

siendo  $B$  el punto de intersección de  $OO'$  con la polar de  $O$  ó recta que los puntos de contacto de las tangentes al círculo que pasan por  $O$ . En efecto:

$$OB = OG \cos BOG;$$

y, como el triángulo  $OO'G$  es rectángulo en  $G$ ,

$$OG = OO' \cos BOG = C \cos BOG$$

Dividiendo las últimas igualdades, queda

$$OB = \frac{OG^2}{C} = \frac{C^2 - R^2}{C}.$$

Por lo tanto, si por  $B'$ , determinado de modo que

$$OB' = \frac{OB}{2}$$

se traza una perpendicular  $uu$  á  $O'O$ , el valor de

$$\frac{\dot{I}^2 \rho}{2C \rho}$$

que viene dado por la distancia entre la proyección  $A$  del extremo de  $\dot{I}$  sobre  $OO'$  y el punto  $B'$  podrá medirse también por la longitud de la perpendicular trazada desde el extremo de  $\dot{I}$  á la recta  $uu$ . A esta recta le llamaremos  $J$

La recta  $J$  corta al eje polar en un punto  $H$ , tal que

$$OH = \frac{OB'}{\cos \alpha'} = \frac{C^2 - R^2}{2C \cos \alpha'}$$

#### 4. — Representación de la potencia útil

La potencia total vale  $\pi = \dot{E} \dot{I} \cos \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo de fase relativa de  $\dot{E}$  é  $\dot{I}$ . Si  $\dot{E}$  es constante,  $\pi$  es proporcional á la proyección de  $\dot{I}$  sobre  $\dot{E}$ . Supongamos que en el diagrama de la figura la dirección de  $\dot{E}$  fuese perpendicular al eje polar. En este caso  $\alpha = 90 - \theta$ , y por tanto

$$\pi = \dot{E} \dot{I} \sin \theta$$

La potencia útil  $\pi_u$  es la diferencia entre  $\pi$  e  $I^2 \rho$

$$\pi_u = \dot{E} \dot{I} \operatorname{sen} \theta - I^2 \rho$$

ó bien,

$$\begin{aligned} \pi_u &= \dot{E} \dot{I} \operatorname{sen} \theta - 2 C \rho \left[ \dot{I} \cos (\theta - \alpha') - \frac{C^2 - R^2}{2 C} \right] \\ &= \dot{E} \dot{I} \operatorname{sen} \theta - 2 C \rho \cos \theta \cos \alpha' - 2 C \rho \dot{I} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha' + \rho (C^2 - R^2) \\ &= [\dot{E} - 2 C \rho \operatorname{sen} \alpha'] \left[ \dot{I} \operatorname{sen} \theta - \frac{2 C \rho \dot{I} \cos \theta \cos \alpha'}{\dot{E} - 2 C \rho \operatorname{sen} \alpha'} + \frac{\rho (C^2 - R^2)}{\dot{E} - 2 C \rho \operatorname{sen} \alpha'} \right] \end{aligned}$$

ó bien, pasando á coordenadas cartesianas con  $\dot{I} \cos \theta = y$ ,  $\dot{I} \operatorname{sen} \theta = x$ , y escribiendo para simplificar

$$\dot{E} - 2 C \rho \operatorname{sen} \alpha' = t, \quad 2 C \rho \cos \alpha' = m, \quad \rho (C^2 - R^2) = n,$$

$$\pi_u = t \left[ y - \frac{m}{t} x + \frac{n}{t} \right] = t [y - y']$$

habiendo puesto

$$y' = \frac{m}{t} x - \frac{n}{t}$$

Esta última ecuación es la de una recta, la cual una vez trazada en el diagrama, permitirá conocer  $\pi_u$  por la diferencia entre las ordenadas de la circunferencia y las de la recta, multiplicada por  $t$ . A la recta cuya ecuación acabamos de hallar se le designará por  $P$ .

La recta  $P$  corta al eje  $x$  en un punto cuya abcisa  $x_1$  se obtiene haciendo  $y = 0$  en la última ecuación. Y resulta:

$$x_1 = \frac{n}{m} = \frac{\rho (C^2 - R^2)}{2 C \rho \cos \alpha'} = OH$$

luego las rectas  $J$  y  $P$  se cortan en el punto  $H$ . El coeficiente angular de  $P$  vale  $\frac{m}{t}$  ó sea

$$\frac{2 C \rho \cos \alpha'}{\dot{E} - 2 C \rho \operatorname{sen} \alpha'}$$

ó bien, llamando  $y_c$  y  $x_c$  á las coordenadas del centro de la circunferencia,

$$\frac{2 x_c \rho}{E - 2 y_c \rho}$$

Para construir la recta  $P$  bastará tomar un punto cuyas coordenadas sean  $y = 2 x_c \rho$ , y  $x = E - 2 y_c \rho + x_1$ , y unirlo con el  $H$  de intersección de  $J$  con el eje  $x$ .

### 5. — Representación del rendimiento

El rendimiento  $r$  vale

$$r = \frac{\pi_u}{\pi} = \frac{t(y - y')}{\pi} = \frac{t(y - y')}{E y}$$

de donde

$$r y - \frac{t}{E} (y - y') = 0$$

ó sea

$$r y - \frac{t}{E} \left( y - \frac{m}{t} x + \frac{n}{t} \right) = 0$$

Esta ecuación es la de una recta concurrente con las dos siguientes :

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= \frac{m}{t} x - \frac{n}{t} \end{aligned}$$

ya que las coordenadas  $o, x_1$  del punto de intersección  $H$  de estas dos rectas satisfacen á la ecuación (3). La recta cuya ecuación es  $y = 0$ , es el eje de las  $x$ , y aquélla cuya ecuación es

$$(P) = y - \frac{m}{t} x + \frac{n}{t} = 0$$

es la recta que se ha llamado  $P$ .

Para distintos valores de  $r$  la ecuación (3) representa diversas rectas de un haz cuyo vértice es el punto  $(o, x_1)$



de un haz definido por las dos rectas  $(M) = 0$ ,  $(P) = 0$ , e  
valor de  $r$  es igual á la relación anarmónica

$$\frac{BA}{BD} : \frac{CA}{CD} = \frac{BA \times CD}{BD \times CA}$$

en la que  $A, C$  y  $D$  son los puntos en que una transversal  
cualquiera corta á las rectas  $(P) = 0$ ,  $(J) = 0$  y  $(M) = 0$   
respectivamente, y  $B$  es el punto de encuentro de la citada  
transversal con la recta (4).

Si la transversal fuera paralela á la recta  $(M)$ ,

$$BD = CD = \infty$$

con 
$$\frac{BD}{CD} = 1 ;$$

luego 
$$r = \frac{BA}{CA}$$

Pero  $x_1$  é  $y_1$  pertenecen á la recta

$$\frac{t}{E} \left( y - \frac{m}{t} x + \frac{n}{t} \right) - r y = 0$$

y  $x_2$  é  $y_2$  á la recta

$$\left( y - \frac{m}{t} x + \frac{n}{t} \right) \frac{t}{E} - y = 0$$

luego

$$BA' = \frac{r E y_1}{\sqrt{t^2 + m^2}}$$

$$BD' = y_1$$

$$CA'' = \frac{E y_2}{\sqrt{t^2 + m^2}}$$

$$CD' = y_2$$

Y, por lo tanto

$$\frac{BA'}{BD'} : \frac{CA''}{CD'} = \frac{r E}{\sqrt{t^2 + m^2}} : \frac{E}{\sqrt{t^2 + m^2}}$$

que es lo que se quería demostrar.

En el curso de la demostración se ha utilizado la fórmula de Geometría Analítica  
que da el valor de la distancia de un punto  $x_1, y_1$  á una recta  $Ax + By + C = 0$ , y  
que es

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

De todo esto se deduce que, si se divide á  $AC$  (fig. 4)

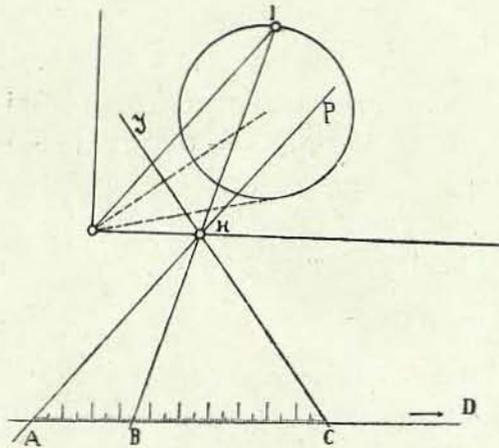


Fig. 4

en 100 partes, el número de las mismas comprendidas entre  $B$  y  $A$  representa el rendimiento porcentual:  $r \times 100$ . En consecuencia, una vez dibujadas las rectas  $U$  y  $J$ , «córtense por una paralela al eje de las equis y divídase el segmento  $AC$  comprendido entre ellas en 100 partes; para tener el rendimiento correspondiente á un valor dado de la intensidad, bastará unir el extremo

del vector que representa la intensidad, con el punto  $H$  de intersección de  $U$  y  $J$  con el eje de la equis, y prolongar la recta de unión hasta su intersección  $B$  con  $AC$ . La longitud  $AB$  evaluada en centésimas partes de  $AC$  es el valor del rendimiento que se busca».

### 6. — Empleo del diagrama polar

Los valores eficaces de  $e$  ó  $i$  se construyen con facilidad en el diagrama polar. Así si en la figura 5, si  $OA = E$ , se tendrá

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 = 2 \overline{OC}^2 = \frac{\overline{OA}^2}{2}$$

luego

$$OB = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

y por lo tanto,  $OB$  es igual al valor eficaz de  $e$ . Una cosa análoga podría

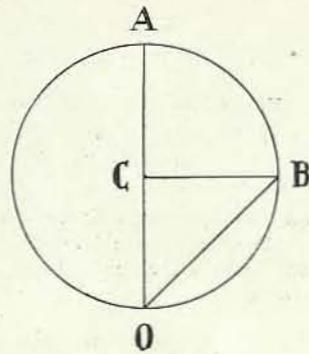


Fig. 5

decirse acerca de la construcción de  $I$  deducida de la del círculo de las intensidades. Este círculo  $C_i$  en el diagrama polar, es tal, que el diámetro  $OB$  que pasa por el origen se halla inclinado de un ángulo  $\alpha$  respecto del diámetro  $OA$  del círculo  $C_e$  de la diferencia de potencial que pasa también por el origen (fig. 6). Así, trazando una recta  $OC'$  que forma un ángulo

$$\omega t = \frac{2\pi}{T} t$$

con la tangente  $OM$

á la circunferencia

$C_e$  en el origen, la cuerda interceptada por la circunferencia  $C_e$  vale:

$$OA \operatorname{sen} \omega t = E \operatorname{sen} \omega t$$

y la interceptada por  $C_i$ , vale:

$$OB \operatorname{sen} (\omega t - \alpha) = I \operatorname{sen} (\omega t - \alpha)$$

Si se dibuja la circunferencia  $C_p$  tangente en  $O$  á  $C_e$  y tal que  $OC = EI$ , la cuerda  $OC'$  valdrá

$$OC \operatorname{sen} \omega t = EI \operatorname{sen} \omega t$$

Si se traza ahora la recta  $OF$  tal que forme un ángulo  $\alpha$  con la recta  $OM$  tangente á  $C_e$  y  $C_p$  en  $O$ , el valor de la distancia  $C'C''$  de  $C$  á  $OF$  es el de la potencia instantánea  $P$ , en efecto :

$$\begin{aligned} C'C'' &= OC' \operatorname{sen} C'OC'' = OC' \operatorname{sen} (\omega t - \alpha) \\ &= EI \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \alpha) \end{aligned}$$

que es precisamente el valor de  $P$ .

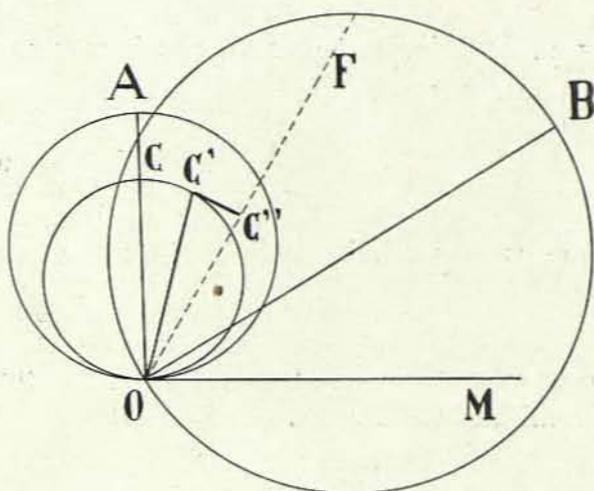


fig. 6

El valor de  $P$  se puede escribir

$$P = \frac{EI}{2} [\cos \alpha - \cos (2 \omega t - \alpha)]$$

y en esta forma se puede considerar como formado por una parte constante

$$\frac{EI}{2} \cos \alpha = \dot{E} \dot{I} \cos \alpha = \pi$$

que es la potencia media, más una parte variable

$$- \dot{E} \dot{I} \cos (2 \omega t - \alpha)$$

que es una función sinusoidal del tiempo, cuyo período  $T'$  es la mitad del de  $e$  ó  $i$ . En efecto,

$$\omega = \frac{2 \pi}{T}$$

luego

$$2 \omega = 2 \frac{2 \pi}{T} = \frac{2 \pi}{\frac{T}{2}} = \frac{2 \pi}{T'}$$

siendo

$$T' = \frac{T}{2}$$

Esta descomposición del valor de la potencia instantánea da clara idea de su variación.

La potencia media  $\pi$  se suele representar algunas veces como indicamos á continuación. Trácese dos vectores iguales en amplitud á  $E$  y  $I$  respectivamente y formando un ángulo  $\alpha$  entre sí igual á la diferencia de fase entre  $e$  é  $i$ . Hecho esto, hágase girar á uno cualquiera de ellos, el  $I$  por ejemplo, de un ángulo de  $90^\circ$ . Sea  $I'$  la nueva posición de  $I$ . El área del triángulo cuyos lados contiguos son  $E$  é  $I'$  es el valor de  $\pi$ . Si se hubiera girado  $E$  siendo  $E'$  su nueva posición, el área equivalente á  $\pi$  hubiera sido la del triángulo cuyos lados contiguos son  $I$  y  $E'$ . En efecto, en el primer

caso, el área del referido triángulo es tomando á  $I$  como base

$$\frac{I}{2} \times I \times E \cos \alpha = \pi$$

y en el segundo

$$\frac{I}{2} \times E \times I \cos \alpha = \pi$$

### 7. — Ejercicios

Calcular analíticamente y construir los diagramas de la potencia  $\pi$  y  $\pi_u$  en los circuitos estudiados en las conferencias anteriores ó propuestos como ejercicios.

