

VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES
A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep Maria Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep Maria Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

A ÀNGELS, ALBERT I GUILLEM

ÍNDIX

CAPÍTOL I. ANTECEDENTS I CARACTERÍSTIQUES DE LA INVESTIGACIÓ

1.1	Formació inicial i experiència professional.	1
1.2	Característiques de la investigació.	5
1.3	Àrea on s'engloba la investigació. Pensament matemàtic avançat.	9

CAPÍTOL II. HIPÒTESIS I OBJECTIUS DE LA INVESTIGACIÓ

2.1	Hipòtesis.	11
2.2	Objectius.	13
2.3	Desenvolupament dels objectius.	13

CAPÍTOL III. PRIMER OBJECTIU: MARC TEÒRIC

3.1	Subobjectiu 1.1: Justificació de la necessitat de considerar tres nivells de significat: 1) el significat en la institució matemàtica, 2) el significat en la institució escolar i 3) el significat personal i del nostre posicionament en la hipòtesi H2.	17
3.1.1	Anàlisis referencials versus anàlisis pragmàtiques.	17
3.1.2	Platonisme versus constructivisme.	19
3.1.3	Representacionalisme versus no-representacionalisme.	20
3.1.4	Representacionalisme.	21
3.1.5	Les representacions mentals en la filosofia moderna.	23
3.1.6	Pragmatisme.	29
3.1.7	Representacions lingüístiques i figuratives.	31
3.1.8	L'anàlisi referencial del significat.	32
3.1.9	Sentit i referent.	33
3.1.10	La crítica al punt de vista referencial.	34
3.1.11	El problema de la intencionalitat.	35
3.1.12	Intersubjectivitat i ostensivitat.	39
3.1.13	Els objectes matemàtics des d'un punt de vista no representacionalista.	49
3.1.14	Les representacions mentals en la psicologia cognitiva.	51
3.1.15	Teories científiques realistes versus teories científiques instrumentalistes.	57
3.1.16	Història interna del coneixement científic versus sociologia del coneixement científic.	61
3.1.17	Anàlisis sistèmics versus anàlisis centrats en l'individu.	65
3.1.18	Repercussions en la didàctica de les matemàtiques. Psicologia cognitiva versus antropologia cognitiva.	68
3.1.19	Conclusions.	84

3.2	Subobjectiu 1.2: En relació al significat personal, justificar la hipòtesi H1.1 utilitzant les funcions semiòtiques com a instrument que permet l'anàlisi conjunta de la manipulació d'ostensius en un context social i del pensament que l'acompanya.	86
3.2.1	Les representacions en la didàctica de les matemàtiques.	86
3.2.2	Processos d'abstracció i generalització.	101
3.2.3	Pensament metafòric.	119
3.2.4	Processos de semiosi.	130
3.2.5	Conclusions.	131
3.3	Subobjectiu 1.3: Il·lustrar mitjançant l'anàlisi amb profunditat d'un exemple la hipòtesi H1.1.1.	143
3.3.1	Ostensius associats a $f(x)$ i $f'(x)$ activats en el càlcul de $f'(x)$.	143
3.3.2	Justificació de la hipòtesi H1.1.1: Anàlisi de diferents alternatives per a calcular la derivada de la funció sinus.	153
3.3.5	Conclusions.	159
3.4	Subobjectiu 1.4: En relació al significat institucional i la seva evolució històrica donar arguments històrics que fonamentin les opcions preses en l'elaboració de la unitat per a calcular funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$).	160
3.4.1	Introducció.	160
3.4.2	Evolució històrica del concepte de funció.	160
3.4.3	El pas de la gràfica a l'expressió simbòlica en l'obra de Descartes.	165
3.4.4	Evolució del càlcul diferencial en el segle XVII. El problema de les tangents.	178
3.4.5	Conclusions i proposta didàctica.	208

CAPÍTOL IV. SEGON OBJECTIU: ELABORACIÓ DE LA UNITAT

4.1	Subobjectiu 2.1: Anàlisi d'investigacions prèvies sobre els continguts de la unitat.	215
4.1.1.	Estudis sobre els nombres reals.	215
4.1.2	Estudis sobre el concepte de funció.	216
4.1.3	Estudis sobre el pendent d'una recta.	217
4.1.4	Estudis relacionats amb el concepte de límits.	218
4.1.5	Estudis sobre la recta tangent.	221
4.1.6	Estudis sobre la taxa instantània i la velocitat instantània.	223

4.2	Subobjectiu 2.2: Anàlisi de les dificultats, obstacles i errors dels alumnes.	225
4.2.1	Dificultats obstacles i errors relacionats amb els continguts de l'anàlisi elemental.	225
4.2.2	Dificultats, obstacles i errors. Marc general.	227
4.2.3	Error i entrebancs observats en el predisseny de la unitat i en la seva implementació.	232
4.3	Subobjectiu 2.3: Anàlisi de l'ensenyament tradicional anterior a la LOGSE.	233
4.3.1	Itinerari tradicional: Les derivades després dels límits.	233
4.3.2	Itinerari alternatiu: Les derivades abans dels límits.	234
4.3.3	Altres itineraris alternatius: la funció derivada abans que la derivada en un punt.	236
4.3.4	La funció derivada abans que la derivada d'una funció en un punt. Pendent d'una corba segons un increment fix.	237
4.4	Subobjectiu 2.4: Anàlisi del currículum del batxillerat LOGSE.	238
4.5	Subobjectiu 2.5: Anàlisi del camp de restriccions que van afectar a l'elaboració de la unitat.	243
4.5.1	Restriccions causades per la hipòtesi H3.1.	243
4.5.2	Restriccions causades per la institució escolar en la qual s'havia d'implementar la unitat.	247
4.6	Subobjectiu 2.6: Aplicació del constructe "significat a priori d'un objecte institucional X per a un alumne des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques modalitat de ciències de la naturalesa i de tecnologia de 1r de Batxillerat LOGSE" a la derivada.	251
4.6.1	Significats personals des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques.	251
4.6.2	Aplicació del constructe "significat a priori d'un objecte institucional X per a un alumne des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques modalitat de ciències de la naturalesa i de tecnologia de 1r de Batxillerat LOGSE" al contingut derivada.	253
4.7	Subobjectiu 2.7: Objectius i continguts de la unitat.	277
4.7.1	Objectius.	277
4.7.2	Coneixements previs.	277
4.7.3	Continguts.	278

4.8	Subobjectiu 2.8: Explicitació dels objectius de les activitats d'ensenyament-aprenentatge.	279
4.9	Subobjectiu 2.9: Activitats d'avaluació i complementàries.	279
4.10	Subobjectiu 2.10: Activitats de la unitat.	280
CAPÍTOL V. TERCER OBJECTIU: IMPLEMENTACIÓ DE LA UNITAT		
5.1	Subobjectiu 3.1: Clarificació del constructe "viabilitat de la implementació".	281
5.2	Subobjectiu 3.2: Anàlisi de les restriccions que van afectar a la implementació de la unitat.	283
	5.2.1 Restriccions.	283
	5.2.1 Grups i professorat implicat.	283
	5.2.1 Horari i organització de la classe.	284
	5.2.3 Tipologia d'alumnes.	284
	5.2.4 Gestió d'aula i contracte didàctic.	285
5.3	Subobjectiu 3.3: Concreció dels ítems a analitzar al llarg de la implementació.	290
	5.3.1 De la unitat anterior.	290
	5.3.2 Abans de començar la unitat.	290
	5.3.3 Al llarg de la unitat.	291
5.5	Subobjectiu 3.4: Planificació de les subseqüències d'ensenyament-aprenentatge i de les subseqüències d'avaluació.	298
5.6	Subobjectiu 3.5: Descripció de les classes des del punt de vista del professor com a mediador en la construcció social i personal realitzada en el procés d'instrucció.	302
	5.6.1 Fase I. Abans de començar la unitat.	302
	5.6.2 Fase II. Implementació de la unitat.	336
	5.6.3 Fase III. Després de la implementació.	712
6	CAPÍTOL VI. APORTACIONS I CONCLUSIONS FINALS	753
7	NOTES FINALS	761
8	BIBLIOGRAFIA	767
9	ANNEX: ACTIVITATS DE LA UNITAT	783

CAPÍTOL I

ANTECEDENTS I
CARACTERÍSTIQUES DE
LA INVESTIGACIÓ

CAPÍTOL I. ANTECEDENTS I CARACTERÍSTIQUES DE LA INVESTIGACIÓ

Aquesta investigació està molt relacionada amb l'experiència professional del doctorand, per la qual cosa considerem oportú, abans de comentar-ne els objectius, començar explicant els antecedents personals que han incidit en el seu plantejament.

1 Formació inicial i experiència professional

La formació inicial del doctorand es va realitzar en l'època en què les matemàtiques formalistes i descontextualitzades, les matemàtiques modernes, dominaven l'ensenyament de les matemàtiques. En el curs 75-76 vaig començar a impartir classes de matemàtiques en el BUP. Com és natural, vaig intentar reproduir la metodologia en la qual m'havia format: 1) Primer explicar una teoria descontextualitzada, ordenada deductivament i 2) Fer exercicis d'aplicació. Als tres mesos d'explicar el tema de límits a 2n de BUP seguint la metodologia anterior, els alumnes no havien entès res de límits, però la classe havia arribat a una situació límit. Aquest fracàs em va fer ser conscient que la metodologia anterior no era l'adequada per als alumnes de secundària. La cerca d'una nova metodologia em va portar a ingressar en el Grup Zero el curs 78-79.

Com a alternativa al formalisme en què havia degenerat la introducció de les matemàtiques modernes, sorgiren, tant a Espanya com en altres països, diferents grups de renovació. Proposaven una alternativa basada en: 1) ensenyar les matemàtiques a partir de la resolució de problemes i 2) fer veure als alumnes que les matemàtiques es podien aplicar a situacions de la vida real. Un d'aquests grups fou el Grup Zero.

El material elaborat pel Grup Zero¹ posava l'èmfasi sobre els processos de matematització de situacions reals. El motiu d'aquest èmfasi estava en la suposició que la principal dificultat que impedia l'aprenentatge de les matemàtiques a molts alumnes, era la falta de motivació causada per una presentació de la matemàtica exclusivament centrada sobre ella mateixa, i molt allunyada de les altres ciències. El seu material pretenia que l'alumnat descobrís les aplicacions de les matemàtiques a las situacions reals. D'aquesta manera es creia aconseguir la motivació dels alumnes i la seva implicació en les activitats proposades. Els temes elaborats per aquest grup pretenien seguir l'esquema següent: 1) Problemes d'introducció, 2) Construcció del concepte, 3) Formalització del concepte, 4) Exercicis d'aplicació i 5) Problemes de consolidació.

El grup Zero havia elaborat un material per a l'ensenyament de les derivades que s'apartava de l'itinerari deductiu del càlcul diferencial que era, i encara és, el que majoritàriament s'utilitza per a ensenyar el càlcul diferencial. Aquest itinerari deductiu normalment es desenvolupa entre el Primer i segon de Batxillerat LOGSE (2n i 3r de BUP) i consta de les fases següents:

- Concepte de funció real de variable real.
- Concepte de límit d'una funció.
- Càlcul de límits de funcions.
- Concepte de funció contínua en un punt.
- Determinació dels punts de discontinuïtat utilitzant el càlcul de límits.
- Concepte de derivada d'una funció en un punt.
- Concepte de funció derivada d'una funció.
- Càlcul de funcions derivades.
- Aplicacions de la derivada. Problemes de màxims i mínims.
- Representació gràfica de funcions.

El grup Zero va publicar els llibres de text: "Introducció a les derivades" (1980), "Introducció al càlcul diferencial" (1982a) i "Càlcul diferencial" (1984). Aquests llibres presentaven un material que no implicava l'estudi previ dels conceptes de límit i continuïtat. De fet, es considerava que l'estudi del concepte de derivada podia servir per a introduir el concepte de límit d'una funció en un punt. L'itinerari seguia les fases següents:

- Pendent d'una recta.
- Aspectes locals d'una funció (creixement i decreixement en un punt, màxim i mínim).
- Variació i taxa de variació d'una funció entre dos punts.
- Velocitat mitjana.
- Relació entre la taxa de variació d'una funció entre dos punts i el pendent de la recta secant.
- Concepte de recta tangent d'una funció en un punt.
- Velocitat instantània.
- Taxa instantània de variació d'una funció en un punt o derivada d'una funció en un punt.
- Relació entre la derivada d'una funció en un punt i el pendent de la recta tangent.
- Funció derivada.

