en cuyo caso el coeficiente de correlación lineal produce una correcta agregación. En síntesis, el Modelo Estándar para el riesgo de primas y reservas no vida genera una medida de riesgo de una distribución dados unos parámetros, esperanza y varianza, de una variable aleatoria. Esto no debe ser confundido con la generación de una distribución cuya correlación entre marginales se corresponde con la matriz de correlación presentada en QIS.

En el caso del Modelo Interno propuesto, el comportamiento conjunto es modelizado mediante cópulas. Básicamente una cópula es la función de distribución de la transformación de un vector de variables aleatorias distribuidas arbitrariamente en un vector de variables aleatorias que se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0; 1]$.

En el Modelo Interno propuesto se utilizan las distribuciones Gaussiana y t-Student para modelizar el comportamiento marginal. El parámetro de dependencia adecuado entre variables aleatorias normales y/o t-Student cuando el comportamiento conjunto es Gaussiano y t-Student es la correlación lineal o de *Pearson*.

Pero, ¿qué sucede cuando el comportamiento de las variables aleatorias marginales no coincide con el comportamiento conjunto?, como por ejemplo en alguno

¹Ver sección 2.2.1

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

de los casos propuestos en el Modelo Interno. ¿Qué correlación es la adecuada?. El siguiente ejemplo clarifica la respuesta.

Ejemplo 4.

Supongamos el siguiente vector multivariante normal $X = \{X_1, X_2\}$. El coeficiente de correlación lineal entre las variables X_1 y X_2 viene dado por:

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}, \quad (4.1)$$

siendo, $Cov(X_1, X_2)$ la covarianza entre las variables X_1, X_2 y $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$, las desviaciones estándar de las variables X_1, X_2 , respectivamente.

Si se realiza una transformación de sobre las marginales del vector $X = \{X_1, X_2\}$ de manera que éstas quedan distribuidas uniformemente en el intervalo $[0; 1]$ se obtiene un nuevo vector $U = \{U_1, U_2\}$. El coeficiente de correlación lineal entre las variables U_1, U_2 viene dado por:

$$\rho_{U_1 U_2} = \frac{Cov(U_1, U_2)}{\sigma_{U_1} \cdot \sigma_{U_2}}. \quad (4.2)$$

El coeficiente $\rho_{U_1 U_2}$ es conocido como coeficiente de correlación por rangos o coeficiente de correlación de *Spearman*¹. La función de distribución que rige el comportamiento del vector $U = \{U_1, U_2\}$ es conocida como la cópula del vector $X = \{X_1, X_2\}$. En este caso particular, dado que el vector $X = \{X_1, X_2\}$ es normal multivariante, su cópula es conocida por cópula Gaussiana. Consecuentemente, el coeficiente de correlación adecuado para este tipo de cópulas² es la correlación por rangos de *Spearman*. Las Figuras 4.3 4.4 y muestran las funciones de densidad de la cópula Gaussiana bivalente y de la distribución normal multivariante de dos dimensiones, respectivamente.

¹El coeficiente de correlación por rangos fue introducido por Spearman (1904) [41]. Posteriormente, Kendall (1938) [29] propuso otro tipo de correlación por rangos.

²En general, el coeficiente de correlación adecuado para cópulas es la correlación por rangos, tanto de *Spearman* como de *Kendall*.

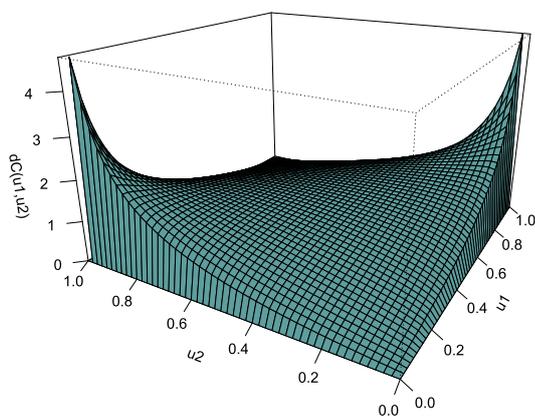


Figura 4.3: Densidad de la cópula Gaussiana bivalente. - Densidad de la cópula Gaussiana bivalente con correlación $-0,5$. Fuente: Propia

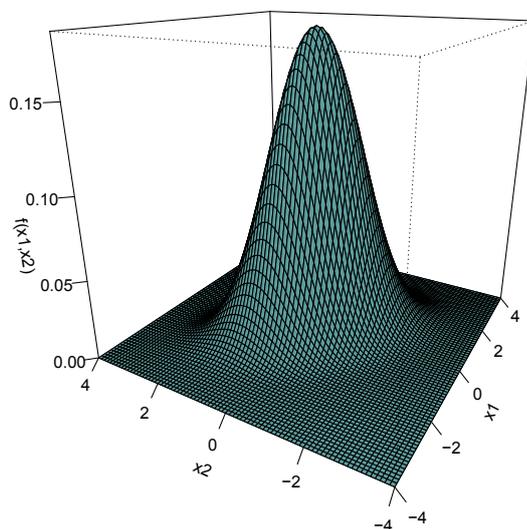


Figura 4.4: Función de densidad normal bivalente. - Función de densidad normal bivalente con correlación $-0,5$. Fuente: Propia

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

Sin embargo, como se comentó anteriormente, Iman y Conover (1982) [25] enunciaron la condición necesaria y suficiente para que un coeficiente de correlación lineal o de *Pearson* sea un coeficiente de correlación de *Spearman*, y viceversa. Básicamente, la condición consiste en que las variables aleatorias consideradas sean normales multivariantes. En dicho caso, resulta indiferente utilizar la correlación por rangos o de *Spearman* o la correlación lineal o de *Pearson*.

En el Modelo Interno que se propone, para modelizar el comportamiento conjunto de las variables aleatorias marginales se utiliza la cópula Gaussiana y la cópula t-Student. En el caso de la cópula Gaussiana, como se acaba de mostrar, resulta indiferente utilizar la correlación por rangos o la correlación lineal. El caso de la cópula t-Student es análogo¹ al caso de la cópula Gaussiana.

En resumen, en el Modelo Interno propuesto son utilizadas matrices de correlación lineales para modelizar el comportamiento conjunto de las variables aleatorias.