---

## Conferencia sexta

### Corrientes polifásicas

#### 1. — Generación de corrientes polifásicas

**S**i entre los polos *N* y *S* de un electroimán giran tres espiras cuyos planos forman entre sí ángulos de

$$\frac{360}{3} = 120^\circ,$$

las fuerzas electromotrices, engendradas en ellas ó diferencias de potencial en los bornes podrán representarse por las fórmulas siguientes :

$$e_1 = \text{sen } \frac{2 \pi t}{T}$$

$$e_2 = E \text{ sen } 2 \pi \left( \frac{t + \frac{1}{3} T}{T} \right) = E \text{ sen } 2 \pi \left( \frac{t}{T} + \frac{1}{3} \right)$$

$$e_3 = E \text{ sen } 2 \pi \left( \frac{t + \frac{2}{3} T}{T} \right) = E \text{ sen } 2 \pi \left( \frac{t}{T} + \frac{2}{3} \right)$$

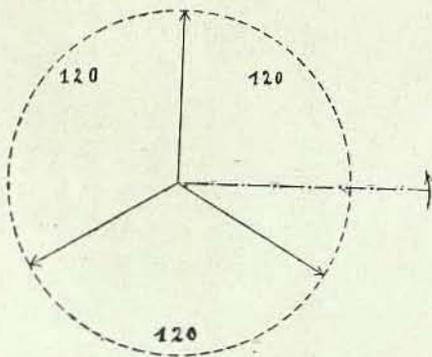


Fig. 1

Gráficamente, los valores de  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  se podrán representar por las proyecciones sobre la línea de referencia de tres vectores que forman entre sí, sucesivamente, ángulos de  $120^\circ$  (fig. 1). Dícese de tres fuerzas electromotrices con estas propiedades que constituyen un sistema trifásico.

Si en vez de tres espiras se hubieran supuesto  $n$ , las fuerzas electromotrices correspondientes hubieran constituido un sistema  $n$  fásico ó polifásico de orden  $n$ . En este caso las fórmulas hubieran sido

$$e_1 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

$$e_2 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{T}{n} \right)$$

.....

$$e_n = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{n-1}{n} T \right)$$

Cuando  $n = 4$  el sistema se llama bifásico. Entonces,

$$e_1 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

$$e_2 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{T}{4} \right) = -E \operatorname{cos} \frac{2\pi t}{T}$$

$$e_3 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{T}{2} \right) = -e_1$$

$$e_4 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{3T}{4} \right) = -e_2$$

Los planos de las espiras correspondientes á las fuerzas electromotrices  $e_3$  y  $e_4$  coinciden con los de las  $e_1$  y  $e_2$  (fig. 2). Las fuerzas electromotrices en aquellas espiras son iguales y directamente opuestas á las fuerzas electromotrices en éstas.

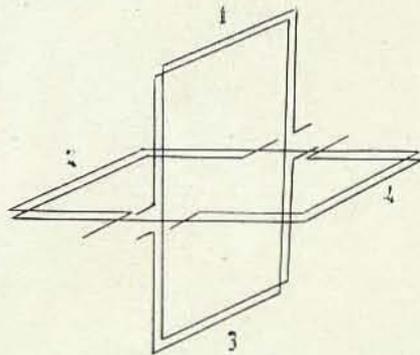


Fig. 2

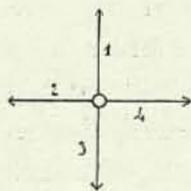


Fig. 3

En consecuencia, la representación gráfica será la de la figura 3. Si se unieran los hilos de las espiras (1) y (3), y los de

las espiras (2) y (4), se obtendría un sistema de dos circuitos en serie.

las (2) y (4) de modo que se añadieran sus fuerzas electromotrices en la forma que indica la fig. 4, para las espiras (1) y (3), el diagrama vectorial sería el de la figura 5.

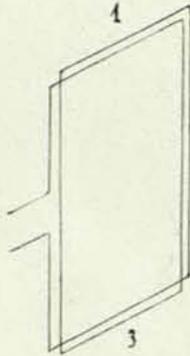


Fig. 4

En el nuevo diagrama aparecen dos fuerzas electromotrices cuya diferencia de fase es de  $90^\circ$ .

El caso en que  $n = 2$  corresponde á la corriente monofásica.

En general, las espiras ó bobinas en las máquinas generadoras se hallan dispuestas con cierta simetría, de modo,

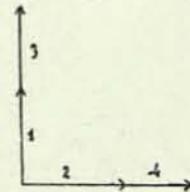


Fig. 5

que puede llevarse á coincidir geoméricamente una bobina con otra por un giro adecuado alrededor del eje de rotación del alternador. Llamaremos extremos homólogos de las distintas espiras, aquellos que vienen á ocupar sucesivamente la misma posición en el espacio cuando gira el sistema de un ángulo tal, que en su nueva posición constituye un sistema idénticamente orientado.

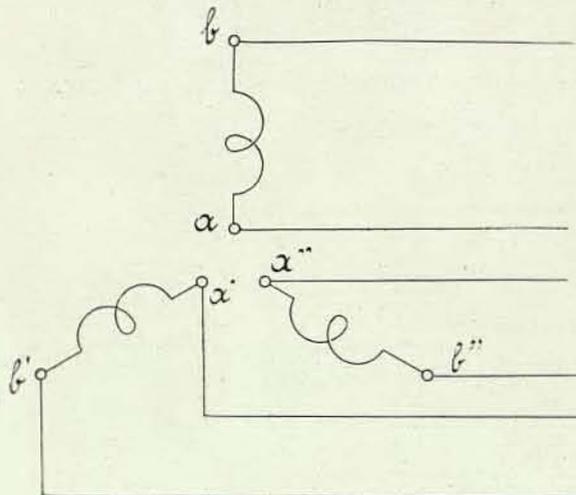


Fig. 6

En lo sucesivo convendrá que el lector no pierda de vista en cada momento los valores instantáneos de las diversas cantidades que intervienen en el cálculo.

Los extremos de las espiras de un sistema *n* fásico se suelen unir entre sí

de distintos modos. Los principales son los siguientes:

1.º Los extremos de cada espira ó bobina se unen á dos hilos de línea. En este caso, que representa la fig. 6 el sistema polifásico equivale á  $n$  sistemas monofásicos independientes.

2.º Se unen entre sí los extremos homólogos  $a, a', a'' \dots$  de las distintas espiras. Los demás  $b, b', b'' \dots$  se unen á hilos de línea. El punto  $O$  en que vienen á reunirse los  $a, a', a'' \dots$  puede ponerse en comunicación con un hilo especial ó con

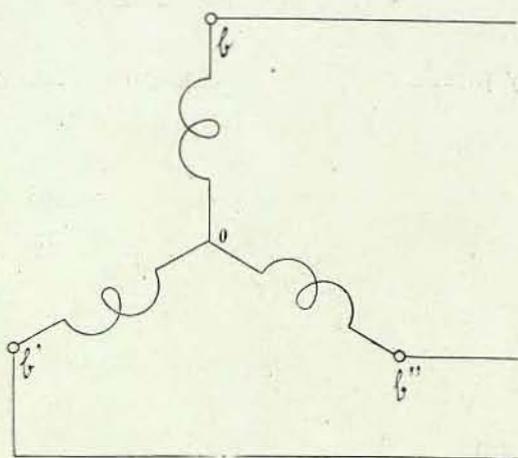


Fig. 7

tierra. En este último caso, su potencial es cero. La disposición que se acaba de describir se llama disposición « en estrella » (fig. 7).

3.º Se une el extremo  $b$  de una bobina al  $a'$  de la inmediata, el  $b'$  de ésta, al  $a''$  de la siguiente y así sucesivamente hasta constituir un circuito cerrado. Los hilos de línea parten de los puntos de unión de dos bobinas consecutivas. Esta disposición se denomina « en polígono ». Aplicado á las corrientes trifásicas, se llama « en triángulo » (fig. 8).

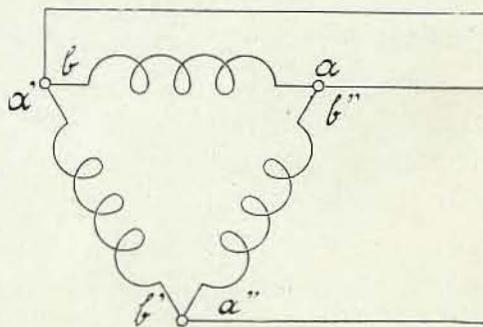


Fig. 8

4.º Se pueden hacer combinaciones en que intervengan las dos últimas. V. por ejemplo la fig. 9.

En la disposición en *estrella* de las corrientes polifási-

cas, la fuerza electromotriz engendrada en cada bobina es

$$e_v = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t + v T)$$

y puede representarse por un vector  $E_v$ . Las demás fuerzas

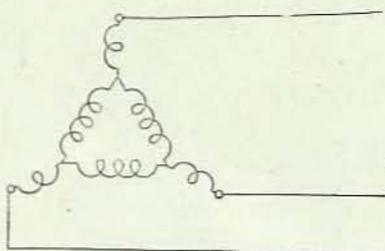


fig. 9

electromotrices se podrán representar por otros vectores  $E_v$  pasando todos por el origen  $O$  y formando sucesivamente ángulos iguales entre sí y á  $\frac{360}{n}$ . Suponiendo desconectados de los hilos de línea los extremos  $b, b' \dots$  de las distintas bobinas en el sistema en estrella, (fig. 7), entre estos extremos y el punto  $O$  habrá diferencias de potencial iguales á  $e_v$ . Ahora bien, entre dos bornes  $b$  y  $b'$  consecutivos ¿cuál será la diferencia de potencial? Evidentemente <sup>(1)</sup>

$$e_1 - e_2$$

ó sea

$$E \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} - E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{1}{n} T \right) = -2 E \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \left[ \frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{n} \right] \quad (1)$$

Y este es el valor de la fuerza electromotriz total en el circuito formado por dos hilos de línea consecutivos.

Gráficamente, el valor de ésta *f. e. m.* se encontrará «restando» del vector que representa  $e_1$  el que representa  $e_2$ . Se recordará que para restar dos vectores,  $E_2$  de  $E_1$ , basta unir el extremo de uno de ellos  $E_1$ , con el de un vector igual,

(1) Se tienen, en efecto, dos bobinas unidas de tal modo que los extremos homólogos  $a$  y  $a'$  están conectados entre sí y se pregunta la fuerza electromotriz entre los dos extremos libres. El sistema es análogo al de dos pilas, cuyos polos negativos, por ejemplo, están unidos entre sí y del que se pide la diferencia de potencial entre los positivos que evidentemente es la *diferencia* entre las fuerzas electromotrices de ambas, puesto que sus acciones se restan. Si en el caso de *f. e. m.* trifásicas en estrella la *diferencia* resulta mayor que el minuendo y sustraendo, ello es debido á la naturaleza variable y sinusoidal de las *f. e. m.* que hace que por lo que respecta á sus valores instantáneos puede muy bien ser uno de ellos positivo, siendo negativo el otro, y de este modo la resta aumentar el valor del minuendo.

paralelo y de sentido contrario al otro  $E_2$  trazado por el otro extremo del primero (fig. 10). La resta es el vector  $E_{12}$ . En vez de hacer el trazado del vector paralelo, basta, como la figura 11 indica para el caso de corrientes trifásicas,

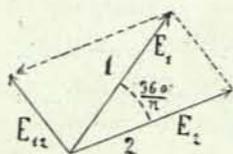


Fig. 10

unir los extremos de los dos vectores. El vector que así resulta, es igual y paralelo al que se busca.

Así, por ejemplo, en los sistemas trifásicos, la fuerza electromotriz total en el circuito de dos hilos de línea es

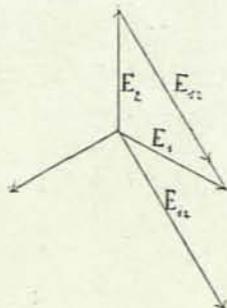


Fig. 11

$$2 E \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \left( \frac{2 \pi t}{T} + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} E \cos 2 \pi \left( \frac{t}{T} + \frac{1}{6} \right) ;$$

cuyo valor máximo es igual á  $\sqrt{3} E$ . A la fuerza electromotriz

$$E \cos \left( \frac{2 \pi t}{T} + \frac{r \pi}{n} \right)$$

se la acostumbra á llamar «fuerza electromotriz por fase». La resultante de dos *f. e. m.* por fase consecutivas es la «*f. e. m.* de línea».

En un sistema trifásico en estrella, la misma corriente que pasa por una bobina es la que pasa por el hilo correspondiente de línea. Esta circunstancia se acostumbra á expresar diciendo que la «corriente de línea» es igual á la «corriente de fase».

La disposición en *polígono* presenta propiedades que en cierto modo podrían considerarse como correlativas de las anteriores. En efecto; la corriente que pasa por un hilo de línea es la «diferencia» de las corrientes que pasan por dos bobinas consecutivas, y, en cambio, la fuerza electromotriz en el circuito de dos hilos de línea es igual á la engendrada en la bobina, cuyos extremos son los de los hilos de línea que se consideran. Estas circunstancias dan lugar á

que las fórmulas y representaciones gráficas usadas en la disposición en estrella para las fuerzas electromotrices é intensidades puedan aplicarse á intensidades y fuerzas electromotrices respectivamente en la disposición en polígono.

En el cálculo simbólico la serie de fuerzas electromotrices por fase, suponiendo que su amplitud es igual, puede representarse por

$$E, \varepsilon E, \varepsilon^2 E \dots \varepsilon^{n-1} E$$

siendo

$$\varepsilon = \sqrt[n]{1}$$

En efecto:

El valor de  $\sqrt[n]{1}$  se halla extrayendo la raíz enésima de los dos miembros de

$$1 = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi$$

con lo que se obtiene

$$\varepsilon = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

El de  $\varepsilon^r$  será

$$\varepsilon^r = \cos \frac{2\pi r}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi r}{n}$$

y por tanto

$$\varepsilon^r E = E \left( \cos \frac{2\pi r}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi r}{n} \right)$$

y el segundo miembro es, con toda evidencia, el valor simbólico de la  $r^{\text{ma}}$  fuerza electromotriz por fase.

## 2. — Representación topográfica

En lo que sigue, haremos frecuente uso de la representación siguiente: Así como en el dibujo topográfico tiene cada punto del plano su cota, se atribuirá á cada punto del plano un potencial que representará el valor máximo del mismo dentro de un período. Este valor máximo, en vez de

estar indicado por una cota se indicará y mediará por la distancia á un punto  $O$  del plano que á su vez representará el potencial cero. Los puntos situados en una circunferencia cuyo centro sea  $O$  tendrán el mismo potencial en valor absoluto, pero sus fases, en la representación gráfica, se distinguirán por los ángulos que forman entre sí los radios vectores que representan los potenciales, de tal modo, que el ángulo de dos vectores cualesquiera sea igual á la diferencia de las fases de los potenciales que representan. De este modo, si se requiere la diferencia de potencial en magnitud y fase entre dos puntos del plano, bastará trazar la recta que los une, y ella, por su magnitud, es el valor máximo de la diferencia de potencial entre los dos puntos, y por su dirección da á conocer la fase de la citada diferencia.