Durant els cursos 78-79/83-84 vaig impartir classes a l'institut de Batxillerat Pau Vila, de Sabadell. En el seminari de matemàtiques hi havia tres membres del grup Zero i tot el seminari seguia el material del grup d'acord amb l'itinerari anterior. El curs 84-85 em vaig traslladar a l'institut de batxillerat Margarida Xirgu de l'Hospitalet de Llobregat, on em vaig trobar amb un seminari més clàssic, que considerava que l'itinerari adequat per a explicar el càlcul diferencial era el tradicional. Després d'una anàlisi didàctica vam acordar que seguiríem l'itinerari tradicional abans de començar el tema de derivades i que en aquest tema seguiríem el del grup Zero. L'itinerari va quedar de la manera següent:

Itinerari tradicional

- Concepte de funció real de variable real.
- Concepte de límit d'una funció.

- Càlcul de límits de funcions.
- Concepte de funció contínua en un punt.
Determinació dels punts de discontinuïtat utilitzant el càlcul de límits.

Itinerari Grup Zero

- Pendent d'una recta.
- Aspectes locals d'una funció (creixement i decreixement en un punt, màxim i mínim).
- Variació i taxa de variació d'una funció entre dos punts.
- Velocitat mitjana.
- Relació entre la taxa de variació d'una funció entre dos punts i el pendent de la recta secant.
- Concepte de recta tangent d'una funció en un punt.
- Velocitat instantània (utilitzant la notació de límit).
- Taxa instantània de variació d'una funció en un punt o derivada d'una funció en un punt (utilitzant la notació de límit).
- Relació entre la derivada d'una funció en un punt i el pendent de la recta tangent.
- Funció derivada.
- Càlcul de funcions derivades (utilitzant el càlcul de límits).
- Aplicacions de la derivada. Problemes de màxims i mínims
- Representació gràfica de funcions.

Aquesta proposta significava acceptar l'itinerari tradicional per estudiar els límits i la continuïtat de les funcions abans de treballar el concepte de derivada, per després seguir l'itinerari del grup Zero, utilitzant la notació de límits i el càlcul d'indeterminacions que ja havien treballat els alumnes.

En els cursos que vaig seguir aquest itinerari (84-85/92-93), vaig anar observant i reflexionant sobre les dificultats que tenien els alumnes quan treballaven el material del Grup Zero. Aquestes reflexions em portaren a utilitzar programes informàtics a les classes, i a introduir alguns canvis en les activitats, especialment les relacionades amb el concepte de funció derivada i amb el càlcul de funcions derivades, que era la part que considerava menys satisfactòria del material del Grup Zero. En concret, vaig pensar que el càlcul de la funció derivada es podia fer, en alguns casos, a partir de la gràfica de $f(x)$ o de la de $f'(x)$,

i no aplicant directament la definició de funció derivada $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ o

mètodes indirectes com les regles de derivació o la derivació logarítmica. Aquest tipus de reflexions em portaren a interessar-me per un tema més general: *els procediments que permeten calcular l'expressió simbòlica d'una funció a partir de la seva gràfica.*

Quan a l'ensenyament secundari es treballa el càlcul de l'expressió simbòlica d'una funció, poques vegades es fa a partir de la seva gràfica. Normalment la fórmula s'obté: fent la

traducció d'un enunciat o bé; utilitzant mètodes algebrics com, per exemple, trobar la fórmula d'una funció afi a partir de dos punts utilitzant la resolució d'equacions; emprant límits com, per exemple, quan es troben les expressions analítiques de les funcions derivades

a partir del càlcul directe del límit $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, etc. Treballar el pas

de la gràfica a la fórmula és un objectiu poc present a l'ensenyament secundari perquè habitualment es fa el procés invers; és a dir, a partir de l'expressió simbòlica, s'obté la gràfica de la funció. Aquesta falta de mètodes per obtenir expressions simbòliques de funcions a partir de gràfiques és encara més habitual quan el que s'ha de calcular és l'expressió simbòlica de la funció derivada. Actualment hi ha molts graficadors informàtics d'utilització senzilla que permeten representar funcions a partir de fórmules a base de dibuixar un nombre de punts del gràfic a partir de la fórmula i unir-los mitjançant segments, amb la qual cosa l'oblit dels mètodes que permeten passar del gràfic a la fórmula es pot accentuar encara més.

Els mètodes que permeten obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques no es poden considerar deslligats dels treballs d'investigació sobre la didàctica del concepte de funció. Janvier (1987) considera que el concepte de funció es materialitza en quatre formes de representació diferents (expressió simbòlica, taula, gràfica i expressió verbal) que, idealment, contenen la mateixa informació, però que cada una d'elles posa en funció diferents processos cognitius, cada un d'ells estretament relacionat amb els altres. Els treballs de Janvier posen de manifest que l'aprenentatge de les funcions no s'ha de limitar al d'una sola d'aquestes formes de representació, sinó que ha d'incloure la capacitat de traduir la informació d'una representació a l'altra. El pas d'una a l'altra pot ampliar i reorganitzar la informació que està implícita en una de les formes de representació. El que seria desitjable és que l'alumnat treballés la traducció entre tots els diferents tipus de representacions de les funcions. Ara bé, la introducció de les calculadores gràfiques i els programes informàtics a l'ensenyament secundari permeten disposar de màquines que automatitzen i, per tant, faciliten i simplifiquen algunes de les possibles traduccions entre les representacions funcionals. El convenciment que el pas de la gràfica a l'expressió simbòlica és una de les traduccions menys automatitzables i una de les que convé treballar ara que les calculadores gràfiques i els graficadors permeten fer les traduccions més automatitzables, em va portar a interessar-me per l'època de la història de les matemàtiques en què es va passar de les corbes a la seva expressió simbòlica.

Cada una de les quatre formes de representar una funció té una gènesi històrica diferent i, per tant, un estudi històric dels mètodes i procediments que s'han utilitzat per calcular l'expressió simbòlica a partir de gràfics pot donar idees utilitzables a les aules. Si bé les corbes són presents en tota la història de les matemàtiques, un dels moments en què es planteja clarament el pas del gràfic de la corba a la seva expressió simbòlica és amb el naixement de la geometria analítica. La lectura d'obres com "La Géométrie" de Descartes em va ajudar a entendre millor com es pot passar del gràfic a l'expressió simbòlica i, per tant, em va donar moltes idees aplicables a les aules. Els treballs de Descartes són molt

interessants perquè parteixen de les dues metàfores² clàssiques sobre les corbes:

- 1) Les corbes són seccions.
- 2) Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions per afegir-ne una tercera:
- 3) Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions, l'anàlisi de les quals permet trobar una equació que compleixen els punts de la corba.

Fins a principis del segle XIX en què Cauchy comença la reorganització de l'anàlisi infinitesimal, aquesta última metàfora és la que es pot trobar en els llibres. És a dir, fins a l'aritmètica de l'anàlisi, les gràfiques de funcions eren considerades com la trajectòria descrita per un punt en moviment, la qual es podia expressar mitjançant una fórmula. A partir dels treballs de Fourier, Cauchy i Dirichlet, entre d'altres, es varen acceptar com a funcions corbes que no podien ser trajectòries. Amb la posterior aplicació de la teoria de conjunts a les funcions va acabar d'agafar cos la metàfora conjuntista:

- 4) La gràfica d'una funció $f(x)$ és el conjunt format pels punts de coordenades $(x, f(x))$.

Les reflexions sobre la història de les matemàtiques em varen portar a considerar que, en el disseny de les activitats pensades per fer el pas de la gràfica d'una funció a la seva expressió simbòlica, havia de considerar les diferents metàfores que històricament han estructurat el concepte de gràfica d'una funció.

El convenciment que per treballar el pas de la gràfica a la fórmula s'havien d'utilitzar metàfores del tipus "la gràfica és la traça d'un punt que es mou subjecte a determinades condicions", o bé "la gràfica d'una funció és la traça d'un punt que es mou seguint la gràfica", em va portar a introduir a les classes programes informàtics que permetien treballar en aquesta línia. La metàfora que considera que les gràfiques de les funcions són la traça d'un punt que es mou subjecte a determinades condicions pot ser recuperada per a l'ensenyament gràcies a micromons com el Cabri-geomètre³. D'altra banda, la metàfora: la gràfica d'una funció és la traça d'un punt que es mou seguint la gràfica es pot treballar amb programes com el Calcula⁴.

2 Característiques de la investigació

Aquests antecedents em varen portar a fer petites innovacions i una reflexió sobre elles, que en certa manera prefiguraren una pre-investigació didàctica. L'objectiu d'aquestes innovacions i reflexions era bastant immediat, ja que pretenien millorar els resultats de la pràctica diària. Ara bé, amb el temps, aquest objectiu més immediat va anar donant pas a un interès més teòric sobre el tòpic: el pas de la gràfica a la seva expressió simbòlica i la seva aplicació a les derivades. Aquest interès em va portar a presentar en el Departament de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica de la divisió de Ciències de l'Educació de la U.B. (amb data 16 d'octubre de 1995) el Projecte d'investigació-tesi doctoral: *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*.

Aquest projecte d'investigació fou concebut des del principi amb l'objectiu d'analitzar el pas de la gràfica a la seva expressió simbòlica i la seva aplicació a les funcions derivades, des d'un punt de vista teòric i a la vegada pràctic. La investigació que hem portat a terme pretén superar la divisió teoria- pràctica perquè considerem que una investigació teòrica en didàctica de la matemàtica guanya sentit si es basa en la reflexió crítica sobre l'actuació real en la institució escolar. Considerem que els més de vint anys d'experiència del doctorand en l'ensenyament secundari formen un substrat essencial sobre el qual es pot fonamentar una anàlisi teòrica que no perdi de vista la complexitat de la pràctica educativa. Darrerament ha augmentat l'interès per superar la separació entre la investigació en didàctica de les matemàtiques i la pràctica educativa i han augmentat les investigacions que pretenen estudiar allò que passa a l'aula. És a dir, l'objectiu principal és analitzar el procés constructiu que desenvolupen els alumnes quan estudien un determinat sistema organitzat de continguts en una classe real, amb tota la seva riquesa i complexitat. Des d'aquest punt de vista, l'estudi dels processos cognitius implícits en l'adquisició de determinats continguts no és l'objectiu principal, sinó que es converteix en un objectiu secundari, que pot ser útil per ajudar a explicar la complexitat de les situacions escolars reals. Una investigació que tingui com a objectiu l'evolució del procés constructiu de l'alumne al llarg del període d'instrucció, és complexa i planteja moltes dificultats, tant teòriques com pràctiques. Ara bé, en ser el doctorand el professor dels cursos que han participat en la investigació, ha estat més fàcil la recollida de la informació necessària. En aquesta investigació el doctorand ha assumit el paper del professor del curs i el paper d'investigador, procurant que la investigació no interferís ni deformés, dintre de lo possible, la normalitat de l'aula.

En el disseny metodològic de la investigació han influït les següents línies d'investigació educativa: 1) La investigació-acció i 2) L'enginyeria didàctica. Com a la majoria de les investigacions de tipus qualitatiu, es va començar plantejant un tema i uns objectius, però sense unes hipòtesis ben definides d'entrada. L'objectiu principal d'aquesta investigació era estudiar el procés constructiu que desenvolupen a l'aula uns alumnes determinats, quan treballen una unitat d'introducció a les derivades que inclou activitats que permeten obtenir l'expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques. És a dir, es tractava d'elaborar i després avaluar empíricament una unitat didàctica innovadora, per a la qual s'havia d'obtenir informació significativa en la qual recolzar judicis de valor sobre la viabilitat d'aquesta unitat. Ben aviat va quedar palès que s'havia de distingir entre el procés d'elaboració de la unitat com a tal i la investigació sobre el procés constructiu que desenvolupen a l'aula els alumnes quan treballen aquesta unitat en un determinat centre escolar. Ara bé, la unitat elaborada no és una qualsevol sinó un material que té el seu origen en reflexions sobre experiències d'aula fetes amb la intenció de millorar la pràctica educativa. Aquesta indagació autorreflexiva sobre la pràctica docent amb la intenció de millorar-la fa que el nostre projecte d'investigació presenti característiques pròpies de la investigació-acció, com són: a) Proposar-se millorar la pràctica educativa mitjançant un canvi, i aprendre'n a partir de les conseqüències b) Investigar seguint una espiral de cicles de planificació, acció, observació i reflexió c) Implicar d'altres professors, d) Teoritzar sobre la pràctica, e) Considerar que les pràctiques, les idees i les suposicions s'hagin de

sotmetre a prova f) Portar un diari personal on s'han registrat reflexions i observacions. Latorre, del Rincón i Arnal (1996) consideren dues línies tipològiques d'investigació acció: una basada en el model lewinian i una altra basada en l'escola anglesa. La tipologia lewiniana es basa en els objectius i considera quatre modalitats: investigació-acció diagnòstica, participativa, empírica i experimental. Aquest projecte d'investigació té aspectes de la investigació-acció diagnòstica perquè hem recollit dades, les hem interpretat, hem establert un diagnòstic i recomanem mesures d'acció. També té aspectes de la investigació-acció participativa perquè implica a d'altres membres de la comunitat educativa. Ara bé, bàsicament té aspectes d'una investigació-acció empírica, ja que estudia una determinada situació (l'ensenyament de les derivades) mitjançant una acció que suposa un canvi (una nova unitat) i valora els efectes produïts de la manera més sistemàtica possible.