Una metodología cuantitativa para la estimación de cualquiera de los dos, el coeficiente de correlación lineal o por rangos, disfruta de ciertas ventajas. Por ejemplo, los estimadores son conocidos. Dada una muestra de observaciones empíricas de las variables aleatorias consideradas, la estimación de la matriz de correlación es fácilmente obtenida. Una desventaja de adoptar una metodología cuantitativa para la estimación de los coeficientes de correlación lineal es que es un parámetro altamente sensible a los valores de la muestra, lo que podría provocar gran inestabilidad en las estimaciones a medida que se incorporan nuevas observaciones a la muestra.

En la siguiente sección, con la finalidad de salvar las desventajas de las dos aproximaciones anteriores, la cualitativa y la cuantitativa, en esta sección se propone un método para la estimación de la matriz de correlación entre líneas de negocio basado en un Modelo de Credibilidad.

¹Ambas distribuciones pertenecen a la familia de distribuciones elípticas. Para más detalles acerca de este tipo de distribuciones y sus propiedades, ver Neil (2002) [32].

4.5 Modelo Bayesiano

Como es bien conocido, la metodología bayesiana constituye una forma más de aproximarse a los modelos de credibilidad (véase Gómez y Sarabia (2008) [22]). La idea de combinar, en este caso, la información del mercado con la información de una entidad aseguradora mediante una fórmula de credibilidad puede realizarse a partir del paradigma bayesiano. Esto es, combinando la información del mercado (información *a priori*) con la información de la entidad (información muestral) mediante el teorema de Bayes.

En la metodología bayesiana, alternativa a la estadística frecuentista o clásica, para la estimación de parámetros se siguen los siguientes pasos. En primer lugar, dada una variable aleatoria (Y) se especifica una distribución de probabilidad para los datos ($Y \sim f(\theta)$). A diferencia de la estadística frecuentista que considera el parámetro θ como una constante, el parámetro se considera una variable aleatoria y, por tanto, se especifica una distribución *a priori* para éste ($\pi(\theta)$). En tercer lugar, se determina la distribución conjunta o función de verosimilitud ($f(Y, \theta)$) y, aplicando el teorema de Bayes, se obtiene la distribución condicionada del parámetro θ después de observar la muestra, conocida como distribución *a posteriori* ($\pi(\theta|Y)$). A partir de la distribución *a posteriori* es posible hacer inferencia y predicción sobre el parámetro. Si tanto la distribución *a priori* como la distribución *a posteriori* pertenecen a una misma clase de distribuciones, se obtienen fórmulas bayesianas de credibilidad.

En el caso que se trata en esta tesis, se está interesado en una fórmula de credibilidad para el coeficiente de correlación ρ entre dos variables aleatorias, X e Y . Para ello, se toma el modelo bayesiano propuesto por Fisher (1915) [19] y reformulado más recientemente por Lee (1989) [31]. Siguiendo la notación de este último, se define (x_i, y_i) como un conjunto de n pares ordenados de observaciones con $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Se asume que los pares se distribuyen conjuntamente como una distribución normal bivalente con valores esperados μ_X y μ_Y , varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 y coeficiente de correlación $\rho_{XY} = \rho$. Además, el coeficiente de correlación muestral r se define como:

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2) \cdot (\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2)}} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} \quad (4.3)$$

donde,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n-1}.$$

Fisher (1915) [19], tras una serie de tediosas sustituciones, obtiene dos resultados interesantes para el propósito que se persigue. En primer lugar, utilizando distribuciones *a priori* estándar para μ_X , μ_Y , σ_X^2 y σ_Y^2 , y una vez aplicado el paradigma bayesiano, obtiene una razonable aproximación para la distribución *a posteriori* de ρ :

$$P(\rho|x, y) \propto P(\rho) \cdot \frac{(1 - \rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{(1 - \rho \cdot r)^{n - \frac{3}{2}}} \quad (4.4)$$

donde $P(\rho)$ es su correspondiente distribución *a priori*.

Y, en segundo lugar, sustituyendo $\rho = \tanh(\zeta)$ y $r = \tanh(z)$, y después de realizar otra aproximación, la variable aleatoria ζ se distribuye como una distribución normal de media z y varianza $\frac{1}{n}$:

$$\zeta \sim N\left(z, \frac{1}{n}\right) \quad (4.5)$$

Con la anterior sustitución, se consigue obtener una fórmula de credibilidad para el coeficiente de correlación ρ , de este modo, combinar diferentes fuentes de información. Por ejemplo, dado un coeficiente de correlación muestral *a priori* r_{pr} obtenido a partir de un conjunto de n_{pr} pares observados, se puede actualizar el conocimiento sobre el coeficiente de correlación mediante la información proveniente de un segundo conjunto de n_l pares observados con coeficiente de correlación muestral r_l . En este caso, se encuentra la situación descrita anteriormente de distribuciones *a priori* y *a posteriori* de la misma clase. Concretamente, la distribución *a posteriori* para ζ es normal con media y varianza:

$$z_{\text{post}} = \sigma_{\text{post}}^2 \times (n_{pr} \times \tanh^{-1}(r_{pr}) + n_l \times \tanh^{-1}(r_l)) \quad (4.6)$$

y

$$\sigma_{\text{post}}^2 = \frac{1}{n_{pr} + n_l}, \quad (4.7)$$

respectivamente.

A partir de z_{post} , es posible obtener un estimador puntual para el coeficiente de correlación ρ mediante $\hat{\rho} = \tanh(z_{\text{post}})$. El estimador propuesto es el resultado de combinar, mediante una fórmula de credibilidad, la información a *priori*, r_{pr} , con la información de la segunda muestra, r_l . La combinación lineal se establece mediante una ponderaciones, o factores de credibilidad, que dependen del número de observaciones de ambas muestras, n_{pr} y n_l .

El resultado anterior es aplicable al caso que trata esta tesis. En primer lugar, se definen las variables aleatorias X e Y sobre las que se pretende calcular el coeficiente de correlación. Su definición dependerá de la opción elegida para el cálculo del SCR, según se opte por el uso del Modelo Estándar con parámetros específicos, o bien, por un Modelo Interno.

En el primer caso, siguiendo a Gisler (2009) [21], la expresión analítica definida en (2.12) para obtener la aproximación al VaR necesaria para estimar el SCR, puede ser derivada a partir de considerar una variable aleatoria definida en la ecuación (2.13), que representa la variable aleatoria implícita en la fórmula estándar para el riesgo de prima y reservas para una línea de negocio i . En este caso, el objetivo sería la estimación del coeficiente de correlación entre las variables Z_i y Z_j , siendo i y j dos líneas de negocio distintas.

