ESTUDI ALGEBRAIC

DE CERTES LOGIQUES INTUICIONISTES MODALS

JOSEP MARIA FONT I LLOVET

ESTUDI ALGEBRAIC

DE CERTES LÒGIQUES INTUICIONISTES MODALS

ESTUDI ALGEBRAIC

DE CERTES LÒGIQUES INTUICIONISTES MODALS

per

JOSEP MARIA FONT I LLOVET

Vº Bº
el Director

Memòria presentada per a optar al Grau de Doctor
en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona,
dirigida pel Dr. Francesc d'Assís Sales Vallès,
Director del Departament d'Estadística Matemàtica .

Barcelona , 1981

INTRODUCCIÓ

Cap a començaments de segle la lògica matemàtica veié l'aparició entre d'altres de dos sistemes de lògica que malgrat haver sorgit de forma totalment independent tenien almenys dos trets en comú: uns orígens que podríem situar a les insegures regions frontereres entre la lògica, la matemàtica i la filosofia, i el fet que ambdós sistemes proposaven alternatives al significat i l'ús dels conceptes "afirmar" i "negar" (un enunciat matemàtic o de qualsevol mena). Ens referim a la lògica intuicionista i a la lògica modal.

L'intuicionisme neix enmig de la famosa "crisi de fonaments" defensant els mètodes constructivistes per a l'activitat matemàtica en general; com a conseqüència hom obté una lògica que no admet la validesa del principi del tercer exclòs ni de les demostracions per reducció a l'absurd, cosa que naturalment duu a modificar el concepte de negació. Al marge de les qüestions filosòfiques suscitades, a partir d'aquí s'ha desenvolupat la lògica intuicionista, que, curiosament, té una sintaxi molt ben establerta , com a subsistema de la lògica clàssica, però en canvi no disposa d'una semàntica "canònica" com ho és l'àlgebra de Boole de dos elements en el cas clàssic. Entre les que han estat proposades en trobem de topològiques, d'algebraiques i reticulars (àlgebres de Heyting i espais P.O.), les taules de Beth i els arbres de Hintikka, els models de Kripke, la semàntica de Kleene, un tipus de models valorats en àlgebres de Heyting i dos tipus de models que utilitzen alguna mena de forcing ; algunes d'aquestes classes de models tenen teoremes de completesa però d'altres no.

Així com l'intuicionisme aporta una nova visió, més estricta, de l'activitat específicament matemàtica, les arrels de la lògica modal són més marcadament filosòfiques i incorporen idees i problemes tractats pels lògics antics i posteriorment oblidats. La lògica modal actual és el resultat del renaixement i confluència de dues qüestions diverses: una, les teories de la modalitat dels filòsofs grecs i medievals, que estudien diferentes formes d'afirmar o negar un enunciat qualsevol: necessitat, contingència, impossibilitat, etc..[1] ; l'altra, els intents de formalitzar la idea de "vinculació" ("entailment") o "implicació estricta", llargament discutida a l'escola megàrico-estoica i que encara avui és objecte de controvèrsia. Malgrat que aquest segon era l'objectiu conscient dels creadors de la moderna lògica modal (H.C. MacColl, C.I. Lewis, ...) llur contribució fou més significativa al problema que hem esmentat en primer lloc[2].

L'aparició de treballs purament algebraics sobre les lògiques esmentades va ser precedida per un període de popularització del mètode de les matrius lògiques, duta a terme durant els anys vint i trenta per l'escola polonesa i especialment per J. Łukasiewicz i A. Tarski (veure, per exemple, l'extens estudi col.lectiu [33][3], sobre les matrius) , i per l'aparició d'algunes relacions entre el càlcul proposicional i la topologia, descobertes per Tarski per a l'intuicionisme, a [68] , i per T. Tsao-Chen per a la lògica modal a [70] . Les primeres interpretacions algebraiques d'ambdós sistemes són les reticulars de G. Birkhoff [3] i M.H. Stone [63] , ja a finals de la dècada dels trenta. A la dècada dels quaranta precisament Tarski , ja a Amèrica i junt amb J.C.C. McKinsey, reprengué el tema publicant els primers estudis netament algebraics, sense pràcticament referències a la lògica, de les estructures algebraiques corresponents a la lògica modal S4 (les àlgebres de clausura, [35]) i a la intuicionista (aleshores les àlgebres de Brouwer, [36]) ; ambdós autors, a [37] , establiren diversos resultats, entre ells teoremes de completesa i decidibilitat, per a les dues lògiques usant les tècniques que havien desenvolupat.

Els estudis algebraics d'ambdós sistemes han seguit des d'aleshores una història rica i complexa. Les àlgebres duals de les de Brouwer han rebut el nom d'àlgebres pseudo-Booleanes als treballs [50] i [51] de H. Rasiowa i R. Sikorski , i el d'àlgebres de Heyting a l'escola d'A. Monteiro, que creà una metodologia pròpia per als estudis algebraics d'una àmplia classe de càlculs proposicionals, entre els que cal destacar pel seu valor sistematitzador el treball d'A. Diego [11]. També els algebristes ocupats en teoria de reticles han estudiat les àlgebres de Heyting en tant que reticles residuats, sota el nom de reticles implicatius.

En l'algebrització de la lògica modal[4] era natural d'intentar per a tots els sistemes existents el mateix que hom havia ja aconseguit per a S4. Així C. Davis a [10] creà els "operadors S4" i els "operadors S5", que foren represos per Monteiro a [39] ; d'altra banda a [30] E.J. Lemmon definí les "àlgebres d'extensió" com a models del sistema T, i posteriorment, a [31] , algebritzà un seguit de sistemes més febles inspirats en les lògiques deòntica i epistèmica. Finalment cal dir que les "àlgebres S5" de Davis coincidiren amb les "àlgebres monàdiques" definides i estudiades per P.R. Halmos als treballs recollits a [23] , malgrat que la intenció d'aquest autor era donar una algebrització del càlcul de predicats de primer ordre, problema que havia suscitat L. Henkin uns anys abans a [24] ; de tota manera aquesta línia no va prosperar ja que no tenia en compte la presència de les variables respecte les quals es quantifica i ha calgut recórrer, per a l'esmentat propòsit, a les àlgebres poliàdiques (creades pel mateix Halmos) i a les àlgebres cilíndriques (creades per Tarski i altres).

Cap dels treballs esmentats al paràgraf anterior no abandona el substracte de les àlgebres de Boole. Sikorski, a [60] i [61] , va fer una extensió a σ-àlgebres dels primers treballs de McKinsey i Tarski, però els desenvolupà vers una orientació més topològica que no pas lògica. I malgrat que potser ara ens sembla força natural, han estat molt pocs els que s'han interessat per la debilitació de l'estructura Booleana de les àlgebres de clausura, monàdiques i similars. Fins a la segona meitat de la dècada dels setanta no apareix pràcticament cap treball algebraic en aquest sentit.

Malgrat tot, hi ha hagut alguns intents de construir sistemes lògics alhora intuicionistes i modals. Ja l'any 1948 F.B. Fitch donà, a [14] , uns axiomes per a un càlcul de predicats intuicionista modal, però no aprofundí en aquesta línia i no va tenir seguidors. Cap a finals dels cinquanta el filòsof A.N. Prior al seu llibre [48] proposà un sistema, que anomenà MIPC, obtingut del càlcul proposicional intuicionista afegint-hi dos operadors primitius L i M governats per quatre regles de deducció (que exposem resumidament a la pàgina 146) i del que el seu deixeble R.A. Bull inicià unes anàlisis semàntiques a l'estil algebraic a [8] i a l'estil kripkià a [9] ; en el primer d'aquests treballs plantejà Bull alguns dels problemes que es presenten si hom vol definir un sistema de lògica intuicionista modal (vegeu més endavant) però no va treballar més en aquesta direcció. Fa pocs anys es van publicar alguns articles[5] (G. Fischer-Servi [13] , H. Ono [41]) que reprenen els interrogants que Bull havia posat sobre la taula; Fischer-Servi aprofundeix en la mateixa línia de Bull, que algebraicament no encaixa en el conjunt de les estructures conegudes sinó en casos extrems, i Ono, que només treballa amb l'operador L, obté estructures semblants a les nostres però adopta un punt de vista global i es dedica a estudiar un cert reticle de lògiques intuicionistes modals sense aprofundir especialment en cap de concreta. Per últim cal esmentar l'intent [40] d'A. Monteiro i O. Varsavski de fer per a l'intuicionisme quelcom paral.lel als treballs de Halmos, definint unes "àlgebres de Heyting monàdiques", que cal no confondre amb les nostres àlgebres de Heyting topològiques monàdiques, i que han resultat ser molt semblants a les de Fischer-Servi; malhauradament van publicar només un resum de llurs estudis, sense demostracions, i que contenia alguns enunciats erronis. La desaparició de Monteiro a l'Argentina (on s'havia establert després d'uns anys d'haver-se exiliat de Portugal) i la d'alguns deixebles seus i la dispersió de la seva escola ens han privat de posteriors aportacions.

El nostre treball, situant-lo en el panorama que hem desplegat, és un estudi algebraic (en el sentit que té aquest terme quan es parla de lògica algebraica) de tres sistemes de lògica intuicionista modal que anomenem IM4, IM5 i IMC ; el primer és un anàleg intuicionista del sistema S4 de Lewis, el segon ho és d'S5 , i el tercer també ho és en cert sentit, però en un altre sentit és un sistema clàssic. Expliquem primer què volem dir amb això de "anàleg intuicionista de ...".

Tots els autors que han treballat en aquest camp han considerat que el plantejament de Bull a [8] és especialment encertat. Segons ell, per a poder dir que un determinat sistema Y de lògica proposicional és la versió intuicionista de determinat sistema X de lògica modal clàssica conegut, cal que es donin dues condicions: a) Y ha de ser "intuicionísticament plausible", que vol dir que col.lapsant-hi els operadors modals (és a dir, fent Lp i Mp equivalents a p) el sistema Y ha d'esdevenir el càlcul intuicionista sense més; i b) Y ha de ser anàleg a X en el sentit que si afegim a Y l'axioma $p \vee \neg p$ (que és el que li falta a l'intuicionisme per a esdevenir el càlcul clàssic) hem d'obtenir exactament el sistema X . Quan parlarem de "l'anàleg intuicionista de ..." ho farem en aquest sentit.

A [7] observa Bull que si pretenem que els dos operadors L i M es puguin definir l'un en termes de l'altre i recíprocament(com passa als sistemes modals clàssics) aleshores no es pot satisfer la condició a); per tant és ben clar que qualsevol lògica intuicionista modal acceptable hauria de renunciar a la mútua interdefinibilitat dels dos operadors, i aleshores se'ns planteja una disjuntiva: o admetem els dos operadors com a primitius i independents i els imposem axiomàticament alguns lligams, menys forts, o bé n'adoptem només un com a primitiu, i en aquest cas també podem optar per prescindir de l'altre o bé per definir-lo en funció de l'escollit com a primitiu. La solució més comú és la primera, en la que priven raons més o menys filosòfiques sobre el sentit dels conceptes "necessitat" i "possibilitat"; és la que adopten Prior, Bull, Fischer-Servi, i Ono[6].

La nostra <u>primera opció</u> ha consistit justament en agafar la segona possibilitat: un operador primitiu i l'altre definit; la nostra <u>segona opció</u> ha estat prendre L com a primitiu i definir M com $\neg L \neg$, i treballar alhora amb els dos operadors, posició que, creiem, és fins ara inèdita. A partir d'aquestes opcions hom obté de forma completament canònica el sistema IM4 com a anàleg intuicionista del sistema S4, si prenem aquest amb l'axiomatització de K. Gödel [18] i M. Wajsberg [81] . Però a l'hora d'obtenir el corresponent a S5 ens hem trobat amb una llarga llista d'axiomes que es poden usar alternativament per a definir el sistema S5 a partir de l'S4, però que sobre la base de l'IM4 no són equivalents i donen lloc almenys a cinc sistemes diferents (vegeu la discussió detallada de la secció IV.1). Se'ns ha plantejat per tant una <u>tercera opció</u> que hem resolt afegint a IM4 l'esquema d'axioma $\neg Lp \rightarrow L\neg Lp$ per a obtenir el sistema IM5, i l'esquema $L\neg Lp \vee Lp$ per a obtenir el sistema IMC . Aleshores ens hem centrat en l'estudi d'aquests tres sistemes i dels seus models algebraics, les àlgebres de Heyting topològiques (aHt), les aHt monàdiques i les aHt semisimples respectivament[7].

Resulta clar que hi ha moltes solucions a les disjuntives plantejades per Bull, i que no es pot parlar de "la" solució correcta; com a màxim podríem distingir solucions més o menys interessants, o més o menys fecundes. Tot seguit exposem algunes de les raons i dels resultats que en la nostra opinió fan prou interessants i relativament encertades les nostres tres opcions :

1. En un reticle podem definir tant interiors com clausures, però en una estructura sols implicativa només podem definir els interiors. Desconeixem cap definició d'operador clausura en termes de la implicació[8].
2. Mentre que a tot conjunt ordenat provist d'una negació $\neg$ a partir d'un interior I la fórmula $\delta = \neg I \neg$ ens dóna una clausura, no passa el mateix si partim d'una clausura δ i volem definir $I = \neg\delta\neg$. El resultat no té perquè ser un interior[9]; i a l'exemple VI.12 veiem que això pot passar fins i tot encara que la clausura inicial tingui totes les propietats que pot arribar a tenir la clausura d'una aHt.

3. Un cop adoptat L com a primitiu i imposant axiomes només sobre ell (veure la definició V.1.1 i les de la secció I.1) , l'operador definit per $M = \neg L \neg$ té moltes de les propietats de l'operador de possibilitat, fins al punt que les lògiques IM5 i IMC es poden definir afegint a IM4 lleis de reducció de modalitats (LM a M i ML a L respectivament) que clàssicament converteixen S4 en S5 (proposicions IV.2.5 i IV.3.12) .
4. Les tres classes d'àlgebres examinades ens permeten desenvolupar semàntiques àlgebraiques per a les lògiques IM4, IM5 i IMC que satisfan els corresponents teoremes de completesa (proposicions V.1.5 , V.2.3 i V.3.2); però a més llur estructura algebraica és un reflex fidel de llur estructura lògica, ja que les imatges algebraiques de les teories lògiques, que són els sistemes deductius (conjunts que contenen l'element màxim i són tancats per les regles de deducció), formen un reticle isomorf al reticle de les congruències de l'àlgebra (proposició II.1.2) .
5. La intenció de buscar anàlegs intuicionistes de certes lògiques modals que siguin el més "naturals" possible es veu confirmada pel capteniment en absolut patològic que presenten les àlgebres de Heyting topològiques, En efecte, la lògica abstracta definida pels sistemes deductius és una "lògica finitària de Heyting amb element inconsistent" (proposició II.2.11), i les tres operacions binàries que satisfan el Teorema de la Deducció es comporten igual que el producte de les àlgebres de Heyting pel que fa a la caracterització de conceptes del reticle dels sistemes deductius com la irreductibilitat, la maximalitat, el radical, etc... En aquest sentit són interessants les proposicions

II.2.4 i 7, III.1.3, 2.3, 3.3, 4.2 i 7 . D'altra banda l'operació binària que funciona com un suprem respecte la lògica abstracta defineix un tipus de sistemes deductius primers que coincideixen amb els irreductibles (proposició III.1.1) .

6. Veurem (proposició V.3.3) que el sistema IMC no és "intuicionísticament plausible"; entre els diversos sistemes situats entre IM4 i IMC (veure IV.1), el sistema IM5 que hem escollit destaca per la seva "naturalitat" tant des del punt de vista algebraic com lògic. En efecte, podem definir els seus models, les aHt monàdiques, per condicions algebraiques (tot tancat és obert, les tres negacions naturals coincideixen, el conjunt d'oberts és tancat per la negació) o bé per condicions d'origen lògic (reducció de modalitats, axioma i regla de Becker, etc...), i tenen propietats algebraiques força interessants, que a més redrecen algunes desviacions observades a les aHt : s'hi unifiquen els tres tipus d'elements peirceans, els dos tipus d'elements densos (corol.lari de la proposició IV.2.10),els dos tipus d'elements regulars, i s'identifiquen amb els tancats (proposició IV.2.12), els quals formen una àlgebra de Boole isomorfa al quocient de l'àlgebra pel seu radical (proposicions IV.2.13 i 14)

7. Si bé des d'un punt de vista lògic el sistema IMC no és d'interès per als propòsits que hem declarat, els seus models algebraics tenen algunes interessants propietats: són exactament les aHt semisimples, i es poden definir també imposant condicions algebraiques (els oberts formen una subàlgebra d'A , que és de Boole, tot obert és tancat,...) amb axiomes de lògica modal (una reducció de modalitats, una regla de Becker,...) o bé amb condicions sobre la lògica abstracta associada (proposicions IV.3.12, 15 i 16) .