Un altre referent del nostre projecte d'investigació ha estat l'enginyeria didàctica, que, si bé en alguns aspectes presenta fortes discrepàncies amb la investigació-acció, també presenta algunes característiques comunes amb aquest tipus de metodologia d'investigació educativa. Com a metodologia d'investigació, l'enginyeria didàctica (Artigue 1994 i 1995a) es caracteritza per un esquema experimental basat en les "realitzacions didàctiques a la classe", és a dir sobre la concepció, realització, observació i anàlisi de seqüències d'activitats d'ensenyament-aprenentatge. Normalment es distingeixen dos nivells: el de la macro-enginyeria i el de la micro-enginyeria, que és on se situa la nostra investigació. En el disseny d'aquesta investigació també hem tingut en compte les quatre fases de la metodologia de l'enginyeria didàctica:

- 1) Fase d'anàlisi preliminar.
- 2) Fase de concepció i anàlisi a priori de les situacions didàctiques de l'enginyeria.
- 3) Fase d'experimentació.
- 4) Fase d'anàlisi a posteriori i avaluació.

La investigació que presentem forma part d'una línia d'investigació en didàctica de les matemàtiques que analitza l'aprenentatge en termes de processos de construcció de significat d'un alumne que forma part d'una institució escolar. Aquest punt de vista, que relega la psicologia a un paper secundari, és conseqüència d'un punt de vista epistemològic que considera les matemàtiques com una producció realitzada socialment.

De les moltes aportacions que ha fet la psicologia cognitiva hem tingut presents, encara que de manera secundària, les teories cognitives que serveixen de marc de referència al Disseny Curricular de la reforma educativa de la Generalitat de Catalunya. És a dir, un conjunt de teories i explicacions que, si bé mantenen entre si discrepàncies importants en nombrosos punts, participen d'una sèrie de principis comuns o, almenys, no contradictoris. Aquest marc de referència està delimitat pel que podem denominar enfocaments cognitius en un sentit ampli: a) la teoria genètica de J. Piaget i dels seus col·laboradors de l'Escola de Ginebra, b) la teoria de l'activitat en les formulacions de Vygotsky, Luria, Leontiev, i en els seus desenvolupaments posteriors (Wertsch, Forman, Cazden, etc.), c) la teoria de l'aprenentatge verbal significatiu de D. Ausubel i la seva prolongació en la teoria de

l'assimilació de R.E. Mayer, d) la teoria del processament de la informació (teoria dels esquemes) i e) la teoria de l'elaboració de M. A. Merrill i Ch. M. Reigeluth.

Les teories cognitives són estudis psicològics en què apareixen expressions del tipus: descobriment, construcció, reconstrucció, etc, les quals porten implícites una determinada concepció d'allò que són les matemàtiques. Si passem del camp de la psicologia al de l'epistemologia, ens trobem que el terme "constructivisme" abasta una gran varietat de posicions epistemològiques, que van des de les que consideren que el coneixement és una construcció activa del subjecte que representa una realitat exterior, fins a arribar a les del constructivisme radical, que considera que el coneixement és una construcció del subjecte que serveix per organitzar les seves experiències, sense que aquesta construcció sigui considerada la representació d'una realitat exterior al subjecte. En la filosofia de les matemàtiques s'aplica el terme constructivisme a les escoles que consideren que els objectes matemàtics són construccions mentals que tenen el seu origen en els subjectes. Per tant, el terme constructivisme s'aplica a moltes tendències des que va sorgir l'intuicionisme de Brouwer. En aquesta investigació hem optat per un conjunt d'enfocaments epistemològics que permeten conjugar una sèrie de principis que són similars, o almenys que no es contradueixen entre si, tot i que discrepen en força punts; principis que porten a entendre les matemàtiques com un producte cultural i social que ha anat evolucionant amb el temps. Aquesta opció epistemològica porta a entendre el coneixement matemàtic com una moneda amb dues cares: construcció i acció comunicativa, i té importants implicacions didàctiques. De tots els enfocaments que ofereixen una visió social de les matemàtiques hem tingut en compte bàsicament els següents:

1) Els treballs de Wittgenstein. La seva crítica a l'anàlisi referencial del significat va permetre que es reconeguessin les bases subjectives i socials de la certesa que s'obté en seguir una regla matemàtica o lògica, perquè la certesa i la necessitat de les matemàtiques deriven de l'acceptació d'unes "regles de joc" que es troben en una "forma de vida" socialment preexistent. L'aportació de Wittgenstein fa que termes com "ús" i "context" es converteixin en conceptes claus de la nova concepció de la didàctica de les matemàtiques i ha fet observar que l'adquisició de qualsevol coneixement (matemàtic o no) pressuposa l'adquisició d'uns significats lingüístics que depenen del context social en què s'utilitzen.

2) Els treballs de tipus sociològic que consideren les matemàtiques i les altres ciències com una activitat humana realitzada socialment. Aquest punt de vista tracta les activitats dels científics com un grup social immers en una cultura determinada. Els corrents que més han influït en el desenvolupament de la sociologia de la ciència són els plantejaments dels nous filòsofs de la ciència, la fenomenologia social alemanya i la historiografia marxista. Aquestes dues últimes ja s'havien preocupat, abans que ho fessin els nous filòsofs de la ciència, pel paper dels factors institucionals i socioeconòmics en el desenvolupament del coneixement humà.

3) El "constructivisme social" que, en la síntesi formulada per Ernest (1991, 1992, 1994 i 1998), proposa que el contingut matemàtic i el coneixement individual que se'n té són mútuament interdependents, i es reconstrueixen l'un a l'altre mitjançant la interacció interpersonal que es vehicula a través de diferents tipus de representacions (lingüística, simbòlica, icònica, etc). És a dir: el coneixement d'un nou contingut matemàtic deriva de

la negociació i del diàleg interpersonal.

En aquesta investigació hem considerat que l'alumne, que s'ha format com a subjecte dintre d'una comunitat i que, per tant, és partícep d'una intersubjectivitat, a partir de les seves accions sobre el medi físic i social, construeix un coneixement matemàtic personal, que es pot representar en el món material per diferents sistemes de representació ostensius, subjectes a unes determinades regles (sintàctiques, semàntiques i pragmàtiques) consensuades per la intersubjectivitat (vehiculada pel llenguatge). Aquesta conclusió té importants implicacions didàctiques:

1) Introdueix una perspectiva que fa que hàgim de considerar aspectes sintàctics, semàntics i pragmàtics, amb la qual cosa el coneixement matemàtic se situa en un context molt ampli i prou ric per abastar moltes de les coses que passen dins de les classes de matemàtiques.

2) En considerar l'aspecte comunicatiu, treu el coneixement matemàtic del pla individual per situar-lo en un pla social. Aquest aspecte social es manifesta en el fet que la construcció matemàtica que farà l'alumne no solament dependrà de les seves accions-, sinó que moltes vegades dependrà més de la confrontació de la seva construcció amb la dels seus companys i amb la del professor.

3) Aquesta caracterització del coneixement matemàtic inclou els coneixements que es produeixen durant el procés de la transposició didàctica. En efecte, per la seva generalitat, inclou el coneixement que produeix el matemàtic, el que aprèn l'alumne i el que ensenya el professor, perquè en els tres casos es dona una construcció mental materialitzada en signes a efectes de comunicació.

4) D'acord amb aquesta caracterització, la didàctica de les matemàtiques s'ha de basar principalment en l'acció dels alumnes i en la comunicació de les seves construccions mentals (autocomunicació, comunicació alumne-alumnes, comunicació alumne-professor; comunicació verbal, gràfica, simbòlica, etc.; comunicació de conjectures, demostracions, etc.). Si bé el principi de l'acció és bastant acceptat pel professorat, almenys de paraula, pel que fa a la comunicació, podem dir que no hi ha prou consciència de la seva importància.

5) El fet de considerar que hi ha persones que coneixen i sistemes de representació materials que codifiquen el coneixement d'aquestes persones té implicacions importants. En efecte, obliga a considerar que en allò que una comunitat té per "vàlid", "vertader", "cert", etc., incloses les proposicions matemàtiques, hi ha un factor de consens social molt important; i, per tant, a relativitzar el valor de "vàlidesa" de "veritat" de "certesa",... d'aquestes proposicions.

6) En considerar la pragmàtica dels sistemes de representació, és a dir, el significat en un context d'ús, el coneixement matemàtic passa d'ésser una entitat amb una existència intemporal a ésser un producte històric. Això fa que alguns dels diferents contextos històrics que han donat sentit al concepte, puguin ésser adaptats per utilitzar-los a les classes.

3 Àrea en què s'engloba la investigació. El pensament matemàtic avançat.

La memòria que presentem és una investigació sobre continguts que serveixen de base al pensament matemàtic avançat propi dels currículums de BUP i del nou Batxillerat de la

LOGSE. Aquest tipus de pensament es caracteritza pels continguts que tracta: funcions, límits, infinit, continuïtat, derivades, integrals, etc.; i per la complexitat dels processos cognitius implicats en l'aprenentatge d'aquests continguts: traducció entre diferents representacions, abstracció i generalització, realització de conjectures, demostracions, formalitzacions, etc. Els principals resultats sobre el pensament matemàtic avançat són fruit del grup AMT (Pensament Matemàtic Avançat). Aquest grup de treball va néixer l'any 1984 i forma part del PME (Grup Internacional per a la Psicologia de l'Educació de les Matemàtiques) que alhora és un subgrup de L'ICMI (Congrés Internacional per a la Instrucció de les Matemàtiques). Els principals treballs teòrics d'aquest grup sobre el pensament matemàtic avançat estan recollits en Tall (1991).

Si bé la investigació que presentem tracta els continguts propis del pensament matemàtic avançat, no comparteix amb aquesta àrea d'investigació l'interès en els processos cognitius implicats en la construcció d'aquests continguts. La nostra opinió és que els plantejaments cognitivistes d'aquesta àrea d'investigació produeixen un desplaçament de l'objecte d'investigació, ja que l'objectiu es desplaça de l'estudi del procés de construcció de significat durant el procés d'instrucció cap a l'estudi de les representacions mentals dels alumnes. En la nostra investigació l'estudi de les representacions mentals dels alumnes juga un paper molt secundari.

Coincidim bastant amb els plantejaments de la teoria antropològica de Chevallard, però no en tant que desplaça l'objecte d'investigació fora de l'aula, ja que considera que per poder explicar l'activitat matemàtica a l'aula cal explicar primer què és l'activitat matemàtica en si. Nosaltres no tenim gaire clar que existeixi una "activitat matemàtica" prototípus, sinó que més aviat ens inclinem a pensar que n'hi ha de moltes classes, algunes de les quals són activitats matemàtiques escolars. En la nostra investigació no ens interessen les representacions mentals dels alumnes ni l'activitat matemàtica en general, o l'activitat matemàtica prototípus, sinó treure conclusions, sistemàtiques i coherents, sobre unes determinades activitats matemàtiques que realitzen uns alumnes concrets en una institució escolar determinada, procurant que aquestes apuntin més enllà del cas particular que hem estudiat.