Obtiénese con esta representación una idea bastante clara del modo como varían las diversas cantidades que en ella intervienen, imaginando que el plano  $\pi$  en que se efectúa la representación puede moverse alrededor de un eje vertical que pasa por  $O$ , envolviendo en su movimiento á una superficie cónica de revolución sobre la cual se aplica sin deslizar, es decir, girando á cada instante alrededor de la generatriz de contacto con el citado cono, y atribuyendo á las distancias de los distintos puntos  $P$  del plano móvil á un plano fijo  $\pi_0$  perpendicular á su eje y pasando por el vértice, el significado de cantidades proporcionales á los potenciales de los puntos  $P$ . Evidentemente, si la rotación completa de  $\pi$  alrededor del eje del cono tiene lugar en el período  $T$ , las distancias de los distintos puntos  $P$  á  $\pi_0$  serán

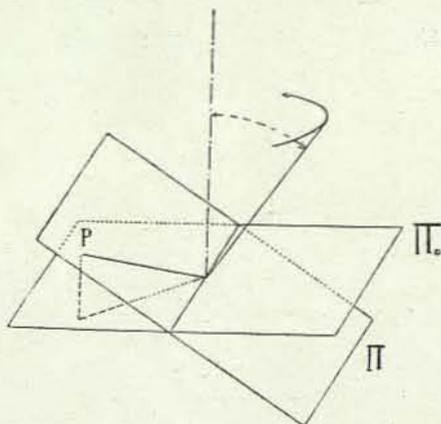


Fig. 12

funciones sinusoidales del tiempo, cuya ley de variación es igual á la de los potenciales que representan. La proyección de toda recta que une dos puntos  $P$ , es también función sinusoidal del tiempo, como la diferencia entre los potenciales de aquéllos.

Como ejemplo de la representación topográfica vamos á determinar los diagramas correspondientes á distribuciones trifásicas y bifásicas en estrella cuando algunas ó todas las fases se hallan en estado de carga, es decir, en comunicación con aparatos ó máquinas receptoras.

Consideremos en primer lugar el caso de una máquina generadora de fuerzas electromotrices constituyendo un sis-

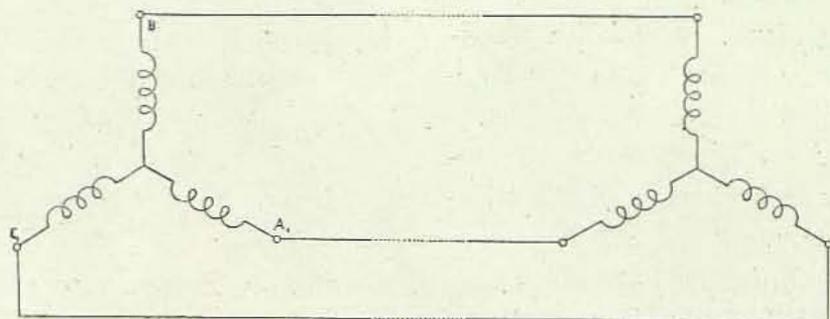


Fig. 13

tema trifásico y que se destina á alimentar un circuito como el que la fig. 13 indica constituido por impedancias iguales en las tres ramas.

Las fuerzas electromotrices correspondientes á las tres fases (1), (2) y (3) podrán representarse por tres vectores iguales en magnitud, cuyo origen es  $O$  y formando dos consecutivos ángulos de  $120^\circ$  (fig. 14). La fuerza electromotriz total en el circuito que comprende las fases (1) y (2) podrá representarse por el vector (12) y del mismo modo, por los vectores (23) y (13) las fuerzas electromotrices en los circuitos que comprenden las fases (2) y (3), y (1) y (3) respectivamente. Las fuerzas electromotrices (12), (23) y (13) darán origen á corrientes que llamaremos  $i_1$ ,  $i_2$  é  $i_3$  desig-

nando con el subíndice la fase que atraviesan. Por concurrir las tres fases en  $O$ ,

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

ó sea

$$i_3 = -(i_1 + i_2)$$

La intensidad  $i_1$  que circula por la fase (1) será debida en parte á la fuerza electromotriz del circuito que comprende las fases (1) y (2), y en parte á la del circuito que comprende las fases (1) y (3). Estas fuerzas electromotrices son las diferencias de potencial en circuito abierto entre el borne de la fase (1) y los de las fases (2) y (3). Y, si del potencial de (1) se restan las potenciales de (2) y (3) se obtiene como representación de las citadas *f. e. m.*, los vectores  $AB$  y  $CA$  (fig. 14).

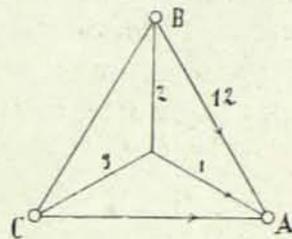


Fig. 14

Conocidas las impedancias de los hilos de la línea, del circuito alimentado supuesto desprovisto de fuerzas contraelectromotrices y de las bobinas de las distintas fases, pudiéndose calcular los avances ó retrasos que respecto de las *f. e. m.*  $BA$  y  $CA$  ofrecen las intensidades á ellas debidas que circulan por la fase (1) y que, compuestas, dan el valor de la intensidad  $i_1$ . Por la simetría que ofrece el caso que estamos considerando, las dos intensidades componentes de  $i_1$  serán iguales y presentarán igual diferencia de fase con las fuerzas electromotrices que las engendran. Sea  $\varphi$  esta diferencia de fase y representemos las intensidades por vectores que arranquen del origen  $O$  y cuya longitud sea proporcional al máxi-

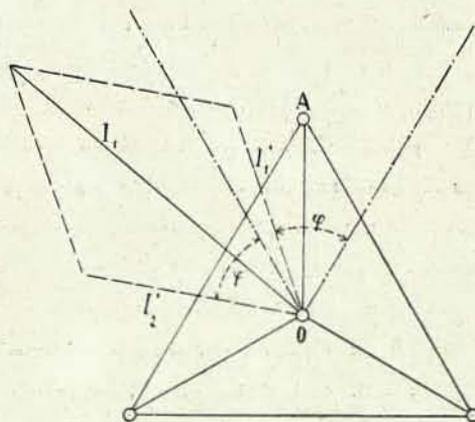


Fig. 15

mo valor de las mismas. Así serán, por ejemplo  $I_1$  é  $I_2$  los citados valores máximos, cuya suma vectorial es  $I_1$  valor máximo de  $i_1$  (fig. 15).

Si se quiere conocer el potencial del borne de la fase (1) habrá que restar de  $OA$ , que representa el potencial del mismo cuando está interrumpida la comunicación de la fase (1) con la línea, la caída de potencial, debida á la impedancia entre  $O$  y  $A$ , ó sea

$$(\rho - ix) I_1$$

siendo  $\rho$  y  $x$  la resistencia y la reactancia de una fase del

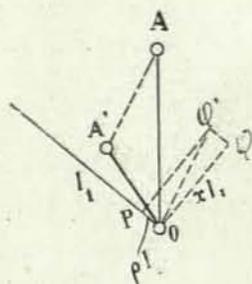


Fig. 16

generador. Hacemos esta construcción en figura aparte para mayor claridad. Sobre la dirección de  $OI_1$  se toma un segmento  $OP = \rho I_1$ . En el extremo  $P$  se levanta la perpendicular, en la que se toma el segmento  $PQ = xI_1$ . El vector resultante de las dos anteriores, ó sea  $OQ$  es  $(\rho - ix) I$ . Restando de  $OA$  el vector  $OQ$  se halla el vector  $OA'$ . El

punto  $A'$  representa el nuevo potencial del borne de la fase (1). De un modo análogo se calcularían los potenciales  $B'$  y  $C'$  en los bornes de las otras fases. Dada la simetría en la distribución de impedancias, el triángulo, cuyos vértices son  $A' B' C'$ , es equilátero, como el de fuerzas electromotrices entre los hilos de línea consecutivos (fig. 17).

Cuando en un sistema trifásico el triángulo de diferencia de potenciales en los bornes es equilátero, se dice que el sistema está «equilibrado».

El sistema que como ejemplo pasamos á considerar á continuación no constituye un sistema equilibrado. Sea un sistema trifásico, en el que sólo se

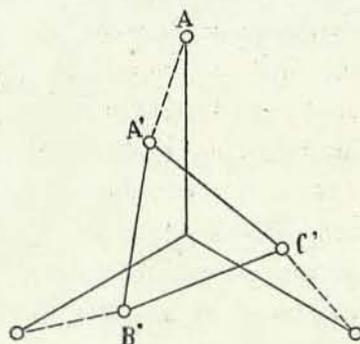


Fig. 17

cargan igualmente los circuitos que contienen las fases (1), (2) y (1), (3) (fig. 18).

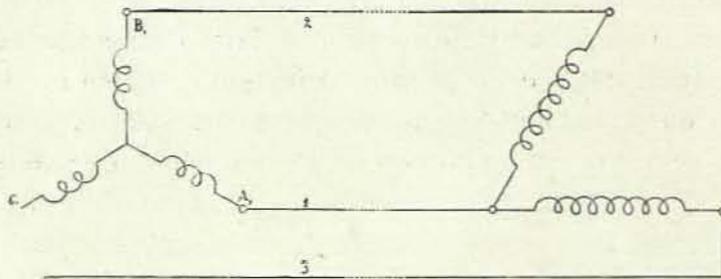


Fig. 18

La corriente  $i_2$ , que atraviesa la fase (2), será debida, en parte, á la *f. e. m.* resultante de las *f. e. m.* de las fases (2) y (3) y en parte á las fases (1) y (2). La corriente  $i_{23}$ , debida á la primera, es menor que la debida á la última, pues atraviesa más impedancia, y el ángulo de retraso ó adelanto respecto de la *f. e. m.*, que la engendra, es diferente. Supongamos halladas las intensidades, cuyos valores máximos son  $I_{23}$  é  $I_{21}^{(1)}$  de modo que sus fases sean co-

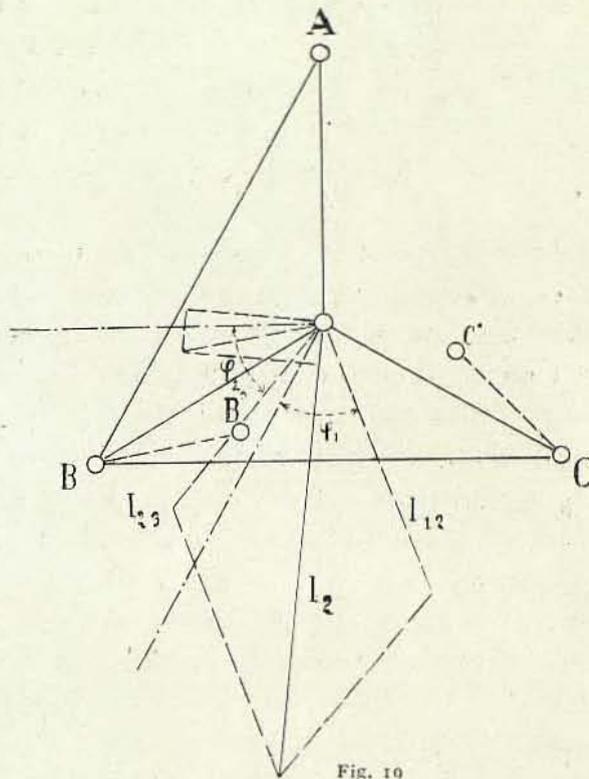


Fig. 19

(1) Basta para ello dividir las *f. e. m.* en los circuitos que recorren por la impedancia de los mismos. Las fases respecto de las *f. e. m.* son conocidas conociendo las impedancias.

nocidas así como  $I_{23}$  é  $I_{21}$  y puedan representarse por vectores  $I_{23}$  é  $I_{21}$  (fig. 19). La intensidad resultante de  $I_{23}$  é  $I_{21}$  estará representada por la diagonal  $I_2$  del paralelogramo, cuyos lados son  $I_{23}$  é  $I_{21}$ . Del valor de la intensidad se deduce inmediatamente <sup>(1)</sup> el de la caída de tensión, debida al paso de la corriente y en seguida el nuevo potencial  $B'$  del borne  $B_1$ .

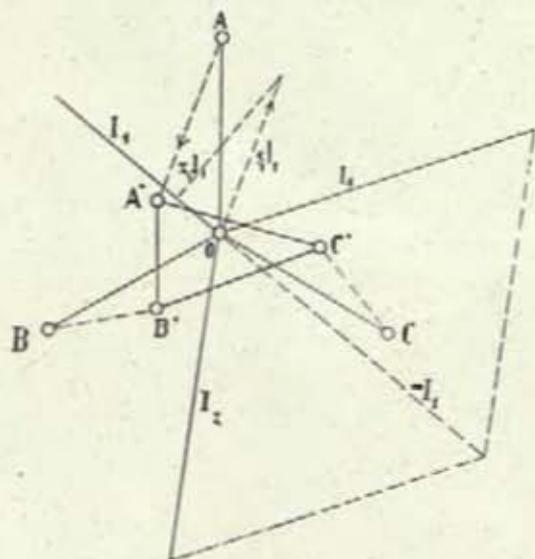


Fig. 20

ser construído con facilidad. Una vez hallado, se determina la pérdida de tensión producida por el paso de la corriente en la bobina, cuyos extremos son  $O$  y  $A$  y en seguida el nuevo potencial  $A'$  de  $A_1$ .

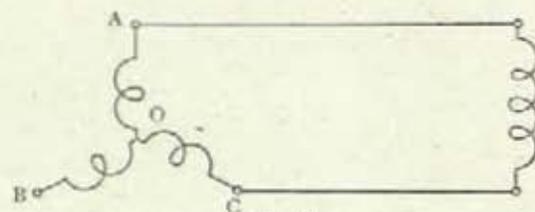


Fig. 21

El triángulo  $A'B'C$  (figura 20) no es equilátero.

Dentro del sistema trifásico consideraremos aún el siguiente caso: Supóngase interrumpida la comunicación entre la fase (2) y el hilo de la línea

Para el borne  $C_1$  puede hacerse lo mismo, partiendo de  $OC$ .  
Para hallar el potencial del borne  $A_1$  se observará que la corriente en la fase (1) es tal, que

$$i_1 = -(i_2 + i_3)$$

es decir, el vector cuya amplitud es  $I_1$  es igual y directamente opuesto á la resultante de los vectores  $I_2$  é  $I_3$  y puede, por lo tanto,

ser construído con facilidad. Una vez hallado, se determina la pérdida de tensión producida por el paso de la corriente en la bobina, cuyos extremos son  $O$  y  $A$  y en seguida el nuevo potencial  $A'$  de  $A_1$ . El triángulo  $A'B'C$  (figura 20) no es equilátero.

Dentro del sistema trifásico consideraremos aún el siguiente caso: Supóngase interrumpida la comunicación entre la fase (2) y el hilo de la línea

(1) Siguiendo una marcha análoga á la del problema anterior.

correspondiente. El punto central conserva el potencial cero y se pregunta ¿cuáles son las potenciales en los bornes  $A_1$  y  $C_1$ ?

Sea (fig. 22)  $AC$  ó (13) la fuerza electromotriz total existente en el único circuito del sistema y apliquemos á la fase (1)

las construcciones anteriores. La corriente  $i_1$  en (1) retrasa, respecto de (13) un ángulo  $\varphi$  conocido, y es conocida, también su amplitud  $I_1$  como cociente de (1) por impedancia total del circuito. De  $i_1$  se pasa á calcular la pérdida en la fase (1), así como la pérdida en la fase (3), las cuales, restadas de los potenciales  $OA$  y  $OC$  dan los valores  $OA'$  y  $OC'$ , que representan los potenciales de  $O$

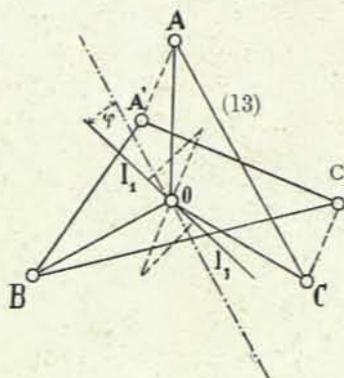


Fig. 22

y  $C$ . El potencial de  $B$  es  $OB$ . Y el triángulo  $A'BC$  es escaleno. Es de notar que, según se desprende de la figura,

$$i_3 = -i_1$$

lo cual está de acuerdo con el resultado de aplicar la ley de Kirchhoff á las corrientes que afluyen á  $O$ .

