Mecànica relativista predictiva: Electrodinàmica i langrangians singulars

Francesc Marqués i Truyol

UNIVERSITAT DE BARCELONA

FACULTAT DE FISICA

MECANICA RELATIVISTA PREDICTIVA : ELECTRODINAMICA I LAGRANGIANS SINGULARS.

Memòria presentada pel
professor Francesc Marqués i
Truyol per tal d'optar al
grau de Doctor en Física.

Barcelona, 1980.

UNIVERSITAT DE BARCELONA

FACULTAT DE FISICA

MECANICA RELATIVISTA PREDICTIVA : ELECTRODINAMICA I LAGRANGIANS SINGULARS.

Memòria presentada pel
professor Francesc Marqués i
Truyol per tal d'optar al
grau de Doctor en Física.

Barcelona, 1980.

Vull expressar el meu agraïment al Dr. A. Molina per la direcció d'aquest treball. La seva ajuda constant, el seu estímul i sugeriments valuosos han estat decisius per la realització del mateix.

També vull agrair als Drs. J. Gomis i J. Llosa els seus comentaris i discusions. A aquest segon, també, la molèstia d'una lectura detallada del català d'aquest treball.

També a tots els companys del Departament deFísica Teòrica de la Universitat de Barcelona.

ALFRED MOLINA I COMPTE, Professor Adjunt Contractat a la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona

CERTIFICA : Que la present memòria, "Mecànica Relativista Predictiva: Electrodinàmica i Lagrangians Singulars", ha estat realitzada sota la meva direcció pel Prof. Francesc Marqués i Truyol i constitueix la seva Tesi per a optar al grau de Dostor en Física.

I a fi de que consti, en compliment de la legislació vigent, presento davant la Facultat de Física d'aquesta Universitat, l'esmentada Tesi Doctoral, signant el present certificat a Barcelona a set d'abril de mil noucents vuitanta.

INDEX.

1. INTRODUCCIO.

A la relativitat, a diferència de la mecànica newtoniana, no trobem exemples senzills de sistemes dinàmics de diverses partícules.

La formulació covariant Lorentz de les equacions del moviment per a sistemes de partícules en interacció, directament en termes de les variables de les partícules (és a dir, sense utilitzar camps) és l'objecte de les teories d'acció a distància. Entre elles podem distingir les accions a distància instantànies i les no instantànies (KE.72).

Exemple de les segones és l'electrodinàmica de Wheeler i Feynman (WF.49), que dóna llos a unes equacions diferencials de segon ordre retardades; aquesta no és més que un cas particular de la teoria de Van Dam i Wigner (VW.65) la qual obté com equacions del moviment unes equacions integrodiferencials.

Les dificultats d'aquestes teories consisteixen en que les equacions que donen no són equacions diferencials ordinàries, per a les quals hom no sap formular teoremes d'existència i unicitat ni tampoc cap mètode de solució (ni tan sols numèric). Això mateix passa amb qualsevol teoria de camps. Si suposem que cada partícula crea el seu camp i que sobre una partícula donada hi actuen els camps deguts a la resta, obtindrem al final unes equacions del moviment en diferències retardades. Una cosa semblant passa a la teoria de Wheeler i Feynman abans esmentada i que hom pot trobar breument discutida al començament del capítol 3 d'aquest treball.

L'acció a distància instantània té dues branques. Una és la iniciada per Dirac (DI.49), consistent en buscar una formulació Hamiltoniana utilitzant per a tal fí l'estructura del grup de Poincaré, i demanant que les transformacions d'aquest grup siguin canòniques. L'interés d'una formulació Hamiltoniana rau en que permet de quantificar la teoria fàcilment.

La dificultat d'aquests models està en que les linies d'univers de les partícules han d'ésser invariants. Si hom pren com a coordenades canòniques les coordenades físiques de les partícules i les seves línies d'univers són les mateixes per a qualsevol sistema de referència Lorentzià, troba que l'única dinàmica possible és la de partícules lliures. Això és el que afirma el famós teorema de No Interacció, de Currie, Jordan i Sudarshan (CJ.63) (Vegeu també (LE.65)).

Hom pot intentar superar aquests problemes suposant que les línies d'univers de les partícules no són invariants en canviar d'observador d'inèrcia. Una altra manera utilitza els models de Lagrangians singulars, els quals comentarem més avall.

La segona branca, dins de la qual es situa aquest treball és la Mecànica Relativista Predictiva. El punt de partença és mantenir fermamant la invariància de les línies d'univers de les partícules i demanar unes equacions del moviment estrictament Newtonianes: acceleracions instantànies en termes de posicions i velocitats instantànies de les partícules.

El fet que la simultaneitat no sigui un concepte covariant fa que aquest punt de vista sembli inacceptable. No obstant hom demostra que les equacions de tipus newtonià són compatibles amb la invariància sota el grup de Poincaré. Aquest prejudici ha fet que la dinàmica relativista de N partícules no sigui desenvolupada fins molt tard (CU.66), (HI.67), molt després de la formulació de la relativitat restringida per Einstein.

Podem trobar un fonament formal per això a l'electrodinàmica mateixa. Eliminant els camps i fent desenvolupaments de Taylor en les càrregues hom arriba a equacions del moviment del tipus Newtonià. La propietat de covariància sota el grup de Lorentz, que tenien les equacions de partença, es manté per tant en la versió derivada instantània (encara que aquesta instantaneitat sigui totalment formal) (KE.65).

Tornant al cas general, la dificultat de la no-covariància de la simultaneitat rau en que posicions i velocitats que són simultànies en un sistema de referència no ho són en un altra sistema en moviment respecte del primer; i per que la dinàmica en el sistema mòbil tingui la mateixa forma que en el primer sistema considerat, hem de prendre noves posicions i velocitats, desplaçades al llarg de cada línia d'univers de les partícules, tal de que siguin simultànies en el sistema mòbil. Això exigeix integrar les equacions del moviment per obtenir les òrbites. Aquesta situació sembla insuperable. Però solament ens cal considerar transformacions infinitesimals, perquè tota transformació finita de Poincaré pot ésser descomposada com una seqüència de transformacions infinitesimals.

Així obtenim fàcilment condicions necessàries i suficients que garanteixen la covariància de la dinàmica de tipus

Newtonià proposada. En el primer capítol d'aquest treball farem un resum del que és la mecànica relativista predictiva per passar després a aplicar-la al cas de dues partícules en interacció electromagnètica, amb radiació, al capítol 3.

En el camp de les teories d'acció a distància, aquets darrers anys han aparagut diferents treballs sobre models Lagrangians singulars. Un Lagrangià singular és aquell per al qual la matriu Hessiana respecte de les velocitats generalitzades és singular; això fa que hom no pugui aïllar directament les acceleracions a partir de les equacions d'Euler-Lagrange. La teoria d'aquets sistemes arriba a unes equacions del moviment (a les quals hi apareixen funcions arbitràries), vàlides solament sobre una subvarietat de l'espai de les fases.

Els aventatges d'aquestes teories consisteixen en que hom pot desenvolupar un formalisme Hamiltonià que permet de quantificar fàcilment la teoria. Els teoremes de no interacció no es poden aplicar, ja que les posicions de les partícules no són variables canòniques i les equacions del moviment obtingudes són vàlides únicament sobre una subvarietat de l'espai de les fases.

Ara bé, les equacions del moviment que hom deriva d'aquestes teories no són equacions diferencials de segón ordre, ja que contenen funcions arbitràries; a més les condicions inicials no poden ésser qualsevulles, sino que han de estar sobre la subvarietat abans esmentada. Una altra dificultat es presenta quan escrivim les triacceleracions que s'observen des d'un sistema inercial. Per a alguns sistemes aquestes acceleracions seràn instantànies (en el sentit de que venen descrites en termes de posicions i velocitats simultànies de la resta de partícules) mentre que per d'altres no.

Però des del punt de vista de la mecànica relativista predictiva, desitjem que no hi hagi cap observador inercial privilegiat. Així, la segona part d'aquest treball està dedicada a buscar un sistema predictiu que coincideixi amb el sistema dinàmic que es deriva d'un Lagrangià singular donat. Trobarem condicions generals sota les quals tal cosa és possible, i aplicarem els resultats al model de Dominici-Gomis-Longhi (al capítol 5) (DGa78).

La motivació d'aquests treballs és aprofondir els coneixements de la dinàmica relativista de sistemes de N partícules (des del punt de vista de la Mecànica Predictiva), ja que pensem que part de les dificultats de la Teoria Quàntica de Camps (eliminació d'estats d'energia negativa; impossibilitat de tractar estats lligats i d'altres) tenen origen relativista i no quàntic. Una mostra d'això són els models Lagrangians singulars proposats per explicar la interacció entre els quarks, els quals permeten d'eliminar els estats no físics (norma negativa) i presenten potencials relativistes que permeten d'explicar el confinament dels quarks (KN.73), (KV.76).

2. MECANICA RELATIVISTA PREDICTIVA

Aquest capítol és un resum dels fonaments de la Mecànica Relativista Predictiva (M.R.P.) i d'aquells aspectes més elaborats que ens seran necessaris al llarg del present estudi. El material està tret fonamentalment de les referències: (DR.70), (BE_a71), (BM.75), (BF.76) i (BE.77).

2.1. Formalisme manifestament predictiu.

La M.R.P. estudia sistemes de N partícules puntuals -sens estructura(≠)- en interacció. Està basada en dos principis fonamentals que podem anomenar Principis de Predictitat newtoniana i Relativitat, respectivament.

a) El Principi de Predictivitat newtoniana diu que la dinàmica d'un sistema de N partícules puntuals aïllat(≠≠) està regida per un sistema d'equacions diferencials de segon ordre el qual, per a un referencial inercial qualsevol, es pot escriure com

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_a^i}{dt} &= v_a^i \\ \frac{dv_a^i}{dt} &= a_a^i(x_b^j, v_c^k; t) \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.1)$$

(≠) En alguns treballs recents (LL.78), (BM.79) i (LL.80) ha estat feta una extensió de la MRP al cas de partícules amb estructura: spin, multipols per a la massa i la carrega.

(≠≠) Per a sistemes no aïllats - sotmesos a forces exteriors -la M.R.P. també ha estat formulada. Veyeu la ref. (SM.76).

on x_a^i , v_a^i són les coordenades i velocitats de la partícula $\underline{a}$ $(a=1,2,..,N)$.

Aquest principi també pot ésser formulat dient que donades les posicions i velocitats del sistema en un instant inicial ~~-per~~ $t=o$, $(x_{ao}^i, v_{ao}^i) \equiv (x_o, v_o)$- hi ha una única trajectoria dinàmica:

$$x_a^i = \varphi_a^i(x_o, v_o; t)$$

tal que

$$\varphi_a^i(x_o, v_o; 0) = x_{ao}^i$$

$$\dot{\varphi}_a^i(x_o, v_o; 0) = v_{ao}^i \qquad (2.1.2)$$

Aquí $\dot{\varphi}_a^i$ indica la derivada temporal de φ_a^i i x_{bo}^j, v_{co}^k son constants.

Aquest és el significat de "Predictivitat newtoniana": qualsevol observador d'inèrcia pot determinar les línies d'univers de les partícules si coneix les posicions i velocitats de les partícules del sistema per a una configuració simultània en el seu sistema de referència, juntament amb les "forces" $a_a^i(x_b^j, v_c^k)$.

b) El Principi de Relativitat diu que el sistema dinàmic (2.1.1) ha d'ésser el mateix per a qualsevol observador d'inèrcia. Així, atés que els canvis de coordenades entre dos referencials inercial ve donat per una transformació de Poincaré, tindrem que si apliquen una d'aquestes a la solució de (2.1.1) corresponent a unes determinades condicions inicials, la trajectòria transformada també serà una solució de (2.1.1), corresponet a unes altres condicions inicials.

Matemàticament això vol dir que donada una transformació de Poincaré (de paràmetres $\Lambda^B = (L^\mu{}_\nu\,,\ A^\nu)$, B=1,..,10):

$$x_a^\mu \longrightarrow L^\mu{}_\nu\left(x_a^\nu - A^\nu\right) \qquad (2.1.3)$$

i unes condicions inicials ($x_{ao}^i,\ v_{bo}^j$), existeixen unes funcions:

$$\left.\begin{aligned} x'^i_{ao} &= f_a^i\left(x_0, v_0; \Lambda^B\right) \\ v'^i_{ao} &= g_a^i\left(x_0, v_0; \Lambda^B\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

tals que verifiquin:

$$L^i_j\left[\varphi_a^j(x_0, v_0; t) - A^j\right] + L^i_0\left(t - A^0\right) = \qquad (2.1.5)$$

$$= \varphi_a^i\left(x'_0, v'_0\,;\, L^0_j\left[\varphi_a^j(x_0, v_0; t) - A^j\right] + L^0_0\left(t - A^0\right)\right)$$

Aquesta definició cal completar-la dient que $\vec{v}_{ao}^{\,2} < 1$ - que suposem vàlida sempre - implica $\vec{v}_a^{\,2} < 1$ en tot el interval d'existència de la integral general.

<u>Definició</u>.- Direm que (2.1.1) és un <u>Sistema Predictiu Invariánt</u> sota el grup de Poincaré (S.P.I.) si satisfà (2.1.5).

Hem formulatací el principi de Relativitat demanant que la integral de (2.1.1) sigui invariant sota el grup de Poincaré. Si haguessim intentat formular la invariància del sistema diferencial (2.1.1) hauriem topat amb la dificultat de que les coordenades temporals de cada partícula no es transformen de la mateixa manera - com ès ben conegut estats de dues partícules que són simultanis per a un observador no ho són, en general, per a un altre;a més les transformacions de Lorentz barregen les coordenades espacials x_a^i i el temps t. Es per això, probablement, que sovint han estat considerats incompatibles els dos principis esmentats. Veurem ara que aquest no és el cas i que el principi de Relativitat solament imposa algunes restriccions sobre les posibles funcions $a_a^i(x_b^j, v_c^k; t)$.

Per a determinar les funcions f_a^i, g_a^i que apareixen a (2.1.4), definim T_a com la funció implícita (≠):

$$L^o_o(T_a - A^o) + L^o_j\left[\varphi_a^j(x_o, v_o; T_a) - A^j\right] = 0 \tag{2.1.6}$$

Posant ara t= T_a a l'equació (2.1.5) i a la que hom obté en derivar-la respecte a t , tenim:

$$\begin{aligned} x'^i_{ao} &= L^i_j\left[\varphi_a^j(x_o v_o; T_a) - A^j\right] + L^i_o(T_a - A^o) \\ v'^i_{ao} &= \left[L^i_j \dot\varphi_a^j(x_o v_o; T_a) + L^i_o\right]\left[L^o_j \dot\varphi_a^j(x_o v_o; T_a) + L^o_o\right]^{-1} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Vejam ara què ens diu (2.1.5) sobre els a_a^i . Derivant (2.1.5) dues vagades respecte a t, obtenim:

(≠) Aquesta funció implícita T_a pot ésser aïllada de (2.1.6) gràcies a la condició $\vec{v}_a^{\,2} < 1$, vàlida a tot el interval d'existència de les funcions φ_a^i .

$$L^i{}_j\,\ddot{\varphi}^j_a(x_0 v_0;t) = \ddot{\varphi}^i_a(x'_0 v'_0;t'_a)\left[L^0{}_0 + L^0{}_j\,\dot{\varphi}^j_a(x_0 v_0;t)\right]^2 +$$

$$+\dot{\varphi}^i_a(x'_0 v'_0;t'_a)\,L^0{}_j\,\ddot{\varphi}^j_a(x_0 v_0;t) \qquad (2.1.8)$$

$$t'_a \equiv L^0{}_0(t-A^0) + L^0{}_j\left[\varphi^j_a(x_0 v_0;t) - A^j\right]$$

Posem ara $t=A^0$; $A^i=0$; $L^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu$ (translació temporal). Tenint en compte que φ^i_a és la integral general de (2.1.1) tenim:

$$a^i_a\left(\varphi(x_0 v_0;A^0),\dot{\varphi}(x_0 v_0;A^0);A^0\right) = a^i_a\left(\varphi(x_0 v_0 A^0),\dot{\varphi}(x_0 v_0 A^0);0\right) \qquad (2.1.9)$$

on x_0, v_0, A^0 són arbitraris, i per tant:

$$\frac{\partial a^i_a}{\partial t} = 0 \qquad (2.1.10)$$

Anàlogament, considerant els altres tipus de transformacions que formen el grup de Poincaré, arribem a les equacions diferencials (BE.77):

$$\epsilon_b \frac{\partial a^i_a}{\partial x^j_b} = 0 \qquad (2.1.11)$$

$$\epsilon^i{}_{jk}\, a^j_a = \left(x^r_b \frac{\partial a^i_a}{\partial x^l_b} + v^r_b \frac{\partial a^i_a}{\partial v^l_b}\right)\epsilon^l{}_{rk} \qquad (2.1.12)$$

$$v_b^j (x_b^k - x_a^k) \frac{\partial a_a^i}{\partial x_b^j} + \left[a_b^j (x_b^k - x_a^k) + v_b^j v_b^k - \epsilon_b \delta^{jk} \right] \frac{\partial a_a^i}{\partial v_b^j} =$$

$$= 2 a_a^i v_a^k + a_a^k v_a^i \qquad (2.1.13)$$

De l'equació (2.1.10) tenim que les a_α^i no depenen del temps; de la (2.1.11) que tant sols depenen de les posicions relati ves, de la (2.1.12) que es comporten com vectors sota rotacions. Fins ací tot era d'esperar. Hem obtingut, a més, (2.1.13) la qual és deguda a la invariància sota transformacions de Lorentz pures. Aquestes són unes equacions noves, obtingudes per primera vegada per Currie (CU.76) i Hill(HI.67), encara que per un mètode no gaire satisfactori. Són equacions en de rivades parcials, de primer ordre i no lineals i hom les ha d'interpretar com unes condicions que ha de satisfer el sistema (2.1.1) per a ésser invariant relativista en el sentit que ací hem donat al principi de relativitat.

Fins ací hem demostrat que qualsevol S.P.I. satisfá (2.1.10-13). La recíproca és també certa: si a_a^i es solució de (2.1.10-13) llavors (2.1.1) és un S.P.I. La demostració és farragosa i hom pot trobar.la a (BE.77).

Per a demostrar que els dos principis de Predictivitat newtoniana i de Relativitat son compatibles, en hi ha prou amb veure que el sistema d'equacions diferencials en derivades potencials (2.1.10-13) admet solucions. De la teoria general per a sistemes d'aquests tipus es desprén que n'hi ha una gran varietat, com ja veurem amb mes detall en referir-nos a les condicions de contorn(/). Hom es podría preguntar també si entre aquestes solucions hi són les interaccions conegudes (electromagnètica, gravitatoria, etc.). La resposta és afirmativa i ens ocuparem del tema en altres capitols d'aquest treball.

Hom coneix bastantes solucions particulars - i exactes- de (2.1.10 -13) però cap d'elles no té una interpretación física acceptable. En camvi, mitjançant tècniques pertorbatives, la M.R.P. es manifesta com un marc teòric molt útil per a l'estudi de la dinàmica relativista de sistemes aïllats de partícules. En ser les equacions (2.1.13) no lineals per a les acceleracions, no és vàlid el principi de superposició de forces usual a la mecànica newtoniana i així hi apareixen d'una manera natural forces a tres partícules i més (//). Curiosament (2.1.13) no admet solucions que depenguin exclusivament de les posicions i qualsevol força ha de dependre de la velocitat.

(/) Veyeu la ref. (LA.76) on hi podeu trobar una familia molt general de solucions, i també la (BE.74) on hi son donades unes solucions particulars exactes en el formalisme manifestament invariant (apartat 2.2)

(//) En aplicar mètodes perturbatius hom veu que a primer ordre si que val el pincipi de superposició. Les forces a tres i més cossos apareixen en ordres superiors.

2.2. Formalisme manifestament invariant

A l'apartat anterior hem presentat una formulació de la MRP que exhibeix el seu caràcter predictiu, però que no és explicitament covariant. Aquí presentarem un formalisme que sí que ho és i que és equivalent a l'anterior (BE.74), (BE.77). Direm que un sisteme diferencial del tipus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha^\mu}{d\tau} &= \pi_\alpha^\mu \\ \frac{d\pi_\alpha^\mu}{d\tau} &= \Theta_\alpha^\mu(x_b^\nu, \pi_c^\rho) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

és el Resolvent de (2.1.1) sempre que -donades unes condicions inicials- les línies d'univers de cada partícula, solució de (2.2.1), coincideixin amb les trajectòries de cada partícula que ens dóna (2.1.1) (τ és un escalar Poincaré).

Les acceleracions a_a^i de (2.1.1) dependran en principi de paràmetres tals com les masses de les partícules, les càrregues elèctriques, etc. Nosaltres considerarem no un sol sistema (2.1.1) per uns valors donats de les masses, sino tota la familia que hom obté en donar tots els valors possibles (> 0) a les m_a. Si es necessari posarem explícitament la dependència en les m_a en la forma $a_a^i(x,v|m_b)$ i el mateix per φ_a^i . Ho fem així perquè desprès imposarem (2.2.4) que $\pi_\alpha^\mu \pi_{\alpha\mu} = -m_a^2$ i si volem que les quatre components de π_α^μ siguin variables independents, $\pi_\alpha^\mu \pi_{\alpha\mu}$ ha de poder prendre qualsevol valor.

Formulem matemàticament això que hem dit. Siguin $(z_\alpha^\mu, \omega_b^\nu) \equiv (z, \omega)$ unes condicions inicials de (2.2.1) -per $\tau = 0$- i sigui

$$\left.\begin{aligned} x_a^\mu &= \Phi_a^\mu(z,\omega;\tau) \\ \pi_a^\mu &= \dot{\Phi}_a^\mu(z,\omega;\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.2)$$

la integral general corresponent de (2.2.1) ($\dot{\Phi}$ vol dir derivade respecte de τ , a(z,ω) constants) .

Definició. Direm que (2.1.2) es el Resolvent de la familia de SPI (2.1.1) si :

$$\begin{aligned} \Phi_a^i(z,\omega;\tau) &= \varphi_a^i(x_0 v_0; t_a | m_b) \\ \Phi_a^0(z,\omega;\tau) &= t_a \end{aligned} \qquad (2.2.3)$$

on m_b, x_0, v_0, t_a venen donats de una manera evident (*) en funció de z,w,τ per :

$$m_b = \left(-\omega_b^\mu \omega_{b\mu}\right)^{1/2} \qquad (2.2.4)$$

x_0, v_0 són definits implícitament per

$$\begin{aligned} z_a^i &= \varphi_a^i(x_0 v_0; z_a^0 | m_b) \\ \frac{\omega_a^i}{\omega_a^0} &= \dot{\varphi}_a^i(x_0 v_0; z_a^0 | m_b) \end{aligned} \qquad (2.2.5)$$

(*) (2.2.4) ens diu que cada línia d'univers està parametritzada amb el seu temps propi dividit per la massa de la partícula. (x_0,v_0) corresponen a t=0, i (z_a^i,ω_a^i/ω_a^0) corresponen a t=z_a^0, per tant tenim (2.2.5). Per t=z_a^0, τ =0 i per t=t_a ha passat un temps propi τ ; de la relació estre t i τ surt (2.2.6).

i t_a és definit també implícitament per

$$\tau = \frac{1}{m_a}\int_{z_a^0}^{t_a}\left[1-\dot{\varphi}_a^i\dot{\varphi}_{ai}(x_0 v_0;t|m_b)\right]^{1/2}dt \qquad (2.2.6)$$

La notació referida al SPI (2.1.1) es idèntica a la del apartat 2.1. Solsament hem fet constar explícitament la dependència en les masses.

Enunciarem ara alguns teoremes, referits al Resolvent d'un SPI, sense donar la demostració, que pot ésser trobada amb detall a (BE.77).

<u>Teorema 1</u>. El Resolvent d'un SPI existeix i és únic. Les funcions θ_a^μ venen donades per:

$$\theta_a^i(z,\omega) = (\omega_a^0)^2\left(\delta^i_j + m_a^{-2}\omega_a^i\omega_{aj}\right)\ddot{\varphi}_a^j(x_0 v_0;z_a^0|m_b) \qquad (2.2.7)$$

$$\theta_a^0(z,\omega) = m_a^{-2}(\omega_a^0)^3\,\omega_{aj}\,\ddot{\varphi}_a^j(x_0 v_0;z_a^0|m_b)$$

on m_b, x_o, v_o venen donats en funció de z,ω per (2.2.4) i (2.2.5).

Observem que les θ_a^μ venen donades no en funció de les a_a^i sino de la integral general φ_a^i de (2.1.1); això fa que el pas del formalisme predictiu al formalisme invariant -de (2.1.1) a (2.2.1)- sigui molt complicat; prèviament hom ha d'integrar (2.1.1). Com veurem, el pas invers és molt més senzill. Aquesta és una de les raons per les quals utilitzem el formalisme invariant preferentment al predictiu.

<u>Teorema 2</u>. La integral general d'un sisteme Resolvent qualsevulla verifica:

$$\dot{\Phi}^{\mu}_{a}\, \dot{\Phi}_{a\mu}(z,\omega;\tau) = \omega^{\mu}_{a}\,\omega_{a\mu} \tag{2.2.8}$$

$$\Phi^{\mu}_{a}\left[\Phi_b(z,\omega;\tau_b),\Phi_c(z,\omega;\tau_c);\tau\right] = \Phi^{\mu}_{a}(z,\omega;\tau_a+\tau)\,,\ \forall\tau_b \tag{2.2.9}$$

$$\Phi^{\mu}_{a}\left[L^{\nu}{}_{\lambda}(z^{\lambda}_{b}-A^{\lambda}),L^{\rho}{}_{\sigma}\,\omega^{\sigma}_{c}\ ;\tau\right] = L^{\mu}{}_{\nu}\left[\Phi^{\nu}_{a}(z,\omega;\tau)-A^{\nu}\right] \tag{2.2.10}$$

qualsevulla que sigui la transformació de Poincaré ($L^{\mu}{}_{\nu}$, A^{λ}). Aquestes relacions són equivalents a les equacions següents per Θ^{μ}_{a} :

$$\Theta^{\mu}_{a}(x,\pi)\,\pi_{a\mu} = 0 \tag{2.2.11}$$

$$\pi^{\nu}_{a'}\frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial x^{a'\nu}} + \Theta^{\nu}_{a'}\frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial \pi^{a'\nu}} = 0 \tag{2.2.12}$$

$$\epsilon_b\,\frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial x^{\nu}_{b}} = 0 \tag{2.2.13}$$

$$\frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial x^{\nu}_{b}}x_{b\lambda} - \frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial x^{\lambda}_{b}}x_{b\nu} + \frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial \pi^{\nu}_{b}}\pi_{b\lambda} - \frac{\partial\Theta^{\mu}_{a}}{\partial \pi^{\lambda}_{b}}\pi_{b\nu} = \eta^{\mu}_{\nu}\,\Theta_{a\lambda} - \eta^{\mu}_{\lambda}\,\Theta_{a\nu} \tag{2.2.14}$$

En el denominador de (2.2.12) hem pujat l'índex a' per a indicar que el conveni de la suma no l'afecta.

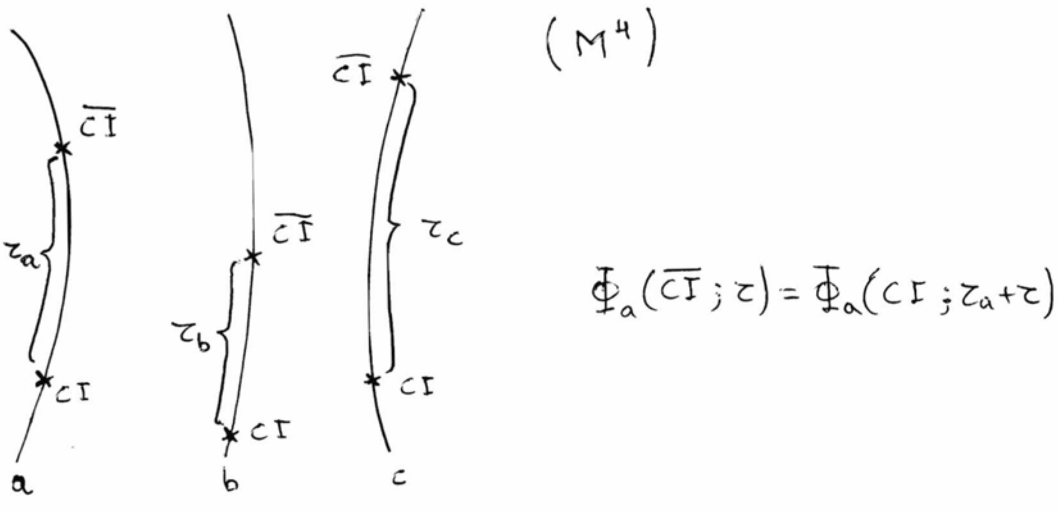
Les equacions (2.2.8) -o (2.2.11)- ens diuen que $\pi^{\mu}_{a}\pi_{a\mu}$ és una integral primera del moviment, que podem identificar amb la massa de la partícula a.

Les equacions (2.2.10) -o bé (2.2.13) i (2.2.14)- ens diuen que Θ^{μ}_{a} es comporta com un quadrivector que depèn de les coordenades relatives (i de les quadrivelocitats π^{μ}_{a}).

Tot això era de esperar. A més hem obtingut coses noves. (2.2.9) vol dir que la familia N-paramètrica de transformacions

$$\left.\begin{aligned} x_a^\mu &= \Phi_a^\mu(z,\omega;\tau_a) \\ \pi_a^\mu &= \dot{\Phi}_a^\mu(z,\omega;\tau_a) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.15)$$

de l'espai de les fases $(TM^4)^N$ sobre ell mateix, és la realització d'un grup abelià. Aquestes transformacions corresponen a canviar les condicions inicials, traslladant-les arbitràriament sobre les línies d'univers de les partícules solució de (2.2.1). L'equació (2.2.9) diu que la solució que correspon a les condicions inicials traslladades és la mateixa que abans, modificant tan sols l'argument τ .



Les equacions per a la Θ_a^μ que expressen el caràcter abelià d'aquest grup de transformacions són les (2.2.12), les quals anomenarem <u>equacions de la Predictivitat</u> o <u>equació de Droz-Vincent</u> (DR.70).

Hem introduït fins ara dos formalismes, el manifestament predictiu i el invariant. Sabem passar del primer al segon. Per veure la seva equivalència cal saber passar del segon al primer de forma única. Això queda garantit per les definicions i teoremes que segueixen, i que es poden trobar a (BE.77).

Definició 1. Un sistema de la forma (2.2.1) direm que és un Sistema Invariant Projectable (SIP) si les Θ_a^μ verifiquen les equacions (2.2.11)-(2.2.14).

Definició 2. El Sistema Associat a un Sistema Invariant Projectable és un sistema del tipus (2.1.1) tal que la seva integral general "coincideix" amb la del SIP considerat. Es a dir, si

$$\varphi_a^i(x_0 v_0; t(m_b)) = \Phi_a^i(z, \omega; \tau_a) \qquad (2.2.16)$$

on z, ω, τ_a venen donats clarament en funció de x_o, v_o, t, m_b per:

$$z_b^\mu = (0, x_{b0}^i) \qquad \omega_b^\mu = m_b(1 - \vec{v}_{b0}^{\,2})^{-1/2}(1, v_{b0}^i) \qquad (2.2.17)$$

i τ_a està definit implícitament per

$$t = \Phi_a^0(z, \omega; \tau_a) \qquad (2.2.18)$$

Podem enunciar ara els Teoremes següents:

Teorema 1. El Siatema Associat a un Sistema Invariant Projectable existeix i és únic; és una família de sistemes predictius invariants (parametritzats per les masses). Les acceleracions a^i_a del Sistema Associat venen dades en termes de les θ^μ_α del SIP per:

$$a^i_a(x_0 v_0 | m_b) = m_a^{-2}(1-\vec{v}_{a0}^{\,2})\left(\delta^i{}_j - v^i_{a0} v_{a0j}\right)\theta^j_\alpha(z,\omega) \qquad (2.2.19)$$

on z, ω venen donats en termes de x_o, v_o, m_b per (2.2.17).

A diferència del pas invers, aquí les a^i_a estàn dades solsament en termes de les θ^μ_α, i de manera molt senzilla.

Teorema 2. Donat un Sistema Invariant Projectable, construim el seu Sistema Associat; a partir d'aquest ens construim el seu Resolvent. Aquest últim coincideix amb el SIP de partida.

Teorema 3. Donada una família de sistemes predictius invariants parametritzats amb les masses, construim el seu Resolvent, que tindrà un cert Sistema Associat. Aquest últim coincideix amb el SPI de partida.

Amb això queda completada la demostració de l'equivalència de les dues formulacions de la Mecànica Relativista Predictiva. Hom pot trobar demostracions parcials d'aquesta equivalència general a la referència (FL.78). Sabem també passar d'un formalisme a l'altre, i coneixem moltes de les seves propietats.

2.3. Formalisme multitemporal.

Es una variant equivalent del formalisme manifestament invariant; té l'aventatge de posar més de manifest encara la naturalesa de les equacions de la predictivitat (2.2.12). Aquest formalisme fou introduit per Droz-Vincent (DR.70).

Treballem a l'espai de les fases del sistema de N partícules, $(TM^4)^N$, on TM^4 és el fibrat tangent a l'espai de Minkowsky M^4 . A partir del sistema diferencial (2.2.1) ens construim els N camps de vectors tangents a l'espai de les fases,

$$\vec{H}_a = \delta_{ab}\, \pi_b^\mu \frac{\partial}{\partial x_b^\mu} + \Theta_b^\mu(x,\pi) \frac{\partial}{\partial \pi_b^\mu} \qquad (2.3.1)$$

$\vec{H}_a$ trasllada la partícula a sobre la seva línia d'univers i deixa les altres inalterades (degut a δ_{ab}). Per tant $\vec{H}_a$ deriva parcialment respecte del"temps propi" (≠) de la partícula a ($\vec{H}_a = \partial/\partial\tau_a$). Els N camps $\vec{H}_a$ són els generadors infinitesimals del grup abelià N-paramètric de transformacions de $(TM^4)^N$, (2.2.15). Amb l'ajut dels camps $\vec{H}_a$, el sistema diferencial (2.2.1) s'escriu:

$$\left.\begin{aligned} \vec{H}_b\, x_a^\mu &= \delta_{ab}\, \pi_a^\mu \\ \vec{H}_b\, \pi_a^\mu &= \delta_{ab}\, \Theta_a^\mu(x,\pi) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2)$$

(≠) Per "temps propi" τ_a de la partícula a entenem un múltiple constant de l'esmentat temps propi; la constant multiplicativa la prendrem sempre igual a l'inversa de la massa de la partícula considerada, m_a^{-1} .

Ara, però, (2.3.2) és un sistema d'equacions diferencials en derivades parcials, amb N variables $\tau_1, \dots, \tau_N$. Les condicions d'integrabilitat d'un tal sistema obliguen a que l'àlgebra dels camps $\vec{H}_a$ sigui tencada (veure (HI.73) pàg. 155):

$$[\vec{H}_a, \vec{H}_b] = C^c_{ab}(x,\pi)\,\vec{H}_c \qquad (2.3.3)$$

El fet de que els $\vec{H}_a$ siguin els generadors d'un grup fa que les $C^c_{ab}(x,\pi)$ siguin constants -les constants d'estructura del grup- i el caràcter abelià d'aquest obliga a que $C^c_{ab}=0$. Però és fàcil veure que

$$[\vec{H}_a, \vec{H}_{a'}] = 0 \iff \pi^\nu_{a'} \frac{\partial \Theta^\mu_a}{\partial x^{a'\nu}} + \Theta^\nu_{a'} \frac{\partial \Theta^\mu_a}{\partial \pi^{a'\nu}} = 0 \qquad (2.3.4)$$

Aquesta és l'interpretació última de les equacions de la predictivitat; traslladar una partícula sobre la seva línia d'univers (a TM^4) no afecta a les altres partícules en el sentit de que, si prenem com a condicions inicials de (2.3.2) la nova configuració, obtenim les mateixes trajectòries.

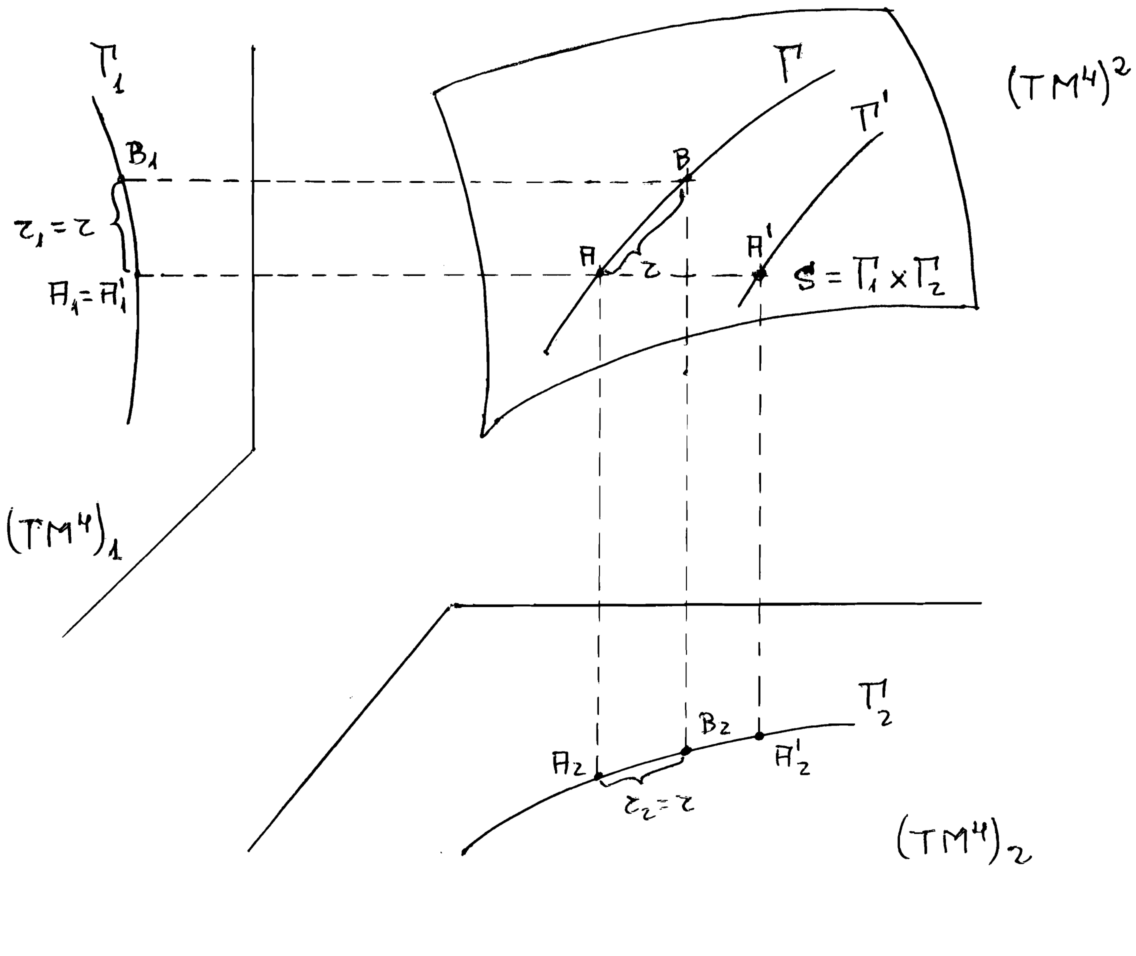
Observem que la integral general de (2.3.2) a $(TM^4)^N$ és una subvarietat S de dimensió N:

$$\left.\begin{aligned} x^\mu_a &= \Phi^\mu_a(z,\omega;\tau_a) \\ \pi^\mu_a &= \dot{\Phi}^\mu_a(z,\omega;\tau_a) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.5)$$

on cada x^μ_a, π^μ_a depén solament de τ_a , però tenim N paràmetres $\tau_1, \dots, \tau_N$. La projecció d'aquesta subvarietat

S sobre l'espai de les fases de cada partícula, $(TM^4)_a$, ens dóna la trajectòria Γ_a de la partícula a, que és una corba unidimensional parametritzada amb τ_a , com hem vist més amunt fa un moment. La subvarietat S és per tant el producte cartesià de les trajectòries de les N partícules: $S = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_N$ (vegeu la figura següent).

En canvi, la solució de (2.2.1) és una corba Γ de $(TM^4)^N$, naturalment continguda dins de S, que correspòn a un determinat "aparellament" dels punts de les corbes Γ_1, ..., Γ_N . Com és fa aquest "aparellament"? Cal recordar tan sols que $d/d\tau = \epsilon^a \vec{H}_a$. A partir de les condicions inicials -que determinen un punt $A \in \Gamma \subset S$- deixem que totes les partícules evolucionin la mateixa quantitat de "temps propi" i el punt així obtingut pertany també a Γ . Es a dir, fem numèricament $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_N = \tau$.



La figura mostra la situació descrita abans per a dues partícules. Si les condicions inicials corresponen a punts diferents de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ (A i A'), obtenim diferents aparellaments dels punts de Γ_1 i Γ_2 .

A $(TM^4)^N$ tenim una realització trivial del grup de Poincaré posant:

$$x'^{\mu}_a = L^{\mu}{}_{\nu}(x^{\nu}_a - A^{\nu}) \quad , \quad \pi'^{\mu}_a = L^{\mu}{}_{\nu}\pi^{\nu}_a \tag{2.3.6}$$

on $(L^{\mu}{}_{\nu}, A^{\nu})$ és una transformació de Poincaré actuant a M^4. Els generadors d'aquestes transformacions són:

$$\vec{P}_{\mu} = -\epsilon_a \frac{\partial}{\partial x^{\mu}_a} \tag{2.3.7}$$

$$\vec{J}_{\mu\nu} = \left(\eta^{\lambda}_{\mu}\eta_{\nu\rho} - \eta^{\lambda}_{\nu}\eta_{\mu\rho}\right)\left(x^{\rho}_a \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}_a} + \pi^{\rho}_a \frac{\partial}{\partial \pi^{\lambda}_a}\right) \tag{2.3.8}$$

$\vec{P}_{\mu}$ són els generadors de les translacions i $\vec{J}_{\mu\nu}$ són els generadors del grup de Lorentz. Si a més tenim un sistema diferencial predictiu invariant del tipus (2.2.1) sabem que les transformacions (2.2.15) formen un grup abelià a N paràmetres. Els seus generadors són els N camps de vectors $\vec{H}_a$ introduits a (2.3.1). Les equacions (2.2.11)-(2.2.14), que ens diuen que el sistema diferencial és predictiu i invariant Poincaré, poden ésser escrites en termes d'aquests generadors com:

$$[\vec{P}_{\mu}, \vec{H}_a] = 0 \qquad [\vec{J}_{\mu\nu}, \vec{H}_a] = 0 \tag{2.3.9}$$

$$\left[\vec{H}_a , \vec{H}_{a'} \right] = 0 \qquad (2.3.10)$$

$$\pounds(\vec{H}_a)\left(\pi_b^{\mu}\pi_{b\mu}\right) = 0 \qquad (2.3.11)$$

on $[\ ,\ ]$ és el claudàtor de Lie dels camps considerats i $\pounds(\vec{H}_a)$ és la derivada de Lie segons el camp $\vec{H}_a$.