CAPÍTOL II

HIPÒTESIS I OBJECTIUS
DE LA INVESTIGACIÓ

CAPÍTOL II. HIPÒTESIS I OBJECTIUS DE LA INVESTIGACIÓ

1 Hipòtesis

En aquesta investigació estem interessats a determinar el significat que els alumnes donen als continguts matemàtics que apareixen en la unitat didàctica "Introducció a les derivades" (annex I), així com en el procés de construcció d'aquests significats com a conseqüència de la instrucció, amb tota la complexitat i limitacions que imposa l'aula.

1.1 Hipòtesis H1, H1.1 i H1.1.1

La hipòtesi general de la qual partim és la següent:

H1 (hipòtesi general): En plantejar-nos el significat i la formació de continguts matemàtics en el procés d'instrucció, hem de realitzar una anàlisi que contempli el significat del contingut¹ (sistema organitzat de continguts) en la institució matemàtica, el significat del contingut en la institució escolar i el significat personal.

En tot allò que fa referència al significat en la institució matemàtica s'ha de tenir en compte, com a mínim, els aspectes següents: la seva evolució històrica, les relacions amb altres continguts, les seves formes de representació, les traduccions entre elles i els diferents contextos en què s'usa per a organitzar fenòmens.

En tot allò que fa referència al significat personal s'ha de tenir en compte, com a mínim, els aspectes següents: l'estructura del conjunt d'entitats que són considerats per l'alumne com a exemples positius del contingut (classe homogènia o difusa); la integració del significat personal del nou contingut amb els significats personals previs de l'alumne; els processos afectius i cognitius que intervenen en la construcció del significat personal del contingut (abstracció, analogia, pensament metafòric, motivació, etc.); les diferents formes de representació del contingut que pot utilitzar l'alumne; i, finalment, els contextos d'ús que, per a l'alumne, donen sentit al contingut.

S'ha de considerar el significat en la institució escolar com una reducció, una transformació o una adaptació (transposició didàctica) del significat institucional. En aquesta transposició didàctica s'han de tenir en compte els dos nivells següents: 1) la reducció del significat institucional, que ve determinat pels objectius, continguts i indicacions metodològiques curriculars, llibres de text etc; i 2) la transposició didàctica que realitza el professor a l'aula. En aquestes dues transposicions influeixen les expectatives que es tenen sobre el significat institucional i el significat personal. Segons la concepció que tingui el professor (representant de la institució escolar) sobre el significat institucional, i segons quines expectatives tingui sobre el significat personal que poden desenvolupar els alumnes, el significat institucional es reduirà més o menys per convertir-se en el significat en la institució escolar.

Com a conseqüència de la hipòtesi general H1 tenim la següent hipòtesi més concreta:

H1.1: Les diferents representacions ostensives dels continguts matemàtics i les traduccions entre elles són un element fonamental per a la seva comprensió i, per tant, per al seu ensenyament-aprenentatge.

Com a conseqüència de la hipòtesi H1.1 tenim la següent hipòtesi més concreta:

H1.1.1: El càlcul de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ es pot interpretar com un procés en què s'han de considerar:

- 1) Traduccions entre les distintes formes ostensives de representar $f(x)$
- 2) El pas d'una forma de representació ostensiva de $f(x)$ a una forma de representació ostensiva de $f'(x)$.
- 3) Traduccions entre les distintes formes ostensives de representar $f'(x)$.

1.2 Hipòtesi H2

En la hipòtesi general es postulen tres nivells de significat i diferents elements relacionats amb cada un d'aquests tres nivells sense entrar a precisar amb exactitud què entendrem per significat en cada un d'ells. En la hipòtesi 2 precisem com entendrem el significat en cada un d'aquests tres nivells.

H2: Significat personal d'un contingut matemàtic és el sistema de pràctiques personals que realitza una persona per resoldre el camp de problemes del qual ha emergit el contingut personal.

Significat institucional d'un contingut matemàtic és el sistema de pràctiques associades al camp de problemes del qual ha emergit el contingut institucional.

Significat a priori d'un contingut matemàtic per a un subjecte des del punt de vista de la institució escolar és el subsistema de pràctiques personals associades a un camp de problemes que són considerades en la institució escolar com a adequades i característiques per a resoldre aquests problemes.

1.3 Hipòtesi H3, H3.1 i H3.2

En aquesta memòria intentarem justificar, a més de les quatre anteriors (H1, H1.1, H1.1.1 i H2) les hipòtesis següents:

H3: Prenent com a marc de referència general les hipòtesis H1, H1.1, H1.1.1 i H2, és possible elaborar i implementar, amb un alt grau de viabilitat, una unitat didàctica per a treballar en les institucions "classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat / 3r de BUP" la derivada, que contempli activitats que permetin calcular l'expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$).

La hipòtesi H3 es pot dividir en dues de més concretes:

H3.1: Agafant com a marc de referència general les hipòtesis H1, H1.1, H1.1.1 i H2, és possible elaborar una unitat didàctica per treballar en les institucions “classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat / 3r de BUP” la derivada, que contempli activitats que permetin calcular l’expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$).

H3.2 La unitat elaborada d’acord amb la hipòtesi H3.1 es pot implementar amb un alt grau de viabilitat en les institucions “classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat / 3r de BUP”

2 Objectius

La justificació de les hipòtesis anteriors ens porta a plantejar els objectius següents:

2.1 Primer objectiu

Justificar les hipòtesis H1, H1.1, H1.1.1 i H2 explicitant el marc teòric que ens ha portat a postular-les.

2.2 Segon objectiu

Justificar la hipòtesi H3.1 elaborant, per treballar la introducció a la derivada, una unitat didàctica que incorpori activitats que permeten calcular l’expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$).

2.3 Tercer objectiu

Justificar la hipòtesi H3.2 estudiant, des del punt de vista de la institució “classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat/ 3r de BUP”, el procés constructiu de significació que desenvolupen a l’aula uns alumnes determinats, quan treballen la unitat d’introducció a les derivades, elaborada segons H3.1. Fer l’estudi des d’aquesta perspectiva implica fer una àlisi des del punt de vista del professor com a mediador en la construcció social i personal realitzada en el procés d’instrucció.

3 Desenvolupament dels objectius

Al’hora de fer la planificació per aconseguir aquests objectius, vam decidir desenvolupar-los en objectius més específics per tal de poder concretar la investigació.

3.1 Desenvolupament del 1r objectiu

Vam decidir desenvolupar aquest objectiu en els següents subobjectius:

- 1.1 Justificació de la necessitat de considerar tres nivells de significat: 1) el significat en la institució matemàtica, 2) el significat en la institució escolar i 3) el significat personal i del nostre posicionament en la hipòtesi H2.
- 1.2 En relació al significat personal, justificar la hipòtesi H1.1 utilitzant les funcions semiòtiques com a instrument que permet l'anàlisi conjunta de la manipulació d'ostensius en un context social i del pensament que l'acompanya.
- 1.3 Il·lustrar mitjançant l'anàlisi amb profunditat d'un exemple la hipòtesi H1.1.1.
- 1.4 En relació al significat institucional, donar arguments històrics que fonamentin les opcions preses en l'elaboració de la unitat "Introducció a les derivades" per a calcular funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$).

3.2 Desenvolupament del 2n objectiu

El segon objectiu d'aquesta investigació és justificar la hipòtesi H3.1. Per justificar-la cal elaborar una unitat didàctica per introduir la derivada, que incorpori activitats que permetin calcular l'expressió simbòlica de funcions derivades a partir de gràfiques de $f(x)$ o $f'(x)$. Vam decidir desenvolupar aquest objectiu en els següents subobjectius:

- 2.1 Anàlisi d'investigacions prèvies sobre els continguts de la unitat.
- 2.2 Anàlisi de les dificultats, obstacles i errors dels alumnes.
- 2.3 Anàlisi de l'ensenyament tradicional anterior a la LOGSE.
- 2.4 Anàlisi del currículum del batxillerat LOGSE.
- 2.5 Anàlisi de les restriccions que afectarien l'elaboració de la unitat.
- 2.6 Aplicació del constructe "significat a priori d'un objecte institucional X per a un alumne, des del punt de vista de la institució classe de matemàtiques de 1r de batxillerat modalitat ciències de la naturalesa i tecnologia / 3r de BUP" al contingut derivada.
- 2.7 Explicitació dels objectius i continguts de la unitat.
- 2.8 Explicitació dels objectius de les activitats d'ensenyament-aprenentatge.

- 2.9 Explicitació de les activitats complementàries i d'avaluació.
- 2.10 Activitats d'ensenyament-aprenentatge de la unitat.

3.3 Desenvolupament del 3r objectiu

El tercer objectiu d'aquesta investigació és estudiar, des del punt de vista de la institució "classe de matemàtiques de 1r de Batxillerat/ 3º de BUP", el procés de significació constructiu que desenvolupen a l'aula uns alumnes determinats, quan treballen la unitat "introducció a les derivades", elaborada seguint la hipòtesi H3.1, amb la finalitat de justificar la viabilitat de la nova organització de continguts recollida en aquesta unitat. Vam decidir desenvolupar aquest objectiu en els subobjectius següents:

- 3.1 Clarificació del constructe "viabilitat de la implementació".
- 3.2 Anàlisi de les restriccions que afectarien la implementació de la unitat.
- 3.3 Concreció, amb el màxim de detall, dels ítems que s'analitzarien al llarg de la implementació.
- 3.4 Planificació de les subseqüències d'ensenyament-aprenentatge i de les subseqüències d'avaluació.
- 3.5 Descripció de la gestió de les classes des del punt de vista del professor com a mediador en la construcció social i personal realitzada en el procés d'instrucció.

CAPÍTOL III

PRIMER OBJECTIU
MARC TEÒRIC

CAPÍTOL III. PRIMER OBJECTIU

1 Subobjectiu 1.1. Justificació de la necessitat de considerar tres nivells de significat: 1) el significat en la institució matemàtica, 2) el significat en la institució escolar i 3) el significat personal i del nostre posicionament en la hipòtesi H2

Per justificar la necessitat de tres nivells de significat i del nostre posicionament en la hipòtesi H2, farem un recorregut, molt personal, per la filosofia, la psicologia i la didàctica de la matemàtica. Començarem amb l'exposició d'una sèrie de controvèrsies sobre les quals qualsevol investigació sobre la construcció del significat s'ha de definir de manera explícita o implícita. Aquestes controvèrsies són les següents: 1) anàlisi referencial del significat versus anàlisi pragmàtiques, 2) constructivisme versus platonisme, 3) representacionalisme versus no-representacionalisme, 4) teories realistes versus teories instrumentalistes en la ciència, 5) Història interna del coneixement científic versus sociologia del coneixement científic, 6) anàlisis sistèmiques versus anàlisis centrades en l'individu.

A continuació exposarem com el posicionament, explícit o implícit, sobre aquestes controvèrsies ha produït una evolució de la didàctica de les matemàtiques des de posicions centrades en la psicologia cognitiva fins a posicions centrades en anàlisis sistèmiques i antropològiques. En aquesta evolució podem trobar quatre enfocaments diferents: 1) el que se centra en l'aprenentatge de l'alumne, 2) el que se centra en el pensament de l'alumne i en el del professor, 3) el que se centra en anàlisis sistèmiques i 4) el que se centra en anàlisis antropològiques. Des del nostre punt de vista, les limitacions que presenten cadascun dels quatre enfocaments anteriors fa necessari un cinquè enfocament, que es comença a desenvolupar actualment, que intenta aconseguir una síntesi entre les anàlisis antropològiques, les anàlisis psicològiques i les anàlisis semiòtiques. Acabarem justificant el nostre posicionament en aquest últim i incipient enfocament i explicarem com l'hem utilitzat per elaborar la unitat "Introducció a les derivades" i per analitzar l'evolució del significat personal dels alumnes com a resultat del procés d'instrucció.