Para el caso en que se opte por un Modelo Interno, la definición de las variables aleatorias sobre las que se pretende estimar el coeficiente de correlación dependerá de la propia estructura del modelo. En el Modelo Interno propuesto en el Capítulo 3, el coeficiente de correlación a estimar es el definido en la ecuación (3.6), y está referido a las variables aleatorias que representan las predicciones del

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

resultado neto por cada línea de negocio.

En segundo lugar, deben ser valoradas las dos fuentes de información que serán combinadas en la fórmula de credibilidad para la obtención del coeficiente de correlación entre dos líneas de negocio. Por un lado, a partir de la experiencia de siniestralidad de cada entidad, recogida en una serie con n_l pares observados, se calculará el coeficiente de correlación muestral, r_l . Por otro lado, la información *a priori* es la aportada por el regulador a partir de la información de mercado. El coeficiente de correlación muestral *a priori*, r_{pr} , puede tomarse, por ejemplo, como el correspondiente coeficiente de correlación de la matriz de coeficientes de correlación entre líneas de negocio propuesto en QIS-5. Para la aplicación de la fórmula de credibilidad descrita anteriormente, tan sólo restará realizar alguna hipótesis sobre el número de pares observados, n_{pr} , a partir del cual el regulador ha determinado la información de mercado. Como se ha visto, esta información es necesaria para determinar la variabilidad de la distribución *a priori* del modelo bayesiano considerado.

No obstante, según se opte por un Modelo Estándar con parámetros específicos o por un Modelo Interno, la combinación de la información de mercado con la información empírica de cada entidad puede tener una interpretación distinta según la variable implícita que sea considerada. En primer lugar, se debería conocer la naturaleza de la matriz de correlaciones propuesta por el regulador para el uso en el Modelo Estándar (Tabla 2.2) y que representa la única información de mercado disponible. Tal como se indica en las especificaciones técnicas de QIS-5, para la agregación de los módulos de riesgo individuales con la finalidad de obtener el SCR, son aplicadas correlaciones lineales. Sin embargo, no se especifica qué variable implícita ha sido utilizada. Si se admite que la variable aleatoria implícita en esta matriz de correlaciones se corresponde con la variable propuesta por Gisler (2009) [21], y se opta por la utilización del Modelo Estándar con parámetros específicos, la información de mercado y la información empírica de cada entidad vienen representadas por la misma variable implícita. No ocurre lo mismo si es utilizado el Modelo Interno propuesto en el Capítulo 3 y la variable implícita en él. En este segundo escenario, debería tenerse en cuenta la posible distinta naturaleza

4.6 Aplicación de las estimaciones Bayesianas

de las informaciones combinadas en la fórmula de credibilidad.

Antes de presentar la aplicación práctica de este modelo, con datos reales, se muestra en un sencillo ejemplo cómo puede ser obtenido el coeficiente de correlación entre dos líneas de negocio a partir de la fórmula de credibilidad presentada.

Ejemplo 5.

Considérese que el coeficiente de correlación muestral entre dos líneas de negocio propuesto por el regulador, a partir de la información de mercado, es $r_{pr} = 0,5$. En este sencillo ejemplo, se supone que la información de mercado ha sido obtenida mediante una serie histórica correspondiente a los 10 últimos años, $n_{pr} = 10$.

Por otro lado, la entidad aseguradora ha obtenido un coeficiente de correlación muestral de $r_l = 0,16$, a partir de una serie histórica propia de los 11 últimos años, $n_l = 11$.

Aplicando la fórmula de credibilidad presentada anteriormente, sin más que sustituir los cuatro valores aquí asumidos, se obtiene:

$$z_{\text{post}} = \frac{1}{10+11} \times (10 \times \tanh^{-1}(0,5) + 11 \times \tanh^{-1}(0,16)) = 0,3461.$$

Y de ahí, el estimador puntual para el coeficiente de correlación entre las dos líneas de negocio resulta $\hat{\rho} = \tanh(0,3461) = 0,3329$.

4.6 Aplicación de las estimaciones Bayesianas

En esta sección se presenta cómo la estimación bayesiana de la matriz de correlación entre líneas de negocio es aplicada a la estimación del SCR utilizando el Modelo Estándar y la propuesta de Modelo Interno presentada en el Capítulo 3.

Para la obtención del SCR que se deriva del Modelo Estándar, se considera en primer lugar que todos los parámetros necesarios, con excepción de la matriz de correlación entre líneas de negocio, son los presentados por el regulador como *proxy*.

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

En segundo lugar, se obtiene el SCR que se deriva del Modelo Estándar a través de la estimación de nuevos parámetros para las desviaciones estándar de las variables que representan el riesgo de primas y reservas por línea de negocio a través de la Metodología I presentada en QIS-5 (ver Tabla 4.4), y con la matriz de correlaciones entre líneas de negocio estimada mediante el Modelo Bayesiano.

Asimismo, para poder realizar la estimación bayesiana de la matriz de correlación entre líneas de negocio, es también necesario realizar alguna hipótesis acerca del número de observaciones sobre las que el regulador ha formado sus estimaciones de los coeficientes de correlación. Esta información es necesaria para determinar la variabilidad de la función *a priori* del coeficiente de correlación en el Modelo Bayesiano.

Para ello se realizan tres hipótesis. En primer lugar, se considerara que el regulador forma sus estimaciones con un número de observaciones igual al número de observaciones que forman el histórico presentado en la sección 4.2, once ($n_{pr} = n_l = 11$). En segundo lugar se asumirán cincuenta observaciones ($n_{pr} = 50$) y, por último cien ($n_{pr} = 100$).

De la mismo modo al expuesto en el Ejemplo 5, una vez estimada la matriz de correlación entre líneas de negocio al completo combinando las estimaciones del regulador y las históricas obtenidas empíricamente, se está en disposición de obtener el SCR correspondiente al riesgo de primas y reservas. La Tabla 4.9 muestra las estimaciones del SCR que se derivan de la aplicación de distintas matrices de correlación bayesianas obtenidas asumiendo distintos número de observaciones, al Modelo Estándar con parámetros de QIS (Estándar) y, al Modelo Estándar con desviaciones típicas derivadas de la serie histórica tratada¹(Estándar^{específico}).

Para la estimación de la matriz de correlación entre líneas de negocio necesaria para el Modelo Interno propuesto en el Capítulo 3 es necesario asumir en primer lugar que las variables aleatorias relevantes son las que dan lugar a variable aleatoria presentada en la ecuación (3.2). Es decir han de ser obtenidos los coeficientes

¹Ver Tabla 4.4.

