ESTUDI ALGEBRAIC

DE CERTES LOGIQUES INTUICIONISTES MODALS

JOSEP MARIA FONT I LLOVET

IM4)" . Vegem aleshores com és l'àlgebra de Tarski-Lindenbaum d'aquest càlcul:

Proposició 1

La relació $p \sim q$ ssi $\vdash p \rightarrow q$ i $\vdash q \rightarrow p$ és una relació d'equivalència a P(X) que és congruència respecte $L, \neg, \wedge, \vee$, i $\rightarrow$. El quocient $P_o(X)$ és una àlgebra de Heyting topològica a la que $\bar{p} \leqslant \bar{q}$ ssi $\vdash p \rightarrow q$, i $\bar{p} = 1$ ssi $\vdash p$, per tot $p, q \in P(X)$.

Demostració:

Com que tenim com a teoremes tots els del càlcul intuicionista, ja sabem (veure per exemple [51]) que $P_o(X)$ és una àlgebra de Heyting amb les operacions $\neg, \wedge, \vee$ i . induïdes per les connectives $\neg, \wedge, \vee$ i $\rightarrow$, ja que la relació $\sim$ és congruència respecte aquestes operacions.

Que $\vdash p$ equival a $\bar{p} = 1$ és degut a que $\vdash p$ equival a que $\vdash (p \rightarrow p) \rightarrow p$ o sigui a $p \sim p \rightarrow p$, és a dir, a $\bar{p} = 1$; d'això es dedueix immediatament que $\bar{p} \leqslant \bar{q}$ equival a $\vdash p \rightarrow q$.

Vegem que $\sim$ és també congruència respecte L : Si $\vdash p \rightarrow q$, per la regla (N) tenim $\vdash L(p \rightarrow q)$ i per (MP) aplicat al segon axioma modal tenim $\vdash Lp \rightarrow Lq$; d'aquí que si $p \sim q$ aleshores també tenim $Lp \sim Lq$. Per tant $\sim$ és congruència respecte L i al quocient hi podem definir una operació monària I per $I\bar{p} = \overline{Lp}$. Pels axiomes modals tenim que aquest operador satisfà $I\bar{p} \leqslant \bar{p}$, $I(\bar{p}.\bar{q}) \leqslant I\bar{p}.I\bar{q}$ i $I\bar{p} \leqslant II\bar{p}$.

Finalment resulta que $I1 = 1$, ja que si $\bar{p} = 1$, és a dir, $\vdash p$, per (N) tenim que $\vdash Lp$ o sigui que $I\bar{p} = 1$; és a dir, que $I1 = 1$.

Resumint, la relació $\sim$ és una congruència respecte totes les operacions i $(P_o(X), I, \neg, \wedge, \vee, .)$ és una àlgebra de Heyting topològica i es satisfan les dues propietats de l'enunciat. #

El resultat precedent ens suggereix definir per al sistema IM4 una semàntica algebraica, cosa que podem fer seguint esquemes coneguts: Donada una àlgebra A del mateix tipus que P(X) , en aquest cas (1,1,2,2,2) , anomenem <u>valoració</u> (o assignació) sobre A tota aplicació de X en A, o, equivalentment, tot morfisme de P(X) en A, ja que P(X) és lliure; per aquesta raó, si v i v' són dues valoracions que coincideixen sobre les lletres (elements d'X) que apareixen a un $p \in P(X)$, aleshores $v(p) = v'(p)$. El conjunt de les valoracions de X sobre A es designa per A^X . D'una manera genèrica hom acostuma a dir que una àlgebra és <u>model</u> d'una sentència o conjunt de sentències quan la imatge d'aquestes per qualsevol valoració sobre l'àlgebra pertany a cert subconjunt distingit de l'àlgebra. Precisem ara el concepte de model o matriu amb què treballarem, tret, amb alguns retocs, de [30] i [31] .

<u>Definició 2</u>

Un <u>model per a IM4</u> és un parell (A,D) on $(A, I, \neg, \wedge, \vee, .)$ és una àlgebra de tipus (1,1,2,2,2) i $D \subseteq A$ tals que $\forall p \in P(X)$ i $\forall v \in A^X$, si $\vdash p$ aleshores $v(p) \in D$.

Un <u>model regular per a IM4</u> és un model per a IM4 en el que $D \subsetneq A$, D és tancat per les regles de deducció (és a dir, si $x \in D$ i $x.y \in D$ aleshores $y \in D$ i $Ix \in D$) , i $\forall x,y \in A$, si $x.y \in D$ i $y.x \in D$ aleshores $x = y$.

Un <u>model característic per a IM4</u> és un model regular per a IM4 tal que $\forall p \in P(X)$, $\vdash p$ si i solament si per tota $v \in A^X$, $v(p) \in D$.

Les definicions precedents són força generals; anem a veure en el nostre cas com són els models regulars per a IM4 .

Proposició 2

(A,D) és un model regular per a IM4 si i solament si A és una àlgebra de Heyting topològica amb almenys dos elements i $D = \{1\}$.

Demostració:

Del primer axioma del càlcul proposicional $\vdash p \to (q \to p) \quad \forall p,q \in P(X)$ i de la darrera condició de regularitat de la definició 2 deduïm que D es redueix a un singletó; aquesta mateixa condició converteix els teoremes d'IM4 que tinguin forma bicondicional en igualtats en A. Com que IM4 conté el càlcul intuicionista, resulta que A és una àlgebra de Heyting i $D = \{1\}$; i a més de $D \subsetneq A$ deduïm que A ha de tenir almenys dos elements.

Dels axiomes d'IM4 deduïm que I satisfà $Ix \leqslant x$, $I(x.y) \leqslant Ix.Iy$, i $Ix = I^2x$; i de la regla de necessitat que $I1 = 1$: A és doncs una aHt .

El recíproc és trivial . #

Proposició 3

$(P_o(X) , \{1\})$ és un model característic per a IM4 .

Demostració:

Les proposicions 1 i 2 ens diuen que és un model regular per a IM4.

Suposem ara que $p \in P(X)$ és tal que $\forall v \in P_o(X)^X$, $v(p) = 1$; si v_o és la projecció canònica de P(X) sobre $P_o(X)$, és una valoració, per tant $v_o(p) = 1$. Però $v_o(p) = \bar{p}$, per tant $\bar{p} = 1$, que com hem vist equival a $\vdash p$.

Per tant $(P_o(X) , \{1\})$ és característic. #

Aquest model característic té a més una important propietat algebraica:

<u>Proposició 4</u>

$P_o(X)$ és l'àlgebra de Heyting topològica lliure engendrada per $\bar{X} = \{ \bar{x} : x \in X \} = v_o(X)$.

Demostració:

$\bar{X}$ és equipotent a X ja que en cas contrari haurien d'existir dues variables equivalents, i d'aquí resultaria que totes les proposicions serien equivalents, cosa que ens duria a la inexistència d'àlgebres de Heyting topològiques no degenerades, que no és veritat.

Sigui $h:\bar{X} \longrightarrow A$ una aplicació qualsevol d'X en una aHt qualsevol A; podem considerar que $h:X \longrightarrow A$ i per tant la suposem ja estesa a un morfisme de P(X) en A. Ara bé, la relació $\sim$ és compatible amb h : En efecte, si $\vdash p$ aleshores $h(p) = 1$, ja que $h \in A^X$, per tant si $p \sim q$ tenim que $\vdash p \to q$ i $\vdash q \to p$ d'on $h(p).h(q) = 1$ i $h(q).h(p) = 1$, és a dir, $h(p) = h(q)$. Per tant h pot passar al quocient i obtenim una $h':P_o(X) \longrightarrow A$ que compleix $h = h' \cdot i$, on $i:\bar{X} \longrightarrow P_o(X)$ és la injecció natural.

La unicitat de la factorització és conseqüència del fet que P(X) és lliure de tipus (1,1,2,2,2) sobre X , i tota aHt és una àlgebra d'aquest tipus i $P_o(X)$ és un quocient de P(X) . #

Després del que hem vist creiem que té sentit de definir una relació $\models$ de <u>conseqüència semàntica</u> algebraicament en la forma habitual: $\forall S \subseteq P(X)$ i $\forall p \in P(X)$, si A és una aHt , $S \models_A p$ significa que $\forall v \in A^X$ tal que $v(S) \subseteq \{1\}$, resulta $v(p) = 1$; $S \models p$ significa que per tota aHt A tenim $S \models_A p$. Posarem $\models_{(A)} p$ quan $S = \emptyset$, i direm que p és (<u>A-vàlida</u>) <u>IM4-vàlida</u>, o simplement <u>vàlida</u> .

De les proposicions 3 i 4 resulta immediatament la <u>versió feble</u> del <u>teorema de completesa per a IM4</u> .

Proposició 5

Per a tota $p \in P(X)$, $\vdash p$ si i solament si $\models p$.

Demostració:

Si p és vàlida en IM4 en particular ho és a $P_o(X)$ i com que aquest és característic p és teorema d'IM4 .

Suposem ara que p és teorema d'IM4 i que en conseqüència $\bar{p} = 1$ a $P_o(X)$. Si A és una aHt qualsevol i $v \in A^X$, podem considerar que $v \in A^{\bar{X}}$ i per la proposició 4 existeix una única $v':P_o(X) \longrightarrow A$ morfisme d'aHt tal que $v = v' \circ v_o$ i per tant $v(p) = v'(v_o(p)) = v'(\bar{p}) = v'(1) = 1$. Veiem doncs que p és A-vàlida en tota aHt A , per tant és vàlida . #

Hem arribat al moment d'establir un resultat reiteradament anunciat:

Proposició 6

El sistema IM4 és l'anàleg intuicionista del sistema S4 de Lewis, en el sentit de Bull.

Demostració:

Es tracta de veure que satisfà les condicions que hem exposat a la Introducció (pàg. xi) : En primer lloc, col.lapsant els operadors modals hem d'obtenir el càlcul intuicionista sense més; i en segon lloc, afegint-hi l'esquema $p \vee \neg p$ $\forall p \in P(X)$ hem d'obtenir el sistema S4 de Lewis. Aquestes dues condicions són evidents si ens fixem en els models algebraics (plantejament equivalent mercès als teoremes de completesa que tenim per als tres càlculs considerats) : Una aHt en la que $Ix = x \quad \forall x \in A$ és simplement una àlgebra de Heyting, ja que la identitat és un operador interior sobre tota àlgebra de Heyting; i una aHt en la que $x \vee \neg x = 1 \quad \forall x \in A$ és una àlgebra de Boole topològica. #

El teorema de representació per a les àlgebres de Heyting topològiques ens permet obtenir un teorema de completesa per a IM4 relativa a una classe de models no tan àmplia com la de totes les aHt :

<u>Proposició 7</u>

Per a tot $p \in P(X)$, $\vdash p$ si i solament si $\models_A p$ per a tota aHt A d'oberts d'un espai topològic compacte i T_o .