1.1 Anàlisis referencials versus anàlisis pragmàtiques

En la investigació en didàctica de les matemàtiques la noció de significat juga un paper important i molts autors el consideren un tema clau (Balacheff 1990, Brousseau 1986 i 1997, Sierpinska 1990 i 1994, Font i Nuñez 1995, Godino 1996, Godino i Batanero 1994 i 1998, Godino i Recio 1997 i 1998, Hoyles i Noss 1997). Respecte de la teoria del significat dels conceptes matemàtics hi ha bàsicament dos posicionaments: la semàntica o referencial i la pragmàtica: *<<...Ahora bien, dentro de esta línea hay opiniones que ponen el acento sobre la semántica pura mientras que otras lo ponen sobre la pragmática. Los primeros focalizan su atención sobre la relación entre el significado y el significante, suponiendo, implícitamente, que el concepto tiene un solo significado, y creen que una enseñanza contextualizada de las matemáticas implica trabajar el*

mismo concepto en diferentes contextos concretos, ayudando a los alumnos a distinguir el concepto matemático (siempre con el mismo significado en los diferentes contextos) de los otros aspectos de la situación. Los partidarios de este punto de vista, suelen suponer que los conceptos matemáticos forman parte de un conocimiento objetivo que nos permite hacer representaciones que son, en parte, homeomórficas a la realidad. Por lo tanto, en muchos casos, consideran que los conceptos tienen una existencia independiente del sujeto y que el proceso que ha de seguir el alumno consiste en hacer construcciones personales hasta llegar a captar el “verdadero” significado del concepto.

Los que ponen el acento en la pragmática, además de considerar la relación entre el significado y el significante de los conceptos, tienen en cuenta el uso que hacen los usuarios en los diferentes contextos que le dan sentido. Desde esta perspectiva, más que hablar del significado de un concepto, hemos de hablar de una red de significados que se relacionan entre sí y, a su vez, con una red de representaciones (significantes). Los partidarios de este punto de vista suelen dar mucha importancia a la construcción social de los significados y, en muchos casos, ponen en cuestión el paradigma del “conocimiento objetivo”>> (Font i Nuñez 1995, pàg. 299).

La primera opció considera que un significat té significat pel fet d'assignar-li una entitat, no necessàriament ostensiva, objectivament donada amb anterioritat al significat. L'opció pragmàtica considera que el significat institucional és un emergent d'un sistema de pràctiques socials lligades a la resolució de problemes, que realitzen determinats col·lectius de persones i que van evolucionant amb el temps. Aquests dos punts de vista es poden trobar en l'obra de Wittgenstein. Frege, Russell i el primer¹ Wittgenstein van fer de la referència, concepció segons la qual les paraules es refereixen a quelcom en el món, el punt central de les seves anàlisis del significat. El significat d'una paraula com “rellotge”, mantenien ells, consistia en l'objecte, un rellotge, al qual aquesta paraula es referia. Els filòsofs partidaris de l'enfocament referencial foren els mateixos que desenvoluparen la lògica simbòlica moderna. La seva anàlisi referencial és una conseqüència natural de la de la lògica, la qual considera com a paradigmàtic allò que hom anomena “discurs extensional”. En aquest tipus de discurs, els símbols del llenguatge estan enlloc d'objectes o propietats d'objectes, i les afirmacions que se'n fan mitjançant les oracions del llenguatge es considera que caracteritzen (vertaderament o falsament) aquests objectes i les seves propietats. Els llenguatges extensionals s'adhereixen a allò que és conegut com “Llei de Leibniz”, d'acord amb la qual podem substituir un terme per un altre que es refereixi al mateix objecte, sense canviar el valor de veritat de l'oració. En el discurs extensional, la relació de referència entre els noms lingüístics dels objectes i els objectes mateixos és absolutament fonamental.

Durant algun temps Wittgenstein va defensar l'anàlisi referencial del significat. Després va començar a qüestionar-se els seus punts de vista anteriors. Aquesta revisió va culminar en les seves “Investigacions filosòfiques”, llibre publicat pòstumament en 1953. En aquesta exposició dels seus nous punts de vista filosòfics, Wittgenstein (1983/1953)² es

va centrar en la varietat de maneres en què és usat el llenguatge i particularment en el fet que pot usar-se per a fer més coses que enunciar fets. Més que buscar el significat de les expressions lingüístiques en la manera com les paraules es refereixen a objectes, Wittgenstein afirmà que ens hauríem de centrar en com usem el llenguatge. Per il·lustrar que hi ha una gran varietat d'usos del llenguatge, Wittgenstein va introduir la idea que els usos particulars del llenguatge poden interpretar-se com a activitats lingüístiques particulars o "jocs del llenguatge". Wittgenstein mantenia que n'hi ha una gran varietat, cadascun amb unes regles pròpies. En els diversos jocs les paraules s'usen de maneres diferents, no sempre per a referir-se a objectes. D'acord amb això, Wittgenstein pensava que nosaltres malentendem radicalment el llenguatge ordinari, si l'analcem de manera purament referencial.

1.2 Platonisme versus constructivisme

La controvèrsia anàlisis referencials versus anàlisis pragmàtiques està relacionada amb dues més: platonisme versus constructivisme i representacionalisme versus no-representacionalisme que també estan estretament relacionades entre si.

El punt de vista referencial se sol correspondre amb una ontologia platònica dels conceptes matemàtics, ja que considera que els objectes matemàtics tenen una existència real, independent de la humanitat, en algun domini ideal diferent del món de les coses. El punt de vista pragmàtic se sol correspondre amb els supòsits ontològics del constructivisme social (Ernest 1991, 1992, 1994 i 1998). El constructivisme social, en la síntesi formulada per Ernest, proposa que l'objecte matemàtic i el coneixement individual que se'n té són mútuament interdependents i es reconstrueixen l'un a l'altre mitjançant la interacció interpersonal que es vehicula a través de diferents tipus de representacions (lingüística, simbòlica, icònica, etc) i de diferents pràctiques socials.

El platonisme considera que els objectes matemàtics pertanyen a un món transcendent³, encara que diferent del món transcendent dels realistes, mentre que el constructivisme social no necessita postular cap món transcendent, ja que pot explicar la construcció dels objectes matemàtics a partir del món de la vida i a partir de la intersubjectivitat.

Ernest (1998) explica l'activitat matemàtica a partir del constructivisme social. Aquest punt de vista filosòfic aplicat a les matemàtiques es basa en:

- 1) La lògica del descobriment matemàtic proposat per Lakatos (1981 i 1986) basat en la prova i la refutació, és a dir basat en la negociació i acceptació.
- 2) Els treballs de Wittgenstein (1983, 1978). La seva crítica a l'anàlisi referencial del significat va permetre que es reconeguessin les bases subjectives i socials de la certesa que s'obté en seguir una regla matemàtica o lògica, perquè la certesa i la necessitat de les matemàtiques deriven de l'acceptació d'unes "regles de joc" que es troben en una "forma de vida" socialment preexistent.
- 3) La interpretació de l'objectivitat com a intersubjectivitat. El coneixement objectiu s'entén com un coneixement social, cultural, públic i col·lectiu i no com un coneixement

personal, privat o construcció individual ni tampoc com un coneixement extern, absolut o transcendent. Dit d'una altra manera no es considera que la intervenció constitutiva del subjecte en l'acte de coneixement porti a veritats necessàries ni que l'objectivitat depengui de l'adequació del coneixement a un món transcendent.

4) La interpretació de les matemàtiques com quelcom bàsicament conversacional. El constructivisme social entén les matemàtiques com quelcom bàsicament lingüístic, textual i semiòtic, però immers en el món social de la interacció humana.

1.3 Representacionalisme versus no-representacionalisme

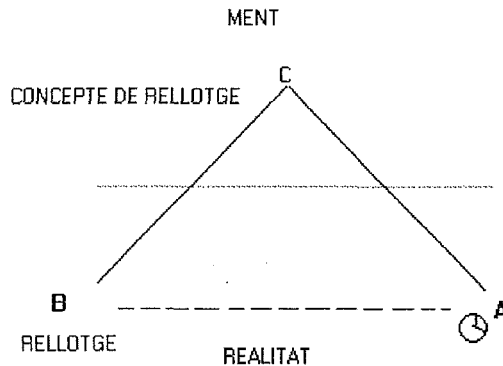
Els conceptes matemàtics es representen en sistemes matemàtics de signes que formen part del món real; per tant, llur representació mental es pot considerar com un cas particular de la representació mental dels objectes del món real. En relació a la representació mental del món real, existeixen bàsicament dues alternatives: la "representacional" i la "no-representacional". El representacionalisme parteix dels supòsits següents: 1) Existeix un món exterior predefinit 2) La nostra cognició aprehèn aquest món, encara que sigui en forma parcial; i 3) La manera de conèixer aquest món predefinit és representar-ne els trets i després actuar en base a aquestes representacions. Aquests supòsits epistemològics del representacionalisme parteixen de les dualitats intern/extern i realitat/ment, ja que considera dos móns diferents: el món real dels objectes exteriors al subjecte i el món mental del subjecte. Dit d'una altra manera: pressuposa que les persones tenen una ment en la qual es produeixen processos mentals, i que els objectes externs a les persones generen representacions mentals internes. Per representacionalisme entendrem tota concepció dels continguts immanents que els creu, en principi, compatibles amb la possibilitat de ser, almenys en certs casos, els representants mentals homeomòrfics de les coses transcendents.

El terme "no-representacional" pot tenir significats molt diferents. En aquesta memòria d'investigació l'utilitzarem en sentit ampli, ja que hi englobarem tots els punts de vista que qüestionen el representacionalisme. Aquest qüestionament pot anar des de: 1) La negació de tot ésser transcendent respecte dels continguts immanents de la consciència, 2) O bé, atenuadament, l'agnosticisme teòric sobre aquesta transcendència, 3) O més atenuadament encara, l'agnosticisme sobre la possibilitat que els continguts immanents de la consciència siguin homeomòrfics a objectes transcendents, sense posen en dubte l'existència del món transcendent.

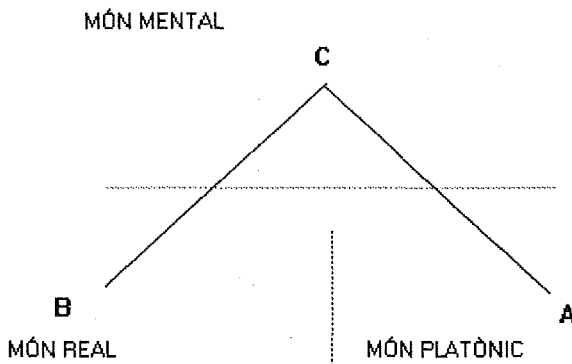
El representacionalisme se sol relacionar amb la metàfora del mirall, mentre que el no-representacionalisme se sol relacionar amb la metàfora de la construcció. En la metàfora del mirall se suposa que existeix una sèrie d'objectes del món real que es reflecteixen en la ment de les persones, mentre que la metàfora de la construcció considera que les persones construïm i modelem el nostre món d'experiències conjuntament amb les altres persones. En la metàfora del mirall, les categories del món real es reflecteixen en la ment, mentre que en la metàfora de la construcció es considera que el nostre món d'experiències no està categoritzat d'antuvi per "la realitat" sinó que es categoritza d'una forma o altra a mesura que les persones parlen, escriuen i discuteixen sobre ell.

1.4 Representacionalisme

La significació se sol considerar com una relació ternària, analitzable en tres relacions binàries, dues de directes i una d'indirecta. El triangle d'Ogden i Richards (1964/1923) il·lustra aquestes relacions



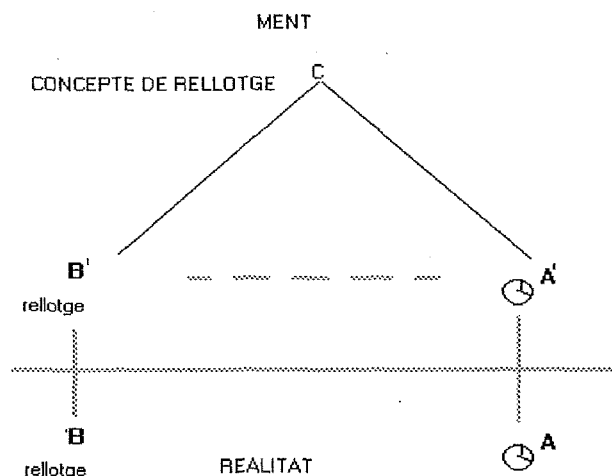
En aquest triangle es considera que l'objecte \odot (A) és el "referent" (significatum), la paraula escrita rellotge (B) el "significant" (signe o símbol) i el concepte de rellotge (C) el "significat" (referència). La relació entre B i A és indirecta per mitjà del concepte. Si considerem que existeix un concepte matemàtic A en algun món platònic, el concepte A seria el referent, B el significant matemàtic i C el concepte matemàtic individual del subjecte.