4.6 Aplicación de las estimaciones Bayesianas

Tabla 4.9: Estimación* SCR Modelo Estándar con correlaciones bayesianas.

Modelo	Matriz de correlación		Estimación del SCR
Estándar	Empírica		6.02
	Bayesiana	$n_{pr} = 11$	6.45
		$n_{pr} = 50$	6.61
		$n_{pr} = 100$	6.63
QIS-5		6.65	

Modelo	Matriz de correlación		Estimación del SCR
Estándar específico	Empírica		11.01
	Bayesiana	$n_{pr} = 11$	11.48
		$n_{pr} = 50$	12.95
		$n_{pr} = 100$	13.48
QIS-5		13.64	

Fuente: Propia / * Miles de millones de Euros

correspondientes a la ecuación (3.6). En segundo lugar es necesario asumir que las estimaciones de la matriz propuesta en QIS-5 responden al *juicio experto* del regulador sobre las mismas variables aleatorias.

La Tabla 4.10 presenta las estimaciones del SCR mediante el Modelo Interno propuesto en en Capítulo 3 asumiendo las estimaciones bayesianas para la matriz de correlación entre líneas de negocio.

Para los dos modelos, el menor SCR se obtiene con la matriz de correlaciones empírica. A medida que se incorpora la información de la matriz de correlaciones propuesta por el regulador, el SCR aumenta hasta alcanzar el máximo cuando exclusivamente se utilizan las correlaciones propuestas por el regulador en QIS-5. La variación en el SCR es mayor en el Modelo Interno que en la fórmula estándar.

Este resultado, por una parte, es consecuencia de combinar datos de distinta naturaleza en la estimación de las correlaciones en el Modelo Interno. Como ya se ha comentado, las correlaciones empíricas en este modelo lo son de una variable aleatoria implícita diferente a la que se supone para la fórmula estándar y, por tanto, para la matriz de correlaciones de QIS-5. Por otro parte, la variable aleatoria implícita para el Modelo Interno, las predicciones del resultado neto por línea de

4. CORRELACIONES EN LA ESTIMACIÓN DE LOS REQUERIMIENTOS DE CAPITAL

Tabla 4.10: Estimación* del SCR Modelo Interno con correlaciones bayesianas.

Matriz de correlación entre líneas de negocio estimada				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	5.95	-	-	-
4		10.01	6.32	10.59
10		7.08	6.12	7.03
35		6.22	5.99	6.25
Matriz de correlación entre líneas de negocio bayesiana, n= 11				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	6.97	-	-	-
4		11.48	7.56	12.48
10		8.25	7.27	8.59
35		7.31	7.10	7.41
Matriz de correlación entre líneas de negocio bayesiana, n= 50				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	7.71	-	-	-
4		12.48	8.36	13.80
10		9.09	8.02	9.48
35		8.03	7.80	8.15
Matriz de correlación entre líneas de negocio bayesiana, n= 100				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	7.89	-	-	-
4		12.76	8.49	14.04
10		9.23	8.21	9.71
35		8.19	7.97	8.30
Matriz de correlación entre líneas de negocio comonotonía				
	cópula Gaussiana		cópula t-Student	
marginales	Gaussianas	t-Student	Gaussianas	t-Student
g.l.	11.79	-	-	-
4		21.03	11.81	21.02
10		14.49	11.85	14.56
35		12.51	11.82	12.44

Fuente: Propia / g.l.: grados de libertad / * Miles de millones de Euros

negocio, presenta, para estos datos, unas desviaciones empíricas mayores que las propuestas por el regulador para la variable implícita de la fórmula estándar.

Esto no es el final. Puede que no sea siquiera el principio del final. Pero quizás es el final del principio.

Winston Churchill

CAPÍTULO

5

Conclusiones

Para finalizar, en este capítulo se presenta, en primer lugar, un resumen del trabajo realizado a lo largo de los capítulos 2 a 4 así como una discusión acerca de los aspectos relevantes que afectan a la estimación de los requerimientos de capital. En segundo lugar, se hace un repaso a las aportaciones que se han propuesto en esta tesis en relación a los modelos de estimación de capital. Por último, se hace énfasis en aquellos aspectos que han quedado fuera del alcance de esta tesis, pero que podrían ser realizados con la finalidad de mejorar la comprensión de los modelos de gestión de riesgos y, en consecuencia, obtener estimaciones de requerimientos más ajustadas al perfil de riesgo de las entidades aseguradoras.

5.1 Resumen

El Capítulo 1 sintetiza la estructura de la Directiva de Solvencia II y cuáles son los aspectos más relevantes de ésta. También son introducidos los estudios de impacto que han ido sucediéndose a lo largo de los últimos años, sobre el efecto que las normas de la Directiva tienen sobre las entidades. Se hace un repaso a los trabajos existentes en la literatura acerca de la estimación e implementación de modelos para la estimación de requisitos de capital en entidades aseguradoras. Por último,

5. CONCLUSIONES

se identifica la problemática que presenta la estimación de los requisitos de capital y se definen los objetivos de la tesis.

En el Capítulo 2 se analiza exhaustivamente el Modelo Estándar, en particular la fórmula estándar para el riesgo de primas y reservas no vida. Se repasan las hipótesis implícitas en el modelo y se define claramente la variable aleatoria implícita en él. Asimismo, se identifican algunas limitaciones en el uso de la fórmula estándar para el riesgo de primas y reservas no vida.

El Capítulo 3 presenta una propuesta de Modelo Interno como alternativa al Modelo Estándar. El modelo que se propone está basado en la estimación de una medida de riesgo de una muestra aleatoria procedente de una simulación Monte Carlo mediante el uso de cópulas. Además, se identifican también las limitaciones que presenta el modelo propuesto.

Un aspecto clave del modelo es la estimación de los parámetros de dependencia de los que dependen las cópulas, en el caso propuesto, la matriz de correlación entre líneas de negocio.

El Capítulo 4 se dedica a la estimación de la matriz de correlación entre líneas de negocio, necesaria tanto en el caso del Modelo Interno propuesto en el Capítulo 3, como para el caso en que se pretenda adaptar el Modelo estándar completamente al perfil de riesgo de la compañía. Se muestra, a través de un análisis de sensibilidad, el efecto que sobre el SCR tiene la matriz de correlación entre líneas de negocio en ambos modelos. Posteriormente se analiza qué metodologías pueden ser utilizadas para realizar la estimación de la matriz de correlación y se introduce el uso de modelos bayesianos para obtener dicha estimación.