Al nostre treball hem intentat en tot moment no perdre'ns en els tecnicismes i mantenir sempre clars els punts de referència que han motivat, orientat o impulsat la nostra recerca; per això hem considerat important intercalar quan ha convingut les referències històriques i metodològiques necessàries per a comprendre el naixement i evolució dels distints conceptes i mètodes que hem utilitzat, així com indicar sempre que ens ha estat possible la paternitat de les definicions no originals i la justificació de la nomenclatura adoptada.

Hem dividit aquesta memòria en sis capítols; els quatre primers contenen l'estudi algebraic dels models dels sistemes lògics que desenvolupem al capítol quint; al capítol sisè hi reunim de forma sistemàtica els exemples d'àlgebres que es fan servir durant tot el treball principalment com a contraexemples de diverses qüestions que ens hem (o ens han) plantejat.

Els tres primers capítols desenrotllen un estudi bastant complet de les àlgebres de Heyting topològiques, en els seus aspectes purament algebraics, de lògica algebraica i de lògica abstracta, sentant bases comunes a tots els tipus d'aHt que més endavant apareixen.

El capitol primer és bàsic i estableix els conceptes i propietats generals i la nomenclatura de les àlgebres de Heyting topològiques. A la secció primera arribem a la definició de les aHt després d'analitzar diferents tipus d'operadors interior, i mostrem l'equivalència i independència de les tres axiomatitzacions que tenim. A la secció segona definim i estudiem els elements oberts i altres conceptes relacionats, com l'operador clausura, els elements tancats, i establim les seves propietats més immediates i d'ús més general. A la secció tercera descrivim un seguit de tipus especials d'àlgebres que usem a diferents llocs, així com alguns mètodes de construcció d'àlgebres a partir d'àlgebres donades, tant els usuals d'àlgebra universal com els d'específica aplicació lògica, i acabem amb un teorema de representació topològica.

El capítol segon defineix els sistemes deductius i en fa un estudi des d'un punt de vista estrictament lògic. A la secció primera, ultra la definició, establim l'isomorfisme entre el reticle que formen i el de les congruències de l'àlgebra, a través de la congruència $\equiv_D$ associada a cada sistema deductiu D, i obtenim una caracterització molt útil de l'operador conseqüència $\mathbb{D}$ associat al sistema clausura $\mathfrak{D}$ dels sistemes deductius, cosa que ens permet demostrar la distributivitat de $\mathfrak{D}$. A la secció segona estudiem les propietats de la lògica abstracta $\mathbb{L} = (A, \mathbb{D})$ associada a tota aHt, veient que compleix el Principi de l'Adjunció respecte $\wedge$, el Principi Fort de la Disjunció respecte l'operació $\bar{\vee}$ ($a \bar{\vee} b = Ia \vee Ib$) i el Principi de la Deducció respecte tres operacions que denotem conjuntament per $*$ i anomenem "operacions naturals d'implicació". Com a conseqüència obtenim el Principi de la Pseudo-Reducció a l'Absurd, dues caracteritzacions del conjunt $\mathbb{D}(X)$ per cada $X \subseteq A$, i una interessant caracterització dels sistemes deductius en termes solament de $*$, que ens comença a fer veure la importància d'aquestes implicacions. Finalment definim per a cada $D \in \mathfrak{D}$ una relació d'equivalència $\sim_D$ que produeix un quocient que conserva les propietats lògiques i ens permet obtenir propietats de l'operador $\mathbb{D}$. La secció tercera es dedica a l'examen de les tres operacions $*$ i a comparar els "axiomes" que satisfan amb els de la implicació material, mesurant llur aproximació al caràcter algebraic d'aquesta darrera; destaca entre les tres implicacions la que anomenem "intuicionista" (definida per $a \Rightarrow b = I(Ia.Ib)$), ja que arriba a caracteritzar l'estructura de les aHt sense fer ús de l'operador interior, que apareix aleshores com a derivat.

El capítol tercer fa un estudi global dels sistemes deductius des d'un punt de vista algebraic i reticular. A la secció primera definim i caracteritzem els sistemes deductius irreductibles i els completament irreductibles, en termes de $\overline{\nabla}$ i * respectivament, i donem uns teoremes de separació amb aquests darrers, que demostrem que formen la més petita base de $\mathfrak{D}$. A la secció segona fem el mateix amb els maximals, concepte que lliguem amb el d'àlgebra simple a través dels dos quocients de què disposem i acabem veient algunes propietats d'aquest tipus d'àlgebres. A la secció tercera introduïm els elements *-peirceans i el radical d'una àlgebra , i definim les àlgebres semisimples ; després obtenim les relacions que habitualment lliguen aquests tres conceptes entre si i amb els sistemes deductius maximals ; per fi donem condicions sobre un sistema deductiu D necessàries i suficients per a que els quocients $A/\equiv_D$ i $A/\sim_D$ siguin semisimples. La secció quarta es dedica a presentar alguns tipus d'elements distingits, a més dels peirceans ja definits, com els densos, els lliures i els regulars, establint relacions entre ells[10] i obtenint resultats que faciliten molt el seu càlcul[11] . Durant tot aquest capítol la majoria de resultats en forma algebraica van acompanyats de comentaris que els donen una interpretació lògica.

El capítol quart abandona les aHt qualssevol per a ocupar-se principalment de dos tipus concrets: les monàdiques i les semisimples. Precedeix l'estudi algebraic una detallada exposició, a la secció primera, de les distintes alternatives que hom troba per a definir les aHt monàdiques de manera anàloga al que es fa en àlgebres de Boole. La secció segona comença amb la definició de les aHt monàdiques i es dedica gairebé íntegrament a l'estudi d'aquestes àlgebres. Examinem com funcionen aquí els mètodes de construcció donats a la secció I.3, donem altres definicions equivalents d'origen modal i les propietats d'aquest origen que satisfan, i veiem com es modifiquen els conceptes i propietats algebraics estudiats en general a la secció III.4, modificacions que ja hem explicat al punt 6 anterior (pagina xiv). La secció acaba amb la definició i algunes propietats de les aHt fortament monàdiques, que són un pas intermedi entre les monàdiques i les semisimples. A la secció tercera estudiem les àlgebres semisimples, definides anteriorment; veiem també definicions equivalents algebraiques i modals i altres propietats modals, comprovem com la majoria dels mètodes de construcció no funcionen, i donem condicions sobre $\mathfrak{D}$ i $\mathbb{L}$ equivalents a la semisimplicitat. A la secció quarta veiem com són les axiomàtiques independents dels tres tipus d'àlgebres que han intervingut en aquest capítol.

El capítol quint desenrotlla els tres sistemes IM4, IM5 i IMC de lògica intuicionista modal que d'alguna manera constitueixen una justificació i un objectiu lògic d'àquest treball, i alhora una mostra de l'aplicació a la lògica d'alguns resultats algebraics. Només direm que hi hem defugit les discussions filosòfiques o metodològiques sobre el tema (que hem deixat en tot cas per a aquesta Introducció, la secció IV.1, i per a dues qüestions més tècniques, a dos Apèndixs separats) i que hem construït la sintaxi dels tres sistemes a l'estil axiomàtic, desenvolupant les semàntiques algebraiques d'una forma que ha fet aparèixer com a models naturals les àlgebres de Heyting topològiques, monàdiques, i semisimples. Obtenim teoremes de completesa i compacitat; en el cas de la lògica IM4 també el de decidibilitat, i a més determinem les modalitats dels sistemes IM5 i IMC. Per acabar comparem aquests dos sistemes amb el sistema MIPC de Prior i Bull, veient que aquest és més feble que l'IMC, i que en cert sentit és més fort que l'IM5 .

L'objectiu d'aquesta memòria no és arribar a demostrar un únic teorema o conjectura important, sinó l'estudi de conjunt d'unes lògiques i de les estructures algebraiques associades que no havien estat considerades fins al moment; per aquesta raó hem inclòs un cert nombre de resultats que no tenen altra trascendència que llur pròpia contribució a aclarir l'estructura interna i les propietats de determinat tipus d'àlgebra o de certs conjunts d'elements, resultats que segons com poden semblar una mica al marge de la línia general del treball.

Aquestes insinuacions d'exhaustivitat no s'han de prendre com a pretensió d'haver esgotat el tema. Ben al contrari, com més hi hem aprofundit més possibilitats hi hem descobert; en aquest moment considerem que hem encetat una línia de treball que pot donar molt de si i té un ampli futur. Resten encara força problemes oberts a les nostres investigacions, i ens adonem d'altres possibilitats de treball sobre la mateixa temàtica pero en línies o sota hipòtesis diferents. A continuació mencionem a tall d'exemple tres del problemes al.ludits i dues grans línies que resten pràcticament verges:

- Determinació de l'estructura del conjunt de tots els elements $\Rightarrow$-regulars en una aHt qualsevol, per veure si són isomorfos a algun quocient de l'àlgebra; i la mateixa qüestió per als elements regulars[12].
- Representació funcional de les aHt fortament monàdiques.
- Caracterització de les aHt monàdiques i fortament monàdiques en termes

del reticle $\mathfrak{D}$ i de la lògica abstracta $\mathbb{L}$.

- Determinació del nombre de modalitats del sistema IM4 i de les relacions que hi hagi entre elles[13].
- Estudi, lògic i algebraic, de sistemes de lògica modal amb base més feble que la intuicionista, especialment la implicativa positiva (àlgebres de Hilbert) per a la que sabem que són vàlids bastants resultats dels tres primers capítols però sembla que pocs del quart[14].
- Estudi dels altres sistemes lògics intermedis entre IM4 i IMC que apareixen a la secció IV.1, i que creiem que algebraicament seran bastant menys "naturals" que l'IM5.

Pel que hem dit queda clar que a la part algebraica d'aquest treball hi predominen dues orientacions: la de l'escola de Monteiro, molt relacionada amb els treballs de Rasiowa, que posa l'accent sobre les operacions d'implicació i els sistemes deductius a elles associats , i la que posa l'èmfasi en la relació de deductibilitat, és a dir, l'operador conseqüència i la lògica abstracta associats. Aquesta darrera línia, que sorgeix dels articles [4] i [6] de S.D. Bloom , D.J. Brown i R. Suszko (i, en darrer terme, dels de Tarski [65] , [66] i [67]) ha estat aprofundida i perfeccionada especialment per Ventura Verdú a la seva Tesi Doctoral [75] i a treballs posteriors, havent assolit un llenguatge propi i un grau de generalitat notable que, a través del Teorema de la Deducció i d'altres, ha aconseguit establir forts lligams amb la línia que hem esmentat més amunt, permetent una gran economia i elegància a l'hora de tractar certs conceptes i de fer algunes demostracions, que altrament haurien resultat feixugues i fins potser inintel.ligibles.

Ens hem format en aquestes tècniques principalment en els Cursos de Doctorat que sobre diversos temes de Lògica Matemàtica s'han donat al Departament d'Estadística, cursos iniciats fa deu anys pel director d'aquest treball, el Dr. Francesc d'Assís Sales ([55],[56],[57],[58],[59]) i continuats per Josep Pla ([43] i [44] sobre àlgebres de Hilbert i de Heyting , i [46] sobre lògica modal) i Ventura Verdú ([77] i [78] sobre lògiques abstractes i temes relacionats) ; junt al cabal de coneixements que aquests cursos ens han aportat cal esmentar, com a element decisiu de la nostra formació, l'experiència del treball diari junt als mestres i companys esmentats i també amb Antoni Torrens i Antonio Jesús Rodríguez, així com amb tots els nostres alumnes. A tots ells hem d'agrair llur ajuda constant, en forma d'indicacions, consells, preguntes, o simplement d'escolta pacient, i sobretot la confiança que en tot moment han tingut en les nostres possibilitats. Ens agradaria no haver-los decebut.

Barcelona, 31 d'agost del 1981

NOTES

[1] Aquestes modalitats són les denominades "alèthiques", i foren les primeres que incorporaren els lògics moderns als tractaments algebraics. Posteriorment es van estudiar també les modalitats deòntiques (obligat, permès, prohibit, ...) , les epistèmiques (cert, probable, segur, conegut...) i les temporals.

[2] MacColl treballà sempre només amb un tipus d'implicació, declarant explícitament que la interpretava d'una forma estricta, i als seus darrers treballs la va definir com $L(\neg\alpha \vee \beta)$. Lewis i Langford prenen com a símbols primitius dels seus coneguts sistemes $\neg$, M i $\wedge$, i com a derivats tenen la implicació material $\alpha \rightarrow \beta = \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$, la implicació estricta $\alpha ⥽ \beta = \neg M(\alpha \wedge \neg\beta)$ (i fixem-nos que és la implicació material que obtindríem si intrepretàvem la "negació" com la "impossibilitat") i la necessitat $L\alpha = \neg M \neg \alpha$; prova que llur interès es concentra en la implicació estricta és que formulen tots els axiomes i regles d'inferència en termes de M , $\wedge$, $\neg$, $⥽$, i com a teoremes obtenen els axiomes del càlcul clàssic i l'equivalència $(\alpha ⥽ \beta) \leftrightarrow L(\alpha \rightarrow \beta)$. Els platejaments moderns, que afegeixen l'operador L al càlcul clàssic i adopten l'anterior teorema com a definició de $⥽$, lògicament donen més importància a l'operador de necessitat. Malgrat això, darrerament alguns autors s'han interessat per axiomatitzacions separables que incloguin $⥽$, i per desenvolupar càlculs purs de la implicació estricta.

[3] Els números entre claudàtors remeten a les referències bibliogràfiques recollides al final de la memòria.

[4] És conegut que l'operador de necessitat del sistema S4 es converteix a l'àlgebra de Tarski-Lindenbaum en un operador interior, i el de possibilitat M en una clausura. Aquests noms provenen de la topologia, que va ser el model bàsic d'aquests càlculs: en efecte, les àlgebres de clausura (àlgebres de Boole amb un operador clausura i un interior duals entre si) reflecteixen exactament les propietats algebraiques del conjunt de les parts d'un espai topològic i alhora del càlcul S4.

[5] Hem d'agrair al Dr. Bull l'oportunitat de conèixer aquests articles, que d'altra banda s'esdenvigué quan la redacció d'aquesta memòria era ja molt avançada; per aquesta raó només citem aquests treballs a la Introducció.

[6] Aquest darrer manté una posició mixta, ja que d'entrada només incorpora L com a primitiu i declara que en aquest cas no es pot treballar amb M; però ho fa en alguns moments considerant-lo com a primitiu, com tots els altres autors citats.

[7] Per tot el que hem dit fins ara podria semblar que l'origen i les motivacions del nostre treball són essencialment lògiques, i que després ens hem decantat cap a l'estudi algebraic; però va passar, com és corrent, justament el contrari. El nostre interès inicial, i on creiem que al capdavall resideixen les aportacions més interessants, era l'estudi algebraic dels operadors interior en estructures no Booleanes, i el desenvolupament d'una teoria deductiva en la línia de la lògica algebraica de Monteiro i Rasiowa. Aquest interès s'origina a les sessions del curs de doctorat [44] de Josep Pla, i els primers resultats del nostre estudi ([15],[17]) versaven sobre les relacions entre els operadors interior i les lògiques abstractes, en una direcció que té poc a veure amb la del present treball.

[8] Ens referim, evidentment, a operadors més forts que els simples interior i clausura d'ordre, que es poden definir sobre un conjunt ordenat qualsevol. Per a més detalls es pot veure I.1 , i per a un tractament a fons d'aquest tema, [74] .

[9] Que això no es pot complir en general ho demostra V. Verdú a [74] ; exactament demostra que si per tota clausura δ , l'operador $I = \neg \delta \neg$ és un interior, aleshores la negació és forta, que en el nostre cas voldria dir que l'àlgebra és de Boole. Per tant hi ha d'haver clausures que no produeixin un interior; a l'exemple VI.12 en tenim una que a més ens impedeix de caure en la temptació de creure que si afegíem propietats a δ potser aleshores sí que I seria un interior.