De moment, considerarem com a referent una classe general d'objectes que es poden considerar exteriors al subjecte i pertanyents al món de les coses reals, com per exemple la classe dels rellotges. D'aquesta manera esquivarem, de moment, el problema de l'existència dels conceptes matemàtics. Aquesta anàlisi ternària del procés de significació planteja moltes qüestions que poden generar considerables desacords. Per exemple: Què és allò que s'entén per significat del concepte C? S'ha de definir el significant B com a entitat física o mental? Quin és l'estatus psicològic o ontològic del concepte C? El referent A, és un referent particular, és una classe d'objectes, o més aviat és un representant prototípic d'aquesta classe? L'objecte A genera una imatge mental A'? Si

la genera, quina diferència hi ha entre l'objecte A i la seva imatge mental A' ? Quina relació hi ha entre el concepte C i la imatge mental A' ? etc.

Al llarg d'aquest treball intentarem comentar diferents posicionaments respecte a les preguntes anteriors. Començarem amb les següents: S'ha de definir el significant B com a entitat física o mental? L'objecte exterior A genera una imatge mental A' ? L'opció epistemològica que considerarem primer, la "representacionalista", pressuposa que les persones tenen una ment en la qual es produeixen processos mentals i que els objectes externs a les persones generen representacions mentals internes. És a dir, l'opció representacionalista pressuposa que tant el referent com el significant tenen un equivalent en la ment del subjecte que les utilitza. A partir d'aquest postulat el triangle d'Ogden i Richards es transforma en el pentàgon següent:



En aquest pentàgon B' , A' i C es consideren, en un sentit ampli, representacions mentals, B es considera una representació externa d' A , mentre que A es considera un objecte exterior al subjecte. Des d'aquest punt de vista, la ment es considera com un mirall en què es reflecteixen els objectes del món exterior existint una relació de tipus especular entre l'objecte exterior (B i A) i la seva representació mental (B' i A').

Convé clarificar els diferents sentits que implícitament estem donant, de moment, a la paraula representació. D'una banda, estem considerant la representació com un objecte, mental (B' , A' , C) o real (B); i, per l'altra, l'estem considerant com un procés d'exposició d'un cert objecte amb l'ajut d'un altre objecte, és a dir, com una relació entre dos objectes. Aquesta relació pot ser una relació entre objectes del mateix món -per exemple quan considerem que B representa A (objectes del món exterior) o que B' representa A' (objectes mentals) - o una relació entre móns diferents, quan considerem que A' (objecte mental) representa A (objecte exterior). Aquestes dues maneres d'entendre el procés de representació tenen una càrrega ontològica molt diferent. La relació entre objectes del mateix món (relació horitzontal) és una manera dèbil i força admesa de considerar la representació, ja que es refereix a tot allò que es pot interpretar a propòsit d'una altra cosa. Aquest és el concepte de representació com "interpretació",

car res és a propòsit d'una altra cosa si no la interpreta en certa manera. La relació entre objectes de móns diferents (relació vertical) és una manera molt més forta d'entendre la representació, ja que pressuposa una realitat exterior i la seva corresponent imatge mental, així com una determinada manera d'entendre la percepció, el llenguatge i la cognició. La versió dèbil de representació (relació horitzontal entre objectes del mateix món) és acceptada tant pels representacionalistes com pels no-representacionalistes. En relació a la versió forta (representació homeomòrfica entre objectes de móns diferents) el no-representacionisme es mostra, com a mínim, agnòstic, mentre que per al realisme representacional és la hipòtesi bàsica.

1.5 Les representacions mentals en la filosofia moderna

Donat que la versió forta de representació -relació homeomòrfica entre objectes de móns diferents- és la que resulta problemàtica, començarem exposant-ne alhora la gestació i el qüestionament, amb un breu recorregut per determinats passatges de la filosofia moderna.

1.5.1 Racionalisme

La idea de "ment" com a entitat en què tenen lloc els "processos mentals" apareix especialment en l'obra de Descartes, quan suposa que l'organisme humà està compost d'una mica de "res cogitans" associada no-espacialment amb una mica de "res extensa". Descartes, com a màxim exponent del racionalisme del segle XVII i XVIII, tenia una profunda confiança en la raó com a instrument per a descobrir els processos que operen en la naturalesa. Per als racionalistes, els sentits tenen algun paper a jugar en el coneixement, però és secundari respecte al de la raó. El racionalisme posa l'emfasi en la importància del raonament per arribar al nostre coneixement i, més en concret, intenta proporcionar certesa al nostre coneixement.

Descartes (1595/1650) contemplava la possibilitat que estigués sota el control d'un geni maligne tal que els seus esforços estiguessin dirigits a enganyar-lo tot el que fos possible. Es va plantejar aquesta hipòtesi per netejar la seva ment de totes les proposicions dubtoses que no haguessin estat demostrades completament. D'acord amb el programa que s'havia marcat, es va plantejar el problema de l'existència d'una realitat exterior analitzant la relació que hi ha entre el món somniat i el món de la vigília. A diferència de les persones normals, que consideren que el món que han somiat és un producte de la seva imaginació, Descartes, després d'estudiar i reflexionar sobre els somnis, arribà a la conclusió que no hi havia una diferència de naturalesa entre l'objecte del món de la vigília i l'objecte somniat. Aquesta conclusió el va obligar a considerar la possibilitat d'igualar la vigília al somni, o allò que és igual, a considerar que el món exterior de la vigília fos un producte de la seva imaginació, i per tant un producte mental. Llavors va haver de recórrer a un Déu "veritable" perquè li garantís l'existència d'un món exterior.

El problema que es va plantejar Descartes sorgeix perquè un món purament somniat

resulta tan exterior al jo somniat que protagonitza el somni, com el món de la vigília és exterior al jo despert. El problema s'aguditza si tenim en compte que tant el jo somniat que protagonitza el somni, com el jo despert que protagonitza l'estat de vigília, se senten immersos dins d'aquests móns dels quals senten que són els subjectes que els perceben. D'una banda, aquests subjectes percebents s'han de sentir estar fora d'aquest món que perceben com a exterior, mentre que per l'altra es perceben a ells mateixos com a objecte percebut que forma part integrant d'aquest món percebut com a exterior. Per tant, el subjecte de percepcions s'ha de desdoblar per estar al mateix temps dins i fora del món que protagonitza, en el primer cas com a objecte percebut i en el segon com a subjecte que percep. Fent una analogia, seria com l'ampolla que se sent surar en el líquid que conté. El problema de passar del món exterior al món interior de les representacions mentals juntament amb el problema de saber si aquestes representacions eren exactes ha estat un tema central per a la filosofia moderna i per a la psicologia.

1.5.2 Empirisme

Si bé la idea de la "ment" com a entitat en la qual tenen lloc els "processos mentals" arrenca de Descartes, van ser sobretot els empiristes del segle XVII, especialment Locke, els que van desenvolupar la "teoria del coneixement" com una teoria basada en la comprensió dels processos mentals. Aquest filòsof era molt amic de Boyle i estava ben informat de la fisiologia dels òrgans sensorials i sabia que la sensació visual és un procés que afecta els següents elements: 1) l'objecte extern, 2) els raigs de llum que es reflecteixen de l'objecte i afecten l'ull, 3) els processos fisiològics, i 4) finalment, la imatge visual, o, en el llenguatge de Locke, la idea, creada per aquests processos. En distingir Locke (1650/1690) entre l'objecte extern en si i la imatge visual o idea, crea el problema ontològic de la duplicitat de l'existència, ja que es tenen dues entitats fonamentalment diferents: objectes (que existeixen independentment de ser percebuts i, per tant, existeixen objectivament) i idees (que existeixen sols en la ment del perceptor i, per tant, existeixen només subjectivament). Locke parteix del principi que l'objecte existent exterior és la causa de la percepció, i que aquesta és la representació mental de l'objecte exterior. En aquest principi coincideixen amb molts altres filòsofs i científics. Per a molts filòsofs i científics saber és representar amb precisió allò que hi ha fora de la ment. Entendre així la naturalesa del coneixement és entendre la manera com la ment és capaç de construir tals representacions.

La manera com la ment és capaç de construir les representacions mentals fou explicada per Locke d'acord amb la ciència del seu temps. Locke considera que les qualitats primàries d'un objecte (extensió, forma, solidesa i moviment) són qualitats sense les quals no podríem concebre'l, i per tant, podem inferir que les idees primàries són còpia de les qualitats primàries. En canvi, no hi ha similitud entre les qualitats secundàries i les idees secundàries (color, so, olor i sabor). Aquest punt de vista és fàcilment acceptat pel sentit comú. Per exemple, la forma de la cadira és de la cadira, però el color verd o vermell de la cadira depèn que el subjecte que s'hi asseu porti ulleres verdes o roges, sigui daltonià, etc. El punt de vista de Locke permetia considerar, per una part, una realitat exterior

objectiva al subjecte, i per l'altra, era coherent amb l'explicació que donava la ciència del funcionament de la visió.

N'hi ha prou de canviar la direcció en la relació "objecte \Rightarrow idea de l'objecte" per adonar-se d'allò que és un determinat tipus de fenomenisme no-representacionista. Si l'existent és la causa de la percepció, segons Locke, basta considerar la relació a l'inrevés i considerar que allò percebut és allò que existeix. Segons Locke, el món real té una existència que només podem inferir; és la causa desconeguda de les nostres percepcions. Per a Berkeley (1985/1710), el món que percebem és el món real. Segons Berkeley la cadira que veig, que toco, en la qual m'assec no és la idea d'una cadira exterior que produeix les sensacions de cadira que tinc, sinó que la suma d'aquestes sensacions és allò que produeix la cadira material i sensible que és percebuda. No hi ha un objecte exterior que sigui la causa de les sensacions sinó que l'objecte és la suma de les sensacions. Per a Berkeley, el món material i sensible de la nostra experiència és un producte mental, ja que la matèria no és més que una simple suma de sensacions i de les inferències inconscients que sempre les acompanyen. En postular el principi "existir és poder ser percebut", Berkeley inicià una certa forma de fenomenisme que es pot caracteritzar de la manera següent: el món que existeix és el món dels fenòmens que percebem. Com que seria absurd mantenir que el món que considerem ingènuament que existeix amb independència de nosaltres deixa d'existir quan deixa de ser percebut, les condicions per a l'existència passen de ser una percepció actual, a ser una percepció potencial: la condició per a dir que quelcom existeix no és que sigui percebut de fet, sinó que en determinades condicions pugui ser percebut.

La mateixa anàlisi que Berkeley havia fet a la causa que produeix les sensacions (els objectes de Locke), Hume (1981/1739-1740) la va aplicar a la ment que percep els objectes (la solució que dona Berkeley després de la seva anàlisi crítica sobre els objectes exteriors de Locke). De la mateixa manera que Berkeley arribà a la conclusió que no hi ha un objecte que produeixi les sensacions sinó que l'objecte és la suma de les sensacions, Hume arribà a la conclusió que no hi ha una ment que generi les percepcions dels objectes sinó que allò que hi ha és un conjunt de vivències, la suma de les quals és allò que considerarem ment. Aquesta anàlisi va portar a Hume a considerar que no podia anar més enllà de les seves percepcions i, per tant, no podia dir si les percepcions són creades per una ment o per algun objecte extern. Aquesta conclusió portà a Hume a un escepticisme radical.

L'empirisme de Locke, Berkeley i Hume suposa que la base del coneixement són les impressions sensibles, però mentre que els dos primers solament utilitzen el terme idea, Hume utilitza dos termes: impressions i idees. Hume considerava que el coneixement humà està constituït exclusivament d'impressions i d'idees. Les impressions serien les dades primitives rebudes a través dels sentits, mentre que les idees serien còpies que recull la ment d'aquestes mateixes impressions, que perdurarien un cop esvanides aquestes. Per tant, l'origen del coneixement serien les sensacions, fins al punt que cap idea podria contenir informació que no hagués estat recollida prèviament pels sentits. Però les

idees no tenen valor en si mateixes, ja que el coneixement opera mitjançant l'associació d'idees segons els principis de semblança, contigüitat espacial i temporal, i causalitat.