Les equacions (2.3.9) i (2.3.10) ens diuen que els 10+N camps de vectors $\vec{P}_\mu$, $\vec{J}_{\mu\nu}$, $\vec{H}_a$ generen una àlgebra de Lie que és una extensió abeliana trivial de l'àlgebra de Poincaré; anomenarem Grup Complet de Simstria del sistema dinàmic considerat al grup de transformacions de $(TM^4)^N$ generat per aquesta àlgebra de Lie.

A partir d'ara, vista l'equivalència dels tres formalismes de la MRP, anomenarem Sisteme Predictiu Invariant (SPI) tant a un sisteme de la forma (2.1.1) com a un de la forma (2.2.1) o (2.3.2).

2.4. Formes Hamiltonianes.

L'interès d'una formulació hamiltoniana de la MRP resideix en que permet de definir sens ambigüetat el quadrimoment lineal i el tensor moment angular d'un sistema dinàmic. Per altra part, tan sols sabem construir efectivament la Mecànica Quàntica i la Mecànica Estadística a partir del formalisme hamiltonià.

Sigui Ω una forma simplèctica sobre $(TM^4)^N$ i sigui $\vec{\xi}$

un camp de vectors sobre TM^4 que deixi Ω invariant (≠):

$$\mathcal{L}(\vec{\xi})\,\Omega = 0 \qquad (2.4.1)$$

Localment (lema de Poincaré) podem associar a aquest $\vec{\xi}$ una funció $F(\vec{\xi})$, definida unívocament amb l'excepció d'una constant aditiva, per la condició (veure (GO.69), pàg. 128):

$$i(\vec{\xi})\,\Omega = -\,d\,F(\vec{\xi}) \qquad (2.4.2)$$

on i(-) és el producte interior i d la diferencial exterior.

Inversament, per tal com Ω és de rang màxim, hom pot associar a cada funció f sobre $(TM^4)^N$ un camp de vectors $\vec{X}_f$ tal que

$$i(\vec{X}_f)\,\Omega = -\,df \qquad (2.4.3)$$

Es trivial demostrar que Ω és invariant per aquest $\vec{X}_f$.

La correspondència (2.4.3) permet de definir el parèntesi de Poisson de dues funcions ((GO.69), pàg. 126):

$$\{f,g\} = \Omega(\vec{X}_f,\vec{X}_g) = \vec{X}_f(g) \qquad (2.4.4)$$

el qual, gràcies a que Ω és tancada, gaudeix de la propietat següent que ens serà molt útil:

$$d\,\{F(\vec{\xi}_1),F(\vec{\xi}_2)\} = d\,F([\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2]) \qquad (2.4.5)$$

(≠) Una forma simplèctica és una forma diferencial d'ordre 2, tancada -es a dir, $d\Omega=0$- i de rang màxim. En coordenades hom expressa aquesta condició dient que si $\Omega=\sum_{i<j}\Omega_{ij}\,dq^i\wedge dq^j$, llavors $\det(\Omega_{ij})\neq 0$.

Per les raons exposades, donada una forma simplèctica invariant pel grup de Poincaré, l'equació (2.4.2) ens permetrà de definir -amb l'excepció de constants aditives- el quadrimoment lineal i el tensor moment angular del sistema.

Donat un sistema predictiu (2.2.1), direm que Ω és una Forma Hamiltoniana (BM.75) si és una forma simplèctica invariant pel Grup Complet de Simetria del SPI considerat. Es a dir, si

$$\mathcal{L}(\vec{P}_\mu)\,\Omega = 0 \qquad \mathcal{L}(\vec{J}_{\mu\nu})\,\Omega = 0 \tag{2.4.5}$$

$$\mathcal{L}(\vec{H}_a)\,\Omega = 0 \tag{2.4.6}$$

Aquestes equacions diferencials sobre Ω, cal completar-les amb una condició de contorn que determini una única solució. Tornarem més endavant sobre aquest punt.

Donada una forma hamiltoniana, podem associar funcions P_μ , $J_{\mu\nu}$, H_a a cada un dels 10+N generadors $\vec{P}_\mu$, $\vec{J}_{\mu\nu}$, $\vec{H}_a$ del grup complet de simetria. Aquestes funcions estan definides excepte constants aditives per (2.4.2); Però per al grup de Poincaré (de generadors $\vec{P}_\mu$, $\vec{J}_{\mu\nu}$) és ben conegut que aquestes constants queden determinades de forma única per la condició de que els Parèntesis de Poisson d'aquestes funcions verifiquin les mateixes relacions que els conmutadors (claudàtors de Lie) dels generadors corresponents (SM.74):

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0 \tag{2.4.7}$$

$$\{J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}\} = \eta_{\mu\lambda} J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\rho} \tag{2.4.8}$$

$$\{P_\mu, J_{\nu\lambda}\} = \eta_{\mu\lambda} P_\nu - \eta_{\mu\nu} P_\lambda \tag{2.4.9}$$

Hom demostra fàcilment també que (BM.75):

$$\{P_\mu , H_a\} = 0 \qquad \{J_{\mu\nu} , H_a\} = 0 \tag{2.4.10}$$

$$\{H_a , H_{a'}\} = 0 \tag{2.4.11}$$

Per (2.4.3) això significa que els P_μ , $J_{\mu\nu}$ (i també H_a (≠)) són constants del moviment del SPI considerat. Les equacions (2.4.7)-(2.4.9) mostren com P_μ es comporta com un quadrivector i $J_{\mu\nu}$ com un tensor de segon ordre antisimètric, sota transformacions de Poincaré. Els anomenarem, respectivament, <u>quadrimoment lineal</u> i <u>tensor moment angular</u> del SPI considerat.

Donat un SPI, hom pot calcular les funcions P_μ , $J_{\mu\nu}$ directament sense el càlcul previ de la forma hamiltoniana Ω mitjansant les equacions (2.4.7)-(2.4.10) que, utilitzant (2.4.3) donen:

$$\mathcal{L}(\vec{P}_\nu)\, P_\mu = 0 \qquad \mathcal{L}(\vec{J}_{\nu\lambda})\, P_\mu = \eta_{\nu\mu} P_\lambda - \eta_{\lambda\mu} P_\nu \tag{2.4.12}$$

$$\mathcal{L}(\vec{H}_a)\, P_\mu = 0 \tag{2.4.13}$$

L'equació (2.4.12) diu simplement que P_μ es comporta com un quadrivector invariant per traslacions sota transformacions de Poincaré.

(≠) H_a en canvi, no queda determinat per (2.4.10) i (2.4.11) i hom li pot sumar una constant aditiva arbitrària.

$$\left.\begin{aligned} \pounds(\vec{P}_\lambda)\, J_{\mu\nu} &= \eta_{\lambda\nu} P_\mu - \eta_{\lambda\mu} P_\nu \\ \pounds(\vec{J}_{\lambda\rho})\, J_{\mu\nu} &= \eta_{\lambda\mu} J_{\rho\nu} + \eta_{\rho\nu} J_{\lambda\mu} - \eta_{\lambda\nu} J_{\rho\mu} - \eta_{\rho\mu} J_{\lambda\nu} \end{aligned}\right\} \tag{2.4.14}$$

$$\pounds(\vec{H}_a)\, J_{\mu\nu} = 0 \tag{2.4.15}$$

Igualment, (2.4.14) ens diu que $J_{\mu\nu}$ es comporta com un tensor antisimètric de segon ordre sota transformacions de Poincaré. Com abans, aquestes equacions diferencials han d'ésser complementades amb una condició de contorn que determini una solució única.

Considerem per exemple el cas de <u>partícules lliures</u>, $\Theta_a^\mu = 0$. La forma simplèctica

$$\Omega^{(0)} = \epsilon^a \eta_{\mu\nu}\, dx_a^\mu \wedge d\pi_a^\nu \tag{2.4.16}$$

verifica (2.4.5) i (2.4.6). Els $P_\mu^{(0)}$, $J_{\mu\nu}^{(0)}$ venen donats per:

$$P_\mu^{(0)} = \epsilon^a \pi_{a\mu} \quad ; \quad J_{\mu\nu}^{(0)} = \epsilon^a (x_{a\mu}\pi_{a\nu} - x_{a\nu}\pi_{a\mu}) \tag{2.4.17}$$

Les funcions H_a les agafem

$$H_a^{(0)} = -\frac{1}{2} \pi_a^\mu \pi_{a\mu} \equiv \frac{1}{2} \pi_a^2 \tag{2.4.18}$$

on hem pres la constant arbitrària igual a zero.

Es raonable esperar que la interacció d'un sistema de partícules tendeixi cap a zero més o menys ràpidament a mesura que la distància espacial que les separa tendeix cap a l'infinit (excepte en casos com l'oscil.lador harmònic, on la força creix amb la distància). Formulem-ho rigurosament. Sigui $f(x,\pi)$ una funció qualsevulla. Definim l'operador $R_a(\lambda)$ per:

$$R_a(\lambda) f(x_a^\mu, x_{a'}^\nu, \pi_b^\rho) = f(x_a^\mu + \lambda \pi_a^\mu, x_{a'}^\nu, \pi_b^\rho) \tag{2.4.19}$$

Direm que <u>f tendeix cap a zero a l'infinit passat</u> (o futur) i escriurem

$$\lim_{x^2 \to \infty\, p(f)} f = 0 \tag{2.4.20}$$

sempre que:

$$\lim_{\mu \to -\infty\,(+\infty)} R_1(h_1\mu)\cdot \ldots \cdot R_N(h_N\mu) f = 0 \tag{2.4.21}$$

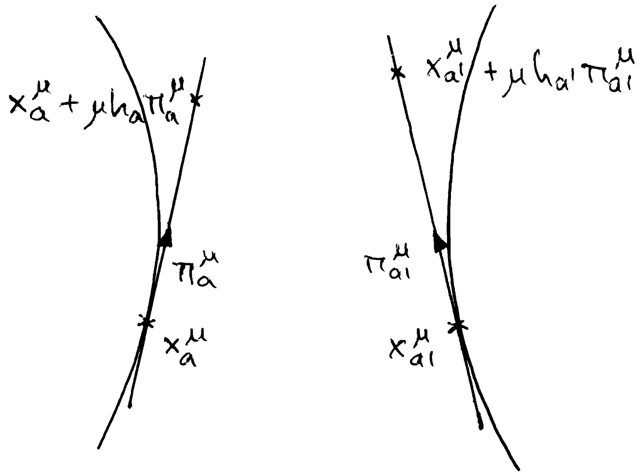
per tots els valors de $h_a > 0$ tals que

$$\left.\begin{aligned} & K_{aa'} - \Lambda_{aa'} < \frac{\pi_a^2 h_a}{h_{a'}} < K_{aa'} + \Lambda_{aa'} \\ & K_{aa'} = -\pi_a^\mu \pi_{a'\mu} \; ; \; \Lambda_{aa'}^2 = K_{aa'}^2 - \pi_a^2 \pi_{a'}^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.4.22}$$

Aquestes condicions surten de que volem un límit tal que l'interval entre les partícules tendeixi cap a $+\infty$. Per a μ molt gran, tenim:

$$\left(x_a^\mu + \mu h_a \pi_a^\mu - x_{a'}^\mu - \mu h_{a'} \pi_{a'}^\mu\right)^2 \sim \mu^2 \left(h_a \pi_a^\mu - h_{a'} \pi_{a'}^\mu\right)^2 \tag{2.4.23}$$

i demanar $(h_a \pi_a^\mu - h_{a'} \pi_{a'}^\mu)^2 > 0$ dóna (2.4.22). Es clar que si $x^2 = -(x^0)^2 + (\vec{x})^2 \to \infty \Rightarrow |\vec{x}| \to \infty$ que és el que voliem. Aquest límit consisteix en traslladar cada partícula al llarg de la tangent a la trajectòria, com mostra la figura:



El nom d'infinit passat (futur) ve de que x_a^0 passa a $x_a^0 + \mu h_a \pi_a^0$ i com que $h_a, \pi_a^0 > 0$, si $\mu \to -\infty\ (+\infty)$, $x_a^0 \to -\infty\ (+\infty)$ Es clar que si $\pi_a^\mu \parallel \pi_{a'}^\mu$, per molt que ens allunyem sobre les tangents no augmentarem la distància espacial entre a i a'. Però aquest cas està exclòs ja que $\pi_a^\mu \parallel \pi_{a'}^\mu \Leftrightarrow \Lambda_{aa'} = 0$, que no està permés per (2.4.22).

Direm que un SPI és Separable si

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(f)}} \theta_a^\mu = 0 \tag{2.4.24}$$

Direm que Ω és una Forma Hamiltoniana a l'infinit passat (futur) si

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(f)}} \left(\Omega - \Omega^{(0)} \right) = 0 \tag{2.4.25}$$

on $\Omega^{(0)}$ correspon a partícules lliures i ve donade per (2.4.1
Hom ha d'entendre aquest límit com que cada component tensorial de $\Omega - \Omega^{(0)}$ tendeix cap a zero.

Les equacions (2.4.12)-(2.4.15) es poden complementar també amb una condició de contorn d'aquest tipus:

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(f)}} \left(P_\mu - P_\mu^{(0)}\right) = 0 \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(f)}} \left(J_{\mu\nu} - J_{\mu\nu}^{(0)}\right) = 0 \tag{2.4.26}$$

Un sistema de coordenades Canòniques d'una 2-forma hamiltoniana Ω és un sistema de coordenades (q_a^μ, p_a^μ) de $(TM^4)^N$ tal que:

$$\Omega = \epsilon^a \eta_{\mu\nu}\, dq_a^\mu \wedge dp_a^\nu \tag{2.4.27}$$

Direm que les coordenades canòniques (q_a^μ , p_a^μ) són adaptades si es verifica:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\vec{P}_\nu)\, q_a^\mu = -\eta^\mu_\nu \quad ; \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\nu\lambda})\, q_a^\mu = \eta^\mu_\nu q_{a\lambda} - \eta^\mu_\lambda q_{a\nu} \\ &\mathcal{L}(\vec{P}_\nu)\, p_a^\mu = 0 \quad ; \quad \mathcal{L}(\vec{J}_{\nu\lambda})\, p_a^\mu = \eta^\mu_\nu p_{a\lambda} - \eta^\mu_\lambda p_{a\nu} \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Aquestes equacions diuen senzillament que $q_a^\mu - x_a^\mu$ i p_a^μ són quadrivectors invariants sota el grup de Poincaré.

Finalment direm que (q_a^μ, p_a^μ) són un sistema de coordenades de Hamilton-Jacobi si són coordenades adaptades i verifiquen a més

$$\mathcal{L}(\vec{H}_b)\, q_a^\mu = \delta_{ab}\, p_a^\mu \quad ; \quad \mathcal{L}(\vec{H}_b)\, p_a^\mu = 0 \tag{2.4.29}$$

Si tenim una forma hamiltoniana a l'infinit passat Ω_p (futur Ω_f) direm que un sistema de coordenades adaptat és regular a l'infinit passat (futur) si

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(t)}} \left(p_a^\mu - \pi_a^\mu \right) = 0 \qquad \lim_{x^2 \to \infty_{p(t)}} \left(q_a^\mu - x_a^\mu \right) = 0 \tag{2.4.30}$$

Aquestes condicions, junt amb (2.4.28) i (2.4.29) determinen una solució única per les (q_a^μ , p_a^μ) en el marc de la teoria de perturbacions. Si la interacció és de llarg abast -com és el cas per a la interacció electromagnètica- la condició (2.4.30) per a les q_a^μ no pot ésser satisfeta i hom ha de substituir-la per una altra més febla com

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(t)}} \frac{1}{x} \left(q_a^\mu - x_a^\mu \right) = 0 \quad , \begin{cases} x = (x^\mu x_\mu)^{1/2} \\ x^\mu = x_a^\mu - x_{a'}^\mu \end{cases} \tag{2.4.31}$$

Aquesta condició ja no determina unívocament les q_a^μ . Estudiarem amb més detall aquest cas al capítol dedicat a la interacció electromagnètica.

Les coordenades adaptades -i en particular las de Hamilton-Jacobi- permeten calcular automàticament P_μ , $J_{\mu\nu}$:

$$P_\mu = \epsilon^a p_{a\mu} \quad ; \quad J_{\mu\nu} = \epsilon^a \left(q_{a\mu} p_{a\nu} - q_{a\nu} p_{a\mu} \right) \tag{2.4.32}$$

Aquestes coordenades són també molt útils per a la quantificació del sistema.

Si les coordenades de Hamilton-Jacobi verifiquen la condició de contorn (2.4.30) hom demostra fàcilment la igualtat

$$p_a^{\mu} p_{a\mu} = -\pi_a^2 \qquad (2.4.33)$$

que ens serà d'utilitat més endavant.

2.5. Equacions integrals. Teoria de perturbacions.

Considerem els operadors diferencials

$$D_a = \pi_a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{a\mu}} \qquad (2.5.1)$$

que són una part de $\vec{H}_a = D_a + \theta_a^{\mu}\, \partial/\partial\pi^{a\mu}$. La majoria d'equacions diferencials en derivades parcials considerades fins ara - equacions de la predictivitat $\vec{H}_a \cdot \theta_a^{\mu} = 0$ (2.3.4); equacions (2.4.14) i (2.4.16) per a P_{μ} , $J_{\mu\nu}$; equacions (2.4.29) per a les coordenades de Hamilton-Jacobi - són del tipus:

$$D_{a_i} f^A = G^A_{a_i} \qquad \begin{cases} i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, s \leq N \\ A, B, \ldots = 1, 2, \ldots, r \end{cases} \qquad (2.5.2)$$

on les funcions $G^A_{a_i}$ depenen de les funcions incògnites f^A i de les seves derivades primeres respecte de les variables (x, π). Transformarem ara les equacions (2.5.2), amb certes condicions de contorn, en equacions integro-funcionals, que es manifestaràn particularment adequades per a resoldre (2.5.2) mitjançant un mètode pertorbatiu.

Aquestes tècniques foren introduïdes per D. Hirondel

(HI.74) i posades en la forma que aquí presentem per Bel i Fustero (BF.76). Estàn fonamentades en les següents propietats dels operadors D_a (2.5.1) i $R_a(\lambda)$ (2.4.20):

$$[D_a, D_b] = 0 \quad ; \quad [R_a(\lambda_a), R_b(\lambda_b)] = 0$$

$$R_a(\lambda) R_a(\mu) = R_a(\lambda+\mu) \; ; \; \frac{\partial}{\partial\lambda} R_a(\lambda) = R_a(\lambda) D_a = D_a R_a(\lambda) \qquad (2.5.3)$$

Enunciarem sense demostració els resultats següents, que hom pot trobar detallats a (BF.76).

<u>Teorema 1</u>. Si f^A és solució de les equacions diferencials (2.5.2) i verifica les condicions de contorn

$$\prod_{i=1}^{s} R_{a_i}(\varsigma_{a_i}) f^A = \overset{*}{f}{}^A \qquad (2.5.4)$$

on ς_{a_i}, $\overset{*}{f}{}^A$ són funcions conegudes de (x, π), llavors f^A és solució de les condicions d'integrabilitat

$$D_{a_i} G^A_{a_j} = D_{a_j} G^A_{a_i} \qquad (2.5.5)$$

i de les equacions integro-funcionals següents:

$$f^A = \overset{*}{f}{}^A - \sum_{j=1}^{s} \varsigma_{a_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} R_{a_i}(\lambda \varsigma_{a_i}) G^A_{a_j} \qquad (2.5.6)$$

<u>Teorema 2</u>. (Recíproca parcial del teorema 1) Si f^A és solució de les equacions (2.5.5) i (2.5.6) i les ς_{a_i}, $\overset{*}{f}{}^A$ verifiquen

$$D_{a_i} \zeta_{a_j} = -\delta_{ij} \tag{2.5.7}$$

$$D_{a_i} \overset{*}{f}{}^A = 0 \tag{2.5.8}$$

Llavors f^A és solució de les equacions diferencials (2.5.2) i satisfà les condicions de contorn (2.5.4).

Teorema 3. Si f^A és solució de les equacions diferencials (2.5.2) amb s=N i satisfà les condicions assimptòtiques

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(f)}} \left(f^A - \overset{*}{f}{}^A \right) = 0 \tag{2.5.9}$$

Llavors f^A és solució de les condicions d'integrabilitat (2.5.5) i de les equacions integro-funcionals següents:

$$f^A = \overset{*}{f}{}^A + \int_{-\infty\,(+\infty)}^{0} d\lambda \prod_{a=1}^{N} R_a(\lambda)\, \epsilon^b\, G_b^A \tag{2.5.10}$$

Teorema 4. (Recíproca parcial del teorema 3) Si f^A és solució de les equacions (2.5.5) i (2.5.10) i les f^A verifiquen (2.5.8), llavors f^A és solució de les equacions diferencials (2.5.2) i satisfà la condició assimptòtica (2.5.9).

Diem que el teorema 2 és una recíproca parcial del teorema 1 -i també el teorema 4 respecte del 3- perquè en general, l'equació integral (2.5.6) junt amb les condicions de integrabilitat (2.5.5) tenen més solucions que l'equació diferencial (2.5.2) amb les condicions de contorn (2.5.4).

L'equivalència de l'equació diferencial amb l'equació integral val tan sols si les condicions de contorn satisfan les equacions (2.5.7) i (2.5.8).

A continuació veurem com aquests resultats, apart del seu possible interés teòric, resulten particularment útils en el marc de la teoría de pertorbacions.

Suposarem que els segons membres de (2.5.2) depenen de N paràmetres e_a $(a=1,\ldots,N)$:

$$D_{a_i} f^A = G^A_{a_i}\left(x, \pi ; f^B ; e_b\right) \tag{2.5.11}$$

Suposarem també que existeixen solucions formals del sistema (2.5.11) desenvolupables en sèries de potències de les e_b

$$f^A = \sum_{n_1,\ldots,n_N=0}^{\infty} e_1^{n_1}\cdots e_N^{n_N} f^{A\{n_1,\ldots,n_N\}}(x,\pi) \equiv \sum_{\{n\}} e^{\{n\}} f^{A\{n\}}(x,\pi) \tag{2.5.12}$$

on $\{n\}$ és una abreviatura de $(n_1,\ldots,n_N)$ i les $f^{A\{n\}}$ ja no depenen de les e_a. Igualment, la substitució de (2.5.12) a (2.5.11) ens permetrà d'escriure:

$$G^A_{a_i} = \sum_{\{n\}} e^{\{n\}} G^{A\{n\}}_{a_i}\left(x,\pi ; f^{B\{n_B\}}\right) \tag{2.5.13}$$

Llavors, (2.5.12) serà solució de (2.5.11) si es compleix:

$$D_{a_i} f^{A\{n\}} = G^{A\{n\}}_{a_i} \quad , \quad \forall \{n\} \tag{2.5.14}$$

Direm que un sistema del tipus (2.5.11) és <u>descomposable</u> si $G^A_{a_i}$ conté únicament $f^{B\{n_B\}}$ amb $\{n_B\} < \{n\}$ (és a dir, $n_{B_a} \leq n_a$, $\forall a$, i a més la desigualtat és estricta per a algún a). Direm que un sistema descomposable és <u>completament in-</u>

tegrable si es satisfà:

$$D_{a_i} G_{a_j}^{A\{0\}} = D_{a_j} G_{a_i}^{A\{0\}} \quad , \quad \{0\} = (0,0,\ldots,0) \tag{2.5.15}$$

$$D_{a_i} f^{A\{m\}} = G_{a_i}^{A\{m\}} \ , \ \forall \{m\} < \{n\} \Rightarrow D_{a_i} G_{a_j}^{A\{n\}} = D_{a_j} G_{a_i}^{A\{n\}} \tag{2.5.16}$$

és a dir, un sistema completament integrable verifica automàticament les condicions d'integrabilitat (2.5.5) a tots els ordres.

Si tenim unes condicions de contorn del tipus (2.5.4) o (2.5.9), podem aplicar a l'equació diferencial (2.5.14) els teoremes 1 o 3 de les pàgines 39 o 40 , i per tant podrem escriure, respectivament(≠):

$$f^{A\{n\}} = \overset{*}{f}{}^{A\{n\}} - \sum_{j=1}^{s} \zeta_{a_j} \int_0^1 d\lambda \prod_{i=1}^{s} R_{a_i}(\lambda \zeta_{a_j}) \, G_{a_j}^{A\{n\}} \tag{2.5.17}$$

$$f^{A\{n\}} = \overset{*}{f}{}^{A\{n\}} + \int_{-\infty\,(+\infty)}^{0} d\lambda \prod_{a=1}^{N} R_a(\lambda) \, e^b \, G_b^{A\{n\}} \tag{2.5.18}$$

Si el sistema és descomposable, els segons membres són coneguts -depenen de $f^{A\{m\}}$, $\{m\}<\{n\}$- i per tant, obtenir f^A es redueix a quadratures.

(≠) $f^{A\{n\}}$ és el terme $\{n\}$ del desenvolupament de f^A en sèrie de potències de les e_a: $f^A = \sum_{\{n\}} e^{\{n\}} f^{A\{n\}}$

Si el sistema és completament integrable, aplicant els teoremes 2 o 4 de les pàgines 39 o 40 , tenim que la solució així obtinguda és solució de (2.5.11) sense més que demanar que les funcions ξ_{ai} , f^{*A} verifiquin (2.5.7),(2.5.8).

Ara bé, hom demostra fàcilment (BF.76) que els sistemes d'equacions del tipus (2.5.2) que ens ocupen actualment (és a dir: les equacions de la predictivitat, les del quadrimoment lineal i el tensor moment angular, i les de les coordenades de Hamilton-Jacobi) són descomposables i completament integrables, sens altre condició que: $\Theta_a^{\mu\{0\}}=0$. Això es conseqüència immediata de que tots aquests sistemes satisfan:

$$D_a G_{a'}^A - D_{a'} G_a^A = \Theta_a^\mu \frac{\partial}{\partial \pi^{a\mu}}\left(D_{a'} f^A - G_{a'}^A\right) - \Theta_{a'}^\mu \frac{\partial}{\partial \pi^{a'\mu}}\left(D_a f^A - G_a^A\right) \qquad (2.5.19)$$

d'on hom pot deduir immediatament (2.5.16).

Hem demostrat doncs que la solució dels sistemes esmentats, amb unes condicions de contorn adequades -del tipus (2.5.4) o (2.5.9)- existeix, és única i el càlcul es redueix a quadratures; tot això en el marc de la teoria de pertorbacions, és a dir, suposant que les solucions són desenvolupables en sèrie de potències d'uns certs paràmetres.

Respecte de si els sistemes considerats tenen realment una solució única (amb unes condicions de contorn donades) i si aquesta coincideix amb la calculada mitjançant la teoria de pertorbacions, no en sabem gran cosa; són qüestions obertes. Direm alguna cosa sobre això quant abordem el problema concret dels Lagrangians singulars al capítol 5.

Es també una qüestió oberta saber si les sèries de potències així obtingudes són o no són convergents. Es possible que siguin tan sols sèries assimptòtiques, com passa també sovint a la mecànica quàntica(≠) i a la teoria quàntica dels camps.

(≠) Vegeu com un exemple de sèrie divergent senzilla la de la referència (MA.77)

3. INTERACCIO ELECTROMAGNETICA DE DUES PARTICULES.

Estudiem en primer lloc la posició clàssica del problema: potencials avansats i retardats, terme radiatiu de Dirac; veurem que aquestes equacions ens serveixen de condicions de contorn per a les equacions de la predictivitat, i aplicant les tècniques ja mostrades al capítol 2 veurem que existeix una solució única. Hom pot trobar això discutit a les referències (BS.73), (BE.74) i (BM.75).

La part original d'aquest capítol és el càlcul de les coordenades de Hamilton-Jacobi a ordre quatre, així com el quadrimoment lineal i el tensor moment angular del sistema, que ens permetràn fer un balanç de el que el sistema ha radiat i calcular també la correcció radiativa a la secció eficaç de Coulomb, resultats que estàn d'acort amb els de la electrodinàmica quàntica. També, una exposició actualitzada -utilitzant les tècniques exposades al capítol 2- dels treballs esmentats.

3.1. Potencials de Liénard-Wiechert. Terme radiatiu de Dirac.

Estudiem primer quin és el camp electromagnètic creat per una partícula carregada. Aquest camp $F^{\mu\nu}$ s'escriu en termes del potencial vector A^{μ} com:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \qquad (3.1.1)$$

Les equacions que ens permeten de determinar A^{μ} són les següents:

$$\left.\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu A^\mu &= -4\pi J^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1.2}$$

on J^μ és el quadrivector corrent; la segona equació diu que triem el "gauge" de Lorentz. Per a resoldre (3.1.2) busquem una funció de Green G(x-x′) que satisfaci:

$$\partial_\nu \partial^\nu G(x-x') = -4\pi\, \delta^{(4)}(x-x') \tag{3.1.3}$$

Aqueste equació admet dues solucions independents (vegeu (JA.75) o qualsevol llibre d′electrodinàmica clàssica) les quals venen donades per:

$$G_{(\epsilon)}(x-x') = \frac{\delta(x'^0 - x^0 - \epsilon|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{3.1.4}$$

i s′anomenen funció de Green avançada o retardada segons ϵ sigui +1 o -1, respectivament.

La solució de (3.1.2) ve donade per

$$A^\mu(x) = \int d^4x'\; G(x-x')\, J^\mu(x') \tag{3.1.5}$$

on podem prendre com G(x-x′) tant la funció de Green retardada com avançada, com qualsevol combinació lineal d′ambdues, pes exemple la semisuma, que ens donaria uns camps electromagnètics invariants per inversió temporal. L′elecció de′ l′una o l′altra és arbitrària i hom resol el problema invocant la Causalitat, segons la qual la situació física correspon a ϵ =-1, és a dir, a un camp propagant-se cap al futur amb velocitat c.

El corrent d'una partícula a ve donat (JA.75) per:

$$J^{\mu}(x) = e_a \int d\tau \, \pi_a^{\mu}(\tau) \, \delta^{(4)}(x - x_a(\tau)) \tag{3.1.6}$$

on $x_a^{\mu}(\tau)$ és la trajectòria de la partícula a i $\pi_a^{\mu}(\tau)$ el seu impuls: $\pi_a^{\mu} = dx_a^{\mu}/d\tau$, on aquest τ, multiplicat per la massa m_a ens dona el temps propi (vegeu la nota del peu de la pàgina 25). Amb això obtenem de (3.1.5)

$$A^{\mu}_{a(\epsilon)}(x) = \epsilon \left. \frac{e_a \pi_a^{\mu}(\tau)}{(x - x_a(\tau), \pi_a)} \right|_{\tau=\tau_0} \tag{3.1.7}$$

on τ_0 ve donat en funció de x per (vegeu la figura de la pàgina següent):

$$x - x_a^0(\tau_0) + \epsilon \, |\vec{x} - \vec{x}_a(\tau_0)| = 0 \tag{3.1.8}$$

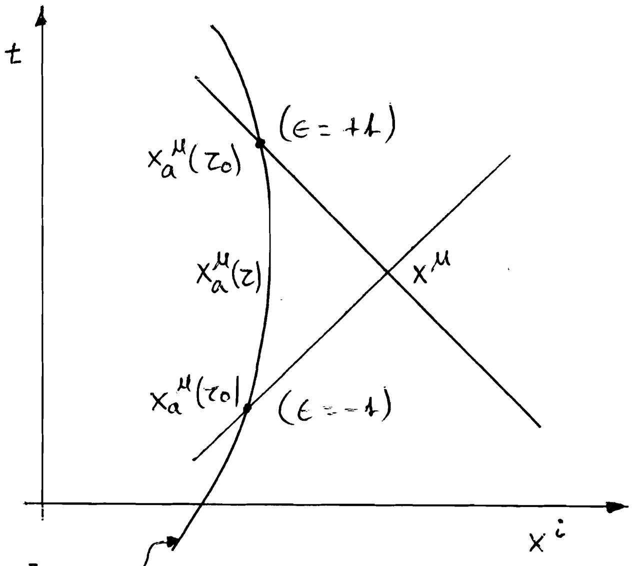
i el $F^{\mu\nu}$ corresponent és:

$$F^{\mu\nu}_{a(\epsilon)}(x) = \frac{\epsilon e_a}{(x - x_a, \pi_a)^2} \Big\{ (x - x_a)^{\mu} \theta_a^{\nu} - (x - x_a)^{\nu} \theta_a^{\mu} -$$

$$- \frac{(x - x_a)^{\mu} \pi_a^{\nu} - (x - x_a)^{\nu} \pi_a^{\mu}}{(x - x_a, \pi_a)} \left[\pi_a^2 + (x - x_a, \theta_a) \right] \Big\} \tag{3.1.9}$$

on x_a^μ, π_a^μ, Θ_a^μ estàn calculats a τ_0 i aquest ve donat per (3.1.8); Θ_a^μ és la quadriacceleració de la partícula a, i el subíndex ϵ indica si es tracta del camp avançat o retardat.

Determinació del τ_0.



Trajectòria de la partícula a

Si tenim un sistema aïllat de N partícules amb càrregues e_a, per a determinar la força que actua sobre la partícula a podem prendre l'equació de la força de Lorentz:

$$\frac{d\pi_a^\mu}{d\tau_a} = e_a \sum_{a'} F_{a'}^{\mu\nu}(x_a)\, \pi_{a\nu} \qquad (3.1.10)$$

Sabem també, però, que una partícula carregada i accelerada radia; això no ho contempla (3.1.10). Potser la teoria que dóna compte amb més elegància i generalitat, tant de la radiació com de que els potencials físics són els retardats, és la teoria de l'absorbent de Wheeler i Feynman (WF.45) que diu que l'univers actua com un absorbent perfecte, és a dir, que fora de l'absorbent, s'anul.la el camp electromagnètic:

$$\epsilon^{a} F_{a\,(\pm)}^{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (\not{+}) \tag{3.1.11}$$

Això en particular implica que

$$\frac{1}{2}\,\epsilon^{a}\left[F_{a\,(+)}^{\mu\nu}(x) - F_{a\,(-)}^{\mu\nu}(x)\right] = 0 \tag{3.1.12}$$

per tot arreu, ja que $F_{a(+)}^{\mu\nu}-F_{a(-)}^{\mu\nu}$ satisfà les equacions de Maxwell, no té cap singularitat, i verifica la condició de contorn (3.1.12).

La teoria és simètrica per inversió temporal, en el sentit de que pren com a camp que actua sobre la partícula a la semisuma dels camps avançats i retardats de la resta de partícules. Les equacions de moviment poden ésser derivades d'una acció que només conté les coordenades i velocitats de les partícules -acció a distància, sense camps- tal i com està demostrat a (WF.49). Gràcies al absorbent, però, es trenca la simetria per inversió temporal; és a dir, les equacions microscòpiques de les partícules són invariants per inversió temporal, però l'acció de la resta de l'univers -absorbent- introdueix una direcció temporal privilegiada. Hom troba una discusió detallada d'aquest problema a la referència (HN.74). Aquest trencament de la simetria es fa així:

($\not{+}$) Com que $\epsilon^{a}F_{a(+)}^{\mu\nu}$ i $\epsilon^{a}F_{a(-)}^{\mu\nu}$ són funcionalment independents, s'han de anular tots dos a l'hora.

$$\frac{d\pi_a^\mu}{d\tau_a} = \epsilon^{a'} e_a \frac{1}{2}\left[F^{\mu\nu}_{a'(+)} + F^{\mu\nu}_{a'(-)}\right]\pi_{a\nu} =$$

$$= \epsilon^{a'} e_a F^{\mu\nu}_{a'(-)}\pi_{a\nu} + \epsilon^b \frac{e_a}{2}\left[F^{\mu\nu}_{b(+)} - F^{\mu\nu}_{b(-)}\right]\pi_{a\nu} + \frac{e_a}{2}\left[F^{\mu\nu}_{a(-)} - F^{\mu\nu}_{a(+)}\right]\pi_{a\nu} \quad (3.1.13)$$

on tot està calculat al punt x_a^μ . El segon terme és nul per (3.1.12). El tercer terme, en el punt x_a^μ, dóna el conegut terme de Dirac, que dona compte de la "reacció" sobre la partícula a de la radiació que aquesta emet:

$$\frac{2}{3} e_a^2 \left(\pi_a^\mu \dot{\theta}_a^\nu - \pi_a^\nu \dot{\theta}_a^\mu\right)\frac{\pi_a^\nu}{\pi_a^4} \quad (3.1.14)$$

i finalment, utilitzant que $\pi_a^\mu \theta_{a\mu}=0$ implica $\theta_a^2 = -\dot{\theta}_a^\mu \pi_{a\mu}$, tenim

$$\frac{d\pi_a^\mu}{d\tau_a} = e_a \epsilon^{a'} F^{\mu\nu}_{a'(-)}(x_a)\pi_{a\nu} + \frac{2e_a^2}{3\pi_a^2}\left[\dot{\theta}_a^\mu - \frac{\theta_a^2}{\pi_a^2}\pi_a^\mu\right] \quad (3.1.15)$$

Per a dues partícules, introduint les expressions (3.1.9) i la notació $x^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu = \eta_a(x_a^\mu - x_{a'}^\mu)$, on $\eta_a = (-1)^{a+1}$, tenim:

$$\frac{d\pi_a^\mu}{d\tau_a} = -\frac{\eta_a e_a e_{a'}}{(x,\pi_{a'})^2}\left\{(\pi_a,\theta_{a'})x^\mu - (x,\pi_a)\theta_{a'}^\mu - \frac{(\pi_a,\pi_{a'})x^\mu - (x,\pi_a)\pi_{a'}^\mu}{(x,\pi_{a'})}\cdot\left[\eta_a\pi_{a'}^2 + (x,\theta_{a'})\right]\right\} + \frac{2e_a^2}{3\pi_a^2}\left\{\dot{\theta}_a^\mu - \frac{\theta_a^2}{\pi_a^2}\pi_a^\mu\right\} \quad (3.1.16)$$

En el segon membre, $\Theta_{a'}$, $\pi_{a'}$ han de calcular-se per a la posició retardada de la partícula a' respecte de la a, és a dir, per $x_{a'}$ tal que

$$x^{0} = \eta_{a} |\vec{x}| \tag{3.1.17}$$

Podem considerar (3.1.16) com un sistema d'equacions diferencials en diferències no constants -degut a (3.1.17)-. No són conegudes les condicions d'existència, unicitat i prolongació de les solucions per a tals sistemes, ni tampoc mètodes constructius de solucions, ni tan sols formals. A més, està demostrat, per a sistemes semblants, que donades unes condicions inicials la solució no és única (DR.69).

Un altra dificultat de (3.1.16) -deguda al terme de Dirac- és la presència de la derivada de l'acceleració $\dot{\Theta}_{a}^{\mu}$; en ésser el sistema de tercer ordre, posicions i velocitats no determinen una única solució; existeixen a més les anomenades solucions "run away", segons les quals les partícules s'autoacceleren cada cop més. Està demostrat (RO.65) que aquestes solucions patològiques no són funcions analítiques de e_1, e_2, i per tant el sol fet de suposar que Θ_{a}^{μ} és desenvolupable en sèrie de potències de e_1, e_2 les eliminarà.

3.2. Electrodinàmica predictiva. Acceleracions a ordre quatre.

La pregunta que ens plantegem ara és si podem tenir un sistema dinàmic predictiu (2.2.1),

$$\frac{d x_{a}^{\mu}}{d\tau} = \pi_{a}^{\mu} \quad , \quad \frac{d\pi_{a}^{\mu}}{d\tau} = \Theta_{a}^{\mu}(x,\pi) \tag{3.2.1}$$

tal que les equacions de la predictivitat (2.3.4)

$$D_{a'}\Theta_a^\mu = -\Theta_{a'}^\nu \frac{\partial \Theta_a^\mu}{\partial \pi^{a'\nu}} \qquad (3.2.2)$$

tinguin solucions que satisfacin les condicions clàssiques (3.1.15). Es a dir, (3.1.16) i (3.1.17) jugaràn el paper de condicions de contorn per a les equacions de la predictivitat. Naturalment, com a condicions de contorn també podríem prendre les acceleracions que es deriven dels potencials avançats o retardats sense incloure el terme de Dirac, o fins i tot la semisuma (interacció simètrica). Sobre els resultats finals comentarem quines serien les diferències.

Veiem com són les condicions de contorn. Coneixem Θ_1^μ sobre la hipersuperfície (≠) $\Sigma_1 = \{(x_a^\mu, \pi_b^\nu) \mid x_1^0 - x_2^0 = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|\}$ i Θ_2^μ sobre la hipersuperfície $\Sigma_2 = \{(x_a^\mu, \pi_b^\nu) \mid x_1^0 - x_2^0 = -|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|\}$. Aquestes no són dades de Cauchy per a les equacions (2.3.4), doncs per que així fos hauriem de conèixer Θ_1^μ i Θ_2^μ sobre la mateixa hipersuperfície. A més, el segon membre de (3.1.16) no és una funció de (x_a^μ, π_b^ν), sino que conté també les acceleracions; aquesta última dificultat desapareixerà en treballar ordre per ordre, en teoria de perturbacions.

Ara veurem que aquestes condicions són del tipus (2.5.4). Però abans, donat el paper privilegiat que juga l'operador D_a a la teoria de pertorbacions, buscarem escalars i vectors

(≠) Parlem d'hipersuperfícies a l'espai de les fases del sistema, $(TM^4)^2$; i realment ens restringirem al domini donat per $\pi_a^2 > 0$, $\pi_a^0 > 0$, $\forall a$.

que siguin solució de $D_a f=0$.

Ja que les θ_a^μ han de ser quadrivectors i dependre únicament de x^μ, π_a^ν tindrà en total 6 escalars: $x^2, \pi_a^2, (x,\pi_a)$, (π_1,π_2) ; i quatre vectors: $x^\mu, \pi_a^\mu, n^\mu = \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda\rho} x^\nu \pi_1^\lambda \pi_2^\rho$, que són base de M^4, excepte quan x^μ, π_a^ν són linealment dependents, que correspon al moviment unidimensional per a algun observador d'inèrcia; en aquest cas el canvi de variables següent no és invertible (Veure Apèndix 2).