Demostració:

En un sentit és conseqüència de la proposició 5 .

En sentit invers, considerem l'àlgebra de Tarski-Lindenbaum $P_o(X)$, que per la proposició I.3.10 podem submergir en una aHt d'oberts d'un espai topològic compacte i T_o. Si h és la immersió i $v \in P_o(X)^X$, aleshores $h \circ v$ és una valoració sobre l'àlgebra esmentada, per tant i segons la hipòtesi tenim que $(h \circ v)(p) = h(v(p)) = 1$ d'on $v(p) = 1$; és a dir, que p és vàlida a $P_o(X)$, que és característic, per tant p és teorema de IM4 . #

A continuació utilitzarem una altre resultat algebraic sobre les aHt per a demostrar el que ordinàriament es coneix amb el nom de <u>propietat dels models finits</u> .

Proposició 8

Sigui $p \in P(X)$ qualsevol, i $k \in \mathbb{N}$ el nombre de subfórmules, pròpies o no, de p . Aleshores les següents afirmacions són equivalents:

(1) $\vdash p$

(2) $\models_A p$ per tota aHt A finita

(3) $\models_A p$ per tota aHt A finita tal que $\mathrm{card}(A) \leqslant 2^{2^k}$.

Demostració:

Després de la proposició 5 resulta clar que (1) implica (2) , i és trivial que (2) implica (3) . Cal doncs només veure que (3) implica (1) .

Suposem que p no fos teorema d'IM4 ; en particular tindríem que $\bar{p} = v_o(p) \neq 1$ a $P_o(X)$. Posem $A_o = \{\bar{q} : q \text{ és subfórmula de } p\} \subseteq P_o(X)$. El cardinal d'A_o és k . Per la proposició I.3.9 existeix una aHt A de cardinal $\leqslant 2^{2^k}$ feta d'elements de $P_o(X)$ i a la que en particular les operacions d'A coincideixen sobre els elements d'A_o amb les operacions dè $P_o(X)$. Definim la següent valoració sobre A : Per cada $x \in X$, si x és una de les lletres que apareixen a p (és a dir , $\bar{x} \in A_o$) aleshores $v(x) = \bar{x}$; en cas contrari posem $v(x) = 1 \in A_o$. Evidentment $v \in A^X$.

Es fàcil de demostrar que si q apareix a p (és una subfórmula de p , és a dir $\bar{q} \in A_o$) aleshores $v(q) = \bar{q}$, per inducció sobre la longitud de q i tenint en compte que v és morfisme i les propietats de la construcció d'A_o . Aleshores en particular $\bar{p} = v(p) \neq 1$, és a dir, p no és vàlida en aquesta àlgebra contra la hipòtesi (3) . Per tant (3) implica (1) . #

Corol.lari

El conjunt dels teoremes d'IM4 és decidible.

Demostració:

En efecte, l'anterior proposició ens subministra un mètode que en un nombre finit de passos (que podríem afitar fàcilment) ens permet decidir si un $p \in P(X)$ donat és o no teorema, ja que el nombre d'aHt de cardinal $\leq 2^{2^k}$ és finit, i per a cada una d'elles el nombre de valoracions que difereixen sobre les lletres de p és també finit. #

Per a establir el teorema de completesa en la seva forma forta i estalviar feina a les seccions següents, definim la següent relació per a cada $S \subseteq P(X)$: $p \sim_S q$ si i solament si $S \vdash p \to q$ i $S \vdash q \to p$ per tot $p, q \in P(X)$. Hom pot comprovar rutinàriament la

Proposició 9

Per a tot $S \subseteq P(X)$ la relació $\sim_S$ és una congruència de P(X) i l'àlgebra quocient $P_S(X)$ és una àlgebra de Heyting topològica a la que $\bar{p} = 1$ ssi $S \vdash p$. #

I aleshores deduïm la versió forta del teorema de completesa:

Proposició 10

Per a tot $S \subseteq P(X)$ i tot $p \in P(X)$ són equivalents les afirmacions:

(1) $S \vdash p$

(2) $S \models p$

(3) $S \models_A p$ per a tota aHt A d'oberts d'un espai topològic compacte i T_o .

Demostració:

(1) implica (2) : Si $S \vdash p$ i A és una aHt i $v \in A^X$ és tal que $v(S) \subseteq \{1\}$, la relació d'equivalencia $\sim_S$ és compatible amb v ja que si

$p \sim_S q$, $S \vdash p \to q$ i $S \vdash q \to p$ d'on $v(p).v(q) = 1$ i $v(q).v(p) = 1$, és a dir, $v(p) = v(q)$. Per tant es pot fer la descomposició corresponent i posar $v(p) = h(\bar{p})$ on $h: P_S(X) \longrightarrow A$ és un morfisme d'aHt; com que $\bar{p} = 1$ equival a $S \vdash p$, $v(p) = h(\bar{p}) = h(1) = 1$, és a dir, que $S \models_A p$; per tant resulta $S \models p$.

(2) implica (3) : No hi ha res a demostrar.

(3) implica (1) : Com que $P_S(X)$ és una aHt , es pot considerar com a subàlgebra d'una aHt d'oberts d'un espai topològic compacte i T_o, i la projecció canònica de $P(X)$ sobre $P_S(X)$ es pot estendre a una valoració sobre l'esmentada àlgebra; de la hipòtesi (3) resulta $\bar{p} = 1$, és a dir , que $S \vdash p$. #

Com a conseqüència del teorema de completesa en la forma forta hom acostuma a obtenir el teorema de compacitat per a la semàntica en qüestió, ja que la sintaxi és òbviament finitària, per la seva mateixa definició.

Corol.lari

Per tot $S \subseteq P(X)$ i tot $p \in P(X)$ $S \models p$ si i solament si existeix un $F \subseteq S$, F finit, tal que $F \models p$. #

Es podria demostrar de manera semblant a la proposició 4 que $P_S(X)$ és l'àlgebra lliure dins de la classe d'aHt que són models d'S (és a dir, les aHt A tals que $\forall v \in A^X$, $v(S) \subseteq \{1\}$) , i aleshores usant la proposició I.3.9 establiríem la propietat dels models finits per a aquesta classe; als casos on el conjunt S sigui suficientment regular (concretament, en aquells en què per cada aHt A i cada $v \in A^X$, la qüestió "$v(S) \subseteq \{1\}$?" sigui decidible) podrem concloure que el conjunt de les conseqüències d'S és decidible.

APÈNDIX 1 . LA REGLA DE NECESSITAT

Al nostre sistema IM4 hem usat com a regla de necessitat la forma "forta" d'aquesta llei: De p es pot deduir Lp . En aquesta forma fou suggerida per Gödel a [18] , però no ha estat adoptada a bastants dels estudis de lògica modal ja que és qüestionable en cert sentit perquè ens duu a la

Proposició 11

Al sistema IM4 per tota $p \in P(X)$, p i Lp són interdeductibles.

Demostració:

Per la regla de necessitat $p \vdash Lp$, i per (MP) aplicat a l'axioma $Lp \rightarrow p$ resulta que $Lp \vdash p$. #

Cal no confondre aquest fet amb $\vdash p \leftrightarrow Lp$, que faria equivalents p i Lp i anul.laria el sentit de l'operador L . Això no es compleix degut a la manca de teorema de la deducció per a $\rightarrow$.

Potser doncs per aquest escrúpol hom adopta sovint la regla en la seva forma "feble" : Si p és teorema aleshores Lp és teorema . Ara bé, molts autors, la majoria, s'ocupen més del conjunt de teoremes de les lògiques que manipulen que no pas de la relació de deductibilitat associada, i aleshores la distinció és fins a cert punt irrellevant; en efecte, si anomenem IM4' un sistema idèntic al sistema IM4 excepte que en comptes de la regla de necessitat (N) tingui la regla (N') : "Si $\vdash p$ aleshores $\vdash Lp$" , els teoremes d'aquesta nova lògica coincideixen amb els de l'antiga, com expressa la proposició que segueix.

Proposició 12

Els sistemes IM4 i IM4' tenen els mateixos teoremes.

Demostració:

Només cal considerar que la regla de necessitat feble és vàlida al sistema IM4, per tant tot teorema d'IM4 es podrà deduir a IM4 . I donada una demostració d'un teorema d'IM4 , és obvi que tots els passos que la integren són també teoremes, per tant cada cop que hi apliquem la regla de necessitat (N), en realitat estem aplicant la regla (N') , per tant la demostració val a IM4' . #

A nosaltres, però, sí que ens afectaria aquest canvi, ja que ens interessa principalment la relació de deductibilitat que engendra una lògica (l'operador conseqüència) i les seves propietats. Aleshores tenim:

Proposició 13

Els teoremes de completesa feble, la propietat dels models finits i de decidibilitat per als teoremes valen al sistema IM4' .

Demostració:

Només cal repassar les demostracions corresponents fetes per a IM4 i ens adonarem que la regla de necessitat s'aplica sempre a teoremes. #

En canvi, el teorema de completesa fort no serà vàlid a IM4' ja que es basa en la construcció de l'àlgebra quocient $P_S(X)$ per la relació $\sim_S$; però aquesta relació és congruència respecte L si i només si val la forma forta de la regla de necessitat .

APÈNDIX 2 . MODELS NO REGULARS I PREÀLGEBRES

A la definició 2 hem imposat als models regulars una condició molt forta, la tercera condició de regularitat :

$\forall$ x,y $\in$ A , si x.y $\in$ D i y.x $\in$ D aleshores x = y . (®)

Això es fa amb la intenció d'obtenir com a models regulars les àlgebres de Heyting topològiques.

Si no volguéssim exigir la condició (®) aleshores el parell (A,D) seria una "preàlgebra de Heyting topològica" i D seria un dels anomenats "sistemes deductius" que per quocient donen lloc a una àlgebra de la classe considerada, en aquest cas una aHt . Aquest punt de vista, que de fet té el seu origen a Tarski i per la lògica algebraica a Monteiro, fou adoptat per J. Pla a [42] i [43] per a estudiar diferents classes de preàlgebres i de sistemes deductius que originessin àlgebres quocient, i, posteriorment, utilitzat per A.Torrens [72] en referència als sistemes deductius complets, i per A. Rodríguez [52] per a estudiar les àlgebres de Sales i de Wajsberg.