5.2 Aportaciones

En el Capítulo 2 se determina la expresión que toma la variable implícita en el Modelo Estándar a partir del análisis de las hipótesis estadísticas asumidas en Sol-

vencia II y en QIS-5. Con ello, se persiguen dos objetivos. En primer lugar mejorar la comprensión del modelo y, en segundo lugar poder realizar las estimaciones de los parámetros específicos de la entidad necesarios para poder implementar el modelo adaptado completamente al perfil de riesgo de la compañía.

Con la finalidad de salvar las limitaciones que se identifican en el uso de la fórmula estándar se propone una modificación de la variable aleatoria implícita en el modelo. La modificación está basada en dos aspectos. El primero está relacionado con la hipótesis sobre la distribución de las variables aleatorias que representan el riesgo de primas y reservas por línea de negocio. El segundo aspecto está relacionado con el esquema de agregación de las variables aleatoria que representaban el riesgo de primas y reservas por línea de negocio, que pasa de ser aditivo a multiplicativo. Con ello, se logra una mayor consistencia de las estimaciones de los parámetros con las hipótesis de partida sobre la variable aleatoria que propone Solvencia II.

En el Capítulo 3 se propone un Modelo Interno alternativo al Modelo Estándar. Como paso previo, se define una variable aleatoria diferente a la implícita en el Modelo Estándar que también representa el riesgo de primas y reservas por línea de negocio. La variable aleatoria propuesta es consistente con la definición del SCR del artículo 101 de la Directiva, es decir representa la actividad existente y la prevista en los doce meses siguientes. Además, el Modelo Interno propuesto salva las limitaciones identificadas en el Capítulo 2 sobre el Modelo Estándar.

El Capítulo 4 introduce el uso de los modelos bayesianos como un caso particular de estimación, a través de un Modelo de Credibilidad, de la matriz de correlación entre líneas de negocio. Con ello se logran dos objetivos. El primero es fusionar dos fuentes de información, la del regulador (la matriz de correlación propuesta en QIS) y la de la entidad (estimación empírica de la matriz de correlación a partir de la información histórica). El segundo objetivo, se introduce un procedimiento, referido en el artículo 111 de la Directiva, para la actualización de los parámetros correspondientes a los coeficientes de correlación.

5. CONCLUSIONES

Este segundo objetivo es sumamente importante puesto que es un hecho que el regulador no ha realizado hasta la fecha, motivo por el cuál en el último estudio de impacto cuantitativo no se presenta ninguna metodología para la estimación de las matrices de correlación, y por lo tanto sólo era posible utilizar la *proxy* presentada por el regulador a efectos de realización del ejercicio QIS-5.

5.3 Futuras líneas de investigación

Existe todavía un amplio campo de investigación en lo que concierne a la estimación de los requerimientos de capital. Aunque existe bastante literatura en lo referente a la agregación de riesgos, computacionalmente existe un gran vacío sobre implementación y cálculo, lo que impide que en la práctica puedan ser llevados a cabo algunos modelos para la estimación de requerimientos de capital.

Un ejemplo de esto puede venir determinado por la implementación, como en el caso que se ha tratado en esta tesis, de modelos basados en cópulas. En el caso de que el número de observaciones que se dispongan en la serie histórica sea reducido, el ajuste de las distribuciones marginales puede resultar difícil. Este podría ser el caso de una serie histórica con pocas observaciones cuyas cuantías fueran muy elevadas. En un caso de este tipo, aún existiendo distribuciones para modelizar valores extremos, la agregación a través de cópulas de diversas variables aleatorias de estas características puede ser complicada, teniendo que recurrir a simulaciones a través de métodos *ad hoc*.

Por tanto, un futuro campo de trabajo es el estudio de modelos de agregación de riesgos a través del uso de cópulas, en el que las variables aleatorias marginales sean modelizadas con distribuciones no paramétricas o, la agregación de riesgos a través de distribuciones no paramétricas multivariantes. Los modelos no paramétricos permiten realizar ajustes en muestras en las que el número de observaciones es reducido y las cuantías muy elevadas. Un ejemplo de este tipo de muestras son las que se observan en entidades reaseguradoras, o en riesgos de tipos catastróficos.

5.3 Futuras líneas de investigación

Si bien los modelos no paramétricos son adecuados para el ajuste de muestras con escasas observaciones de valores muy elevados, queda pendiente estudiar qué sucede con muestras de escasas observaciones de valores poco elevados. En este caso, si se dispone de una fuente de información *a priori* a cerca del comportamiento de las variables tratadas, los modelos bayesianos ofrecen una alternativa a los modelos basados en simulaciones.

Por otra parte, como se ha visto a lo largo de los diversos capítulos de esta tesis, uno de los determinantes de la cuantía resultante del SCR es la determinación de la variable aleatoria subyacente. Aunque pueda resultar una obviedad, puede que el paso más importante en la creación de un Modelo Interno sea la definición de una variable aleatoria que refleje adecuadamente el riesgo a valorar. Un ejemplo de ello es la definición de una variable aleatoria que refleje el riesgo de mercado tal y como se define éste en Solvencia II, esto es, como reflejo del comportamiento de los diversos submódulos de riesgo que lo forman (renta fija, renta variable, concentración, . . .), o de cualquiera de los restantes riesgos definidos en Solvencia II (operacional, suscripción vida, crédito, . . .).

Siguiendo lo expuesto en el Capítulo 4 sobre la estimación de los parámetros de dependencia que rigen el comportamiento de las cópulas, resultaría útil seguir avanzando en la estimación a través de modelos de credibilidad. En esta tesis las estimaciones se realizaron a través del modelo de Fisher (1915) [19]. Este modelo asume que la distribución de probabilidad, tanto de la información *a priori*, como de la información empírica, es normal. Asumiendo como válido este modelo, es posible obtener estimaciones de los coeficientes de correlación lineal, válidos para su implementación en cópulas Gaussianas y t-Student. Sin embargo, en la medida que se abandone el uso de este tipo de cópulas, los parámetros de dependencia dejan de ser los coeficientes de correlación lineal. Al ser las copulas funciones de probabilidad de la transformación de un vector de variables aleatorias distribuido arbitrariamente en un vector de variables aleatorias distribuidas uniformemente en el intervalo $[0; 1]$, el coeficiente de correlación adecuado para el vector transformado es el coeficiente de correlación por rangos. De hecho, sólo podemos utilizar los coeficientes de correlación lineal en estas cópulas asumiendo que los valores que

5. CONCLUSIONES

genera la cópula proceden de una distribución normal multivariante, en cuyo caso el coeficiente de correlación lineal coincidiría con el coeficiente de correlación por rangos de *Spearman*.