La aplicación de los diagramas anteriores á un sistema bifásico no ofrece mayores dificultades. Sea, por ejemplo, un sistema bifásico con hilo de retorno (fig. 23).

La fuerza electromotriz resultante de las dos fases (1) y (2) es (12) ó  $AB$  (fig. 24). La corriente que atraviesa la fase (1) se puede considerar como constituida por

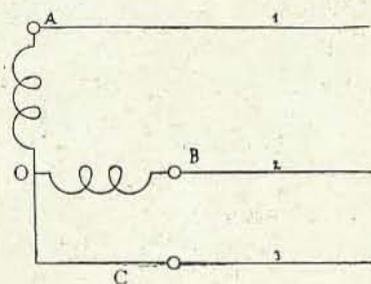


Fig. 23

dos partes: la primera será la que engendra la diferencia de potencial que, en circuito abierto, existe entre  $A$  y  $B$ , y la otra la que, en iguales condiciones, existe entre  $A$  y  $O$  ó entre  $A$  y  $C$ . En la representación gráfica que se ha adoptado en

la fig. 24, la primera fuerza electromotriz «diferencia» entre el potencial de  $A$  y el de  $B$  es  $BA$ , y la segunda es  $OA$ . Si las dos  $f. e m.$  dan lugar á corrientes retrasadas en fase respecto de ellas, cuyas amplitudes sean  $I_1$  é  $I_2$  su resultante  $I_t$

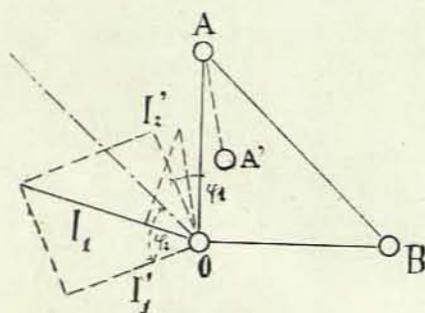


fig. 24

será la corriente total que atraviesa la fase (1). Y el potencial del borne de la fase (1) descende en amplitud del valor  $OA$  al  $OA'$  hallado de un modo análogo al de los casos anteriores, como se hallaría  $OB'$  partiendo de  $OB$ .

Para hallar el potencial del borne  $C_1$  basta considerar que las corrientes que atraviesan las fases (1) y (2), son tales que su suma es igual y contraria á la corriente que recorre la fase (3), como resulta de aplicar la ley de Kirchoff al punto  $O$ . Así, pues, construídos los vectores representativos de las intensidades que atraviesan (1) y (3), es sumamente fácil hallar el potencial de  $C$ .

En lo que precede se ha supuesto que los tres bornes  $A, B$  y  $C$  eran los puntos de conexión de las bobinas del generador con los hilos correspondientes de línea. Pero pueden ser tres puntos cualesquiera de la línea, en especial los tres bornes de la máquina ó aparato receptor, con sólo tener presente, al calcular las fuerzas electromotrices perdidas, que los valores de las resistencias y reactancias deben tomarse desde el punto  $O$  hasta los puntos de la línea que se consideran y cuya diferencia de potenciales se busca.

### 3. — Cálculo simbólico

Los sistemas polifásicos están constituídos por circuitos á los que puede aplicarse el cálculo simbólico. Así, por ejemplo, el de la fig. 25 es equivalente al circuito de un puente

de Wheatstone. (fig. 26). Dadas las fuerzas electromotrices en cada hilo, y las impedancias se llevará el cálculo como allí, con sólo poner en vez de las fuerzas electromotrices é intensidades sus expresiones simbólicas, y en vez de resistencias  $\rho$ , impedancias  $\rho - ix$ .

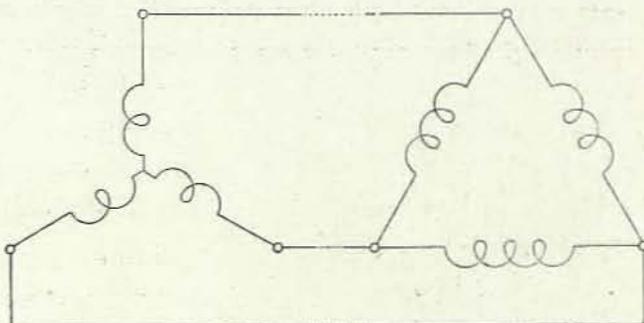


Fig. 25

Se establece así un sistema de ecuaciones en número igual al de hilos, como consecuencia de las leyes de Kirchhoff, cada una de las cuales podrá desdoblarse en dos, separando las partes reales de las imaginarias. Y del doble sistema se podrán deducir las amplitudes y fases de las intensidades quedando éstas completamente determinadas.

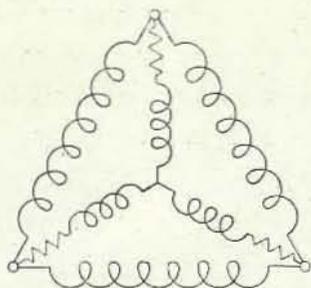


Fig. 26

#### 4. — Método de Kenelly

Sea una generatriz trifásica en estrella que alimente una instalación dispuesta del mismo modo. Supongamos que  $O$ , centro del sistema generador, está al potencial cero, que son iguales en amplitud las *f. e. m.* por fase y que presentan entre sí cada dos consecutivas una diferencia de  $120^\circ$  en la fase. El punto  $O_1$  centro del sistema receptor supuesto en estrella, no estará, en general, al mismo potencial que  $O$ , á menos que sean iguales las impedancias de las tres ramas que ponen en comunicación  $O$  con  $O_1$ . Se comprende que, si se lograra determinar el potencial de  $O_1$ , como el de  $O$  es cero, conoceríase en cada una de las tres ramas la diferencia de potencial en

los extremos y la *f. e. m.* que hay en ellos, y que es la de la fase que corresponde á la rama que se considera. Y, con el conocimiento de estas cantidades y el de la impedancia total de la rama podríase ya deducir con facilidad el valor de la intensidad de la corriente en cada fase.

El potencial del punto  $O_1$  llamado «punto neutro» de la máquina receptora, puede hallarse gráficamente por el procedimiento de Kenelly, fundado en las consideraciones que á continuación se exponen.

Supongamos el problema resuelto, cuyos datos son las fuerzas electromotrices por fase 01, 02 y 03, y sea  $O_1$  el punto que se busca.

Las *f. e. m.* en cada una de las tres ramas de que consta el circuito, serán:

$$01 - 00_1 = 0_{11}$$

$$02 - 00_1 = 0_{12}$$

$$03 - 00_1 = 0_{13}$$

Las intensidades podrán calcularse del siguiente modo.

Sean  $o_1x$  y  $O_1y$ , dos

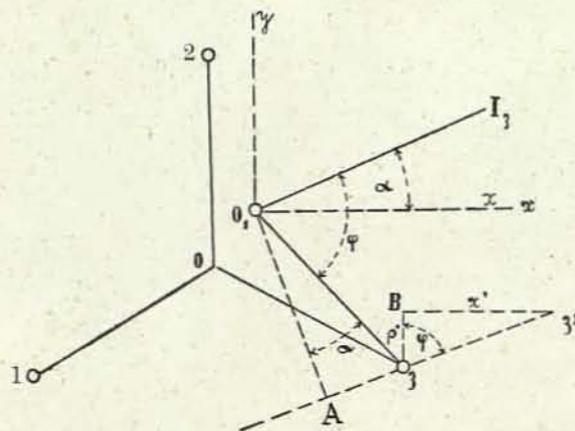


Fig 27

ejes rectangulares (fig. 27). Imaginemos en el punto (3) dos vectores paralelos á estos ejes é iguales respectivamente á la conductancia y á la susceptancia de la rama 3 entre los puntos  $O$  y  $O_1$ . La conductancia, se tomará paralelamente al eje  $y$  y en la dirección positiva de la misma. Si la susceptancia es positiva se tomará en la dirección positiva del eje  $x$ , y si no, en sentido contrario. La admitancia  $z'_3$  resultante de la conductancia  $\rho'_3$  y la susceptancia  $x'_3$  formará con el eje de las  $y$  ó sea con la dirección de  $\rho'_3$  un ángulo  $\varphi'_3$  que es la diferencia de fase entre  $O_13$  y la corriente  $i_3$  que atraviesa la fase (3). Trazando la semirecta  $O_1 I_3$  que representa  $i_3$  es

de ver que el ángulo  $\alpha$  que esta recta forma con el eje de las equis, es el mismo que con  $O_1 3$  forma la perpendicular trazada desde  $O_1$  á la recta  $33'$ . Porque, en efecto,

$$o_1 3 A = 90 - \alpha = 180 - o_1 3 B - \varphi$$

luego

$$90 - \alpha = 180 - o_1 3 B - \varphi$$

Además,

$$\varphi - I_3 o_1 x + o_1 3 B = 90^\circ$$

Eliminando entre las dos últimas igualdades el ángulo  $O_1 3 B$ , queda

$$\alpha = x o_1 I_3$$

como se quería probar.

El valor instantáneo  $i_3$  es igual á

$$I_3 \cos \alpha,$$

si el eje de las  $x$  representa la línea de referencia. Y, como

$$I_3 = E_3 \sqrt{\rho_3'^2 + x_3'^2} = E_3 \zeta_3'$$

se tendrá

$$i_3 = E_3 \zeta_3' \cos \alpha$$

Ahora bien,  $E_3 \cos \alpha = O_1 A$ , luego el valor instantáneo de la corriente puede considerarse como el momento de un vector  $s'_3$  localizado en  $A$  y cuya dirección sea la de  $33'$  construída del modo ya indicado.

Lo dicho para el punto 3 y la corriente  $i_3$  puede repetirse por los puntos 1 y 2 y las corrientes  $i_1$  é  $i_2$ . Ahora bien, la suma de las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  é  $i_3$  es cero según nos dice la ley primera de Kirchhoff, aplicada á las corrientes que afluyen á  $O$  ó á  $O_1$ , luego «la suma de momentos de los vectores  $s'_1$ ,  $s'_2$  y  $s'_3$ , construídos y localizados como se ha explicado para  $s'_3$ , es cero». O bien, dicho de otro modo, el punto  $O_1$  es un punto por el cual pasa la resultante de los tres vectores  $s'_1$ ,  $s'_2$  y  $s'_3$ , localizados en 1, 2 y 3 y cuyas direcciones forman con una recta cualquiera (eje de las  $y$ ) ángulos  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  y  $\varphi_3$ . En consecuencia, tomando como eje de las  $y$  una recta cualquiera y hallando mediante un polígono funicular y uno de

Varignon la resultante de los vectores  $\mathcal{R}'_1$ ,  $\mathcal{R}'_2$  y  $\mathcal{R}'_3$ ; tomando luego otra dirección cualquiera, por ejemplo, á  $90^\circ$  con la anterior, como nuevo eje de las  $ies$ , y hallando la resultante del nuevo sistema, el punto de intersección de los dos resultantes es  $O_1$ .

Vamos á recordar brevemente en que consiste la construcción de los polígonos funicular y de Varignon. Sea un sistema de vec-

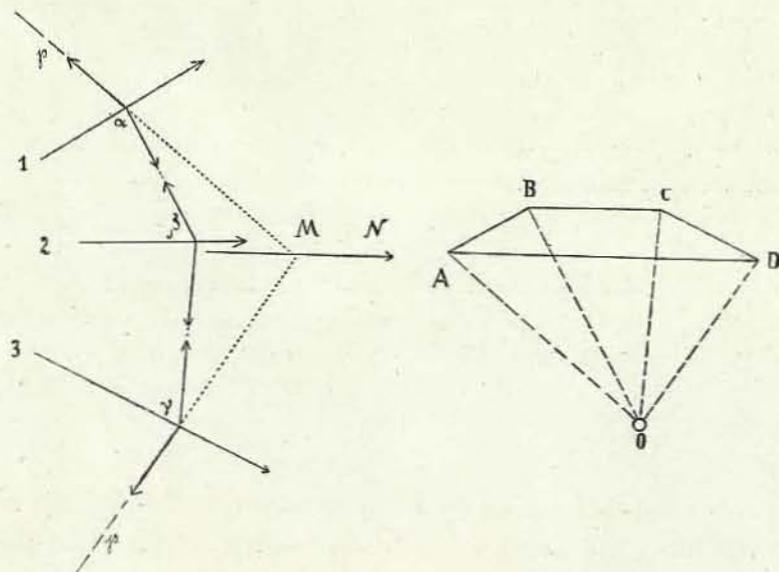


Fig. 28

tores (1), (2) y (3) (fig. 28). Se llama polígono de Varignon al formado del siguiente modo. Por un punto  $A$  del plano se traza una vector  $AB$  igual y paralelo á (1), por el extremo  $B$  de este, otro  $BC$  igual á paralelo á (2) y por  $C$  otro igual y paralelo á (3). El polígono  $ABCD$  es el llamado de Varignon. La resultante de (1), (2) y (3), es igual y paralela á la recta  $AD$  que cierra el polígono. Con sólo hallar un punto de su línea de aplicación se conocería, por lo tanto, la magnitud y línea de acción de la misma. Para hallar un punto de la línea de acción se utiliza el polígono funicular, el cual es el polígono formado por un hilo en cuyos vértices actuaran los vectores (1), (2) y (3) como fuerzas aplicadas en ellos, y que goza de la propiedad de que las tensiones de sus lados extremos equilibran las tres fuerzas (1), (2) y (3).

Hay infinidad de polígonos con tales propiedades; para construir uno puede procederse como sigue. Se toma un punto arbitrario  $O$ , y se une con los vértices del polígono de Varignon. Si á las rectas de unión se las considera como paralelas á los lados de un polígono funicular cuyas tensiones miden, la construcción del polígono se hará del siguiente modo:

Por un punto arbitrario de (1) se trazan una paralela  $\beta\alpha$  á  $OA$  y otra  $\alpha\beta$  á  $OB$ . Se prolonga esta última hasta cortar á (2) y por el punto de intersección  $\beta$  se traza una paralela á  $OC$  hasta cortar á (3). Y, finalmente, por el punto de intersección  $\gamma$  que se acaba de encontrar, se traza una paralela á  $OD$ . El polígono  $\beta\alpha\beta\gamma\beta$  es el polígono funicular que se busca. En él la fuerza (2) es equilibrada por las tensiones de los lados  $\beta\alpha$  y  $\beta\gamma$  tensiones cuyos valores son  $OB$  y  $CO$ ; la tensión en  $\beta\alpha$ , compuesto con la fuerza (1) es equilibrada por la tensión  $\alpha\beta$  y lo mismo diríamos de la resultante de la tensión en  $\beta\gamma$  y de la fuerza (3), la cual es equilibrada por la tensión en  $\gamma\beta$ . Así resulta que el sistema de los tres vectores (1), (2) y (3) es equilibrado por las tensiones en  $\alpha\beta$  y en  $\gamma\beta$ . Por lo tanto la resultante de aquellas fuerzas ha de pasar por el punto  $M$  de intersección de los lados extremos del polígono funicular.