Podríem definir les "preàlgebres de Heyting topològiques" com a àlgebres de tipus (1,1,2,2,2) provistes d'un D $\subsetneq$ A que contingués els esquemes d'axiomes i fos tancat per les regles de deducció del sistema IM4 (El model típic d'això és l'àlgebra de proposicions P(X) amb una teoria qualsevol). Aquestes preàlgebres serien aleshores un tipus de models no regulars (és a dir, que no satisfarien la condició (®)) del sistema IM4. Si en una d'elles fèiem el quocient pel sistema deducitu D obtindríem una àlgebra de Heyting topològica.

Aquest plantejament, però, no aporta res de nou, almenys pel que fa als nostres propòsits.

V.2 EL SISTEMA IM5

En aquesta secció proposem el sistema de lògica modal intuicionista que creiem que ha de ser l'anàleg intuicionista del sistema S5 de Lewis. El donarem com a extensió del sistema IM4 que ja hem estudiat.

Definició 1

Anomenarem IM5 el sistema que s'obté afegint a IM4 l'esquema d'axioma $\neg Lp \to L\neg Lp$, $\forall p \in P(X)$.

Observem que no hem afegit cap regla de deducció, per tant podem considerar els teoremes d'IM5 com una teoria (axiomatitzable) del sistema IM4, engendrada pel conjunt $(IM5) = \{\neg Lp \to L\neg Lp : p \in P(X)\}$; la relació de deductibilitat en IM5, que designem per $S \vdash_{IM5} p$, equival a la relació $S \cup (IM5) \vdash p$ en IM4, és clar. Com a conseqüència de les construccions de la secció anterior, tenim els següents resultats:

Proposició 1

Una aHt és model del sistema IM5 si i solament si és monàdica.

Demostració:

A és model del sistema IM5 si i solament si tota $v \in A^X$ compleix que $v(\neg Lp \to L\neg Lp) = 1$ per tota $p \in P(X)$, que equival a $\neg Iv(p).I\neg Iv(p) = 1$. Si A és monàdica evidentment ho satisfà, i si una aHt A ho satisfà per tota $v \in A^X$, donat un $x \in A$ qualsevol definim una $v_x \in A^X$ per $v_x(x_1) = x$ i per tot $i > 1$, $v_x(x_i) = 1$, i resulta que $\neg Ix.I\neg Ix = 1$; per tant, A és monàdica. #

Proposició 2

$(P_{(IM5)}(X),\{1\})$ és un model característic per a IM5 .

Demostració:

$P_{(IM5)}(X)$ és una aHt en la que evidentment $\neg I\bar{p}.I\neg I\bar{p} = 1$, per tant és monàdica, és a dir, és un model regular d'IM5 ; i a més és característic ja que el pas al quocient de $P(X)$ a $P_{(IM5)}(X)$ és una valoració, per tant si un $p \in P(X)$ es valora sempre 1 a $P_{(IM5)}(X)$, en particular $\bar{p} = 1$, que segons la proposició 1.9 equival a $(IM5) \vdash p$, és a dir, que p sigui teorema del sistema IM5 . #

Proposició 3

Una $p \in P(X)$ és teorema d'IM5 si i solament si p és vàlida a tota àlgebra de Heyting topològica monàdica.

Demostració:

Si p és teorema d'IM5 i A és una aHt monàdica, per la proposició 1.10 tenim que per tota $v \in A^X$ tal que $v((IM5)) \subseteq \{1\}$, $v(p) = 1$; ara bé, essent A monàdica totes les $v \in A^X$ satisfan la primera condició, per tant també satisfan totes la segona, és a dir, p és vàlida en A.

A la inversa, en particular p serà vàlida a $P_{(IM5)}(X)$, que segons acabem de veure és característic, per tant p és teorema d'IM5 . #

Queda clar, doncs, que la semàntica d'IM5 ha de venir donada per les aHt monàdiques: Si $S \subseteq P(X)$, $S \models_{\overline{IM5}} p$ voldrà dir que per tota aHt monàdica A tenim que $S \models_{\overline{A}} p$, en el sentit d'IM4. Podem aleshores donar el teorema de completesa en la seva forma forta :

Proposició 4

Per a tota $p \in P(X)$ i per a tot $S \subseteq P(X)$ es compleix que $S \vdash_{IM5} p$ si i solament si $S \models_{IM5} p$.

Demostració:

És també conseqüència de la proposició 1.10, ja que $S \vdash_{IM5} p$ equival a dir $S \cup (IM5) \vdash p$ en IM4 , i $S \models_{IM5} p$ equival a dir que per a tota aHt monàdica A tenim $S \models_{A} p$, que per la proposició 1 equival a dir que $S \cup (IM5) \models_{A} p$ per a tota aHt A , és a dir, $S \cup (IM5) \models p$, que com sabem (proposició 1.10) equival a $S \cup (IM5) \vdash p$. #

Si intentem demostrar la propietat dels models finits ens trobarem amb una dificultat : no disposem per a les àlgebres monàdiques d'un teorema algebraic sobre construcció d'àlgebres finites com el de la proposició I.3.9, que és el recurs clau de la proposició 1.8 . En efecte, el mateix mètode de la proposició esmentada, aplicat a una aHt de partida monàdica, no ens dóna per força una A' monàdica, segons ens mostra l'exemple VI.9 . I res no ens garanteix que la mínima àlgebra monàdica que conté un subconjunt donat finit d'una àlgebra monàdica hagi de ser finita.

Podem, però, demostrar ja una de les nostres fites més destacades:

Proposició 5.

El sistema IM5 és anàleg intuicionista del sistema S5 en el sentit de Bull.

Demostració:

En efecte, satisfà les dues condicions de Bull que hem exposat a la

Introducció (pàgs. x-xi) i a la proposició 1.6, ja que una aHt monàdica a la que $Ix = x \ \forall x \in A$ és simplement una àlgebra de Heyting (amb més precisió: la identitat dóna estructura d'aHt monàdica a qualsevol àlgebra de Heyting), i si imposem a una aHt monàdica que $\forall x \in A \quad x \vee \neg x = 1$, aquesta àlgebra és una àlgebra de Boole monàdica. #

Com a conseqüència dels teoremes de completesa tenim la

<u>Proposició 6</u>

Per a totes $p,q \in P(X)$ les següents fórmules són teoremes d'IM5 : $p \rightarrow LMp$; $L\neg Lp \leftrightarrow \neg Lp$; $M\neg Mp \leftrightarrow \neg Mp$; $LMp \leftrightarrow Mp$; $M(p \wedge Mq) \leftrightarrow Mp \wedge Mq$; i la següent regla de deducció derivada és vàlida a IM5 : $Mp \rightarrow q \vdash_{IM5} p \rightarrow Lq$.

Demostració:

Són fórmules que interpretades en una aHt monàdica es converteixen en identitats (veure IV.2) i per la proposició 3 resulten ser teoremes d'IM5. La regla derivada no és més que la "regla de Becker" que, com sabem, val a tota aHt monàdica. #

Com hem vist, han aparegut diferents lleis de reducció de modalitats. Una pregunta normal seria la de saber si el nombre de modalitats en IM5 és finit, i en aquest cas quantes n'hi ha de diferents, quines són i quines implicacions hi ha entre elles.

Recordem que en lògica modal proposicional s'anomena <u>modalitat</u> qualsevol successió dels operadors monaris $\neg$, L , M , inclosa la successió buida; i que es divideixen en <u>positives</u> i <u>negatives</u> segons tinguin un nombre parell o imparell de negacions respectivament. Als sistemes clàssics, la interdefinibilitat dels operadors L i M i el fet que la negació sigui forta, redueixen el nombre de modalitats a 14 per a S4 i a 6 per a S5, essent a més igual el nombre de modalitats positives i negatives. Els nostres sistemes intuicionistes són més febles; així, conjecturem que al sistema IM4 el nombre de modalitats és infinit, mentre que desseguida demostrarem que a IM5 n'hi ha 10, i més endavant que a IMC n'hi ha 9 (proposició 3.4). Veurem a més que hi ha més modalitats positives que negatives, fet explicable perquè tenim $\vdash \neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p$ mentre que $\nvdash \neg\neg p \leftrightarrow p$.

<u>Proposició 6</u>

Al sistema IM5 existeixen com a màxim 10 modalitats diferents, que escrites de la manera més curta possible són les següents:

p , $\neg p$, $\neg\neg p$, Lp , $L\neg p$, $L\neg\neg p$, $\neg Lp$, MLp , Mp , $M\neg p$.

Demostració:

Evidentment per a calcular-les utilitzarem només $\neg$ i L , ja que M és $\neg L \neg$, i les expressarem com ens convingui.

a) Modalitats sense L : Tenim p , $\neg p$, i $\neg\neg p$, ja que tres negacions equivalen a una .

b) Modalitats amb una sola L : Sense negacions tenim Lp .

Amb una negació , $\neg Lp$ i $L\neg p$.

Amb dues negacions tenim $L\neg\neg p$, $\neg\neg Lp$ (que podem escriure MLp , per la proposició IV.2.8) i $\neg L \neg p$, que és Mp .

Amb tres negacions només tenim $\neg L \neg\neg p$ (que escriurem $M\neg p$) , ja que les ~~altres~~ possibilitats d'ordenar la L i les tres $\neg$ col.lapsen totes: Si les tres $\neg$ apareixen juntes, a una sola $\neg$; i l'altra possibilitat és

$\neg\neg L\neg p$, que col.lapsa a $L\neg p$: en efecte, $\vdash L\neg p \to \neg\neg L\neg p$ evidentment, i de l'axioma d'IM5 tenim $\vdash \neg\neg Lp \leftrightarrow \neg L\neg Lp$ i per tant tenim $\vdash L\neg\neg Lp \leftrightarrow L\neg L\neg Lp \to \neg L\neg Lp \to \neg\neg Lp$ o sigui que $\vdash \neg\neg Lp \leftrightarrow L\neg\neg Lp$ (resultat a retenir) , i per tant, com que també tenim $\vdash L\neg\neg Lp \to L\neg\neg p$ resulta $\vdash \neg\neg Lp \to L\neg\neg p$ (resultat a retenir). Particularitzant per a $\neg p$ obtenim $\vdash \neg\neg L\neg p \to L\neg\neg\neg p$ que és $\vdash \neg\neg L\neg p \to L\neg p$; en resum, que $\vdash \neg\neg L\neg p \leftrightarrow L\neg p$.