Por este motivo, resultaría útil el estudio de modelos de credibilidad para la estimación de parámetros de dependencia que superen la hipótesis de normalidad multivariante, y que a la vez permitan incorporar información de carácter cualitativo o de mercado, e información procedente de la propia experiencia en la compañía.

Por último, una cuestión de vital importancia para las compañías aseguradoras es el análisis de la rentabilidad de los productos (seguros) que ofrecen o de una determinada línea de negocio. Las entidades suelen utilizar medidas que tienen en cuenta el riesgo del producto o de la línea de negocio para determinar la rentabilidad. Por ello, una cuestión importante es cómo puede realizarse una reasignación eficiente de los requerimientos de capital de solvencia (SCR) a subunidades de negocio inferiores.

Por lo tanto, medir la rentabilidad en función del riesgo soportado plantea dos cuestiones. La primera, qué medida es adecuada para realizar la medición de la rentabilidad. La segunda, qué metodología permite asignar eficientemente el riesgo soportado por una unidad de riesgo. Ambas cuestiones tienen un efecto sobre las decisiones a nivel estratégico de la entidad puesto que con la entrada en vigor de la nueva Directiva, el coste de capital de una determinada unidad de negocio puede repercutir en la inviabilidad de la misma, aunque en términos absolutos sea rentable.



A.1 El Valor en Riesgo

El valor en riesgo (VaR) de una variable aleatoria X obtenido a un nivel de confianza $\alpha \in [0; 1]$ puede ser definido por,

$$VaR_\alpha[X] = \text{ínfimo}\{x/P(X \geq x) = 1 - \alpha\} = F_X^{\leftarrow}(\alpha). \quad (\text{A.1})$$

siendo, F_X la función de distribución de X y F_X^{\leftarrow} su función inversa generalizada.

A.1.1 El Valor en Riesgo de una variable aleatoria Normal

Sea una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &\geq 1 - \alpha = \\ &= P\left(\frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \\ &P\left(Z \leq \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \geq 1 - \alpha, \end{aligned}$$

Con $Z \sim N(0, 1)$. El valor en riesgo de X es

A.

$$VaR_\alpha[X] = \mu_x + z_\alpha \cdot \sigma_x. \quad (\text{A.2})$$

siendo, z_α el valor de $Z \sim N(0, 1)$ tal que $P(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$.

A.1.2 El Valor en Riesgo de una variable aleatoria Lognormal

Considérese la siguiente transformación sobre una variable aleatoria aleatoria X distribuida normalmente $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$.

$$Y = e^X.$$

$$\begin{aligned} P(\ln(Y) \leq \ln(y)) &\geq 1 - \alpha = \\ &= P\left(\frac{\ln(Y) - \mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{\ln(y) - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \\ &= P\left(Z \leq \frac{\ln(y) - \mu_x}{\sigma_x}\right) \geq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

El valor en riesgo de Y es,

$$VaR_\alpha[Y] = e^{\mu_x + z_\alpha \cdot \sigma_x}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Metodología I para la calibración de los parámetros específicos de QIS-5

A.2.1 Desviación de primas por línea de negocio

Siguiendo la notación propuesta en QIS-5, la Metodología I para la estimación del parámetro desviación estándar de primas se realiza teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

- Las pérdidas esperadas son proporcionales a las primas devengadas.
- La varianza de las pérdidas es proporcional a las primas devengadas.

A.2 Metodología I para la calibración de los parámetros específicos de QIS-5

Se asume que el modelo para el riesgo de primas pérdidas es:

$$U_{Y,LoB} \sim V_{Y,LoB} \cdot \mu_{LoB} + \sqrt{V_{Y,LoB}} \cdot \beta_{LoB} \cdot \epsilon_{Y,LoB} \quad (A.4)$$

donde, $U_{Y,LoB}$ representa la última pérdida global, tras un año (de accidente) por línea de negocio, $V_{Y,LoB}$ representa el volumen de primas devengadas por año de accidente por línea de negocio, μ_{LoB} representa la ratio combinada esperada, definida como el cociente entre la siniestralidad más gastos derivados de la siniestralidad dividido por las primas devengadas en el ejercicio por línea de negocio, β_{LoB}^2 es la constante de proporcionalidad de la varianza de las pérdidas por línea de negocio y, $\epsilon_{Y,LoB}$ es cualquier variable aleatoria con función de distribución con media cero y varianza unitaria.

La desviación típica a estimar resulta en:

$$\sigma_{pr}^{LoB} = \frac{\hat{\beta}_{LoB}}{\sqrt{V_{LoB}}} \quad (A.5)$$

Por tanto, teniendo en cuenta las hipótesis del modelo, el objetivo es estimar el parámetro β_{LoB} mediante la minimización de la varianza implícita en el modelo de la variable aleatoria, $\tilde{\beta}_{LoB}$, o a través de máxima verosimilitud.

La Metodología I para la estimación del parámetro desviación estándar de primas por línea de negocio se realiza teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

- El volumen de reservas esperadas en un año más la variación esperada en el volumen de reservas son el *best estimate* de los siniestros pendientes de liquidación.
- La varianza del *best estimate* de un año más la variación es proporcional al *best estimate actual*.

A.2.2 Desviación de reservas por línea de negocio

El modelo para el riesgo de reservas es:

A.

$$R_{Y,LoB} \sim V_{Y,LoB} + \sqrt{V_{Y,LoB}} \cdot \beta_{LoB} \cdot \epsilon_{Y,LoB} \quad (\text{A.6})$$

donde, $R_{Y,LoB}$ es el *best estimate* para siniestros pendientes más la variación en las reservas para todas las exposiciones cubiertas por la medida de volumen, por año de calendario y línea de negocio, $V_{Y,LoB}$ es una medida de volumen por año de calendario y línea de negocio, β_{LoB} es una constante de proporcionalidad de la varianza del *best estimate* más la variación en las reservas y, $\epsilon_{Y,LoB}$ es una variable aleatoria de media cero y varianza unitaria.