Hallado el punto  $M$  la línea de acción de la resultante es  $MN$  paralela á  $AD$ .

Si al sistema trifásico anteriormente considerado se añade un hilo que sirva de unión directa entre  $O$  y  $O_1$  la construcción de Kenelly es igualmente aplicable, sólo que en este caso hay que considerar aplicado en  $O$  el vector  $s'$  correspondiente al hilo que une los puntos  $O$  y  $O_1$ .

Es evidente, que, cualquiera que sea el sistema polifásico mientras estén dispuestos en estrella el generador y el receptor, la construcción de Kenelly es aplicable al mismo.

Las construcciones gráficas pueden ser de uso incómodo en algunos casos, debiendo acudirse entonces al cálculo analítico. Y el método de Kenelly traducido al lenguaje del álgebra puede ser entonces de la mayor utilidad. En lo que sigue vamos á ocuparnos de ello.

La expresión del momento respecto del punto  $a, b$  de un vector  $P = BC$  cuyas componentes sobre los ejes sean  $X$  é  $Y$

siendo  $x$  e  $y$  las coordenadas del punto de aplicación, es la del doble del área del triángulo  $ABC$ , (fig. 29) ya que por definición momento de un vector respecto de un punto es el producto del vector por su distancia á dicho punto. Pero

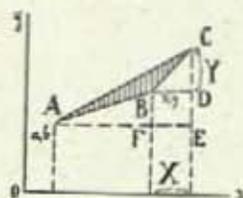


Fig. 29

$$ABC = AEC - BCD - ABF - BFDC$$

Además

$$AEC = \frac{1}{2} [x + X - a] [y + Y - b]$$

$$BCD = \frac{1}{2} XY$$

$$ABF = \frac{1}{2} (x - a) (y - b)$$

$$BDEF = X (y - b)$$

Luego

$$ABC = \frac{1}{2} (Y(x - a) - X(y - b))$$

y por consiguiente, el momento vale

$$Y(x - a) - X(y - b)$$

Supongamos, pues, referidos á un sistema de ejes coordenados los vectores  $s'$  en la forma indicada ya. Las componentes de los vectores  $s'$  sobre el eje  $x$  serán las conductancias  $\rho'$  y las componentes sobre el otro eje las susceptancias  $x'$ . Afectando de un subíndice las coordenadas y valores de  $\rho'$  y  $x'$  que corresponden á cada fase, se tendrá, al expresar que es cero la suma de momentos alrededor del punto  $(a, b)$  que se busca, la siguiente igualdad:

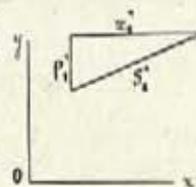


Fig. 30

$$\rho_1'(x_1 - a) - x_1'(y_1 - b) + \rho_2'(x_2 - a) - x_2'(y_2 - b) + \dots \quad (1)$$

Si en vez de tomar los ejes coordenados en la forma dicha se hubieran tomado por ejes los que resultan al girar los

antiguos de un ángulo de  $90^\circ$ , como indica la fig. 31, se hubiera hallado: (las nuevas coordenadas llevan un guión en la letra que las representa)

$$\begin{aligned} \rho_1' (\bar{a} - \bar{x}_1) - x_1' (\bar{b} - \bar{y}_1) + \rho_2' (\bar{a} - \bar{x}_2) \\ - x_2' (\bar{b} - \bar{y}_2) + \dots = 0 \end{aligned}$$

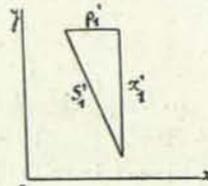


Fig. 31

Pero, según se desprende del solo examen de las figs. 30 y 31

$$\begin{aligned} -\bar{x}_1 &= y_1 \\ \bar{y}_1 &= x_1 \\ -\bar{a} &= b \\ \bar{b} &= a \end{aligned}$$

y por lo tanto, la última igualdad se puede escribir

$$\rho_1' (b - y_1) - x_1' [x_1 - a] + \dots = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) permiten despejar  $a$  y  $b$  con lo cual sus valores son conocidos en función de los de las demás cantidades.

Una vez hallados los valores de  $a$  y  $b$  se puede proceder á determinar la amplitud  $I$  y fase  $\varphi$  de la intensidad que atraviesa cada hilo de línea. Para ello pueden utilizarse igualdades análogas á esta

$$I_1 \cos \varphi_1 + i I_1 \sin \varphi_1 = [x_1 + i y_1 - (a + i b)] (\rho_1' + i x_1')$$

la cual se puede descomponer en dos, separando las partes reales de las imaginarias, y con ayuda de ellas se pueden calcular  $I_1$  y  $\varphi_1$ .

Por último, una vez conocidas las intensidades de las corrientes que atraviesan los hilos de línea, pueden calcularse fácilmente los potenciales  $v + i v'$  en punto cualquiera de ellos, restando de la fuerza electromotrices por hilo

$$x_1 + i y_1 - (a + i b)$$

los valores de la caída de potencial debida á la impedan-

cia  $\rho - ix$  desde el punto  $O$  á los de la línea que se consideran.

$$v_1 + iv_1' = x_1 + iy_1 - (a + ib) - (L_1 \cos \varphi_1 + iL_1 \operatorname{sen} \varphi_1) (\rho_1 - ix_1)$$

Como ejercicio nos proponemos determinar en que condiciones de impedancia de la línea y de la máquina receptora da lugar una generatriz trifásica á dos fuerzas electromotrices totales por ramas, que guarden entre sí una difencia de fase de  $90^\circ$ . Se supone que la generatriz en circuito abierto sea capaz de engendrar tres fuerzas electromotrices (1) (2) y (3) iguales en su amplitud  $E$  y cuyas fases consecutivas difieren en  $\frac{2\pi}{3}$

Si se toman como ejes la recta que une los puntos representativos de las fuerzas electromotrices (2) y (3) y su perpendicular en el punto medio, se tendrá :

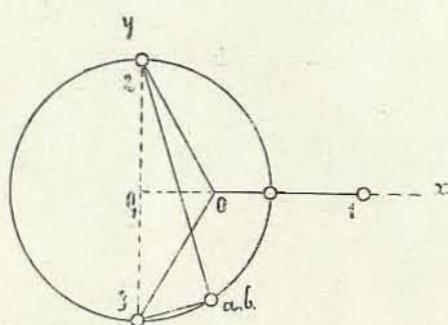


Fig. 32

$$x_1 = \frac{E}{2} + E = \frac{3}{2} E$$

$$y_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = \sqrt{E^2 - \frac{E^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} E$$

$$x_3 = 0$$

$$y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} E$$

Si se designa por  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  los ángulos de atraso de las intensidades respecto á las fuerzas electromotrices, se podrá escribir, ya que

$$\rho_1' = \zeta_1' \cos \alpha_1$$

$$x_1' = \zeta_1' \operatorname{sen} \alpha_1$$

etc.,

las dos siguientes igualdades que son las (1) y (2) aplicadas al caso particular que nos ocupa :

$$\zeta_1' \cos \alpha_1 \left[ \frac{3}{2} E - a \right] + \zeta_1' \operatorname{sen} \alpha_1 b - \zeta_2' \cos \alpha_2 a - \zeta_2' \operatorname{sen} \alpha_2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} E - b \right]$$

$$- \zeta_3' \cos \alpha_3 a + \zeta_3' \operatorname{sen} \alpha_3 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} E + b \right] = 0$$

$$-\zeta'_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \left[ \frac{3}{2} E - a \right] + \zeta'_1 \cos \alpha_1 b + \zeta'_2 \operatorname{sen} \alpha_2 a - \zeta'_2 \cos \alpha_2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} E - b \right] \\ + \zeta'_3 \operatorname{sen} \alpha_3 a + \zeta'_3 \cos \alpha_3 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} E + b \right] = 0$$

A estas dos ecuaciones de momento debe agregarse la condición geométrica que impone el enunciado del problema, á saber

$$a^2 + b^2 = \frac{3}{4} E^2$$

puesto que el punto neutro en cuestión debe necesariamente hallarse en la circunferencia cuyo diámetro sea la distancia entre 2 y 3, si el ángulo con que desde él se han de ver los dos puntos (2) y (3) ha de ser recto.

Disponiendo de las tres impedancias  $\zeta'_1$ ,  $\zeta'_2$ , y  $\zeta'_3$  de las fases  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  se tienen ocho cantidades sujetas á tres ecuaciones, de modo que el problema tiene infinidad de soluciones. Para hacerlo determinado pueden introducirse condiciones nuevas, por ejemplo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$$

y

$$\zeta'_2 = \zeta'_3$$

Poniendo ahora

$$\frac{\zeta'_1}{\zeta'_2} = f$$

las ecuaciones de condición serán

$$f \cos \alpha \left[ \frac{3}{2} E - a \right] + fb \operatorname{sen} \alpha - 2a \cos \alpha + 2b \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$-f \operatorname{sen} \alpha \left[ \frac{3}{2} E - a \right] + fb \cos \alpha + 2a \operatorname{sen} \alpha + 2b \cos \alpha = 0$$

$$a^2 + b^2 = \frac{3}{4} E^2$$

que pueden escribirse de este modo

$$f \left[ \frac{3}{2} E - a \right] + bf \operatorname{tg} \alpha - 2a + 2b \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$-f \left[ \frac{3}{2} E - a \right] \operatorname{tg} \alpha + fb + 2a \operatorname{tg} \alpha + 2b = 0$$

$$a^2 + b^2 = \frac{3}{4} E^2$$

Multiplicando la primera por  $tg \alpha$  y añadiéndole la 2.<sup>a</sup> queda

$$b [1 + tg^2 \alpha] [f + 2] = 0 \quad (3)$$

y multiplicando la segunda por  $tg \alpha$  y restándole la primera queda

$$(1 + tg^2 \alpha) \left[ \frac{3}{2} f E - f a - 2 a \right] = 0 \quad (4)$$

De (3) se deduce que ó bien

$$b = 0$$

ó bien

$$f = -2$$

Esta última solución substituída en (4) conduce á la siguiente

$$-3 E = 0$$

lo cual es absurdo. La solución  $b = 0$  es la que conviene

Substituída en  $a^2 + b^2 = \frac{3}{4} E^2$ , da

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} E$$

y este valor de  $a$ , llevado á la (4) da para  $f$  el valor numérico

$$2,73$$

En consecuencia, «cualquiera que sea  $\alpha$  el punto neutro se hallará en la intersección de la circunferencia de diámetro (23) con la recta (01). Y las admitencias iguales de las ramas (2) y (3) estarán respecto de la admitancia de la rama (1) en la relación de 1 : 2,73».

El método de Kenelly que se acaba de describir, requiere, que tanto la máquina generadora como el sistema receptor estén dispuestos en estrella. Si fueren sistemas en polígono, también el método es aplicable siempre que, previamente, se reduzcan á sistemas en estrella equivalentes. Y ello puede hacerse como á continuación se indica.

Sea el sistema pentagonal de la fig. 33 y el equivalente en estrella de la fig. 34. La impedancia entre los bornes  $a$  y  $b$  del primero ha de ser igual, para que haya equivalencia, á

que existe entre los bornes  $a'$  y  $b'$  del segundo, la que existe entre  $b$  y  $c$  igual á la que hay entre  $b'$  y  $c'$  y así sucesivamente.

La admitancia entre  $a$  y  $b$  es la suma de dos, la que corresponde al conductor  $1$  y la correspondiente á la suma de

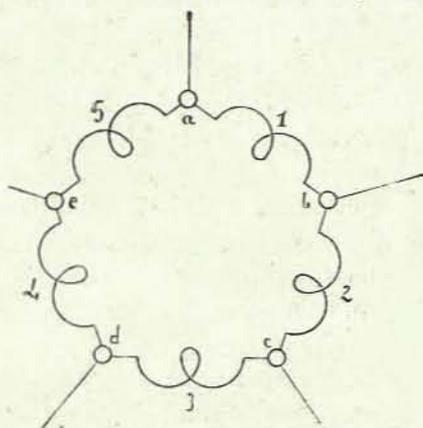


Fig. 33

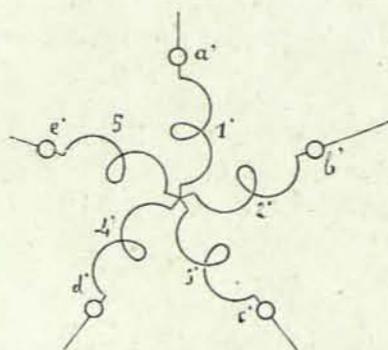


Fig. 34

los conductores  $2$ ,  $3$ ,  $4$  y  $5$ . Si á las impedancias correspondientes les afectamos de un subíndice, la admitancia entre  $a$  y  $b$  será :

$$\frac{1}{\bar{\gamma}_1} + \frac{1}{\bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_3 + \bar{\gamma}_4 + \bar{\gamma}_5}$$

La admitancia entre  $a'$  y  $b'$  se compone sólo de lo de los conductores  $1$  y  $2$  puestos en serie, esto es :

$$\frac{1}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2}$$

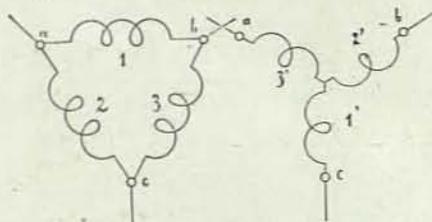
Igualando las dos últimas expresiones, se tiene :

$$\frac{1}{\bar{\gamma}_1} + \frac{1}{\bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_3 + \bar{\gamma}_4 + \bar{\gamma}_5} = \frac{1}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2}$$

A esta igualdad podrían añadirse otras cuatro, estableciendo relaciones análogas para los restantes lados del polígono  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ . El sistema de cinco ecuaciones que así se obtiene permite calcular  $\bar{\gamma}_2$ ,  $\bar{\gamma}_3$ ,  $\bar{\gamma}_4$  y  $\bar{\gamma}_5$  en función de  $\bar{\gamma}_1$ ,  $\bar{\gamma}_2$ ,  $\bar{\gamma}_3$ ,  $\bar{\gamma}_4$  y  $\bar{\gamma}_5$

El problema inverso que consiste en, dado un sistema en estrella, hallar el equivalente en polígono, tiene también interés y puede resolverse por las fórmulas que resuelven el anterior, con la diferencia de que en ella las cantidades conocidas son ahora las afectadas de un guión, y las restantes son las incógnitas. Para la mayor facilidad del cálculo, es conveniente introducir en él admitancias en vez de impedancias, substituyendo toda impedancia  $z$  por  $\frac{1}{z}$ .

De un modo gráfico puede llegarse al mismo resultado, aplicando la construcción de una impedancia equivalente al sistema de



dos en paralelo. Así, por ejemplo, en un sistema en triángulo, si el circuito cuyos bornes son  $a'$  y  $b'$  ha de equivaler al circuito en triángulo, cuyos bornes son  $a$  y  $b$ , bastará hallar una impedancia  $Z_1 = \bar{z}_2 + \bar{z}_3$  igual á la impedancia resultante de  $z_2$  y  $z_3$ .