Amb quatre negacions tenim només $\neg\neg L\neg\neg p$, ja que la resta contenen tres negacions seguides i col.lapsen, i aquesta també, a $L\neg\neg p$, ja que de l'anterior es dedueix, per a $\neg p$, que $\vdash \neg\neg L\neg\neg p \leftrightarrow L\neg\neg p$.

Evidentment amb més de quatre negacions sempre en trobarem tres de juntes, per tant no apareix cap nova modalitat.

c) Amb més d'una L col.lapsen totes, ja que o bé contenen la cèl.lula LL que equival a L , o bé la $L\neg L$, que equival a $\neg L$ (ja que estem a IM5) o bé la $L\neg\neg L$, que segons hem vist fa un moment, equival a $\neg\neg L$; si no contenen cap d'aquestes cèl.lules és que hi ha com a mínim tres negacions seguides, que també col.lapsen a una o dues negacions, és a dir, a una de les cèl.lules anteriors.

Per tant hem vist que com a màxim hi ha deu modalitats, ja que totes les que puguem imaginar equivalen a una de les que hem esmentat. #

<u>Proposició 7</u>

Les deu modalitats del sistema IM5 satisfan les implicacions expressades al següent diagrama, i cap més :

$$L\neg p \to \neg p \to M\neg p \to \neg Lp$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & MLp \arrow[r] & L\neg\neg p \arrow[dr] & & \\
Lp \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \neg\neg p \arrow[r] & Mp \\
 & p \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

(on $\alpha \to \beta$ s'ha d'interpretar com a abreviatura de $\vdash_{IM5} \alpha \to \beta$); en particular, les deu modalitats són diferents .

Demostració:

Anirem veient simultàniament cada implicació i el contraexemple per a la recíproca.

$L\neg p \to \neg p \to M\neg p$ són generals i com a contraexemples per a les recíproques es pot veure VI.10 .

$M\neg p \to \neg Lp$ es dedueix de $p \to \neg\neg p$ aplicant L i $\neg$; com a contraexemple es pot prendre VI.9 .

$Lp \to p \to \neg\neg p$ i $Lp \to MLp$ són també generals i el contraexemple és el VI.8 .

$L\neg\neg p \to \neg\neg p$ és també general i VI.10 serveix de contraexemple.

$\neg\neg p \to Mp$ es dedueix de $\vdash L\neg p \to \neg p$ aplicant $\neg$; i a VI.10 es troba el contraexemple per al recíproc.

Finalment $MLp \to L\neg\neg p$ és l'única implicació exclusiva d'IM5 , que hem demostrat a la proposició anterior. El contraexemple és VI.9 .

Les dues branques del diagrama inferior no es poden juntar ja que a VI.10 tenim contraexemples per a $MLp \to p$ i per a $p \to L\neg\neg p$, per tant queda eliminada qualsevol implicació entre les dues branques.

I finalment veiem que el diagrama és efectivament inconnex, ja que una implicació qualsevol entre les seves dues parts duria a $\neg Mp \to Mp$ o bé a $Lp \to \neg Lp$, que no poden ser veritat en general com es veu prenent 0 i 1 respectivament en una aHt qualsevol. #

V.3 EL SISTEMA IMC

En aquesta secció presentarem el sistema IMC que va ser proposat per Bull a [7] malgrat adonar-se ell mateix que duia a conseqüències difícilment acceptables des del punt de vista "filosòfic" d'un intuicionista, que Bull tenia bastant present per la seva formació eminentment filosòfica a l'escola de Prior; però, com diu el mateix Bull, aquests sistemes semblen tenir un cert interès formal, que al nostre cas és molt clar: corresponen a les aHt semisimples. Ens limitarem a comprovar aquest fet i com a aplicació calcularem les seves modalitats; finalment el compararem amb el sistema MIPC de lògica modal intuicionista que investigaren Prior i el mateix Bull.

Proposició 1

Al sistema IM4 els següents esquemes són interdeductibles:

$L\neg Lp \vee Lp$, $MLp \to Lp$, i $MLp \to p$.

Demostració:

És suficient de veure que són semànticament equivalents, i per a això només cal observar que les demostracions de l'equivalència de les corresponents propietats algebraiques (que equivalen també a la semisimplicitat) que hem fet a la proposició IV.3.12 involucren només un element, el que a les fórmules de l'enunciat apareix com a p ; per tant si una aHt satisfà per una valoració alguna de les fórmules de l'enunciat, satisfà les altres dues ; en particular això ens diu que són semànticament equivalents. #

Podem donar aleshores la següent

Definició 1

Anomenarem IMC el sistema que resulta d'afegir a IM4 qualsevol dels esquemes de la proposició 1 .

La nomenclatura adoptada respon al fet que, com veurem, és un sistema de lògica intuicionista modal "gairebé clàssic" .

Proposició 2

Una aHt és model d'IMC si i solament si és semisimple.

Demostració:

En efecte, satisfer qualsevol dels esquemes propis d'IMC és satisfer algunes de les condicions que hem demostrat a la proposició IV.3.12 que són equivalents a la semisimplicitat . #

Malgrat no haver definit IMC com a extensió del sistema IM5 sinó directament de l'IM4, és obvi que tenim el

Corol.lari

El sistema IMC conté el sistema IM5 però és més fort.

Demostració:

Ja que tota aHt semisimple és monàdica , però hi ha àlgebres monàdiques que no són semisimples . #

La proposició i el corol.lari precedents deriven del teorema fort de completesa per a IM4 . D'aquest mateix teorema es podrien derivar les dues formes del teorema de completesa per a IMC respecte la semàntica definida usant la classe de les aHt semisimples. També és obvi que $P_{(IMC)}(X)$ seria un model característic per a aquest càlcul.

D'altra banda, no solament IMC és més fort que IM5, com diu el corol.lari anterior, sinó que ho és molt més; de fet, ho és massa:

Proposició 3

El sistema IMC no és "intuicionísticament plausible" en el sentit de Bull, i per tant no és l'anàleg intuicionista del sistema S5 de Lewis.

Demostració:

Si col.lapsem l'operador interior d'una aHt semisimple l'axioma (S4) $I\neg Ix \vee Ix = 1 \quad \forall x \in A$ esdevé $\neg x \vee x = 1 \quad \forall x \in A$, convertint l'àlgebra de Heyting en àlgebra de Boole, contra el que diu la primera condició de Bull. #

Pel que fa a la reducció de modalitats, és curiós de veure com malgrat l'aparició d'una nova llei de reducció en IMC (la que redueix ML a L, que segons la proposició IV.3.12 és a més equivalent a la definició) això no es tradueix en una gran disminució del nombre de modalitats diferents:

Proposició 4

En IMC hi ha nou modalitats diferents que satisfan exactament les relacions del gràfic que segueix:

$$L\neg p \to \neg p \to M\neg p \to \neg Lp$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & L\neg\neg p \arrow[dr] & & & \\ Lp \arrow[ur] \arrow[dr] & & \neg\neg p \arrow[r] & Mp \\ & p \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Demostració:

Com que IMC conté IM5 es tracta només de modificar el diagrama de la proposició 2.7 . Pero l'únic canvi possible és el degut a $\vdash Lp \leftrightarrow MLp$, la llei de reducció que ja hem dit que era equivalent a la definició d'aHt semisimple.

Que no es pot fer cap més modificació , es pot veure a l'exemple VI.11 , on hi ha els contraexemples per als recíprocs i per a la inexistència d'implicacions altres que les assenyalades. #

A continuació compararem el sistema IMC amb el sistema MIPC, definit per Prior a [48] i estudiat per Bull a [8] (on és anomenat MIPQ) i a [9]. A continuació resumim breument la construcció i la sintaxi d'aquest sistema.

El sistema MIPC té els dos operadors modals L i M com a primitius, per tant es formalitza en una àlgebra de proposicions P'(X) lliure de tipus (1,1,1,2,2,2) sobre X , essent $L, M, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, els símbols per a les operacions. El càlcul sintàctic que es defineix sobre P'(X) té per axiomes els del càlcul intuicionista i cap més, i a més del Modus Ponens per a $\rightarrow$ té quatre regles de deducció que afecten els operadors modals:

R1 : De $p \rightarrow q$ es dedueix $Lp \rightarrow q$

R2 : De $p \rightarrow q$ es dedueix $p \rightarrow Mq$

R3 : De $p \rightarrow q$ es dedueix $p \rightarrow Lq$ sempre que p estigui completament modalitzada, és a dir, sempre que totes les seves variables apareguin sota el "domini" d'un operador modal (L o M) .

R4 : De $p \rightarrow q$ es dedueix $Mp \rightarrow q$ sempre que q estigui completament modalitzada.

Les definicions de demostració, de teorema, etc. , són les usuals.

Aquesta formulació té el seu origen al càlcul de predicats intuicionista, com les àlgebres monàdiques de Halmos el tenien al clàssic.

La nostra intenció és veure que en algun sentit podem considerar que MIPC és un sistema intermedi entre IM5 i IMC . Naturalment la comparació no pot ser absoluta ja que als nostres sistemes sempre M és derivat de L , i malgrat que podríem formular-los sobre l'àlgebra P'(X) , hauríem d'afegir l'axioma que relaciona M amb L . Ara bé, un primer resultat interessant és:

Proposició 5

El sistema IMC és equivalent al sistema que resulta d'afegir al sistema MIPC l'esquema d'axioma $Mp \leftrightarrow \neg L \neg p \quad \forall p \in P'(X)$.

Demostració:

Utilitzarem els teoremes de completesa per als dos sistemes lògics: per a IMC el tenim amb aHt semisimples, i per a MIPC (veure [8]) amb estructures $(H,K,\{1\},\neg,\wedge,\vee,\,.\,,I,\delta)$ tals que $(H,\neg,\wedge,\vee,\,.\,)$ és una àlgebra de Heyting, 1 és el seu element màxim, i K és una subàlgebra d'H relativament completa , on $Ix = \sup\{y \in K : y \leqslant x\}$ i $\delta x = \inf\{y \in K : y \geqslant x\}$ $\forall x \in A$. Com es veu en principi no hi ha relació entre I i δ .