Amb els 6 escalars esmentats sabem construir 5 solucions de $D_a f=0$:

$$\begin{aligned} &\pi_a^2 \quad ; \quad K = -\pi_a^\mu \pi_{a'\mu} \\ &z_{a'} = \eta_a \Lambda^{-2}\left[k(x\pi_a) - \pi_a^2 (x\pi_{a'})\right] \; ; \; \left(\Lambda^2 = k^2 - \pi_a^2 \pi_{a'}^2\right) \\ &h^2 = x^2 + \pi_a^2 z_a^2 + \pi_{a'}^2 z_{a'}^2 - 2K z_a z_{a'} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

i també quatre vectors (base de M^4) solució de $D_a f^\mu=0$:

$$\begin{aligned} &h^\mu = x^\mu - \epsilon^b \eta_b z_b \pi_b^\mu \\ &t_b^\mu = \pi_{b'}^2 \pi_b^\mu - K \pi_{b'}^\mu \\ &n^\mu = -\eta_a \Lambda^{-2} \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda\rho} h^\nu t_a^\lambda t_{a'}^\rho \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Podem prendre així com a escalars independents les 6 funcions π_a^2, k, z_a, h^2, i com a base de vectors els quatre h^μ, t_a^μ, n^μ. Per veure més propietats d'aquestes funcions així com la seva interpretació física consulteu l'apèndix 2.

Escriurem (3.1.17) en aquestes coordenades; de (3.2.3) com que $x^2=0$, deduïm:

$$z_{a'} = \pi_{a'}^{-2}\left(k z_a \pm r_a\right)$$

$$\text{on} \qquad r_a = +\left(\lambda^2 z_a^2 + \pi_{a'}^2 h^2\right)^{1/2} \tag{3.2.4}$$

i hom pot veure que si $x^0 = \eta_a |\vec{x}|$, cal que prenguem el signe menys (apèndix 2). Per tant,

$$x^0 = \eta_a |\vec{x}| \iff z_{a'} = \hat{z}_{a'} \equiv \pi_{a'}^{-2}\left(k z_a - r_a\right) \tag{3.2.5}$$

Es a dir, per a restringir Θ_a^μ a Σ_a només cal substituir $z_{a'}$ per $\hat{z}_{a'}$ (3.2.5), funció solament de z_a, k, π_b^2. Per a veure si la condició de contorn (3.1.16) pot ésser expressada en la forma (2.5.4) veurem en primer lloc com actua l'operador $R_a(\lambda)$ (≠) sobre les noves variables:

$$R_a(\lambda) f(z_a, z_{a'}, h^2, k, \pi_b^2) = f(z_a + \lambda, z_{a'}, h^2, k, \pi_b^2)$$

$$R_a(\lambda) h^\mu = h^\mu \quad ; \quad R_a(\lambda) t_b^\mu = t_b^\mu \quad ; \quad R_a(\lambda) n^\mu = n^\mu \tag{3.2.6}$$

Per tant, $R_a(\zeta_a)$, amb $\zeta_a = -z_a + \hat{z}_a$, el que fa és substituir z_a per $\hat{z}_a$. Així, les condicions de contorn per a la Θ_a^μ de (3.2.2) poden ésser escrites com:

$$R_{a'}(\zeta_{a'})\, \Theta_a^\mu = \overset{*}{\Theta}{}_a^\mu \quad ; \quad \left(\zeta_{a'} = -z_{a'} + \hat{z}_{a'}\right) \tag{3.2.7}$$

(≠) Aquest operador desplaça les partícules sobre les tangents a llurs trajectòries respectives sens modificar-ne la velocitat (2.4.20).

on $\overset{*}{\Theta}{}_{\alpha}^{\mu}$ és el segon membre de (3.1.16) escrit en les noves variables, i substituint per tot arreu $z_{a'}$ per $\hat{z}_{a'}$. Si fem desenvolupaments en les càrregues, a $\overset{\{p,q\}}{\overset{*}{\Theta}}{}_{\alpha}^{\mu}$ solament hi apareixen Θ_{α}^{μ} a ordres inferiors que són ja coneguts. Per tant $\overset{*}{\Theta}{}_{\alpha}^{\mu}$ està perfectament determinat ordre per ordre en les càrregues. Com $\hat{z}_{a'}$ i $\overset{*}{\Theta}{}_{\alpha}^{\mu}$ no depenen de la variable $z_{a'}$, es verifica:

$$D_{a'}(\zeta_{a'}) = -1 \quad , \quad D_{a'}(\overset{*}{\Theta}{}_{\alpha}^{\mu}) = 0 \tag{3.2.8}$$

que no són altra cosa que les equacions (2.5.7) i (2.5.8) i que ens permeten d'aplicar els teoremes 1 i 2 de la pàgina 39 . Per tant, hem demostrat:

<u>Teorema</u>.- Les equacions de la predictivitat (3.2.2) amb les condicions de contorn de la teoria de camps electromagnètica (3.2.7) admeten una solució única, en la hipòtesi de que Θ_{α}^{μ} és desenvolupable en sèrie de potències de les càrregues e_a, $e_{a'}$.

La solució, ordre per ordre, ve donada per (2.5.16):

$$\overset{\{p,q\}}{\Theta}{}_{a}^{\mu} = \overset{\{p,q\}}{\overset{*}{\Theta}}{}_{a}^{\mu} + \zeta_{a'} \int_0^1 d\lambda \, R_a(\lambda\zeta_{a'}) \, \overbrace{\Theta_{a'}^{\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha}^{\mu}}{\partial \pi^{a'\nu}}}^{\{p,q\}} \tag{3.2.9}$$

on $\{p,q\}$ indica $e_a^p e_{a'}^q$. Si fem el canvi de variable $z_{a'} + \lambda\zeta_{a'} = u$, ens queda:

$$\overset{\{p,q\}}{\Theta}{}_{a}^{\mu} = \overset{\{p,q\}}{\overset{*}{\Theta}}{}_{a}^{\mu} - \int_{\hat{z}_{a'}}^{z_{a'}} du \left[\overbrace{\Theta_{a'}^{\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha}^{\mu}}{\partial \pi^{a'\nu}}}^{\{p,q\}} \right]_{z_{a'} = u} \tag{3.2.10}$$

és a dir, que integrem respecte de la variable $z_{a'}$; (3.2.10) mostra explícitament que $\Theta_a^\mu = \overset{*}{\Theta}{}_a^\mu$ sobre Σ_a.

Hom pot demostrar fàcilment per inducció que els termes no nuls del desenvolupament de Θ_a^μ són:

$$\overset{\{n+2p,\,n\}}{\Theta_a^\mu} \quad , \ n \geq 1 \quad ; \quad \overset{\{n,\,n+2q\}}{\Theta_a^\mu} \quad n \geq 2 \quad . \tag{3.2.11}$$

Per tal com Θ_a^μ és un quadrivector podem escriure

$$\Theta_a^\mu = \eta_a a_a h^\mu + l_{aa} t_a^\mu + l_{aa'} t_{a'}^\mu + b_a n^\mu \tag{3.2.12}$$

però la condició $\Theta_a^\mu \pi_{a_\mu}=0$ implica $l_{aa}=0$ (≠), i com que n^μ no apareix a $\overset{*}{\Theta}{}_a^\mu$ és fàcil veure per inducció que $b_a=0$ (això equival a dir que la teoria és invariant per paritat, doncs n^μ és un vector axial). Per tant,

$$\Theta_a^\mu = \eta_a a_a h^\mu + l_{aa'} t_{a'}^\mu \tag{3.2.13}$$

i el problema es redueix a determinar les dues funcions a_a, $l_{aa'}$ a cada ordre en les càrregues.

Si substituim (3.2.13) a (3.1.16) i ho posem tot en funció de les noves variables, després d'un càlcul molt farragós però sens dificultats, tenim:

$$\overset{*}{\Theta}{}_a^\mu = \frac{e_a e_{a'}}{r_a^3}\left\{ \eta_a \left[K\pi_{a'}^2 + \frac{\Lambda^2}{\pi_{a'}^2}(Kz_a - r_a)(z_a \tilde{a}_{a'} + \pi_{a'}^2 \tilde{l}_{a'a}) \right] h^\mu + \right.$$

(≠) Naturalment, $\overset{*}{\Theta}{}_a^\mu$ també verifica $\overset{*}{\Theta}{}_a^\mu \pi_{a_\mu}=0$ com hom pot comprovar fàcilment.

$$\left[-\pi_{a'}^2 z_a + h^2 (z_a \tilde{a}_{a'} + \pi_{a'}^2 \tilde{l}_{a'a})\right] t_{a'}^{\mu} \Big\} +$$

$$+ \frac{2e_a^2}{3\pi_a^2}\Big\{ \eta_a \left[\widetilde{(D_a a_a)} + \tilde{a}_a \widetilde{(N_a a_a)} - z_a \tilde{a}_a^2 - k \tilde{a}_a \tilde{l}_{aa'} + \tilde{l}_{aa'} \widetilde{(Q_a a_a)}\right] h^{\mu} +$$

$$+ \left[\widetilde{(D_a l_{aa'})} + \tilde{a}_a \widetilde{(N_a l_{aa'})} - k \tilde{l}_{aa'}^2 + \frac{\pi_a^2 k h^2}{\Lambda^2} \tilde{a}_a^2 + \tilde{l}_{aa'} \widetilde{(Q_a l_{aa'})}\right] t_{a'}^{\mu} \Big\} \quad (3.2.14)$$

on D_a és l'operador diferencial que ja coneixem, $D_a = \pi_a^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{a\mu}}$, i N_a, Q_a són els operadors diferencials següents:

$$N_a = \eta_a h^{\mu} \frac{\partial}{\partial \pi^{a\mu}} \quad ; \quad Q_a = t_{a'}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \pi^{a\mu}} \quad (3.2.15)$$

Les propietats de N_a, Q_a que hem fet servir per a deduir (3.2.14) es poden trobar a l'apèndix 2. Naturalment, una vegada fetes les derivades indicades per D_a, N_a, Q_a a (3.2.14) hom ha de substituir $z_{a'}$ per $\hat{z}_{a'}$ (3.2.5) a tot el segon membre; això ho hem indicat posant una titlla ($\sim$) als termes que podrien dependre de $z_{a'}$.

També podem fer el mateix amb l'integrand de (3.2.10):

$$\theta_{a'}^{\nu} \frac{\partial \theta_a^{\mu}}{\partial \pi^{a'\nu}} = \eta_a \left[a_{a'} N_{a'} a_a - z_{a'} a_a a_{a'} - \pi_a^2 a_{a'} l_{aa'} + l_{a'a} Q_{a'} a_a\right] h^{\mu} +$$

$$+ \left[\Lambda^{-2} h^2 a_a a_{a'} + a_{a'} N_{a'} l_{aa'} + l_{a'a} Q_{a'} l_{aa'} - k l_{aa'} l_{a'a}\right] t_{a'}^{\mu} \quad (3.2.16)$$

Amb això tenim ja tots els elements per a calcular a_a, $l_{aa'}$ ordre per ordre. Escriurem:

$$\overset{}{\theta}{}_a^\mu = \sum_{p,q} e_a^p e_{a'}^q \overset{\{p,q\}}{\theta_a^\mu} = \sum_{p,q} e_a^p e_{a'}^q \left[\eta_a \overset{\{p,q\}}{a_a} h^\mu + \overset{\{p,q\}}{l_{aa'}} t_{a'}^\mu \right] \qquad (3.2.17)$$

Direm que fem un càlcul aproximat fins l'<u>ordre n</u> si calculem tots els termes amb $p+q \leq n$. Per (3.2.11) els ordres senars donen zero. A ordre zero no hi ha contribucions degut a (3.2.11). A ordre dos, l'única contribució serà la $\{1,1\}$. Examinant (3.2.16) veiem que la integral de (3.2.10) no contribueix a aquest ordre. Així,

$$\overset{\{1,1\}}{\theta_a^\mu} = \overset{\{1,1\}}{\overset{*}{\theta}{}_a^\mu} \qquad (3.2.18)$$

i de (3.2.14) hom dedueix automàticament:

$$\begin{aligned} \overset{\{1,1\}}{a_a} &= \overset{\{1,1\}}{\overset{*}{a}_a} = \frac{\pi_{a'}^2 K}{r_a^3} \\ \overset{\{1,1\}}{l_{aa'}} &= \overset{\{1,1\}}{\overset{*}{l}_{aa'}} = -\frac{\pi_{a'}^2 z_a}{r_a^3} \end{aligned} \qquad (3.2.19)$$

Hem obtingut així les acceleracions aproximades fins l'ordre dos en les càrregues. Per a veure el seu significat físic podriem escriure-les en termes de les variables (x,π). Això ens dóna (≠) :

$$\overset{(2)}{\theta_a^\mu} = \frac{\eta_a e_a e_{a'} \pi_{a'}^2}{\left[x^2 \pi_{a'}^2 + (x\pi_{a'})^2\right]^{3/2}} \left\{ (x,\pi_a)\pi_{a'}^\mu - (\pi_a \pi_{a'}) x^\mu \right\} \qquad (3.2.20)$$

(≠) El $\overset{(2)}{\theta_a^\mu}$ indica que hi són inclosos tots els termes $\overset{\{p,q\}}{\theta_a^\mu}$ tals que $p+q \leq 2$.

A partir d'aquí podriem obtenir les triacceleracions per a un observador d'inèrcia qualsevol utilitzant (2.2.18), i per tal de recuperar els resultats clàssics -Coulomb, acceleracions derivades del Lagrangià de Darwin- podriem fer un subdesenvolupament en sèrie de potències de 1/c. Tot això ho farem després de calcular les acceleracions aproximades fins a quart ordre.

A quart ordre, segons (3.2.11) contribueixen termes de la forma $\{3,1\}$ i $\{2,2\}$. Calculem primer els termes $\{3,1\}$. De (3.2.14) tenim:

$$\overset{\{3,1\}}{\overset{*}{a}_a} = \frac{2}{3}\pi_a^{-2}\eta_a D_a \overset{\{1,1\}}{a_a} = -\frac{2\eta_a \pi_{a'}^2 k \Lambda^2 z_a}{\pi_a^2 r_a^5}$$

$$\overset{\{3,1\}}{\overset{*}{l}_{aa'}} = \frac{2}{3}\pi_a^{-2} D_a \overset{\{1,1\}}{l_{aa'}} = \frac{2\pi_{a'}^2\left(2\Lambda^2 z_a^2 - \pi_{a'}^2 h^2\right)}{3\pi_a^2 r_a^5} \tag{3.2.21}$$

De (3.2.16) veiem que l'integral de (3.2.10) no contribueix a aquest ordre, i per tant:

$$\overset{\{3,1\}}{\Theta_a^\mu} = \overset{\{3,1\}}{\overset{*}{\Theta}{}_a^\mu} = -\eta_a \frac{2\pi_{a'}^2 k \Lambda^2 z_a}{\pi_a^2 r_a^5} h^\mu + \frac{2\pi_{a'}^2\left(2\Lambda^2 z_a^2 - \pi_{a'}^2 h^2\right)}{3\pi_a^2 r_a^5} t_{a'}^\mu \tag{3.2.22}$$

Anem ara a calcular els termes $\{2,2\}$. De (3.2.14) tenim:

$$\overset{\{2,2\}}{\overset{*}{a}_a} = -\frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^4 \Lambda^2 (r_a - k z_a)}{r_a^2 (k r_a - \Lambda^2 z_a)^3} \; ; \; \overset{\{2,2\}}{\overset{*}{l}_{aa'}} = \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^6 h^2}{r_a^2 (k r_a - \Lambda^2 z_a)^3} \tag{3.2.23}$$

Naturalment donem tan sols els resultats finals i no els càlculs. D'ara endavant indicarem els punts més importants del càlcul sense detallar tot el procés, el qual, si bé llarg, no té cap dificultat especial.

Amb (3.2.16) podem calcular els termes que intervenen a la integral de (3.2.10) i ens queda:

$$\overset{\{2,2\}}{a_a} = \overset{\{2,2\}}{\overset{*}{a}_a} + \frac{\Pi_a^2 \Pi_{a'}^2}{r_a^5} \int_{\hat{z}_{a'}}^{z_{a'}} (k z_a - \Pi_{a'}^2 z_{a'}) \left[3k^2 h^2 + 3k\Lambda^2 z_a z_{a'} - \Pi_a^2 r_a^2 \right] r_{a'}^{-3} \, dz_{a'}$$

$$\overset{\{2,2\}}{l_{aa'}} = \overset{\{2,2\}}{\overset{*}{l}_{aa'}} - \frac{\Pi_a^2 \Pi_{a'}^2}{r_a^5} \int_{\hat{z}_{a'}}^{z_{a'}} (k z_a - \Pi_{a'}^2 z_{a'}) \left[3k h^2 z_a + 3\Lambda^2 z_a^2 z_{a'} - r_a^2 z_{a'} \right] r_{a'}^{-3} \, dz_{a'} \qquad (3.2.24)$$

Les integrals indefinides es poden expressar totes en termes de funcions elementals (veure per exemple (AS.64) i (GH.65)) i el resultat és:

$$\begin{aligned}
\overset{\{2,2\}}{a_a} = {} & -\Pi_a^2 \Pi_{a'}^4 \Lambda^2 r_a^{-2} (r_a - k z_a)(k r_a - \Lambda^2 z_a)^{-3} + \\
& + \Pi_a^2 \Pi_{a'}^2 (3k^2 h^2 - \Pi_a^2 r_a^2) r_a^{-5} \Big\{ \left[k h^{-2} \Pi_a^{-2} z_a z_{a'} + \Pi_{a'}^2 \Lambda^{-2} \right] r_{a'}^{-1} - \\
& - \left[k h^{-2} \Pi_a^{-2} \Pi_{a'}^{-2} z_a (k z_a - r_a) + \Pi_{a'}^2 \Lambda^{-2} \right] \Pi_{a'}^2 (k r_a - \Lambda^2 z_a)^{-1} \Big\} + \\
& + 3\Pi_a^2 \Pi_{a'}^2 k \Lambda^2 z_a r_a^{-5} \Big\{ -\Lambda^{-2} (k z_a - \Pi_{a'}^2 z_{a'}) r_{a'}^{-1} + \Pi_{a'}^2 \Lambda^{-2} r_a (k r_a - \Lambda^2 z_a)^{-1} + \\
& + \Pi_{a'}^2 \Lambda^{-3} \log \frac{\Lambda z_a + r_a}{\Lambda z_{a'} + r_{a'}} + \Pi_{a'}^2 \Lambda^{-3} \log \frac{K - \Lambda}{\Pi_{a'}^2} \Big\}
\end{aligned} \qquad (3.2.25)$$

$$\overset{\{2,2\}}{l}_{aa'} = \pi_a^2 \pi_{a'}^6 h^2 r_a^{-2} (k r_a - \Lambda^2 z_a)^{-3} -$$

$$-3 \pi_a^2 \pi_{a'}^2 k h^2 z_a r_a^{-5} \Big\{ \left[k h^{-2} \pi_a^{-2} z_a z_{a'} + \pi_{a'}^2 \Lambda^{-2} \right] r_{a'}^{-1} -$$

$$- \left[k h^{-2} \pi_a^{-2} \pi_{a'}^{-2} z_a (k z_a - r_a) + \pi_{a'}^2 \Lambda^{-2} \right] \pi_{a'}^2 (k r_a - \Lambda^2 z_a)^{-1} \Big\} -$$

$$- \pi_a^2 \pi_{a'}^2 (3 \Lambda^2 z_a^2 - r_a^2) r_a^{-5} \Big\{ - \Lambda^{-2} (k z_a - \pi_{a'}^2 z_{a'}) r_{a'}^{-1} + \Lambda^{-2} \pi_{a'}^2 r_a (k r_a - \Lambda^2 z_a)^{-1} +$$

$$+ \pi_{a'}^2 \Lambda^{-3} \log \frac{\Lambda z_a + r_a}{\Lambda z_{a'} + r_{a'}} + \pi_{a'}^2 \Lambda^{-3} \log \frac{k - \Lambda}{\pi_{a'}^2} \Big\} \qquad (3.2.26)$$

Aquestes expressions són molt complexes i de moment no ens diuen res. Ara bé, podem passar a calcular les triacceleracions per a un observador d'inèrcia qualsevol utilitzant (2.2.18):

$$\vec{a}_a(x, v; m) = m_a^{-2} (1 - \vec{v}_a^{\,2}) \left\{ \vec{\Theta}_a - (\vec{\Theta}_a \vec{v}_a) \vec{v}_a \right\} \qquad (3.2.27)$$

on els arguments de $\vec{\Theta}_a$ al segon membre són els següents:

$$x_b^\mu = (0, \vec{x}_b) \quad ; \quad \pi_b^\mu = m_b (1 - \vec{v}_b^{\,2})^{-1/2} (1, \vec{v}_b) \qquad (3.2.28)$$

L'expressió que hom obté així és també molt complexa i allò més adequat per a comparar amb els resultats clàssics és desenvolupar en potències d'1/c. Fent-ho així obtenim, excepte termes d'ordre $1/c^4$ (posant $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$, $\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$):

$$\vec{a}_a = \frac{\eta_a e_a e_{a'}}{m_a r^3}\vec{r} + \frac{\eta_a e_a e_{a'}}{2 m_a c^2 r^3}\left\{\left(v_{a'}^2 - v_a^2 - 2\vec{v}_a\vec{v}_{a'} - \frac{3(\vec{r}\vec{v}_{a'})^2}{r^2}\right)\vec{r} - 2\eta_a(\vec{r}\vec{v}_a)\vec{v}\right\} + \frac{\eta_a e_a^2 e_{a'}^2}{m_a m_{a'} c^2 r^4}\vec{r} + \frac{2\eta_a e_a^2 e_{a'}^2}{3 m_a m_{a'} c^3 r^5}\left[3(\vec{r}\vec{v})\vec{r} - r^2\vec{v}\right] - \frac{2\eta_a e_a^3 e_{a'}}{3 m_a^2 c^3 r^5}\left[3(\vec{r}\vec{v})\vec{r} - r^2\vec{v}\right] + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \tag{3.2.29}$$

El terme d'ordre zero en 1/c correspon a la llei de Coulomb. Els termes d'ordre $1/c^2$ són les correccions a l'esmentada llei que hom obté a partir del Lagrangià de Darwin. A ordre $1/c^3$ tenim dos termes. El que conté $e_a^2 e_{a'}^2$, que és degut al fet de que utilitzem potencials retardats; si haguessim triat el potencial simètric en lloc del retardat, aquest terme no hi apareixeria. I finalment, el terme en $e_a^3 e_{a'}$ que és l'únic que deriva del terme de Dirac i que el podem pensar com l'acceleració de frenat degut a la radiació. Cal fer notar que si $e_a/m_a=e_{a'}/m_{a'}$ els dos ultims termes es cancelen, i els efectes retardats i els procedents del terme de Dirac no apareixen a aquest ordre.

Les contribucions degudes al terme de Dirac i al potencial retardat apareixen separades fins a ordre 6; el terme de Dirac és responsable dels termes no diagonals ($e_a^p e_{a'}^q$, amb $p\neq q$). Si no haguessim tingut en compte el terme de Dirac, tots els termes serien diagonals, de la forma $(e_a e_{a'})^n$.

El fet de prendre potencials retardats, avançats o simètrics no té conseqüències fins a partir de l'ordre quatre.

Cal remarcar el resultat molt notable de que (3.2.29) és la mateixa acceleració que hom obté fent desenvolupaments formals en 1/c als potencials retardats clàssics, d'una manera molt semblant a com s'obté el Lagrangià de Darwin. Vegeu els càlculs al Apèndix 3.

Els avantatges de la formulació predictiva sobre aquest desenvolupament clàssic són d'una part, que tenim expressions manifestament covariants -i solament desenvolupades en les càrregues- que són les Θ^{μ}_{a} ; i de l'altra, que tot el formalisme està deduit partint d'uns principis físicament clars i significatius -Postulats de Relativitat i Predictivitat-. A més la Predictivitat ens permet de calcular les 10 quantitats conservades, que corresponen a la invariància Poincaré del sistema dinàmic considerat.

Un altra diferència és que nosaltres sabem que les triacceleracions (3.2.9) satisfan les equacions de Currie-Hill (2.1.13) i per tant són invariants Poincaré (en el sentit de que són les mateixes per a tots els observadors d'inèrcia) mentre que una tal demostració és quasibé inabordable en el marc dels desenvolupaments formals de l'apèndix 3.

3.3. Coordenades de Hamilton-Jacobi.

L'interés de calcular aquestes coordenades p^{μ}_{a} , q^{μ}_{a} és degut a que automàticament ens donen el quadrimoment lineal P^{μ} i el tensor moment angular $J^{\mu\nu}$ del sistema que estem considerant (2.4.31):

$$\mathcal{P}^{\mu} = \epsilon^{a} p_{a}^{\mu} \quad ; \quad \mathcal{J}^{\mu\nu} = \epsilon^{a}\left(q_{a}^{\mu} p_{a}^{\nu} - q_{a}^{\nu} p_{a}^{\mu}\right) \tag{3.3.1}$$

A més, pel fet de que siguin coordenades de Hamilton Jacobi

$$\vec{H}_{b}\, q_{a}^{\mu} = \delta_{ab}\, p_{a}^{\mu} \quad ; \quad \vec{H}_{b}\, p_{a}^{\mu} = 0 \tag{3.3.2}$$

tenim que els moments canònics individuals p_{a}^{μ} són quantitats conservades cada una per separat, la qual cosa ens permetrà de calcular la secció eficaç per un mètode sencill.

Ens interessarà també el quadrivector de Pauli-Lubanski W^{μ}, que es defineix així:

$$W^{\mu} = \frac{1}{2P}\, \epsilon^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\, \mathcal{P}^{\nu} \mathcal{J}^{\lambda\rho} \quad ; \quad P = \left(-\mathcal{P}^{\mu}\mathcal{P}_{\mu}\right)^{1/2} \tag{3.3.3}$$

i que en termes de les coordenades de Hamilton-Jacobi pot ésser expressat com:

$$W^{\mu} = \frac{1}{2P}\, \epsilon^{a} \epsilon^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\, p_{a'}^{\nu}\left(q_{a}^{\lambda} p_{a}^{\rho} - q_{a}^{\rho} p_{a}^{\lambda}\right) \tag{3.3.4}$$

Les equacions diferencials (3.3.2) cal completar-les amb unes condicions de contorn adequades. Nosaltres demanarem que quant les partícules s'allunyin a una distància infinita, tinguem les mateixes expressions que en el cas de partícules sense interacció:

$$\lim_{x^{2} \to \infty_{P(+)}} p_{a}^{\mu} = \pi_{a}^{\mu} \tag{3.3.5}$$

Ara bé, per a les q_a^μ tal condició no es pot exigir degut a que la interacció electromagnètica és de llarg abast, com veurem explícitament en calcular les q_a^μ. Podriem provar de demanar una condició més feble, tal com

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(+)}} \frac{1}{x}\left(q_a^\mu - x_a^\mu\right) = 0 \tag{3.3.6}$$

on $x=(-x^\mu x_\mu)^{1/2}$ i el límit $x^2 \to \infty_{p(+)}$ s'ha d'entendre en el sentit de la definició (2.4.22). Encara que (3.3.6) ja no divergeix, aquesta condició és ara massa feble, i no determina res; la q_a^μ queda totalment indeterminada. Però la condició (3.3.5), que no es pot demanar de q_a^μ, si que la podem imposar al $J^{\mu\nu}$ total del sistema. Aquesta condició,

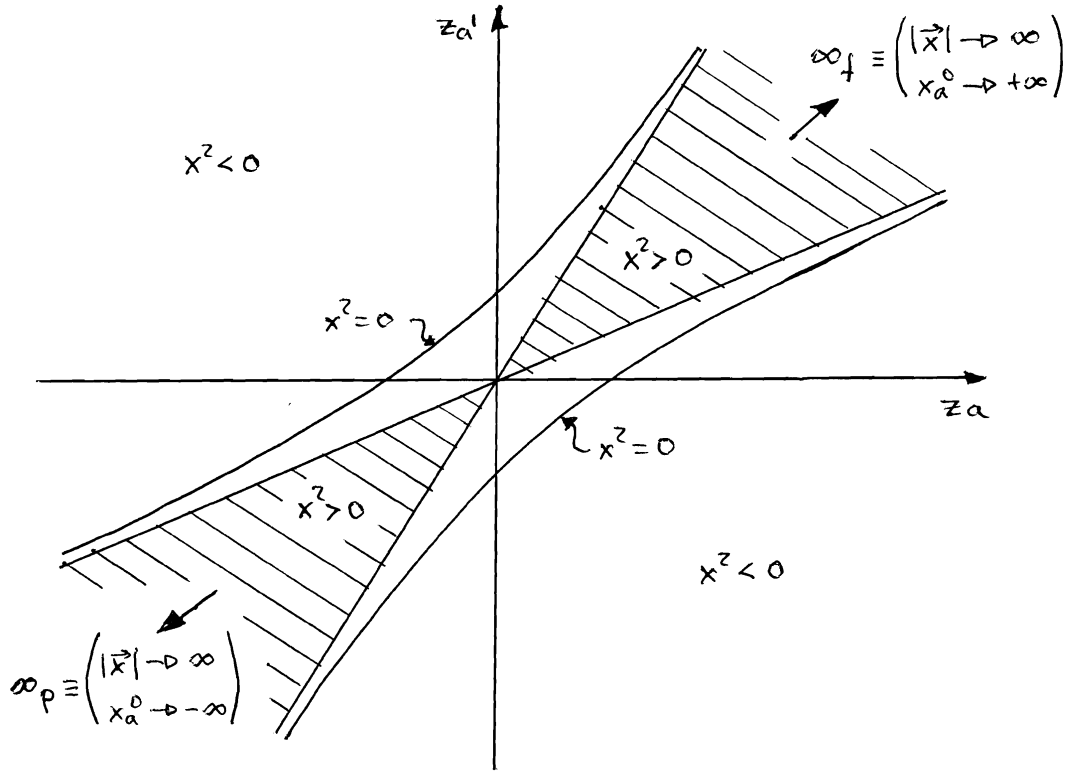
$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(+)}} J^{\mu\nu} = \epsilon^a\left(x_a^\mu \pi_a^\nu - x_a^\nu \pi_a^\mu\right) \tag{3.3.7}$$

determina unívocament el $J^{\mu\nu}$ i fixa parcialment les q_a^μ. Es a dir, que degut a que la interacció electromagnètica és una interacció de llarg abast, no hem trobat cap criteri físic que ens permetés de fixar unes coordenades de Hamilton-Jacobi úniques.

Anem a veure com s'escriu el límit $x^2 \to \infty_{p(+)}$ en termes de les variables que hem introduit a (3.2.3-4). Tenint en compte (2.4.22-23) i la actuació de $R_a(\lambda)$ sobre les noves variables (3.2.6), hom dedueix fàcilment que

$$x^2 \to \infty_{p(+)} \iff z_a, z_{a'} \to \gamma\infty \;\wedge\; \frac{k-\lambda}{\pi_a^2} < \frac{z_a}{z_{a'}} < \frac{k+\lambda}{\pi_{a'}^2} \tag{3.3.8}$$

on $\gamma=-1$ per a l'infinit passat (∞_p) i $\gamma=+1$ per a l'infinit futur (∞_f). Ens podem fer una idea més clara d'aquest límit representant x^2 com a funció de z_a, $z_{a'}$ i mantenint h^2, k, π_b^2 constants. Veure la figura. El límit s'ha de calcular dins de la regió retllada.



Tota vegada que $x^2=h^2-\pi_a^2 z_a^2-\pi_{a'}^2 z_{a'}^2+2k z_a z_{a'}$, també podem aconseguir $x^2 \to +\infty$ fent $h^2 \to +\infty$ i z_b, π_b^2, k constants. Però les condicions (3.3.5) i (3.3.7) ja determinen unívocament el p_a^μ, $J^{\mu\nu}$ i per tant no ens cal preocuparnos d'aquesta altra manera d'allunyar les partícules. No obstant hom pot comprovar que les p_a^μ que obtindrem verifiquen $\lim_{h^2 \to +\infty} p_a^\mu = \pi_a^\mu$.

El límit z_a, $z_{a'} \to \gamma\infty$ correspon a portar les partícules a l'infinit sobre les tangents a les trajectòries (vegeu les pàgines 34 i 35) mentres que $h^2 \to +\infty$ correspon a allunyar les dues trajectòries com un tot fins a l'infinit (vegeu el significat físic de h^2 a l'apèndix 2); per altra part, $h^2 \to +\infty$ no distingeix entre l'infinit passat i futur.

Anem a calcular els moments de Hamilton-Jacobi per a l'electrodinàmica predictiva. La condició de contorn

$$\lim_{x^2 \to \infty p(f)} p_a^\mu = \pi_a^\mu \equiv \overset{*}{p}{}_a^\mu \tag{3.3.9}$$

satisfà $D_b \overset{*}{p}{}_a^\mu = 0$. Estem així en les condicions de les hipòtesis dels teoremes 3 i 4 de la pàgina 40 i per tant tenim:

<u>Teorema</u>. Les equacions $\vec{H}_b p_a^\mu = 0$ amb les condicions de contorn (3.3.9) i les acceleracions donades per l'electrodinàmica predictiva, admeten una solució única, en la hipòtesi de que p_a^μ és desenvolupable en sèrie de potències de les càrregues e_a, $e_{a'}$.

La solució, ordre per ordre, ve donade per (2.5.17):

$$\overset{\{p,q\}}{p_a^\mu} = \delta_{p,0}\,\delta_{q,0}\,\pi_a^\mu - \int_{\gamma\infty}^{0} d\lambda\; R_a(\lambda) R_{a'}(\lambda)\; \overbrace{\Theta_b^\nu \frac{\partial p_a^\mu}{\partial \pi_b^\nu}}^{\{p,q\}} \tag{3.3.10}$$

Com que p_a^μ és un quadrivector invariant per Poincaré, podem posar:

$$p_a^\mu = \eta_a \alpha_a l^\mu + \mu_{aa} t_a^\mu + \mu_{aa'} t_{a'}^\mu \tag{3.3.11}$$

on α_a, μ_{aa}, $\mu_{aa'}$ són 6 funcions escalars de les variables

z_b, h^2, k, π_b^2 (3.2.3).

Es clar que a ordre zero solament hi contribueix $\overset{*}{p}{}_a^{\mu}$:

$$\overset{\{0,0\}}{p_a^{\mu}} = \overset{\{0,0\}}{\overset{*}{p}{}_a^{\mu}} = \pi_a^{\mu} = -\lambda^{-2}\left(\pi_a^2 \, t_a^{\mu} + k \, t_{a1}^{\mu}\right) \tag{3.3.12}$$

A ordres superiors, $\overset{*}{p}{}_a^{\mu}$ ja no contribueix i solament queda la integral. A ordre dos, l'integrand val:

$$\overbrace{\theta_b^{\nu}\frac{\partial p_a^{\mu}}{\partial \pi_b^{\nu}}}^{\{1,1\}} = \overset{\{1,1\}}{\theta_b^{\nu}} \frac{\partial \overset{\{0,0\}}{p_a^{\mu}}}{\partial \pi_b^{\nu}} = \overset{\{1,1\}}{\theta_a^{\mu}} \tag{3.3.13}$$

i per tant, fent el canvi de variable $z_a+\lambda=u$

$$\overset{\{1,1\}}{p_a^{\mu}} = + \int_{z_a}^{\gamma\infty} du \, \frac{\pi_{a1}^2}{r_a^3}\left[\eta_a k h^{\mu} - z_a t_{a1}^{\mu}\right]\Big|_{z_a=u} \tag{3.3.14}$$

Integrant, tenim finalment:

$$\overset{\{1,1\}}{p_a^{\mu}} = \frac{\eta_a k}{h^2}\left(\frac{\gamma}{\lambda} - \frac{z_a}{r_a}\right)h^{\mu} - \frac{\pi_{a1}^2}{\lambda^2 r_a} t_{a1}^{\mu} \tag{3.3.15}$$

Passem al càlcul del p_a^{μ} a ordre quatre. Hi ha còntribucions del tipus {3,1}, {1,3} i {2,2}. Anem amb les primeres:

$$\overbrace{\theta_b^{\nu}\frac{\partial p_a^{\mu}}{\partial \pi_b^{\nu}}}^{\{3,1\}} = \theta_a^{\mu} \qquad \overbrace{\theta_b^{\nu}\frac{\partial p_a^{\mu}}{\partial \pi_b^{\nu}}}^{\{1,3\}} = 0 \tag{3.3.16}$$

Fent el canvi de variable $z_a+\lambda=u$, de (3.3.10) deduim:

$$\overset{\{3,1\}}{p_a^{\mu}} = \int_{z_a}^{\gamma\infty} du \, \overset{\{3,1\}}{\theta_a^{\mu}}\Big|_{z_a=u} \quad ; \quad \overset{\{1,3\}}{p_a^{\mu}} = 0 \tag{3.3.17}$$

i calculant la integral tenim:

$$\overset{\{3,1\}}{p}{}_a^{\mu} = -\frac{2\eta_a \pi_{a'}^2 K}{3\pi_a^2 r_a^3} h^{\mu} + \frac{2\pi_{a'}^2 z_a}{3\pi_a^2 r_a^3} t_{a'}^{\mu} \quad ; \quad \overset{\{1,3\}}{p}{}_a^{\mu} = 0 \qquad (3.3.18)$$

El càlcul de $\overset{\{2,2\}}{p}{}_a^{\mu}$ és bastant més complicat. De (3.3.10),

$$\overset{\{2,2\}}{p}{}_a^{\mu} = -\int_{\gamma\infty}^{0} d\lambda\, R_a(\lambda) R_{a'}(\lambda) \left[\overset{\{1,1\}}{\theta}{}_a^{\nu} \frac{\partial \overset{\{1,1\}}{p}{}_a^{\mu}}{\partial \pi^{a\nu}} + \overset{\{1,1\}}{\theta}{}_{a'}^{\nu} \frac{\partial \overset{\{1,1\}}{p}{}_a^{\mu}}{\partial \pi^{a'\nu}} + \overset{\{2,2\}}{\theta}{}_a^{\mu} \right] \qquad (3.3.19)$$

Per a calcular els dos primers termes són útils les expressions següents:

$$\theta_a^{\nu} \frac{\partial p_a^{\mu}}{\partial \pi^{a\nu}} = \eta_a \left[a_a N_a \alpha_a + l_{aa'} Q_a \alpha_a - z_a a_a \alpha_a + \pi_{a'}^2 a_a \mu_{aa} - K a_a \mu_{aa'} \right] h^{\mu} +$$
$$+ \left[a_a N_a \mu_{aa} + l_{aa'} Q_a \mu_{aa} - \Lambda^{-2} h^2 a_a \alpha_a - K l_{aa'} \mu_{aa} - \pi_a^2 l_{aa'} \mu_{aa'} \right] t_a^{\mu} +$$
$$+ \left[a_a N_a \mu_{aa'} + l_{aa'} Q_a \mu_{aa'} - 2K l_{aa'} \mu_{aa'} \right] t_{a'}^{\mu} \qquad (3.3.20)$$

$$\theta_{a'}^{\nu} \frac{\partial p_a^{\mu}}{\partial \pi^{a'\nu}} = \eta_a \left[a_{a'} N_{a'} \alpha_a + l_{aa'} Q_{a'} \alpha_a - z_{a'} a_{a'} \alpha_a + K a_{a'} \mu_{aa} - \pi_a^2 a_{a'} \mu_{aa'} \right] h^{\mu} +$$
$$+ \left[a_{a'} N_{a'} \mu_{aa'} + l_{a'a} Q_{a'} \mu_{aa'} + \Lambda^{-2} h^2 a_{a'} \alpha_a - \pi_{a'}^2 l_{a'a} \mu_{aa} - K l_{a'a} \mu_{aa'} \right] t_{a'}^{\mu} +$$
$$+ \left[a_{a'} N_{a'} \mu_{aa} + l_{a'a} Q_{a'} \mu_{aa} - 2K l_{a'a} \mu_{aa} \right] t_a^{\mu} \qquad (3.3.21)$$

El resultat final, una vegada calculades les integrals, dóne:

$$\overset{\{2,2\}}{\alpha_a} = \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^4 K}{(K r_a - \Lambda^2 z_a)(K^2 r_a^2 - \Lambda^4 z_a^2)} + \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^2 [(2K^2 - \Lambda^2) r_a + K \Lambda^2 z_a]}{2\Lambda^2 h^2 (K^2 r_a^2 - \Lambda^4 z_a^2)} + \frac{\pi_{a'}^2 (2\pi_a^2 K - \Lambda^2) z_a}{2\Lambda^2 h^2 r_a^2} -$$

$$- \frac{\pi_a^2 [\pi_{a'}^2 (r_{a'} + K z_{a'}) + \Lambda^2 z_a]}{\Lambda^2 h^2 r_a r_{a'}} + \frac{K \pi_{a'}^2 [K r_{a'} + (2K^2 - \Lambda^2) z_{a'} - 2\pi_a^2 K z_a]}{\Lambda^2 r_a^3 r_{a'}} +$$

$$+ \frac{\gamma}{\Lambda h^2} \left(\frac{\pi_a^2}{r_{a'}} + \frac{\pi_{a'}^2}{r_a} \right) - \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^4 K}{\Lambda^3 r_a^3} \log \frac{(r_a - \Lambda z_a)(r_{a'} + \Lambda z_{a'})}{(K - \Lambda) h^2} + \frac{\pi_a^2 \pi_{a'} K}{\Lambda^3 h^3} \operatorname{arctg} \frac{r_a - \Lambda z_a}{\pi_{a'} h} +$$

$$+ \frac{\pi_{a'} (\pi_a^2 K + \Lambda^2)}{2\Lambda^3 h^3} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda z_a}{\pi_{a'} h} + \frac{\pi_{a'}}{2\Lambda h^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi_a r_a}{\Lambda h} + \operatorname{arctg} \frac{\pi_a \Lambda z_a}{K h} \right) -$$

$$- \frac{\pi \pi_a^2 \pi_{a'} K}{4\Lambda^3 h^3} - \frac{\pi \pi_a}{4\Lambda h^3} - \frac{\gamma \pi (\pi_a + \pi_{a'})}{4\Lambda h^3} \qquad (3.3.22)$$

$$\overset{\{2,2\}}{\mu_{aa'}} = \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^2 (\pi_{a'}^2 h^2 - 2K r_a z_a)}{2\Lambda^2 h^2 (K^2 r_a^2 - \Lambda^4 z_a^2)} - \frac{\pi_{a'}^4 K (\pi_a^2 r_a z_a + K h^2)}{(K^2 r_a^2 - \Lambda^4 z_a^2)^2} +$$

$$+ \frac{2\pi_a^2 \pi_{a'}^2 K}{\Lambda^4 r_a r_{a'}} - \frac{2\pi_a^2 \pi_{a'}^4 K h^2}{\Lambda^4 r_a^3 r_{a'}} + \frac{K z_a (K z_{a'} + r_{a'})}{\Lambda^2 h^2 r_a r_{a'}} + \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^4}{\Lambda^4 r_a^2} -$$

$$- \frac{\pi_{a'}^2 z_a [K r_{a'} + (2K^2 - \Lambda^2) z_{a'}]}{\Lambda^2 r_a^3 r_{a'}} - \gamma \frac{K^2 z_{a'}}{\Lambda^3 h^2 r_{a'}} - \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^4 z_a}{\Lambda^3 r_a^3} \log \frac{(r_a + \Lambda z_a)(K - \Lambda)}{\pi_{a'}^2 (r_{a'} + \Lambda z_{a'})} \qquad (3.3.23)$$

$$\overset{\{2,2\}}{\mu_{aa}} = \frac{\pi_{a'}^2}{2\Lambda^2 r_a^2} + \frac{K^2}{\Lambda^3 h^2}\left(\frac{\gamma z_a}{r_a} - \frac{1}{\Lambda}\right) \tag{3.3.24}$$

Tota vegada que els p_a^μ satisfan la condició (2.4.32)

$$p_a^\mu p_{a\mu} = -\pi_a^2 \tag{3.3.25}$$

una de les tres funcions α_a, μ_{aa}, $\mu_{aa'}$ pot ésser calculada en funció de les altres. A ordre dos, (3.3.25) ens dóna:

$$\overset{\{2,2\}}{\mu_{aa}} = -\frac{1}{2\Lambda^2}\left\{h^2\left(\overset{\{1,1\}}{\alpha_a}\right)^2 + \pi_a^2\Lambda^2\left(\overset{\{1,1\}}{\mu_{aa'}}\right)^2\right\} \tag{3.3.27}$$

que coincideix amb (3.3.24).