Hallada  $Z_1$  y otras dos análogas  $Z_2$  y  $Z_3$ , como valores de las impedancias entre los bornes  $b$  y  $c$ ,  $c$  y  $a$  respectivamente, se tendrá:

$$Z_1 = \bar{z}_2 + \bar{z}_3$$

$$Z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_3$$

$$Z_3 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

de cuyo sistema se deduce:

$$\bar{z}_1 = \frac{Z_2 + Z_3 - Z_1}{2}$$

$$\bar{z}_2 = \frac{Z_1 + Z_3 - Z_2}{2}$$

$$\bar{z}_3 = \frac{Z_1 + Z_2 - Z_3}{2}$$

Estas fórmulas indican con suficiente claridad el modo de construir gráficamente  $\bar{z}_1$ ,  $\bar{z}_2$  y  $\bar{z}_3$  dados  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$ .

La resolución gráfica anterior es aplicable, mutatis mutandis á la resolución del problema inverso operando con las admitancias en vez de hacerlo con las impedancias.

### 5. — Potencia en las corrientes polifásicas

En el sistema polifásico la potencia es la suma de la potencia de cada fase. El valor instantáneo de la potencia correspondiente á una fase es:

$$e i = E I \operatorname{sen} \frac{2 \pi t}{T} \operatorname{sen} \left( \frac{2 \pi t}{T} - \alpha \right) = \frac{E I}{2} \left[ \cos \alpha - \cos \left[ \frac{4 \pi t}{T} - \alpha \right] \right] \quad (1)$$

y consta de una parte constante  $\frac{E I}{2} \cos \alpha$  y otra periódica con un período igual á la mitad del de la  $f$ ,  $e$ ,  $m$ .

La suma de las potencias instantáneas correspondientes á varias fases puede ser constante. Así, por ejemplo, en un sistema trifásico en estrella, equilibrado y simétrico la potencia instantánea vale:

$$\begin{aligned} & \frac{E I}{2} \left[ \operatorname{sen} \frac{2 \pi t}{T} \operatorname{sen} \left[ \frac{2 \pi t}{T} - \alpha \right] + \operatorname{sen} \left[ \frac{2 \pi t}{T} + \frac{2 \pi}{3 T} \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{2 \pi t}{T} + \frac{2 \pi}{3 T} - \alpha \right] \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{sen} \left( \frac{2 \pi t}{T} + \frac{4 \pi}{3 T} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{2 \pi t}{T} + \frac{4 \pi}{3 T} - \alpha \right) \right] = \\ & \frac{E I}{2} \left[ 3 \cos \alpha - \cos \left( \frac{4 \pi t}{T} - \alpha \right) - \cos \left( \frac{4 \pi \left( t + \frac{1}{3} T \right)}{T} - \alpha \right) \right. \\ & \quad \left. - \cos \left[ \frac{4 \pi \left( t + \frac{1}{3} T \right)}{T} \right] \right] = \frac{3 E I}{2} \cos \alpha = 3 \dot{E} \dot{I} \cos \alpha \end{aligned}$$

es decir, la potencia es en todo instante igual al triple de la potencia eficaz correspondiente á cada fase. Las partes variables de las potencias instantáneas representadas por tres vectores iguales, corridos  $120^\circ$  en fase cada dos consecutivos, se compensan, siendo, en suma, igual á cero en todo tiempo.

A un sistema en que la potencia instantánea sea constante se la denomina « compensado ». Al cociente del valor mínimo, por el máximo de la potencia en un sistema no compensado se le llama « factor de compensación ».

Aunque todos los sistemas simétricos ó equilibrados son compensados, no hay necesidad de que un sistema sea simétrico para que sea compensado. Así, por ejemplo, el sistema bifásico es compensado si son iguales las fuerzas electromotrices por fase y los ángulos de fase de las intensidades respecto de las mismas. En efecto, de

$$e_1 = E \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \quad , \quad i_1 = I \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi t}{T} - \alpha \right)$$

$$e_2 = E \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t + \frac{1}{4}T}{T} \right) \quad , \quad i_2 = I \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t + \frac{1}{4}T}{T} - \alpha \right)$$

se deduce :

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = EI \cos \alpha = 2 E I \cos \alpha$$

valor constante é igual al doble del valor eficaz de la potencia en cada fase.

Llámanse sistemas « monocíclicos » aquellos en que el factor de compensación es cero ó negativo, y « policíclicos » aquellos en que es positivo. En un sistema monofásico, el factor de potencia es negativo, á menos que sea cero, en cuyo caso no hay potencia, siendo igual á 90° la diferencia de fase entre la  $f$ ,  $e$ ,  $m$ , y la intensidad. Luego un sistema monofásico es mononíclico. En cambio, un sistema polifásico compensado es policíclico, siendo igual á 1 el factor de potencia.

La potencia instantánea por fase, poniendo en su expresión  $\frac{2\pi}{T} = \omega$ ,  $\frac{EI}{2} \cos \alpha = W$ , se puede representar por :

$$W \left[ 1 - \frac{\cos (2\omega t - \alpha)}{\cos \alpha} \right]$$

Para otra fase se tendrá un valor análogo

$$W' \left[ 1 - \frac{\cos (2\omega t - \alpha_1')}{\cos \alpha'} \right]$$

siendo  $\alpha_1'$  la suma de  $\alpha'$ , diferencia de fase entre la  $f$ ,  $e$ ,  $m$ , y la intensidad correspondiente, y de la diferencia de fase que la nueva  $f$ ,  $e$ ,  $m$ , presenta respecto de la antigua.

La potencia instantánea total, suma de las de todas las fases, podrá ponerse en la forma: <sup>(1)</sup>

$$P = \Sigma W \left[ 1 - \frac{\cos(2w - \alpha_m)}{\cos \alpha_m} \right]$$

ó bien, como la suma de número cualquiera de funciones periódicas circulares del mismo período, es otra función de análogas propiedades, la expresión anterior, será de la forma:

$$P = W_t [1 + \varepsilon \cos(2w - \alpha_t)]$$

siendo  $W_t$ ,  $\varepsilon$  y  $\alpha_t$  constantes apropiadas.

Si en la expresión anterior representa  $P$  el radio vector y  $w$  el ángulo polar de una curva, se llama á esta « característica de potencia ».

Transformando la ecuación de la característica, pasándolo á coordenadas cartesianas, con

$$x = P \cos \left( w - \frac{\alpha_t}{2} \right)$$

$$y = P \operatorname{sen} \left( w - \frac{\alpha_t}{2} \right)$$

se tendrá:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = W_t \left[ 1 + \frac{\varepsilon(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right]$$

de donde

$$(x^2 + y^2)^3 - W_t^2 [x^2 + y^2 + \varepsilon(x^2 - y^2)]^2 = 0$$

La característica resulta ser, en general, una curva de 6° grado.

Los valores máximos ó mínimos de  $P$  son:

$$a = (1 + \varepsilon) W_t$$

$$b = (1 - \varepsilon) W_t$$

Introduciendo en la ecuación característica en vez de  $W_t$  y  $\varepsilon$  los valores  $a$  y  $b$ , se tendrá:

$$(x^2 + y^2)^3 - (a x^2 + b y^2)^2 = 0$$

(1) Steinmetz.

Las cantidades  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  se denominan « ejes ».

El coeficiente de compensación es  $\frac{a}{b}$  ó  $\frac{b}{a}$  según sea  $\varepsilon$  positivo ó negativo.

Si  $\frac{a}{b}$  es cero ó negativo (sistema monocíclico) el origen es un punto cuádruplo de la característica, con tangentes reales.

Si  $\frac{b}{a}$  es positivo el origen es un punto aislado.

Así, por ejemplo, en el caso de corriente monofásica sin reactancia,

$$P = \frac{EI}{2} [1 - \cos 2w]$$

por consiguiente:

$$W_t = \frac{EI}{2}, \quad \varepsilon = -1$$

$$a = 0 \quad b = 2W_t$$

y la ecuación de la característica es:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4W_t^2 y^4 = 0$$

En un sistema trifásico equilibrado en que la diferencia de fase entre la  $f$ ,  $e$ ,  $m$ , por fase y la intensidad correspondiente es igual á  $60^\circ$ ,

$$P = 3W_t$$

$$\varepsilon = 0$$

y la característica es:

$$x^2 + y^2 - W_t^2 = 0$$

ó sea un círculo.

La característica es una circunferencia siempre que  $\varepsilon = 0$  lo cual tiene lugar en los sistemas polifásicos equilibrados, ya que  $\varepsilon$  es entonces igual á la suma de los cuadrados de raíces enésimas de la unidad, puesto que la diferencia en la fase de la parte periódica de la potencia al pasar de una fase á otra es:

$$\frac{2\pi n}{T} \times 2$$

y, simbólicamente se pasa de un vector  $P_p$  á otro  $P_{p+1}$  cuyas fases difieran en la cantidad antedicha multiplicando el primero por

$$\sqrt[n]{1}$$

Para terminar, indicaremos otra expresión de la potencia en los sistemas trifásicos compensados. Se ha visto que la potencia era,

$$\pi = 3 \dot{E} i \cos \alpha$$

siendo  $\dot{E}$  e  $i$  las  $f$ ,  $e$ ,  $m$ , é intensidad eficaces por fase, y  $\alpha$  la diferencia de fase entre ellas. Si el sistema está dispuesto en estrella, la fuerza electromotriz eficaz entre dos hilos de línea es

$$(\dot{E}) = \sqrt{3} \dot{E}$$

y la intensidad eficaz de línea  $\dot{I}$  es igual á la de la fase. Luego:

$$\pi = \sqrt{3} (\dot{E}) i$$

y, por lo tanto, la potencia media eficaz es igual á  $\sqrt{3}$  veces la potencia media en cada circuito.

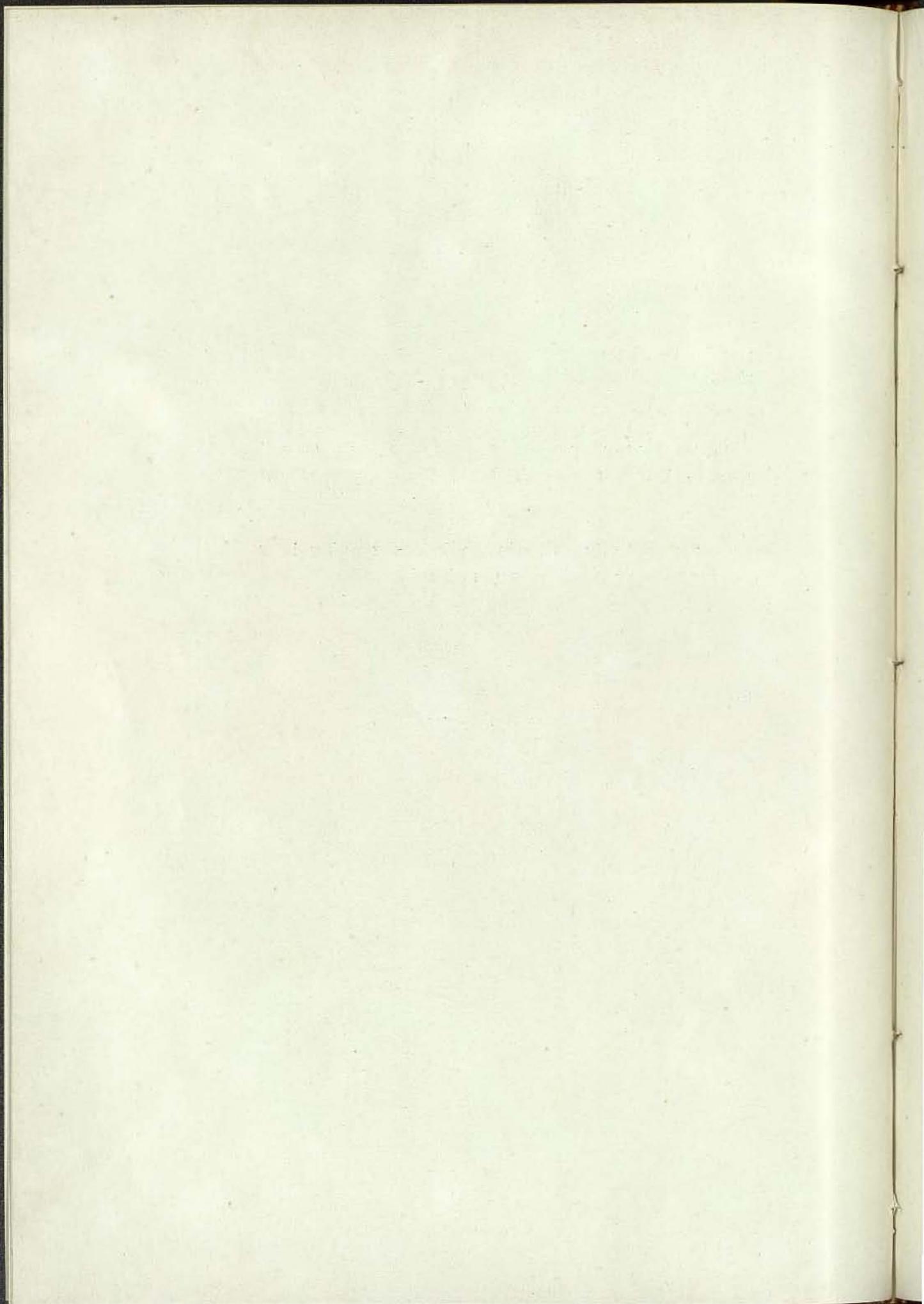
Si la disposición del sistema hubiera sido en triángulo

$$(\dot{E}) = \dot{E}$$

$$(i) = \sqrt{3} i$$

luego

$$\pi = \sqrt{3} \dot{E} (i)$$



CÁTEDRA DE COSMOGRAFÍA Y FÍSICA  
DEL GLOBO  
MECÁNICA, ASTRONOMÍA ESFÉRICA  
Y GEODESIA

Á CARGO DEL

DR. D. ANGEL BERENGUER

•

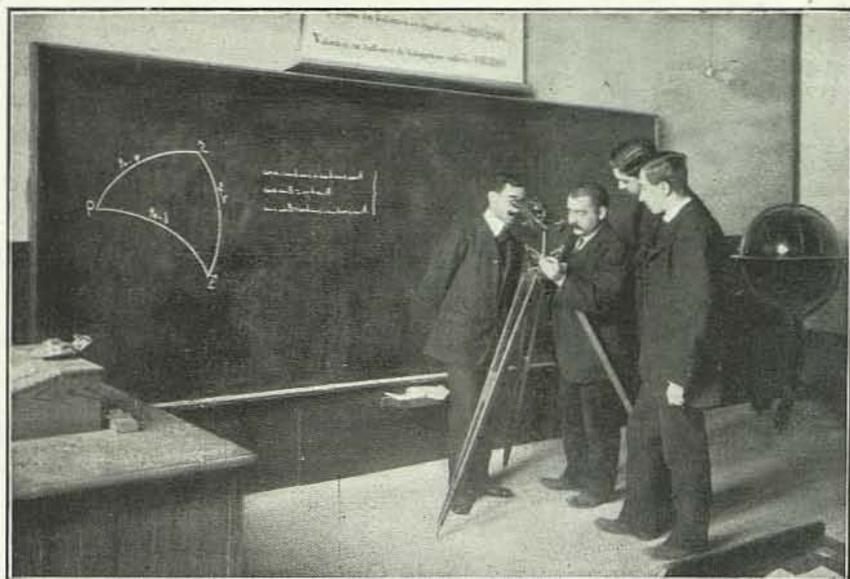
[The page contains extremely faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is too light to be transcribed accurately.]