La desviación típica a estimar resulta en:

$$\sigma_{res}^{LoB} = \frac{\hat{\beta}_{LoB}}{\sqrt{V_{LoB}}} \quad (\text{A.7})$$

Por tanto, teniendo en cuenta las hipótesis del modelo, el objetivo es estimar el parámetro β_{LoB} mediante la minimización de la varianza implícita en el modelo de la variable aleatoria, $\tilde{\beta}_{LoB}$, o a través de máxima verosimilitud.

A.3 Definición de cópula

Definición 4 Una cópula es la distribución de un vector aleatorio definido en \mathbb{R}^d con marginales distribuidas uniformemente, o alternativamente una cópula es cualquier función $C : [0; 1]^d \rightarrow [0; 1]$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $C(x_1, \dots, x_d)$, es creciente en cada componente x_i .
2. $C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i; \forall i \in \{1, \dots, d\}, x_i \in [0; 1]$.
3. $\forall (a_1, \dots, a_d)', (b_1, \dots, b_d)' \in [0; 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ tenemos que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(x_{1i_1}, \dots, x_{di_d}) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

donde $x_{j1} = a_j$ y $x_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, \dots, d\}$.

A.4 Correlaciones entre las componentes del resultado neto por línea de negocio

A.4 Correlaciones entre las componentes del resultado neto por línea de negocio

Tabla A.1: Correlaciones entre las componentes del resultado técnico por líneas de negocio definidas en QIS-5.

l.n.	$x_{1,t}$	$x_{2,t}$	$x_{3,t}$	$x_{4,t}$	l.n.	$x_{1,t}$	$x_{2,t}$	$x_{3,t}$	$x_{4,t}$	
I	$x_{1,t}$	1			V	$x_{1,t}$	1			
	$x_{2,t}$	0.94	1			$x_{2,t}$	0.88	1		
	$x_{3,t}$	0.95	0.85	1		$x_{3,t}$	0.67	0.34	1	
	$x_{4,t}$	0.50	0.35	0.58		1	$x_{4,t}$	0.81	0.96	0.37
II	$x_{1,t}$	1			VI	$x_{1,t}$	1			
	$x_{2,t}$	0.76	1			$x_{2,t}$	0.14	1		
	$x_{3,t}$	0.95	0.79	1		$x_{3,t}$	-0.34	0.67	1	
	$x_{4,t}$	0.38	0.40	0.40		1	$x_{4,t}$	0.13	0.03	-0.48
III	$x_{1,t}$	1			VII	$x_{1,t}$	1			
	$x_{2,t}$	0.84	1			$x_{2,t}$	0.75	1		
	$x_{3,t}$	0.79	0.86	1		$x_{3,t}$	0.62	0.86	1	
	$x_{4,t}$	0.73	0.59	0.54		1	$x_{4,t}$	0.63	0.80	0.73
IV	$x_{1,t}$	1			VIII	$x_{1,t}$	1			
	$x_{2,t}$	0.89	1			$x_{2,t}$	0.98	1		
	$x_{3,t}$	0.87	0.72	1		$x_{3,t}$	0.97	0.94	1	
	$x_{4,t}$	0.14	0.16	-0.22		1	$x_{4,t}$	0.14	0.24	-0.08
IX	$x_{1,t}$	1			IX	$x_{1,t}$	1			
	$x_{2,t}$	0.70	1			$x_{2,t}$	0.70	1		
	$x_{3,t}$	0.20	0.00	1		$x_{3,t}$	0.20	0.00	1	
	$x_{4,t}$	0.59	0.49	-0.24		1	$x_{4,t}$	0.59	0.49	-0.24

Fuente: Propia / l.n.: línea de negocio

B.1 Publicaciones del autor relacionadas con esta tesis

B.1.1 Artículos publicados

1. L. Bermúdez y A. Ferri. Fórmula de Credibilidad para la estimación de la correlación entre líneas de negocio del módulo de suscripción no vida. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 151-170, 2012.
2. C. Bolancé, A. Ferri y M. Santolino. Posicionamiento de las entidades aseguradoras del ramo de vida ante la puesta en marcha de programas de Enterprise Risk Management. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 187-241, 2010.
3. A. Ferri, M. Alcañiz y L. Bermúdez. Sensibilidad a las correlaciones entre líneas de negocio del SCR del módulo de suscripción no vida basado en la fórmula estándar. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 75-90, 2011.
4. A. Ferri, M. Guillén y L. Bermúdez. A Correlation Sensitivity Analysis of non life underwriting risk in Solvency Capital Requirement estimation. *Astin Bulletin*, aceptado, 2012.

B.

B.1.2 Artículos publicados en revistas indexadas

1. A. Ferri, M. Guillén y L. Bermúdez. Solvency Capital Estimation and Risk Measures. *Lecture Notes in Business Processing*, 115, 34-43, 2012.

B.1.3 Capítulos y Working Papers

1. A. Ferri. Sensibilidad del SCR del riesgo de suscripción no vida del mercado español. Aproximación Estándar versus Modelo Interno. En *Investigaciones en Seguros y Gestión del Riesgo: Riesgo 2011*. Fundación Mapfre. Cuadernos de la Fundación, 171. ISBN 978-84-9844-263-2, 2011.
2. A. Ferri, L. Bermúdez y M. Guillén. How to use the Standard Model with own Data?. *Xarxa de Referència en Economia Aplicada*. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1996805>, 2012.
3. A. Ferri, P. Rodríguez y M. J. Romero. La Gestión de Riesgos. En *Estudio sobre el Sector Asegurador en España 2010: Los aspectos cualitativos de Solvencia II*, Colección Papeles de la Fundación. ISBN 978-84-614-5847-9, 2010.

Bibliografía

- [1] P. G. Alonso and I. L. Albarrán. *Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping*. Fundación Mapfre, Madrid, 2008.
- [2] P. Artzner, F. Delbaen, F. Eber, and J. M. Heath. Coherent Measures of Risks. *Mathematical Finance*, 3(9):203–228, 1999.
- [3] S. Ashby. Lessons for Insurance Solvency Regulation. *The Geneva Papers on Insurance and Risk. Issues and Practice*, (36):330–347, 2011.
- [4] H. Bühlmann and A. Gisler. *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer, Berlin, 2005.
- [5] M. Cruz. *The Solvency II Handbook: Developing ERM frameworks in Insurance and Reinsurance companies*. Risks Books, London, 2009.
- [6] D. Cummis, S. Harrington, and G. Niehaus. An Economic overview of Risk based Capital Requirements for the property-liability industry. *Journal of the Insurance Regulation*, (11):427–447, 1994.
- [7] J. Demarta and A. J. McNeil. International statistical review. *The t-Copula and related copulas*, 1(73):111–129, 2005.
- [8] R. Doff. A critical Analysis of the Solvency II proposals. *The Geneva Papers on Insurance and Risk. Issues and Practice*, (33):193–206, 2008.