Hem calculat, per tant, els moments de Hamilton-Jacobi fins a ordre quatre. Abans de passar a treure conclusions físiques d'això calcularem també les coordenades de Hamilton-Jacobi.

Aquestes són solució de les equacions diferencials (3.3.2)

$$D_b q_a^\mu = \delta_{ab} p_a^\mu - \Theta_b^\nu \frac{\partial q_a^\mu}{\partial \pi^{b\nu}} \tag{3.3.28}$$

Ara, però, com ja hem comentat més amunt, no tenim unes bones condicions de contorn, i encara que prenguessim (3.3.6), com que no són del tipus (2.5.9) no podriem aplicar els mètodes estudiats al capítol 2. Per tant, integrarem directament -ordre per ordre- (3.3.28) i com a condició de contorn imposarem la (3.3.7):

$$\lim_{x^2 \to \infty_{p(+)}} \epsilon^a \left(q_a^\mu p_a^\nu - q_a^\nu p_a^\mu \right) = \epsilon^a \left(x_a^\mu \pi_a^\nu - x_a^\nu \pi_a^\mu \right) \tag{3.3.29}$$

Com que $q_a^\mu - x_a^\mu$ és un quadrivector invariant pel grup de Poincaré, escriurem:

$$q_a^\mu - x_a^\mu = \eta_a \beta_a h^\mu + \nu_{aa} t_a^\mu + \nu_{aa'} t_{a'}^\mu \tag{3.3.30}$$

Els termes $\overset{\{p,q\}}{q_a^\mu}$ que no siguin de la forma $\{n,n+2p\}$, $\{n+2p,n\}$ els prendrem iguals a zero. Per (3.3.28) aquets termes no depenen de z_a ni de $z_{a'}$ i per tant no canvien en fer el pas al límit $x^2 \to \infty_{p(+)}$. Llavors, (3.3.29) ens diu que els tals termes no contribueixen a $J^{\mu\nu}$. A ordre zero tenim:

$$\overset{\{0,0\}}{q_a^\mu} = x_a^\mu \tag{3.3.31}$$

que correspon a partícules lliures i satisfà (3.3.28). A ordre dos,

$$D_b \overset{\{1,1\}}{q_a^\mu} = \delta_{ab} \overset{\{1,1\}}{p_a^\mu} \tag{3.3.32}$$

és a dir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{\{1,1\}}{\beta_a}}{\partial z_a} = \frac{\kappa}{h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_a}{r_a}\right) \quad ; \quad \frac{\partial \overset{\{1,1\}}{\beta_a}}{\partial z_{a'}} = 0 \\
&\frac{\partial \overset{\{1,1\}}{\nu_{aa}}}{\partial z_a} = \frac{\partial \overset{\{1,1\}}{\nu_{aa}}}{\partial z_{a'}} = 0 \\
&\frac{\partial \overset{\{1,1\}}{\nu_{aa'}}}{\partial z_a} = -\frac{\pi_{a'}^2}{\Lambda^2 r_a} \quad ; \quad \frac{\partial \overset{\{1,1\}}{\nu_{aa'}}}{\partial z_{a'}} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

que hom pot integrar fàcilment i dóna:

$$\overset{\{1,14\}}{\beta_a} = \frac{k}{h^2}\left(\frac{\gamma z_a}{\Lambda} - \frac{r_a}{\Lambda^2}\right) + \overset{\{1,14\}}{\beta_a^*}$$

$$\overset{\{1,14\}}{\nu_{aa}} = \overset{\{1,14\}}{\nu_{aa}^*} \tag{3.3.34}$$

$$\overset{\{1,14\}}{\nu_{aa'}} = -\frac{\pi_{a'}^2}{\Lambda^3} \ln \frac{r_a + \Lambda z_a}{\pi_{a'} h} + \overset{\{1,14\}}{\nu_{aa'}^*}$$

on les funcions $\overset{\{1,14\}}{\beta_a^*}$, $\overset{\{1,14\}}{\nu_{ab}^*}$ són funcions arbitràries de h^2, k, π_b^2 i són la solució de l'equació homogènea $D_b q_a^\mu = 0$. Això ens passarà ordre per ordre, i per tal de poder dir alguna cosa sobre aquestes funcions haurem d'imposar les condicions de contorn (3.3.29). (3.3.34) mostra ja per qué no podem demanar $\lim_{x^2 \to \infty_{p(+)}} q_a^\mu = x_a^\mu$. En efecte, el límit de $\overset{\{1,14\}}{\nu_{aa'}}$, divergeix logarítmicament tant en el cas $z_a \to +\infty$ com en el $z_a \to -\infty$. Això és degut a que la interacció electromagnètica és de llarg abast.

A ordre quatre, els càlculs són força complicats perquè cal integrar el p_a^μ a ordre quatre (3.3.22-24); solament calcularem la contribució al q_a^μ procedent del terme de Dirac, és a dir, $\overset{\{1,3\}}{q_a^\mu}$ i $\overset{\{3,1\}}{q_a^\mu}$:

$$D_b \overset{\{3,1\}}{q_a^\mu} = \delta_{ab} \overset{\{3,1\}}{p_a^\mu} \quad ; \quad D_b \overset{\{1,3\}}{q_a^\mu} = 0 \tag{3.3.35}$$

O sigui, $\overset{\{1,3\}}{q_a^\mu}$ és funció solament de h^2, k, π_b^2 i $\overset{\{3,1\}}{q_a^\mu}$ verifica:

$$\frac{\partial \overset{\{3,4\}}{\beta_a}}{\partial z_a} = -\frac{2\pi_{a'}^2 k}{3\pi_a^2 r_a^3} \quad ; \quad \frac{\partial \overset{\{3,4\}}{\beta_a}}{\partial z_{a'}} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{\{3,4\}}{\nu_{aa}}}{\partial z_a} = \frac{\partial \overset{\{3,4\}}{\nu_{aa}}}{\partial z_{a'}} \tag{3.3.36}$$

$$\frac{\partial \overset{\{3,4\}}{\nu_{aa'}}}{\partial z_a} = \frac{2\pi_{a'}^2 z_a}{3\pi_a^2 r_a^3} \quad ; \quad \frac{\partial \overset{\{3,4\}}{\nu_{aa'}}}{\partial z_{a'}} = 0$$

Integrant, obtenim:

$$\overset{\{3,4\}}{\beta_a} = \frac{2k}{3\pi_a^2 h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_a}{r_a}\right) + \overset{\{3,4\}}{\beta_a^*} \quad ; \quad \overset{\{1,3\}}{\beta_a} = \overset{\{1,3\}}{\beta_a^*}$$

$$\overset{\{3,4\}}{\nu_{aa}} = \overset{\{3,4\}}{\nu_{aa}^*} \quad ; \quad \overset{\{1,3\}}{\nu_{aa}} = \overset{\{1,3\}}{\nu_{aa}^*} \tag{3.3.37}$$

$$\overset{\{3,4\}}{\nu_{aa'}} = -\frac{2\pi_{a'}^2}{3\pi_a^2 \Lambda^2 r_a} + \overset{\{3,4\}}{\nu_{aa'}^*} \quad ; \quad \overset{\{1,3\}}{\nu_{aa'}} = \overset{\{1,3\}}{\nu_{aa'}^*}$$

on, com abans, les funcions amb $*$ són funcions arbitràries de h^2, k, π_b^2.

Resumint el que hem obtingut, tenim:

$$\begin{aligned} p_a^\mu = \pi_a^\mu &+ e_1 e_2 \left\{ \frac{\eta_a k}{h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_a}{r_a}\right) h^\mu - \frac{\pi_{a'}^2}{\Lambda^2 r_a} t_{a'}^\mu \right\} + \\ &+ e_a^3 e_{a'} \left\{ -\frac{2\eta_a \pi_{a'}^2 k}{3\pi_a^2 r_a^3} h^\mu + \frac{2\pi_{a'}^2 z_a}{3\pi_a^2 r_a^3} t_{a'}^\mu \right\} + \\ &+ e_1^2 e_2^2 \left\{ \eta_a \overset{\{2,2\}}{\alpha_0} h^\mu + \overset{\{2,2\}}{\mu_{aa}} t_a^\mu + \overset{\{2,2\}}{\mu_{aa'}} t_{a'}^\mu \right\} + \ldots \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

Aquest p_a^μ verifica:

$$\lim_{x^2 \to \gamma\infty} p_a^{\mu} = \pi_a^{\mu} \tag{3.3.39}$$

$$\lim_{x^2 \to -\gamma\infty} p_a^{\mu} = \pi_a^{\mu} + e_1 e_2 \frac{2\eta_a \gamma K}{h^2 \Lambda} h^{\mu} +$$

$$+ e_1^2 e_2^2 \left\{ - \frac{\eta_a \gamma \pi (\pi_a + \pi_{a'})}{2\Lambda h^3} h^{\mu} - \frac{2K^2}{\Lambda^4 h^2} \left(t_a^{\mu} - t_{a'}^{\mu} \right) \right\} \tag{3.3.40}$$

on $+\infty \equiv \infty_f$ i $-\infty \equiv \infty_p$. Comentarem aquest resultat al apartat següent.

$$q_a^{\mu} = x_a^{\mu} + e_1 e_2 \left\{ \eta_a \left[\frac{K}{h^2} \left(\frac{\gamma z_a}{\Lambda} - \frac{r_a}{\Lambda^2} \right) + \overset{\{1,1\}}{\beta_a^{*}} \right] h^{\mu} + \overset{\{1,1\}}{\nu_{aa}^{*}} t_a^{\mu} + \left[- \frac{\pi_{a'}^2}{\Lambda^3} \ln \frac{r_a + \Lambda z_a}{\pi_{a'} h} + \overset{\{1,1\}}{\nu_{aa'}^{*}} \right] t_{a'}^{\mu} \right\} +$$

$$+ e_a^3 e_{a'} \left\{ \eta_a \left[\frac{2K}{3\pi_a^2 h^2} \left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_a}{r_a} \right) + \overset{\{3,1\}}{\beta_a^{*}} \right] h^{\mu} + \overset{\{3,1\}}{\nu_{aa}^{*}} t_a^{\mu} + \left[- \frac{2\pi_{a'}^2}{3\pi_a^2 \Lambda^2 r_a} + \overset{\{3,1\}}{\nu_{aa'}^{*}} \right] t_{a'}^{\mu} \right\} +$$

$$e_a e_{a'}^3 \left\{ \eta_a \overset{\{1,3\}}{\beta_a^{*}} h^{\mu} + \overset{\{1,3\}}{\nu_{aa}^{*}} t_a^{\mu} + \overset{\{1,3\}}{\nu_{aa'}^{*}} t_{a'}^{\mu} \right\} \tag{3.3.41}$$

Però aquí $\lim\limits_{x^2 \to \infty_{p(f)}} q_a^{\mu}$ és divergent.

3.4. Quadrimoment lineal i tensor moment angular; Radiació.

El quadrimoment lineal total del sistema de dues partícules que estudiem ve donat per (3.3.1):

$$P^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu} \tag{3.4.1}$$

on els p_a^{μ} venen donats a (3.3.38). Aquest P^{μ} (i també el $J^{\mu\nu}$) dona la expressió de partícules lliures quan fem $x^2 \to \gamma\infty$, pero si fem $x^2 \to -\gamma\infty$ en principi no recuperarem ja l'expressió corresponent a partícules lliures. Això també ho podem veure al p_a^μ -(3.3.39) i (3.3.40)-; la diferència entre partícules lliures al $-\gamma\infty$ i allò que obtenim fent el límit ho podem pensar com quadrimoment lineal i tensor moment angular que el sistema ha perdut (radiat). En aquest sentit, el sistema no és conservatiu; encara que P^μ, $J^{\mu\nu}$ són quantitats conservades, només es redueixen a partícules lliures a un dels dos infinits.

Allò que el sistema perd ho podem considerar com el quadrimoment lineal i tensor moment angular de la "radiació" emesa. Com que realment la teoría no conté els fotons, hem de fer una interpretació com la que hom fa a la teoria de l'absorbent de Wheeler i Feynman (WF.45), (WF.49): el quadrimoment lineal i el tensor moment angular "perduts" s'han transmés a l'absorbent, a la resta de partícules de l'univers llunyà (*). Es en aquest sentit precís que parlem de "radiació".

Desprès d'aquesta discussió, calculem P^μ al $-\gamma\infty$. Sumant (3.3.40) ens queda:

$$\lim_{x^2\to-\gamma\infty} P^\mu = \pi_1^\mu + \pi_2^\mu \tag{3.4.2}$$

(*) Malgrat tot, el nostre sistema de dues partícules és aïllat. L'acció de la resta dúnivers consisteix en que a (3.1.15) hi apareixin els potencials retardats i el terme de Dirac, però les acceleracions de cada partícula depenen solament de les posicions i velocitats de les partícules del nostre sistema. Per una discussió interessannt sobre aquest tema vegeu el pròleg de (HN.74)

Es a dir, que a ordre quatre en les càrregues sí que recuperem partícules lliures tant al infinit passat com futur. Per tant, el sistema comença a "radiar" quadrimoment lineal a ordre sis o superior.

Passem ara al càlcul del $J^{\mu\nu}$. En primer lloc escollirem una base per als tensors antisimètrics de segon ordre. Prenem:

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^b\, x_b^{[\mu}\, h^{\nu]} \qquad ; \qquad \epsilon^b\, x_b^{[\mu}\, t_a^{\nu]} \\
&h^{[\mu}\, t_a^{\nu]} \qquad ; \qquad \eta_a\, t_a^{[\mu}\, t_{a'}^{\nu]}
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

on [ ] indica antisimetrització respecte dels índexs afectats per el [ ]. Si substituim (3.3.12), (3.3.30) a (3.3.1) obtenim la següent expressió general de $J^{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
J^{\mu\nu} = {} & \epsilon^a\, x_a^{[\mu}\, \pi_a^{\nu]} + \frac{1}{2}\eta_a(\alpha_a - \alpha_{a'})\,\epsilon^b\, x_b^{[\mu}\, h^{\nu]} + \frac{1}{2}\epsilon^a(\mu_{aa} + \mu_{a'a})\,\epsilon^b\, x_b^{[\mu}\, t_a^{\nu]} + \\
& + \Big\{ \frac{1}{2\Lambda^2}\epsilon^a (x\pi_{a'})(\mu_{a'a} - \mu_{oa}) - \frac{1}{\Lambda^2}\epsilon^a\eta_a(k\,\nu_{aa} - \pi_a^2\,\nu_{aa'}) + \epsilon^a\eta_a(\mu_{aa'}\,\nu_{aa} - \\
& - \mu_{oa}\,\nu_{aa'}) \Big\}\, t_1^{[\mu}\, t_2^{\nu]} + \epsilon^a \Big\{ -\frac{(x\pi_a)}{2\Lambda^2}(\alpha_a + \alpha_{a'}) + \frac{1}{2}\eta_a(\mu_{oa} - \mu_{a'a}) + \frac{\eta_a}{\Lambda^2}(k\,\beta_{a'} - \\
& - \pi_a^2\,\beta_a) + \eta_a(\beta_a\mu_{aa} - \beta_{a'}\mu_{a'a} - \alpha_a\nu_{aa} + \alpha_{a'}\nu_{a'a}) \Big\}\, h^{[\mu}\, t_a^{\nu]}
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

El primer terme és el que correspon a partícules lliures. Ara hem d'imposar, ordre per ordre, la condició límit (3.3.7). per això ens cal saber com actúa $R_a(\lambda)$ sobre la base (3.4.3)

$$
R_a(\lambda)\,\epsilon^b\, x_b^{[\mu}\, h^{\nu]} = \epsilon^b\, x_b^{[\mu}\, h^{\nu]} + \lambda\frac{\pi_a^2}{\Lambda^2}\, h^{[\mu}\, t_a^{\nu]} + \lambda\frac{k}{\Lambda^2}\, h^{[\mu}\, t_{a'}^{\nu]}
$$

$$R_a(\lambda)\,\epsilon^b x_b^{[\mu} t_a^{\nu]} = \epsilon^b x_b^{[\mu} t_a^{\nu]} + \lambda \frac{k}{\Lambda^2}\, t_a^{[\mu} t_{a'}^{\nu]}$$

$$R_a(\lambda)\,\epsilon^b x_b^{[\mu} t_{a'}^{\nu]} = \epsilon^b x_b^{[\mu} t_{a'}^{\nu]} - \lambda \frac{\pi_a^2}{\Lambda^2}\, t_a^{[\mu} t_{a'}^{\nu]}$$

$$R_a(\lambda)\, h^{[\mu} t_b^{\nu]} = h^{[\mu} t_b^{\nu]}$$

$$R_a(\lambda)\, t_1^{[\mu} t_2^{\nu]} = t_1^{[\mu} t_2^{\nu]} \qquad (3.4.5)$$

Tenint en compte aquests resultats, la condició $\lim\limits_{x^2 \to \gamma\infty} J^{\mu\nu} = \epsilon^a x_a^{[\mu} \pi_a^{\nu]}$ ens dona:

$$\lim_{x^2 \to \gamma\infty} \epsilon^a \eta_a \left\{ \mu\left(k h_a \mu_{aa} + \pi_{a'}^2 h_{a'} \mu_{a'a}\right) - k \nu_{aa} + \pi_a^2 \nu_{aa'} + \Lambda^2\left(\mu_{aa'} \nu_{aa} - \mu_{aa} \nu_{aa'}\right) \right\} = 0 \qquad (3.4.6)$$

$$\lim_{x^2 \to \gamma\infty} \left\{ \mu\left(\pi_a^2 h_a \alpha_a - k h_{a'} \alpha_{a'}\right) + k \beta_{a'} - \pi_a^2 \beta_a + \Lambda^2\left(\beta_a \mu_{aa} - \beta_{a'} \mu_{a'a} - \alpha_a \nu_{aa} + \alpha_{a'} \nu_{a'a}\right) \right\} = 0 \quad (3.4.7)$$

on μ, h_a, $h_{a'}$ són els que apareixen a la definició del $\lim\limits_{x^2 \to \gamma\infty}$ (vegeu (2.4.22-23) i (3.3.9)). Es a dir, aquest límit cal entendre'l com:

$$\lim_{x^2 \to \gamma\infty} f(z_a, z_{a'}; \omega) = \lim_{\mu \to \gamma\infty} f(z_a + \mu h_a, z_{a'} + \mu h_{a'}; \omega)$$

$$\frac{k-\Lambda}{\pi_a \pi_{a'}} < \frac{\pi_a h_a}{\pi_{a'} h_{a'}} < \frac{k+\Lambda}{\pi_a \pi_{a'}} \qquad (3.4.8)$$

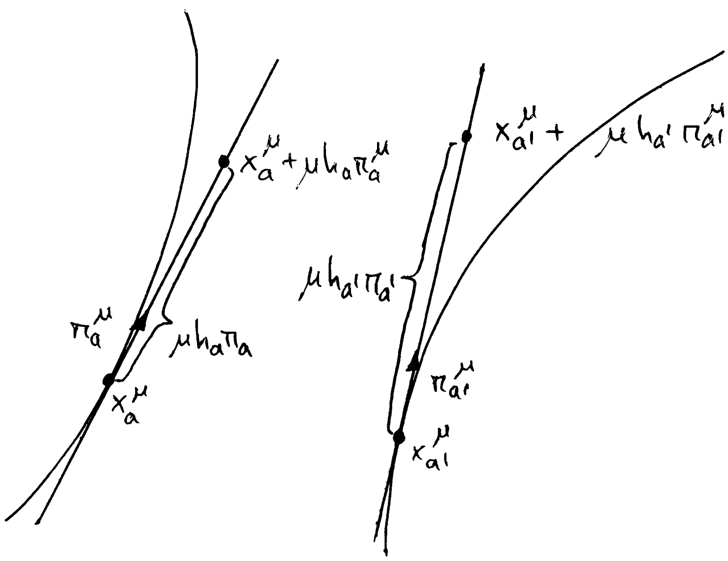
on ω indica la resta de variables h^2, k, π_b^2 .

Les condicions (3.4.6-7) cal imposar-les ordre per ordre i ens donaran restriccions sobre les funcions arbitràries β_a^* ν_{ab}^*. A ordre dos, substituint les expressions (3.3.16) i (3.3.24) obtenim:

$$\overset{\{1,1\}}{\beta^{*}_{a}} = 0$$

$$K \overset{\{1,1\}}{\nu^{*}_{aa}} - \pi_a^2 \overset{\{1,1\}}{\nu^{*}_{aa'}} - K \overset{\{1,1\}}{\nu^{*}_{a'a'}} + \pi_{a'}^2 \overset{\{1,1\}}{\nu^{*}_{a'a}} = \gamma \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^2}{\Lambda^3} \ln \frac{\pi_{a'} h_{a'}}{\pi_a h_a} \qquad (3.4.9)$$

Es a dir, la component h^{μ} de $\overset{\{1,1\}}{q_a^{\mu}}$ queda perfectament determinada. Per altra part, la relació que ens dona per les $\overset{\{1,1\}}{\nu^{*}_{ab}}$ depén de la manera com fem el límit (depén de h_a i $h_{a'}$). Això és degut al llarg abast de la interacció electromagnètica. El terme responsable del ln que apareix a (3.4.9) és el mateix que fa els q_a^{μ} divergents. Prendrem a partir d'ara la prescripció $\pi_a h_a = \pi_{a'} h_{a'}$ per a fer el pas al límit (3.4.8) Qué significa aquesta prescripció? El límit $x^2 \to \gamma\infty$ correspon a traslladar cada partícula sobre la tangent a la trajectòria una distancia $\mu h_a \pi_a$ (per a la partícula a) de manera que els punts transportats estiguin sobre una superfície de tipus espai. $h_a \pi_a = h_{a'} \pi_{a'}$ significa que traslladem cada partícula la mateixa distància sobre les tangents respectives (la qual cosa és compatible amb (3.4.8)). La figura següent mostra com es fan aquests desplaçaments:



A més, la prescripció $h_a \pi_a = h_{a'} \pi_{a'}$ és l'única per a la qual no hi ha"radiació" de tensor moment angular $J^{\mu\nu}$ a aquest ordre. Si escrivim el $\overset{\{1,1\}}{J}{}^{\mu\nu}$ utilitzant (3.4.9) ens queda:

$$\overset{\{1,1\}}{J}{}^{\mu\nu} = \frac{\eta_a k}{2h^2}\left(\frac{z_{a'}}{r_{a'}} - \frac{z_a}{r_a}\right)\epsilon^b x_b^{[\mu} h^{\nu]} - \epsilon^a \frac{\pi_a^2}{2\Lambda^2 r_{a'}} \epsilon^b x_b^{[\mu} t_a^{\nu]} +$$

$$+ \frac{1}{2\Lambda^4}\left\{\epsilon^a \eta_a \frac{\pi_a^2}{r_{a'}}\left(k z_a - \pi_{a'}^2 z_{a'}\right) + \eta_a \frac{\pi_a^2 \pi_{a'}^2}{\Lambda} \ln \frac{\pi_{a'}(\Lambda z_{a'} + r_{a'})}{\pi_a(\Lambda z_a + r_a)}\right\} t_1^{[\mu} t_2^{\nu]} +$$

$$+ \epsilon^a \frac{\eta_a k}{2\Lambda^2 h^2}\left\{(k z_{a'} - \pi_a^2 z_a)\left(\frac{z_a}{r_a} + \frac{z_{a'}}{r_{a'}}\right) + \frac{2}{\Lambda^2}\left(\pi_a^2 r_a - k r_{a'}\right) + \frac{\pi_a^2 h^2}{k r_{a'}}\right\} h^{[\mu} t_a^{\nu]} \qquad (3.4.10)$$

i com que (3.4.10) no depén de γ, és clar que

$$\lim_{x^2 \to \infty p} \overset{\{1,1\}}{J}{}^{\mu\nu} = \lim_{x^2 \to \infty f} \overset{\{1,1\}}{J}{}^{\mu\nu} = 0 \qquad (3.4.11)$$

Podem fer el mateix amb $\overset{\{1,3\}}{J}{}^{\mu\nu}$ i $\overset{\{3,1\}}{J}{}^{\mu\nu}$. Les condicions (3.4.6-7) ens donen:

$$\begin{aligned} &\overset{\{1,3\}}{\beta}{}_a^* = \overset{\{3,1\}}{\beta}{}_a^* = 0 \\ &k \overset{\{1,3\}}{\nu}{}_{aa}^* - \pi_a^2 \overset{\{1,3\}}{\nu}{}_{aa'}^* - k \overset{\{3,1\}}{\nu}{}_{a'a'}^* + \pi_{a'}^2 \overset{\{3,1\}}{\nu}{}_{a'a}^* = 0 \\ &k \overset{\{3,1\}}{\nu}{}_{aa}^* - \pi_a^2 \overset{\{3,1\}}{\nu}{}_{aa'}^* - k \overset{\{1,3\}}{\nu}{}_{a'a'}^* + \pi_{a'}^2 \overset{\{1,3\}}{\nu}{}_{a'a}^* = 0 \end{aligned} \qquad (3.4.12)$$

Com a ordre dos, les components h^μ de $\overset{\{1,3\}}{q}{}_a^\mu$ i $\overset{\{3,1\}}{q}{}_a^\mu$ queden totalment determinades. Escriguem ara quins són $\overset{\{1,3\}}{J}{}^{\mu\nu}$ i $\overset{\{3,1\}}{J}{}^{\mu\nu}$:

$$\overset{\{1,3\}}{J}{}^{\mu\nu} = \frac{\pi_1^2 K}{3\pi_2^2 r_2^3}(x_1+x_2)^{[\mu} h^{\nu]} + \frac{\pi_1^2 z_2}{3\pi_2^2 r_2^3}(x_1+x_2)^{[\mu} t_1^{\nu]} +$$

$$+ \frac{\pi_1^2}{3\Lambda^2 r_2}\left\{\frac{z_2}{\pi_2^2 r_2^2}(\pi_2^2 z_2 - K z_1) + \frac{2}{\Lambda^2}\right\} t_1^{[\mu} t_2^{\nu]} + \frac{1}{3\pi_2^2}\left\{\frac{\pi_1^2 K}{\Lambda^2 r_2^3}(K z_2 - \pi_1^2 z_1) - \frac{\pi_1^2 z_2}{r_2^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{2K^2}{\Lambda^2 h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_2}{r_2}\right)\right\} h^{[\mu} t_1^{\nu]} + \frac{K}{3\Lambda^2\pi_2^2}\left\{\frac{\pi_1^2}{r_2^3}(\pi_2^2 z_2 - K z_1) + \frac{2\pi_2^2}{h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_2}{r_2}\right)\right\} h^{[\mu} t_2^{\nu]} \quad (3.4.13)$$

$$\overset{\{3,1\}}{J}{}^{\mu\nu} = -\frac{\pi_2^2 K}{3\pi_1^2 r_1^3}(x_1+x_2)^{[\mu} h^{\nu]} + \frac{\pi_2^2 z_1}{3\pi_1^2 r_1^3}(x_1+x_2)^{[\mu} t_2^{\nu]} -$$

$$- \frac{\pi_2^2}{3\Lambda^2 r_1}\left\{\frac{z_1}{\pi_1^2 r_1^2}(\pi_1^2 z_1 - K z_2) + \frac{2}{\Lambda^2}\right\} t_1^{[\mu} t_2^{\nu]} - \frac{1}{3\pi_1^2}\left\{\frac{\pi_2^2 K}{\Lambda^2 r_1^3}(K z_1 - \pi_2^2 z_2) - \frac{\pi_2^2 z_1}{r_1^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{2K^2}{\Lambda^2 h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_1}{r_1}\right)\right\} h^{[\mu} t_2^{\nu]} - \frac{K}{3\Lambda^2\pi_1^2}\left\{\frac{\pi_2^2}{r_1^3}(\pi_1^2 z_1 - K z_2) + \frac{2\pi_1^2}{h^2}\left(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_1}{r_1}\right)\right\} h^{[\mu} t_1^{\nu]} \quad (3.4.14)$$

Aquests $J^{\mu\nu}$ han estat determinats amb la condició:

$$\lim_{x^2 \to \gamma\infty} \overset{\{1,3\}}{J}{}^{\mu\nu} = \lim_{x^2 \to \gamma\infty} \overset{\{3,1\}}{J}{}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4.15)$$

però com que els $J^{\mu\nu}$ així determinats depenen explícitament de γ, al $-\gamma\infty$ ja no donaran zero. Calculant el límit $x^2 \to -\gamma\infty$ obtenim:

$$\lim_{x^2 \to -\gamma\infty} \overset{\{1,3\}}{J}{}^{\mu\nu} = -\frac{4\gamma K}{3\Lambda h^2 \pi_2^2} h^{[\mu} \pi_2^{\nu]} \quad (3.4.16)$$

$$\lim_{x^2 \to -\gamma\infty} \overset{\{3,1\}}{J}{}^{\mu\nu} = \frac{4\gamma K}{3\Lambda h^2 \pi_1^2} h^{[\mu} \pi_1^{\nu]} \quad (3.4.17)$$

Aquestes dues equacions ens donen el moment angular "radiat" pel sistema.

El quadrivector de Pauli-Lubanski W^{μ} el podem calcular fàcilment a partir tant de (3.3.3) com de (3.3.4). La seva expressió general la trobarem a l'Apèndix 4. Fins a ordre quatre, exceptuant el terme $\{2,2\}$, tenim:

$$W^{\mu} = \Big\{ 1 - \epsilon^{a}\Big[z_a \overset{\{1,1\}}{\alpha_a} - \overset{\{1,1\}}{\beta_a} + \Big(K - \frac{\Lambda^2}{\pi_*^2}\Big) \overset{\{1,1\}}{\mu_{aa'}} \Big] e_1 e_2 -$$

$$- \epsilon^{a}\Big[z_a \overset{\{3,1\}}{\alpha_a} - \overset{\{3,1\}}{\beta_a} + \Big(K - \frac{\Lambda^2}{\pi_*^2}\Big) \overset{\{3,1\}}{\mu_{aa'}} \Big] e_a^3 e_{a'} \Big\} \frac{n^{\mu}}{\pi_*} \qquad (3.4.18)$$

on n^{μ} i π_* venen donats per:

$$n^{\mu} = \epsilon^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\, x^{\nu} \pi_1^{\lambda} \pi_2^{\rho}$$

$$\pi_*^2 = -(\pi_1+\pi_2)^{\mu}(\pi_1+\pi_2)_{\mu} = \pi_1^2 + \pi_2^2 + 2K \qquad (3.4.19)$$

Substituint els valors de α, β, μ a (3.4.18) obtenim:

$$W^{\mu} = \Big\{ 1 + \Big(\frac{\pi_1^2}{r_2} + \frac{\pi_2^2}{r_1}\Big)\frac{e_1 e_2}{\pi_*^2} + \epsilon^{a}\Big[\frac{2K}{3\pi_a^2 h^2}\Big(\frac{\gamma}{\Lambda} - \frac{z_a}{r_a}\Big) + \frac{2\Lambda^2 \pi_{a'}^2 z_a}{3\pi_a^2 \pi_*^2 r_a^3}\Big] e_a^3 e_{a'} \Big\} \frac{n^{\mu}}{\pi_*} \qquad (3.4.20)$$

Aquest W^{μ} verifica òbviament $\lim_{x^2 \to \gamma\infty} W^{\mu} = n^{\mu}/\pi_*$, però en canvi,

$$\lim_{x^2 \to -\gamma\infty} W^{\mu} = \Big\{ 1 + \frac{4\gamma K}{3\Lambda h^2}\Big(\frac{e_1^2}{\pi_1^2} + \frac{e_2^2}{\pi_2^2}\Big) e_1 e_2 \Big\} \frac{n^{\mu}}{\pi_*} \qquad (3.4.21)$$

on el segon terme del segon membre representa el quadrivector de Pauli-Lubanski "radiat". Les expressions (3.4.20-21) són bastant senzilles. Per tal de veure millor el seu significat físic passarem al formalisme tridimensional i desenvoluparem en potències de 1/c. Es a dir, farem

$$x^{\mu}=(0,\vec{r})\ ;\ \pi_a^{\mu}=m_a\gamma_a\left(1,\frac{\vec{v}_a}{c}\right)\ ;\ \gamma_a=\left(1-\frac{\vec{v}_a^{\,2}}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad (3.4.22)$$

i introduïrem també les notacions

$$\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_2=\eta_a(\vec{v}_a-\vec{v}_{a'})\ ;\ M=m_1+m_2\ ;\ m=\frac{m_1m_2}{M} \qquad (3.4.23)$$

Amb tot això, de (3.4.20) hom obté:

$$\vec{W}=m\,\vec{r}\wedge\vec{v}\Big\{1+\underbrace{\frac{v_a^2+v_{a'}^2}{2c^2}-\frac{m v^2}{2Mc^2}}_{\text{Relativiste}}+\underbrace{\frac{e_ae_{a'}}{Mrc^2}}_{\text{Coulomb}}+$$

$$+\underbrace{\frac{2e_ae_{a'}}{3|\vec{r}\wedge\vec{v}|^2c^2}\left(\frac{e_a^2}{m_a^2}+\frac{e_{a'}^2}{m_{a'}^2}\right)\left(\gamma-\frac{\vec{r}\vec{v}}{rc}\right)}_{\text{Dirac}}+O\left(\frac{1}{c^4}\right)\Big\} \qquad (3.4.24)$$

On el terme d'ordre zero és el quadrivector de Pauli-Lubanski de dues partícules a la mecànica newtoniana, i la resta són la correcció relativista (que hi apareix igualment per a partícules lliures), la correcció coulombiana (l'ordre més baix en e_1e_2) i la deguda al terme de Dirac.

Calculem finalment el quadrivector de Pauli-Lubanski "radiat" en un procés de difusió. Si tenim partícules lliures al $-\infty$ i $+\infty$, direm que

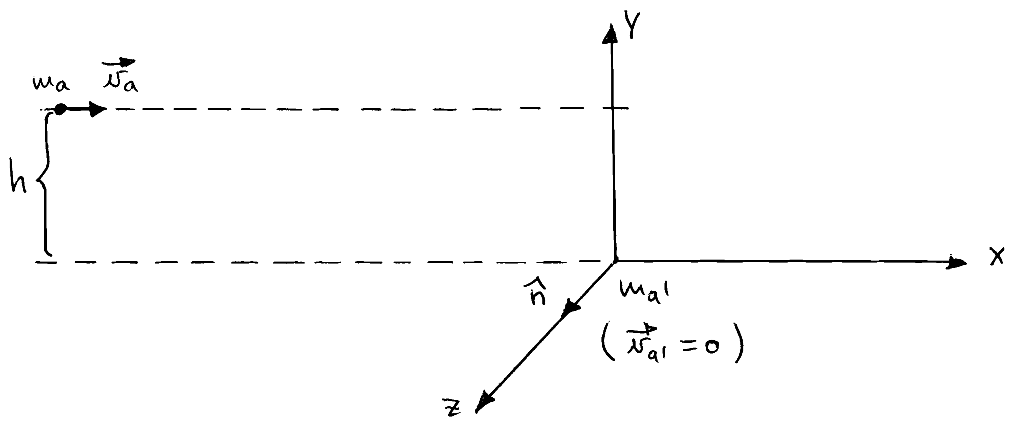
$$W^{\mu}_{rad} = \left.\frac{n^{\mu}}{\Pi_*}\right|_{-\infty} - \left.\frac{n^{\mu}}{\Pi_*}\right|_{+\infty} \qquad (3.4.25)$$

Utilitzant (3.4.21) per $r = +1$, i atés que W^{μ} és una quantitat conservada, ens queda:

$$W^{\mu}_{rad(Dirac)} = -\frac{4Ke_1e_2}{3\Lambda h^2}\left(\frac{e_1^2}{\Pi_1^2} + \frac{e_2^2}{\Pi_2^2}\right)\left.\frac{n^{\mu}}{\Pi_*}\right|_{In} \qquad (3.4.26)$$

on "In" vol dir que totes les quantitats són referidas al $-\infty$, és a dir a les partícules incidents. Hem posat (Dirac) perquè aquesta és la"radiació" de W^{μ} deguda al terme de Dirac, i és possible que $W^{\mu}_{\{2,2\}}$ doni també la seva contribució (deguda al potencial retardat). No ho hem calculat degut a que és enormement farragós treballar a aquest ordre; per altra part aquesta possible contribució no pot cancel.lar mai (3.4.26) tota vegada que la dependència en les càrregues és diferent.

Si ens posem al sistema laboratori, h és precisament el paràmetre d'impacte. El sistema, al $-\infty$, és:



Desenvolupant (3.4.26) en potències de 1/c tenim finalment:

$$\vec{W}^{\,Lab}_{rad(Dirac)} = \frac{4e_1e_2m}{3hc^3}\left(\frac{e_1^2}{m_1^2}+\frac{e_2^2}{m_2^2}\right)\hat{n}\left(1+O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right) \qquad (3.4.27)$$

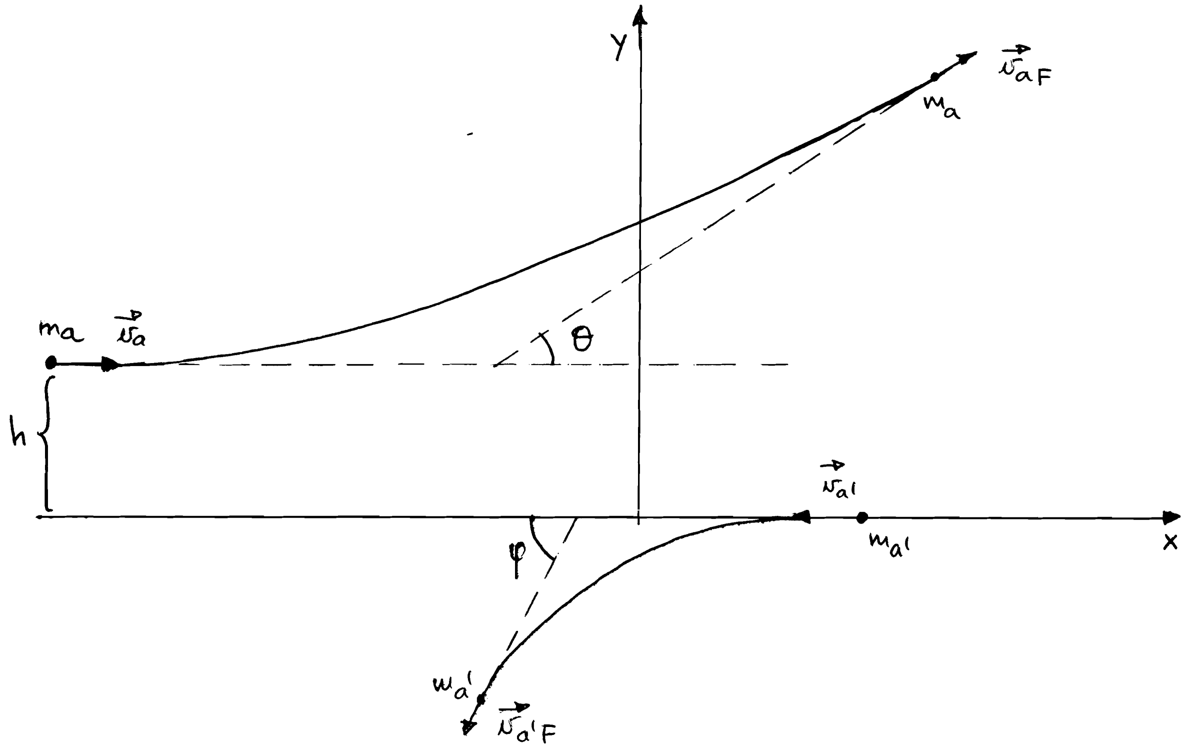
3.5. Secció eficaç de difusió.

Tota vegada que els moments de Hamilton-Jacobi p_1^μ , p_2^μ són constants del moviment (2.4.29), tenim un nombre suficient d'equacions per a determinar els π_1^μ, π_2^μ al $+\infty$ en un procés de difusió, en termes de π_1^μ, π_2^μ al $-\infty$. Podrem, per tant, calcular la secció eficaç. Això ho farem al sistema laboratori (Lab), on una de les partícules està parada (a t=$-\infty$) i al sistema centre de masses (cdm), on $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=0$. Utilitzarem la seguent definició de secció eficaç (vegeu (GO.63) pàgina 101 i següents):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{h}{\sin\theta}\left|\frac{dh}{d\theta}\right| \quad , \quad \theta\in[0,\pi] \qquad (3.5.1)$$

on h és el paràmetre d'impacte (que coincideix amb h^2 de la fórmula (3.2.3) als dos sistemes de referència esmentats), i θ és l'angle de dispersió de la partícula a. La situació és la que mostra la figura de la pàgina següent.

Al sistema Lab, $\vec{v}_{a'}=0$, i al cdm $m_a\gamma_a\vec{v}_a+m_{a'}\gamma_{a'}\vec{v}_{a'}=0$. Les quantitats $\vec{v}_{aF}$, θ , φ són referides a t=$+\infty$; totes les altres que apareixen, ho seràn a t=$-\infty$.



El d de (3.5.1) és invariant sota transformacions de Lorentz pures en la direcció de $\vec{v}_a$ i per tant podem utilitzar (3.5.1) tant al sistema cdm com al Lab. $d\Omega$ és l'element infinitesimal d'angle sòlid, $\sin\theta\, d\theta\, d\phi$; i com que el moviment és pla, té simetria axial i podem integrar la ϕ : $d\Omega \equiv 2\pi \sin\theta\, d\theta$.

Degut a que el moviment és pla i a que $p_a^{\mu} p_{a\mu} = -m_a^2$, les vuit quantitats conservades p_a^{μ} es redueixen a quatre: les components d'espai de p_a^{μ} al pla on té lloc la col.lisió. Tenim també quatre incògnites: v_{aF} , $v_{a'F}$, θ i φ .