[10] Entre aquestes relacions es troben caracteritzacions del radical com el conjunt dels elements $\Rightarrow$-densos i dels elements $\rightarrow$-peirceans, i caracteritzacions dels elements regulars, que reforcen el que hem dit al número 5 anterior (pàgina xiii) sobre el caracter implicatiu lògic i algebraic de les operacions $*$ ($\rightarrow$, $\not\Rightarrow$, $\not\rightarrow$). La majoria dels resultats del capítol tercer en què intervenen $*$ són en aquest sentit.

[11] A més demostrem un resultat (A tota àlgebra de Heyting el radical és el conjunt del peirceans, proposició III.4.6) que escapa de l'àmbit d'aquest treball però el considerem prou interessant per a incloure'l ja que, malgrat no haver estat remarcat per Monteiro, havia estat conjecturat per F. d'A. Sales i J. Pla fa alguns anys, no havent-se trobat cap demostració fins ara.

[12] Hem resolt aquesta qüestió a les aHt monàdiques (proposicions IV.12, 13 i 14) on coincideixen ambdós tipus d'elements i la situació és bastant "standard"

mentre que en una aHt qualsevol la cosa es complica; però creiem que es podrà obtenir algun resultat similar.

[13] Hem determinat (proposicions V.2.6 i 3.4) que als sistemes IM5 i IMC aquest nombre és 10 i 9 respectivament. La nostra conjectura és que al sistema IM4 aquest nombre serà l'infinit numerable.

[14] El resultat de la proposició III.4.6 (veure la nota [11]) planteja un interrogant molt interessant: Atès que es tracta d'un enunciat en què només intervé la implicació i conceptes lligats a ella, serà vàlid en àlgebres de Hilbert ? La nostra demostració usa la negació d'una manera essencial; el problema seria, doncs, trobar-ne una demostració directa, només usant la implicació.

OBSERVACIONS PRELIMINARS

A l'hora de redactar aquesta memòria hem procurat de fer-la el més auto-continguda possible; però el que no hem fet és incloure un capítol dedicat a resumir les definicions i resultats ja coneguts que s'usen; a continuació els llistarem en tres apartats:

En primer lloc, usem sense menció molts conceptes d'àlgebra universal que es troben entre els més corrents, com tipus, àlgebra, subàlgebra, àlgebra lliure, morfisme, producte directe, projecció, congruència, quocient, varietat, classe equacional, i alguns resultats elementals sobre ells. Es poden trobar a l'obra monumental [19] de G. Grätzer. Igualment alguns més especials de la teoria de reticles, com reticle, reticle complet, reticle distributiu, subconjunt relativament complet o supra-complet, filtre d'ordre, filtre de reticle, etc. Aquests es poden veure als tractats [3] de Birkhoff i [64] de Szász.

En segon lloc, suposem conegudes les definicions i propietats elementals de les estructures implicatives que intervenen als estudis de lògica algebraica, com sistema deductiu, àlgebra implicativa, de Hilbert, de Heyting, de Boole, deductivament completa, d'Abbott, de Sales, de Wajsberg, etc...Es poden trobar a les tesis doctorals d'A. Torrens [72] i A.J. Rodríguez [52].

El tercer grup el formen els conceptes de la teoria de les lògiques abstractes com operador conseqüència, sistema clausura, sistema clausura algebraic, lògica abstracta, lògica abstracta finitària, element inconsistent, relació d'equivalència usual, quocient usual, morfisme bilògic, base d'un sistema clausura,etc... Aquests conceptes es troben a la tesi doctoral de V. Verdú [75] , on molts d'ells apareixen per primer cop.

El capítol de preliminars de [72] és notablement complet en referència a conceptes i resultats del grup segon, i al capítol primer hi ha alguns resultats sobre sistemes clausura i conceptes relacionats.

Al final de la memòria hi ha una taula amb totes les definicions que es donen explícitament al present treball, ja ho siguin d'una manera formal o bé informal.

Hem dividit la memòria en sis capítols, numerats amb xifres romanes; els cinc primers estan subdividits en seccions, numerades amb xifres aràbigues; i dintre de cada secció les definicions i les proposicions són numerades correlativament, també en xifres aràbigues. Les referències internes les fem com és habitual, és a dir, esmentant només les divisions i subdivisions diferentes d'aquella des d'on es fa la cita.

El símbol "#" indica final de demostració. Quan apareix immediatament després d'un enunciat indica l'absència de demostració; normalment es tracta de conseqüències ràpides dels resultats que el precedeixen, de la reformulació d'aquests en un llenguatge divers, o simplement de fets trivials.

Usem "ssi" com a abreviatura de "si i solament si"; en canvi, hem evitat l'ús del símbol "$\Rightarrow$" com a abreviatura de la locució "implica" metamatemàtica ja que aquest té per a nosaltres un significat específic.

CAPÍTOL I

GENERALITATS

I.1 LA DEFINICIÓ DE LES ALGEBRES DE HEYTING TOPOLOGIQUES

Definició 1

Sigui $(A,\leqslant)$ un conjunt ordenat. Un interior d'ordre sobre A és una operació monària o aplicació I d'A en A tal que $Ix \leqslant x$, si $x \leqslant y$ aleshores $Ix \leqslant Iy$, i $I^2x = Ix$, $\forall x,y \in A$. Si a més existeix un element $1 \in A$ que és màxim per l'ordre, exigim que $I1 = 1$.

Una clausura d'ordre sobre A és una operació monària o aplicació δ d'A en A tal que $x \leqslant \delta x$, si $x \leqslant y$ aleshores $\delta x \leqslant \delta y$, i $\delta^2 x = \delta x$ $\forall x,y \in A$. Si $0 \in A$ és mínim per l'ordre, afegim $\delta 0 = 0$.

Aquest conceptes, òbvies generalitzacions inspirades a la topologia, han estat connectats amb la lògica modal des del 1930 . Darrerament hom pot trobar-ne estudis que els relacionen amb el concepte de lògica abstracta, com [71] per a les clausures, i [15] i [17] per als interiors (aquests darrers en casos clàssics que no tractem aquí).

A continuació donarem definicions dels conceptes d'operador interior i clausura en les estructures ordenades lògiques, a les que l'ordre va lligat a certes operacions de significat lògic, com la conjunció , la disjunció, o la implicació, i hi ha sempre element màxim 1 (els teoremes) .

En un reticle la relació $x \leqslant y$ equival a $x \wedge y = x$ i també a $x \vee y = y$; per tant resulta lògic donar la següent

Definició 2

Sigui $(A, \wedge, \vee, 1)$ un reticle amb element màxim 1 . Un operador interior reticular (o topològic) sobre A és $I : A \longrightarrow A$ tal que

(I1) $I1 = 1$

(I2) $Ix \leq x$ per tot $x \in A$

(I3a) $I(x \wedge y) = Ix \wedge Iy$ per tots $x,y \in A$

(I4) $I^2x = Ix$ per tot $x \in A$.

Sigui $(A, \wedge, \vee, 0)$ un reticle amb element mínim 0 . Un operador clausura reticular (o topològica) sobre A és $\delta : A \longrightarrow A$ tal que

(C1) $\delta 0 = 0$

(C2) $x \leq \delta x$ per tot $x \in A$

(C3) $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y$ per tots $x,y \in A$

(C4) $\delta^2 x = \delta x$ per tot $x \in A$.

Evidentment es compleix que $x \leq y$ implica $Ix \leq Iy$ i $\delta x \leq \delta y$.

En una àlgebra implicativa $x \leq y$ equival a $x.y = 1$; aleshores

Definició 3

Sigui $(A, ., 1)$ una àlgebra implicativa. Un operador interior implicatiu sobre A és $I : A \longrightarrow A$ tal que

(I1) $I1 = 1$

(I2) $Ix \leq x$ per tot $x \in A$

(I3b) $I(x.y) \leq Ix.Iy$ per tots $x,y \in A$

(I4) $I^2 x = Ix$ per tot $x \in A$.

També es compleix que $x \leq y$ implica $Ix \leq Iy$. La condició (I3b) es coneix amb el nom de "desigualtat de Gödel" segurament perquè fou ell el primer que la proposà, a [18] , per a formar part d'una axiomàtica per al sistema modal S4, encara que en una forma diferent.

No coneixem cap definició d'operador clausura en àlgebres implicatives ni sabem que ningú hi hagi treballat.

Si ens movem en un tipus especial d'àlgebres implicatives, de major contingut lògic, tenim una altra definició equivalent més simple :

<u>Proposició 1</u>

Si $(A,.,1)$ és una àlgebra de Hilbert i $I:A \rightarrow A$ una aplicació , aleshores I és un interior implicatiu si i solament si satisfà :

(I1) $I1 = 1$

(I2) $Ix \leq x$ per tot $x \in A$

(I3c) $I(Ix.y) \leq Ix.Iy$ per tots $x,y \in A$.

Demostració:

Si I és un interior implicatiu només cal demostrar (I3c), que és immediata: $I(Ix.y) \leq I^2x.Iy = Ix.Iy$.

Si suposem que I satisfà (I1), (I2) i (I3c) , en primer lloc si $x \leq y$, $Ix \leq y$, d'on $Ix.y = 1$ i per (I1) i (I3c) obtenim $Ix \leq Iy$; aleshores de (I2) deduïm $I^2x \leq Ix$ però d'altra banda $1 = I1 = I(Ix.Ix) \leq Ix.I^2x$ per (I3c) per tant $Ix \leq I^2x$, és a dir, (I4) . Finalment per la propietat d'antiisotonia del producte de les àlgebres de Hilbert,de $Ix \leq x$ es dedueix $x.y \leq Ix.y$ d'on $I(x.y) \leq I(Ix.y) \leq Ix.Iy$, és a dir, (I3b) . #

Les àlgebres de Heyting, base sobre la que bastirem el nostre treball, són conjunts ordenats en els que el mateix ordre indueix alhora estructura d'àlgebra de Hilbert i de reticle amb màxim. És natural aleshores de preguntar-se si coincideixen o no els dos conceptes d'operador interior que acabem de definir. La resposta és afirmativa i la donà J. Pla en el seu curs [44] ; incloem la demostració ja que no ha estat publicada.

Proposició 2

Si $(A,\neg,\wedge,\vee,\cdot)$ és una àlgebra de Heyting i $I:A \longrightarrow A$, aleshores I és un interior implicatiu sobre A si i solament si I és un interior reticular sobre A .

Demostració:

Si I és un interior implicatiu, de $x\wedge y \leqslant x$ i $x\wedge y \leqslant y$ obtenim $I(x\wedge y) \leqslant Ix\wedge Iy$; de $I(x.y) \leqslant Ix.Iy$ obtenim que $Ix\wedge I(x.y) \leqslant Ix\wedge(Ix.Iy) = Ix\wedge Iy \leqslant Iy$. Posant $x\wedge y$ en el lloc de y i tenint en compte que $\forall a,b\in A$ $a.(a\wedge b) = a.a\wedge a.b = a.b$, obtenim $Ix\wedge I(x.y) \leqslant I(x\wedge y)$. Però $y \leqslant x.y$ implica $Iy \leqslant I(x.y)$, d'on $Ix\wedge Iy \leqslant Ix\wedge I(x.y)$, i en definitiva $Ix\wedge Iy \leqslant I(x\wedge y)$ quedant doncs $I(x\wedge y) = Ix\wedge Iy$.

Suposem que I fos interior reticular. Tenint en compte que $\forall a,b\in A$ $a\wedge(a.b) = a\wedge b$, resulta $Ix\wedge I(Ix.y) = I(Ix\wedge I(Ix.y)) \leqslant I(Ix\wedge(Ix.Iy)) = I(Ix\wedge Iy) = Ix\wedge Iy \leqslant Iy$ i per tant $I(Ix.y) \leqslant Ix.Iy$. #

Havent vist la proposició precedent és doncs completament natural de donar la següent

Definició 4

Una <u>àlgebra de Heyting topològica</u> (<u>aHt</u>) és una àlgebra $(A,I,\neg,\wedge,\vee,\cdot)$ de tipus (1,1,2,2,2) tal que $(A,\neg,\wedge,\vee,\cdot)$ és una àlgebra de Heyting i I un operador reticular o implicatiu sobre A .

El tipus (1,2,2,2)no és el més conegut entre els que valen per a definir les àlgebres de Heyting, però és el més adequat des del punt de vista lògic, si les volem usar per a definir una semàntica, com és el nostre cas (capítol V). . Una axiomatització com a àlgebra d'aquest tipus és la de [51].

En canvi Monteiro a [38] les dóna com a àlgebres de tipus (0,2,2,2) utilitzant la constant 0 i presenta a més un conjunt independent d'axiomes. Prenent aquests com a base i escrivint (I1) en la forma $I(x.x) = x.x$, veiem que la podem completar de tres maneres diferents per a obtenir també conjunts independents d'axiomes per a les aHt :

Proposició 3

Els conjunts (I1)+(I2)+(I3a)+(I4) , (I1)+(I2)+(I3b)+(I4) i (I1)+(I2)+(I3c) són conjunts independents d'axiomes per a les aHt .

Demostració:

Si A és una àlgebra de Heyting qualsevol, $A \neq \{1\}$, l'aplicació $Ix = 0$ per tot $x \in A$ compleix totes les condicions excepte la (I1) , i l'aplicació $Ix = 1$ per tot $x \in A$ compleix totes les condicions excepte la (I2) .

Si $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, l'operació canònica $x.y = 1$ ssi $x \leqslant y$, $x.y = y$ altrament, li dóna estructura d'àlgebra de Heyting; l'aplicació $Ix = \frac{x}{2}$ per tot $x \neq 1$, i $I1 = 1$, satisfà totes les condicions excepte (I3c) i (I4) ; finalment l'aplicació $I1 = 1$, $Ix = \frac{x}{2}$ si $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ i $Ix = x$ si $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, compleix les condicions (I1), (I2) i (I4) però no (I3a) ni (I3b) . #

Tancarem aquesta secció explicitant la definició d'una estructura que serà una fita constant al llarg d'aquest treball, i que en certa manera l'ha inspirat i molt sovint li ha subministrat idees valuoses.

Definició 5

Una àlgebra de Boole topològica és una àlgebra de Boole amb un interior reticular o implicatiu.

Aquestes àlgebres són conegudes també amb el nom d'àlgebres de clausura (és a dir, àlgebres de Boole amb un operador clausura reticular, definició equivalent posant $\delta = \neg I \neg$ i $I = \neg \delta \neg$) i han estat extensament estudiades, des del treball [35] on McKinsey i Tarski les van introduir (via la clausura) fins el treball de Monteiro [39] , on demostra l'equivalència de la nova definició via l'interior i apareix per primer cop la condició que hem designat per (I3c) .

I.2 OBERTS I TANCATS

Començarem destacant unes propietats immediates de les aHt .

Proposició 1

En tota aHt es compleix que $I0 = 0$, que per tot $x \in A$ $I(\neg x) \leqslant \neg Ix$, i que per tots $x,y \in A$ $I(Ix \vee Iy) = Ix \vee Iy$.

Demostració:

De la definició i del fet que 0 és mínim i que $\neg x = x.0$ obtenim les dues primeres . En general $I(Ix \vee Iy) \leqslant Ix \vee Iy$, i aplicant l'operador I a $Ix \leqslant Ix \vee Iy$ obtenim $Ix \leqslant I(Ix \vee Iy)$, i semblantment per a y , d'on la desigualtat contrària, és a dir, $I(Ix \vee Iy) = Ix \vee Iy$. #

Definició 1

Un element $x \in A$ és obert ssi $Ix = x$. $\underline{B} = I(A) = \{ x \in A : Ix = x \}$ és el conjunt d'oberts d'A . Diem que un $X \subsetneq A$ és obert ssi $I(X) \subseteq X$.

Proposició 2

El conjunt B és un subreticle d'A que conté 0 i 1 i que és relativament supra-complet en A , essent $Ix = \sup \{ t \in B : t \leqslant x \}$.