CONCEDIÓSE por el Rectorado, en el último curso á la Facultad de Ciencias, unas habitaciones en la parte de edificio donde se ha trasladado la Secretaría general, de las que, mediante obras llevadas á cabo, se habilitaron dos locales, para cátedra el uno y gabinete de aparatos el otro, de las enseñanzas en la portada mencionadas.

La cátedra, contigua á la de Química orgánica é inorgánica, es una salita rectangular, provista de una gran ventana y capaz para veinte escolares. En ella, se han substituído los anticuados bancos colectivos por cómodos y elegantes asientos individuales con sus correspondientes pupitres, construídos, conforme á los más recientes modelos, en la casa « American Seating Company », de New York. Asientos y pupitres están espaciados de modo que cada alumno puede, con holgura, pasar á su puesto, é instalado en él, tiene suficiente amplitud para moverse y el necesario aislamiento si desea concentrar la atención en las explicaciones del profesor. La mesa de éste, entrepañada por la espalda y costados, tiene en su frente, á más de dos cajones, dejando un hueco en el medio, otros tantos armaritos inferiores propios para guardar tablas astronómicas y de loga-

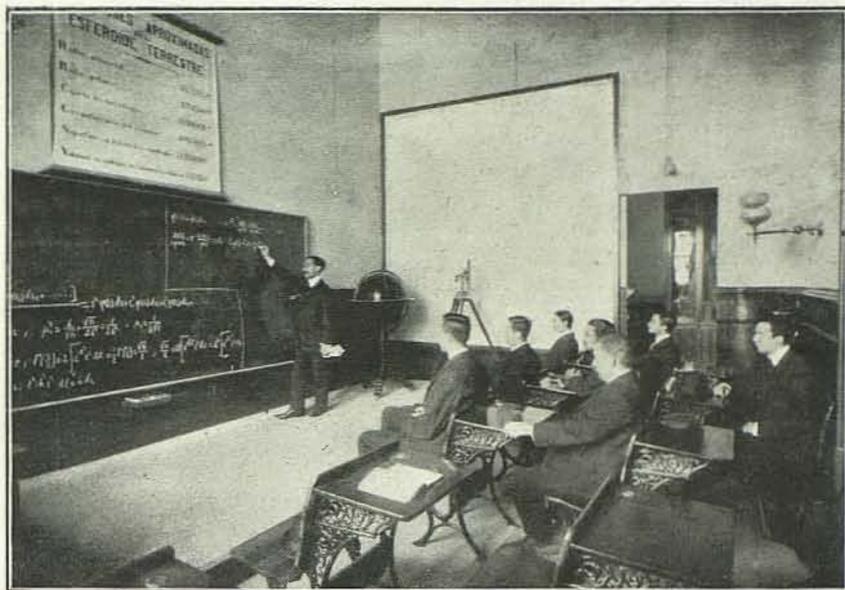
ritmos, de tan frecuente uso en el estudio de la ciencia del cielo. El pupitre que va fijo al tablero de esta mesa puede emplearse, mediante un sencillo mecanismo que mantiene la tapa inclinada convenientemente, como atril para sostener los atlas que durante algunas lecciones orales se utilizan.



Completan el menaje que venimos reseñando, el encerado, de regulares dimensiones, y una esfera negra de 66 cm. de diámetro, montada sobre pie de madera al modo de los globos celestes.

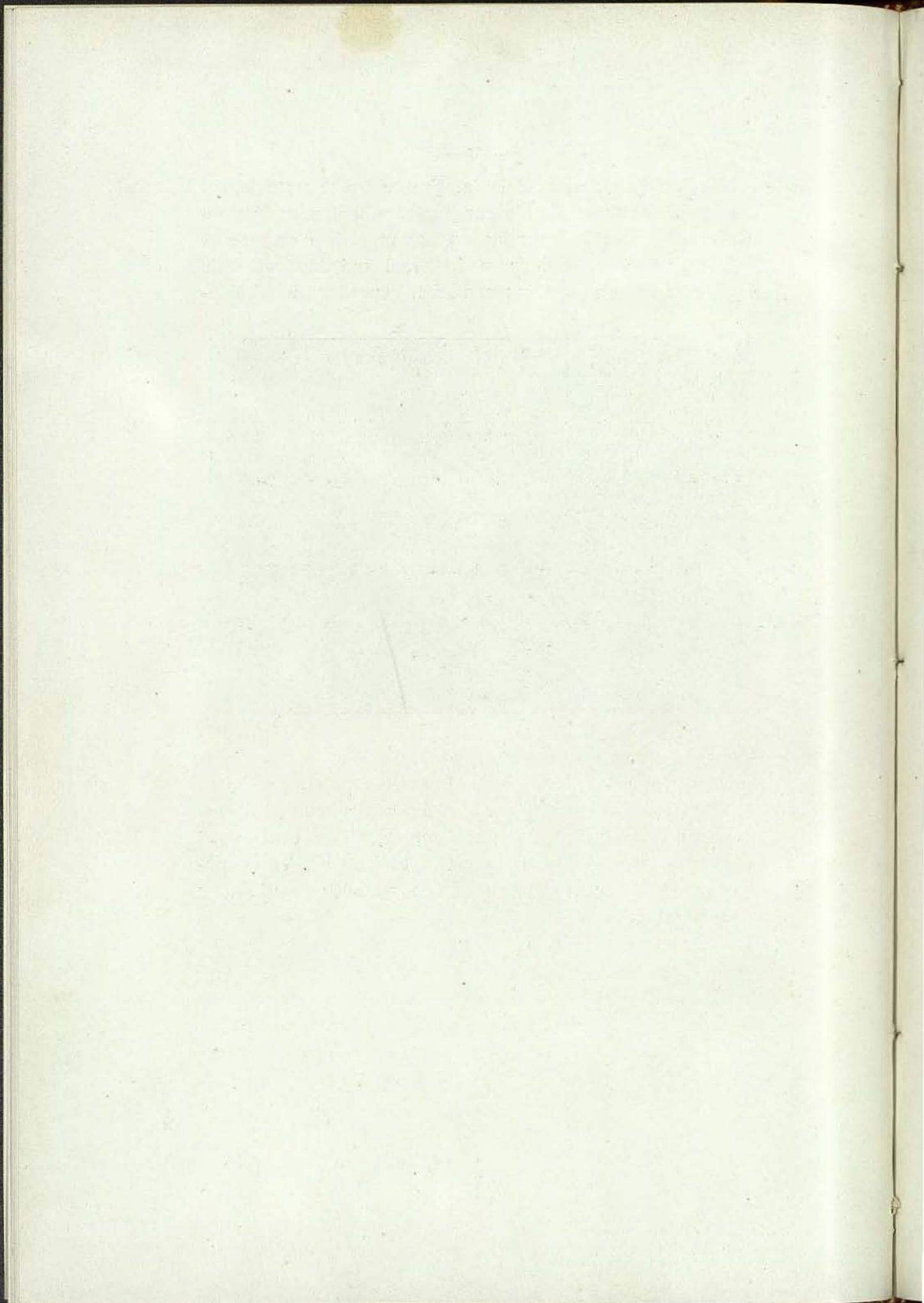
El gabinete de aparatos, que da acceso á la cátedra, es una pieza más pequeña que aquella, pero también rectangular. En él se encuentra un gran armario, que contiene: brújulas, niveles, el sextante, un micrómetro filar con círculo de posición, helioscopio de Dawes; un espectroscopio solar poliprismático con prisma de reflexión total, permitiendo así utilizar los otros dos veces y obtener doble dispersión, construido por la casa « Grubb », de Dublín; un cronómetro y la linterna de proyecciones, adquirida en la casa « E. Ley-

bold's Nachfolger», de Colonia. Frente á este armario, entre dos esferas, terrestre la una y celeste la otra, ambas con horizonte y meridiano graduados, hay un relieve en yeso de la Luna, cubierto por elegante vitrina, el cual, iluminado bajo diferentes ángulos con luz artificial, reproduce admirable-



mente las fases de nuestro satélite, y colgado en el mismo muro que el relieve, un mapa del mencionado astro.

Un magnífico ecuatorial, cuyo refractor tiene 12'5 centímetros de abertura, construído en la misma casa que el espectroscopio solar antes citado, está instalado en un pabellón especial cubierto con cúpula metálica giratoria, y situado en el jardín del edificio.



CURSO  
DE  
MATEMÁTICAS DE APLICACIÓN Á LAS CIENCIAS  
EXPERIMENTALES

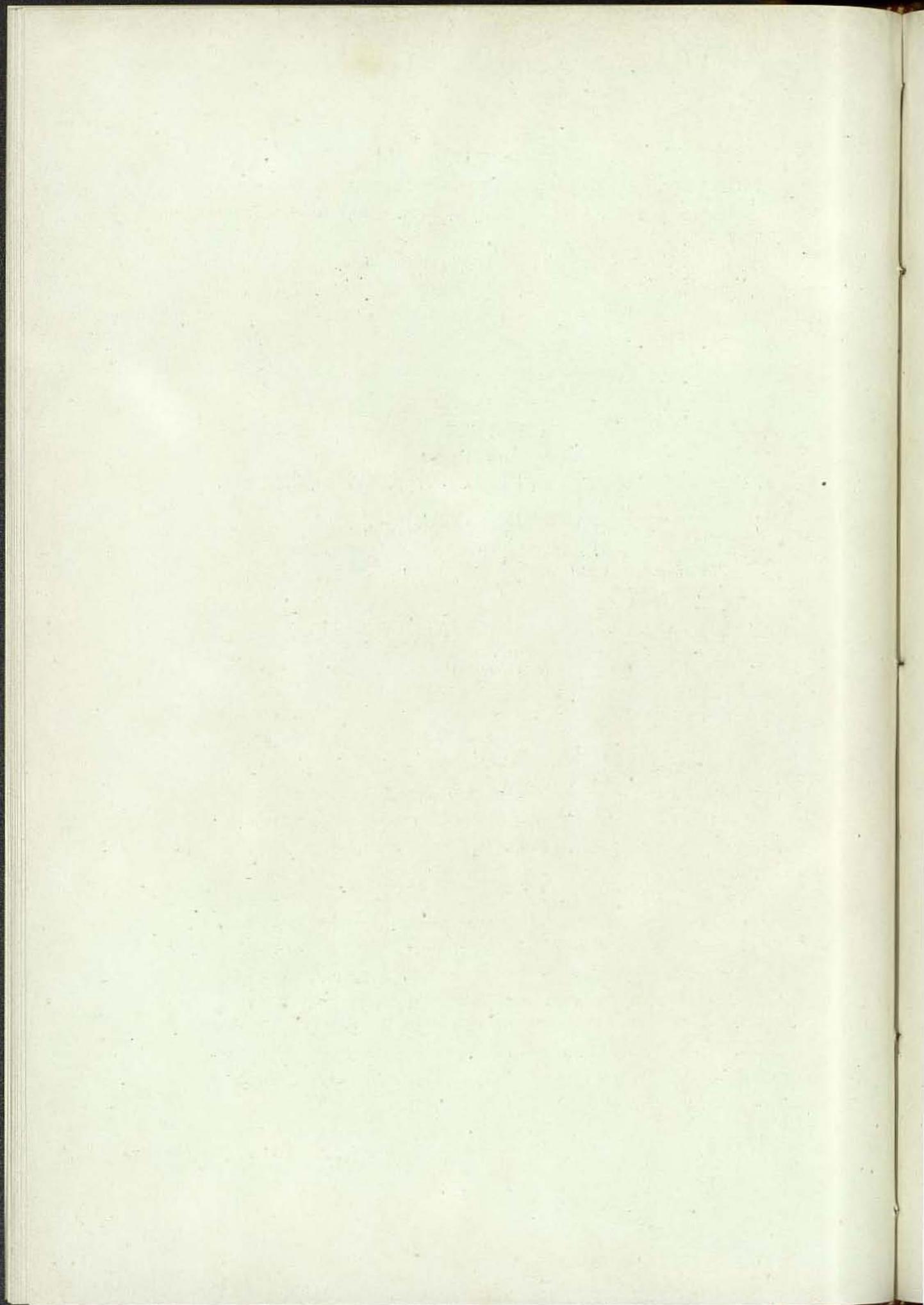
DESARROLLADO EN CONFERENCIAS PÚBLICAS

POR EL

DR. D. JESÚS GOIZUETA Y DÍAZ

Catedrático numerario  
de la Universidad





### Razonamientos

**H**AY en el orden didáctico una inmensa diferencia entre las Ciencias puras y las de aplicación. Quien enseña las primeras, no se cuida, en general, de la utilidad que puedan reportar al hombre, ni aun á la Ciencia misma, los diferentes asuntos que comprenden, pues toda verdad, por insignificante que parezca, es digna de conocerse y de que se fije en ella la atención; quien explica las segundas, suele prescindir, en lo posible, de todo cuanto considera inútil al objeto perseguido y profundiza en aquello que sea directamente utilizable, con tanta mayor intensidad cuanto más numerosas é interesantes sean las aplicaciones.

Es claro que la extensión que debe darse á cada Ciencia aplicada depende del objeto á que se aplique; así, la Química agrícola no estudia las materias colorantes derivadas de la brea de hulla, pero concede extraordinaria importancia á cuanto se relaciona con la nutrición y vida de las plantas; la Química aplicada á las industrias textiles podrá prescindir de los abonos, para fijar su atención en aquellas materias colorantes, tan inútiles al agricultor; la Química farmacéutica da marcada preferencia á las especies medicamentosas,

haciendo caso omiso de muchos otros cuerpos que, como las pólvoras y explosivos, tanto interesan al químico militar, y en fin, cada Ciencia y cada Arte toman de la Ciencia pura todo aquello que aparece como materia directamente aplicable, prescindiendo de todo lo demás.

Las Matemáticas, por causas muy complejas, no han sido, tal vez, convenientemente ordenadas en programas especiales con marcado carácter de aplicación directa á las diversas Ciencias que necesitan de su concurso y cooperación, y así se observa que, mientras la Mecánica, la Física, la Química, la Historia natural, etc., se especializan en armonía con los fines profesionales respectivos, la Matemática no ha perdido su carácter austero y teórico; y en las numerosas carreras de ingeniero que hoy existen, lo mismo al industrial que al agrónomo, al de montes que al de minas, al civil que al militar, á todos se les obliga á seguir curso tras curso toda la Matemática clásica, de la misma manera, poco más ó menos, que se les exige á los doctores en Ciencias, cuya finalidad es puramente especulativa y teórica.

Solamente los comerciantes, hombres prácticos y acostumbrados, desde muy jóvenes, á palpar las realidades de la vida, han sabido crear un Cálculo mercantil, tomando de la Aritmética todo cuanto necesitan para desenvolverse en sus negocios; los métodos llamados vulgarmente *de los números encarnados*, *indirecto* y *hamburgués*, son verdaderos modelos de adaptación del cálculo aritmético á las necesidades de la banca, y quien los desconozca, aun cuando sepa integrar á perfección las ecuaciones diferenciales más complejas, emplearía cien veces más tiempo en comprobar un extracto de cuentas de algún movimiento, que el más torpe empleado de una casa de comercio. En las demás carreras, ó se estudia todo ó nada; y en la imposibilidad de incrementar los planes de enseñanza de algunas con varios cursos de Matemáticas, que aplazarían considerablemente la terminación de los estudios, se ha optado por no incluirlas, privando

á los graduados de este poderosísimo medio de investigación y análisis.