Com que hem fet els límits $x^2 \to \pm\infty$, les z_a, $z_{a'}$ no apareixeran a les nostres fórmules. Les quatre quantitats esmentades dependran solament de h, m_a, $m_{a'}$, v_a, $v_{a'}$, e_a , $e_{a'}$. Per raons dimensionals, en desenvolupar en les càrregues, apareixerà sempre la h en la forma e^2/h . Per tant, posarem (som ara al sistema Lab):

$$
\begin{aligned}
v_{aF} &= v_a + \overset{(1)}{v}_a \frac{e_1e_2}{h} + \overset{(2)}{v}_a \left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2 + O(6) \\
v_{a'F} &= \overset{(1)}{v}_{a'} \frac{e_1e_2}{h} + \overset{(2)}{v}_{a'} \left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2 + O(6) \\
\theta &= \overset{(1)}{\theta} \frac{e_1e_2}{h} + \overset{(2)}{\theta} \left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2 + O(6) \\
\varphi &= \frac{\pi}{2} + \overset{(1)}{\varphi} \frac{e_1e_2}{h} + \overset{(2)}{\varphi} \left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2 + O(6)
\end{aligned}
\tag{3.5.2}
$$

on O(6) indica termes de la forma $e_a^p e_{a'}^q$, amb $p+q \geq 6$. A (3.5.2) no hem posat termes no diagonals $e_a^3 e_{a'}$, perquè no apareixen a les expressions de $p_a^\mu\big|_{\pm\infty}$ (3.3.39-40). Posant en aquellas fórmulas $\gamma=+1$, tenim:

$$
\pi_a^\mu + \frac{e_1e_2}{h}\cdot\frac{2\eta_a K}{\Lambda}\cdot\frac{h^\mu}{h} + \left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2\left\{-\frac{\eta_a\pi(m_a+m_{a'})}{2\Lambda}\frac{h^\mu}{h} + \frac{2K^2}{\Lambda^4}\left(t_{a'}^\mu - t_a^\mu\right)\right\} = \pi_{aF}^\mu \tag{3.5.3}
$$

Al sistema Lab tenim:

$$
\begin{aligned}
&h^\mu = (0,0,\eta_a h,0) \qquad t_{a'}^\mu - t_a^\mu = -m_a m_{a'}\gamma_a\left(m_a\gamma_a v_a^2,(m_{a'}+m_a\gamma_a)v_a,0,0\right) \\
&K = m_a m_{a'}\gamma_a \qquad\qquad \Lambda = m_a m_{a'}\gamma_a v_a
\end{aligned}
\tag{3.5.4}
$$

Les components x, y de l'equació (3.5.3) ens donen:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{aF} v_{aF}\cos\theta &= \gamma_a v_a - \frac{2(m_{a'}+m_a\gamma_a)}{m_a^2 m_{a'}\gamma_a v_a^3}\left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2 + O(6) \\
\epsilon\gamma_{aF} v_{aF}\sin\theta &= \frac{2}{m_a v_a}\cdot\frac{e_1e_2}{h} - \frac{\pi(m_a+m_{a'})}{2m_a^2 m_{a'}\gamma_a v_a}\left(\frac{e_1e_2}{h}\right)^2 + O(6)
\end{aligned}
\tag{3.5.5}
$$

on la ϵ és el signe de $e_1 e_2$; si la força és atractiva, $\epsilon =$ $=-1$ i la component $\underline{y}$ de π^{μ}_{aF} es negativa. Ara be, utilitzant els desenvolupaments (3.5.2),

$$\gamma_{aF} v_{aF} \cos\theta = \gamma_a v_a + \gamma_a^3 \overset{(1)}{v_a} \frac{e_1 e_2}{h} + \left\{ \gamma_a^3 \overset{(2)}{v_a} + \frac{3}{2} \gamma_a^5 v_a \overset{(1)}{v_a}{}^2 - \frac{1}{2} \gamma_a v_a \overset{(1)}{\theta}{}^2 \right\} \left(\frac{e_1 e_2}{h} \right)^2 + O(6)$$

$$\gamma_{aF} v_{aF} \sin\theta = \gamma_a v_a \overset{(1)}{\theta} \frac{e_1 e_2}{h} + \left\{ \gamma_a^3 \overset{(1)}{v_a} \overset{(1)}{\theta} + \gamma_a v_a \overset{(2)}{\theta} \right\} \left(\frac{e_1 e_2}{h} \right)^2 + O(6) \qquad (3.5.6)$$

Comparant amb (3.5.5) obtenim:

$$\theta = \frac{2\epsilon}{m_a \gamma_a v_a^2} \cdot \frac{e_1 e_2}{h} - \frac{\epsilon \pi (m_a + m_{a'})}{2 m_a^2 m_{a'} \gamma_a^2 v_a^2} \left(\frac{e_1 e_2}{h} \right)^2 + O(6) \qquad (3.5.7)$$

$$v_{aF} = v_a - \frac{2}{m_a m_{a'} \gamma_a^3 v_a^3} \left(\frac{e_1 e_2}{h} \right)^2 + O(6) \qquad (3.5.8)$$

Podriem fer això mateix per tal d'obtenir $v_{a'F}$, φ ; el resultat és:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \epsilon \frac{m_{a'} + m_a \gamma_a}{m_a m_{a'} \gamma_a v_a^2} \cdot \frac{e_1 e_2}{h} + O(4)$$

$$v_{a'F} = -\frac{2\epsilon}{v_a} \frac{e_1 e_2}{h} + \frac{\epsilon \pi (m_a + m_{a'})}{2 m_a m_{a'} \gamma_a v_a} \left(\frac{e_1 e_2}{h} \right)^2 + O(6) \qquad (3.5.9)$$

Per a calcular la secció eficaç cal trobar $h(\theta)$, és a dir, hem de invertir la sèrie de (3.5.7). Busquem

$$\frac{e_1 e_2}{h} = \alpha \theta + \beta \theta^2 + O(\theta^3) \qquad (3.5.10)$$

Substituint a (3.5.7), tenim:

$$\alpha = \frac{1}{\overset{(1)}{\theta}} \quad , \quad \beta = -\frac{\overset{(2)}{\theta}}{\overset{(1)}{\theta}{}^{3}} \tag{3.5.11}$$

i finalment, aïllant h de (3.5.10),

$$h = e_1 e_2 \left\{ \frac{1}{\alpha\theta} - \frac{\beta}{\alpha^2} + O(\theta) \right\} = e_1 e_2 \left\{ \frac{\overset{(1)}{\theta}}{\theta} + \frac{\overset{(2)}{\theta}}{\overset{(1)}{\theta}} + O(\theta) \right\} \tag{3.5.12}$$

Substituint els valors de $\overset{(1)}{\theta}$ i $\overset{(2)}{\theta}$,

$$h = \frac{2\epsilon e_1 e_2}{m_a \gamma_o v_a^2 \theta} - \frac{\pi e_1 e_2}{4 m \gamma_a} + O(\theta^2) \tag{3.5.13}$$

on hem posat $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$ i hem tingut en compte que $\theta \sim e^2$. De (3.5.13) hom pot calcular sens dificultat la secció eficaç; tenint en compte que a l'ordre que estem treballant $\theta = \sin\theta = \mathrm{tg}\,\theta$,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \left(\frac{e_1 e_2}{2 m_a \gamma_a v_a^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 \left\{ 1 - \epsilon \frac{\pi m_a v_a^2}{4m} \sin\frac{\theta}{2} + O(\theta^2) \right\} \tag{3.5.14}$$

El primer terme del segon membre l'identifiquem com la secció eficaç de Rutherford i el segon terme seria la correcció relativista (deguda al potencial retardat, doncs procedeix del terme $e_1^2 e_2^2$).

El càlcul en el sistema cdm es fa igualment; tenint en compte

$$h^{\mu} = (0,0,\eta_a h,0) \quad ; \quad t_a^{\mu} = (\gamma_a - \bar{K}\gamma_{a'}, \gamma_a v_a - \bar{K}\gamma_{a'} v_{a'}, 0, 0)$$

$$\gamma_{a'} = \left\{1 + \left(\frac{m_a}{m_{a'}}\gamma_a v_a\right)^2\right\}^{1/2} \quad ; \quad \bar{K} = \gamma_a \gamma_{a'}(1 - v_a v_{a'}) \quad ; \quad \bar{\Lambda}^2 = \bar{K}^2 - 1 \qquad (3.5.15)$$

hom obté:

$$\theta = \frac{2\epsilon \bar{K}}{m_a \gamma_a v_a \bar{\Lambda}} \frac{e_1 e_2}{h} - \frac{\epsilon \pi}{2 m m_a \gamma_a v_a \bar{\Lambda}} \left(\frac{e_1 e_2}{h}\right)^2 + O(6)$$

$$v_{aF} = v_a + \frac{2\bar{K}^2}{m_a^2 m_{a'}^2 \gamma_a^4 v_a \bar{\Lambda}^4} \left\{ m_{a'}^2 \bar{\Lambda}^2 - (m_a^2 + m_{a'}^2)\gamma_a^2 v_a^2 \right\} \left(\frac{e_1 e_2}{h}\right)^2 + O(6) \qquad (3.5.16)$$

i finalment:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cdm} = \left(\frac{\bar{K} e_1 e_2}{2 m_a \gamma_a v_a \bar{\Lambda} \sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 \left\{1 - \epsilon \frac{\pi m_a \gamma_a v_a \bar{\Lambda}}{4 m \bar{K}^2} \sin\frac{\theta}{2} + O(\theta^2)\right\} \qquad (3.5.17)$$

Per a baixes energies, el primer terme del segon membre ens dóna la secció eficaç de Rutherford; si fem una de les masses infinita ($m_{a'} \to +\infty$) recuperem la fórmula de Mott (vegeu (LU.68), pàgina 261) al primer ordre en les càrregues. Estudiem finalment el cas $m_a = m_{a'}$, $e_a = e_{a'}$; després de la dispersió no podem distingir les partícules una de l'altra i cal sumar les seccions eficaces d'ambdues (vegeu (LL.65), pàgine 64). A primer ordre tenim:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cdm} = \frac{e_a^4 (2\gamma_a^2 - 1)^2}{m_a^2 v_a^4 \gamma_a^6 \sin^4\theta} \qquad (3.5.18)$$

L'electrodinàmica quàntica dóna, per a la difusió de dues partícules indistingibles, sens spín i en el sistema cdm, la fórmula (vegeu (AB.65), pàgina 838):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cdm} = \frac{e_a^4(2\gamma_a^2-1)^2}{4\omega_a^2 v_a^4 \gamma_a^6}\left(\frac{2}{\sin^2\theta} - \frac{\gamma_a^2-1}{2\gamma_a^2-1}\right)^2 \qquad (3.5.19)$$

Ara bé, $(\gamma_a^2-1)/(2\gamma_a^2-1) < 1/2$ i per tant, en la nostre aproximació, podem menysprear el segon terme del parèntesi, i recuperem (3.5.18).

Abans d'acabar, pensem un moment en la naturalesa dels desenvolupaments que hem estat fent a aquest capítol. Hem fet desenvolupaments formals en les càrregues e_1, e_2, que per raons dimensionals podem considerar realment com desenvolupaments en la quantitat adimensional e_1e_2/mc^2h , on m és alguna de les masses del sistema i h és el paràmetre d'impacte de les dues partícules (en qualsevol sistema de referència on $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$). Aproximar les quantitats calculades (Θ_a^{μ}, P^{μ}, $J^{\mu\nu}$, $d\sigma/d\Omega$,...) quedant-nos tant sols amb els primers ordres d'aquestes sèries, vol dir que $e_1e_2/mc^2h \ll 1$; si no, les nostres fórmules no tindran ja sentit. Per a electrons, tenim que $e_1e_2/mc^2 \sim 2.8$ fermi, és a dir, els nostres desenvolupaments valen per distàncies $h \gg 2.8$ fermi la qual cosa és un límit molt raonable, i que sempre es verificarà en situacions clàssiques. A més, molt abans de que $h \sim 2.8$ fermi, ja són notables els efectes quàntics, i la predictivitat (de la mateixa manera que la relativitat restringida) deixa de ésser vàlida mentre no sapiguem quantificar.

Per altra part, $e_1e_2/mc^2h \sim 1$ equival a $e_1e_2\,/h \sim mc^2$, és a dir, que quan la constant del desenvolupament és de l'ordre de la unitat, l'energia electrostàtica pot crear noves partícules, cosa que no està contemplada a la nostra teoria.

4. LAGRANGIANS SINGULARS; EXEMPLES.

Els Lagrangians singulars són aquells per als quals la matriu Hessiana respecte les velocitats generalitzades és singular; és a dir que no és possible aïllar totes les acceleracions a partir de les equacions de Lagrange. Això dóna lloc a lligams entre coordenades i velocitats. Lagrangians d'aquest tipus són freqüents a Relativitat restringida i foren estudiats ja per Dirac (DI.64). Actualment l'interés pel seu estudi ha augmentat degut a que permeten d'obviar el teorema de no-interacció i també a que els lligams que hi apareixen, en quantitzar, permeten d'eliminar en alguns casos els estats no físics (KN.73), (KV.76), (DG_b78).

En aquest capítol estudiarem algunes propietats dels Lagrangians singulars, seguint els treballs (SM.74), (DG_a78); preparem així el camí per al proper capítol que parla de com tals sistemes poden ésser predictivitzats.

4.1. Equacions del moviment i lligadures.

Estudiem aquí el problema de N partícules -sens estructura- amb una interacció donade per un Lagrangià $\mathcal{L}(x, \dot{x})$. Per x entenem un vector de 4N components, que són les coordenades x_a^μ de cada una de les partícules. Estem treballant de fet a $(M^4)^N$; i dotem aquest espai vectorial de la mètrica $\eta_{\mu\nu}\delta^{ab}$. De manera que representarem el producte escalar de $(M^4)^N$ així:

$$(x,y) = \eta_{\mu\nu}\delta^{ab}\, x_a^\mu y_b^\nu = \epsilon^a x_a^\mu y_{a\mu}\ , \text{ on } \quad x = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_N^\mu \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

A partir del Lagrangià $\mathcal{L}(x,\dot{x})$ -on $\dot{x}=dx/d\lambda$, essent λ un paràmetre qualsevol, però escalar Lorentz- derivem les equacions del moviment

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^\mu} = 0 \qquad (4.1.2)$$

El Lagrangià $\mathcal{L}$ s'anomena singular si hom no pot aïllar les acceleracions $\ddot{x}_a^\mu$ de les equacions (4.1.2):

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu \partial \dot{x}_b^\nu}\ddot{x}_b^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^\mu} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu \partial x_b^\nu}\dot{x}_b^\nu \equiv F_\mu^a(x,\dot{x}) \qquad (4.1.3)$$

i també les podem posar com:

$$\mathbb{H}\,\ddot{x} = F \qquad (4.1.4)$$

on $\mathbb{H}$ és la Hessiana de $\mathcal{L}$, una matriu 4Nx4N:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} H_{\mu\nu}^{11} & \cdots & H_{\mu\nu}^{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{\mu\nu}^{N1} & \cdots & H_{\mu\nu}^{NN} \end{pmatrix} \quad ; \quad H_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu \partial \dot{x}_b^\nu} \qquad (4.1.5)$$

$\mathbb{H}$ és una matriu simètrica. Que $\mathcal{L}$ és singular vol dir que $\mathbb{H}$ és singular; el seu rang és $r<4N$. Com ens ho farem per a determinar unes equacions del moviment? $\mathbb{H}$, pensat com aplicació lineal, té un nucli de dimensió 4N-r; és a dir, existeixen 4N-r vectors $\tilde{\xi}_i$ independents, que son funció de $(x,\dot{x})$ i tals que

$$\mathbb{H}\,\tilde{\xi}_i = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,4N-r \tag{4.1.6}$$

Per tant, la solució general de (4.1.4) s'escriurà com

$$\ddot{x} = \tilde{a} + \epsilon^i\,\tilde{l}_i\,\tilde{\xi}_i \tag{4.1.7}$$

on $\tilde{a}(x,\dot{x})$ és una solució particular qualsevulla de (4.1.4) i $\tilde{l}_i$ són 4N-r funcions arbitràries de $(x,\dot{x})$. Tant $\tilde{a}$ com $\tilde{\xi}_i$ són vectors ben coneguts en funció de $(x,\dot{x})$. Veiem així que el fet de que el Lagrangià sigui singular té per conseqüència que les acceleracions no estiguin determinades sino que depenguin de funcíons arbitràries. Però a més, si fem el producte de (4.1.4) amb $\tilde{\xi}_i$, recordant (4.1.6) i que $\mathbb{H}$ es simètric tenim:

$$(\tilde{\xi}_i, F) = F^a_\mu\,\tilde{\xi}^\mu_{a\,i} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,4N-r \tag{4.1.8}$$

Aquí ens poden passar tres coses:

a). Que algune de les equacions (4.1.8) sigui incompatible. En tal cas el Lagrangià $\mathcal{L}$ no dona lloc a equacions del moviment i no pot descriure cap sistema físic. Recordem que tals coses poden passar fins i tot al nivell de (4.1.4). Efectivament, el Lagrangià $\mathcal{L}(q,\dot{q})=q$ dóna com equació del moviment $-1=0$.

b). Que totes les equacions (4.1.8) es satisfacin idènticament, qualsevulla que sigui el valor de les variables $(x,\dot{x})$. Llavors el problema ja s'ha acabat i (4.1.7) són les equacions del moviment del sistema. Però, en general, tindrem que:

c). No totes les equacions (4.1.8) es satisfan idènticament. Llavors obtenim unes relacions entre les variables $(x,\dot{x})$ que anomenarem <u>lligams</u>. Siguin $\tilde{\phi}_m(x,\dot{x})=0$, $m=1,\ldots,\tilde{d}$ amb $\tilde{d}\leq 4N-r$, el nombre màxim d'equacions funcionalment independents que podem obtenir a partir de (4.1.8).

Que hem trobat fins ara? Que a les acceleracions apareixen funcions arbitràries, i que aquestes solament tenen sentit si les variables $(x,\dot{x})$ satisfan un conjunt de lligams

$$\tilde{\phi}_m(x,\dot{x})=0 \quad , \quad m=1,\ldots,\tilde{d}\leq 4N-r \qquad (4.1.9)$$

Solament podem admetre com a condicions inicials -per a resoldre per exemple (4.1.7)- aquells punts $(x,\dot{x})$ que satisfacin (4.1.9). Per tant, si partim d'un punt que verifiqui (4.1.9) i el deixem evolucionar segons (4.1.7), ha de seguir verificant (4.1.9). Això vol dir que no hem acabat, sino que hem de imposar la estabilitat dels lligams (4.1.9) sota derivacions respecte de λ. Es a dir,

$$\frac{d\tilde{\phi}_m}{d\lambda}=\frac{\partial\tilde{\phi}_m}{\partial x^\mu_a}\dot{x}^\mu_a+\frac{\partial\tilde{\phi}_m}{\partial\dot{x}^\mu_a}\tilde{a}^\mu_a(x,\dot{x})+\epsilon^i\tilde{\lambda}_i\frac{\partial\tilde{\phi}_m}{\partial\dot{x}^\mu_a}\tilde{\zeta}^\mu_{ai}=0 \qquad (4.1.10)$$

On hem utilitzat les equacions (4.1.7). Es poden donar ara quatre casos diferents:

a). Que les equacions (4.1.10) es verifiquin idènticament -utilitzant si convé (4.1.9)-. Llavors ja hem acabat.

b). $(\partial\tilde{\phi}_m/\partial\dot{x}^\mu_a)\tilde{\zeta}^\mu_{ai}=0$, $\forall$ i -utilitzant si fa falta (4.1.9)-

Llavors (4.1.10) ens dóna <u>nous lligams</u> entre les $(x,\dot{x})$.

c). $(\partial\tilde{\phi}_m/\partial\dot{x}^\mu_a)\tilde{\xi}^\mu_{ai}\neq 0$ per alguns i; llavors (4.1.10) ens dóna relacions entre les funcions arbitràries $\tilde{l}_i$, i el nombre d'aquestes disminuirà. A més, podem obtenir també nous lligams, com a condicions de compatibilitat de (4.1.10).

d). Finalment pot ésser que arribem a contradiccions. En tal cas $\mathcal{L}$ no descriu cap sistema físic.

Resumint, en imposar que els lligams siguin estables generem nous lligams i es redueix el nombre de funcions arbitràries. Ara tenim:

$$\ddot{x} = \tilde{\tilde{a}} + \epsilon^i\,\tilde{\tilde{l}}_i\,\tilde{\tilde{\xi}}_i \qquad ; \quad i = 1,2,\ldots,\tilde{\tilde{f}} \leq 4N-r$$

$$\tilde{\tilde{\phi}}_m(x,\dot{x}) = 0 \qquad ; \quad m = 1,2,\ldots,\tilde{\tilde{d}} \tag{4.1.11}$$

on $\tilde{\tilde{a}}$, $\tilde{\tilde{\xi}}_i$, $\tilde{\tilde{\phi}}_m$ són funcions conegudes de $(x,\dot{x})$; els $\tilde{\tilde{\xi}}_i$ són linealment independents i les $\tilde{\tilde{\phi}}_m$ són funcionalment independents.

Pero com que ara han aparagut nous lligams hem de imposar de nou la seva estabilitat; pot ser que això generi nous lligams i redueixi el nombre de funcions arbitràries. Cal continuar aquest procés fins que l'estabilitat dels lligams quedi satisfeta idènticament. Aquest procés és necessàriament finit, doncs el nombre de funcions arbitràries va disminuint, i no pot haver més de 8N lligams (perque solament tenim 8N variables independents, $(x,\dot{x})$). Vegeu (SM.74). Finalment, doncs, arribarem a un sistema del tipus

$$\ddot{x}^{\mu}_{a} = a^{\mu}_{a} + \epsilon^{i} l_{i} \zeta^{\mu}_{a\,i} \quad ; (i=1,\dots,t \leq 4N-r)$$

$$\phi_{m}(x,\dot{x}) = 0 \qquad ; \qquad m = 1,\dots,d \tag{4.1.12}$$

on a, ζ_i, ϕ_m són funcions conegudes de $(x,\dot{x})$; ζ_i vectors de $(M^4)^N$, linealment independents, i les ϕ_m funcionalment independents. A més, les equacions $d\phi_m/d\lambda = 0$ es verifiquen ara si fem us de (4.1.12). Les l_i son funcions completament arbitràries.

Les equacions $d\phi_m/d\lambda = 0$ ens porten a que

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial \dot{x}^{\mu}_{a}} \zeta^{\mu}_{a\,i} = 0 \;\; \forall i \;\; ; \;\; \frac{\partial \phi_m}{\partial x^{\mu}_{a}} \dot{x}^{\mu}_{a} + \frac{\partial \phi_m}{\partial \dot{x}^{\mu}_{a}} a^{\mu}_{a} = 0 \tag{4.1.13}$$

siguin consecuència de $\phi_m = 0$.

Direm <u>Sistema Lagrangià Singular</u> (SLS) a un sistema d'equacions diferencials de segon ordre com (4.1.12), amb funcions arbitràries l_i, i sotmés a uns lligams ϕ_m.

Geomètricament podem pensar un SLS de la següent manera. A l'espai de les fases $(TM^4)^N$ -de coordenades $(x,\dot{x})$- tenim una subvarietat U^* de dimensió 4N-d definida per les equacions $\phi_m(x,\dot{x})=0$. m=1,...,d. Sobre aquesta subvarietat tenim definida una família de camps de vectors $D_{[l]}$:

$$D_{[l]} = \dot{x}^{\mu}_{a} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}_{a}} + \left(a^{\mu}_{a} + \epsilon^{i} l_{i} \zeta^{\mu}_{a i}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}_{a}} \tag{4.4.14}$$

Cada elecció de les funcions arbitrsries l_i ens dóna un camp de vectors de la familia. Aquestos vectors són tangents a

U^*; això és el que ens diuen les equacions (4.1.13), o sigui, les condicions d'estabilitat de les ϕ_m, qualsevulla que siguin les funcions arbitràries l_i.

Com que el SLS (4.1.12) és un sistema d'equacions diferencials de segon ordre sobre la subvarietat U^* de $(TM^4)^N$, tindré el següent:

<u>Teorema</u>. Fixades unes funcions $l_i(x,\dot{x})$, per cada punt $(x_o,\dot{x}_o) \in U^*$ existeix una solució única de (4.1.12)

$$x_a^\mu = \psi_a^\mu(x_0,\dot{x}_0;\lambda;[l_i])$$

$$\text{tal que} \quad \begin{aligned} x_{a0}^\mu &= \psi_a^\mu(x_0,\dot{x}_0;0;[l_i]) \\ \dot{x}_{a0}^\mu &= \dot{\psi}_a^\mu(x_0,\dot{x}_0;0;[l_i]) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

$$\phi_m\left(\psi_a^\mu(x_0\dot{x}_0;\lambda;[l_i]),\dot{\psi}_a^\mu(x_0\dot{x}_0;\lambda;[l_i])\right)=0 \quad \forall\lambda,\forall m$$

$\dot{\psi}$ és la parcial de ψ respecte de λ. Hem escrit $[l_i]$ per a indicar que ψ_a^μ depén <u>funcionalment</u> de les l_i; les úniques variables que apareixen a ψ_a^μ són $(x_o,\dot{x}_o,\lambda)$, però la forma funcional de ψ_a^μ depén de les l_i que hagem escollit.

4.2. <u>Altres propietats dels SLS; invariància Poincaré</u>.

En general, la descomposició (4.1.12) de $\ddot{x}_a^\mu$ no és única; una part de les ζ_i pot passar a la a_a^μ. Sigui $\langle\zeta_1,\dots\zeta_f\rangle = E$ el subespai de $(M^4)^N$ generat per els vectors $\zeta_1,\dots,\zeta_f$. Si es verifica: $(M^4)^N = E \oplus E^\perp$ llavors prenent $a \in E^\perp$ la descomposició esmentada sí que és única. Però com que $(M^4)^N$ no té una mètrica Euclidiana, això no serà en general possible. Sempre que poguem agafarem per tant a_a^μ tal que $\epsilon^a\eta_{\mu\nu}a_a^\mu\zeta_{ai}^\mu = 0$, $\forall i$.

Interessa sempre que les equacions (4.1.12) siguin manifestament covariants; és a dir que a_a^μ i ζ_{ai}^μ es comportin com vectors i ϕ_m com escalars sota transformacions de Lorentz. La invariància sota translacions ens dóna que a més han de dependre solament de les coordenades relatives $x_a^\mu - x_b^\mu$. La manera més senzilla de garantir això és prendre $\mathcal{L}$ invariant sota transformacions de Poincaré:

$$x'^\mu_a = L^\mu{}_\nu \left(x_a^\nu - A^\nu\right) \quad ; \quad \dot{x}'^\mu_a = L^\mu{}_\nu \dot{x}^\nu_a$$

$$\mathcal{L}(x', \dot{x}') = \mathcal{L}(x, \dot{x}) \tag{4.2.1}$$

Això implica que $\mathcal{L}$ satisfaci les equacions diferencials

$$\epsilon_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^\mu} = 0$$

$$x_{a\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^\nu} - x_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_a^\mu} + \dot{x}_{a\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\nu} - \dot{x}_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu} = 0 \tag{4.2.2}$$

La primera ens diu que $\mathcal{L}$ depén solament de les coordenades relatives i la segona, que és un escalar Lorentz.

Ara bé, la invariància de $\mathcal{L}$ sota les transformacions (4.2.1) ens dóna, utilitzant el teorema de Noether (vegeu (AR.76) pàgina 93), deu quantitats conservades:

$$P_\mu = \epsilon_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu}$$

$$J_{\mu\nu} = x_{a\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\nu} - x_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_a^\mu} \tag{4.2.3}$$

Aquestes deu funcions s'anomenen quadrimoment lineal (P_μ)

i tensor moment angular ($J_{\mu\nu}$). Són quantitats definides sobre U^* i conservades, és a dir, (vegeu (SM.74)):

$$D_{[l]} P_\mu = D_{[l]} J_{\mu\nu} = 0 \quad , \forall l_i . \tag{4.2.4}$$

Introduirem ara una classificació dels lligams que ens serà molt útil a l'hora de predictivitzar els SLS (capítol 5). A les $\phi_m(x,\dot{x})$ fem el canvi de variables $\dot{x}_a^\mu = \alpha_a \pi_a^\mu$ i això ens dóna d funcions de x_a^μ, π_a^μ, α_a. Fixem-nos solament en la dependència en les α_a. Es tracta d'obtenir el nombre més gran possible de lligams -combinant-los adientment- que no continguin les α_a. Els anomenarem <u>lligams de tipus A</u>. Aquests lligams seran homogenis de grau zero en les $\dot{x}_a^\mu$ o el que és equivalent, en les π_a^μ.

Tipus A

$$\phi_m(x,\pi) = 0 \quad \text{ó} \quad \phi_m(x,\dot{x}) = 0 \qquad m = 1, \dots, d_A$$
$$\phi_m(x_a^\mu, \alpha_a \pi_a^\mu) = \phi_m(x_a^\mu, \pi_a^\mu) \qquad \forall \alpha_a . \tag{4.2.5}$$

Direm <u>lligams de tipus B</u> a la resta de lligams:

$$\phi_m(x,\dot{x}) = 0 \quad , \quad m = d_A + 1, \dots, d_A + d_B = d \tag{4.2.6}$$

Considerats com funcions de les $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ han de verificar

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_1} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_N} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_N} \end{pmatrix} = d_B \tag{4.2.7}$$

perque si no seria possible obtenir nous lligams de tipus A; El rang s'ha de calcular sobre U^*, és a dir utilitzant si fa falta $\phi_m=0$, m=1,...,d.(4.2.7) ens diu que $d_B \leq N$; és a dir que el nombre de lligams de tipus B és com a molt N.

Aquesta classificació és important perquè els lligams de tipus A ens donaran automàticament lligams sobre les (x,π) mentre que les de tipus B no. Això ho veurem amb detall al capítol 5.

Per a acabar aquest apartat veurem un exemple molt senzill de Lagrangià singular; el que correspon a N partícules lliures:

$$\mathcal{L} = -\epsilon^a m_a \sqrt{-\dot{x}_a^\mu \dot{x}_{a\mu}} \qquad (4.2.8)$$

on el coeficient $-m_a$ s'ha pres de manera que a l'aproximació $v_a/c \ll 1$ recuperem el Lagrangià clàssic de partícules lliures $\epsilon_a 1/2 m_a \vec{v}_a^{\,2}$. Les equacions del moviment (4.1.3) ens donen

$$\frac{\delta_a^b m_a}{\sqrt{-\dot{x}^{a\rho}\dot{x}^a{}_\rho}}\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_a^\mu \dot{x}_a^\nu}{\dot{x}^{a\sigma}\dot{x}^a{}_\sigma}\right)\ddot{x}_{b\nu} = 0 \qquad (4.2.9)$$

La Hessiana $\mathbb{H}$ està formada per N caixes diagonals, cada una de les quals té un vector propi amb valor propi nul (que és $\dot{x}_a^\mu$). El rang d'$\mathbb{H}$ és 4N-N=3N i els N vectors propis són:

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1^\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{x}_2^\mu \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \zeta_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_N^\mu \end{pmatrix} \qquad (4.2.10)$$

Com que el segon membre de (4.2.9) és zero no hi ha lligams i les equacions del moviment són:

$$\ddot{x}_a^{\mu} = l_a \dot{x}_a^{\mu} \tag{4.2.11}$$

que contenen N funcions arbitràries $l_1, \ldots, l_N$. En aquest cas, $U^* = (TM^4)^N$.

A més el Lagrangià (4.2.8) verifica les equacions (4.2.2) i és invariant Poincaré. Per tant tenim les deu quantitats conservades (4.2.3). Aquestes són:

$$P_\mu = \epsilon^a m_a \frac{\dot{x}_{a\mu}}{\sqrt{-\dot{x}_a^{\nu}\dot{x}_{a\nu}}}$$

$$J_{\mu\nu} = \epsilon^a m_a \frac{x_{a\mu}\dot{x}_{a\nu} - x_{a\nu}\dot{x}_{a\mu}}{\sqrt{-\dot{x}_a^{\sigma}\dot{x}_{a\sigma}}} \tag{4.2.12}$$

que ens donen el quadrimoment lineal i el tensor moment angular d'un sistema de N partícules lliures.

4.3. El model de Dominici-Gomis-Longhi (DGL).

Aquest model (DG_a78), (DG_b78) estudia la interacció de dues partícules puntuals -sens estructura- mitjançant un model Lagrangià singular amb un potencial multiplicatiu. El Lagrangià proposat és una generalització sencilla del de dues partícules lliures (vegeu (4.2.8)):

$$\mathcal{L} = -\epsilon^a \sqrt{-\mathcal{U}_a \dot{x}_a^{\mu} \dot{x}_{a\mu}}$$

$$\mathcal{U}_a(x^2) = m_a^2 - V(x^2) \tag{4.3.1}$$

on $x^\mu = \eta_a(x_a^\mu - x_{a'}^\mu) = x_1^\mu - x_2^\mu$ és la coordenada relativa. La funció $V(x^2)$, la mateixa per a les dues partícules, és la que porta la interacció; si V=0 recuperem partícules lliures, (4.2.8). L'interés d'aquest model, que té el lligam (P,x)=0 (com veurem més endavant (4.3.4)), està en que és possible quantificar-lo, i el lligam (P,x)=0 dóna una condició suplementària sobre els estats quàntics que permet d'eliminar les oscil.lacions de tipus temps i dóna un espectre d'energies definit positiu (vegeu (DG_b78)). Aquest model és equivalent al de Kim i Noz (KN.73), que no es deriva d'un Lagrangià singular, sino que quantifica sobre una hipersuperfície de tipus espai. A més aquests models permeten d'evitar el Teorema de no Interacció. Anem a analitzar que ens dóna (4.3.1). Les equacions de Lagrange són:

$$\frac{\delta_a^b}{\lambda_a}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_{a\mu}\dot{x}_{a\nu}}{\dot{x}_a^\sigma \dot{x}_{a\sigma}}\right)\ddot{x}_b^\nu = \eta_a(\lambda_a + \lambda_{a'})V' x_\mu + \frac{(x,\dot{x})V'}{v_a\lambda_a}\dot{x}_{a\mu} \equiv F_{a\mu}$$

$$\lambda_a = \sqrt{-\frac{\dot{x}_a^\nu \dot{x}_{a\nu}}{v_a}} \tag{4.3.2}$$

i a cap de les dues equacions estàn sumades les <u>a</u>. La Hessiana en aquest cas és de rang 6 i per tant té dos vectors propis, els quals són:

$$\varsigma_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1^\mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \varsigma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{x}_2^\mu \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

Aïllant l'acceleració de (4.3.2), tenim:

$$\ddot{x}_a^{\mu} = \eta_a \lambda_a (\lambda_a + \lambda_{a'}) V' \left\{ x^{\mu} - \frac{(x, \dot{x}_a)}{(\dot{x}_a, \dot{x}_a)} \dot{x}_a^{\mu} \right\} + l_a \dot{x}_a^{\mu} \equiv \tilde{a}_a^{\mu} + l_a \dot{x}_a^{\mu} \qquad (4.3.4)$$

on hem escollit la part $\tilde{a}_a^{\mu}$ ortogonal a $\dot{x}_a^{\mu}$ (vegeu el comentari inicial de la secció 4.2); les l_a són dues funcions arbitràries.

Els dos vectors (4.3.3) han d'ésser ortogonals a $F_{a\mu}$ (4.3.2). Per tant, tenim:

$$\begin{aligned} F_{a\mu} \zeta_1^{a\mu} &= \lambda_1^2 \lambda_2 V' \left(\frac{\dot{x}_1}{\lambda_1} + \frac{\dot{x}_2}{\lambda_2}, x \right) = 0 \\ F_{a\mu} \zeta_2^{a\mu} &= -\lambda_1 \lambda_2^2 V' \left(\frac{\dot{x}_1}{\lambda_1} + \frac{\dot{x}_2}{\lambda_2}, x \right) = 0 \end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

Suposant que $V' \neq 0$ (si no, V és constant i tenim partícules lliures) tenim un sol lligam, que escriurem

$$(P, x) = 0 \qquad (4.3.6)$$

on hem posat

$$P_{\mu} = \epsilon_a \frac{\dot{x}_{a\mu}}{\lambda_a} = \epsilon_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^{\mu}} \qquad (4.3.7)$$

Segons (4.2.3) P_{μ} és el quadrivector moment lineal, i ha d'ésser una quantitat conservada, la qual cosa es demostra fàcilment utilitzant (4.3.4) i (4.3.6).

Ara hem d'imposar l'estabilitat del lligam (4.3.4). Com que $\dot{P}_{\mu} = 0$,

$$(P,\dot{x}) = 0 \tag{4.3.8}$$

que ens dóna un nou lligam. Derivant un altre cop, tenim:

$$l_1 - \eta_1 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2) V' \frac{(x,\dot{x}_1)}{(\dot{x}_1,\dot{x}_1)} = l_2 - \eta_2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) V' \frac{(x,\dot{x}_2)}{(\dot{x}_2,\dot{x}_2)} = l \tag{4.3.9}$$

que ens dóna una relació entre l_1 i l_2 i cap nou lligam. Hi ha per tant una sola funció arbitràrria, que escriurem l. Finalment hem obtingut el SLS següent:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}^{\mu}_{a} &= \eta_a \lambda_a (\lambda_1 + \lambda_2) V' x^{\mu} + l\, \dot{x}^{\mu}_{a} \\ (P,x) &= 0 \\ (P,\dot{x}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.3.10}$$

que conté una funció arbitràrria l i dos lligams.

Estudiem de quin tipus són aquests lligams. P_μ és homogeni de grau zero respecte de α_1, α_2 (quan fem el canvi de variables $\dot{x}^{\mu}_{a} = \alpha_a \, n^{\mu}_{a}$). Per tant, (P,x)=0 és de classe A i $(P,\dot{x})=0$ de classe B.

$$\begin{aligned} &\text{Tipus A} \qquad (P,x) = 0 \\ &\text{Tipus B} \qquad (P,\dot{x}) = 0 \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Finalment, i atés que $\mathcal{L}$ és un escalar Poincaré (és a dir, verifica (4.2.2)), podem calcular les quantitats conservades (4.2.3). El P_μ ja està calculat a (4.3.7), i el

$J_{\mu\nu}$ ens dóna:

$$J_{\mu\nu} = \epsilon^{a} \frac{1}{\lambda_a} \left(x_{a\mu} \dot{x}_{a\nu} - x_{a\nu} \dot{x}_{a\mu} \right) \qquad (4.3.12)$$

i podem veure que es conserva utilitzant (4.3.10).

5. PREDICTIVITZACIO D'UN S.L.S.;EL MODEL D.G.L.

Per tal d'intentar explicar la interacció entre quarks hom va utilitzar inicialment un potencial infinit (ZW.64) i (JO.72); posteriorment hom ha provat amb models més realistes que utilitzen potencials de tipus oscil.lador armònic (FK.71). D'aquestos models ens interessen els relativistes, i en particular el model de Dominici-Gomis-Longhi (DGL) que deriva d'un Lagrangià singular i conté el lligam (P,x)=0.

Els sistemes lagrangians singulars gaudeixen d'una sèrie d'avantatges que han fet que aquestos últims anys aparegués una amplia literatura sobre el tema (vegeu per exemple (KV.76), (DG_a78)). Aquests avantatges consisteixen en que, en derivar les equacions del moviment d'un Lagrangià, són fàcilment calculables les quantitats conservades (quadrimoment lineal i tensor moment angular; vegeu (4.2.3)) i a més hom pot obtenir fàcilment un formalisme hamiltonià que permet de quantificar el sistema; el caràcter singular del Lagrangià permet d'evitar els teoremes de no interacció i a més els lligams que hi són generats permeten d'eliminar estats no físics que apareixen en quantificar (així el lligam (P,x)=0 permet d'eliminar les oscil.lacions de tipus temps i hom obté així un espectre d'energies positiu).

Malgrat les bones propietats ja esmentades, els lagrangians singulars presenten alguns inconvenients. En primer lloc, les equacions del moviment (4.1.12) no són equacions diferencials ordinàries de segon ordre, ja que el segon membre de $\ddot{x}_a^{\mu}$ no és conegut sobre tot $(TM^4)^N$ sino solament sobre una subvarietat U^* ; les condicions inicials no poden ésser arbitràries sino que han de verificar els lligams $\phi_m(x,\dot{x})=0$; per altra part, apareixen funcions arbitràries a les equacions del moviment, i aqueixes no són ja per tant equacions diferencials ordinàries de segon ordre.

A més, si a partir de (4.1.12) ens calculem les triacceleracions per a un observador inercial, resulta que hi ha observadors privilegiats, en el sentit de que tenen les acceleracions descrites en termes de posicions i velocitats instantànies de les partícules. Per exemple, en el cas del lligam (P,x)=0 l'observador privilegiat és el del centre de masses ($\vec{P}=0 \Rightarrow x_1^0=x_2^0$). Així, encara que formalment totes les equacions són covariants, no es respecta el principi de predictivitat, segons el qual tots els observadors inercials poden descriure la dinàmica del sistema amb equacions diferencials ordinàries de segon ordre tal com (2.1.1).

Pensem que aquest postulat (que està a la basse de la mecànica predictiva, vegeu (2.1)) és important i té un significat físic molt clar; en aquest capítol estudiem com és possible predictivitzar un SLS en el sentit d'obtenir un sistema predictiu que doni les mateixes trajectòries que el SLS (a U^*) amb la qual cosa quedaría restablerta l'equivalència esmentada entre observadors. En una primera part veurem sota quines condicions és predictivitzable un SLS i després aplicarem aquests resultats al model DGL.

5.1. Extensió predictiva d'una familia de SLS.

Un SLS tal com (4.1.12), a més de les variables $(x,\dot{x})$, contindrà paràmetres com les masses de les partícules, les cà rregues, etc., paràmetres que figuraràn explícitament a $\mathcal{L}$ i per tant a les funcions a^{μ}_{a}, ζ^{μ}_{ai}, ϕ_m. No considerarem aquí un sol SLS, sino la família que hom obté donant a $m_1,\ldots,m_N$ tots els possibles valors ($m_i > 0$ $\forall i$, $i=1,\ldots,N$). Considerarem per tant la familia de SLS

$$\begin{cases} \ddot{x}^{\mu}_{a} = a^{\mu}_{a}(x,\dot{x}|m_b) + \epsilon^{i} l_i \zeta^{\mu}_{ai}(x,\dot{x}|m_b) \ ; \ i=1,\ldots,f \\ \phi_m(x,\dot{x}|m_b) = 0 \quad ; \ m=1,\ldots,d=d_A+d_B . \end{cases} \tag{5.1.1}$$

on hem posat explícitament la dependència en les masses, i d_A, d_B són el nombre de lligams de tipus A i de tipus B del SLS considerat. Això ho fem per les mateixes raons que quan hem fet l'equivalència entre el formalisme manifestament predictiu i el manifestament invariant de la MRP (vegeu pàgina 18).