Demostració:

Ja hem vist que $0,1 \in B$. De $I(Ix \wedge Iy) = Ix \wedge Iy$ i $I(Ix \vee Iy) = Ix \vee Iy$ resulta que B és tancat per $\wedge$ i $\vee$, és a dir, que B és subreticle d'A.
Si $t \in B$ i $t \leqslant x$ aleshores $t = It \leqslant Ix$, però $Ix \in B$ i $Ix \leqslant x$, per tant $Ix = \sup \{ t \in B : t \leqslant x \}$ i en particular B resulta relativament supra-complet dintre d'A . #

Ens podríem preguntar ara si B és o pot ser tancat per les dues operacions restants de l'àlgebra, la negació ($\neg$) i el producte ($\cdot$) . Com que $0 \in B$ i $\neg x = x.0$ per tot $x \in A$, si B és tancat per $\cdot$ aleshores ho és també per $\neg$. L'exemple VI.7 ens mostra que el recíproc no és veritat. Als exemples VI.1 a VI.6 veiem que en general B no és tancat per $\cdot$ ni per $\neg$. La in-incorporació d'aquestes possibilitats, junt a d'altres motivacions, ens durà a definir les àlgebres monàdiques i fortament monàdiques al capítol IV .

La proposició següent ens subministra un procediment alternatiu per a definir una aHt, que consisteix en especificar el conjunt d'oberts, sempre que compleixi certes condicions.

Proposició 3

Si $(A,\neg,\wedge,\vee,.)$ és una àlgebra de Heyting i $B \subseteq A$ és un subreticle d'A que conté 0 i 1 i que és relativament supra-complet en A i posem $Ix = \sup\{t \in B : t \leqslant x\}$ per tot $x \in A$, aleshores $(A,I,\neg,\wedge,\vee,.)$ és una àlgebra de Heyting topològica tal que el seu conjunt d'oberts és B .

Demostració:

És immediat que $t \in B$ ssi $It = t$; 1 és màxim i $1 \in B$, per tant $I1 = 1$. Es també immediat que $Ix \leqslant x$ i que si $x \leqslant y$ aleshores $Ix \leqslant Iy$. Si $t \in B$ aleshores $t \leqslant x$ ssi $t \leqslant Ix$, per tant $I^2x = Ix$ per tot $x \in A$.

Finalment de $x \wedge y \leqslant x , y$ tenim que $I(x \wedge y) \leqslant Ix \wedge Iy$. Però de $Ix \leqslant x$ i de $Iy \leqslant y$ deduïm $Ix \wedge Iy \leqslant x \wedge y$; ara bé, $Ix , Iy \in B$, que és un subreticle, per tant $Ix \wedge Iy \in B$, i tenint en compte la definició d'I resulta $Ix \wedge Iy \leqslant I(x \wedge y)$ i en definitiva $I(x \wedge y) = Ix \wedge Iy$, per tant I és un interior reticular , és a dir, $(A, I,\neg,\wedge,\vee,.)$ és una aHt i el seu conjunt d'oberts ja hem vist que és B . #

A continuació considerem el concepte dual de l'interior: la clausura . Com és sabut, tot interior d'ordre, en presència d'una negació, dóna lloc a una clausura d'ordre.

<u>Definició 2</u>

En una aHt anomenarem <u>clausura</u> l'operador definit per $\delta x = \neg I \neg x$ per tot $x \in A$. Un $x \in A$ és <u>tancat</u> si i solament si $\delta x = x$. $T = \delta(A) = \{ x \in A : \delta x = x \}$ és el <u>conjunt de tancats</u> d'A .

A partir de la definició i manipulant propietats ja conegudes de l'operador interior i de les àlgebres de Heyting hom obté fàcilment la

<u>Proposició 4</u>

L'operador δ és una clausura d'ordre sobre A que a més compleix $\delta 1 = 1$, $\neg\neg x \leq \delta x$, i $\delta(\delta x \wedge \delta y) = \delta x \wedge \delta y \quad \forall x,y \in A$. #

Cal fer notar que, malgrat que A és un reticle i I és un interior reticular, en general δ no és una clausura de reticle (veure l'exemple VI.9). A la proposició IV.3.13 donem una condició suficient per a que ho sigui.

La següent proposició és també evident, a partir de les propietats de la negació, de l'interior i les de la clausura ja esmentades.

<u>Proposició 5</u>

$T = \delta(A)$ és un sub-infreticle d'A que conté 0 i 1 i que és relativament inf-complet, essent $\delta x = \inf \{ t \in T : t \geq x \}$ per tot $x \in A$. #

En una àlgebra de Boole topològica, semblantment al que passa als espais topològics, els elements tancats són els complementaris dels elements oberts i a l'inrevés; això és degut al caràcter fort de la negació Booleana ($x = \neg\neg x$) i al fet d'ésser complement ($x \vee \neg x = 1$) . En una àlgebra de Heyting, però, aquestes igualtats són només desigualtats ($\leqslant$) i a més són igualtats si i només si l'àlgebra és de Boole. Té sentit doncs de preguntar-se si és certa alguna de les quatre implicacions possibles :

"Si x és obert aleshores $\neg x$ és tancat"

"Si x és tancat aleshores $\neg x$ és obert"

"Si $\neg x$ és tancat aleshores x és obert"

"Si $\neg x$ és obert aleshores x és tancat"

La resposta de moment és parcial : En general només val una implicació.

Proposició 6

En tota aHt , si x és obert aleshores $\neg x$ és tancat, $\forall x \in A$.

Demostració:

$x \leqslant \neg\neg x$ implica $x = Ix \leqslant I\neg\neg x$, d'on tenim que $\delta\neg x = \neg I\neg\neg x \leqslant \neg x \leqslant \delta\neg x$, és a dir, $\delta\neg x = \neg x$. #

Cap de les tres implicacions restants pot complir-se en general, com veiem a l'exemple VI.1 ; però a més una d'elles no es pot complir mai, és a dir, equival a imposar que l'àlgebra sigui Booleana:

Proposició 7

Una aHt és una àlgebra de Boole topològica si i només si per tot $x \in A$ és compleix que si $\neg x$ és obert aleshores x és tancat .

Demostració:

Si l'àlgebra és una àlgebra de Boole topològica es compleix la propietat enunciada. Suposem ara que A no fos Booleana, és a dir, que existís un $x \in A$ tal que $x \neq 1$ però $\neg x = 0$; veiem aleshores que $\neg x$ és obert però en canvi $\delta x = \neg I \neg x = \neg I0 = \neg 0 = 1 \neq x$, és a dir, x no és pas tancat . #

Les dues implicacions que resten no són pas impossibles, com ens mostra l'exemple VI.2 ; a la proposició IV.2.7 veurem que una d'elles es compleix sempre sota certes condicions .

Un altre tipus de relació entre oberts i tancats fóra que hi hagués alguna inclusió entre T i B . A la proposició IV.2.5 veurem que $T \subseteq B$ equival a dir que A és monàdica, i a la IV.3.12 que B contingut en T és equivalent a la semisimplicitat d'A . En general no hi ha, doncs, cap inclusió .

I.3 PRINCIPALS EXEMPLES I MÈTODES DE GENERACIÓ

Aquesta secció comença amb la descripció d'alguns tipus destacables d'àlgebres de Heyting topològiques als que farem referència en altres moments, segueix amb l'explicació de diversos mètodes per a construir aHt a partir d'àlgebres donades, i finalitza amb un teorema de representació topològica.

No cal dir que les àlgebres de Boole topològiques són un cas particular d'aHt , que utilitzarem com a contraexemple si convé.

INTERIORS TRIVIALS

Sota aquesta denominació englobem la <u>identitat</u> ($Ix = x \quad \forall x \in A$) i l'interior <u>simple</u> ($Ix = 0 \quad \forall x \in A - \{1\}$, $I1 = 1$) . Observem que aquests interiors corresponen als casos en què $B = A$ o $B = \{0, 1\}$ respectivament, és a dir, els dos subreticles impropis d'A . Aquests operadors existeixen en qualsevol àlgebra de Heyting, i les àlgebres "degenerades" $\{0\}$ i $\{0,1\}$ només admeten aquests dos interiors, que coincideixen .

INTERIORS ASSOCIATS A UN ELEMENT

Essent A una aHt qualsevol i $a \in A$ qualsevol, el conjunt $B_a = \{0,a,1\}$ satisfà les condicions de la proposició 2.3, i per tant defineix un operador interior que anomenem "<u>interior associat a l'element a</u>" i ve definit per $I_a 1 = 1$, $I_a x = a$ ssi $x \geqslant a$, $I_a x = 0$ en cas contrari . Si $a = 0,1$ aquest interior és el simple, i si $A = \{0,a,1\}$ és la identitat . Per tant en podem deduir la següent

Proposició 1

Una àlgebra de Heyting admet interiors no trivials si i solament si té més de tres elements. #

INTERIORS EN EL CONJUNT D'OBERTS D'UN ESPAI TOPOLÒGIC

Històricament el primer exemple no lògic d'àlgebra de Heyting fou l'estructura dels oberts d'una topologia; així foren definides i estudiades a [36]. Si $(X,\mathcal{T})$ és un espai topològic, fent $A.B = \overset{\circ}{\overbrace{(X-A)\cup B}}$ i $\neg A = \overset{\circ}{\overbrace{(X-A)}}$, $\forall A,B \subseteq X$, $(\mathcal{T},\neg,\cap,\cup,.)$ és una àlgebra de Heyting. Veurem com convertir-la en aHt .

Proposició 2

Si $\mathcal{T}'$ és una subtopologia de $\mathcal{T}$ i designem per I el seu operador interior, aleshores $(\mathcal{T}, I ,\neg,\cap,\cup,.)$ és una aHt .

Demostració:

Els axiomes d'aHt són propietats conegudes de qualsevol topologia. #

El segon procediment s'inspira en una construcció de [40] .

Proposició 3

Tota relació d'equivalència $\sim$ sobre X dóna lloc a una estructura d'aHt sobre l'àlgebra de Heyting $\mathcal{T}$.

Demostració:

Considerem per cada $A \subsetneq X$ la saturació d'A , $\overline{A} = \{x \in X : x \sim a$ per algun $a \in A\}$. És immediat que $A \subseteq \overline{A}$ i que $\overline{\bigcap A_i} = \bigcap \overline{A_i}$ i $\overline{\bigcup A_i} = \bigcup \overline{A_i}$ per a tota família de subconjunts d'X. Aleshores es comprova fàcilment que la família $\mathcal{T}' = \{A \in \mathcal{T} : A = \overline{A}\}$ dels oberts saturats és una subtopologia de $\mathcal{T}$ i per la proposició anterior sabem que defineix una aHt a $\mathcal{T}$. #

Els dos procediments descrits no són equivalents car no tota subtopologia de $\mathscr{G}$ és la dels oberts saturats de certa relació d'equivalència sobre X.

ÀLGEBRES FUNCIONALS

Sigui H una àlgebra de Heyting inf-completa (com a reticle), i K un conjunt qualsevol amb almenys dos elements. El conjunt H^K de totes les funcions de K en H, definint puntualment les operacions, esdevé de manera natural una àlgebra de Heyting que té com a màxim i mínim les funcions constants iguals al màxim i el mínim d'H respectivament.

Hom pot aleshores definir una estructura d'aHt en H^K associant a cada $f \in H^K$ la funció $If \in H^K$ definida per $If(x) = \inf \mathrm{Rang}\, f$. Podem comprovar que I és un operador interior sobre H^K i que els seus elements oberts són les funcions constants. Aquestes aHt s'anomenen funcionals.

Aquest tipus d'àlgebres són la generalització de l'estructura algebraica del càlcul de predicats monàdic de primer ordre intuicionista, corresponent I al quantificador universal; fou Halmos qui les introduí en el cas Booleà, a [21] , utilitzant-les per a donar representacions de les àlgebres de Boole monàdiques. Segons la proposició IV.2.17 això no és possible en general en el nostre cas, contràriament al que conjecturen Monteiro i Varsavski .

INTERIORS EN ÀLGEBRES FINITES

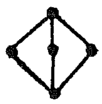
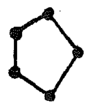
Sabem que les àlgebres de Heyting finites són exactament els reticles distributius finits. En aquestes àlgebres la definició d'operadors interior és especialment senzilla:

<u>Proposició 4</u>

Si A és una àlgebra de Heyting finita, tot subreticle d'A que contingui 0 i 1 defineix un operador interior sobre A .

Demostració:

Tot subreticle finit és relativament supra-complet. #

Aquest procediment, a més de la seva senzillesa, ens permet descriure gràficament i amb pocs mitjans una estructura d'aHt, ja que és suficient de donar el diagrama de Hasse del reticle i indicar-hi els elements oberts. Amb una inspecció ocular es comprova que el reticle és distributiu, veient que no hi hagi subreticles dels tipus  i  , i amb un altre cop d'ull es comprova si els elements oberts formen subreticle, i si 0 i 1 ho són.

Els primers mètodes per a construir àlgebres de Heyting topològiques a partir d'àlgebres donades són els usuals:

<u>Proposició 5</u>

La classe de les aHt és una varietat, és a dir, és una classe tancada per la formació de subàlgebres, d'imatges homomorfes, i de productes directes de famílies no buides.

Demostració:

És suficient de demostrar que la classe de les aHt és una classe equacional, d'acord amb un conegut resultat d'àlgebra universal (veure [20]) . Segons hem vist, els axiomes de les àlgebres de Heyting són equacions, i els de les aHt són equacions o bé desigualtats; però les desigualtats equivalen a igualtats ja que $x \leqslant y$ equival a $x.y = 1$ (si volem mantenir-nos a la classe d'àlgebres de tipus (1,1,2,2,2) cal posar $x.y = x.x$) . #

En particular sabem que el quocient d'una aHt per una congruència és una aHt ; a II.1 estudiarem i caracteritzarem les congruències d'aquestes àlgebres.

Com a tota classe equacional, sabem que existeixen totes les àlgebres lliures de la classe; una d'aquestes serà l'àlgebra de Tarski-Lindenbaum que construirem a la secció V.1 .

Un altre mètode de construcció d'àlgebres és el d'<u>amplificació</u>, inventat per S. Jaśkowski [26] per a construir matrius del càlcul proposicional intuicionista; donada una àlgebra de Heyting A, s'anomena <u>àlgebra</u> (de Heyting) <u>amplificada</u> A^+ la que hom obté prenent com a conjunt base $A \cup \{p\}$, essent $p \notin A$, amb la relació d'ordre $x \leqslant^+ y$ ssi $x \leqslant y$ $\forall x,y \in A$; i $x \leqslant^+ p \leqslant^+ 1$ $\forall x \in A - \{1\}$. Es tracta, doncs, d'afegir un nou element p i posar-lo com a <u>penúltim element</u> de la nova àlgebra (per a més informació algebraica es pot consultar [11] , i per al seu ús en lògica, [68] , [53] i [54]) .

Ens proposem mostrar que si A és una aHt, sobre l'àlgebra amplificada A^+ hom pot sempre definir dues estructures d'aHt que estenguin la d'A i només dues, caracteritzant-les de manera adequada.

<u>Proposició 6</u>

Si A és una aHt i I el seu interior, l'aplicació I_1^+ definida sobre A^+ per $I_1^+x = Ix$ si $x \in A$ i $I_1^+p = p$ és el màxim operador interior sobre A^+ que estén I .

Demostració:

Evidentment és un operador interior, ja que $B_1^+ = B \cup \{p\}$ és un subreticle que conté 0 i 1 i és relativament supra-complet (tenint en compte que p és el penúltim element d'A^+). I tot interior I^+ sobre A^+ que estengui I ha de coincidir en A amb I , i per tant amb I_1^+ i ha de complir $I^+p \leqslant^+ p = I_1^+p$; és a dir, I_1^+ és el més gran. #

<u>Proposició 7</u>

L'operador definit sobre A^+ per $I_2^+x = Ix$ ssi $x \in A$, i $I_2^+p = \sup^+ B - \{1\}$ és el màxim operador interior sobre A^+ que estén I .

Demostració:

En primer lloc cal veure que aquest operador està sempre ben definit, i que és un interior. Per tal com hem definit A^+ , si $x \in B - \{1\}$, $x \leqslant^+ p$.
Aleshores podem distingir dos casos:

- Si no existeix en A cap fita superior de $B - \{1\}$, diferent d'1, aleshores $I_2^+p = \sup^+ B - \{1\} = p$ i som a la situació de la proposició anterior.
- Si existeix un $t \in A$, $t \neq 1$, tal que $t \geqslant x$ per tot $x \in B - \{1\}$, resulta que $t \leqslant^+ p$, és a dir, que p no és la mínima fita superior i per tant $I_2^+p = \sup^+ B - \{1\} = \sup B - \{1\} = \sup\{x \in B : x \leqslant t\} = It \in B$ és a dir, que el suprem existeix sempre i ara $B_2^+ = B$.