1.5.3 Constructivisme

Kant intentà una síntesi entre les tradicions racionalistes i les empiristes. Estava d'acord amb Hume i altres empiristes en la idea que el nostre coneixement de la naturalesa depèn de l'experiència i que no es descobreix raonant sobre les nostres idees innates. Ara bé, va considerar que l'escepticisme de Hume era conseqüència inevitable de l'adhesió al principi empirista, que intentava extreure tot el coneixement de l'experiència. La seva solució va consistir a donar la volta a la relació de les persones amb el món real. En lloc de suposar que els objectes existeixen independentment de nosaltres, i preguntar-nos després com podem conèixer-los, Kant (1784/1764) sostenia que les nostres activitats cognitives eren parcialment constitutives dels objectes dels quals tenim experiència. Mantenia, a més, que és precisament la nostra pròpia participació en la construcció dels objectes de percepció allò que fa possible que coneguem. En explicar com la nostra activitat cognitiva és constitutiva dels fenòmens que experimentem, Kant subscriu en part l'enfocament racionalista. Afirmava que la nostra capacitat de percebre i de pensar sobre la naturalesa depenia de conceptes o categories de l'enteniment que aportem a l'experiència, categories que posem de manera innata. Aquestes categories s'han d'aplicar a l'input sensorial que rebem, per constituir un món d'experiència. Per tenir experiència d'un objecte, l'intel·lecte ha d'aplicar les categories als nostres inputs sensorials.

Kant mantenia que els objectes que donen lloc a les experiències sensorials (que anomena "coses en si") són incognoscibles per a nosaltres; per tant, no té sentit investigar què són. D'altra banda, els objectes de l'experiència fenomènica, els que es construeixen aplicant les categories als estímuls sensorials, estan dins del nostre domini de coneixements. Com que aquests objectes s'han construït d'acord amb les nostres categories, podem estar segurs que s'adhereixen a llurs principis. Per exemple, com que construïm el món de manera que cada esdeveniment tingui una causa, sabem amb certesa que tot esdeveniment té una causa. Normalment s'utilitzen els termes "noumen" per a referir-se a la "cosa en si" i "fenomen" per a referir-se a la "cosa en mi". De l'obra de Kant, ens interessa constatar que: 1) El món noumènic queda despulat de les categories, 2) Les categories les aporta el subjecte, 3) Les categories són innates i 4) el món fenomènic deixa de ser concebut com a representació passiva de la realitat exterior i, en el seu lloc, és vist com una construcció activa, que és el resultat de la interacció entre el subjecte (provist de les seves categories) i les seves experiències sensorials.

En considerar que hi ha un món noumènic sense categories Kant deixa com a llegat als seus successors una realitat exterior que serveix de molt poc, per la qual cosa no és d'estranyar que els filòsofs posteriors a ell o bé renunciïn a aquest món noumènic, o bé intentin retornar-li les categories. La renúncia al món noumènic ens porta a algun tipus de no-representacionalisme, mentre que l'intent de tornar a situar les categories en el món noumènic ens porta cap a algun tipus de realisme representacional. Dit d'una altra manera,

les opcions constructivistes, com qualsevol opció centrista, estan sotmeses a una tensió interna que les orienta cap als extrems: un constructivisme radical de tipus no-representacional o bé un constructivisme de tipus representacionista realista. En l'intent de tornar a situar les categories en el món noümic s'han aplegat totes les concepcions posteriors a Kant que consideren que l'objectiu de la ciència és donar una descripció de les determinacions del món exterior. En l'intent de prescindir del món noümic s'aplegaren concepcions que consideren que el coneixement és un instrument que serveix per a organitzar el món de les nostres experiències ⁴.

El punt de vista kantianista permet una alternativa ontològica al platonisme: "el constructivisme". Per a Kant, les matemàtiques són el resultat d'una construcció "a priori", que les persones imposem a la realitat física, i alguns dels seus resultats són sintètics a priori (veritats necessàries no tautològiques). És a dir, fins i tot abans de l'experiència, alguns judicis matemàtics ens permeten conèixer com han de ser les coses en la naturalesa. Per a Kant, alguns axiomes de la geometria eren sintètics a priori. L'aparició de les geometries no euclídees va tirar per terra la suposició que les categories a priori de l'espai que ell considerava eren necessàries. Aquest fet va tenir diverses conseqüències. La primera fou abandonar l'apriorisme kantianista de l'espai, mantenint però l'apriorisme temporal. Aquest fou el punt de vista adoptat per l'intuicionisme de Brouwer: *"Aunque la posición del intuicionismo parecía débil después de este período (siglo XIX) de desarrollo matemático, se ha recuperado abandonando el apriorismo kantiano del espacio, pero adhiriéndose más resueltamente al apriorismo del tiempo. Este neointuicionismo considera el desmembrarse de los momentos vitales en partes cualitativamente distintas -que solamente pueden ser reunidas si han sido previamente separadas por el tiempo- como el hecho primigenio del entendimiento humano; y considera el despojar este desmembramiento de todo contenido sentimental en orden a intuir la simple unidad de dos como hecho primigenio del pensar científico"* (Brouwer citat en Dou 1974 pàg. 116). La matemàtica intuicionista parteix dels nombres naturals, els quals considera construïts a partir de l'apriorisme temporal de l'ésser humà.

Una opció més radical porta a abandonar la suposició que l'activitat constitutiva del subjecte porti a veritats necessàries, és a dir la renúncia a la pretensió que hi ha un conjunt de categories que obligatòriament hem d'usar per organitzar el món fenomènic. Aquesta renúncia es va fer molt ràpidament en el món anglosaxó i molt més lentament en la filosofia europea.

L'opció ontològica que en aquesta memòria anomenarem "constructivisme" considera que els objectes matemàtics són construccions (personals i socials) que no impliquen cap mena de veritat pel que fa al món exterior (a diferència de Kant). El constructivisme s'ha entès de moltes maneres i és el principi bàsic de l'escola que en filosofia de les matemàtiques s'anomena "intuicionisme". En aquesta memòria, més que l'escola intuicionista, ens interessaran altres versions del constructivisme, que considerem més influents per a l'educació matemàtica actual. Aquestes són:

1) El constructivisme social que, en la síntesi formulada per Ernest (1991, 1992, 1994 i

1998), proposa que el coneixement individual d'un objecte matemàtic i l'objecte matemàtic són mútuament interdependents, i es reconstrueixen l'un a l'altre mitjançant la interacció interpersonal que es vehicula a través de diferents tipus de representacions (lingüística, simbòlica, icònica, etc) i de diferents pràctiques socials.

2) El constructivisme radical (Glaserfeld 1991 i 1995, Watzlawick 1993) que considera que el coneixement és una funció adaptativa que serveix per a organitzar el món de les nostres experiències, i no per a representar un món objectiu que existeix independentment de la nostra experiència.

3) El punt de vista constructiu de Piaget (1978a). Aquest tipus de constructivisme considera que les matemàtiques són la construcció mental que resulta de l'assimilació de la realitat a les operacions sorgides de l'acció. Piaget diferencia la construcció matemàtica del descobriment i de la invenció, i diu que el coneixement matemàtic és una construcció que no és una invenció ni un descobriment, però que, en certa manera, aquesta construcció té quelcom de descobriment, ja que, com a resultat d'un procés evolutiu de l'espècie, tots estem en condicions de construir el mateix coneixement; i també hi ha quelcom d'invenció perquè les construccions matemàtiques poden anar en direccions molt diferents.

L'epistemologia genètica de Piaget, igual que la filosofia kantiana, pretén ser una síntesi entre l'empirisme i el racionalisme. Piaget considera que les proposicions de les matemàtiques són veritats necessàries, mentre que les de les ciències de la naturalesa depenen de l'experiència. Ara bé, Piaget pretén aportar l'explicació psicològica adequada per mostrar com les proposicions lògica-matemàtiques són adquirides també a partir de l'experiència sense que aquesta gènesi empírica comprometi el seu valor universal i necessari. Piaget considera que no és cert que l'activitat cognitiva del subjecte extregui els universals de l'experiència a partir de l'abstracció per comparació (punt de vista empirista) ni tampoc ho és que el coneixement universal i necessari sigui el resultat de l'activitat constitutiva del subjecte en l'acte de coneixement en virtut d'idees innates o bé d'estructures a priori presents des del principi en qualsevol subjecte (punt de vista racionalista). Piaget considera que les estructures de coneixement que fan que les proposicions de les matemàtiques siguin veritats necessàries són el resultat d'un procés, que comença amb l'etapa sensomotriu i acaba en l'etapa de pensament formal, que té per objectiu l'adaptació del subjecte al món que l'envolta.

La filosofia de Kant també permet una reformulació del platonisme adaptant-lo a la distinció noümen/fenomen. En la filosofia kantiana, els fenòmens són allò que ens apareix de les coses en el món sensible, mentre que els noümens són allò que en la postura realista hom qualifica de real. Vista d'aquesta manera, la contraposició fenomen/noümen és una contraposició entre móns, el món d'allò sensible i el món hipotètic d'allò real. D'aquesta manera podem distingir els fenòmens del món sensible que organitza un concepte matemàtic i els sistemes de signes matemàtics que el representen en el món sensible del noümen, que és el concepte matemàtic que pertany a aquest món real hipotètic, encara que amb una realitat diferent dels objectes com les pedres, els arbres, etc. D'aquesta manera podem adaptar la distinció noümen/fenomen als objectes matemàtics sense posar

en qüestió la seva existència independent de les persones. Convé clarificar que quan considerem l'existència dels objectes matemàtics, ho fem en el sentit absolut del terme i no en el relatiu, és a dir, no ens preguntem, per exemple: existeix un nombre primer entre 22 i 26? Allò que considerem és si existeixen els nombres primers. Carnap (1981) distingeix, en relació a l'existència d'entitats abstractes, dos tipus de qüestions: les internes i les externes: <<(..). Si alguien quiere hablar en su lenguaje acerca de un nuevo tipo de entidades, tiene que introducir un sistema de nuevas maneras de hablar, sujeto a nuevas reglas; llamaremos a este procedimiento la construcción de un marco "lingüístico" para las nuevas entidades en cuestión. Y en este momento debemos distinguir dos tipos de cuestiones de existencia: en primer lugar, cuestiones acerca de la existencia de ciertas entidades del nuevo tipo dentro del marco; llamaremos a éstas "cuestiones internas"; y, en segundo lugar, cuestiones concernientes a la existencia o realidad "del sistema de entidades como un todo", a las que llamaremos cuestiones externas. Las cuestiones internas y las respuestas posibles a ellas se formulan con ayuda de las nuevas formas de expresiones. A las respuestas se puede llegar o bien por métodos puramente lógicos, o bien por métodos empíricos, según que el marco sea lógico o fáctico. Las cuestiones externas tienen un carácter problemático que exige un análisis más ajustado.>> (Carnap, 1981, pàg. 402). L'existència interna (relativa) dins d'un determinat marc lingüístic és una problemàtica diferent de l'existència (absoluta) del sistema d'entitats com un tot.

1.6 Pragmatisme

Un dels punts més febles de la filosofia de Kant era la suposició que les categories eren innates. Kant partia d'un subjecte que ja era un adult, dotat amb unes categories innates, i no es plantejava si aquestes es modificaven al llarg de la vida de les persones. Entre les diverses modificacions de l'enfocament de Kant, una de les més influents fou el desenvolupament del "pragmatisme", particularment per mitjà de l'obra de C.S. Peirce. El pragmatisme renuncia a considerar que l'activitat constitutiva del subjecte porti a veritats necessàries. El pragmatisme renuncia a la pretensió que hi ha un conjunt de categories que obligatòriament hem d'usar per organitzar el món fenomènic, i proposa com a alternativa que el conjunt de categories que usem guanya legitimitat en la mesura en què prova que és fructífer en el nostre intent de desenvolupar teories adequades de la naturalesa. Pierce, en 1878, en el seu article "How to make our ideas clear", va formular el punt de vista pragmàtic sobre el significat, de la manera següent: per captar el significat de les idees que utilitzem, hem de considerar els efectes d'abast pràctic que creguem que puguin ser produïts per elles, ja que la concepció que tenim d'aquests efectes pràctics és el tot de la nostra concepció de la idea. Aquest punt de vista va passar desapercbut durant vint anys fins que va ser recollit per James (1890/1907). En aquesta memòria d'investigació, hem tingut molt en compte la manera pragmàtica d'entendre el significat, i la seva influència és evident en la hipòtesi H2.