Donats uns valors de m_b, unes funcions l_i, i unes condicions inicials $(x_o,\dot{x}_o)$ que satisfan els lligams $\phi_m(x,\dot{x}|m_b)=0$, existeix una solució única de (5.1.1) donada per (4.1.15):

$$x^{\mu}_{a} = \psi^{\mu}_{a}(x_o,\dot{x}_o;\lambda;[l_i]\,|\,m_b) \tag{5.1.2}$$

Cada membre de la família de SLS (és a dir, fixades unes masses m_b) està definit solament sobre la hipersuperficie $U^*(m_b)$ de $(TM^4)^N$ donada per:

$$\mathcal{U}^*(m_b) = \left\{ (x,\dot{x}) \in (TM^4)^N \,\middle|\, \phi_m(x,\dot{x}|m_b)=0,\ m=1,\ldots,d_A+d_B \right\} \tag{5.1.3}$$

Nosaltres busquem un SPI de la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} &= \pi_a^\mu \\ \frac{d\pi_a^\mu}{d\tau_a} &= \Theta_a^\mu(x,\pi) \end{aligned}\right\} \tag{5.1.4}$$

on Θ_a^μ està definit a tot $(TM^4)^N$, de manera que les trajectòries solució de (5.1.1) també ho siguin de (5.1.4).

Abans de formular rigurosament això que acabam de dir, examinarem amb detall les diferents coordenades $((x,\dot{x})$ i $(x,\pi))$ que tenim a $(TM^4)^N$.

Per a cada valor de les m_b, tinc un SLS, expressat en unes coordenades $(x,\dot{x})$, definit solament sobre $U^*(m_b) \subset (TM^4)^N$. Però $\dot{x}$ és un vector tangent a la trajectòria de les partícules, i com que les masses m_b estàn especificades, sabem passar de les coordenades $(x,\dot{x}) \in U^*(m_b)$ a (x,π) de la següent manera:

$$\begin{aligned} g_{(m_b)} : \mathcal{U}^*(m_b) &\longrightarrow (TM^4)^N \\ (x_a^\mu, \dot{x}_b^\nu) &\longrightarrow \left(x_a^\mu, \frac{m_b \dot{x}_b^\nu}{(-\dot{x}_b^\lambda \dot{x}_{b\lambda})^{1/2}} \right) = (x_a^\mu, \pi_b^\nu) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Busquem ara quina és la imatge de $g_{(m_b)}$, i si es injectiva o no. Sigui $(x_a^\mu, \pi_b^\nu) \in \operatorname{Im} g_{(m_b)}$; llavors existirà $(x,\dot{x}) \in U^*(m_b)$ tal que $g_{(m_b)}(x,\dot{x})=(x,\pi)$. Això ens diu que $(x,\dot{x})$ és de la forma $(x_a^\mu, \alpha_b \pi_b^\nu)$. I com que pertany a $U^*(m_b)$ s'han de verificar $\pi_b^2=m_b^2$, i els lligams de (5.1.1). Tenint en compte que els lligams de tipus A són homogenis de grau zero en les $\dot{x}$, tenim:

Tipus A $\quad \phi_m(x_a^\mu, \pi_b^\nu \mid \pi_c) = 0 \qquad m=1,\ldots,d_A \qquad (5.1.6)$

Tipus B $\quad \phi_m(x_a^\mu, \alpha_b \pi_b^\nu \mid \pi_c) = 0 \qquad m=d_A+1,\ldots,d_A+d_B \quad (5.1.7)$

Les equacions (5.1.6) defineixen una subvarietat $U \subset (TM^4)^N$. La imatge de $U^*(m_b)$ per $g_{(m_b)}$ és la intersecció de U amb l'hiperboloid de masses $\pi_b^2 = m_b^2$. La reunió de les imatges de $U^*(m_b)$ per tots els valors possibles de les m_b és justament U.

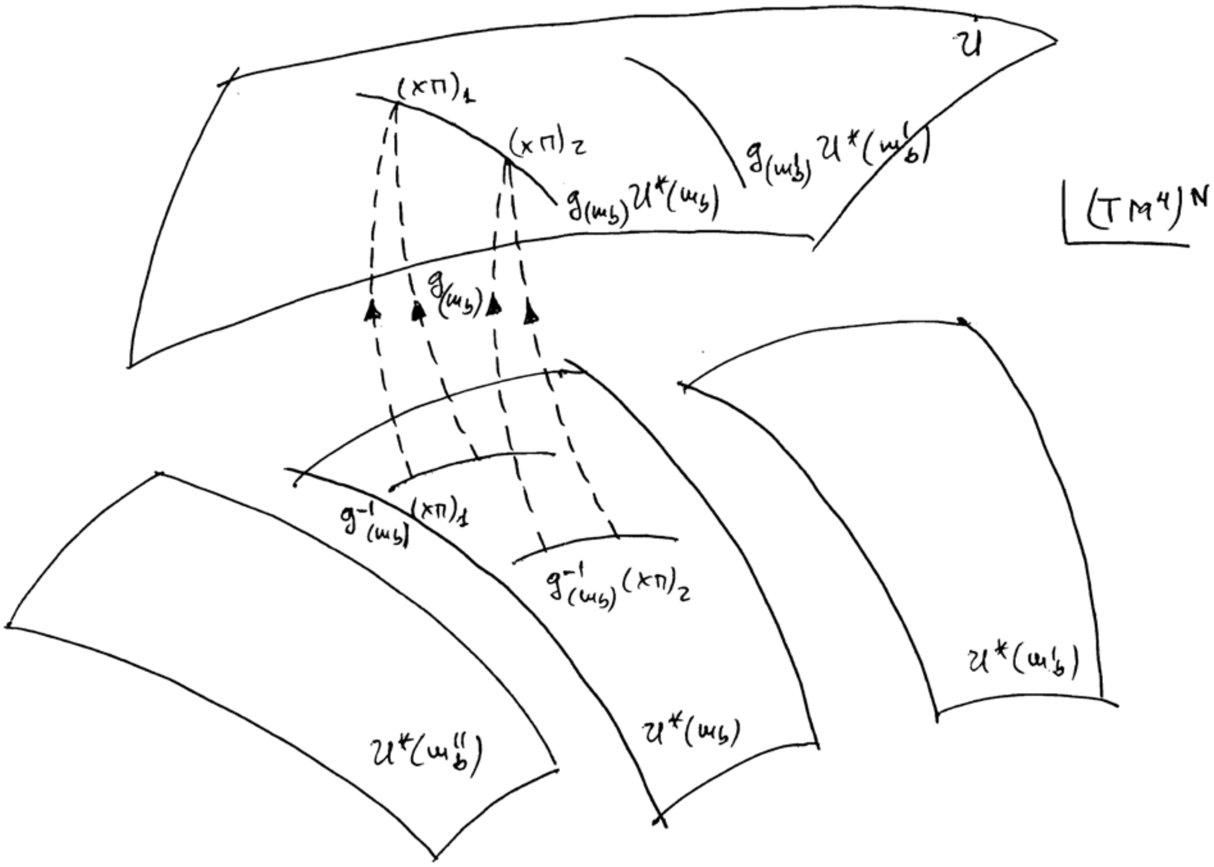
Les equacions (5.1.7) no donen cap condició sobre (x,π) sino que ens diuen que les aplicacions $g_{(m_b)}$ no son injectives, sino que hi ha molts elements de $U^*(m_b)$ que van a parar al mateix (x,π) de U. Aquestos diferents elements venen donats per els diferents valors de les α_b, solució de (5.1.7). Aquestes equacions, gràcies a la condició (4.2.7) no donen cap relació entre (x,π) sino que determinen d_B funcions de les α_b que són independents. La resta de α_b, $N-d_B$, seran arbitràries. Es clar que si $d_B=N$, llavors tots els α_b estan determinats i en aquest cas les $g_{(m_b)}$ seran injectives. Hom pot veure la relació entre les diferentes subvarietats de $(TM^4)^N$ i les coordenades (x,π) , $(x,\dot{x})$ a la figura de la pàgina següent.

Les dimensions de les subvarietats que hi apareixen són:

$$\dim (TM^4)^N = 8N \qquad \dim g^{-1}_{(m_b)}(x,\pi) = N - d_B$$

$$\dim \mathcal{U}^*(m_b) = 8N - d_A - d_B \qquad \dim g_{(m_b)}\mathcal{U}^*(m_b) = 7N - d_A$$

$$\dim \mathcal{U} = 8N - d_A \qquad 8N - d_A - d_B \le \dim \bigcup_{(m_b)} \mathcal{U}^*(m_b) \le 9N - d_A - d_B$$



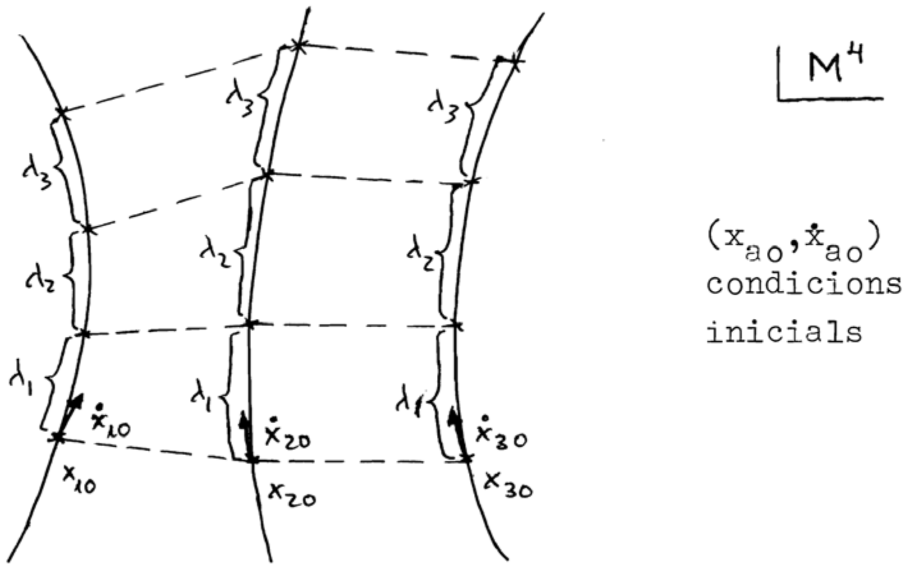
<u>Definició</u>. Direm que el SPI (5.1.4) és una <u>extensió predictiva</u> de la família de SLS (5.1.1) si, donades unes funcions l_i $i=1,\dots,f$ qualsevulla, uns valors de m_b qualsevols i unes condicions inicials $(x_o,\dot{x}_o)\in U^*(m_b)$ qualsevulla, existeixen N funcions $f_a(\lambda)$ monótones creixents (amb $f_a(0)=0$) tals que

$$\psi^{\mu}_{a}(x^{\nu}_{bo},\dot{x}^{\rho}_{co};\lambda;[l_i]|m_d)=\Phi^{\mu}_{a}\left(x^{\nu}_{bo},\frac{m_c\dot{x}^{\rho}_{co}}{(-\dot{x}^{\sigma}_{co}\,\dot{x}_{co\sigma})^{1/2}};f_a(\lambda)\right) \qquad (5.1.8)$$

es verifica per a tot valor de λ. Φ^{μ}_{a} és la integral general de (5.1.4)

Aquesta definició diu que les trajectòries (a M^4) de cada una de les partícules, que es deriven de (5.1.1) coincideixen amb les que s'obtenen de resoldre (5.1.4) amb les corresponents condicions inicials.

Anem a analitzar (5.1.8) amb més detall. $\psi_a(x_o\dot{x}_o;\lambda;[1_i]|m_b)$ defineix una corba a $(TM^4)^N$; és la solució del SLS (5.1.1) amb les condicions inicials $(x_o,\dot{x}_o)\in U^*(m_b)$; és clar que aquesta corba està continguda a $U^*(m_b)$. Però una corba a $(TM^4)^N$ ens dóna un determinat aparellament dels punts de les trajectòries de les partícules a M^4 (vegeu a la pàgina 27 una discusió semblant referida als formalismes unitemporal i multitemporal de la MRP). Això és degut a que descrivim les N trajectòries amb el mateix paràmetre λ (exigència indispensable si volem tenir un formalisme que derivi d'un sol Lagrangià); a partir de les condicions inicials, fer evolucionar les partícules un mateix λ, aparella els punts com mostra la figura:



partícula 1 part. 2 part. 3

on hem unit els punts aparellats de cada trajectòria.

En canvi, $\Phi^{\mu}_{a}(g_{(m_b)}(x_o,\dot{x}_o);\tau_a)$, que és la integral general del SPI (5.1.4) amb les corresponents condicions inicials $g_{(m_b)}(x_o,\dot{x}_o)$, és una N-superficie Σ a $(TM^4)^N$, sense cap mena d'aparellament dels punts de les trajectòries de cada partícula, a M^4. El que fem a la definició (5.1.8) és reparametritzar independentment les N trajectòries solució del SPI amb funcions $f_a(\lambda)$, de manera que obtinguem una corba continguda a Σ, tal que aparelli els punts de les trajectòries individuals ben igual que la solució del SLS. Per tal de poder fer això hem utilitzat el formalisme multitemporal de la MRP, on cada trajectòria està parametritzada amb un paràmetre independent τ_a.

Finalment, podem donar una interpretació de la classificació dels lligams d'un SLS en tipus A i B, que inicialment podia semblar totalment artificial; els lligams de tipus A són lligams entre les posicions i la direcció de les velocitats del sistema (ja que són homogènis de grau zero en les $\dot{x}^{\mu}_{a}$), i ens defineixen una subvarietat de $(TM^4)^N$ sobre la qual les Θ^{μ}_{a} del SPI que busquem hi són determinades pel SLS. En canvi, els lligams de tipus B ens donen les relacions entre els mòduls de les velocitats (les α_a), que són necessàries perqué es mantingui el adequat aparellament dels punts de les diferents trajectòries, quan aquells punts evolucionen segons el SLS; per al SPI que busquem no ens donen res de nou.

Anem ara a treure conseqüències de la definició de la pàgina 113.

Lema. Si la família de SLS (5.1.1) admet una extensió predictiva, les funcions $f_a(\lambda)$ venen donades per:

$$f_a(\lambda)=\frac{1}{m_a}\int_0^{\lambda}\left\{-\dot{\psi}_a^{\mu}\,\dot{\psi}_{a\mu}(x^{\nu}_{b0},\dot{x}^{\rho}_{c0};\lambda';[l_i]|m_b)\right\}^{1/2}d\lambda' \tag{5.1.9}$$

Demostració. Derivem (5.1.8) respecte de λ:

$$\dot{\psi}_a^{\mu}(x_0,\dot{x}_0;\lambda;[l_i]|m_b)=f_a'(\lambda)\,\dot{\Phi}_a^{\mu}\left(g_{(m_b)}(x_0,\dot{x}_0)\,;\,f_a(\lambda)\right) \tag{5.1.10}$$

on $\dot{\psi}_a$ significa derivada respecte λ, $\dot{\Phi}_a$ derivada respecte τ_a (en aquest cas $f_a(\lambda)$), i f' derivada respecte de λ. Elevant al quadrat i tenint en compte la propietat (2.2.8) de $\dot{\Phi}_a^{\mu}$, ens queda:

$$\dot{\psi}_a^{\mu}\dot{\psi}_{a\mu}(x_0,\dot{x}_0;\lambda;[l_i]|m_b)=-m_a^2\left\{f_a'(\lambda)\right\}^2 \tag{5.1.11}$$

Com que $f_a'(\lambda)>0$ i $f_a(0)=0$, integrant hom obté (5.1.9).

Teorema. Si la família de SLS (5.1.1) admet una extensió predictiva (5.1.4), les funcions Θ_a^{μ} d'aquesta verifiquen:

$$\Theta_a^{\mu}(x_b^{\lambda},\pi_c^{\rho})=\alpha_a^{-2}\,P_{a\ \nu}^{\ \mu}\left\{a_a^{\nu}(x_b^{\lambda},\alpha_c\pi_c^{\rho}|\pi_d)+\epsilon^i l_i\,\zeta_{ai}^{\nu}(x_b^{\lambda},\alpha_c\pi_c^{\rho}|\pi_d)\right\} \tag{5.1.12}$$

on $(x_b^{\lambda},\pi_c^{\rho})\in U$; $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ són unes funcions qualsevulla que verifiquin $(x_b^{\lambda},\alpha_c\pi_c^{\rho})\in U^*(\pi_b)$; el $P_{a\ \nu}^{\ \mu}$ és el projector ortogonal a la velocitat de la partícula a

$$P_{a\ \nu}^{\ \mu}=\eta^{\mu}_{\ \nu}+\frac{\pi_a^{\mu}\pi_{a\nu}}{\pi_a^2} \tag{5.1.13}$$

i (5.1.12) val qualsevulla que siguin les funcions arbitràries l_i.

Demostració. Derivem dues vegades les equacions (5.1.8) i prenguem $\lambda=0$. Tenint en compte que ψ^μ_a és la integral general de (5.1.1) i Φ^μ_a la de (5.1.4) ens queda:

$$a^\mu_a(\omega_o|m_b)+\epsilon^i l_i \zeta^\mu_{ai}(\omega_o|m_b)=f''_a(0)\frac{m_a \dot{x}^\mu_{ao}}{(-\dot{x}^\nu_{ao}\dot{x}_{ao\nu})^{1/2}}+[f'_a(0)]^2\Theta^\mu_a(\Omega_o) \qquad (5.1.14)$$

on hem posat $\omega_o\equiv(x^\nu_{bo},\dot{x}^\lambda_{co})$, $\Omega_o=g_{(m_b)}(\omega_o)$. Però de (5.1.9) en podem deduir el valor de $f'_a(0)$, $f''_a(0)$:

$$f'_a(0)=m_a^{-1}(-\dot{x}^\mu_{ao}\dot{x}_{ao\mu})^{1/2}$$

$$f''_a(0)=-m_a^{-1}\{a^\mu_a(\omega_o|m_b)+\epsilon^i l_i \zeta^\mu_{ai}(\omega_o|m_b)\}\frac{\dot{x}_{ao\mu}}{(-\dot{x}^\nu_{ao}\dot{x}_{ao\nu})^{1/2}} \qquad (5.1.15)$$

Substituint a (5.1.14) obtenem:

$$\Theta^\mu_a(\Omega_o)=\left\{\frac{m_a}{(-\dot{x}^\nu_a\dot{x}_{a\nu})^{1/2}}\right\}^2\tilde{P}^\mu_{a\nu}\{a^\nu_a(\omega_o|m_b)+\epsilon^i l_i \zeta^\nu_{ai}(\omega_o|m_b)\}$$

$$\tilde{P}^\mu_{a\nu}=\eta^\mu_\nu-\frac{\dot{x}^\mu_{ao}\dot{x}_{ao\nu}}{\dot{x}^\rho_{ao}\dot{x}_{ao\rho}} \qquad (5.1.16)$$

i com que això ha d'ésser vàlid qualsevulla que siguin els valors dels paràmetres m_b i per a qualsevol $\omega_o\in U^*(m_b)$, resulta que Ω_o pot ésser qualsevol element de U. Si a aquest element de U li diem (x^ν_b, π^λ_c), llavors $\omega_o=(x^\nu_b, m_c^{-1}(-\dot{x}^\rho_{co}\dot{x}_{co\rho})^{1/2}\pi^\lambda_c)$, i les quantitats $m_c^{-1}(-\dot{x}^\rho_{co}\dot{x}_{co\rho})^{1/2}$, que no es poden determinar en termes de (x,π), corresponen a les α_a; qualsevol valor d'aquestes quantitats tal que $(x_b^\nu, m_c^{-1}(-\dot{x}_{co}^{\rho}\dot{x}_{co\,\rho})^{1/2}\pi_c^\lambda) \in U^*(m_b)$ podrà figurar, per tant, al segon membre de (5.1.16). A més, $(x,\pi)\in U$ determina a quin $U^*(m_b)$ estem, ja que $\pi_b^2 = m_b^2$; finalment, $\tilde{P}_a{}^\mu{}_\nu$, expressat en termes de π_b^μ , (la qual cosa és possible perquè és homogeni de grau zero en les $\dot{x}$) ens dona $P_a{}^\mu{}_\nu$. Per tant, queda demostrat el Teorema.

Corolari 1. Si la familia de SLS (5.1.1) admet una extensió predictiva, les ζ_{ai}^μ són de la forma:

$$\zeta_{ai}^\mu(x,\dot{x}|w_b) = \sigma_{ai}(x,\dot{x}|w_b)\,\dot{x}_a^\mu \qquad \forall a, \forall i . \tag{5.1.17}$$

Demostració. Es conseqüència de que el primer membre de (5.1.14) no depén de quines siguin les funcions arbitràries l_i; per tant el coeficient de l_i al segon membre ha d'ésser nul:

$$P_a{}^\mu{}_\nu\,\zeta_{ai}^\nu = 0 \qquad \forall a, \forall i \tag{5.1.18}$$

i com que $P_a{}^\mu{}_\nu$ és el projector sobre el subespai de M^4 generat per $\dot{x}_a^\mu$, hom dedueix (5.1.17).

Aquest Corolari ens diu que els ζ_i han d'ésser combinacions lineals dels N vectors de $(TM^4)^N$ següents:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{x}_2^\mu \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dot{x}_N^\mu \end{pmatrix} \tag{5.1.19}$$

ja que (5.1.19) pot ésser escrit com:

$$\zeta_i = \epsilon^a \sigma_{ai}(x, \dot{x}(wb)) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{x}_a^\mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.20}$$

Com que els ζ_i són vectors linealment independents, això significa que rang$(\sigma_{ai})=f \leq N$.

El fet de que les funcions arbitràries a $\ddot{x}_a^\mu$ apareixin sempre multiplicant a $\dot{x}_a^\mu$ és degut a que, per tal de que el sistema sigui predictivitzable, siguin quines siguin les l_i , la trajectòria individual a M^4 de cada una de les partícules ha d'ésser la mateixa (si no, unes condicions inicials no determinarien l'evolució futura del sistema, i no seria possible, per tant, la predictivització del sistema). La llibertat de les l_i pot influir solament sobre el ritme segons el qual són recorregudes les trajectòries; correspondrà, per tant, a elegir diferentes lleis horàries per a les partícules. Això correspon a reparametritzacions globals $\lambda'=f(\lambda)$ de totes les trajectòries, les quals no modifiquen l'aparellament dels puns de les diferentes trajectòries a M^4, tal com ja hem discutit a la pàgina 114.

Corolari 2. Si la família de SLS (5.1.1) admet una extensió predictiva, llavors

$$\operatorname{rang}_{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \Sigma_1^\mu}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial \Sigma_N^\mu}{\partial \alpha_1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \frac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_N}, \dots, \frac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_N}, \frac{\partial \Sigma_1^\mu}{\partial \alpha_N}, \dots, \frac{\partial \Sigma_N^\mu}{\partial \alpha_N} \end{pmatrix} = d_B \tag{5.1.21}$$

on $\Sigma^{\mu}_a = \alpha_a^{-2} P_a{}^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}_a(x^{\lambda}_b, \alpha_c \pi^{\rho}_c | \pi_d)$ i hom calcula el rang a la subvarietat de $(TM^4)^N$ definida per tots els lligams (5.1.6) i (5.1.7).

Demostració. Gràcies al Corolari 1, la fórmula (5.1.14) es redueix a

$$\Theta^{\mu}_a(x^{\lambda}_b, \pi^{\rho}_c| = \alpha_a^{-2} P_a{}^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}_a(x^{\lambda}_b, \alpha_c \pi^{\rho}_c | \pi_d) \equiv \Sigma^{\mu}_a(x, \pi ; \alpha_b) \tag{5.1.22}$$

Però el primer membre és independent dels diferents valors de α_a, sempre que $(x^{\lambda}_b, \alpha_c \pi^{\rho}_c) \in U^*(\pi_b)$. Els α_a han de verificar per tant les equacions (5.1.7)

$$\phi_m (x^{\lambda}_b, \alpha_c \pi^{\rho}_c | \pi_d) = 0 \qquad m = d_A + 1, \ldots, d_A + d_B \tag{5.1.23}$$

i per que el segon membre de (5.1.22) sigui independent de α_a, hom ha de poder eliminar aquestes utilitzant solament (5.1.23). Això vol dir que (5.1.22) depén únicament de combinacions funcionals de les α_a que són determinades per (5.1.23). Tenint en compte la condició (4.2.7), això implica (5.1.21), que és allò que voliem demostrar.

A partir d'ara direm $\tilde{\Theta}^{\mu}_a(x, \pi)$ a la funció $\Sigma^{\mu}_a(x, \pi ; \alpha_b)$ després d'eliminar la seva dependència en les α_b utilitzant (5.1.23). Aquesta funció ens donarà l'acceleració del sistema predictiu buscat, però no sobre tot $(TM^4)^N$ sino solament sobre la subvarietat U.

Corolari 3. Si la família de SLS (5.1.1) admet una extensió predictiva, la funció $\tilde{\theta}^{\mu}_{a}(x, \pi)$ verifica

$$\tilde{\theta}^{\mu}_{a}\left(\Lambda(x-A), \Lambda\pi\right) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \tilde{\theta}^{\nu}_{a}\,(x,\pi) \qquad (5.1.24)$$

per tot $(x,\pi) \in U$ i per tota transformació de Poincaré (Λ, A) tal que $(\Lambda(x-A), \Lambda\pi) \in U$.

Demostració. Es una conseqüència automàtica del teorema que hem demostrat a la pàgina 116 i de que θ^{μ}_{a} verifica les equacions (2.2.13-14) perquè (5.1.4) és un SPI.

Si el Lagrangià de partida és invariant per Poincaré, no cal utilitzar el teorema de la pàgina 116 per a provar el Corolari 3, que és conseqüència de que els ϕ_m són escalars Poincaré i a^{μ}_{a} es transforma com un quadrivector invariant per translacions.

Resumint: si un SLS admet una extensió predictiva, l'acceleració θ^{μ}_{a} d'aquesta extensió està determinada sobre la subvarietat U de $(TM^4)^N$ definida per els lligams de tipus A. Per la seva part, els lligams de tipus B permeten d'eliminar les α_b de les $\tilde{\theta}^{\mu}_{a}$, o sigui, els mòduls de les quadrivelocitats $\dot{x}^{\mu}_{b}$, que no són físiques en el sentit que depenen solament de la particular parametrització λ que hem pres per a descriure el SLS donat.

5.2. Existència i unicitat de l'extensió Predictiva.

A l'apartat anterior hem definit el que és l'extensió Predictiva d'una família de SLS donada, i hem tret algunes conseqüències d'aquesta definició. Volem estudiar ara sota quines condicions existeix i es única l'esmentada extensió Predictiva.

Resumint l'estudi fet a l'apartat 5.1 podem enunciar el següent

Teorema. Si la familia de SLS (5.1.1) admet una extensió predictiva única, es verifica:

i) $\quad \xi^{\mu}_{ai}(x,\dot{x}\,|\,w_b) = \sigma_{ai}(x,\dot{x}\,|\,w_b)\,\dot{x}^{\mu}_{a} \quad \forall a,i,\mu \quad (\Rightarrow f \leq N)$

ii)
$$\operatorname*{rang}_{\mathcal{U}^*(\pi_b)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_1}, & \dfrac{\partial \Sigma^{\mu}_{a}}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_N}, & \cdots, & \dfrac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_N}, & \dfrac{\partial \Sigma^{\mu}_{a}}{\partial \alpha_N} \end{pmatrix} = d_B \tag{5.2.1}$$

on $\phi_{d_A+K}(x^{\nu}_{b},\alpha_c\pi^{\rho}_{c}\,|\,\pi_d)$, $\Sigma^{\mu}_{a}(x,\pi;\alpha_b) = \alpha^{-2}_{a}\,\mathcal{P}_{a}{}^{\mu}{}_{\nu}\,a^{\nu}_{a}(x^{\lambda}_{b},\alpha_c\pi^{\rho}_{c}\,|\,\pi_d)$

$$\mathcal{P}_{a}{}^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{\pi^{\mu}_{a}\pi_{a\nu}}{\pi^{2}_{a}}$$

iii) Per a qualsevol transformació de Poincaré (Λ, A),

$$\widetilde{\Theta}^{\mu}_{a}(\Lambda(x-A),\Lambda\pi) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\widetilde{\Theta}^{\nu}_{a}(x,\pi)$$

sempre que $(x,\pi)\in U$ i $(\Lambda(x-A),\Lambda\pi)\in U$. $\widetilde{\Theta}^{\mu}_{a}$ és la funció Σ^{μ}_{a} de ii) on hem eliminat α_b utilitzant els lligams B.

iv) Les dades de Cauchy $\Theta^{\mu}_{a|U}=\widetilde{\Theta}^{\mu}_{a}$ determinen una solució única de les equacions de Droz-Vincent.

Demostració. i) és el Corolari 1 de la pàgina 118; ii) el Corolari 2 (pàgina 119); iii) el Corolari 3 (pàgina 121); iv) és conseqüència immediata de la hipòtesi.

Fins ara no hem utilitzat el fet que les Θ^{μ}_{a} d'un SPI han de verificar les equacions de Droz-Vincent (5.2.2); però hom no pot comprovar tal cosa directament per a la $\widetilde{\Theta}^{\mu}_{a}$, ja que està definida solament sobre $U\subset(TM^4)^N$, sobre la qual les variables (x,π) no són independents. El que volem estudiar és si $\widetilde{\Theta}^{\mu}_{a}$ és compatible amb les equacions de Droz-Vincent i si aquestes $\widetilde{\Theta}^{\mu}_{a}$ determinen o no una solució única de les esmentades equacions.

Les equacions de la predictivitat per a Θ^{μ}_{a} són (2.3.4)

$$\vec{H}_{a'}\,\Theta^{\mu}_{a}=0$$

$$\vec{H}_{a'}=\pi^{\mu}_{a'}\frac{\partial}{\partial x^{a'\mu}}+\Theta^{\mu}_{a'}\frac{\partial}{\partial \pi^{a'\mu}} \qquad (5.2.2)$$

Es a dir, tenim N-1 equacions diferencials per a la Θ^{μ}_{a}. Es raonable esperar que si tenim unes dades deCauchy sobre una subvarietat de dimensió 8N-(N-1) (és a dir, si d_A=N-1) llavors de (5.2.2) podriem aïllar les N-1 derivades normals de Θ^{μ}_{a} (a sobre de U).

Siguin $\phi_1,\ldots,\phi_{N-1}$ els N-1 lligams de tipus A; podem completar-los amb 7N+1 funcions (vegeu (GO.69) pàgina 74) de manera que les 8N funcions ϕ_i siguin un sistema de coordenades de $(TM^4)^N$ (definit si més no a un entorn de U). En termes d'aquestes coordenades, les equacions (5.2.2) s'escriuen:

$$(\vec{\mathcal{H}}_{a'}\phi_1)\frac{\partial\Theta_a^\mu}{\partial\phi_1} + \dots + (\vec{\mathcal{H}}_{a'}\phi_{N-1})\frac{\partial\Theta_a^\mu}{\partial\phi_{N-1}} = \vec{\mathcal{U}}_{a'}\Theta_a^\mu$$

$$\vec{\mathcal{U}}_{a'} = -\sum_{i=N}^{8N}(\vec{\mathcal{H}}_{a'}\phi_i)\frac{\partial}{\partial\phi_i} \tag{5.2.3}$$

Exigint ara que la matriu (N-1)x(N-1) dels coeficients de $\partial\Theta_a^\mu/\partial\phi_1,\dots,\partial\Theta_a^\mu/\partial\phi_{N-1}$ sigui diferent de zero, podrem calcular sobre U les derivades de qualsevol ordre de Θ_a^μ (respecte de totes les ϕ_i i=1,...,8N). Llavors, suposant que la sèrie de potències que així obtindriem per a la Θ_a^μ sigui convergent, les equacions (5.2.1) amb les dades de Cauchy $\Theta_a^\mu|_U = \tilde{\Theta}_a^\mu$ determinen una solució analítica única.

Malauradament, el caràcter analític de Θ_a^μ, i l'existència i unicitat de la solució, donades unes dades de Cauchy, són sovint incompatibles (vegeu (DS.63), vol. 2, pàgina 1632). Es més, per a sistemes d'equacions semblants hom pot trobar contraexemples: sistemes per als quals unes dades de Cauchy adequades no determinen una única solució.(Vegeu (DS.63), vol. 2, pàgines 1749 i següents).

Per tant estudiarem la possible existència i unicitat de Θ_a^μ en el marc de la teoria de perturbacions. Es a dir, estudiarem en quins casos són aplicables els teoremes 1 i 2 de la pàgina 39.

El que cal veure és quan les dades de Cauchy que tenim

$$\Theta^{\mu}_{a|\mathcal{U}} = \tilde{\Theta}^{\mu}_{a}$$

$$\mathcal{U} = \{ (x,\pi) \in (TM^4)^N \mid \phi_\omega(x,\pi) = 0,\ \omega = 1,\dots,d_A \} \qquad (5.2.4)$$

són del tipus (2.5.4)

$$\prod_{a' \neq a} R_{a'}(\zeta_{a'})\, \Theta^{\mu}_{a} = \overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a} \qquad (5.2.5)$$

i verifiquen a més (2.5.7-8):

$$D_{a'} \overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a} = 0$$

$$D_{a'} \zeta^{\mu}_{a''} = -\delta_{a'a''} \qquad (5.2.6)$$

Per això utilitzarem un conjunt de variables adequat; introduirem els vectors h^{ν}_{α} $\alpha = 1,\dots,N-1$, π^{ν}_{b} (trobareu a l'Apèndix 5 les definicions de totes aquestes variables) i els escalars z_a, ρ_m, $h_{\alpha\beta}$, $k_{aa'}$, π^2_a. Aquestes variables són especialment adients degut a que

$$D_a = \frac{\partial}{\partial z_a} \qquad (5.2.7)$$

i l'operador $R_a(\lambda)$ suma λ a z_a i deixa igual la resta de variables. Per a N=2, aquestes variables coincideixen amb les bones variables per a un sistema de dues partícules, introduides al capítol 3 (pàgina 53 i Apèndix 2).

Escriurem ara ϕ_m $m=1,\dots,d_A$ i $\tilde{\Theta}^{\mu}_{a}$, en termes d'aquestes variables. Volem veure quan és possible aïllar les $z_{a'}$ en termes de les altres variables a partir de les ϕ_m. Considerarem per tant les matrius

$$\mathbb{M}_a = \begin{pmatrix} D_1\phi_1, \ldots, D_{a-1}\phi_1, D_{a+1}\phi_1, \ldots, D_N\phi_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ D_1\phi_{d_A}, \ldots, D_{a-1}\phi_{d_A}, D_{a+1}\phi_{d_A}, \ldots, D_N\phi_{d_A} \end{pmatrix} \tag{5.2.8}$$

Suposarem també que les acceleracions $\tilde{\Theta}^\mu_a$ depenen d'alguns paràmetres e_i que donen compte de la interacció entre les N partícules del sistema, que les $\tilde{\Theta}^\mu_a$ són desenvolupables en sèrie de potències dels esmentats paràmetres i que $\tilde{\Theta}^\mu_a(e_i=0)=0$.

Podem enunciar ara els teoremes següents:

<u>Teorema 1</u>. Si $d_A=N-1$ i $\mathrm{rang}_U \mathbb{M}_a=N-1$ per tot a, llavors existeix una solució única de les equacions diferencials (5.2.2) amb les condicions de contorn (5.2.4), en l'hipòtesi de que $\tilde{\Theta}^\mu_a$ sigui desenvolupable en sèrie de potències de les e_i. Hom pot calcular Θ^μ_a ordre per ordre aplicant la fórmula (2.5.6):

$$\Theta^\mu_a = \overset{*}{\Theta}{}^\mu_a + \sum_{a'} \zeta_{a'} \int_0^1 d\lambda \prod_{a''} R_{a''}(\lambda\zeta_{a''})\, \Theta^\nu_{a'} \frac{\partial \Theta^\mu_a}{\partial \pi^{a'\nu}} \tag{5.2.9}$$

on les funcions $\zeta_{a'}$ s'obtenen en aïllar les $z_{a'}$ a partir de les equacions $\phi_m=0$:

$$\phi_m(z_a, z_{a'}; \rho h k \pi) = 0 \Rightarrow z_{a'} = \psi_{a'}(z_a; \rho h k \pi)$$

$$\zeta_{a'} = -z_{a'} + \psi_{a'}(z_a; \rho h k \pi) \tag{5.2.10}$$

i $\overset{*}{\Theta}{}^\mu_a$ s'obté de $\tilde{\Theta}^\mu_a$ substituint $z_{a'}$ per $\psi_{a'}$.

Demostració. $\mathrm{Rang}_U \mathbb{M}_a = N-1$ vol dir que podem aïllar les $z_{a'}$ $(a' \neq a)$ a partir de les N-1 equacions $\phi_m = 0$ (5.2.10). Llavors, $\zeta_{a'}$ i $\overset{*}{\Theta}{}^\mu_a$ definides al enunciat del teorema verifiquen (5.2.5) i podem aplicar els teoremes 1 i 2 de la pàgina 39, segons els quals les equacions diferencials (5.2.2) amb les condicions de contorn (5.2.4) són equivalents a les equacions integro-funcionals (5.2.8) i a les condicions d'integrabilitat (2.5.5):

$$D_{a'}\left(\Theta^\nu_{a''} \frac{\partial \Theta^\mu_a}{\partial \pi^{a''\nu}}\right) = D_{a''}\left(\Theta^\nu_{a'} \frac{\partial \Theta^\mu_a}{\partial \pi^{a'\nu}}\right) \tag{5.2.11}$$

Però la condició $\Theta^\mu_a(e_i=0)=0$ implica que el sistema d'equacions de Droz-Vincent és descomposable i completament integrable (vegeu pàgina 43) i per tant (5.2.11) es verificarà automàticament com a conseqüència de (5.2.9).

La hipòtesi de que Θ^μ_a és desenvolupable en sèrie de potències de les e_i fa que (5.2.9) ens doni automàticament la solució única, ordre per ordre. El càlcul d'aquesta es redueix , per (5.2.9), a quadratures.

Teorema 2. Si $d_A > N-1$ i $\mathrm{rang}_U \mathbb{M}_a = N-1$ per tot a, llavors existeixen infinites solucions de (5.2.2) que satisfan les condicions de contorn (5.2.4), en la hipòtesi de que Θ^μ_a és desenvolupable en sèrie de potències de les e_i.

Demostració. Com que $\mathrm{rang}_U \mathbb{M}_a = N-1$, hom pot aïllar com al teorema 1, $z_{a'} = \psi_{a'}(z_a;\, h,\, \rho,\, k,\, \pi)$. Ara be, l'operador $\prod_{a' \neq a} R_{a'}(\zeta_{a'})$, on $\zeta_{a'} = -z_{a'} + \psi_{a'}$, porta les funcions $f(x, \pi)$ sobre la subvarietat:

$$\mathcal{V}_a = \{ (x,\pi) \in (TM^4)^N \mid z_{a'} = \varphi_{a'}(z_a; h \rho K \pi) \}$$

i U $\not\subseteq \mathcal{V}_a$. Per tant, hi ha infinites funcions $\overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_a$ definides a $\mathcal{V}_a$ i que coincideixen amb $\tilde{\Theta}^{\mu}_a$ sobre U. Cada una d'aquestes $\overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_a$ determina una solució de les equacions de Droz-Vincent (vegeu el Teorema 1) i per tant hom pot construir infinites solucions, que és el que voliem demostrar.

Teorema 3. Si $d_A < N-1$, les equacions diferencials (5.2.1) amb les condicions de contorn (5.2.4) no tenen cap solució, excepte quant $\tilde{\Theta}^{\mu}_a$ verifiqui

$$\vec{T}_i \tilde{\Theta}^{\mu}_a = 0 \qquad i = 1, \dots, r \tag{5.2.12}$$

on $\vec{T}_i$ són les r combinacions independents dels camps $\vec{H}_{a'}$, tangents a U ($r \geqslant N-1-d_A$).

Demostració. Els N-1 camps $\vec{H}_{a'}$ són coneguts sobre U, però no seran en general tangents a U. Com que U ve definida per d_A equacions i els camps $\vec{H}_{a'}$ són independents, podré construir com mínim $N-1-d_A$ combinacions tangents a U, les quals anomenarem $\vec{T}_i$, i=1,...,r. Però la solució Θ^{μ}_a buscada verifica $\vec{H}_{a'} \Theta^{\mu}_a = 0$, lo qual implica $\vec{T}_i \tilde{\Theta}^{\mu}_a = 0$ que és el que voliem provar.

Resumint aquests tres teoremes, tenim:

Si $d_A = N-1$ i $\text{rang}_U \mathbb{M}_a = N-1$, solució única.

Si $d_A > N-1$ i $\text{rang}_U \mathbb{M}_a = N-1$, infinites solucions.

En la resta de casos, $\tilde{\Theta}^{\mu}_a$ haurà de verificar algunes equacions tals com les del Teorema 3; sino, no hi ha solució.

Després del que hem vist, podem enunciar un teorema que és la recíproca parcial del teorema de la pàgina 122 , i que és la conclusió del present estudi sobre la existència i unicitat de la extensió predictiva d'un SLS.

Teorema. Si la família de SLS (5.1.1) verifica:

i) $\varsigma^{\mu}_{ai}(x,\dot{x}(w_b)) = \sigma_{ai}(x,\dot{x}(w_b))\,\dot{x}^{\mu}_{a} \qquad \forall a,i,\mu$

ii)
$$\operatorname{rang}_{U^*(M_b)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_1}, & \dfrac{\partial \Sigma^{\mu}_{a}}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_{d_A+1}}{\partial \alpha_N}, & \cdots, & \dfrac{\partial \phi_{d_A+d_B}}{\partial \alpha_N}, & \dfrac{\partial \Sigma^{\mu}_{a}}{\partial \alpha_N} \end{pmatrix} = d_B$$

on Σ^{μ}_{a} és definit a (5.2.1).

iii) $\tilde{\Theta}^{\mu}_{a}(\Lambda(x-A),\Lambda\pi) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\tilde{\Theta}^{\nu}_{a}(x,\pi) \qquad \forall a,\mu$

$$\phi_m(\Lambda(x-A),\Lambda\pi) = \phi_m(x,\pi) \qquad \forall m$$

per a qualsevol transformació de Poincaré (Λ, A).

iv) $d_A=N-1$ i $\mathrm{rang}_U \mathbb{M}_a = N-1$ per tot a .

Llavors la família de SLS donada admet una extensió predictiva única, en la hipòtesi de que Θ^{μ}_{a} és desenvolupable en sèrie de potències de les e_i. La solució ve donade per la fórmula (5.2.9).