Hem vist doncs que l'expressió de l'enunciat defineix sempre un interior sobre A^+; i és el mínim possible que estén I , ja que $B - \{1\} \subsetneq B^+ - \{1\}$, per tant $I_2^+p = \sup^+ B - \{1\} \leqslant^+ \sup^+ B^+ - \{1\} = I^+p$ per qualsevol I^+ que estengui I . #

Notem que si es dóna el primer cas de la darrera demostració I_1^+ i I_2^+ coincideixen i només hi ha un interior sobre A^+.

Proposició 8

Els operadors I_1^+ i I_2^+ són els dos únics operadors interior sobre A^+ que estenen I .

Demostració:

Si I^+ és una extensió d'I, ha de ser $B \subseteq B^+ \subseteq B \cup \{p\}$, és a dir, que només hi ha dues possibilitats: $B^+ = B$ és a dir el segon cas de la proposició 7, o bé $B^+ = B \cup \{p\}$, que correspon a la proposició 6 i al primer cas de la proposició 7 . #

Finalitzarem amb dues construccions d'específica aplicació lògica, concretament als teoremes de completesa i a la propietat dels models finits del capítol V . La primera és una construcció d'àlgebres finites a partir d'una família donada (finita) d'elements d'una àlgebra donada, de manera que es conservin les relacions existents entre els elements donats. Demostrarem quelcom més fort, però: aquestes relacions es conservaran entre tots els elements de la nova àlgebra, sempre que el fet tingui sentit .

Proposició 9

Si A és una aHt i $A_o \subseteq A$ essent $n = card(A_o) < \aleph_o$, aleshores existeix una aHt $(A', I', \neg', \wedge', \vee', :)$ tal que es compleixen:

(i) $card(A') \leq 2^{2^n}$

(ii) $A_o \cup \{0,1\} \subseteq A' \subseteq A$ (conjuntísticament)

(iii) Per tots $x,y \in A'$, si $Ix \in A'$ aleshores $I'x = Ix$; si $\neg x \in A'$ aleshores $\neg' x = \neg x$; si $x*y \in A'$ aleshores $x *' y = x*y$, on $*$ val per $\wedge$, $\vee$ i . , i $*'$ val per $\wedge'$, $\vee'$, i : respectivament .

Demostració:

Sigui A' el subreticle d'A engendrat per $A_o \cup \{0,1\}$. Es satisfan (i) i (ii) i és un reticle finit i distributiu , per tant existeix en A' una única operació d'implicació, : , que vindrà donada per $x:y = \text{màx}\,\{t \in A' : t \wedge x \leqslant y\} = \text{màx}\,\{t \in A' : t \leqslant x.y\}$ per tot $x,y \in A'$ (notem que en A' $\leqslant$, $\wedge$ i $\vee$ coincideixen amb els d'A) i que posant $\neg' x = x:0 \quad \forall x \in A'$, fa que $(A', \neg', \wedge', \vee', :)$ sigui una àlgebra de Heyting.

Per a definir I' escollim $B' = B \cap A'$. Es tracta d'un subreticle d'A' finit i que conté 0 i 1, per tant ens permet definir un operador interior sobre A' (proposició 4) per $I'x = \text{màx}\,\{t \in B' : t \leqslant x\}$. $(A', I', \neg', \wedge', \vee', :)$ és doncs una aHt , i només ens resta veure (iii).

Per a $\wedge$ i $\vee$ no hi ha res a demostrar, ja que $\wedge'$ i $\vee'$ coincideixen amb $\wedge$ i $\vee$ respectivament; i si ho demostrem per a : i ., quedarà automàticament demostrat per a $\neg'$ i $\neg$ ja que $0 \in A'$. Cal, doncs, fer-ho només per al producte i l'interior.

Si $x,y \in A'$ i a més $x.y \in A'$, de la definició de : resulta que ha de ser $x.y \leqslant x:y$, però sempre es compleix que $x:y \leqslant x.y$, per tant $x:y = x.y$.

Si $x \in A'$, com que $I'x \in B$ sempre $I'x \leqslant Ix$; però si a més $Ix \in A'$ aleshores $Ix \in B'$ i per la definició de I' resultarà $Ix \leqslant I'x$ i per tant $Ix = I'x$. #

El darrer resultat de la secció és un teorema de representació a l'estil Birkhoff-Stone :

<u>Proposició 10</u>

Tota aHt és isomorfa a una subàlgebra d'una aHt definida sobre el conjunt d'oberts de cert espai topològic compacte i T_o.

Demostració:

Sigui A una aHt, i anomenem X el conjunt dels sistemes deductius irreductibles de l'àlgebra de Heyting subjacent a A; com sabem, posant $\forall a \in A$ $h(a) = \{D \in X : a \in D\}$ la família $\{h(a) : a \in A\}$ és una base de topologia sobre X, per tant si designem per $\mathcal{T}$ la família dels oberts de la topologia engendrada, l'estructura $(\mathcal{T}, \neg, \cap, \cup, .)$ és una àlgebra de Heyting amb les operacions usuals, i h un monomorfisme d'àlgebres de Heyting.

Com que B és tancat per interseccions finites, la família $\{h(b) : b \in B\}$ és una base de topologia, que engendra una subtopologia $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$. Segons la proposició 2, obtenim una aHt d'oberts d'un espai topològic, essent per a cada $Y \in \mathcal{T}$, $I(Y) = \bigcup \{h(b) : b \in B , h(b) \subseteq Y\}$. Resta solament demostrar que $h(Ia) = Ih(a)$ per tot $a \in A$. Tenim que $Ih(a) = \bigcup \{h(b) : b \in B, b \leqslant a\}$ ja que $h(b) \subseteq h(a)$ equival a $b \leqslant a$; però $Ia \in B$ i $Ia \leqslant a$, d'on $Ih(a) = h(Ia)$.

De tot el que hem dit resulta que h(A) és una subàlgebra de $\mathcal{T}$ isomorfa a través de l'aplicació h a A . #

CAPÍTOL II

LA LÒGICA DELS SISTEMES DEDUCTIUS

II.1 SISTEMES DEDUCTIUS I CONGRUÈNCIES

A tot càlcul lògic hom anomena teories el conjunts de sentències que contenen tots els teoremes i són tancats per aplicació de les regles de deducció. El concepte homòleg en un plantejament algebraic és el següent :

Definició 1

Un sistema deductiu D d'una aHt és un $D \subseteq A$ tal que

(T) $1 \in D$

(MP) Si $x \in D$ i $x.y \in D$, aleshores $y \in D$, per tot $x,y \in A$

(N) Si $x \in D$ aleshores $Ix \in D$, per tot $x \in A$.

El conjunt de tots els sistemes deductius d'A es designarà per $\mathfrak{D}$.

En una àlgebra de Heyting qualsevol (i en particular a la subjacent a l'aHt A) reben el mateix nom els conjunts que satisfan (T) i (MP) ; per a no ocasionar confusions els anomenarem H-sistemes deductius, i el conjunt de tots ells $\mathfrak{D}_H$. La condició (MP) rep el nom de "Modus Ponens" , i la condició (N) el de "Necessitat" per raons tretes de la lògica modal (veure V.1); observem que (N) no és més que dir que el conjunt D és obert.

Com és sabut, els H-sistemes deductius coincideixen amb els filtres de reticle; com que evidentment $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}_H$, tot sistema deductiu és filtre de reticle i per tant filtre d'ordre. Notem que $\{1\}$ i A són sistemes deductius.

A continuació veurem que hi ha una identificació natural entre sistemes deductius i congruències de l'estructura algebraica, i, per tant, amb els epimorfismes de l'estructura.

Proposició 1

$\forall D \in \mathfrak{D}$, la relació $a \equiv_D b$ ssi $a.b \in D$ i $b.a \in D$ és una congruència de l'aHt A.

Demostració:

És suficient de veure que la relació $a <_D b$ ssi $a.b \in D$ és un preordre compatible amb les operacions de l'àlgebra, ja que $\equiv_D$ és l'equivalència naturalment associada a $<_D$.

Com que $D \in \mathfrak{D}_H$ i A és àlgebra de Heyting, sabem que $<_D$ és un preordre i que és compatible amb les seves operacions; només resta veure que si $x <_D y$ aleshores $Ix <_D Iy$; però D és obert, per tant $x.y \in D$ implica $I(x.y) \in D$ i de la desigualtat de Gödel i el fet de ser D filtre d'ordre obtenim que $Ix.Iy \in D$. #

Proposició 2

El conjunt $\mathfrak{D}$ és un reticle complet isomorf al reticle de les congruències de l'àlgebra de Heyting topològica A.

Demostració:

A la proposició anterior hem vist que a cada $D \in \mathfrak{D}$ li podem associar una congruència $\equiv_D$. Inversament si $\equiv$ és una congruència el conjunt $Shell_{\equiv} = \{ x \in A : x \equiv 1 \}$ és un sistema deductiu d'A: En efecte, $1 \in Shell_{\equiv}$ trivialment; Si $x.y \equiv 1$ i $x \equiv 1$ tenim que $x.y \equiv 1.y = y$ d'on també $y \equiv 1$ és a dir (MP); i finalment si $x \equiv 1$ aleshores $Ix \equiv I1 = 1$ és a dir (N) .

Es comprova ràpidament que si $D \subseteq D'$ aleshores $\equiv_D \subseteq \equiv_{D'}$, i que si tenim $\equiv \subseteq \equiv'$ aleshores $Shell_{\equiv} \subseteq Shell_{\equiv'}$, i també que $\equiv = \equiv_{Shell_{\equiv}}$ i $D = Shell_{\equiv_D}$.

Per tant la correspondència $D \longmapsto \equiv_D$ és un isomorfisme d'ordre; i com que les congruències de qualsevol àlgebra formen un reticle complet on l'ordre és la inclusió, aquesta estructura es traslladada a $\mathfrak{D}$ resultant $\mathfrak{D}$ un reticle complet isomorf al reticle de les congruències d'A. #

La proposició que acabem de demostrar és interessant en particular perquè ens diu que el concepte de sistema deductiu no té només un significat lògic sinó també un contingut algebraic natural.

Es conegut que el reticle de les congruències d'una àlgebra constitueix un <u>sistema clausura algebraic</u>; per tant també ho serà $\mathfrak{D}$, i obtenim el corresponent <u>operador conseqüència</u> que designem per $\mathbb{D}$ i ve definit per

$$\mathbb{D}(X) = \bigcap \{D' \in \mathfrak{D} : D' \supseteq X\} \qquad \text{per a tot } X \subseteq A$$

i per tant tenim que $\mathfrak{D} = \{ X \subseteq A : \mathbb{D}(X) = X \}$, els <u>tancats</u> de l'operador $\mathbb{D}$. El corresponent operador conseqüència associat a $\mathfrak{D}_H$ el designarem per $\mathbb{D}_H$; és immediat que per a tot $X \subseteq A$ tenim $\mathbb{D}_H(X) \subseteq \mathbb{D}(X)$. Però de fet encara podem afinar més i obtenir una caracterització més precisa de $\mathbb{D}$:

<u>Proposició 3</u>

$\forall X \subseteq A$ es compleix $\mathbb{D}(X) = \mathbb{D}_H(I(X))$.

Demostració:

En primer lloc vegem que $\mathbb{D}_H(I(X))$ és un sistema deductiu. Les condicions (T) i (MP) les compleix per ser H-sistema deductiu; vegem doncs que és obert: Si $x \in \mathbb{D}_H(I(X))$, per ser $\mathbb{D}_H$ finitari existeix un $F \subsetneq I(X)$ finit tal que $x \in \mathbb{D}_H(F)$. Si $F = \emptyset$ aleshores $x \in D_H(\emptyset) = \{1\}$ d'on $x = 1$ i aleshores $Ix = I1 = 1 \in \mathbb{D}_H(I(X))$. Si $F \neq \emptyset$ serà $F = \{ Ix_1, \dots , Ix_n\}$ per certs $x_i \in X$ $(i=1,\dots,n)$ i sabem que $x \in \mathbb{D}_H(F)$ equival a $Ix_1.(Ix_2.(\dots (Ix_n.x)\dots) = 1$. Aplicant reiteradament la desigualtat de Gödel obtenim que $Ix_1.(Ix_2.(\dots (Ix_n.Ix) \dots)) = 1$. Com que $1, Ix_i \in \mathbb{D}_H(I(X))$ que és tancat pel Modus Ponens, aplicant-lo reiteradament arribem a $Ix \in \mathbb{D}_H(I(X))$, és a dir, és obert.

$X \subseteq \mathbb{D}_H(I(X))$ ja que si $x \in X$, $Ix \in I(X) \subseteq \mathbb{D}_H(I(X))$, però $Ix \leq x$ i $\mathbb{D}_H(I(X))$ és filtre d'ordre, per tant $x \in \mathbb{D}_H(I(X))$.

Finalment si tenim un $D' \in \mathfrak{D}$ tal que $D' \supseteq X$, tenim que $I(X) \subseteq \subseteq I(D') = D'$, d'on $\mathbb{D}_H(I(X)) \subseteq \mathbb{D}_H(D') = D'$.

Hem demostrat que $\mathbb{D}_H(I(X))$ és el més petit sistema deductiu que conté X. Doncs, $\mathbb{D}_H(I(X)) = \mathbb{D}(X)$. #

En el reticle $\mathfrak{D}$ tenim $D \wedge D' = D \cap D'$ ja que $\mathfrak{D}$ és tancat per interseccions (arbitràries), i $D \vee D' = \mathbb{D}(D \cup D')$. L'anterior proposició ens permet demostrar alguna cosa més relativa a l'estructura reticular de $\mathfrak{D}$.

Proposició 4

El reticle $\mathfrak{D}$ és un subreticle de $\mathfrak{D}_H$ i és distributiu i a més $\bigcap$ és infinitament distributiva respecte $\bigvee$.

Demostració:

Sabem ja que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}_H$ i que els ínfims coincideixen; cal només veure que els suprems també. Ara bé, si D , $D' \in \mathfrak{D}$, $D \vee D' = \mathbb{D}(D \cup D') = \mathbb{D}_H(I(D \cup D')) = \mathbb{D}_H(I(D) \cup I(D')) = \mathbb{D}_H(D \cup D') = D \vee_H D'$. Per tant $\mathfrak{D}$ és subreticle de $\mathfrak{D}_H$.

D'altra banda, A. Diego a [11] demostra que el reticle dels sistemes deductius d'una àlgebra de Hilbert satisfà les dues distributivitats enunciades, i en la seva demostració usa només propietats implicatives que també valen a les àlgebres de Heyting, és a dir, que el reticle $\mathfrak{D}_H$ satisfà les distributivitats, i per tant també les satisfà $\mathfrak{D}$. #

Per acabar la secció establirem una relació, certament no gens coneguda, entre $\mathfrak{D}$ i $\mathfrak{D}_H$.

Definició 2

Per a cada $X \subseteq A$ posarem $X^o = \{x \in A : Ix \in X\}$.

Proposició 5

Per a cada $X \subseteq A$, X^o és un subconjunt obert d'A que compleix les propietats següents: $\emptyset^o = \emptyset$; $A^o = A$; $X^{oo} = X^o$; i per tota família $\{X_i\}$ de parts d'A, tenim $(\bigcap X_i)^o = \bigcap X_i^o$ i $(\bigcup X_i)^o = \bigcup X_i^o$.

Demostració:

X^o és obert perquè si $x \in X^o$, $Ix \in X$, però $I(Ix) = Ix \in X$ o sigui que $Ix \in X^o$. Per la mateixa raó $X^{oo} = X^o$. Les dues primeres propietats són trivials i les dues darreres es comproven sense dificultat. #

Proposició 6

Si D és un H-sistema deductiu aleshores es compleixen:

(i) D^o és un sistema deductiu

(ii) $D^o \subseteq D$

(iii) D^o és el més gran sistema deductiu contingut en D .

Demostració:

(i) Evidentment $1 \in D^o$ ja que $I1 = 1 \in D$, i ja hem vist a la proposició 5 que D^o és obert. Finalment si $x, x.y \in D^o$, és que $Ix, I(x.y) \in D$, però $I(x.y) \leqslant Ix.Iy$, d'on $Ix.Iy \in D$ i per tant $Iy \in D$, ja que D és H-sistema deductiu, és a dir $y \in D^o$: D^o és un sistema deductiu.

(ii) Si $x \in D^o$, $Ix \in D$, però $Ix \leqslant x$ per tant $x \in D$.