Y todo esto ¿por qué? Por no simplificar las Matemáticas; por no excluir de los programas una infinidad de teorías que no sirven para nada, y que, en cambio, consumen un tiempo y una actividad enormes.

\*  
\* \*

¿Es que no hay manera de simplificar las Matemáticas suprimiendo todos los teoremas, reglas, proposiciones y teorías que no se usan en la práctica, ó cuyo conocimiento no es indispensable para el estudio de otras Ciencias?

Examinemos este punto delicado.

Si el alumno se dedica por verdadera vocación á las Ciencias de raciocinio, apenas cabe simplificación, porque aquel espíritu, desprovisto en absoluto de toda idea egoísta ó utilitaria, que cultiva la Ciencia por la Ciencia misma, como entidad superior en todos los órdenes á la naturaleza y comodidad humanas, rindiendo al genio y al talento un culto casi divino, graduará, tal vez, las verdades matemáticas por las dificultades que ofrezcan en su estudio, y no será nada extraño que conceda igual ó mayor importancia á la fórmula de los números perfectos pares que al teorema de Pitágoras.

Si, por el contrario, las aficiones ó aptitudes del alumno se dirigen hacia las Ciencias experimentales, si el espíritu de aquél se forma lentamente en el laboratorio, obteniendo cuerpos útiles, haciendo análisis industriales, midiendo magnitudes, comprobando teorías, observando fenómenos cuya importancia práctica adivina desde el primer instante con esa intuición genial que da la vocación y el medio ambiente que le rodea, es muy probable, es seguro que estimará tiempo perdido el que se gaste en demostrar proposiciones de finalidad dudosa, y tomando la Matemática *como una*

*Ciencia auxiliar*, deseará llegar cuanto antes á los teoremas y reglas que le permitan entender las obras magistrales, ó calcular y poner en ecuación los fenómenos y leyes de la naturaleza.

El primero meditará profundamente acerca del postulado de Euclides, y no satisfecho de su evidencia *à priori*, optará por una Geometría no euclídea; el segundo considerará una locura é insensatez el no admitir cosas tan evidentes y tan en armonía con lo que la experiencia nos enseña, y maldecirá á los sabios que embrollan la Ciencia, dándole un giro absurdo y completamente opuesto al sentido común.

Por desconocer ó no atribuir muchos la debida importancia á estas diferencias que existen en la mentalidad humana, es por lo que la Ciencia matemática, conservando su carácter clásico é inadaptable á las modernas exigencias pedagógicas, no ha sido convenientemente especializada en Cursos de aplicación.

\*  
\* \*

La resistencia que oponen los matemáticos á simplificar su Ciencia favorita, depende en gran parte, á nuestro juicio, de una idea errónea acerca de la exactitud y del rigor científicos.

Créese (y esta creencia es muy común) que, en cuanto se suprimieran las proposiciones que sirven de eslabones ó peldaños para llegar á reglas útiles ó de aplicación directa, ya la Ciencia matemática se tambalearía como edificio sin base ni cimiento, incapaz de mantenerse en pie.

Verdaderamente, sin escalera ó andamiaje es imposible construir un edificio; pero *una vez construido*, se pueden suprimir ambos, sin que la fábrica se resienta en lo más mínimo ni los pisos pierdan la utilidad y ventajas que tuvieron antes. Pero ¿cómo elevarse hasta ellos? En el ejemplo aducido, instalando un ascensor; en la cuestión de que se trata, perfeccionando los métodos de enseñanza, trabajando por

simplificar la exposición en vez de complicarla con distingos inoportunos, no gastando los Maestros sus energías en demostrar teoremas y proposiciones charadísticas, sino en enseñar *lo mucho útil* que se sabe, llevando los conocimientos al entendimiento del alumno por el camino más corto; ésta es la labor del pedagogo, y, cuanto más en este sentido se trabaje, mayores beneficios recibirá la humanidad, de los que se han impuesto el deber de educarla y conducirla al verdadero progreso.

Además, las proposiciones matemáticas no son verdades porque nosotros las veamos como tales y sepamos demostrarlas con razonamientos adecuados, sino porque son la realidad de las cosas, porque responden en todos los momentos á lo que la experiencia nos enseña. Y las verdades ni se demuestran siempre por puro razonamiento ni hay necesidad de demostrárselas á quien se halla dispuesto á creerlas de buena fe. En todo caso, *la comprobación*, posible casi siempre, es para el hombre, dígase lo que se quiera, un criterio de certeza infinitamente superior á los más vigorosos razonamientos.

Porque ¿quién está seguro de percibir la verdad al través de un raciocinio algún tanto complicado? ¿No conocemos todos una porción de demostraciones al parecer rigurosas, de proposiciones falsas, demostraciones que ofuscan por su sencillez, costando á veces muchísimo tiempo el caer en la cuenta del error? ¿Y por qué conocemos que hay error y nos empeñamos en buscarlo? Porque sabemos, por experiencia, que aquella conclusión no es cierta. De no existir la experiencia, la Matemática estaría llena de errores, pues, aunque el cálculo, á semejanza de Dios, no puede, según se dice, engañarse ni engañarnos, al plantear las cuestiones y problemas tan sólo interviene el entendimiento humano, que dista muchísimo de ser infalible.

Y si aquello ocurre con razonamientos que pasan por su simplicidad, no digamos nada de lo que ocurriría si

hubiera interés en complicar las cuestiones con el deliberado propósito de engañar constantemente.

La razón humana es flaca, y por más que muchos la elevan á la categoría de fuente única y positiva de verdad y de certeza, de bien distinto modo pensarían, si los razonamientos que toman por evidentes no vinieran firmados por autores de prestigio y seriedad reconocidos, ó les asaltara la duda de que aquéllo no se había comprobado jamás.

Aparte de todo esto, quien aplica una proposición ó una regla no necesita saber más sino que la cosa es cierta é infalible; y esto tiene que saberlo de antemano, sea cual fuere el origen de su convencimiento. El recuerdo de las demostraciones es absolutamente inútil, pues si al meditar y poner en juego todas las potencias para resolver un problema, se tuviera que estar pensando en la manera cómo se demuestran las diferentes proposiciones que intervienen en los cálculos ó ratiocinios, el entendimiento se desviaría en mil direcciones distintas, y en lugar de llegar al objeto que persigue, se quedaría distraído en el camino.

\*  
\* \*

No se crea, por lo anteriormente escrito, que nuestro Curso vá á estar constituido por un conjunto inconexo de reglas sin demostración, tan indigestas como las que aprenden los niños en la escuela. Las consideraciones anteriores sirven solamente para colocarnos en el peor caso, y para contestar por adelantado á quien tratara de criticarnos valiéndose de argumentos ya gastados y de todos conocidos.

Afortunadamente, es posible demostrar la mayor parte de las reglas y proposiciones *útiles*, con razonamientos vigorosos, sencillos y *directos*, siempre que demos como evidentes, las verdades de cuya certeza no duda quien tiene su espíritu ya formado y no carece de sentido común.

Entendemos con el insigne Echegaray que, en las Ciencias matemáticas, los teoremas han de estar en una circun-

ferencia, los axiomas en el centro y *radios de demostración*; porque como él mismo dice: «ciencia en que para llegar á un teorema necesito pasar antes, forzosamente, por una cadena de doscientos teoremas, es ciencia que dista mucho de su más alto grado de perfección (1).

Pero aquel bello ideal jamás se conseguirá si nos obstinamos en no reconocer como inmediatamente ciertas más que las proposiciones cuyo predicado se halla incluido en el sujeto, ó aquellas otras á las que, por su simplicidad, se ha dado en llamar *evidentes por sí mismas*, pues no hay modo de llegar *en línea recta* de una proposición elemental á una conclusión compleja. Hay que admitir como evidentes, verdades de mayor categoría.

En nuestro humilde sentir, la evidencia no reside en la proposición, sino que depende del talento del hombre.

Lo que para éste es axiomático tal vez sea incomprendible para un animal inferior, y por otra parte, Dios verá evidente el teorema más complicado, pues siendo una verdad, no puede permanecer, en modo alguno, ni por un sólo momento, oculta y agena á la Infinita Sabiduría.

Lo que tenga de evidente una proposición, no depende, pues, de otra cosa, que de la mentalidad de quien la aprecia, y siendo esto así, como indudablemente lo es, no hay razón para empeñarse en conducir por la senda del saber á espíritus ya maduros ó cuando menos en el pleno goce de sus facultades intelectuales, con la misma lentitud que si se tratara de guiar á los niños, cuyo corto entendimiento tropieza, á cada instante, con los menores obstáculos.

\*  
\* \*

Nuestro propósito es enseñar en un curso de lección alterna las Matemáticas elementales y superiores que se

---

(1) José Echegaray. *Introducción á la Aritmética universal de Ricardo Baltzer*, traducida directamente del alemán por E. Jiménez y M. Merelo. Madrid, 1880.

utilizan en las Ciencias experimentales, principalmente en la Física práctica, en la Química y en la Historia natural.

La tarea es difícil y como cosa nueva necesitará ulteriores perfeccionamientos. Aun así, es seguro que nuestros oyentes no saldrán convertidos en grandes matemáticos; pero confiamos en que podrán desenvolverse por sí mismos en el gabinete y en el laboratorio, y, sobre todo, en que podrán abordar con fruto las obras extensas de Fisicoquímica, solamente inteligibles para los que se hallan algún tanto familiarizados con las sublimes creaciones de Leibnitz y de Newton.

### Programa

LECCIÓN 1.<sup>a</sup> Magnitudes. Modos de existencia de las magnitudes. Cantidades. Notación; módulo y signos. Cantidades discretas. Unidad y número. Numeración. Cantidades continuas. Medida de cantidades continuas. Cantidades y números conmensurables é inconmensurables. Cantidades inmensurables; *a*) por falta de unidad adecuada; *b*) por ser demasíadamente grandes; *c*) por su extrema pequeñez. Concepto general de las Matemáticas. División.

LECCIÓN 2.<sup>a</sup> Operaciones. Su división. Operaciones calculatorias con cantidades de forma simple. Exposición de los diversos algoritmos. Clasificación de las operaciones calculatorias.

Suma de cantidades de forma simple. Suma de números enteros.

Resta de cantidades de forma simple. Resta de números enteros. Aparición de los números negativos. Interpretación.

Multiplicación de cantidades de forma simple. Multiplicación de números enteros.

División de cantidades de forma simple. División de números enteros. Aparición de los números fraccionarios y decimales.

Elevación á potencias de cantidades de forma simple.

Interpretación directa de los exponentes  $1$ ,  $0$  y  $-1$ .

Elevación á potencias enteras, de números enteros.

Extracción de raíces, de cantidades de forma simple.

Extracción de la raíz cuadrada de números enteros.

Aparición de números inconmensurables.

Interpretación de los exponentes fraccionarios.

Signo de las raíces de grado impar y par. Aparición de las cantidades imaginarias. Interpretación.

Logaritmicación.

LECCIÓN 3.<sup>a</sup> Operaciones calculatorias con dos ó más cantidades de forma compuesta.

Operaciones con sumas, restas, productos, quebrados y decimales. Interpretación de los símbolos  $\frac{1}{o}$ ,  $\frac{o}{o}$  y análogos. Operaciones con potencias y raíces.

LECCIÓN 4.<sup>a</sup> Cálculo logarítmico.

LECCIÓN 5.<sup>a</sup> Ecuaciones. Ecuaciones de primer grado. Aplicaciones. Ecuaciones de segundo grado. Ejemplos.

LECCIÓN 6.<sup>a</sup> Nociones y teoremas más importantes de la Geometría métrica.

LECCIÓN 7.<sup>a</sup> Trigonometría. Fórmulas interesantes.

LECCIÓN 8.<sup>a</sup> Algoritmo funcional. Nociones de Geometría analítica. Aplicaciones.

LECCIÓN 9.<sup>a</sup> Principios fundamentales del cálculo infinitesimal. Límites notables.

Diferenciales y derivadas. Interpretación geométrica. Diferenciación y derivación de las funciones. Aplicaciones.

LECCIÓN 10.<sup>a</sup> Integrales. Procedimientos de integración de las funciones diferenciales. Ecuaciones diferenciales. Su división. Integración de las ecuaciones diferenciales más comunes.

### Resumen del Curso

El anterior programa redactado antes de empezar el Curso, no ha sufrido durante el mismo modificación alguna, y pudo explicarse en toda su integridad. Claro es que el número de Conferencias resultó muy superior al número de lecciones, pero eso estaba ya previsto de antemano, pues la unidad lección, no depende de otra cosa que de la homogeneidad de los asuntos en ella comprendidos, sin que influya poco ni mucho el número y extensión de los temas que abarca.

Y este criterio que tal vez fuera perjudicial en un Programa de exámenes, es utilísimo cuando se trata de cursos libres, porque el oyente se da inmediata cuenta de la naturaleza de las diversas materias y de las relaciones que guardan entre sí, á semejanza de la idea que formamos del Planeta, cuando tenemos ante nuestros ojos un planisferio terrestre.

En la primera lección se fijaron con gran escrupulosidad los conceptos de magnitud, cantidad, unidad y número, clasificando las cantidades en discretas y continuas; mensurables é inmensurables, y dividiendo estas últimas en tres clases, según que la inmensurabilidad tenga por causa la falta de unidad adecuada, la excesiva é ilimitada magnitud, ó la pequeñez extrema.

Relacionados estos últimos asuntos con la más alta Filosofía, pudiera haberse expuesto las ideas de los grandes pensa-

dores acerca de la divisibilidad infinita, continuidad, espacio y extensión; pero considerando que en último análisis nadie conoce á punto fijo la naturaleza de estas entidades, porque mientras el hombre no se despoje de su mísera corteza terrenal y contemple con los ojos de un espíritu puro la esencia íntima de la continuidad sin adulterarla con representaciones groseras y materiales, el absurdo le ha de rodear por todas partes si pretende salirse sin más luz que su razón del espacio finito en que Dios le colocó; y observando que con las ideas que todo el mundo posee, siquiera se refieran al orden fenomenal y contingente, basta para desenvolverse en el cálculo elemental y en el sublime, como lo demuestran las muchísimas personas que sin conocimientos filosóficos poseen perfectamente el mecanismo del cálculo y lo practican á la perfección, adopté de una vez para siempre el criterio de prescindir en absoluto de cuanto se relaciona con asuntos filosóficos, ciñendo estrictamente mis explicaciones á la parte práctica y de utilidad indiscutible.

Comencé la lección segunda dividiendo las operaciones en calculatorias y coordinatorias, exponiendo á continuación los diversos algoritmos, y dividiendo las primeras en tres categorías: sumación, reproducción y graduación.

Atendiendo á la forma de la cantidad, es natural empezar el estudio por las de forma más simple, expresables por dos símbolos combinados entre sí; pero como esto sólo conduce al modo de notación, y, por otra parte, es indispensable el manejo de los números enteros, ya que son la base de toda ulterior operación, consideré á dichos números como la expresión más inmediata de las cantidades simples, aun cuando en general llevan consigo el resultado de la numeración.

En la inversa de la suma hacen su primera aparición los números negativos, que se interpretaron, no como expresiones menores que cero, sino como la medida de cantidades