Demostració. L'existència i unicitat de Θ^{μ}_{a} han estat provades ja al teorema 1 de la pàgina 126. Cal veure ara que aquesta solució Θ^{μ}_{a} així construida verifica les propietats (2.2.11) i (2.2.13-14) per ésser l'acceleració d'un SPI:

$$\Theta_a^{\mu}\pi_{a\mu}=0 \tag{5.2.13}$$

$$\Theta_a^{\mu}\left(\Lambda(x-A),\Lambda\pi\right)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\Theta_a^{\nu}(x,\pi) \qquad \forall(\Lambda,A)\in\mathcal{P} \tag{5.2.14}$$

on $\mathcal{P}$ és el grup de Poincaré. Però de l'expressió de $\tilde{\Theta}_a^{\mu}$ i Σ^{μ}_a (pàgina 122) hom veu que $\overset{*}{\Theta}{}_a^{\mu}\pi_{a\mu}=0$, ja que $\overset{*}{\Theta}{}_a^{\mu}$ és essencialment $(\eta^{\mu}{}_{\nu}+\pi_a^{\mu}\pi_{a\nu}/\pi_a^2)a_a^{\nu}$. Llavors, (5.2.13) és conseqüència immediata de (5.2.9)

$$\Theta_a^{\mu}\pi_{a\mu}=\sum_{a'}\zeta_{a'}\int_0^1 d\lambda\prod_{a''}R_{a''}(\lambda\zeta_{a''})\,\Theta_{a'}^{\nu}\frac{\partial}{\partial\pi^{a'\nu}}\left(\Theta_a^{\mu}\pi_{a\mu}\right) \tag{5.2.15}$$

en considerar aquesta expressió ordre per ordre.

(5.2.14) és conseqüència de iii), que fa que $\overset{*}{\Theta}{}_a^{\mu}$ tingui la propietat desitjada i del fet que $\zeta_{a'}$ és un escalar Poincaré. Llavors (5.2.14) es dedueix automàticament de (5.2.9).

Hi pot haver famílies de SLS que no verifiquin iv) i que malgrat tot tinguin una extensió predictiva única; això correspondria a casos on les $\tilde{\Theta}_a^{\mu}$ verifiquin determinades relacions, del tipus (5.2.12) del Teorema 3 (pàgina 128). Aquests casos han d'ésser estudiats un per un i no els tractarem aquí en general.

Hi ha un últim cas que no hem contemplat i és el cas en que $d_A=0$. No hi ha lligams de tipus A. Llavors $\tilde{\Theta}_a^{\mu}(x,\pi)$ està definida ja sobre tot $(TM^4)^N$ i ha de ser per tant l'acceleració d'un SPI. En aquest cas, la $\tilde{\Theta}_a^{\mu}$ ha de verificar les equacions de Droz-Vincent, si no el SLS no seria predictivitzable.

Aquest és el cas del Lagrangià singular (4.2.8) que descriu un sistema de N partícules lliures. En aquest cas, $d_A = d_B = 0$. No hi ha lligams de cap mena. A més, però, $a_a^\mu = 0$ i les $\varsigma_a{}^\mu{}_i$ verifiquen la condició i). En aquest cas,

$$\tilde{\Theta}_a^\mu(x,\pi) = \Sigma_a^\mu(x,\pi;\alpha) = \alpha_a^{-2}\, P_a{}^\mu{}_\nu\, a_a^\nu(x,\alpha\pi|\pi) = 0 \qquad (5.2.16)$$

i és clar que $\Theta_a^\mu = 0$ defineix un SPI que correspon a N partícules lliures.

Per acabar, donarem una interpretació física del fet de perquè amb N-1 lligams tipus A les coses funcionen bé i l'extensió predictiva existeix i és única.

Sigui $\Phi_a^\mu(x_o, \pi_o; \tau_a)$ la integral general del SPI (5.1.4). Substituint-la als N-1 lligams de tipus A, obtenim N-1 equacions en les $\tau_1, \ldots, \tau_N$:

$$\phi_m\left(\Phi_a^\mu(x_o\pi_o;\tau_a), \Phi_b^\nu(x_o\pi_o;\tau_b)\right) = 0 \quad m = 1,\ldots,N-1 \qquad (5.2.17)$$

Donat un valor qualsevol de τ_1, aquestes equacions determinaran els valors de $\tau_2, \ldots, \tau_N$; és a dir, donat un punt de la trajectòria de la partícula 1, els lligams de tipus A ens diuen quins són els punts de les altres trajectòries aparellats amb ell. I per això ens calen exactament N-1 lligams de tipus A.

5.3. Predictivització del model DGL.

El sistema Lagrangià singular de Dominici-Gomis-Longhi és (4.3.10):

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_a^\mu = \eta_a \lambda_a(\lambda_1+\lambda_2)V'(x^2)\,x^\mu + l\,\dot{x}_a^\mu \\ \lambda_a = \sqrt{-\dfrac{\dot{x}_a^\nu \dot{x}_{a\nu}}{\mathcal{U}_a}} \;, \quad \mathcal{U}_a = m_a^2 - V(x^2) \end{array}\right\} \qquad (5.3.1)$$

V' indica derivada respecte de l'argument x^2; aquest SLS conté solament una funció arbitrària l. Hi ha també dos lligams (4.3.8), un de tipus A i l'altre de tipus B:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Tipus A :} & (P,x)=0 \\ \text{Tipus B :} & (P,\dot{x})=0 \\ \text{on} & P^\mu = \epsilon^a \dfrac{\dot{x}_a^\mu}{\lambda_a} \end{array}\right\} \qquad (5.3.2)$$

Segons la notació de (5.1.1) tenim:

$$\left.\begin{array}{l} a_a^\mu = \eta_a \lambda_a (\lambda_1+\lambda_2) V'(x^2)\, x^\mu \\ \zeta_a^\mu = \dot{x}_a^\mu \qquad ; \quad f = 1 \\ \phi_1 = (P,x) \quad ; \quad \phi_2 = (P,\dot{x}) \quad ; \; d_A = d_B = 1 \end{array}\right\} \qquad (5.3.3)$$

Posarem

$$V(x^2) = g\,W(x^2) \qquad (5.3.4)$$

on g és un paràmetre que dona compte del tipus d'interacció entre les partícules (vegeu pàgina 126).

Podem aplicar ara el Teorema de la pàgina 129.

Teorema. La família de SLS donada per (5.3.1) admet una extensió predictiva única, en la hipòtesi de que Θ^{μ}_{a} és desenvolupable en sèrie de potències de g.

Demostració. Solament ens cal veure que es verifiquin les quatre condicions del Teorema de la pàgina 129.

i) es verifica automàticament, amb $\sigma_a=1$.

ii)
$$\Sigma^{\mu}_{a}(x,\pi;\alpha_b)=\alpha_a^{-2}\,P_a{}^{\mu}{}_{\nu}\,a^{\nu}_{a}(x^{\lambda}_{b},\alpha_c\pi^{\rho}_{c}\,|\,\pi_d)$$

però en la nostra notació, $\lambda_a=\alpha_a\pi_a/\sqrt{U_a}$, i

$$\Sigma^{\mu}_{a}(x,\pi;\alpha_b)=\frac{\eta_a V'}{U_a}\left(1+\frac{\alpha_{a'}}{\alpha_a}\cdot\frac{\pi_{a'}\sqrt{U_a}}{\pi_a\sqrt{U_{a'}}}\right)\left(\pi_a^2x^{\mu}+(x\pi_a)\pi^{\mu}_{a}\right) \qquad (5.3.5)$$

Els lligams ϕ poden expressarse com:

$$\phi_1=(P,x)=\epsilon^{a}\frac{\sqrt{U_a}}{\pi_a}(x,\pi_a)=0$$

$$\phi_2=(P,\dot{x})=\eta_a\left\{\alpha_{a'}\left(\frac{K}{\pi_a}\sqrt{U_a}+\pi_{a'}\sqrt{U_{a'}}\right)-\alpha_a\left(\frac{K}{\pi_a}\sqrt{U_{a'}}+\pi_a\sqrt{U_a}\right)\right\}=0 \qquad (5.3.6)$$

i veiem com $\phi_2=0$ determina el valor de $\alpha_{a'}/\alpha_a$, precisament la combinació de α_a i $\alpha_{a'}$ de la que depén Σ^{μ}_{a}; per tant la condició ii) també es verifica.

iii) $\tilde{\Theta}^{\mu}_{a}$ vindrà donade per tant per:

$$\tilde{\Theta}^{\mu}_{a}(x,\pi)=\eta_a\frac{V'(x^2)}{U_a}\left(1+\frac{\pi_a\pi_{a'}U_a+K\sqrt{U_aU_{a'}}}{\pi_a\pi_{a'}U_{a'}+K\sqrt{U_aU_{a'}}}\right)\left(\pi_a^2x^{\mu}+(x\pi_a)\pi^{\mu}_{a}\right) \qquad (5.3.7)$$

i per simple inspecció de (5.3.6-7) hom veu que es verifica iii), ja que les expressions són covariants i depenen tan sols de la coordenada relativa x^μ.

iv) Es clar que $d_A=N-1=1$. Cal veure ara que $D_a\phi_1\neq 0$ per a=1, 2. Un simple càlcul, però, dóna:

$$D_a\phi_1 = -\frac{\eta_a}{\pi_{a'}}\left(\pi_a\pi_{a'}\sqrt{u_a}+k\sqrt{u_{a'}}\right)-V'(x^2)(x\pi_a)\epsilon^b\frac{\eta_b(x,\pi_b)}{\pi_b\sqrt{u_b}} \qquad (5.3.8)$$

que no és zero sobre U.

L'acceleració Θ^μ_a del SPI buscat vindrà donada per (5.2.9). Calculem primer $\overset{*}{\Theta}{}^\mu_a$ i $\zeta_{a'}$. El lligam $(P,x)=0$, escrit en les bones variables (vegeu Apèndix 2), dóna:

$$\left(\pi_a\pi_{a'}\sqrt{u_a}+k\sqrt{u_{a'}}\right)\pi_a z_a-\left(\pi_a\pi_{a'}\sqrt{u_{a'}}+k\sqrt{u_a}\right)\pi_{a'}z_{a'}=0 \qquad (5.3.9)$$

que defineix $z_{a'}$ com funció implícita de la resta de variables:

$$\phi_1=0 \iff z_{a'}=\psi_a(z_a;h^2,k,\pi_b^2) \qquad (5.3.10)$$

$\overset{*}{\Theta}{}^\mu_a$ serà per tant (a partir de (5.3.7) i escrivint-ho tot en funció de les bones variables):

$$\overset{*}{\Theta}{}^\mu_a = \frac{\pi_a^2V'(x^2)}{u_a}\left(1+\frac{\pi_a\pi_{a'}u_a+k\sqrt{u_au_{a'}}}{\pi_a\pi_{a'}u_{a'}+k\sqrt{u_au_{a'}}}\right)\left(\eta_ah^\mu-\frac{\psi_a}{\pi_a^2}t^\mu_a\right) \qquad (5.3.11)$$

i a l'argument de $V(x^2)$ cal subtituir x^2 per:

$$x^2=h^2-\pi_a^2z_a^2+2kz_a\psi_a-\pi_{a'}^2\psi_a^2 \qquad (5.3.12)$$

<u>Teorema.</u> L'acceleració Θ^{μ}_{a} de l'extensió predictiva del model DGL ce donada per:

$$\Theta^{\mu}_{a} = \overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a} - \int_{\psi_a}^{z_{a'}} du \left\{ \Theta^{\nu}_{a'} \frac{\partial \Theta^{\mu}_{a}}{\partial \pi^{a'\nu}} \right\}_{z_{a'}=u} \qquad (5.3.13)$$

<u>Demostració</u>. L'equació (5.2.9) s'escriu en aquest cas com

$$\Theta^{\mu}_{a} = \overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a} + \zeta_{a'} \int_0^1 d\lambda \, R_{a'}(\lambda \zeta_{a'}) \left\{ \Theta^{\nu}_{a'} \frac{\partial \Theta^{\mu}_{a}}{\partial \pi^{a'\nu}} \right\} \qquad (5.3.14)$$

on $\zeta_{a'} = -z_{a'} + \psi_a$. Fent el canvi de variable $z_{a'} + \lambda \zeta_{a'} = u$, hom obté sens dificultat (5.3.13).

Volem ara resoldre l'equació integral (5.3.13) mitjançant desenvolupaments en sèrie de potències del paràmetre g que hem introduit a (5.3.4).

Suposarem que les funcions Θ^{μ}_{a}, $\overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a}$, ψ_a són desenvolupables en sèrie de potències de g. Com que Θ^{μ}_{a} és un quadrivector invariant Poincaré podrem escriure (vegeu Apèndix 2):

$$\Theta^{\mu}_{a} = \eta_a a_a h^{\mu} + l_{aa'} t^{\mu}_{a'} \qquad (5.3.15)$$

i això mateix per a $\overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a}$. Suposant que és desenvolupable en g,

$$\Theta^{\mu}_{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{(n)}{\Theta}{}^{\mu}_{a} g^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\eta_a \overset{(n)}{a}_a h^{\mu} + \overset{(n)}{l}_{aa'} t^{\mu}_{a'} \right) g^n \qquad (5.3.16)$$

i això mateix per a $\overset{*}{\Theta}{}^{\mu}_{a}$. Anem a veure si és possible posar

$$\psi_a = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{\psi_a} \, g^n \tag{5.3.17}$$

L'equació de U, (5.3.9), es pot escriure, aillant W, com

$$g\Lambda^2\left(\frac{z_a^2}{\pi_{a'}^2} - \frac{z_{a'}^2}{\pi_a^2}\right) W = (k^2-\pi_a^4) z_a^2 + 2k(\pi_a^2 - \pi_{a'}^2) z_a \psi_a - (k^2 - \pi_{a'}^4)\psi_a^2 \tag{5.3.18}$$

i a W hem de substituir x^2 per (5.3.12). Es clar que l'ordre zero de ψ_a ve determinat per l'anulació del segon membre de (5.3.18), la qual cosa ens dóna:

$$\overset{(0)}{\psi_a} = \frac{k + \pi_a^2}{k + \pi_{a'}^2} z_a \tag{5.3.19}$$

on hem triat la solució de l'equació de segon grau de manera que coincideixi amb el valor de z_a, donat per (5.3.9) en el cas de que g=0. Substituint el desenvolupament (5.3.17) a (5.3.12) obtenim:

$$x^2 = \hat{x}_a^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \overset{(n)}{\xi} \, g^n \tag{5.3.20}$$

$$\hat{x}_a^2 = h^2 + \frac{\Lambda^2}{k+\pi_{a'}^2}\left(1 + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\right) z_a^2 \tag{5.3.21}$$

i per tal de poder calcular els diferents termes de (5.3.17) a partir de (5.3.18) cal suposar que $W(x^2)$ és desenvolupable en sèrie de potències al voltant dels punts x_a^2 (a=1,2). Llavors és fàcil d'obtenir l'expressió de $\overset{(n)}{\psi}$ que trobareu a l'Apèndix 6, juntament amb l'expressió de $\overset{(n)}{\xi}$. Donarem aquí el valor de $\overset{(1)}{\psi}_a$:

$$\overset{(1)}{\psi}_a = \frac{\lambda^2(\pi_{a'}^2-\pi_a^2)z_a}{2\pi_a^2\pi_{a'}^2(k+\pi_{a'}^2)^2}\,W(\hat{x}_a^2) \qquad (5.3.22)$$

$\overset{(2)}{\psi}_a$, així com el desenvolupament de $V(x^2)$ al voltant de $\hat{x}_a^2$ els podeu trobar a l'Apèndix 6.

En voler resoldre (5.3.13) desenvolupant en sèrie de potències de g, ens trobem amb la dificultat que el límit inferior depén de g. Per a resoldre-ho utilitzarem el Lema següent.

Lema. Sigui $f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta} h(x,y)dy$ i suposem que f, h, α són desenvolupables en potències de x. Llavors,

$$\overset{(n)}{f} = \int_{\overset{(0)}{\alpha}}^{\beta} \overset{(n)}{h}(y)\,dy - \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_p=m \\ m_i\geq 1}} \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^{p-1}\overset{(n-m)}{h}}{\partial y^{p-1}}\right)_{y=\overset{(0)}{\alpha}} \overset{(m_1)}{\alpha}\cdot\ldots\cdot\overset{(m_p)}{\alpha} \qquad (5.3.23)$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{(n)}{f}x^n \; ; \quad \alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{(n)}{\alpha}x^n \; ; \quad h(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{(n)}{h}(y)\,x^n$$

Demostració. Sigui H(x,y) una primitiva de h(x,y); és a dir, $\partial H(x,y)/\partial y=h(x,y)$. Llavors,

$$f(x) = H(x,\beta) - H(x,\alpha(x)) = H(x,\beta) - H(x,\overset{(0)}{\alpha}) -$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^p H}{\partial y^p}\right)_{(x,\overset{(0)}{\alpha})}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\overset{(m)}{\alpha}x^m\right)^p = \int_{\overset{(0)}{\alpha}}^{\beta} h(x,y)\,dy -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left\{\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{m_1+\dots+m_p=m \\ m_i\geq 1}}\frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^{p-1}\overset{(n-m)}{h}}{\partial y^{p-1}}\right)_{y=\overset{(0)}{\alpha}}\overset{(m_1)}{\alpha}\cdot\ldots\cdot\overset{(m_p)}{\alpha}\right\}$$

dón es dedueix sense dificultat (5.3.23).

Teorema. Si $V(x^2)$ és desenvolupable en sèrie de potències al voltant dels punts $\hat{x}_a^2$, a=1,2 i si la solució θ_a^μ de (5.3.13) és desenvolupable en sèrie de potències de g, llavors els coeficients del desenvolupament de θ_a^μ poden ésser calculats per iteració a partir de la fórmula:

$$\overset{(n)}{\theta}{}_a^\mu = \overset{(n)}{\overset{*}{\theta}}{}_a^\mu + \int_{\overset{(0)}{\psi}_a}^{z_{a'}} \overset{(n)}{Z}{}_a^\mu \, dz_{a'} - \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_p=m \\ m_i \geq 1}} \frac{1}{p!} \left(D_{a'}^{p-1} \overset{(n-m)}{Z}{}_a^\mu \right)_{z_{a'}=\overset{(0)}{\psi}_a} \overset{(m_1)}{\psi}_a \cdots \overset{(m_p)}{\psi}_a \quad (5.3.24)$$

on hem utilitzat els desenvolupaments (5.3.16-17) i hem posat

$$-\theta_{a'}^\nu \frac{\partial \theta_a^\mu}{\partial \pi_{a'\nu}} = \sum_{n=2}^{\infty} \overset{(n)}{Z}{}_a^\mu \, g^n \quad (5.3.25)$$

Demostració. La fórmula (5.3.24) és conseqüència immediata del Lema anterior i del que hem discutit abans sobre el desenvolupament de $V(x^2)$. Comprovem ara que al segon membre de (5.3.24) apareixen solament $\overset{(m)}{\theta}{}_a^\mu$ amb $m < n$. Hom pot veure això fàcilment a partir de les fórmules que ens donen $\overset{(n)}{Z}{}_a^\mu$ en termes de $\overset{(m)}{a}_a$, $\overset{(m)}{l}_{aa'}$ (vegeu Apèndix 6).

La integral de (5.3.24) apareix a partir de n=2, i el doble sumatori a partir de n=3. Per aplicar el Teorema, solament queda per fer el desenvolupament de $\overset{*}{\theta}{}_a^\mu$ (5.3.11) en potències de g. Al primer ordre hom obté:

$$\overset{(1)}{\overset{*}{a}}_a = \left(1 + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\right) W^{(1)}(\hat{x}_a^2)$$

$$\overset{(1)}{\overset{*}{l}}_{aa'} = -\frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\left(1 + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\right) \frac{z_a}{\pi_a^2} W^{(1)}(\hat{x}_a^2) \quad (5.3.26)$$

Hom pot trobar $\overset{(2)}{\overset{*}{\theta}}{}^{\mu}_{a}$, així com l'expresió de $\overset{(n)}{\overset{*}{\theta}}{}^{\mu}_{a}$, a l'apèndix 6. $W^{(k)}(\hat{x}_a^2)$ és la derivada k-èsima de la funció W respecte del seu argument x^2, calculada per $x^2=\hat{x}_a^2$. Com que a primer ordre l'integrand és nul, $\overset{(1)}{\theta}{}^{\mu}_{a} = \overset{(1)}{\overset{*}{\theta}}{}^{\mu}_{a}$, i tenim:

$$\theta_a^{\mu} = g\left(1+\frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\right)W'(\hat{x}_a^2)\left\{\eta_a h^{\mu} - \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\frac{z_a}{\pi_a^2}\, t_{a'}^{\mu}\right\} + O(g^2) \tag{5.3.27}$$

A partir de l'expressió (2.2.19)

$$a_a^i(x,v|m) = m_a^{-2}\left(1-\vec{v}_a^{\,2}\right)\left(\delta^i_j - v_a^i v_{a_j}\right)\theta_a^j(x,\pi)$$

$$\text{amb}\quad x_a^{\mu} = (0,\vec{x}_a) \quad i \quad \pi_a^{\mu} = m_a\left(1-\vec{v}_a^{\,2}\right)^{-1/2}(1,\vec{v}_a) \tag{5.3.28}$$

podem obtenir les triacceleracions per a un observador inercial qualsevol, en termes de posicions i velocitats simultànies. Desenvolupant aquestes a_a^i en potències de $1/c$ obtenim, mòdul $1/c^3$:

$$\vec{a}_a = \eta_a g\,\frac{m_a+m_{a'}}{m_a^2 m_{a'}}\,W'(r^2)\left\{\vec{r} - \frac{v_a^2}{c^2}\vec{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_a(m_{a'}-m_a)}{(m_a+m_{a'})^2}\frac{v^2}{2c^2}\vec{r} - \eta_a\frac{m_a(\vec{r}\vec{v}_a)+m_{a'}(\vec{r}\vec{v}_{a'})}{m_a+m_{a'}}\frac{\vec{v}}{c^2}\right\} +$$

$$+\eta_a g\,\frac{m_a+m_{a'}}{m_a^2 m_{a'}}\,W''(r^2)\frac{1}{c^2}\left\{(\vec{r}\vec{v}_{a'})^2 - \left(\frac{m_a}{m_a+m_{a'}}\right)^2(\vec{r}\vec{v})^2\right\}\vec{r} \tag{5.3.29}$$

On hem posat $\vec{r}=\vec{x}_1-\vec{x}_2$, $\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$. Aquí a diferència de (5.3.27) apareix la derivada segona de W perquè en desenvolupar x_a^2 en potències de 1/c queda:

$$\hat{x}_a^2 = r^2 + \left\{(\vec{r}\vec{v}_{a'})^2 - \left(\frac{m_a}{m_a+m_{a'}}\right)^2 (\vec{r}\vec{v})^2\right\}\frac{1}{c^2} \qquad (5.3.30)$$

i el terme en $1/c^2$ apareix a W''.

5.4. Aplicacions: oscil.lador harmònic i Kepler.

I. MASSES IGUALS.

Donarem els resultats per al cas de masses iguals perquè inicialment aquest sistema estava relacionat amb un model d'interacció entre quarks.

Per $\pi_a = \pi_{a'} = \pi$ (5.3.9) ens dóna $\psi_a = z_a$ i per tant,

$$\overset{(0)}{\psi}_a = z_a \quad , \quad \overset{(n)}{\psi}_a = 0 \qquad \forall n>0 \qquad (5.4.1)$$

(5.3.12) ens dóna també sobre U,

$$x^2 = \hat{x}_a^2 = h^2 + 2(K-\pi^2)z_a^2 \qquad (5.4.2)$$

que no depén de g. Finalment, (5.3.11) es redueix a:

$$\overset{(n)}{\overset{*}{\Theta}}{}_a^{\mu} = 2W'(\hat{x}_a^2)\left(\frac{W(\hat{x}_a^2)}{\pi^2}\right)^{n-1}\left(\eta_a h^\mu - \frac{z_a}{\pi^2} t_{a'}^\mu\right) \qquad (5.4.3)$$

i l'expressió recurrent (5.3.24) ens dóna

$$\overset{(n)}{\theta}{}_a^{\mu} = \overset{(n)}{\overset{*}{\theta}}{}_a^{\mu} + \int_{z_a}^{z_{a'}} \overset{(n)}{Z}{}_{1\,a}^{\mu}\, dz_{a'} \tag{5.4.4}$$

Les expressions per n=2 es poden trobar a l'Apèndix 6.

II. APROXIMACIO NEWTONIANA I DETERMINACIO DE $V(x^2)$.

Ara calcularem l'aproximació newtoniana del Lagrangià singular de partida (4.3.1)

$$\mathcal{L} = -\epsilon^a c \sqrt{\left(m_a^2 c^2 - V(x^2)\right)\left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)} \tag{5.4.5}$$

on hem elegit com a paràmetre λ el temps t de l'observador d'inèrcia que considerem. Hem posat $x_1^0 = x_2^0 = t$ i per tant $x^2 = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = r^2$. Suposant que $v_a^2 \ll c^2$ i que $V(r^2) \sim v_a^2$, tenim:

$$\mathcal{L} = -(m_1 + m_2)c^2 + \epsilon^a \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) V(r^2) + O\left(\frac{1}{c^2}\right) \tag{5.4.6}$$

Si introduïm la massa reduïda $\mu = m_1 m_2 / M$, on $M = m_1 + m_2$, i si $V_{clàs}(r^2)$ és el potencial clàssic del probleme, tenim:

$$V(r^2) = -2\mu\, V_{clàs}(r^2) \tag{5.4.7}$$

Així, si volem estudiar un model relativista de l'oscil.lador harmònic hem de posar

$$V(r^2) = -2\mu\, \frac{1}{2} k r^2 = -\mu k r^2 = -\mu^2 \omega^2 r^2 \tag{5.4.8}$$

on hem introduït la freqüència clàssica $\omega^2=k/\mu$ del sistema.

Si volem estudiar un model relativista de la interacció gravitatòria a l'espai de Minkowski, hem de posar

$$V(r^2) = -2\mu\left(-\frac{Gm_1m_2}{r}\right) = \frac{2G\mu^2M}{r} \qquad (5.4.9)$$

on G és la constant de la gravitació.

Es clar que en rigor (5.4.7) no determina el $V(x^2)$ buscat, sino solament el terme d'ordre zero de $V(x^2)$ en un desenvolupament en potències de $1/c^2$. Ens quedarem amb (5.4.7) per simplicitat.

III. OSCIL.LADOR HARMONIC.

A partir de (5.4.8), prenem

$$g=\omega^2 \quad , \quad W(x^2) = -\mu^2x^2 \qquad (5.4.10)$$

i (5.3.27), (5.3.29) donen, utilitzant que $W'(x^2)=-\mu^2$:

$$\Theta_a^\mu = -\frac{\omega^2\pi_1^2\pi_2^2}{(\pi_1^2+\pi_2^2)^2}\left(1+\frac{K+\pi_a^2}{K+\pi_{a'}^2}\right)\left(\eta_a h^\mu - \frac{K+\pi_a^2}{K+\pi_{a'}^2}\cdot\frac{z_a}{\pi_a^2}\, t_{a'}^\mu\right) + O(\omega^4) \qquad (5.4.11)$$

$$\vec{a}_a = -\eta_a\frac{\omega^2\mu}{m_a}\left(1-\frac{v_a^2}{c^2}+\frac{m_a(m_{a'}-m_a)}{(m_a+m_{a'})^2}\cdot\frac{v^2}{2c^2}\right)\vec{r} \;+$$

$$+\frac{\omega^2\mu}{m_a M}\left[\vec{r}\cdot(m_a\vec{v}_a+m_{a'}\vec{v}_{a'})\right]\frac{\vec{v}}{c^2} \qquad (5.4.12)$$

El terme d'ordre zero de (5.4.12) reprodueix la força clàssica $m_a\vec{a}_a=-k(\vec{x}_a-\vec{x}_{a'})$ i la resta de termes són les correccions relativistes que dóna el model considerat.

Per al cas de masses iguals ($\pi_1=\pi_2=\pi$; $m_1=m_2=m$) les fórmules queden més simplificades i obtenim:

$$\theta_a^\mu = -\frac{1}{2}\omega^2\left(\eta_a h^\mu - \frac{z_a}{\pi^2} t_{a'}^\mu\right) + O(\omega^4)$$

$$\vec{a}_a = -\frac{1}{2}\eta_a\omega^2\left(1-\frac{v_a^2}{c^2}\right)\vec{r} + \frac{\omega^2}{4c^2}\left[\vec{r}\cdot(\vec{v}_a+\vec{v}_{a'})\right]\vec{v} \tag{5.4.13}$$

$\overset{(2)}{\theta}{}_a^\mu$ és en aquest cas fàcil de calcular i el resultat és:

$$\overset{(2)}{\alpha}_a = \frac{1}{8}\pi^2\left(h^2+2(k-\pi^2)z_a^2\right) + \frac{1}{8}\pi^4(z_a-z_{a'})^2$$

$$\overset{(2)}{\ell}_{aa'} = -\frac{1}{8}\left(h^2+2(k-\pi^2)z_a^2\right)z_a + \frac{1}{4}\pi^2\left\{\frac{h^2(z_{a'}-z_a)}{k+\pi^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}\left(z_{a'}^3-z_a^3\right) + \frac{kz_a}{2\pi^2}\left(z_{a'}^2-z_a^2\right)\right\} \tag{5.4.14}$$

IV. POTENCIAL DE TIPUS KEPLER.

Considerem ara (vegeu (5.4.9)):

$$g = G, \quad W(x^2) = \frac{2\pi_1^2\pi_2^2}{\pi_1+\pi_2}(x^2)^{-1/2} \tag{5.4.15}$$

Les triacceleracions que s'obtenen a partir de (5.3.29) son:

$$\vec{a}_a = -\eta_a G m_{a'} \left\{ 1 - \frac{v_a^2}{c^2} + \frac{m_a(m_{a'}-m_a)}{2M^2c^2} v^2 \right\} \frac{\vec{r}}{r^3} +$$

$$+ \eta_a \frac{3Gm_{a'}}{2c^2} \left\{ (\vec{r}\vec{v}_{a'})^2 - \frac{m_a^2}{M^2} (\vec{r}\vec{v})^2 \right\} \frac{\vec{r}}{r^5} +$$

$$+ \frac{Gm_{a'}}{Mc^2} \left[\vec{r}\cdot(m_a\vec{v}_a + m_{a'}\vec{v}_{a'}) \right] \frac{\vec{v}}{r^3} + O\left(\frac{G}{c^4}\right) + O\left(\frac{G^2}{c^2}\right) \qquad (5.4.16)$$

El terme d'ordre zero ens dóna la llei de la gravitació universal de la mecànica Newtoniana $m_a\vec{a}_a = -Gm_am_{a'}(\vec{x}_a - \vec{x}_{a'})/|\vec{x}_a - \vec{x}_{a'}|^3$ La resta de termes són correccions relativistes. Aquest resultat es pot comparar amb les acceleracions que s'obtenen a partir del Lagrangià de Einstein, Infeld i Hoffmann (vegeu (MT.73), pàgina 1093) derivat en el marc de la Relativitat General:

$$\vec{a}_a^{EIH} = -\eta_a G m_{a'} \left\{ 1 - \frac{v_a^2}{c^2} + \frac{2v^2}{c^2} \right\} \frac{\vec{r}}{r^3} + \eta_a \frac{3Gm_{a'}}{2c^2} (\vec{r}\vec{v}_{a'})^2 \frac{\vec{r}}{r^5} +$$

$$+ \frac{Gm_{a'}}{c^2} \left\{ 4(\vec{r}\vec{v}_a) - 3(\vec{r}\vec{v}_{a'}) \right\} \frac{\vec{v}}{r^3} + O\left(\frac{G}{c^4}\right) + O\left(\frac{G^2}{c^2}\right) \qquad (5.4.17)$$

Encara que la forma general dels termes de (5.4.17) és semblant a la de (5.4.16) els resultats són diferents. Això no és d'extranyar perquè teories diferentes poden tenir el mateix límit newtonià. Per altra part, (5.4.16) ha estat obtingut prenent la forma més senzilla possible de $V(x^2)$. Si ens calculem el corriment del periheli donat per (5.4.16) obtenim que és zero a l'ordre considerat. Això coincideix amb el resultat obtingut per Dominici, Gomis i Longhi utilitzant el model **SLS** discutit aquí, si be ells han utilitzat tècniques diferentes (DG.80). Per acabar és clar que aquest model -si més no en la seva forma actual (5.4.16)- no és una bona aproximació per al problema de Kepler relativiste.

En canvi, les expressions per a l'oscil.lador harmònic amb masses iguals són senzilles, i això permetrà d'aplicar-ho a un model d'interacció entre quarks, una vegada haguem quantificat el model predictiu que tenim.

6. CONCLUSIONS I PERSPECTIVES.

6.1. Electrodinàmica Predictiva.

Potser l'èxit més important de la mecànica relativista predictiva hagi estat la incorporació de la teoria de la interacció electromagnètica dins del seu esquema. Com ja hem provat al capítol 3, la teoria clàssica del camp electromagnètic ens dóna unes condicions de contorn que determinen una solució única de les equacions de la predictivitat, la qual cosa permet d'obtenir una dinàmica finita (amb un nombre finit de graus de llibertat) i predictiva (posicions i velocitats inicials determinen l'evolució del sistema) per a un sistema de partícules en interacció electromagnètica.

Recentment (LMa79) ha estat demostrat que l'electrodinàmica predictiva pot donar compte també de la radiació, malgrat que no inclou els camps (la interacció és a distància, no mediatitzada per camps). La radiació cal interpretar-la en l'esperit de la teoria de l'absorbent de Wheeler i Feynman (WF.49): el sistema cedeix energia, impuls i moment angular a l'univers. En una interpretació clàssica, aquestes quantitats serien l'energia, impuls i moment angular de la radiació emesa.

En aquest treball hem continuat en aquesta línia i hem calculat fins a ordre quatre les coordenades i moments de Hamilton-Jacobi, així com el quadrimoment lineal i el tensor moment angular del sistema. Hem obtingut així els següents resultats nous:

- Fins a ordre quatre, el sistema no radia energia ni impuls; si radia, en canvi, moment angular.

- La secció eficaç de difusió, tant al sistema laboratori com al sistema del centre de masses. Hem calculat també la primera correcció d'ordre superior. Aquesta secció eficaç coincideix amb la clàssica de Rutherford, amb la fórmula de Mott i amb els resultats de l'electrodinàmica quàntica per partícules sense spin. Alguns d'aquests resultats han estat publicats i els trobareu a (LM_b79).

També hem pogut provar que les triacceleracions predictives coincideixen amb les que hom obté desenvolupant formalment els potencials retardats clàssics en potències de 1/c i e^2.(d'una manera semblant a com hom obté el Lagrangià de Darwin; vegeu l'Apèndix 3).

6.2. Predictivització d'un SLS.

En el marc de les teories d'acció a distància, aquests darrers anys han aparegut diversos treballs sobre Lagrangians singulars. Aquestes teories pateixen d'una dificultat a nivell teòric, malgrat llurs bones propietats; es tracta de que privilegien un observador d'inèrcia particular, respecte del qual la interacció s'expressa d'una manera molt més senzilla que per a la resta d'observadors inercials.

En el present treball hem demostrat com, sota condicions molt generals, aquestes teories poden ésser predictivitzades, eliminant així l'esmentada dificultat. Això ha permès una millor comprensió del paper que juguen, a les teories lagrangianas singulars els diferents tipus de lligams que hi apareixen.

Finalment, hem aplicat aquest resultat al model de Dominici-Gomis-Longhi, trobant les acceleracions del sistema predictiu corresponent en el cas general, i particularitzant-les per a l'oscil.lador harmònic i per al problema de Kepler. Aquests resultats han estat acceptats per ésser publicats als "Annales de l'institut Henri Poincaré" (vegeu (LM.80)).

El model de Kepler relativista així obtingut no coincideix amb les acceleracions que es dedueixen de la Teoria General de la Relativitat (Lagrangià de Einstein-Infeld-Hoffmann). En canvi, el model d'oscil.lador relativista obtingut és senzill, i això permetrà d'aplicar-lo fàcilment a un model d'interacció entre quarks (de fet, aquest és l'interés de desenvolupar una teoria relativista de l'oscil.lador harmònic).

6.3. Perspectives.

Aquest treball s'enmarca dins el programa de construcció d'una dinàmica relativista de sistemes de N partícules. Les aplicacions i possible verificació experimental vindran una vegada estigui quantificada la mecànica predictiva. Aquesta serà per tant la continuació d'aquest treball.

L'interés d'estudiar aquestes teories d'acció a distància rau en que pensem que bona part de les dificultats de la teoria quàntica dels camps (eliminació d'estats de norma negativa, impossibilitat de tractar estats lligats, renormalització, dificultats amb l'operador de posició) tenen un origen relativista i no quàntic; són les servituts que cal pagar pel fet de no tenir una dinàmica de sistemes de N partícules ben desenvolupada a nivell clàssic.

APENDIX 1.

Notació.

Els índexs a, b, c,... faran referència sempre a la partícula que estiguem considerant: $\vec{v}_a$, velocitat de la partícula a. Una prima a un índex, a′ , vol dir que a′ és diferent de a; a′′ vol dir diferent de a′ , però pot ésser igual a a.

Mètrica. Considerem l'espai de Minkowsky M^4 dotat de la mètrica (-+++)= $\eta^{\mu\nu}$. Els índexs 1,2,3 seran els índexs d'espai i els denotarem per i,j,k,... L'índex o farà referència al temps. Els quatre índexs es denotaràn amb μ , ν , λ ,...

Utilitzarem el conveni de suma d'índexs repetits: sempre que dos índexs, un covariant i l'altra contravariant, estiguin repetits, la suma respecte d'aquest índex es dóna per sobreentesa. Això val també per als índexs de partícules a,b,c,...; aquestos índexs podrem pujar-los o baixar-los sens modificar cap signe.

ϵ^a=+1, indicarà suma respecte de l'índex a. δ^i_j , δ_{ab} són la delta de Kronecker (+1 si els índexs són iguals, 0 si no ho són). ϵ^{ijk} és el tensor totalment antisimètric de Levi-Civitá: ϵ^{123}=+1 . $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ és el mateix en quatre dimensions: ϵ^{o123}=+1.

Suposarem que c=1 i solament l'introduïrem explícitament per posar de manifers la dependència en c de les expressions o per fer desenvolupaments en 1/c.

Si π^μ_a és el quadriimpuls de la partícula a escriurem sempre

$$\pi_a^2 \equiv -\pi_a^\mu \pi_{a\mu} \qquad \text{(A.1.1)}$$

ja que, amb la mètrica que utilitzem, $-\pi_a^{\mu}\pi_{a\mu} > 0$. En canvi, per a les posicions,

$$x_a^2 \equiv x_a^{\mu} x_{a\mu} \qquad (A.1.2)$$

En qualsevol cas, el producte escalar de dos vectors es representarà com

$$(x,y)=x^{\mu} y_{\mu} \qquad (A.1.3)$$

APENDIX 2.

Variables per sistemes de dues partícules. Propietats.

Per a dues partícules, la invariància Poincaré fa que haguem de considerar solament les variables $x^\mu = \epsilon^a \eta_a x_a^\mu$ i π_a^μ. Amb aquestes podem construir 6 escalars i 4 vectors:

$$x^2 = x^\mu x_\mu \quad ; \quad \pi_a^2 = -\pi_a^\mu \pi_{a\mu}$$

$$(x, \pi_a) = x^\mu \pi_{a\mu} \quad ; \quad (\pi_a, \pi_{a'}) = \pi_a^\mu \pi_{a'\mu} \tag{A.2.1}$$

$$x^\mu, \; \pi_a^\mu, \; n^\mu = \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda\rho} x^\nu \pi_1^\lambda \pi_2^\rho$$

Busquem ara escalars i vectors solució de $D_a f = 0$. π_a^μ, n^μ ja ho verifiquen. Busquem a partir de x^μ un quadrivector d'aques tos:

$$h^\mu = x^\mu - \eta_a z_a \pi_a^\mu + \eta_a z_{a'} \pi_{a'}^\mu \tag{A.2.2}$$

$D_a h^\mu = 0$ implica $D_a z_b = \delta_{ab}$. Com que $D_a(x, \pi_a) = -\eta_a \pi_a^2$ i $D_a(x, \pi_{a'}) = \eta_a(\pi_a, \pi_{a'})$, podem agafar per a z_a la solució particular següent:

$$z_a = \eta_a \Lambda^{-2} \left\{ \pi_{a'}^2 (x\pi_a) - k(x\pi_{a'}) \right\} \tag{A.2.3}$$

$$k = -(\pi_a, \pi_{a'}) \quad ; \quad \Lambda^2 = k^2 - \pi_a^2 \pi_{a'}^2$$

Amb això ho tenim ja tot; prendrem els sis escalars següents:

$$z_a, \; z_{a'}, \; h^2, \; k, \; \pi_a^2, \; \pi_{a'}^2 \tag{A.2.4}$$

dels quals els 5 últims satisfan $D_a f=0$.

Tenim també quatre vectors h^μ , π^μ_b, n^μ que satisfan $D_a f^\mu=0$. Però prendrem un altra base de vectors. La quadri-acceleració sempre es pot escriure com:

$$\Theta^\mu_a = \eta_a a_a h^\mu + b_{aa}\pi^\mu_a + b_{aa'}\pi^\mu_{a'} + c_a n^\mu \tag{A.2.5}$$

$c_a \neq 0 \iff \Theta^\mu_a$ és invariant per paritat, doncs n^μ és un vector axial. La condició $\Theta^\mu_a \pi_{a\mu}=0$ ens dóna (utilitzant que $h^\mu \pi_{a\mu}=0$):

$$-b_{aa}\pi^2_a - b_{aa'}K = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{aa} = -\frac{K}{\pi^2_a} b_{aa'}$$

Per tant introduirem els vectors

$$t^\mu_{a'} = \pi^2_a \pi^\mu_{a'} - K\pi^\mu_a = \pi^2_a \left\{ \eta^\mu{}_\nu + \frac{\pi^\mu_a \pi_{a\nu}}{\pi^2_a} \right\} \pi^\nu_{a'} \tag{A.2.6}$$

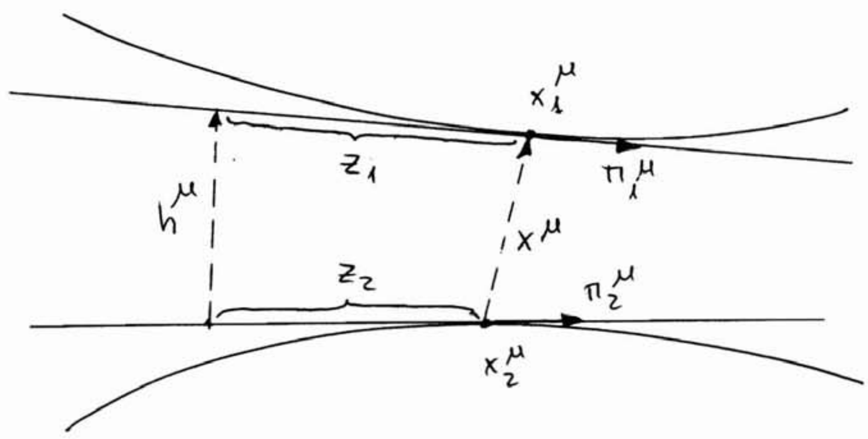
El $t^\mu_{a'}$ no és més que la part de $\pi^\mu_{a'}$ ortogonal a π^μ_a (excepte un coeficient). En termes dels vectors h^μ , t^μ_a, n^μ ens queda:

$$\Theta^\mu_a = \eta_a a_a h^\mu + \ell_{aa'} t^\mu_{a'} + c_a n^\mu \tag{A.2.7}$$

Tenim així com a base de vectors:

$$h^\mu , \quad t^\mu_a , \quad t^\mu_{a'} , \quad n^\mu \tag{A.2.8}$$

Interpretació de h^μ, h^2, z_a. Hem obtingut h^μ a partir de x^μ traslladant els punts x^μ_a, $x^\mu_{a'}$ unes quantitats z_a i $z_{a'}$ al llarg de les tangents a les trajectòries, a fi d'obtenir un vector h^μ ortogonal a π_a^μ i $\pi_{a'}^\mu$. En altres paraules, h^2 serà la "distància" entre les dues tangents, és a dir, quelcom semblant al paràmetre d'impacte.