(iii) Si D' és un sistema deductiu contingut en D, per tot $x \in D'$ tenim $Ix \in D'$ d'on $Ix \in D$, és a dir $x \in D^{o}$, per tant $D' \subseteq D^{o}$. #

El contraexemple VI.1 ens mostra que l'anterior resultat no val per conjunts qualssevol d'A : Si $X \subseteq A$ no és H-sistema deductiu, pot ser que X^{o} no sigui ni tan sols H-sistema deductiu, i que $X^{o} \not\subseteq X$.

De l'anterior proposició sembla interessant destacar els (trivials)

Corol.laris

(i) Tot H-sistema deductiu conté un sistema deductiu

(ii) $\forall D \in \mathfrak{D}_H$, $D \in \mathfrak{D}$ si i solament si $D = D^{o}$

(iii) $\mathfrak{D} = \{ D^{o} : D \in \mathfrak{D}_H \}$. #

II.2 LA LÒGICA ABSTRACTA DE LES ÀLGEBRES DE HEYTING TOPOLÒGIQUES

Donat un operador conseqüència C sobre un conjunt S arbitrari, el parell (S,C) rep el nom de lògica abstracta. Aquest concepte fou introduït a [4] i [6] i ha estat àmpliament desenvolupat per V. Verdú als seus diferents treballs. En el nostre cas podem considerar la lògica $\mathbb{L}_H = (A, \mathbb{D}_H)$ associada a l'àlgebra de Heyting subjacent a A, i la lògica $\mathbb{L} = (A, \mathbb{D})$ associada a l'àlgebra de Heyting topològica A. Després dels treballs [75], [76] i [79] de Verdú, han quedat completament caracteritzades les lògiques que estan en correspondència bilògica amb $\mathbb{L}_H$, i estudiades llurs propietats. Si A és una àlgebra de Boole topològica, hem estudiat la lògica $\mathbb{L}$ a [17]. Dedicarem aquesta secció a fer el mateix per a la nostra lògica $\mathbb{L}$ en una àlgebra de Heyting topològica.

Proposició 1

$\mathbb{L}$ és una lògica finitària.

Demostració:

És sabut que aquest fet equival al de ser algebraic el sistema clausura, abans ja hem esmentat. #

Proposició 2

$\mathbb{L}$ satisfà el Principi de l'Adjunció (P.A.): $\mathbb{D}(x,y) = \mathbb{D}(x \wedge y)$ $\forall x,y \in A$.

Demostració:

Tenint en compte que $\mathbb{D}_H$ satisfà l'esmentat principi i la proposició 1.3, podem posar $\mathbb{D}(x,y) = \mathbb{D}_H(I(\{x,y\})) = \mathbb{D}_H(Ix,Iy) = \mathbb{D}_H(Ix \wedge Iy) = \mathbb{D}_H(I(x \wedge y)) = \mathbb{D}(x \wedge y)$. #

Mentre que el Principi de l'Adjunció es compleix per a la mateixa operació ($\wedge$) per a $\mathbb{L}_H$ i per a $\mathbb{L}$, no passa el mateix per a la resta de propietats usuals de la lògica $\mathbb{L}$.

<u>Proposició 3</u>

$\mathbb{L}$ compleix el <u>Principi Fort de la Disjunció</u> (<u>P.F.DI.</u>) respecte l'operació $x \bar{\vee} y = Ix \vee Iy \quad \forall x,y \in A$; és a dir, que per tot $x,y \in A$ i tot $X \subseteq A$ tenim que $\mathbb{D}(X,x) \cap \mathbb{D}(X,y) = \mathbb{D}(X,x \bar{\vee} y)$.

Demostració:

Anàloga a la de la proposició anterior, tenint en compte que $x \bar{\vee} y$ és sempre obert (Proposició I.2.1). #

<u>Definició 1</u>

En una aHt A anomenarem <u>operacions naturals d'implicació</u> les següents:

La implicació <u>feble</u> $a \rightarrow b = Ia.b$

La implicació <u>intuicionista</u> $a \Rightarrow b = I(Ia.Ib)$

La implicació <u>rara</u> $a \not\rightarrow b = Ia.Ib$.

La implicació feble apareix per primer cop al treball [47] de Porte precisament sobre extensions del teorema de la deducció; i la intuicionista la defineix Monteiro a [39] . Observem que $a \Rightarrow b = I(a \rightarrow b) = I(a \not\rightarrow b)$ i que en particular una implicació intuicionista és sempre oberta.

Quan formulem un resultat que valgui per a les tres implicacions naturals usarem el símbol $*$ per a referir-nos simultàniament a les operacions $\rightarrow$, $\Rightarrow$, i $\not\rightarrow$.

Sobre la possible coincidència de les tres operacions o de dues d'elles, a les proposicions IV.2.20 i 21 veiem quines possibilitats hi ha.

A la secció 3 veurem propietats algebraiques d'aquestes operacions, algunes de les quals donaran una gran importància a la implicació intuicionista; de moment llur propietat essencial, i la raó d'introduir-les, és un fet lògic:

Proposició 4

$\mathbb{L}$ compleix el Principi de la Deducció (P.D.) respecte $*$, és a dir, que per tots $x,y \in A$ i $X \subseteq A$ tenim que $y \in \mathbb{D}(X,x)$ ssi $x*y \in \mathbb{D}(X)$.

Demostració:

$y \in \mathbb{D}(X,x) = \mathbb{D}_H(I(X),Ix)$ ssi $x \to y = Ix.y \in \mathbb{D}_H(I(X)) = \mathbb{D}(X)$ simplement aplicant el P.D. a $\mathbb{D}_H$; d'altra banda $y \in \mathbb{D}(X,x)$ ssi $Iy \in \mathbb{D}(X,x)$, ja que $\mathbb{D}(X,x)$ és obert i filtre d'ordre; i pel P.D. novament a $\mathbb{D}_H$ això equival a $x \not\twoheadrightarrow y = Ix.Iy \in \mathbb{D}(X)$, i això també a $x \Rightarrow y = I(x \not\twoheadrightarrow y) \in \mathbb{D}(X)$. #

La proposició precedent és d'una importància cabdal en el nostre estudi de les propietats deductives de les aHt, ja que dóna un caràcter funcional d'implicació a les operacions $*$ (que des del punt de vista algebraic no o ŝn del tot, segons veurem a la secció 3) .

Donada una implicació $*$ i un element mínim 0 hom pot considerar l'aplicació $\neg^* x = x*0$ $\forall x \in A$. Observem que $\neg^{\to} x = \neg^{\not\twoheadrightarrow} x = \neg Ix$, i que $\neg^{\Rightarrow} x = I \neg Ix$ $\forall x \in A$. Les podríem anomenar pseudo-negacions ja que compleixen que si $x \leqslant y$ aleshores $\neg^* y \leqslant \neg^* x$ (proposició 3.4) però en canvi no compleixen $x \leqslant \neg^* \neg^* x$ (xemple VI.2) . Malgrat això sí satisfan la propietat que caracteritza lògicament una negació intuicionista:

Proposició 5

$\mathbb{L}$ satisfà el Principi de la Pseudo-Reducció a l'Absurd (P.P.R.A.) respecte $\neg^*$: $\neg^* x \in \mathbb{D}(X)$ ssi $\mathbb{D}(X,x) = A$ per tot $x \in A$ i tot $X \subseteq A$.

Demostració:

Com que 0 és mínim i els elements de $\mathfrak{D}$ són filtres d'ordre, dir $\mathbb{D}(X,x) = A$ és equivalent a dir que $0 \in \mathbb{D}(X,x)$, i això pel P.D. és equivalent a $\neg^* x \in \mathbb{D}(X)$. #

Les cinc proposicions anteriors es poden resumir dient que, com a mínim, $\mathbb{L}$ és una lògica finitària de Heyting amb element inconsistent. Veurem més endavant que $\mathbb{L}$ és exactament això .

A continuació donem, com a conseqüència del P.D. i la finitarietat de $\mathbb{L}$, dues caracteritzacions constructives de l'operador $\mathbb{D}$, una que correspon a l'estructura implicativa i l'altra a la reticular .

Proposició 6

Si $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$, $\mathbb{D}(X) = \{x \in A$: Existeixen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tals que $x_1 *(x_2 *(\ldots *(x_n * x) \ldots)) = 1\} = \{x \in A$: Existeixen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tals que $Ix_1 \wedge Ix_2 \ldots \wedge Ix_n \leqslant x\}$.

Demostració:

Per la finitarietat de $\mathbb{L}$, $x \in \mathbb{D}(X)$ ssi $x = 1$ (cas en que es compleixen les dues caracteritzacions amb un element d'X qualsevol) o bé si existeixen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tals que $x \in \mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)$ i això reiterant el P.D. equival a $x_1 *(x_2 *(\ldots *(x_n * x) \ldots)) \in \mathbb{D}(\emptyset) = \{1\}$. D'altra banda podem posar $\mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{D}_H(Ix_1, \ldots, Ix_n) = \mathbb{D}_H(Ix_1 \wedge \ldots \wedge Ix_n)$ i aleshores $x \in \mathbb{D}(x_1, \ldots, x_n)$ equivaldrà a $Ix_1 \wedge \ldots \wedge Ix_n \leqslant x$. #

Corol.laris

(i) $\forall x \in A$, $\mathbb{D}(x) = [\,Ix\,, \longrightarrow) = \{\, y \in A : Ix \leqslant y \,\}$

(ii) $\forall x \in A$, $x \in B$ ssi $\mathbb{D}(x) = \mathbb{D}_H(x)$. #

Una altra conseqüència de les dues propietats ja esmentades és una important caraterització dels sistemes deductius en termes de les operacions naturals d'implicació .

Proposició 7

Per tot $D \subseteq A$, D és sistema deductiu si i solament satisfà :

(T) $1 \in D$

(MP*) Si $x \in D$ i $x * y \in D$, aleshores $y \in D$, per tots $x, y \in A$.

Demostració:

Suposem que D és un sistema deductiu; ens cal demostrar (MP*), però si $x * y \in D = \mathbb{D}(D)$ aleshores $y \in \mathbb{D}(D,x) = \mathbb{D}(D) = D$ ja que $x \in D$.

Suposem que D satisfà (T) i (MP*); veurem que $D \in \mathfrak{D}$ demostrant que $\mathbb{D}(D) = D$. Si $x \in \mathbb{D}(D)$ i $x \neq 1$, existeixen $x_1, \ldots, x_n \in D$ tals que $x_1 *(\ldots *(x_n * x) \ldots) = 1 \in D$ i aplicant (MP*) reiteradament obtindrem que $x \in D$, és a dir, $\mathbb{D}(D) \subseteq D$, d'on $D \in \mathfrak{D}$. #

Aquest resultat és fonamental, ja que si mirem els sistemes deductius com a teories lògiques i * com a connectiva lògica definida en funció de les primitives, la proposició 7 ens diu que usant com a única regla de deducció el Modus Ponens per a aquesta connectiva, obtenim les mateixes teories.

Donat un $D \in \mathfrak{D}$, posarem $\mathfrak{D}^D = \{D' \in \mathfrak{D} : D' \supseteq D\}$. Com hom sap, es tracta també d'un sistema clausura algebraic; i si designem per $\mathbb{D}^D$ l'operador conseqüència associat, es compleix $\mathbb{D}^D(X) = \mathbb{D}(D \cup X)$ $\forall X \subsetneq A$. Aleshores es pot comprovar fàcilment la

Proposició 8

La lògica $\mathbb{L}^D = (A, \mathbb{D}^D)$ és finitària, i compleix P.A., P.F.DI., P.D. i P.P.R.A. respecte les mateixes operacions que la lògica $\mathbb{L}$.

Demostració:

Exemplificarem la del P.A. per a mostrar només l'ús de la tècnica d'introducció de l'operador $\mathbb{D}$: $\mathbb{D}^D(x,y) = \mathbb{D}(x,y,D) = \mathbb{D}(\ \mathbb{D}(x,y)\ ,\ D) =$
$= \mathbb{D}(\ \mathbb{D}(x \wedge y)\ ,\ D) = \mathbb{D}(x \wedge y, D) = \mathbb{D}^D(x \wedge y)$.

Les altres es fan de manera semblant . #

Aleshores, com sempre que disposem d'una lògica abstracta, podem considerar la relació d'equivalència usual (veure [75], per exemple) definida per $x \sim_D y$ si i solament si $\mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}^D(y)$. En el nostre cas tenim també una notable caracterització :

Proposició 9

Per tot $x,y \in A$, $x \sim_D y$ ssi $\mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}^D(y)$ ssi $x*y \in D$ i $y*x \in D$.

Demostració:

En efecte, $\mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}^D(y)$ equival a $y \in \mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}(D,x)$ junt amb $x \in \mathbb{D}^D(y) = \mathbb{D}(D,y)$ que pel P.D. equivalen respectivament a $x*y \in D$ i $y*x \in D$. #

Al quocient $A/\sim_D$ d'A per aquesta relació hom hi pot definir les operacions $\bar{x} \bar{\wedge} \bar{y} = \overline{x \wedge y}$, $\bar{x} \bar{\vee} \bar{y} = \overline{Ix \vee Iy}$, $\bar{x} \bar{.} \bar{y} = \overline{x*y}$ i $\bar{\neg}\ \bar{x} = \overline{\neg * x}$ i aleshores

$(A/\sim_D, \bar{\neg}, \bar{\wedge}, \bar{\vee}, \bar{\cdot})$ és una àlgebra de Heyting; en canvi no és una aHt ja que per tot $x \in A$ $Ix \sim_D x$ per ser D obert; per tant "perdem" l'estructura topològica. Pero hi guanyem lògicament : existeix un morfisme bilògic entre $\mathbb{L}$ i la lògica de Heyting del quocient $A/\sim_D$; és a dir, un isomorfisme d'ordre entre els sistemes deductius de $\mathfrak{D}^D$ i els H-sistemes deductius de l'àlgebra $A/\sim_D$.

Hom pot comparar les relacions $\equiv_D$ i $\sim_D$ i hom observarà que la primera és una congruència de l'estructura algebraica, essent doncs $A/\equiv_D$ una aHt , mentre que $\sim_D$ és, per dir-ho d'alguna forma, una congruència de l'estructura lògica (és compatible amb $\wedge$, $\bar{\vee}$, $*$ i $\neg *$ ...) i $A/\sim_D$ és una àlgebra de Heyting. Tenim, doncs, dos quocients, un d'algebraic i un de lògic. Aquests quocients seran represos a III.2 i III.3, on llur estructura ens donarà informació sobre algunes característiques del sistema deductiu D .

La construcció anterior ha estat feta per a un $D \in \mathfrak{D}$ arbitrari. Hi ha dos sistemes deductius destacats per als que aquesta construcció adquireix especial interès. Un d'ells és el radical, que sera tractat a III.3, i l'altre és $D = \{1\}$. En aquest cas $\mathfrak{D}^{\{1\}} = \mathfrak{D}$ i $\sim_{\{1\}}$ esdevé $\sim$, la relació d'equivalència usual associada a $\mathbb{L}$, que té una caracterització pròpia:

<u>Proposició 10</u>

Per tot $x,y \in A$, $x \sim y$ ssi $\mathbb{D}(x) = \mathbb{D}(y)$ ssi $x*y = 1$ i $y*x = 1$ ssi $Ix = Iy$.

Demostració:

Cal tenir només en compte la proposició 9 i el Corol.lari (i) de la proposició 6 . #

Tot el que hem dit per a $\sim_D$ val ara per a $\sim$. En particular

Proposició 11

$\mathbb{L}$ és una "lògica finitària de Heyting amb element inconsistent"

Demostració:

És una conseqüència del morfisme bilògic que existeix entre $\mathbb{L}$ i la lògica dels H-sistemes deducitus d'$A/\sim$, que és una lògica finitària de Heyting amb element inconsistent. Per tant $\mathbb{L}$ ho és també. #

També és interessant d'observar que gràcies a l'isomorfisme d'ordre que tenim entre $\mathfrak{D}$ i els H-sistemes deductius del quocient usual podríem donar una demostració especialment simple de la distributivitat del reticle $\mathfrak{D}$, que ja hem vist a la proposició 1.4 .

II.3 LES OPERACIONS NATURALS D'IMPLICACIÓ

Si comparem entre sí les quatre operacions d'implicació que tenim, veurem com queda justificat el nom de "feble" que Porte, independentment de tota comparació, havia donat a $\twoheadrightarrow$.

Proposició 1

Per tot $a,b \in A$, $a.b \leqslant a \twoheadrightarrow b$ i $a \Rightarrow b \leqslant a \not\twoheadrightarrow b \leqslant a \rightarrow b$.