De la definició d'aquestes estructures i la proposició I.2.3 deduïm que $(H,I,\neg,\wedge,\vee,\,.\,)$ és una aHt . I si tenim en compte que hem afegit que $\vdash Mp \leftrightarrow \neg L \neg p$, estem imposant que $\delta x = \neg I \neg x \quad \forall x \in A$, és a dir, aquesta δ és la clausura de les aHt ; aleshores per la proposició IV.3.12 la condició $\delta x = \inf\{y \in K : y \geqslant x\}$ és equivalent a que H sigui una aHt semisimple. És a dir, que coincideixen els models dels dos sistemes, per tant són equivalents. #

Per tant IMC és un sistema més fort que MIPC . En particular, doncs, MIPC més $Mp \leftrightarrow \neg L \neg p$ és un sistema més fort que IM5 ; però evidentment sense l'addició d'aquest axioma suplementari no es pot establir cap comparació entre MIPC i IM5 que involucri fórmules escrites amb M . Però tenim un resultat parcial certament interessant:

<u>Proposició 6</u>

Tot teorema d'IM5 , escrit sense M , és un teorema de MIPC .

Demostració:

Com hem dit, els teoremes de MIPC són les fórmules vàlides a tota estructura $(H,K,\{1\},\neg,\wedge,\vee,\ .\ ,I\ ,\delta)$ com les ja descrites . Si prescindim de l'operador δ , el fet de ser K subàlgebra fa que l'estructura sigui una aHt fortament monàdica, i en particular monàdica, a la que tots els teoremes d'IM5 són vàlids. Per tant tot teorema d'IM5, escrit sense M, és un teorema del sistema MIPC . #

Aquest resultat no és veritat per a IMC ja que per exemple la fórmula $L(Lp \vee q) \leftrightarrow Lp \vee Lq$ és un teorema d'IMC escrit sense M que no és teorema del sistema MIPC.

La conclussió de les proposicions anteriors és doble: Si en IM5 prescindim completament de l'ús de M com a abreviatura de $\neg L \neg$, aleshores el sistema MIPC és més fort que IM5 ; i IMC és més fort que MIPC sempre.

CAPÍTOL VI

EXEMPLES DESENVOLUPATS

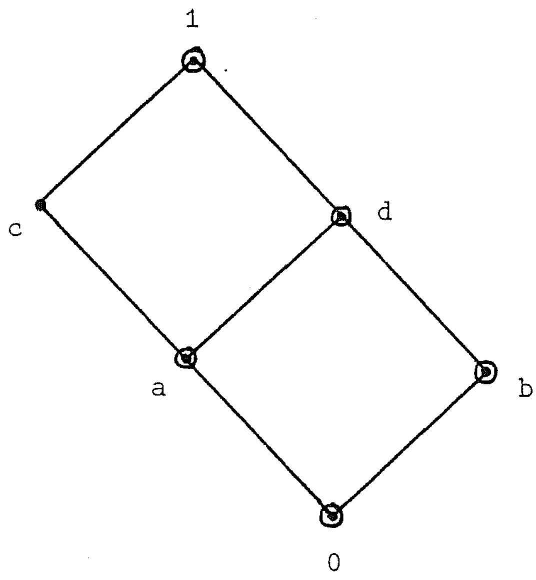
Presentem en aquest capítol 11 exemples concrets d'àlgebres de Heyting topològiques que utilitzem durant tot el treball per a molt diversos propòsits; i a més hi ha un exemple (el darrer) d'un operador clausura en una àlgebra de Heyting que no dóna lloc a un operador interior.

Es tracta en tots els casos de reticles distributius finits, que descrivim per mitjà d'un diagrama de Hasse sobre el que marquem amb un cercle els elements oberts. Segons la proposició I.2.3 això és suficient per a determinar una aHt , sempre que els elements oberts formin un subreticle, i 0 i 1 ho siguin. Per a facilitar els càlculs i comprovacions completem el gràfic amb una taula de doble entrada per al producte (que dóna el producte dels elements de la columna vertical pels elements de la fila horitzontal) i una taula d'entrada simple per a $\neg$, I i δ .

A cada exemple calculem els diferents conjunts d'elements distingits (densos, peirceans, radicals, ...) i a continuació esmentem els trets de l'àlgebra que apareixen al curs del treball, amb indicació entre parèntesis de la pàgina on són mencionats. Per raons d'espai no explicitem els càlculs ni les comprovacions, sinó que ens limitem a indicar els fets; les comprovacions més laborioses i menys explícites han de tenir en compte els resultats de la secció III.4 ; cal recordar també que $D_{\rightarrow} = D_{\not\leftrightarrow}$, i $P_{\rightarrow} = D_{\Rrightarrow} = R(A)$, per tant només $D_{\rightarrow}$ i R(A) apareixen explícitament.

Volem fer constar que no ha estat possible de reduir el nombre d'exemples usats, ja que cadascun gaudeix "en exclusiva" d'alguna propietat que no tenen els altres i que el fa, per tant, imprescindible.

EXEMPLE VI.1



0	1	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1
c	b	d	b	1	d	1
d	0	c	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1
·	0	a	b	c	d	1
$\neg$	1	b	c	b	0	0
I	0	a	b	a	d	1
δ	0	c	b	c	1	1

\+ $R(A) = R_H(A) = D_{\rightarrow} = P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} = L_A \quad \{1, d\}$.

\+ És una aHt no monàdica ja que $\neg b = c$. (9)

\+ b és tancat però $\neg b = c$ no és obert; $\neg a = b$ és obert però a no és tancat; $\neg c = b$ és tancat però c no és obert . (11)

\+ Si $X = \{a\}$ aleshores $X^{\circ} = \{a,c\}$ no és sistema deductiu i $X^{\circ} \not\subseteq X$. (28)

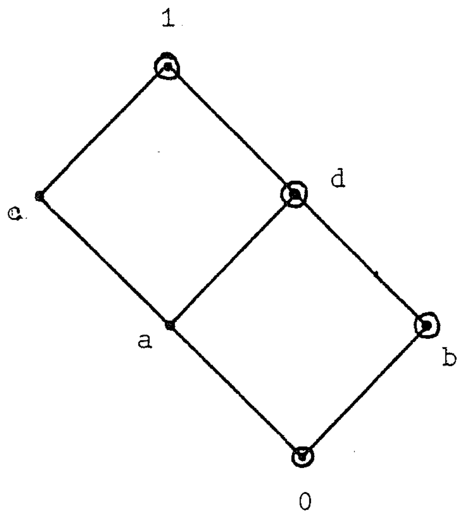
\+ $(1 \wedge b) \nrightarrow 0 = c \not\leq a = 1 \nrightarrow (b \nrightarrow 0)$. (44)

\+ $D_{\rightarrow} = D_{\Rightarrow}$; $D_{\rightarrow} = R_H(A)$; $D_H \cap B = D_{\rightarrow}$; $R_H(A) \cap B = R(A)$; $\{1\} \neq R(A) = R_H(A)$; $R(A) = L_A$; $R_H(A) = L_A$; $D_{\rightarrow} = R(A) \cap R_H(A)$; $L_A = R(A) \cup R_H(A)$; $a \in Reg_{\Rightarrow}(A)$ però $a \notin T$; $\mathbb{D}(R(A) \cup R_H(A)) = R(A)$. (70,71,72,77,80)

\+ Compleix $\delta \neg \delta x = \neg \delta x \quad \forall x \in A \qquad \delta(x \wedge \delta y) = \delta x \wedge \delta y \quad \forall x,y \in A$, i $D_{\rightarrow} = D_{\Rightarrow}$ sense ésser monàdica. (91,93,94)

\+ $T = \{0,b,c,1\}$ és una subàlgebra d'A , i A no és semisimple . (112)

EXEMPLE VI.2

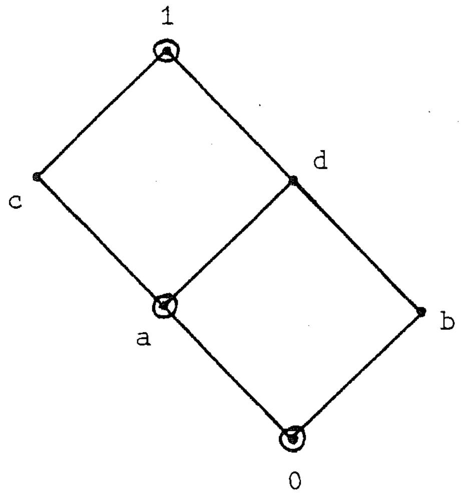


(la taula del producte és la mateixa que la de l'exemple VI.1)

	0	a	b	c	d	1
$\neg$	1	b	c	b	0	0
I	0	0	b	0	d	1
δ	0	c	1	c	1	1

+ $P_{\Rightarrow} = P_{\not\rightarrow} = R(A) = L_A = \{1,d,b\}$; $D_{\rightarrow} = R_H(A) = \{1,d\}$.
+ És una aHt no monàdica, ja que $\neg b = c$. (9)
+ Satisfà que $\forall x \in A$, si $x \in T$ aleshores $\neg x \in B$, i que si $\neg x \in T$ aleshores $x \in B$ (12) i això sense ésser monàdica. (92)
+ $a \not\leq \neg * \neg * a = 0$ (per a totes les $*$) . (31)
+ $c \not\leq d \Rightarrow c = d \not\rightarrow c = 0$; $b \not\rightarrow 0 = c \not\leq 0 = d \not\rightarrow (b \not\rightarrow 0)$; $d \leq 1 = c * b$ però $c \not\leq b = d * b$ (per a totes les $*$) ; $1 \rightarrow a = a \not\leq 0 = (a \rightarrow 0) \rightarrow (1 \rightarrow 0)$ (42,43)
+ $D_{\rightarrow} \subsetneq D_{\Rightarrow}$ i $R_H(A) \cap B \subsetneq R(A)$. (70,72)
+ $T = \{0,c,1\}$ no és subàlgebra d'A . (112)
+ $I(Id \vee c) = 1 \neq d = Id \vee Ic$. (112)

EXEMPLE VI.3

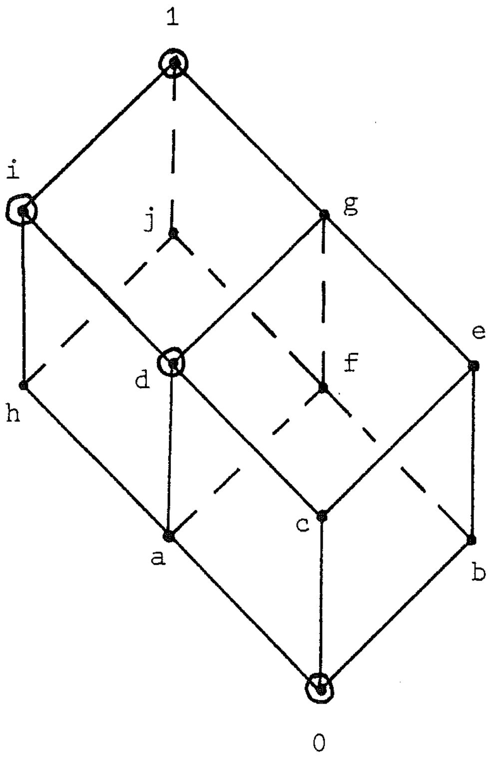


(la taula del producte és la mateixa que a l'exemple VI.1)