BIBLIOGRAFÍA

- [9] D. Duverne and J. Le Douit. IFRS Phase II and Solvency II. Keys Issues and Current debates. *The Geneva Papers on Insurance and Risk. Issues and Practice*, (34):47–55, 2009.
- [10] P. Embrechts, A. Höing, and A. Juri. Using Copulae to bound the Value at Risk for Functions of Dependent Risks. *Finance Stochastic*, 2(7):145–167, 2003.
- [11] P. Embrechts, A. McNeil, and Frey R. *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, New Jersey, 2005.
- [12] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann. *Value at Risk and Beyond. Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls*. Cambridge University Press, London, 2002.
- [13] P. Embrechts and G. Puccetti. Aggregating risk capital with an application to operational risk. *The Geneva Papers on Insurance and Risk. Issues and Practice*, (31):71–90, 2006.
- [14] M. Englund, M. Guillén, J. Gustafsson, L. H. Nielsen, and P. J. Nielsen. Multivariate Latent Risks: a Credibility Approach. *Astin Bulletin*, 1(38):137–146, 2008.
- [15] K. T. Fang, S. Kotz, and K. W. Ng. *Symmetric Multivariate and related Distributions*. Number 33. Chapman&Hall, New York, 1990.
- [16] A. Ferri, L. Bermúdez, and M. Alcañiz. Sensibilidad a las correlaciones entre líneas de negocio del SCR del módulo de suscripción no vida basado en la fórmula estándar. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 1:75–90, 2011.
- [17] A. Ferri, L. Bermúdez, and M. Guillén. How to use the Standard Model with own data? Technical report, Xarxa de Refèrència en Economia Aplicada, <http://ssrn.com/abstract=1996805>, 2011.
- [18] A. Ferri, M. Guillén, and L. Bermúdez. Solvency Capital Estimation and Risk Measures. *Lecture Notes in Business Information Processing*, (115):34–43, 2012.

- [19] R. A. Fisher. Frequency Distributions of the Values of the Correlation Coefficients in Sample of Indefinitely Large Population. *Biometrika*, (10):507–521, 1915.
- [20] M. Fréchet. Les tableaux de Corrélacion dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon. Sciences Mathématiques et Astronomie. Serie A*, (4):13–31, 1957.
- [21] A. Gisler. The Insurance Risk in the SST and in Solvency II: Modeling and Parameter estimation. Technical report, ASTIN Colloquium in Helsinki, 2009.
- [22] E. Gómez-Déniz and J. M. Sarabia. *Teoría de la Credibilidad: Desarrollos y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales*. Fundación Mapfre, Madrid, 2008.
- [23] W. Höfding. Massstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, (5):181–233, 1940.
- [24] D. Hörung and H. Gründl. Investigating Risk Disclosure Practices in the European Insurances Industry. *The Geneva Papers. Issues and Practice*, (36):380–413, 2011.
- [25] R. L. Iman and W. Conover. A Distribution Free-Approach to inducing Rank Correlations between Random Variables. *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, (11):311–334, 1982.
- [26] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman&Hall, London, 1997.
- [27] P. Jorion. *Value at Risk. The new Benchmark for measuring Financial Risks*. McGraw Hill, New York, 2007.
- [28] M. Kelly, A. Kleffner, and D. Leadbetter. Structures, Principles and Effectiveness of Insurance Regulation in the 21st. Century: Insights from Canada. *The Geneva Papers. Issues and Practice*, (37):155–174, 2012.

BIBLIOGRAFÍA

- [29] M. Kendall. A New Measure of Rank Correlation. *Biometrika*, 2(1):81–89, 1938.
- [30] R. W. Klein. Principles for Insurance Regulation: An Evaluation of Current Practices and Potencial Reforms. *The Geneva Papers. Issues and Practice*, (37):175–199, 2012.
- [31] P. M. Lee. *Bayesian Statistics: An Introduction*. Oxford University Press, New York, 1989.
- [32] T. M. Neil. *Applied Multivariate Analysis*. Springer, New York, 2002.
- [33] R. B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer, New York, 1999.
- [34] D. Pfeifer and D. Straussburger. Stability problems with the SCR aggregation formula. *Scandinavian Actuarial Journal*, (1):61–77, 2008.
- [35] A. Sandström. *Solvency. Models, Assesment and Regulation*. Chapman&Hall, New York, 2006.
- [36] A. Sandström. Calibration for Skewness. *Scandinavian Actuarial Journal*, (2):126–134, 2007.
- [37] A. Sandström. *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers. Theory and practice*. Chapman&Hall, New York, 2011.
- [38] N. Savelli and G. P. Clemente. Modeling aggregate non-life underwriting: Standard Formula vs Internal Model. *Giornale del l'Institute degli Attuari*, (72):295–333, 2009.
- [39] N. Savelli and G. P. Clemente. Hierarchical structures in the aggregation of premium risk for insurance underwriting. *Scandinavian Actuarial Journal*, (3):193–213, 2010.
- [40] A. Sklar. Fonctions de répartition á n dimensions et leurs marges. *Publications de l' Institute de Stadistique de l'Université de Paris*, (8):229–231, 1959.

BIBLIOGRAFÍA

- [41] C. Spearman. The Proof and Measurement of Association between Two Things. *The American Journal of Psychology*, (15):72–101, 1904.
- [42] T. Steffen. Solvency II and the work of CEIOPs. *The Geneva Papers on Insurance and Risk. Issues and Practice*, (33):60–65, 2008.

Declaración

Por la presente declaro que he realizado esta tesis sin la asistencia prohibida de terceros y sin hacer uso de otras ayudas a las especificadas. Las nociones tomadas de forma directa o indirecta de otras fuentes han sido identificadas como tal. Este trabajo no ha sido previamente presentado en forma idéntica o similar.

El trabajo de tesis se llevó a cabo a partir de 2009 a 2013 bajo la supervisión del Dr. Lluís Bermúdez Morata y de la Dra. Montserrat Guillén Estany en la Universitat de Barcelona.

Barcelona,

Esta tesis fue terminada de escribir en Barcelona en 28 de Agosto de 2012.