Demostració:

Usant la isotonia i l'antiisotonia de . , de $Ia \leqslant a$ obtenim $a.b \leqslant Ia.b = a \twoheadrightarrow b$, i de $Ib \leqslant b$ obtenim $I(Ia.Ib) \leqslant Ia.Ib \leqslant Ia.b$, és a dir $a \Rightarrow b \leqslant a \not\twoheadrightarrow b \leqslant a \rightarrow b$. #

En aquesta secció veurem en quina mesura les operacions naturals d'implicació reflecteixen, o fins i tot caracteritzen, les propietats de la deducció a les aHt, de la mateixa manera que les propietats algebraiques del producte (.) de les àlgebres de Heyting corresponen als teoremes lògics que satisfa la implicació (material) de la lògica intuicionista. Avancem que la nostra conclusió serà que la implicació intuicionista és la més fidel, i és capaç de caracteritzar, tota sola, l'estructura de les aHt.

Començarem amb les propietats a les que no intervenen altres operacions de l'àlgebra, i entre aquestes amb les que es poden demostrar de forma unificada per a les tres operacions d'implicació, usant el P.D. i altres propietats de l'operador $\mathbb{D}$ ja demostrades, especialment el fet que tot sistema deductiu és tancat per (MP*), i que usarem sense mencionar.

Proposició 2

A tota aHt A es compleixen, per tot $a,b,c \in A$, les propietats:

(i) $a*b = 1$ ssi $Ia \leqslant Ib$

(ii) Si $a \leqslant b$ aleshores $a*b = 1$, però el recíproc no és cert

(iii) $a*1 = 1$

(iv) $a*a = 1$

(v) $a*(b*a) = 1$ (forma feble del Principi d'Absorció o "A fortiori")

(vi) $Ia \leqslant b*a$ (forma forta del Principi de la Quasi-Absorció)

(vii) $(a*(b*c))*((a*b)*(a*c)) = 1$ i $((a*b)*(a*c))*(a*(b*c)) = 1$ (forma feble de l'Autodistributivitat)

(viii) $(a*(b*c))*(b*(a*c)) = 1$ (forma feble de la Commutació de Premises)

(ix) $(a*(a*b))*(a*b) = 1$ i $(a*b)*(a*(a*b)) = 1$ (forma feble de la Repetició de Premises)

(x) $(a*b)*((b*c)*(a*c)) = 1$ i $(a*b) *((c*a)*(c*b)) = 1$ (formes febles dels dos Sil.logismes Hipotètics)

(xi) Si $a*b = 1$ aleshores $(b*c)*(a*c) = 1$ i $(c*a)*(c*b) = 1$ (les formes febles de les altres formes del Sil.logisme Hipotètic)

Demostració:

(i) $a*b = 1$ ssi $b \in \mathbb{D}(a)$ ssi $Ia \leqslant b$ ssi $Ia \leqslant Ib$.

(ii) De l'anterior ja que $a \leqslant b$ implica $Ia \leqslant Ib$.

(iii) Ja que $1 \in \mathbb{D}(a)$.

(iv) Ja que sempre $a \in \mathbb{D}(a)$.

(v) Del fet que $a \in \mathbb{D}(a,b)$.

(vi) $a*(b*a) = 1$ equival a $b*a \in \mathbb{D}(a)$ que equival a $Ia \leqslant b*a$.

(vii) Degut a que $c \in \mathbb{D}(a,a*b,a*(b*c))$ obtenim la primera; i com que $b*(a*b) = 1$ segons (v) , resulta $a*b \in \mathbb{D}(b)$, i per tant tenim que

$c \in \mathbb{D}(a,b,(a*b)*(a*c))$, d'on surt la segona .

(viii) Ja que $c \in \mathbb{D}(a,b,a*(b*c))$.

(ix) La primera perquè $b \in \mathbb{D}(a,a*(a*b))$, i la segona perquè $b \in \mathbb{D}(a, a*b)$.

(x) La primera perquè $c \in \mathbb{D}(a,a*b,b*c)$, i la segona perquè tenim que $b \in \mathbb{D}(c,c*a,a*b)$.

(xi) La primera part de (x) equival a $I(a*b) \leqslant I((b*c)*(a*c)) \leqslant (b*c)*(a*c)$; si $a*b = 1$, aleshores $I(a*b) = I1 = 1$, i per tant tenim que $(b*c)*(a*c) = 1$. La segona part es dedueix de manera similar de la segona part de (x) . #

A la proposició precedent i a les que segueixen es barregen distintes representacions algebraiques de la idea d'implicació veritable entre sentències. Amb la implicació material això és $x.y = 1$, que equival a $x \leqslant y$; però a més tenim les donades per les implicacions naturals $*$, que poden adoptar dues formes no relacionades: Una és $x*y = 1$, que ens diu que la implicació natural entre x i y és un teorema, i una altra és "si $x = 1$ aleshores $y = 1$", que ens diu que si x és teorema aleshores y és teorema. Si les operacions $*$ fossin ordenadores aquesta segona forma seria sempre més feble que la primera i es deduiria d'ella; pero aquest no és el cas, i ambdues formes són independents. Per aquesta raó tenia interès veure si es complien algunes de les propiietats que hem esmentat (p.e. (vii) i (ix)) i algunes de més endavant, que en principi podrien semblar-nos sobreabundants, però en realitat no ho són pas. El mateix comentari val per a l'equivalència lògica entre sentències, que té la forma feble "$x*y = 1$ i $y*x = 1$" de la que deduirem l'encara més feble "$x = 1$ ssi $y = 1$" , és a dir, respectivament una diu que x i y s'impliquen mútuament, i l'altra que són o no teoremes al mateix temps; i la forma forta és $x = y$, que és dir que les sentències corresponents tenen sempre el mateix valor de veritat.

Abans de seguir remarcarem uns resultats auxiliars, especialment el fet que $a \Rightarrow b$ és sempre obert, que juga un paper essencial a força demostracions.

Proposició 3

Per tot $a,b \in A$ es compleix que $a \Rightarrow b = I(a \not\to b) = I(a \to b)$ i que $1 \to a = a$, mentre que $1 \Rightarrow a = 1 \not\to a = Ia$. #

A continuació col.loquem tres propietats que valen per a totes les implicacions naturals, però que requereixen una demostració diferent per a cada una d'elles.

Proposició 4

A tota aHt A i per tots $a,b,c \in A$ es compleixen les propietats:

(i) Si $a \leqslant b$ aleshores $c*a \leqslant c*b$ (Isotonia per l'esquerra)

(ii) Si $a \leqslant b$ aleshores $b*c \leqslant a*c$ (Antiisotonia per la dreta)

(iii) $a*(a*b) = a*b$ (Repetició de Premises)

Demostració:

(i) Si $a \leqslant b$ aleshores $Ic.a \leqslant Ic.b$ és a dir $c \to a \leqslant c \to b$. D'altra banda tenim $Ia \leqslant Ib$, d'on $Ic.Ia \leqslant Ic.Ib$ és a dir $c \not\to a \leqslant c \not\to b$, i aplicant I als dos membres obtenim $c \Rightarrow a \leqslant c \Rightarrow b$.

(ii) De $a \leqslant b$ deduïm $Ia \leqslant Ib$, i d'aquí $Ib.c \leqslant Ia.c$, és a dir, $b \to c \leqslant a \to c$, i també $Ib.Ic \leqslant Ia.Ic$ és a dir $b \not\to c \leqslant a \not\to c$; i prenent interiors surt $b \Rightarrow c \leqslant a \Rightarrow c$.

(iii) Podem utilitzar 5.(v) ja que aquesta propietat serà demostrada directament, sense fer ús de cap de les que estem demostrant; usant-la per a $\rightarrow$ i $\Rightarrow$ i també la proposició 3, tenim $a \rightarrow (a \rightarrow b) = (a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow b) = 1 \rightarrow (a \rightarrow b) = a \rightarrow b$; i $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = (a \Rightarrow a) \Rightarrow (a \Rightarrow b) = 1 \Rightarrow (a \Rightarrow b) = I(a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b$. Per a $\not\rightarrow$ ho fem directament: De $I(Ia.Ib) \leqslant Ia.Ib$ es dedueix $a \not\rightarrow (a \not\rightarrow b) = Ia.I(Ia.Ib) \leqslant Ia.(Ia.Ib) = Ia.Ib = a \not\rightarrow b$, i com que $Ib \leqslant Ia.Ib$, $Ib \leqslant I(Ia.Ib)$ d'on $a \not\rightarrow b = Ia.Ib \leqslant Ia.I(Ia.Ib) = a \not\rightarrow (a \not\rightarrow b)$ i en resum $a \not\rightarrow (a \not\rightarrow b) = a \not\rightarrow b$. #

I finalment passem revista a les propietats de la implicació lògica que no compleixen totes les implicacions naturals (i fins cap!) .

<u>Proposició 5</u>

A tota aHt tenim que per tots $a,b,c \in A$:

(i) $a \leqslant b \rightarrow a$ i no es compleix per a $\Rightarrow$ ni per a $\not\rightarrow$ (Absorció)

(ii) $a*b \leqslant c*(a*b)$ es compleix per a $\rightarrow$ i $\Rightarrow$ però no per a $\not\rightarrow$.

(iii) $a*(b*c) = b*(a*c)$ per a $\rightarrow$ i $\Rightarrow$ però no per a $\not\rightarrow$ (Primera forma forta de la Commutació de Premises)

(iv) $a \leqslant b*c$ ssi $b \leqslant a*c$ no la satisfà cap de les tres implicacions naturals (Segona forma forta de la Commutació de Premises)

(v) $a*(b*c) = (a*b)*(a*c)$ per a $\rightarrow$ i $\Rightarrow$ però no $\not\rightarrow$ (Autodistributivitat)

(vi) $a*b \leqslant (c*a)*(c*b)$ per a $\rightarrow$ i $\Rightarrow$ però no per a $\not\rightarrow$ (Primer Sil.logisme Hipotètic)

(vii) $a \Rightarrow b \leq (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ però no per $a \rightarrow$ ni $\not\twoheadrightarrow$ (Segon Sil.logisme Hipotètic)

Demostració:

(i) Ja sabem que $a \leq Ib.a$; el contraexemple adequat és VI.2 .

(ii) Per a $\rightarrow$ és un cas particular de (i) . Per a $\Rightarrow$, de 2.(v) tenim $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow (a \Rightarrow b)) = 1$ d'on $a \Rightarrow b = I(a \Rightarrow b) \leq I(c \Rightarrow (a \Rightarrow b)) = c \Rightarrow (a \Rightarrow b)$. El mateix VI.2 ens dóna el contraexemple per a $\not\twoheadrightarrow$.

(iii) De (i), (v) (que demostrarem independentment) i 4.(ii) tenim que $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) \leq b \rightarrow (a \rightarrow c)$ i per simetria tenim la desigualtat contrària. Per a $\Rightarrow$ és lleugerament diferent, només : $Ib \leq a \Rightarrow b$, per tant $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \leq Ib \Rightarrow (a \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ i per simetria ja està. El contraexemple per a $\not\twoheadrightarrow$ és VI.5 .

(iv) L'exemple VI.2 ens mostra que cap de les tres implicacions naturals no compleix aquesta propietat.

(v) De $I(Ia.b) \leq Ia.Ib$ i del fet que $b \leq Ia.b$ implica $Ib \leq I(Ia.b)$, usant 4.(ii), deduïm que $a \rightarrow (b \rightarrow c) = Ia.(Ib.c) = (Ia.Ib).(Ia.c) \leq$ $\leq I(Ia.b).(Ia.c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = I(Ia.b).(Ia.c) \leq Ib.(Ia.c) = Ia.(Ib.c) = a \rightarrow (b \rightarrow c)$.

Per a $\Rightarrow$ és molt més senzill degut al fet que $\forall x,y \in A$, $x \Rightarrow y$ és sempre obert, i que si x i y són dos oberts, aleshores sí que $x*y = 1$ implica, i és equivalent a, $x \leq y$. En aquest cas, de les formes febles de l'Autodistributivitat, 2.(vii), deduïm $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ i $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \leq a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.

En canvi per a $\not\twoheadrightarrow$ tenim un contraexemple no solament per a la igualtat, sinó per a cada una de les desigualtats (!) a VI.5 .

(vi) Es dedueix aplicant (v) al segon membre de (ii). A VI.7 hi ha el contraexemple que necessitem per a $\not\twoheadrightarrow$.

(vii) Es dedueix de la corresponent forma feble 2.(x), per les mateixes raons que en el cas de l'Autodistributivitat. El contraexemple per a $\rightarrow$ és VI.2 , i VI.7 és el de $\not\twoheadrightarrow$. #

Cal parar esment a (vi) i (vii), on veiem que només la implicació intuicionista compleix la forma forta dels dos sil.logismes. Això ja ens comença a fer sospitar que hi ha quelcom d'especial en aquesta operació; més endavant la nostra sospita es veurà confirmada.

Passem ara a les propietats de les operacions implicatives que les relacionen amb les altres operacions d'A amb contingut lògic, que en el nostre cas són $\wedge$ i $\bar{\vee}$. Distingirem també les que valen per a les tres implicacions naturals de les que valen només per a una o dues.

Proposició 6

En una aHt A es compleixen, per a tot $a,b,c \in A$,

(i) $a*(b*(a\wedge b)) = 1$

(ii) $a*(b\wedge c) = (a*b)\wedge(a*c)$

(iii) $(a\bar{\vee} b)*c = (a*c)\wedge(b*c)$ (Llei de DeMorgan generalitzada)

(iv) $(a*b)\wedge Ib = Ib$

(v) $Ia \leqslant b*(a\wedge b)$.

Demostració:

(i) Ja que $a\wedge b \in \mathbb{D}(a\wedge b) = \mathbb{D}(a,b)$

(ii) $a \rightarrow (b\wedge c) = Ia.(b\wedge c) = Ia.b\wedge Ia.c = a\rightarrow b \wedge a\rightarrow c$; $a \not\twoheadrightarrow (b\wedge c) = Ia.I(b\wedge c) = Ia.(Ib\wedge Ic) = Ia.Ib\wedge Ia.Ic = a \not\twoheadrightarrow b\wedge a\not\twoheadrightarrow c$; i finalment $a \Rightarrow (b\wedge c) = I(a\not\twoheadrightarrow (b\wedge c)) = I(a\not\twoheadrightarrow b \wedge a\not\twoheadrightarrow c) = I(a\not\twoheadrightarrow b)\wedge I(a\not\twoheadrightarrow c) =$

$= a \Rightarrow b \wedge a \Rightarrow c$.

(iii) $(a \bar{\vee} b) \rightarrow c = I(a \bar{\vee} b).c = I(Ia \vee Ib).c = (Ia \vee Ib).c = Ia.c \wedge Ib.c =$ $= a \rightarrow c \wedge b \rightarrow c$; substituint en aquesta c per Ic obtenim $(a \bar{\vee} b) \not\rightarrow c =$ $= a \not\rightarrow c \wedge b \not\rightarrow c$; i aplicant I a aquesta darrera surt $(a \bar{\vee} b) \Rightarrow c =$ $= I((a \bar{\vee} b) \not\rightarrow c) = I(a \not\rightarrow c \wedge b \not\rightarrow c) = I(a \not\rightarrow c) \wedge I(b \not\rightarrow c) = a \Rightarrow c \wedge b \Rightarrow c$.

(iv) Per 2.(vi) tenim que $Ib \leqslant a*b$, per tant $(a*b) \wedge Ib = Ib$.

(v) $a*(b*(a \wedge b)) = 1$ que ja hem demostrat, equival a $Ia \leqslant I(b*(a \wedge b)) \leqslant$ $\leqslant b*(a \wedge b)$ sempre . #

<u>Proposició 7</u>

(i) $(a \rightarrow b) \wedge b = b$

(ii) $a \leqslant b \rightarrow (a \wedge b)$

(iii) $a*(b*c) = (a \wedge b)*c$ per a $\rightarrow$ i $\Rightarrow$ pero no per a $\not\rightarrow$ (Llei d'Importació-Exportació de la Implicació) .

Demostració:

(i) És degut a $b \leqslant Ia.b = a \rightarrow b$.

(ii) Clàssicament tenim $a.(b.(a \wedge b)) = 1$, és a dir, $a \leqslant b.(a \wedge b) \leqslant$ $\leqslant Ib.(a \wedge b) = b \rightarrow (a \wedge b)$.