	0	a	b	c	d	1
	1	b	c	b	0	0
I	0	a	0	a	a	1
	0	1	b	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = \{1\}$; $R_H(A) = \{1,d\}$; $P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} = \{1,a\}$; $R(A) = L_A = \{1,c,d,a\}$.
+ És una aHt no monàdica , ja que $\neg a = b$. (9)
+ $D_{\rightarrow} \subsetneq R_H(A)$; $\{1\} \neq R_H(A) \subsetneq R(A)$; $D_{\rightarrow} \subsetneq R(A) \cap R_H(A)$; $Reg_{\Rightarrow}(A) =$ $= T \cap B$. (71,72,80)
+ Compleix que per tot $x,y \in A$, $I(Ix \vee y) = Ix \vee Iy$ i que per tots $x,y \in A$ $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y$ però en canvi $T = \{0,b,1\}$ no és subàlgebra d'A i $c \wedge \delta b = 0$ però $\delta c \wedge \delta b \neq 0$; i tot això sense ser monàdica ni, per tant, semisimple. (112)

EXEMPLE VI.4



0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	e	e	1	e	1	1	1	1	1	1
b	i	i	1	i	i	1	1	1	i	i	1	1
c	j	j	j	1	1	1	j	1	j	1	j	1
d	b	j	b	e	1	e	j	1	j	1	j	1
e	h	h	j	i	i	1	j	1	h	i	j	1
f	c	i	e	c	i	e	1	1	i	i	1	1
g	0	h	b	c	i	e	j	1	h	i	j	1
h	e	g	e	e	g	e	g	g	1	1	1	1
i	b	g	b	e	g	e	f	g	j	1	j	1
j	c	d	e	c	d	e	j	j	i	j	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
·	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
¬	1	e	i	j	b	h	c	0	e	b	c	0
I	0	0	0	0	d	0	0	d	0	i	0	1
δ	0	1	b	1	1	1	1	1	1	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = \{1\}$; $R_H(A) = \{1,g\}$; $P_{\Rightarrow} = P_{\not\rightarrow} = \{1,d,i\}$; $R(A) = \{1,d,i,g\}$;

  $L_A = \{1,j,i,h,g,f,e,d,c,b,a\} = A - \{0\}$.

+ És una aHt no monàdica ja que $\neg d = b$. (9)

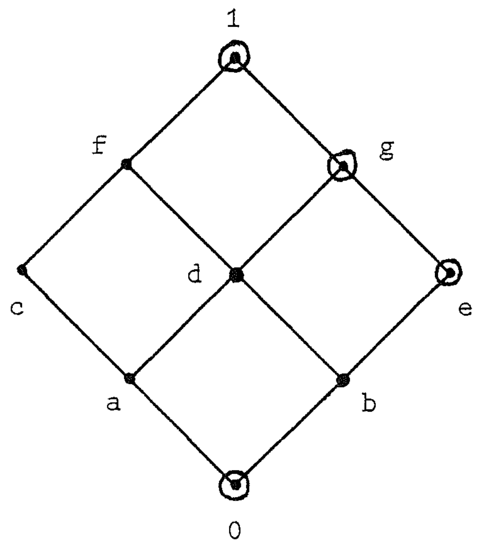
+ $D = \{d,g,i,1\}$ és un sistema deductiu primer (i maximal) que no és H-primer

  ja que $e \vee f = g \in D$ però $e \notin D$ i $f \notin D$. (51)

+ $R(A) \subsetneq L_A$; $R_H(A) \subsetneq L_A$; $\mathbb{D}(L_A) = A$; $R(A) \cup R_H(A) \subsetneq L_A$; $\mathbb{D}(R(A) \cup R_H(A)) =$

  $= A$. (77,80)

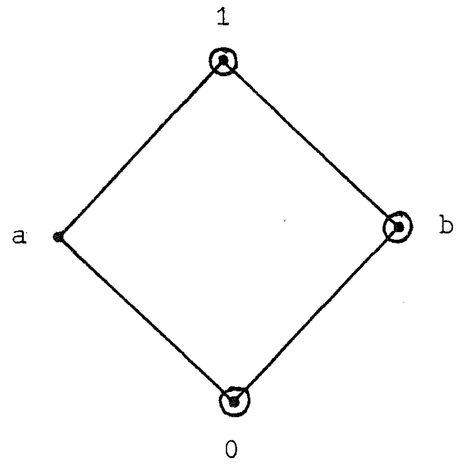
EXEMPLE VI.5



0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	e	1	1	e	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1	1
c	e	g	e	1	g	e	1	g	1
d	0	c	e	c	1	e	1	1	1
e	c	c	f	c	f	1	f	1	1
f	0	a	e	c	g	e	1	g	1
g	0	c	b	c	f	e	f	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1
·	0	a	b	c	d	e	f	g	1
¬	1	e	c	e	0	c	0	0	0
I	0	0	0	0	0	e	0	g	1
δ	0	c	1	c	1	1	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = \{1,g\}$; $R_H(A) = \{1,f,g,d\}$; $P_{\Rightarrow} = P_{\not\twoheadrightarrow} = R(A) = \{1,g,e\}$;
  $L_A = \{b,d,e,f,g,1\}$.
+ És una aHt no monàdica ja que $\neg e = c$. (9)
+ $e \not\twoheadrightarrow (1 \not\twoheadrightarrow 0) = c \nleq 0 = 1 \not\twoheadrightarrow (e \not\twoheadrightarrow 0)$; $e \not\twoheadrightarrow (1 \not\twoheadrightarrow 0) = c \nleq 0 = (e \not\twoheadrightarrow 1) \not\twoheadrightarrow (e \not\twoheadrightarrow 0)$ i $(1 \not\twoheadrightarrow b) \not\twoheadrightarrow (1 \not\twoheadrightarrow a) = c \nleq a = 1 \not\twoheadrightarrow (b \not\twoheadrightarrow a)$. (42)
+ $D = \{a,c,d,f,g,1\}$ és un H-sistema deductiu H-maximal però $D^{\circ} = \{1,g\}$ no és un sistema deductiu maximal. (56)
+ Ambdós radicals són diferents de $\{1\}$ i no hi ha cap inclusió entre ells. (72)
+ Satisfà $\forall x,y \in A$ que $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y$ i no és semisimple. (112)

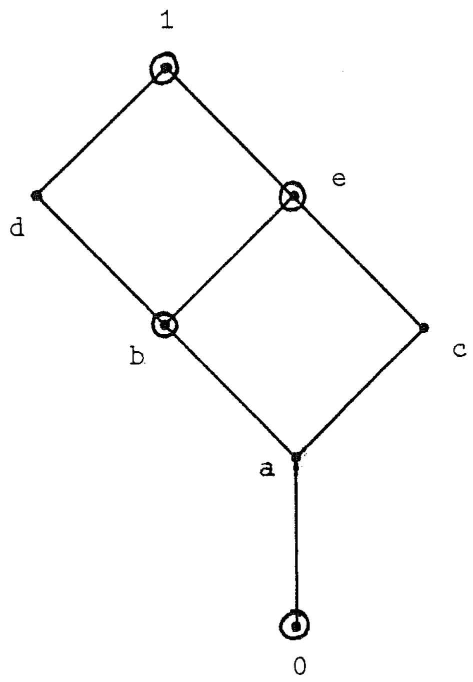
EXEMPLE VI.6



0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1
·	0	a	b	1
$\neg$	1	b	a	0
I	0	0	b	1
δ	0	a	1	1

+ $D_{\rightarrow} = R_H(A) = \{1\}$; $P_{\Rightarrow} = P_{\nleftrightarrow} = R(A) = L_A = \{1,b\}$.
+ En realitat és una àlgebra de Boole topològica, que com a àlgebra de Heyting topològica no és monàdica ja que $\neg b = a$. (9)
+ $\{1\} = R_H(A) \subsetneq R(A)$. (72)
+ $P_{\Rightarrow} = P_{\nleftrightarrow} = P_{\rightarrow}$ però no és monàdica. (94)

EXEMPLE VI.7



0	1	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1	1
b	0	e	1	e	1	e	1
c	0	b	b	1	1	1	1
d	0	a	b	e	1	e	1
e	0	b	b	d	d	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1
·	0	a	b	c	d	e	1
$\neg$	1	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	c	d	c	1
δ	0	1	1	1	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = R(A) = \{1,c,d,e\}$; $P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} = \{1,c,d\}$; $R_H(A) = L_A = \{a,b,c,d,e,1\} =$
$= A - \{0\}$.

+ Aquesta aHt és monàdica, ja que B és tancat per $\neg$, però no és fortament monàdica ja que $d,c \in B$ però $d.c = e \notin B$. (9 , 99)

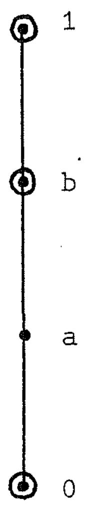
+ $d \nrightarrow c = e \nleq c = (d \nrightarrow d) \nrightarrow (d \nrightarrow c)$ i $d \nrightarrow c = e \nleq c = (c \nrightarrow c) \nrightarrow$
$\nrightarrow (d \nrightarrow c)$. (42,43)

+ $T = \{0,1\}$ però A no és simple. (62)

+ $R_H(A) \cap B \subsetneq D_{\rightarrow}$; $\{1\} \neq R(A)$ $R_H(A)$. (71,72)

+ T és subàlgebra d'A però A no és semisimple. (112)

EXEMPLE VI.8



0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1
·	0	a	b	1
$\neg$	1	0	0	0
I	0	0	b	1
δ	0	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = R(A) = R_H(A) = L_A = \{1,b,a\}$; $P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} = \{1,b\}$.

+ És una aHt fortament monàdica no semisimple.