Com que $h^\mu \pi_{a\mu}=0$, obtenim (posant $\vec{v}_a = \vec{\pi}_a/\pi_a^0$):

$$h^0 = \vec{h}\,\vec{v}_1 = \vec{h}\,\vec{v}_2 \qquad \text{(A.2.9)}$$

d'on deduïm $h^2 > 0$ ja que $|\vec{v}_a| < 1$. Si fem $t_1 = t_2$ a un sistema de referència inercial qualsevol, tindrem $x^\mu = (0, \vec{r})$; introduint $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ i $\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, ens queda:

$$\left.\begin{aligned} h^\mu &= \frac{1}{v^2 - w^2}\left(-\vec{r}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}),\ \vec{v}\wedge(\vec{r}\wedge\vec{v}) - (\vec{r}\,\vec{w})\vec{w}\right) \\ h^2 &= \frac{|\vec{r}\wedge\vec{v}|^2 - (\vec{r}\,\vec{w})^2}{v^2 - w^2} \geq 0 \quad \left(h^2 = 0 \iff \vec{r} \parallel \vec{v}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.2.10)}$$

En els sistemes on $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ ($\iff$ $\vec{w}=0$) h és el paràmetre d'impacte. El canvi de coordenades $\{x^2,\ \pi_b^2,\ k,\ (x\pi_a)\} \Rightarrow \{h^2,\ \pi_b^2,\ k,\ z_a\}$ és singular quan $\Lambda = 0$ ($\iff$ $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$); aquest cas correspon al moviment unidimensional i cal resoldre'l directament en les altres variables.

Les fórmules del canvi de variables són:

$$h^2 = x^2 - \Lambda^{-2}\{\pi_{a'}^2 (x\pi_a)^2 + \pi_a^2 (x\pi_{a'})^2 - 2k (x\pi_a)(x\pi_{a'})\} =$$

$$= x^2 + \pi_a^2 z_a^2 + \pi_{a'}^2 z_{a'}^2 - 2k z_a z_{a'}$$

$$z_a = \eta_a \Lambda^{-2}\{ \pi_{a'}^2 (x\pi_a) - k(x\pi_{a'})\}$$

$$h^\mu = x^\mu - \Lambda^{-2}\left\{[\pi_{a'}^2 (x\pi_a) - k(x\pi_{a'})]\pi_a^\mu + [\pi_a^2 (x\pi_{a'}) - k(x\pi_a)]\pi_{a'}^\mu\right\} = \quad \text{(A.2.11)}$$

$$= x^\mu - \eta_a z_a \pi_a^\mu + \eta_a z_{a'} \pi_{a'}^\mu$$

$$t_a^\mu = \pi_{a'}^2 \pi_a^\mu - k\pi_{a'}^\mu$$

i del canvi invers,

$$x^2 = h^2 - \pi_a^2 z_a^2 - \pi_{a'}^2 z_{a'}^2 + 2k z_a z_{a'}$$

$$(x\pi_a) = \eta_a (k z_{a'} - \pi_a^2 z_a)$$

$$x^\mu = h^\mu + \eta_a \Lambda^{-2}\{(k z_{a'} - \pi_a^2 z_a) t_a^\mu - (k z_a - \pi_{a'}^2 z_{a'}) t_{a'}^\mu\} = \quad \text{(A.2.12)}$$

$$= h^\mu + \Lambda^{-2}\{(x\pi_a) t_a^\mu + (x\pi_{a'}) t_{a'}^\mu\}$$

$$\pi_a^\mu = -\Lambda^{-2}(\pi_a^2 t_a^\mu + k\, t_{a'}^\mu)$$

Productes escalars:

$$x^\mu x_\mu = x^2 \;;\quad x^\mu \pi_{a\mu} = (x\pi_a) = \eta_a (k z_{a'} - \pi_a^2 z_a)$$

$$x^\mu h_\mu = h^2 \;;\quad x^\mu t_{a\mu} = \eta_a \Lambda^2 z_a = \pi_{a'}^2 (x\pi_a) - k(x\pi_{a'})$$

$$\pi_a^\mu \pi_{a\mu} = -\pi_a^2 \;;\quad \pi_a^\mu \pi_{a'\mu} = -k \;;\quad \pi_a^\mu h_\mu = 0$$

$$h^\mu h_\mu = h^2 \;;\quad h^\mu t_{a\mu} = 0 \;;\quad \pi_a^\mu t_{a\mu} = \Lambda^2 \quad \text{(A.2.13)}$$

$$\pi_a^\mu t_{a'\mu} = 0 \;;\quad t_a^\mu t_{a\mu} = \pi_{a'}^2 \Lambda^2 \;;\quad t_a^\mu t_{a'\mu} = -k\Lambda^2$$

Introduïm els operadors diferencials

$$D_a = \pi_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^{a\mu}} \quad ; \quad N_a = \eta_a h^\mu \frac{\partial}{\partial \pi^{a\mu}} \quad ; \quad Q_a = t_{a'}^\mu \frac{\partial}{\partial \pi^{a\mu}} \tag{A.2.14}$$

que sobre les variables que considerem actuen així:

$$\begin{aligned}
&D_a\{x^2, (x\pi_a), (x\pi_{a'}), k, \pi_b^2\} = \{2\eta_a (x\pi_a), -\eta_a \pi_a^2, -\eta_a k, 0, 0\} \\
&D_a\{z_a, z_{a'}, h^2, k, \pi_b^2\} = \{1, 0, 0, 0, 0\} \\
&D_a\{x^\mu, \pi_b^\mu, h^\mu, t_b^\mu\} = \{\eta_a \pi_a^\mu, 0, 0, 0\} \\
&N_a\{x^2, (x\pi_a), (x\pi_{a'}), k, \pi_b^2\} = \{0, \eta_a h^2, 0, 0, 0\} \\
&N_a\{z_a, z_{a'}, h^2, k, \pi_b^2\} = \left\{\frac{\pi_{a'}^2 h^2}{\Lambda^2}, \frac{k h^2}{\Lambda^2}, -2h^2 z_a, 0, 0\right\} \\
&N_a\{x^\mu, \pi_a^\mu, \pi_{a'}^\mu, h^\mu, t_a^\mu, t_{a'}^\mu\} = \left\{0, \eta_a h^\mu, 0, -z_a h^\mu - \frac{\eta_a h^2}{\Lambda^2} t_a^\mu, \eta_a \pi_{a'}^2 h^\mu, \eta_a k h^\mu\right\} \\
&Q_a\{x^2, (x\pi_a), (x\pi_{a'}), k, \pi_b^2\} = \{0, -\eta_a \Lambda^2 z_{a'}, 0, -\Lambda^2, 0\} \\
&Q_a\{z_a, z_{a'}, h^2, k, \pi_b^2\} = \{k z_a, \pi_a^2 z_a, 0, -\Lambda^2, 0\} \\
&Q_a\{x^\mu, \pi_a^\mu, \pi_{a'}^\mu, h^\mu, t_a^\mu, t_{a'}^\mu\} = \{0, t_{a'}^\mu, 0, 0, -k t_a^\mu, -\pi_a^2 t_a^\mu - 2k t_{a'}^\mu\}
\end{aligned} \tag{A.2.15}$$

Pel que fa **referència** a les propietats de la n^μ tenim:

$$n^\mu = \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda\rho}\, x^\nu \pi_1^\lambda \pi_2^\rho = -\Lambda^{-2} \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda\rho}\, h^\nu t_1^\lambda t_2^\rho$$

$$\{x^\mu, \pi_a^\mu, h^\mu, t_a^\mu\}\, n_\mu = \{0, 0, 0, 0\} \quad ; \quad n^\mu n_\mu = h^2 \Lambda^2$$

$$\{D_a, N_a, Q_a\} n^\mu = \{0, -z_a n^\mu, -k n^\mu\} \qquad (A.2.16)$$

Es útil introduir també

$$r_a = (\Lambda^2 z_a^2 + \pi_{a'}^2 h^2)^{1/2} = (x^2 \pi_{a'}^2 + (x\pi_{a'})^2)^{1/2} \qquad (A.2.17)$$

amb les propietats següents:

$$\{D_a, D_{a'}, N_a, N_{a'}, Q_a, Q_{a'}\} r_a = \left\{\frac{\Lambda^2 z_a}{r_a}, 0, 0, \frac{h^2}{r_a}(k z_a - \pi_{a'}^2 z_{a'}), 0, \frac{\Lambda^2 z_a}{r_a}(\pi_{a'}^2 z_{a'} - k z_a)\right\}$$

$$\Lambda^2 (k z_a + \epsilon r_a)^2 + \pi_a^2 \pi_{a'}^4 h^2 = (k r_a + \epsilon \Lambda^2 z_a)^2 \quad ; \quad \epsilon = \pm 1 \qquad (A.2.18)$$

Una altra propietat important és

$$z_{a'} = \frac{1}{\pi_{a'}^2}(k z_a + \epsilon r_a) \iff x^0 = -\eta_a \epsilon |\vec{x}| \qquad (A.2.19)$$

Demostració. $x^0 = -\eta_a \epsilon |\vec{x}| \Rightarrow x^2 = 0$. Aïllant $z_{a'}$ de l'equació de segon grau ens queda:

$$z_{a'} = \frac{1}{\pi_{a'}^2}(k z_a \pm r_a)$$

i per decidir el signe calculem:

$$\text{signe}\left(z_{a'} - \frac{k z_a}{\pi_{a'}^2}\right) = \text{signe}\, \eta_a (x \pi_{a'}) = \eta_a\, \text{sig}\left(-x^0 \pi_{a'}^0 + \vec{x}\,\vec{\pi}_{a'}\right) = -\eta_a\, \text{sig}\, x^0 = \epsilon$$

ja que $|x^0 \pi_{a'}^0| > |\vec{x}| \cdot |\vec{\pi}_{a'}| \geq |\vec{x}\,\vec{\pi}_{a'}|$, que és el que volíem demostrar.

APENDIX 3.

Acceleracions clàssiques per a la interacció electromagnètica.

A partir de les expressions del potencial retardat, i fent desenvolupaments en sèrie de potències de 1/c obtindrem, per un mètode totalment semblant al que hom utilitza per obtenir el Lagrangià de Darwin, els camps elèctrics i magnètics que actuen sobre una partícula deguts a les N-1 restants del sistema. El potencial vector és:

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{1}{R}\,\rho\left(t-\frac{R}{c},\vec{x}'\right) dV'$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \int \frac{1}{R}\,\vec{j}\left(t-\frac{R}{c},\vec{x}'\right) dV' \tag{A.3.1}$$

on $R=|\vec{x}-\vec{x}'|$. Desenvolupant en sèrie de potències de 1/c,

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{\rho}{R}\,dV' - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV' + \frac{1}{2c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\, dV' - \frac{1}{6c^3}\cdot\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\, dV' + \ldots$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}}{R}\,dV' - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{j}\,dV' + \ldots \tag{A.3.2}$$

Per calcular $(\phi,\vec{A})$ creats per una partícula a que segueix una trajectòria $\vec{x}_a(t)$, posarem

$$\rho(t,\vec{x}) = e_a\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_a(t))$$

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = e_a\,\vec{v}_a\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_a(t)) \tag{A.3.3}$$

Els camps elèctric i magnètic es calculen a partir de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \tag{A.3.4}$$

El resultat, fins l'ordre $1/c^3$ és:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -e_a \frac{\hat{n}}{R^2} - \frac{e_a}{2c^2}\frac{\vec{a}_a}{R} - \frac{e_a}{2c^2R^2}\left\{v_a^2 - 3(\vec{v}_a\hat{n})^2 + R(\vec{a}_a\hat{n})\right\}\hat{n} + \frac{2e_a}{3c^3}\dot{\vec{a}}_a + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$B(t,\vec{x}) = \frac{e_a}{c}\cdot\frac{\hat{n}\wedge\vec{v}_a}{R^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \tag{A.3.5}$$

on $\hat{n}=\vec{R}/R$, $\vec{R}=\vec{x}_a-\vec{x}$, $R=|\vec{R}|$, $\vec{a}_a=d\vec{v}_a/dt$; hem calculat B fins l'ordre $1/c^2$ ja que està multiplicat per $1/c$ a (A.3.6).

L'equació del moviment d'una càrrega e al punt $\vec{x}$ és:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B}\right) \tag{A.3.6}$$

i com que $d\gamma/dt=(e/mc^2)\vec{v}\cdot\vec{E}$, tenim:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{\gamma}\left\{\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{v}\vec{E})\right\} \tag{A.3.7}$$

Substituint $\vec{E}$, $\vec{B}$ tenim:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = ee_a\left\{-\frac{\hat{n}}{R^2} + \frac{v^2\hat{n}}{2c^2R^2} - \frac{\vec{a}_a}{2c^2R} - \frac{1}{2c^2R}\left\{v_a^2 - 3(\vec{v}_a\hat{n})^2 + R(\vec{a}_a\hat{n})\right\}\hat{n} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\vec{v}\vec{v}_a)\hat{n}}{c^2R^2} - \frac{(\hat{n}\vec{v})\vec{v}_a}{c^2R^2} + \frac{(\vec{v}\hat{n})\vec{v}}{c^2R^2} + \frac{2\dot{\vec{a}}_a}{3c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right\} \tag{A.3.8}$$

Per a N partícules en interacció electromagnètica (m_a, e_a, $a=1,\ldots,N$) hom obté fàcilment:

$$m_a\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \epsilon^{a'}e_ae_{a'}\left\{\frac{\hat{n}_{aa'}}{R^2_{aa'}} + \frac{1}{c^2}\left\{-\frac{v_a^2\hat{n}_{aa'}}{2R^2_{aa'}} - \frac{\vec{a}_{a'}}{2R_{aa'}} + \left[v_{a'}^2 - 3(\vec{v}_{a'}\hat{n}_{aa'})^2 - R_{aa'}(\vec{a}_a\hat{n}_{aa'})\right]\frac{\hat{n}_{aa'}}{2R^2_{aa'}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(\vec{v}_a\vec{v}_{a'})\hat{n}_{aa'}}{R^2_{aa'}} + \frac{(\vec{v}_a\hat{n}_{aa'})\vec{v}_{a'}}{R^2_{aa'}} - \frac{(\vec{v}_a\hat{n}_{aa'})\vec{v}_a}{R^2_{aa'}}\right\} + \frac{2\dot{\vec{a}}_{a'}}{3c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right\} \tag{A.3.9}$$

on $R_{aa'}=|\vec{x}_a-\vec{x}_{a'}|$, $\hat{n}_{aa'}=(\vec{x}_a-\vec{x}_{a'})/R_{aa'}$. Aquestes N equacions, no són equacions diferencials ordinàries de segon ordre, ja que als segons membres hi apareixen les acceleracions i les seves derivades. Però com que aquestes van multiplicades per $e_a e_{a'}$, podem fer un desenvolupament de les a_a en sèrie de potències de les càrregues (i amb això tindrem un desenvolupament doble, en 1/c i en $e_a e_{a'}$), la qual cosa dóna, fins l'ordre considerat abans:

$$\vec{a}_a = \epsilon^{a'} \frac{e_a e_{a'}}{m_a} \left\{ \frac{\hat{n}_{aa'}}{R^2_{aa'}} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{(\hat{n}_{aa'}\vec{v}_a)\vec{v}_{aa'}}{R^2_{aa'}} + \left[v^2_{a'} - v^2_a - 2(\vec{v}_a \vec{v}_{a'}) - 3(\hat{n}_{aa'}\vec{v}_{a'})^2 \right] \frac{\hat{n}_{aa'}}{2R^2_{aa'}} - \right.\right.$$

$$\left. - \epsilon^{a''} \frac{e_{a'} e_{a''}}{2m_{a'} R_{aa'} R^2_{a'a''}} \left[\hat{n}_{a'a''} + (\hat{n}_{a'a''}\hat{n}_{aa'})\hat{n}_{aa'} \right] \right\} +$$

$$\left. + \epsilon^{a''} \frac{2e_{a'}e_{a''}}{3m_{a'} R^3_{a'a''} c^3} \left[\vec{v}_{a'a''} - 3\,\hat{n}_{a'a''}(\hat{n}_{a'a''}\vec{v}_{a'a''}) \right] + \cdots \right\} \qquad \text{(A.3.10)}$$

on hem posat $\vec{v}_{aa'}=\vec{v}_a-\vec{v}_{a'}$; finalment, per a dues partícules i amb la notació de la pàgina 62 hom obté:

$$\vec{a}_a = \frac{\eta_a e_a e_{a'}}{m_a r^3}\vec{r} + \frac{\eta_a e_a e_{a'}}{2c^2 m_a r^3}\left[v^2_{a'} - v^2_a - 2(\vec{v}_a\vec{v}_{a'}) - 3\frac{(\vec{v}_{a'}\vec{r})^2}{r^2} \right]\vec{r} - \frac{e_a e_{a'}(\vec{r}\vec{v}_a)}{m_a c^2 r^3}\vec{v} +$$

$$+ \frac{\eta_a e^2_a e^2_{a'} \vec{r}}{m_a m_{a'} r^4 c^2} - \frac{2\eta_a e^2_a e^2_{a'}}{3m_a m_{a'} c^3 r^3}\left(\vec{v} - 3\frac{\vec{r}(\vec{r}\vec{v})}{r^2} \right) + \cdots \qquad \text{(A.3.11)}$$

que coincideix amb la fórmula (3.2.29) excepte en l'últim terme d'aquella, que prové del terme de Dirac (3.1.14) i que no hem tingut en compte en aquest Apèndix.

APENDIX 4.

Quadrivector de Pauli-Lubanski.

Es defineix com (3.3.3):

$$W^{\mu} = \frac{1}{2P}\,\epsilon^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\,P^{\nu}J^{\lambda\rho} \tag{A.4.1}$$

on $P=(-P^{\mu}P_{\mu})^{1/2}$. Tenint en compte (3.3.1) i (3.3.11),

$$P^{\mu} = \epsilon^{a}\pi_{a}^{\mu} + \eta_{a}(\alpha_{a}-\alpha_{a'})h^{\mu} + \epsilon^{b}(\mu_{ab}+\mu_{a'b})t_{b}^{\mu} \tag{A.4.2}$$

es dedueix que

$$P^{2} = \pi_{*}^{2}\Big\{1 - \frac{2\Lambda^{2}}{\pi_{*}^{2}}\epsilon^{a}\epsilon^{b}\mu_{ab} - \frac{h^{2}}{\pi_{*}^{2}}(\alpha_{a}-\alpha_{a'})^{2} -$$

$$- \frac{\Lambda^{2}}{\pi_{*}^{2}}\left[\epsilon^{a}\pi_{a}^{2}(\mu_{aa'}+\mu_{a'a'})^{2} - 2K(\mu_{aa}+\mu_{a'a})(\mu_{aa'}+\mu_{a'a'})\right]\Big\} \tag{A.4.3}$$

i utilitzant l'expressió (3.4.4) de $J^{\mu\nu}$, arribem a la següent expressió general per a W^{μ}:

$$W^{\mu} = \Big\{1 - \epsilon^{a}(z_{a}\alpha_{a} + K\mu_{aa'} + \pi_{a'}^{2}\mu_{aa} - \beta_{a}) + \epsilon^{a}\big[(Kz_{a} - \pi_{a'}^{2}z_{a'})\alpha_{a}\mu_{a'a} +$$

$$+ (Kz_{a'} - \pi_{a}^{2}z_{a})\alpha_{a}\mu_{a'a'} - (\beta_{a}+\beta_{a'})(K\mu_{aa'} - \pi_{a'}^{2}\mu_{aa}) + (K\alpha_{a} + \pi_{a}^{2}\alpha_{a'})(\nu_{aa'} - \nu_{a'a'})\big] +$$

$$+ \Lambda^{2}(\mu_{aa'}\mu_{a'a} - \mu_{aa}\mu_{a'a'}) + \Lambda^{2}(\beta_{a}+\beta_{a'})(\mu_{aa'}\mu_{a'a} - \mu_{aa}\mu_{a'a'}) -$$

$$- \Lambda^{2}\epsilon^{a}(\alpha_{a}\mu_{a'a} + \alpha_{a'}\mu_{aa})(\nu_{aa'} - \nu_{a'a'})\Big\} \times \Big\{1 - \frac{2\Lambda^{2}}{\pi_{*}^{2}}\epsilon^{a}(\mu_{aa} + \mu_{aa'}) -$$

$$- \frac{h^2}{\pi_*^2}(\alpha_a - \alpha_{a'})^2 - \frac{\Lambda^2}{\pi_*^2}\,\epsilon^a \pi_a^2 (\mu_{aa'} + \mu_{a'a'})^2 +$$

$$+ \frac{2k\Lambda^2}{\pi_*^2}(\mu_{aa} + \mu_{a'a})(\mu_{aa'} + \mu_{a'a'})\Big\}^{-1/2} \times \frac{n^{\mu}}{\pi_*} \qquad (A.4.4)$$

APENDIX 5.

Variables per a sistemes de N partícules.

Per a N partícules hom pot introduir també unes coordenades semblants a les del Apèndix 2. Tenim aquí 2N-1 vectors:

$$x^{\mu}_{aa'} = x^{\mu}_{a} - x^{\mu}_{a'} \quad , \quad \pi^{\mu}_{b} \tag{A.5.1}$$

que són les posicions relatives i els quadrivectors velocitat π^{μ}_{b}. Amb aquests podem construir N(2N-1) productes escalars; de tots els $x^{\mu}_{aa'}$ tant sols hi ha N-1 d'independents. Definim les següents variables:

$$z_{aa'} = \Lambda^{-2}_{aa'} \left\{ \pi^2_{a'} (x_{aa'}, \pi_a) - K_{aa'} (x_{aa'}, \pi_{a'}) \right\}$$

$$\text{on} \quad K_{aa'} = -\pi^{\mu}_{a} \pi_{a'\mu} \quad , \quad \Lambda^2_{aa'} = K^2_{aa'} - \pi^2_a \pi^2_{a'} \quad (a \neq a') \tag{A.5.2}$$

Introduïm:

$$h^{\mu}_{\alpha} = x^{\mu}_{\alpha,\alpha+1} - z_{\alpha,\alpha+1} \pi^{\mu}_{\alpha} + z_{\alpha+1,\alpha} \pi^{\mu}_{\alpha+1} \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots, N-1 \tag{A.5.3}$$

Utilitzarem com a vectors els h^{μ}_{α} , π^{ν}_{b} , ja que verifiquen:

$$D_a \left\{ h^{\mu}_{\alpha}, \pi^{\nu}_{b} \right\} = \left\{ 0, 0 \right\} \tag{A.5.4}$$

Com a escalars prendrem els productes $h^{\mu}_{\alpha} h_{\beta\mu}$, $k_{aa'}$, π^2_b i en lloc de $h^{\mu}_{\alpha} \pi_{b\mu}$ prendrem les N(N-1) variables $z_{aa'}$. Hom pot veure fàcilment que el canvi és invertible; el Jacobià és un producte de $\Lambda_{aa'}$.

Les $z_{aa'}$ verifiquen $D_b z_{aa'} = \delta_{ab}$, i prenem les següents combinacions d'aquestes variables:

$$\left.\begin{aligned} z_a &= z_{a,a+1} \qquad a=1,\dots,N-1 \\ z_N &= z_{N,1} \end{aligned}\right\} \tag{A.5.5}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{ab} - z_{a,a+1} &= \begin{cases} \rho_{(a-1)(N-2)+b} & \text{si } b<a \\ \rho_{(a-1)(N-2)+b-2} & \text{si } b>a+1 \end{cases} \\ z_{Nb} - z_{N,1} &= \rho_{(N-1)(N-2)+b-1} \; ; \; b=2,\dots,N-1 \end{aligned}\right\} \tag{A.5.6}$$

El conjunt d'escalars que utilitzarem serà així:

$$\Big\{ \underset{N}{z_a} \;,\; \underset{N(N-2)}{\rho_m} \;,\; \underset{\frac{1}{2}N(N-1)}{h_{\alpha\beta}} \;,\; \underset{\frac{1}{2}N(N-1)}{k_{aa'}} \;,\; \underset{N}{\pi_a^2} \Big\} \qquad \text{Total, } N(2N-1) \tag{A.5.7}$$

on $h_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_{\beta\mu}$. Hem escollit aquestes variables perquè tenen la propietat següent:

$$D_a \{ z_b, \rho, h, k, \pi^2 \} = \{ \delta_{ab}, 0, 0, 0, 0 \} \tag{A.5.8}$$

Es a dir, $D_a = \partial / \partial z_a$, $a=1,\dots,N$.

Aquestes variables verifiquen a més:

$$R_a(\lambda) \{ h_\alpha^\mu, \pi_b^\nu \} = \{ h_\alpha^\mu, \pi_b^\nu \}$$

$$R_a(\lambda) \{ z_a, z_{a'}, \rho, h, k, \pi^2 \} = \{ z_a+\lambda, z_{a'}, \rho, h, k, \pi^2 \} \tag{A.5.9}$$

APENDIX 6.

Fórmules per al model DGL predictivitzat.

$\overset{(n)}{\psi}_a$ de la fórmula (5.3.17) ve donat per la fórmula recurrent:

$$\overset{(n)}{\psi}_a = -\frac{\Lambda^2(\pi_a^2-\pi_{a1}^2)z_a}{\pi_a^2\pi_{a1}^2(k+\pi_{a1}^2)^2}\,\overset{(n)}{\overline{W}}_a + \frac{k^2-\pi_{a1}^4}{2\Lambda^2 z_a}\sum_{m=1}^{n-1}\overset{(m)}{\psi}_a\,\overset{(n-m)}{\psi}_a \; -$$

$$- \frac{1}{2\Lambda^2 z_a\pi_a^2}\sum_{k=1}^{n-1}\overset{(n-k)}{\overline{W}}_a\left(\sum_{m=0}^{n}\overset{(m)}{\psi}_a\,\overset{(n-m)}{\psi}_a\right) \qquad \text{(A.6.1)}$$

on $\overset{(n)}{\overline{W}}_a$ és:

$$\overset{(n)}{\overline{W}}_a = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=n-1\\ m_i\geq 1}} \frac{1}{k!}\,\overset{(m_1)}{\xi}\cdots\overset{(m_k)}{\xi}\,W^{(k)}(\hat{x}_a^2) \quad ; \quad \overset{(1)}{\overline{W}}_a = W(\hat{x}_a^2) \qquad \text{(A.6.2)}$$

i les $\overset{(n)}{\xi}$ venen de desenvolupar x^2 al voltant de $\hat{x}_a^2$ (5.3.20):

$$\overset{(n)}{\xi} = 2kz_a\overset{(n)}{\psi}_a - \pi_{a1}^2\sum_{m=0}^{n}\overset{(m)}{\psi}_a\,\overset{(n-m)}{\psi}_a \qquad \text{(A.6.3)}$$

La fórmula (A.6.1) val per $n \geq 2$; al segon membre tan sols hi apareixen els $\overset{(m)}{\psi}_a$ amb $m < n$. Per $n=2$, tenim:

$$\overset{(2)}{\psi}_a = \frac{\Lambda^2(\pi_a^2-\pi_{a1}^2)^2 z_a W(\hat{x}_a^2)}{4\pi_a^6\pi_{a1}^4(k+\pi_{a1}^2)^5}\Big\{4\Lambda^4\pi_a^2(k+\pi_{a1}^2)z_a^2W^{(1)}(\hat{x}_a^2) \; -$$

$$-2\Lambda^2(k+\pi_a^2)z_a^2W(\hat{x}_a^2)W^{(1)}(\hat{x}_a^2) + \pi_a^4\pi_{a1}^2(k-\pi_{a1}^2)(k+\pi_{a1}^2)^2W(\hat{x}_a^2)\Big\} \qquad \text{(A.6.4)}$$

El desenvolupament de $V(x^2)$ és automàtic a partir de (A.6.2)

$$V(x^2) = g\,W(\hat{x}_a^2) + \sum_{p=2}^{\infty}\overset{(p)}{\overline{W}}_a\,g^p \qquad \text{(A.6.5)}$$

$\overset{(n)}{Z}{}^{\mu}_{a}$ de la fórmula (5.3.25) hom pot escriure

$$\overset{(n)}{Z}{}^{\mu}_{a} = \eta_a \overset{(n)}{A}_a h^{\mu} + \overset{(n)}{L}_{aa'} t^{\mu}_{a'} \tag{A.6.6}$$

on $\overset{(n)}{A}_a$ i $\overset{(n)}{L}_{aa'}$ venen donats en funció de $\overset{(m)}{a}_a$, $\overset{(m)}{l}_{aa'}$ com:

$$\overset{(n)}{A}_a = \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ z_{a'} \overset{(m)}{a}_a \overset{(n-m)}{a}_{a'} + \pi_a^2 \overset{(m)}{a}_{a'} \overset{(n-m)}{l}_{aa'} - \overset{(m)}{a}_{a'} N_{a'} \overset{(n-m)}{a}_a - \overset{(m)}{l}_{a'a} Q_{a'} \overset{(n-m)}{a}_a \right\} \qquad n \geq 2$$

$$\overset{(n)}{L}_{aa'} = \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ K \overset{(m)}{l}_{a'a} \overset{(n-m)}{l}_{aa'} - \frac{h^2}{\Lambda^2} \overset{(m)}{a}_a \overset{(n-m)}{a}_{a'} - \overset{(m)}{a}_{a'} N_{a'} \overset{(n-m)}{l}_{aa'} - \overset{(m)}{l}_{a'a} Q_{a'} \overset{(n-m)}{l}_{aa'} \right\} \qquad n \geq 2 \tag{A.6.7}$$

Per al cas n=2, i masses iguals, hom obté:

$$\overset{(2)}{A}_a = 4(z_{a'} - z_a) W^{(1)}(\hat{x}_a^2) W^{(1)}(\hat{x}_{a'}^2) + 8\left[h^2 z_{a'} - \frac{2Kh^2 z_a}{K+m^2} - \frac{\Lambda^2 z_a z_{a'}}{m^2} + 2(K-m^2) z_a z_{a'} \right] \times$$

$$\times W^{(1)}(\hat{x}_{a'}^2) W^{(2)}(\hat{x}_a^2) \tag{A.6.8}$$

$$\overset{(2)}{L}_{aa'} = \frac{4}{m^2}\left(\frac{h^2}{K+m^2} - z_{a'}^2 + \frac{K z_a z_{a'}}{m^2} \right) W^{(1)}(\hat{x}_a^2) W^{(1)}(\hat{x}_{a'}^2) + \frac{8 z_a}{m^2}\left[\frac{2Kh^2 z_a}{K+m^2} - h^2 z_{a'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Lambda^2 z_a^2 z_{a'}}{m^2} - 2(K-m^2) z_a z_{a'}^2 \right] W^{(1)}(\hat{x}_{a'}^2) W^{(2)}(\hat{x}_a^2) \tag{A.6.9}$$

$\overset{(n)}{\overset{*}{\Theta}}{}^{\mu}_{a}$ ve donat per :

$$\overset{(n)}{\overset{*}{\Theta}}{}^{\mu}_{a} = \eta_a \overset{(n)}{\overset{*}{a}}_a h^{\mu} + \overset{(n)}{\overset{*}{l}}_{aa'} t^{\mu}_{a'} \tag{A.6.10}$$

on: $$\overset{(n)}{\overset{*}{l}}_{aa'} = -\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi_a^2} \overset{(m)}{\overset{*}{a}}_a \overset{(n-m)}{\Psi}_a \quad , \; n \geq 1$$

$$\overset{(n)}{\overset{*}{a}}_a = \sum_{p+q+r=n-1} \overset{(p)}{U}_a \overset{(q)}{\overline{W}'_a} \overset{(r)}{f}_a \quad , \; n \geq 1$$

$$\overset{(p)}{\mathcal{U}}_a = \sum_{\substack{w_1+\dots+w_k=p\\ w_i\geq 1}} \frac{1}{\pi_a^{2k}} \overset{(w_1)}{\overline{W}} \cdots \overset{(w_k)}{\overline{W}} \quad ; \quad \overset{(0)}{\mathcal{U}}_a = 1$$

$$\overset{(q)}{\overline{W}}{}'_a = \sum_{\substack{w_1+\dots+w_k=q\\ w_i\geq 1}} \frac{1}{k!} \overset{(w_1)}{\xi} \cdots \overset{(w_k)}{\xi} \, W^{(k+1)}(\hat{x}_a^2) \quad ; \quad \overset{(0)}{\overline{W}}{}'_a = W^{(1)}(\hat{x}_a^2)$$

$$\overset{(r)}{f}_a = -\frac{k+\pi_{a'}^2}{\Lambda^2 z_a^2} \sum_{m=0}^{r} \overset{(m)}{S}_a \left(k z_a \overset{(r-m)}{\psi}_a - \overset{(r-m)}{\xi} \right) \quad ; \quad \overset{(0)}{f}_a = 1 + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}$$

$$\overset{(m)}{S}_a = \sum_{\substack{w_1+\dots+w_k=m\\ w_i\geq 1}} (-1)^k \left(\frac{k(k+\pi_{a'}^2)}{\Lambda^2 z_a} \right)^k \overset{(w_1)}{\psi}_a \cdots \overset{(w_k)}{\psi}_a \quad ; \quad \overset{(0)}{S}_a = 1$$

En particular, $\overset{(2)}{\overset{*}{\Theta}}{}^{\mu}_{a}$ ens dóna:

$$\overset{(2)}{\overset{*}{a}}_a = \frac{W(\hat{x}_a^2)\,W'(\hat{x}_a^2)}{2\pi_a^2\pi_{a'}^2(k+\pi_{a'}^2)^2} \left\{ 4\pi_{a'}^2 k^2 + \left(\pi_a^4 + 2\pi_a^2\pi_{a'}^2 + 5\pi_{a'}^4\right) k + 2\pi_{a'}^2\left(\pi_a^4+\pi_{a'}^4\right) \right\} +$$

$$+ \left(1 + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\right) \frac{(\pi_{a'}^2-\pi_a^2)\Lambda^4 z_a^2}{\pi_a^2\pi_{a'}^2(k+\pi_{a'}^2)^3} W(\hat{x}_a^2)\, W''(\hat{x}_a^2) \qquad \text{(A.6.11)}$$

$$\overset{(2)}{\overset{*}{l}}_{aa'} = -\frac{W(\hat{x}_a^2)\,W'(\hat{x}_a^2)\,z_a}{2\pi_a^4\pi_{a'}^2(k+\pi_{a'}^2)^3} \left\{ 2\left(3\pi_{a'}^2-\pi_a^2\right)k^3 + 6\pi_{a'}^2\left(\pi_a^2+\pi_{a'}^2\right)k^2 + \left(\pi_a^6 + 6\pi_a^4\pi_{a'}^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\pi_a^2\pi_{a'}^4 + 2\pi_{a'}^6\right)k + \pi_a^2\pi_{a'}^2\left(3\pi_a^4+\pi_{a'}^4\right) \right\} + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\left(1 + \frac{k+\pi_a^2}{k+\pi_{a'}^2}\right) \times$$

$$\times \frac{(\pi_a^2-\pi_{a'}^2)\Lambda^4 z_a^3}{\pi_a^4\pi_{a'}^2(k+\pi_{a'}^2)^3} W(\hat{x}_a^2)\, W''(\hat{x}_a^2) \qquad \text{(A.6.12)}$$

i per al cas de masses iguals, recuperem les expressions (5.4.3).

BIBLIOGRAFIA.

(AB.65) A.I.AKHIEZER i U.B.BERESTETSKII : Quantum Electrodynamics. John Wiley and Sons, New York, 1965.

(AR.76) V.ARNOLD : Méthodes Mathématiques de la Mechanique Classique. Ed. Mir, Moscou, 1976.

(AS.64) M.ABRAMOWITZ i I.A.STEGUN : Handbook of Mathrmatical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Pub. New York, 1964.

(BE.71) L.BEL : Ann. Inst. Henri Poincaré. 14, 189 (1971).

(BE.74) L.BEL : "Journées Relativistes de Toulouse". Université de Toulouse, 1974.

(BE.77) L.BEL : "Mecánica Relativista Predictiva" Universitat Autònoma de Barcelona, Juny 1977 (UAB FT-34 Junio 77).

(BF.76) L.BEL i X.FUSTERO : Ann. Inst. Henri Poincaré. 25(A) 411 (1976).

(BM.75) L.BEL i J.MARTIN : Ann. Inst. Henri Poincaré. 22 , 173 (1975).

(BM.79) L.BEL i J.MARTIN : Comunicació a les jornades Relativistes de Granada. Universidad de Granada, Junio 79.

(BS.73) L.BEL , A.SALAS i J.M.SANCHEZ : Phys. Rev. D, 7 , 1099 (1973).

(CJ.63) D.G.CURRIE , T.F.JORDAN i E.C.G.SUDARSHAN : Rev. of Mod. Phys. 35, 350 (1963).

(CU.66) D.G.CURRIE : Phys. Rev. 142, 817 (1966).

(DG_a78) D.DOMINICI, J.GOMIS i G.LONGHI : Nuovo Cimento, 48(B), 152 (1978).

(DG_b78) D.DOMINICI, G.GOMIS i G.LONGHI : Nuovo Cimento, 48(A), 257 (1978).

(DG.80) D.DOMINICI, J.GOMIS i G.LONGHI : "A possible approach to the two body relativistic problem" Acceptat al Nuovo Cimento (A).

(DI.49) P.A.M.DIRAC : Rev. Mod. Phys. 21, 392 (1949).

(DI.64) P.A.M.DIRAC : Lectures on Quantum Mechanics. Academic Press Inc. New York, 1964.

(DR.69) R.D.DRIVER : Phys. Rev. 178(II), 2051 (1969).

(DR.70) PH.DROZ-VINCENT : Phys. Scripta. 2, 129 (1970).

(DS.63) N.DUNFORD i J.SCHWARTZ : Linear Operators (dos volums) Inters. Publis., John Wiley and Sons. New York, 1963.

(FK.71) R.P.FEYNMAN, M.KISLINGER i F.RAUNDAL : Phys. Rev. D3, 2706 (1971).

(FL.78) F.X.FUSTERO i R.LAPIEDRA : Phys. Rev. D, 17, 2821 (78).

(GH.65) W.GRÖBNER i N.HOFREITER : Integraltafel (dos volums). Springer-Verlag, Wien-New York, 1965.

(GO.63) H.GOLDSTEIN : Mecánica Clásica. Ed. Aguilar, Madrid (63)

(GO.69) C.GODBILLON : Géometrie différentielle et mécanique analitique. Herman, París, 1969.

(HI.67) R.N.HILL : Journal Math. Phys. 8, 201 (1967).

(HI.73) N.J.HICKS : Notas sobre geometria diferencial. Ed. Hispano Europea. Barcelona, 1973.

(HI.74) D.HIRONDEL : Journ. Math. Phys. 15, 1689 (1974).

(HN.74) F.HOYLE i J.V.NARLIKAR : Action at a distance in Physics and Cosmology. W.H.Freeman and Company. San Francisco, 1974.

(JA.75) J.D.JACKSON : Classical Electrodynamics (segona edició) John Wiley and Sons. New York, 1975.

(JO.72) K.JOHNSON : Phys. Rev. D6, 1101 (1972).

(KE.65) E.H.KERNER : Journ. Math. Phys. 6, 1218 (1965).

(KE.72) E.H.KERNER : The Theory of Actio-at-a-distance in Relativistic Particle Dynamics. Gordon and Breach, New York, 1972.

(KN.73) Y.S.KIM i M.E.NOZ : Phys. Rev. D8, 3521 (1973).

(KV.76) M.KALB i P.VAN ALSTINE : Yale Report COO-3075-146 (June 1976).

(LA.76) R.LAPIEDRA : "Les equacions de la mecànica relativista predictiva. Una familia de solucions". Institut d'Estudis Catalans. Barcelona, 1976.

(LE.65) H.LEUTWYLER : Nuovo Cimento. 37, 556 (1965).

(LL.65) L.LANDAU i E.LIFCHITZ : Mecánica. Ed. Reverté, Bilbao, 1965.

(LL.78) J.LLOSA : "Estudi dinàmic d'un sisteme d'N cossos extensos, carregats i gravitants". Tesi Doctoral. Barcelona, 1978.

(LL.80) J.LLOSA : "Predictive relativistic mechanics for Multipole Singularities". Encara no publicat.

(LM_a79) R.LAPIEDRA i A.MOLINA : Journ. Math. Phys. 20, 1209 (1979).

(LM_b79) R.LAPIEDRA, F.MARQUES i A.MOLINA : Journ. Math. Phys. 20, 1316 (1979).

(LM.80) J.A.LLOSA, F.MARQUES i A.MOLINA : "Predictive Extension of a singular Lagrangian sistem". Acceptat per publicar als Ann. Inst. Henri Poincaré. (UBFT-9-80).

(LU.68) D.LURIE : Particles and Fields. John Wiley and Sons, New York, 1968.

(MA.77) F.MARQUES : "Estudio perturbativo del oscilador anarmónico". Tesina de Licenciatura. Barcelona, Oct. 77.

(MT.73) C.W.MISNER, K.S.THORNE i J.A.WHEELER : Gravitation. W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1973.

(RO.65) F.ROHRLICH : Classical Charged Particles. Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1965.

(SM.74) E.C.G.SUDARSHAN i N.MUKUNDA : Classical Dynamics: A modern perspective. John Wiley and Sons, New York, 74.

(SM.76) J.L.SANS i J.MARTIN : Ann. Inst. Henri Poincaré. 24(A), 347 (1976).

(VW.65) H.VAN DAM i E.P.WIGNER : Phys. Rev. B, 138, 1576 (1965).

(WF.45) J.A.WHEELER i R.P.FEYNMAN : Rev. Mod. Phys. 17, 157, (1945).

(WF.49) J.A.WHEELER i R.P.FEYNMAN : Rev. Mod. Phys. 21, 425, (1949).

(ZW.64) G.ZWEIG : CERN Report TH.401 i TH.412 (1964).