(iii) Tenim que $a \rightarrow (b \rightarrow c) = Ia.(Ib.c) = (Ia \wedge Ib).c = I(a \wedge b).c =$ $(a \wedge b) \rightarrow c$; i per a $\Rightarrow$ tenim $(a \wedge b) \Rightarrow c = I(I(a \wedge b).Ic) = I((Ia \wedge Ib).Ic =$ $= I^2(Ia.(Ib.Ic)) \leqslant I(Ia.I(Ib.Ic)) = a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = I(Ia.I(Ib.Ic)) \leqslant$ $I(Ia.(Ib.Ic)) = I((Ia \wedge Ib).Ic) = I(I(a \wedge b).Ic) = (a \wedge b) \Rightarrow c$; i a VI.1 hi ha un contraexemple per a $\not\rightarrow$. #

Com hem vist, les operacions $\Rightarrow$ i $\not\rightarrow$ compleixen les formes més febles de (i) i (ii) que hem demostrat a 6.(iv) i (v) ; en comptes de donar els contraexemples de costum demostrarem una cosa més forta, alhora que formulem unes curioses caracteritzacions algebraiques dels elements oberts.

Proposició 8

A tota aHt A i per a cada element $a \in A$, són equivalents:

(i) a és obert, és a dir, $Ia = a$

(ii) $a \leq (a*b)*b$ per a tot $b \in A$ i per a qualsevol de les $*$

(iii) $(b \Rightarrow a) \wedge a = a$ per a tot $b \in A$

(iv) $(b \not\twoheadrightarrow a) \wedge a = a$ per a tot $b \in A$

(v) $(a \rightarrow b) \wedge a = a \wedge b$ per a tot $b \in A$.

Demostració:

De $b \in \mathbb{D}(a, a*b)$ deduïm $(a*b)*b \in \mathbb{D}(a)$, és a dir, $Ia \leq (a*b)*b$; per tant si (i) aleshores (ii) . També aplicant (i) a 7.(i) i (ii) deduïm (iii) i (iv) . Finalment, si suposem $Ia = a$, tenim que $(a \rightarrow b) \wedge a =$ $= (Ia.b) \wedge a = (a.b) \wedge a = a \wedge b$, és a dir (v) .

Per als recíprocs, si a (ii) posem $b = a$ obtenim $a \leq (a*a)*a =$ $= 1*a = Ia$ si $*$ és $\Rightarrow$ o $\not\twoheadrightarrow$; o bé $a \leq (a \rightarrow Ia) \rightarrow Ia = I(Ia.Ia).Ia =$ $= I1.Ia = 1.Ia = Ia$; en qualsevol dels tres casos resulta $Ia = a$. Tant de (iii) com de (iv) , posant-hi $b = 1$ queda $a = (1*a) \wedge a = Ia \wedge a = Ia$, tenint en compte que ara $*$ és $\Rightarrow$ o bé $\not\twoheadrightarrow$. Finalment si a (v) fem $b = Ia$ obtenim $Ia = a \wedge Ia = (a \rightarrow Ia) \wedge a = (Ia.Ia) \wedge a = 1 \wedge a = a$. #

Hem vist que les implicacions naturals, especialment la feble i la intuicionista, compleixen una llista força nodrida de principis, axiomes o "teoremes" usuals de la implicació material, en funció de la qual han estat definides, amb intervenció de l'interior, és a dir, de l'operador de necessitat. La pregunta que ens fem és si aquestes operacions d'implicació que hem anomenat "naturals" merament reflecteixen les propietats de la implicació lògica (modal i intuicionista) de les àlgebres de Heyting topològiques, o bé si són tan naturals i tan potents que arriben a caracteritzar-les .

En el cas de la implicació feble tenim un resultat, com era d'esperar, bastant feble, però que no deixa de ser interessant.

Proposició 9

Sigui A una àlgebra de Heyting, i $I:A \longrightarrow A$ una operació monària sobre A tal que si definim una operació binària sobre A per la fórmula $a \rightarrow b = Ia.b$ per a tot $a,b \in A$, aquesta operació compleix

(1) $1 \rightarrow a = a$ per tot $a \in A$; i

(2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$ per tots $a,b,c \in A$,

aleshores I és un interior implicatiu sobre A, i A esdevé una aHt .

Demostració:

Si a (1) fem $a = 1$ obtenim $1 = I1.I1 = 1 \rightarrow I1 = I1$, és a dir, $I1 = 1$. Si a (2) fem $a = b = 1$ obtenim, aplicant quatre cops (1), que per tot $c \in A$, $c \rightarrow c = 1$, és a dir, $Ic.c = 1$ o sigui $Ic \leqslant c$. I finalment si a (2) mateix substituïm c per Ib , queda $I(Ia.b).(Ia.Ib) = 1$, és a dir $I(Ia.b) \leqslant \leqslant Ia.Ib$. Reconeixem les condicions (I1),(I2) i (I3c) que a les àlgebres de Heyting defineixen l'operador interior. #

Per a la implicació intuicionista tenim un resultat òptim:

Proposició 10

Si $(A,\neg,\wedge,\vee,.)$ és una àlgebra de Heyting i $*$ és una operació binària sobre A tal que per a tots $a,b,c \in A$ compleix les condicions

(1) $a*a = 1$

(2) $a*(b*c) = (a*b)*(a*c)$

(3) $a*(b.c) \leq a*(b*c)$

(4) $(a*b)*c \leq (a*b).c$

aleshores l'operador definit sobre A per $Ix = 1*x$ per tot $x \in A$ és un operador interior sobre A tal que l'operació original $*$ és precisament la implicació intuicionista usualment associada a I .

Demostració:

Anirem donant progressivament diferentes propietats de l'operació $*$ que demostrarem amb les (1) a (4) i les que anem obtenint.

(5) $a*1 = 1$ ja que $a*1 = a*(a*a) = (a*a)*(a*a) = 1$;

(6) Si $a \leq b$ aleshores $c*a \leq c*b$ ja que $a \leq b$ equival a $a.b = 1$ i tenim $1 = c*1 = c*(a.b) \leq c*(a*b) = (c*a)*(c*b) \leq (c*a).(c*b)$, d'on obtenim $c*a \leq c*b$;

(7) $1*a \leq a$ ja que $1*a = (a*a)*a \leq (a*a).a = 1.a = a$;

(8) $1*(a*b) = (a*b)$ ja que per l'anterior $1*(a*b) \leq a*b$, i $a*b = a*(1.b) \leq$ $\leq a*(1*b) = (a*1)*(a*b) = 1*(a*b)$.

Ara podem veure que $Ia = 1*a$ és un interior: $I1 = 1*1 = 1$ per (1) ; $Ia = 1*a \leq a$ per (7) ; $I^2a = I(Ia) = 1*(1*a) = 1*a = Ia$ per (8) ; i finalment $I(a.b) = 1*(a.b) \leq 1*(a*b) = (1*a)*(1*b) \leq (1*a).(1*b) = Ia.Ib$.

I per acabar ens cal demostrar que $a \Rightarrow b = I(Ia.Ib) = a*b$. Tenim que $1*(a*b) = (1*a)*(1*b) \leq (1*a).(1*b)$; d'aquí deduïm que $a*b = 1*(a*b) =$ $= 1*(1*(a*b)) \leq 1*((1*a).(1*b)) = I(Ia.Ib) = a \Rightarrow b$ i d'altra banda tenim $a \Rightarrow b = I(Ia.Ib) = 1*((1*a).(1*b)) \leq 1*((1*a)*(1*b)) = 1*(1*(a*b)) = a*b$, quedant per tant $a \Rightarrow b = a*b$. #

Una conseqüència algebraica d'aquest resultat seria que podríem definir les aHt dintre de la classe de les àlgebres de tipus (1,2,2,2,2) , com àlgebres $(A,\neg,\wedge,\vee,.,\Rightarrow)$ tals que $(A,\neg,\wedge,\vee,.)$ sigui una àlgebra de Heyting i a més es complissin els axiomes (1) a (4) de la proposició precedent.

Si tenim en compte a més la proposició 2.7, que caracteritza els sistemes deductius d'A a través de $\Rightarrow$, en deduïm una conseqüència important: Podem fer lògica modal (intuicionista o clàssica, ja que la proposició anterior resta vàlida si hi canviem "Heyting" per "Boole") sense operador ni regla de necessitat, treballant en canvi amb dues implicacions (. i $\Rightarrow$) i usant el modus ponens respecte la segona: No solament obtenim els mateixos teoremes, sinó també les mateixes teories. Aquest fet, creiem, obre noves perspectives per a la lògica modal i els seus estudis algebraics.

Finalment diguem que per a la implicació rara no hem pogut obtenir cap resultat en aquesta darrera línia, ja que si bé $Ia = 1 \not\rightarrow a$, en canvi $\not\rightarrow$ no compleix l'autodistributivitat (en la seva forma forta), que com hem vist era una peça clau a la nostra demostració. De fet ja ens hem adonat que $\not\rightarrow$ té moltes menys propietats que $\rightarrow$ i $\Rightarrow$, de manera que no ens n'hem d'estranyar.

CAPÍTOL III

L'ÀLGEBRA DELS SISTEMES DEDUCTIUS

III.1 ELS IRREDUCTIBLES

Recordem en primer lloc unes definicions que són generals per a tot sistema clausura, excepte una d'elles.

Definició 1

Sigui $D \in \mathfrak{D}$. Aleshores direm que D és

Irreductible ssi $\forall D', D'' \in \mathfrak{D}$, si $D = D' \cap D''$ aleshores $D = D'$ o bé $D = D''$;

Completament irreductible ssi per tota família $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}$, si $D = \bigcap_{D' \in \mathfrak{B}} D'$ aleshores existeix un $D'' \in \mathfrak{B}$ tal que $D = D''$;

Primer ssi $\forall a,b \in A$, si $a \bar{\vee} b \in D$ aleshores $a \in D$ o bé $b \in D$;

Lligat a $x \in A$ ssi D és maximal entre tots els elements de $\mathfrak{D}$ que no contenen x ; és a dir, ssi $x \notin D$ i per tot $D' \in \mathfrak{D}$, si $D \subsetneq D'$ aleshores $x \in D'$.

Els corresponents conceptes del sistema clausura $\mathfrak{D}_H$ seran designats amb els mateixos noms precedits de la lletra H; les definicions són les mateixes excepte la de H-primer, que es formula amb $\vee$, òbviament. A continuació donarem algunes caracteritzacions i propietats dels conceptes definits, i en particular veurem que les quatre definicions corresponen a dos únics conceptes. Evidentment tot sistema deductiu completament irreductible és irreductible.

<u>Proposició 1</u>

Per a tot $D \in \mathfrak{D}$, les següents afirmacions són equivalents:

(1) D és irreductible .

(2) Per a tot $a,b \notin D$ existeix un $c \notin D$ tal que $a \tilde{\vee} b \leqslant c$.

(3) D és primer .

Demostració:

(1) implica (2) : Suposem que existeixin $a,b \notin D$ tals que per tot $c \in A$, si $a \tilde{\vee} b \leqslant c$ aleshores $c \in D$; tenint en compte que $a \tilde{\vee} b$ és sempre obert, tenim que $\mathbb{D}(D,a) \supsetneq D$, $\mathbb{D}(D,b) \supsetneq D$, i $\mathbb{D}(a \tilde{\vee} b) \subseteq D$; aleshores $D \subseteq \mathbb{D}(D,a) \cap \mathbb{D}(D,b) = \mathbb{D}(D,a \tilde{\vee} b) = \mathbb{D}(D, \mathbb{D}(a \tilde{\vee} b)) \subseteq \mathbb{D}(D) = D$, és a dir, que $D = \mathbb{D}(D,a) \cap \mathbb{D}(D,b)$, resultant D reductible contra la hipòtesi.

(2) implica (3) : Si D no fos primer, existirien $a,b \notin D$ tals que $a \tilde{\vee} b \in D$, d'on $\mathbb{D}(a \tilde{\vee} b) \subseteq D$, és a dir, que per tot $c \in A$, si $a \tilde{\vee} b \leqslant c$ aleshores $c \in D$ contra la hipòtesi .

(3) implica (1) : Suposant que D no fos irreductible, existirien $D',D'' \in \mathfrak{D}$ tals que $D = D' \cap D''$ però $D \subsetneq D'$ i $D \subsetneq D''$, és a dir, que existirien $a \in D'$ i $b \in D''$ amb $a,b \notin D$; però $\mathbb{D}(a \tilde{\vee} b) = \mathbb{D}(a) \cap \mathbb{D}(b) \subseteq$ $\subseteq D' \cap D'' = D$, d'on $a \tilde{\vee} b \in D$, contra la hipòtesi que D sigui primer . #

<u>Proposició 2</u>

Sigui $D \in \mathfrak{D}$. Si D és H-primer aleshores D és primer .

Demostració:

Si $a \tilde{\vee} b = Ia \vee Ib \in D$, per ser H-primer tenim que $Ia \in D$ o $Ib \in D$, però per ser D filtre d'ordre això implica que $a \in D$ o bé $b \in D$. #

El recíproc d'aquest teorema no és pas cert: al contraexemple VI.4 tenim un sistema deductiu que és primer però no és H-primer.

Proposició 3

Per a tot $D \in \mathfrak{D}$ les següents afirmacions són equivalents :

(1) D és completament irreductible.

(2) D és lligat a un element $a \in A$.

(3) Existeix un $a \in A$ tal que $a \notin D$ i que per tot $x \in A$, si $x \notin D$ aleshores $x * a \in D$.

Demostració:

(1) implica (2) : Si D no és lligat a cap $a \in A$, per a cada $a \in A$ tal que $a \notin D$ existeix un $D_a \in \mathfrak{D}$ tal que $a \notin D_a$ i $D \subsetneq D_a$. Aleshores resulta que $D = \bigcap \{D_a : a \notin D\}$: en efecte, $\subseteq$ pel que hem dit, i si x pertany a la intersecció, ha de ser $x \in D$, ja que si $x \notin D$ tindríem $x \in D_x$, contra la definició dels D_a . Per tant D no és completament irreductible, ja que l'hem posat com intersecció d'una família de sistemes deductius diferents d'ell mateix .

(2) implica (3) : Evidentment $a \notin D$; i si $x \notin D$, $D \subsetneq \mathbb{D}(D,x)$ i per tant ha de ser $a \in \mathbb{D}(D,x)$, que pel P.D. equival a $x * a \in D$.

(3) implica (1) : Si D no fos completament irreductible, tindríem $D = \bigcap D_i$ i per a cada i $D \subsetneq D_i$, és a dir, que existiria un $x_i \in D_i$ tal que $x_i \notin D$. Per la hipòtesi resultaria que $x_i * a \in D$, d'on $x_i * a \in D_i$ i per (MP*) $a \in D_i$ per tot i , és a dir que $a \in D$ contra la hipòtesi . #

A continuació veurem algunes propietats de separació amb sistemes deductius completament irreductibles.

Proposició 4

Per a tot $D \in \mathfrak{D}$ i tot $x \notin D$ existeix un $D' \in \mathfrak{D}$ completament irreductible tal que $D \subseteq D'$ i $x \notin D'$, i aquest D' és maximal entre tots els elements de $\mathfrak{D}$ que compleixin les dues darreres condicions, i en particular és lligat a x.

Demostració:

Es tracta de comprovar que la família d'elements de $\mathfrak{D}$ que contenen D i no contenen x és inductiva superiorment, i pel Lema de Zorn deduïm que té maximals; un qualsevol d'aquests és el buscat, i a fortiori serà maximal entre tots els elements de $\mathfrak{D}$ que no continguin x, és a dir, serà lligat a x, i per tant completament irreductible. #

Corol.lari 1

Per tots $x, y \in A$ tals que $Iy \nleq x$, existeix un $D \in \mathfrak{D}$ completament irreductible lligat a x tal que $y \in D$ i naturalment $x \notin D$.

Demostració:

Aplicar la Proposició 4 a $\mathbb{D}(y)$. #

Corol.lari 2

Per tot $x \in A$ tal que $x \neq 1$ existeix un sistema deductiu lligat a x.

Demostració:

Aplicar el Corol.lari 1 a $y = 1$. #

Proposició 5

La família dels sistemes deductius completament irreductibles forma la més petita base del sistema clausura $\mathfrak{D}$.

Demostració:

Evidentment per tot $D \in \mathfrak{D}$ tenim que $D \subseteq \bigcap\{D' \in \mathfrak{D} : D'$ és com-