+ $D = \{1,b\}$ és un sistema deductiu maximal però no és H-maximal ; i

  $D' = \{1,a,b\}$ és un H-sistema deductiu H-maximal que no és obert. (55)

+ $\neg a$ és tancat però a no és pas obert. (92)

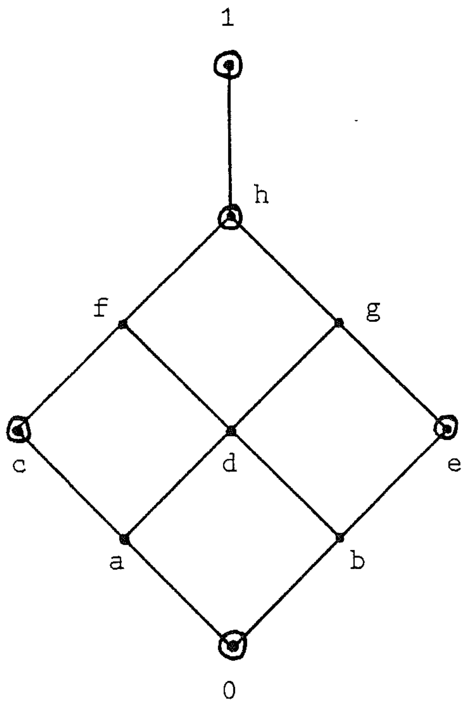
+ Satisfà $I(Ix \vee y) = Ix \vee Iy \quad \forall x,y \in A$, i $\delta(x \dot{\vee} y) = \delta x \vee \delta y \quad \forall x,y \in A$, i

  $T = \{0,1\}$ és subàlgebra d'A però no és pas semisimple. (112)

+ $Ia < a < \neg\neg a$; $Ib < \delta Ib$. (142)

+ $\{1\} \neq R(A) = R_H(A) = L_A$. (94)

EXEMPLE VI.9



0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	e	1	1	e	1	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1	1	1
c	e	g	e	1	g	e	1	g	1	1
d	0	c	e	c	1	e	1	1	1	1
e	c	c	f	c	f	1	f	1	1	1
f	0	a	e	c	g	e	1	g	1	1
g	0	c	b	c	f	e	f	1	1	1
h	0	a	b	c	d	e	f	g	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
·	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
$\neg$	1	e	c	e	0	c	0	0	0	0
I	0	0	0	c	0	e	c	e	h	1
δ	0	0	e	c	1	e	1	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = P_{\Rightarrow} = P_{\leftrightarrow} = R(A) = R_H(A) = \{1,h\}$; $L_A=\{d,f,g,h,1\}$.

+ És una aHt fortament monàdica no semisimple.

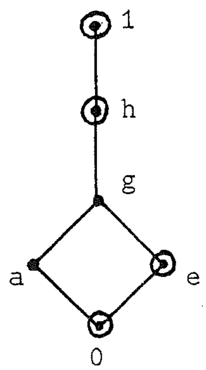
+ Satisfà que per tot $x \in A$, si $\neg x$ és tancat aleshores x és obert, i és monadica. (92)

+ $\delta(c \vee e) = 1 \neq h = \delta c \vee \delta e$, i és fortament monàdica. (10,112)

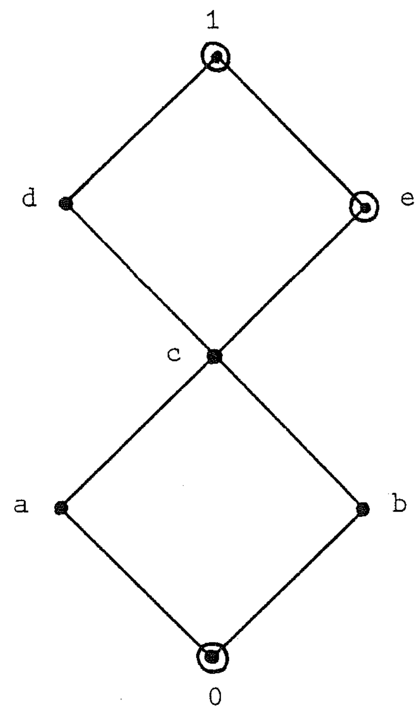
+ T no és subàlgebra d'A, ja que $c,e \in T$ però $c \vee e = h \notin T$, i és fortament monàdica. (112)

+ $\delta \neg b < \neg Ib$ i $\delta Ib < I \neg\neg b$. (142)

+ L'àlgebra engendrada amb el mètode de la proposició I.3.9 pel conjunt $\{a,e,h\}$ és la del diagrama adjunt, que no és monàdica ja que $\neg' e = a$. (138)



EXEMPLE VI.10



·	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1	1	1
b	a	a	1	1	1	1	1
c	0	a	b	1	1	1	1
d	0	a	b	e	1	e	1
e	0	a	b	d	d	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1
$\neg$	1	b	a	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	e	1
δ	0	1	1	1	1	1	1

+ $D_{\rightarrow} = P_{\Rightarrow} = P_{\not\leftrightarrow} = R(A) = \{1,e\}$; $R_H(A) = \{1,c,d,e\}$; $L_A = \{a,b,c,d,e,1\} =$
$= A - \{0\}$.

+ És una aHt fortament monàdica , no semisimple.

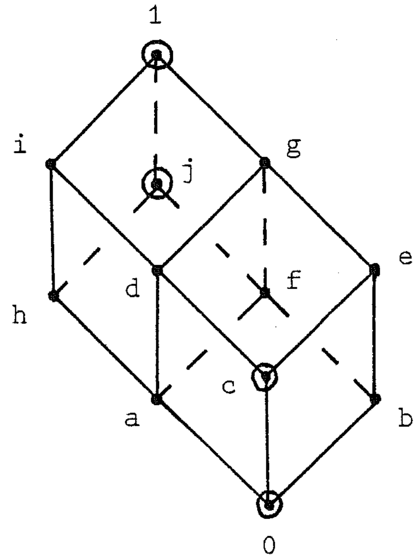
+ $a = \neg\neg a$ i $b = \neg\neg b$ però $a,b \notin T$. (93)

+ $I(d \vee Ie) = 1 \neq e = Id \vee Ie$ però $T = \{0,1\}$ és subàlgebra d'A i es compleix que $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y \quad \forall x,y \in A$. (112)

+ $I\neg b < \neg b < \delta\neg b$; $I\neg\neg a < \neg\neg a < \delta a$; $a \nleq I\neg\neg a$; $\delta Ie \nleq e$.
(142)

+ $\{1\} \neq R(A) \subsetneq R_H(A) \subsetneq L_A$. (94)

EXEMPLE VI.11

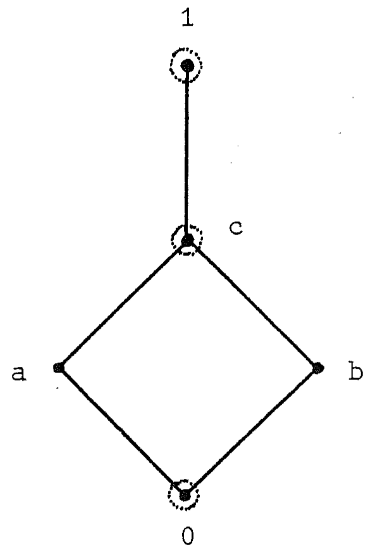


(la taula del producte és la mateixa que apareix a l'exemple VI.4)

	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
$\neg$	1	e	i	j	b	h	c	0	e	b	c	0
I	0	0	0	c	c	c	0	c	0	c	j	1
δ	0	j	j	c	1	1	j	1	j	1	j	1

+ $D_{\rightarrow} = P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} = R(A) = \{1\}$; $R_H(A) = \{1,g\}$; $L_A = \{d,e,g,i,1\}$.
+ És una aHt semisimple, concretament producte directe de dues àlgebres simples.
+ $\{1\} = R(A) \subsetneq R_H(A)$. (72)
+ És semisimple i en canvi $If = 0 \neq j = \neg\delta\neg f$. (106)
+ $If < f < \neg\neg f$; $\neg\neg i < \delta i$; $I\neg b < \neg b < \delta\neg b$; $I\neg\neg b < \neg\neg b$; $If < I\neg\neg f$; $\delta\neg a < \neg Ia$; $b \nleq I\neg\neg b$; $I\neg\neg a \nleq a$. (146)

EXEMPLE VI.12



0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1
$\cdot$	0	a	b	c	1
$\neg$	1	b	a	0	0
δ	0	c	c	c	1
I	0	0	0	1	1

+ Hem marcat al gràfic els elements tancats: T = $\{0,c,1\}$; per la fórmula $\delta x = \inf \{t \in T : t \geqslant x\}$ deduïm l'operador δ .

+ Aquest operador no solament és clausura d'ordre sinó també de reticle, és a dir, compleix $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y \quad \forall x,y \in A$; a més satisfà $\forall x,y \in A$ $\delta(x \wedge \delta y) = \delta x \wedge \delta y$, i T és subàlgebra d'A , i per tant també es compleix $\delta \neg \delta x = \neg \delta x \quad \forall x \in A$.

+ L'operador I és el deduït de δ per la fórmula $I = \neg \delta \neg$; i es satisfan les següents relacions entre I i δ : $x \leqslant I\delta x \quad \forall x \in A$; si $\delta x \leqslant y$ aleshores $x \leqslant Iy \quad \forall x,y \in A$; i $\delta Ix = Ix \quad \forall x \in A$.

+ És a dir, tenim un operador δ de clausura que a més compleix les propietats (1), (2), (3), (4), (ii) i (C3), totes les propietats que δ pot arribar a tenir en una aHt, i en canvi l'operador $I = \neg \delta \neg$ no és ni tan sols interior d'ordre, ja que $Ic = 1 \nleqslant c$.

+ Ens hem referit a aquest exemple a la pàgina xii de la Introducció, i a la nota [9] , pàgina xxiv .

REFERÈNCIES

[1] BECKER, OSKAR : "Zur Logik der Modalitäten" Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung 11 (1930) 497-548 .

[2] BETH, EVERT - NIELAND, J.F.F. : "Semantic construction of Lewis Systems S4 and S5" a "The theory of models" (Addison, Henkin, Tarski editors) 17-24 , North-Holland, Amsterdam, 1965 .

[3] BIRKHOFF, GARRETT : "Lattice Theory" AMS Colloquium Publications XXV , New-York, 1940 (2^a ed. 1948; 3^a ed. 1966) .

[4] BLOOM, STEPHEN D. - BROWN, DONALD J. : "Classical Abstract Logics" Dissertationes Matemathicae CII (1973) 43-51 .

[5] BOCHEŃSKI, INNOCENTIUS M. : "Formale Logik" Verlag Karl Alber, Freiburg-München, 1956 (Existeix traducció castellana amb el títol "Historia de la Lógica Formal" Gredos, Madrid, 1967) .

[6] BROWN, DONALD J. - SUSZKO, ROMAN : "Abstract Logics" Dissertationes Mathematicae CII (1973) 9-40 .

[7] BULL, ROBERT A. : "Some modal calculi based on IC" a "Formal Systems and Recursive Relations" (Crossley, Dummett, editors) 3-7 , Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, 1965 .

[8] ——— : "A modal extension of intuitionistic logic" Notre Dame Journal of Formal Logic 6 (1965) 142-145 .

[9] ——— : "MIPC as the formalisation of an intuitionist concept of modality" Journal of Symbolic Logic 31 (1966) 609-616 .

[10] DAVIS, CHANDLER : "Modal operators, equivalence relations and projective algebras" American Journal of Mathematics 76 (1954) 747-762 .

[11] DIEGO, ANTONIO : "Sur les algèbres de Hilbert" col. de Logique Mathématique, sér. A n° XXI, Gauthier-Villars, Paris, 1966 .

[12] FEYS, ROBERT : "Les logiques nouvelles des modalités" Revue Néoscholastique de Philosophie 40 (1937) 517-553 , 41 (1938) 217-252 .

[13] FISCHER-SERVI, GISÈLE : "On modal logic with an intuitionistic base" Studia Logica 36 (1977) 141-149 .

[14] FITCH, FREDERIC B. : "Intuitionistic modal logic with quantifiers" Portugaliae Mathematica 7 (1948) 113-118 .

[15] FONT, JOSEP M. : "Introducció d'interiors d'ordre en lògiques abstractes" Publ. Mat. UAB 20 (1980) 79-82 .

[16] ——— - RODRÍGUEZ, ANTONIO JESÚS : "Nota sobre el significado lógico de ciertas estructuras residuadas elementales" Publ. Mat. UAB 20 (1980) 83-86 .

[17] ——— - VERDÚ, VENTURA : "Lògiques abstractes, operadors interior i lògiques modals S4" Revista de la Universidad de Santander 2-II (1979) 1003-1015 .

[18] GÖDEL, KURT : "Eine Interpretation des Intuitionistischen Aussagenkalküls" Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4 (1933) 39-40 .

[19] GRÄTZER, GEORG : "General Lattice Theory" Academic Press, New-York, 1978 .

[20] ——— : "Universal Algebra" Springer-Verlag, New-York, 1979 .

[21] HALMOS, PAUL R. : "Algebraic Logic I: Monadic Boolean Algebras" Compositio Mathematica 12 (1955) 217-249 .

[22] ——— : "The representation of monadic Boolean Algebras" Duke Mathematical Journal 26 (1959) 447-454 .

[23] ——— : "Algebraic Logic" Chelsea Pub., New-York, 1962 .

[24] HENKIN, LEON : "An algebraic characterization of quantifiers" Fundamenta Mathematica 37 (1950) 63-74 .

[25] HUGHES, G.E. - CRESSWELL, M.J. : "An introduction to modal logic" Methuen & Co., London, 1968 . (Existeix traducció castellana, Tecnos, Madrid, 1973) .

[26] JAŚKOWSKI, STANISŁAW : "Recherches sur le système de la logique intuitioniste" Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique (Paris) 6 (1936) 58-61 .

[27] KNEALE, WILLIAM - KNEALE, MARTHA : "The development of Logic" Oxford University Press, 1961 . (Existeix traducció castellana, Tecnos, Madrid, 1972)

[28] LEMMON, EDWARD J. : "Alternative postulate sets for Lewis' S5" Journal of Symbolic Logic 21 (1956) 347-349 .

[29] ——— : "New foundations for Lewis modal systems" Journal of Symbolic Logic 22 (1957) 176-186 .

[30] ——— : "An extension algebra and the modal system T" Notre Dame Journal of Formal Logic 1 (1960) 3-12 .

[31] ——— : "Algebraic semantics for modal logics I and II" Journal of Symbolic Logic 31 (1966) 46-65 i 191-218 .

[32] LEWIS, CLARENCE I. - LANGFORD, COOPER H. : "Symbolic Logic" Dover Publications, New-York, 1932 .

[33] ŁUKASIEWICZ, JAN - TARSKI, ALFRED : "Untersuchungen über den Aussagenkalkül" Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 23-III (1930) 30-50 .

[34] MCKINSEY, JOHN C.C. : "A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4 with an application to topology" Journal of Symbolic Logic 6 (1941) 117-134 .

[35] ——— - TARSKI,ALFRED : "The algebra of topology" Annals of Mathematics 45 (1944) 141-191 .

[36] ——— - ——— : "On closed elements in closure algebras" Annals of Mathematics 47 (1946) 122-162 .

[37] ——— - ——— : "Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting" Journal of Symbolic Logic" 13 (1948) 1-15 .

[38] MONTEIRO, ANTONIO : "Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer" Revista de la U.M.A. XVII (1955) 149-160 .

[39] ——— : "La semisimplicité des algèbres de Boole topologiques et les systèmes déductifs" Revista de la U.M.A. XXV (1971) 417-448 .

[40] ——— - VARSAVSKI, OSCAR : "Algèbres de Heyting monadiques" col. Notas de Lógica Matemática, n°1 , Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974 .

[41] ONO, HIROAKIRA : "On some intuitionistic modal logics" Publications of the RIMS, Kyoto University, 13 (1977) 687-722 .

[42] PLA, JOSEP : "Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes lògics deductius" Universitat de Barcelona, 1975 .

[43] ——— :"Àlgebres de Hilbert I" Curs de Doctorat, Barcelona, 1977 .

[44] ——— : "Àlgebres de Hilbert II" Curs de Doctorat, Barcelona, 1978 .

[45] ——— : "Sobre l'estructura reticular de les àlgebres de Hilbert" Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina (Madrid, 1978) 209-210 .

[46] ——— : "Àlgebres monàdiques i lògica modal" Curs de Doctorat, Barcelona, 1979 .

[47] PORTE, JEAN : "Quelques extensions du théorème de la déduction" Revista de la U.M.A. XX (1962) 259-266 .

[48] PRIOR , ARTHUR N. : "Time and modality" Oxford University Press, 1957 .

[49] ——— : "Formal Logic" Oxford University Press, 1962 .

[50] RASIOWA, HELENA : "An algebraic approach to non-classical logics" Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, 1974 .

[51] ——— - SIKORSKI, ROMAN : "The mathematics of the metamathematics" Monografie Matematyczne nº 41, P.W.N. Warszawa, 1970 .

[52] RODRÍGUEZ, ANTONIO JESÚS : "Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz" Tesi Doctoral, Barcelona, 1980 .

[53] ROSE, GENE F. : "Jaśkowski's truth-tables and realizability" Ph.D.Thesis, University of Wisconsin, 1952 .

[54] ——— : "Propositional calculus and realizability" Transactions of the A.M.S. 75 (1953) 1-19 .

[55] SALES, FRANCESC D'A. : "Lógica algebraica" Curs de Doctorat, Universitat de Barcelona, 1972 .

[56] ——— : "Algebras de Hilbert" Curs de Doctorat, Barcelona, 1973 .

[57] ——— : "Sistemas deductivos" Curs de Doctorat, Barcelona, 1974 .

[58] ——— : "Las álgebras de la lógica" Curs de Doctorat, Universitat de Barcelona, 1976 .

[59] ——— : "Lógicas abstractas" Curs de Doctorat, Barcelona, 1977 .

[60] SIKORSKI,ROMAN : "Closure algebras" Fundamenta Mathematica 36 (1949) 165-206 .

[61] ——— : "Closure homomorfisms and interior mappings" Fundamenta Mathematica 41 (1954) 12-20 .

[62] SOBOCIŃSKI, BOLESŁAW : "Notes on a modal system of Feys-von Wright" The Journal of Computing Systems 1 (1953) 171-178 .

[63] STONE, MARSHALL H. : "Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics" Časopis pro Pěstování Matematiky a Fisiky 67 (1937-38) 1-25 .

[64] SZÁSZ, GEORG : "Théorie des tréillis" Monographies Universitaires de Mathématiques 36, Dunod, Paris, 1971 .

[65] TARSKI, ALFRED : "Über einige fundamentale Begriffe der Mathematik" Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 23-III (1930) 22-29 .

[66] ——— : "Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften" Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930) 361-404 .

[67] ——— : "Grundzüge des Systemenkalkül" Fundamenta Mathematica 25 (1935) 503-526 i 26 (1936) 283-301 .

[68] ——— : "Der Aussagenkalkül und die Topologie" Fundamenta Mathematica 31 (1938) 103-134 .

[69] ——— : "Logique, Sémantique, Métamathématique" Armand Colin, Paris, 1974 .

[70] TSAO-CHEN, TANG : "Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication" Bulletin of the A.M.S. 44 (1938) 737-744 .

[71] TORRENS, ANTONI : "Sobre lógicas y espacios clausura" Tesina de LLicenciatura, Universitat de Barcelona, 1977 .

[72] ——— : "Estudi i algebrització de certes lògiques: àlgebres d-completes" Tesi Doctoral, Universitat de Barcelona, 1980 .

[73] ——— : "Cadenes de Sales discretes" Pub. Mat. UAB 20 (1980) 101-103 .

[74] VERDÚ, VENTURA : "Sobre clausuras en conjuntos ordenados" Tesina de Llicenciatura, Universitat de Barcelona, 1975 .

[75] ———— : "Contribució a l'estudi de certs tipus de lògiques abstractes" Tesi Doctoral, Universitat de Barcelona, 1978 .

[76] ———— : "Lògiques distributives i Booleanes" Stochastica III (1979) 97-108 .

[77] ———— : " Fonaments de lògica algebraica" Curs de Doctorat , Universitat de Barcelona, 1979 .

[78] ———— : "Lògiques abstractes i estructures algebraiques associades" Curs de Doctorat, Universitat de Barcelona, 1980 .

[79] ———— : "Caracteritzacions lògiques de certes àlgebres" Pub. Mat. UAB 20 (1980) 105-107 .

[80] VON WRIGHT, GEORG H. : "An essay in modal logic" North-Holland, Amsterdam, 1951 .

[81] WAJSBERG, MORDCHAJ : "Ein erweiterter klassenkalkül" Monatshefte für Mathematik und Physik 40 (1933) 113-126 .

TAULA DE DEFINICIONS I NOTACIONS

Per als termes i notacions no definits explícitament en aquest treball , vegeu la pàgina xxvi .

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leida esta Memoria el día 17 de noviembre de 1981 en la Facultad de Matemáticas, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

VOCALES

Secretario:

fué calificada de Sobresaliente "cum laude"