La hipòtesi H2 es basa en la suposició que els sistemes matemàtics de signes ostensius que es manipulen a l'aula adquireixen significat per als alumnes en ser usats a l'aula. Des

d'aquest punt de vista direm que un alumne ha comprès un determinat contingut quan l'usa de manera competent en diverses pràctiques. Aquest punt de vista implica entendre la comprensió i el significat com una capacitat que té l'alumne més que no pas com un procés mental que es produeix en la seva ment quan usa el contingut. La capacitat es tradueix en pràctiques que són avaluables públicament, mentre que el procés mental és una experiència privada de la persona. Dit d'una altra manera, optar per una visió pragmàtica del significat implica focalitzar l'interès en les pràctiques públiques i deixar en segon lloc l'interès pels processos mentals de les persones (que com a molt es poden considerar pràctiques privades). El punt de vista pragmàtic, portat a l'extrem, pot implicar situar-se en l'anticognitivism i ens pot portar a deixar de banda totes les aportacions que ha fet la psicologia cognitiva. Convé remarcar que aquest no és el nostre cas, ja que considerem que tenir en compte les aportacions que ha fet la psicologia cognitiva sobre els processos mentals, encara que sigui de manera secundària, té una certa utilitat per a la didàctica de les matemàtiques.

Pot semblar d'entrada que el punt de vista pragmàtic sobre el significat no és adequat en matemàtiques. Així ho creu Bunge: "*Aun así, todas las interpretaciones pragmáticas de los símbolos matemáticos son adventicias, pues el objeto de la matemática es abstraer de utilizadores y circunstancias a fin de lograr a la par la universalidad y la libertad respecto de su compromiso con los hechos*" (Bunge 1982, pàg. 71). Bunge posa l'exemple següent per il·lustrar les interpretacions pragmàtiques en matemàtiques: *Una interpretación estricta de la expresión "z*", donde z designa un número complejo, es ésta: "z*" significa la parte real de z. (Esta regla de designación podría ser reemplazada por una definición.) En contraste, una interpretación pragmática del mismo símbolo es ésta: "Todo el que se enfrenta con el símbolo "z*" debe invertir el signo de la parte imaginaria de z". Una segunda interpretación pragmática de "z*" se da bajo la forma de regla o prescripción: "Para computar z* a partir de z, inviértase el signo de la parte imaginaria de z". Una tercera lectura pragmática del mismo símbolo sería una instrucción capaz de ser puesta en su computador de suerte tal que posibilite el manejo del símbolo. Toda interpretación pragmática de un símbolo lógico o matemático puede concebirse como una instrucción para el manejo (v.g. cómputo) del símbolo de modo efectivo.*" (Bunge 1982, pàg. 71-72). En la seva crítica a les interpretacions pragmàtiques dels sistemes de signes matemàtics, Bunge fa algunes observacions força interessants sobre les condicions perquè la interpretació matemàtica d'un signe sigui vàlida.

Tal com fa observar Bunge, donat un símbol matemàtic, es pot esperar diverses interpretacions pragmàtiques segons l'utilitzador, les circumstàncies i les metes. Per tant, només un subconjunt de les interpretacions pragmàtiques serà vàlid, per la qual cosa es necessita un criteri de validesa. Si considerem, tal com ho hem fet en la hipòtesi H2, que el significat personal d'un contingut matemàtic és el sistema de pràctiques personals que realitza un alumne per resoldre el camp de problemes del qual ha emergit el contingut personal, el criteri de validesa és molt fàcil de trobar, ja que l'aporta el professor. És a dir, el professorat determina quines són les pràctiques vàlides i corregeix les que no ho són. Aquest criteri de validesa l'hem formulat en la hipòtesi H2 mitjançant el constructe

“significat a priori d’un contingut matemàtic per a un subjecte des del punt de vista de la institució escolar” de la manera següent: significat a priori d’un contingut matemàtic per a un subjecte des del punt de vista de la institució escolar és el subsistema de pràctiques personals associades a un camp de problemes que són considerades en la institució escolar com a adequades i característiques per a resoldre aquests problemes. Ara bé, el professorat (institució) no utilitza qualsevol criteri per determinar si una pràctica és vàlida o no ho és, sinó que ho fa a partir d’una “teoria”. Per tant, la interpretació pragmàtica del significat topa amb el problema de “l’objectivitat de la teoria” que s’utilitza com a criteri de validesa. Si no es pot explicar des d’un punt de vista pragmàtic “l’objectivitat de la teoria”, la interpretació pragmàtica del significat resulta ser molt limitada. En la hipòtesi H2 hem resolt el problema de l’objectivitat de la teoria amb el constructe “significat institucional” de la manera següent: Significat institucional d’un contingut matemàtic és el sistema de pràctiques associades al camp de problemes del qual ha emergit el contingut institucional. Ara bé, per arribar a acceptar un constructe d’aquest tipus, cal donar una justificació molt argumentada, ja que la filosofia, i més en concret la filosofia de la ciència, ha necessitat fer un llarg recorregut per arribar a formulacions d’aquests tipus.

L’explicació des d’un punt de vista pragmàtic de “l’objectivitat de la teoria” és un tema complex que anirem tractant en els apartats següents. És un tema complex perquè l’objectivitat (certesa o veritat necessària) és un objectiu que les ciències pretenen aconseguir fent abstracció dels utilitzadors. L’acceptació de l’explicació pragmàtica de “l’objectivitat de la teoria” només és possible si prèviament s’ha abandonat, qüestionat o bé s’ha posat entre parèntesis com a mínim: 1) la suposició que la ciència ens ofereix còpies cada cop millors d’una realitat que té les seves pròpies determinacions, 2) la teoria referencial del significat i 3) la suposició que l’activitat constitutiva del subjecte porta a veritats necessàries.

1.7 Representacions lingüístiques i figuratives

Al segle XIX es parlava molt de la imatge mental, i els psicòlegs empiristes explicaven tota la vida psíquica per aquesta entitat. Per a la psicologia clàssica, d’inspiració empirista en aquest punt, la imatge mental és el residu de la percepció, un reflex de l’objecte que persisteix en la nostra consciència. La imatge mental és una empremta de la percepció arxivada en la memòria. La imatge és assimilada a una reproducció de l’objecte percebut, dipositada en la memòria, com una fotografia en un àlbum. Per als psicòlegs empiristes, les imatges mentals es consideren una representació mental igual que els conceptes i les paraules pensades que els designen, però consideren que l’origen de les representacions mentals són les dades dels sentits. Aquestes produeixen imatges mentals, les quals, per mecanismes associatius, generen els conceptes. Segons aquest punt de vista, si considerem el procés de significació d’Ogden i Richards (1964) a la inversa, quan se sent la paraula rellotge, la primera cosa que ve a la ment són imatges de rellotges o bé experiències anteriors en què intervenen rellotges, les quals permeten explicar amb paraules el significat de la paraula rellotge. Un dels llegats de l’empirisme fou el principi

que la ment opera principalment associant idees simples a partir de l'experiència. Aquest principi proporcionarà la base per a una perdurable tradició que la psicologia reconeix com "associacionisme".

Els dos exemples de representacions mentals que hem considerat fins ara són les imatges mentals i els conceptes. La imatge mental és una representació mental de l'objecte, ja que hi manté una relació icònica, mentre que els conceptes i les proposicions són representacions mentals que ens permeten dir coses de l'objecte. El fet que la imatge mental ens doni un coneixement "de" i que els conceptes i proposicions ens donin un coneixement "que.", posen de manifest que estem considerant dos tipus de representacions distintes: "lingüístiques i figuratives". Un discurs verbal genera una representació lingüística en l'oient, mentre que els textos escrits generen alhora representacions lingüístiques i figuratives, ja que estan configurades espacialment i són "vistes" per les persones.

Actualment el paper que juguen les imatges visuals i la capacitat de visualització en la comprensió dels continguts matemàtics ha estat objecte d'estudi per part d'investigadors procedents tant del camp de la psicologia com del camp de la didàctica de les matemàtiques (Bishop 1996, Bosch 1994, Castro i Castro 1997, Davis 1993, Cunningham i Zimmermann 1991, Dreyfus 1994, Fischbein 1993, Gorgorió i Jones 1997, Gray i Tall 1994, Guzman 1996, Presmeg 1986, 1997 i 1999, Tall 1996 i 1998). Aquests estudis s'han fet des de marcs teòrics diferents i en alguns casos enfrontats.

1.8 L'anàlisi referencial del significat

A principis del segle XX va augmentar considerablement l'interès filosòfic per les representacions de tipus lingüístic. La preocupació pel significat de les paraules i les oracions del llenguatge es troba en les obres de Frege, Russell i el primer Wittgenstein. Aquests filòsofs van fer de la referència, el fenomen consistent en què les paraules es refereixen a quelcom en el món, el punt central de les seves anàlisis del significat.

En el *Tractatus* (1981/1921) Wittgenstein diu que el món consisteix en la totalitat dels esdeveniments, és a dir, en la totalitat dels fets. Un fet és un existent qualsevol, al qual pertany una determinació (propietat, activitat o relació), i, per tant, s'expressa en els judicis mitjançant la forma: x pertany la propietat y . Wittgenstein considerava que existeixen fets complexos que contenen en ells mateixos una multiplicitat d'altres fets. Els fets simples, no susceptibles de ser descompostos en altres fets s'anomenen "fets atòmics"; aquests s'expressen en proposicions "elementals", les quals sempre són particulars i mai són generals. Un fet atòmic es compon també de parts que s'anomenen "objectes". Com que el fet és una concatenació d'objectes, la proposició que l'expressa és una concatenació de "noms".

"L'estructura" d'un fet és el resultat de la naturalesa i combinació dels objectes que el constitueixen, mentre que "l'estructura" d'una proposició és el resultat de la naturalesa

i combinació de les paraules o símbols que la constitueixen. Quan l'estructura de la proposició es correspon amb l'estructura del fet, la proposició és vertadera. El simbolisme lògic és considerat l'instrument més apte per a determinar l'estructura de les proposicions de tal manera que es corresponguin amb l'estructura dels fets. Wittgenstein, per explicar tal correspondència, compara l'expressió lingüística amb la projecció geomètrica: una figura geomètrica pot ser projectada de moltes maneres, i cada una d'elles es correspon a un llenguatge distint. La figura projectada és distinta de l'original, però ha d'existir una relació biunívoca entre els punts de l'original i els de la projecció. Ha d'existir quelcom en comú en la simbolització i en allò simbolitzat, a fi que l'un pugui ser la simbolització de l'altre. Allò que hi ha de comú entre la proposició i el fet és l'estructura lògica, és a dir, la manera com se succeeixen, canvien i combinen entre si els elements de les proposicions, juntament amb els elements constitutius del fet. Per tant, és necessari un simbolisme lògic científicament perfecte i unes regles sintàctiques per a preveure els equívocs i els sense sentits, de manera que el significat dels símbols usats en un determinat raonament sempre sigui el mateix.

En el discurs extensional la relació de referència entre els noms lingüístics dels objectes i els objectes mateixos és absolutament fonamental. Però aquesta relació resulta problemàtica en alguns casos. Un dels casos problemàtics té a veure amb judicis sobre objectes no existents tals com: "El quadrat rodó no existeix" o la "Muntanya d'or no existeix". L'expressió "quadrat rodó" o "muntanya d'or" són els subjectes d'aquestes oracions, i sembla que ens estem referint a un quadrat rodó o a una muntanya d'or. Ens referim a un objecte del qual afirmem l'existència en el mateix acte de negar la seva existència.

1.9 Sentit i referent.

En buscar el significat d'una paraula o d'un concepte en el referent es deixa en un segon pla les relacions que el lliguen amb altres conceptes. Frege (1973/1892) va introduir la diferència entre sentit i referent d'un terme. El referent és l'objecte anomenat o al qual es fa referència, mentre que el sentit és la manera de presentació. Posarem l'exemple de la mediatriu per il·lustrar la diferència entre sentit i referent. Podem definir la mediatriu d'un segment com la perpendicular que passa pel punt mitjà o com el lloc geomètric format per tots els punts equidistants dels extrems. En cada definició relacionem el concepte de mediatriu amb conceptes diferents però ens estem referint al mateix referent. Ara bé, per a moltes persones, les dues definicions poden tenir sentits diferents perquè la manera de presentació (la connexió amb altres conceptes) permet considerar que cada una d'aquestes definicions té un referent diferent. Entendre que les dues definicions són equivalents informa que dues definicions, el sentit de les quals s'ha fixat d'antuvi, de manera que puguin referir-se a objectes diferents, es refereixen al mateix objecte.

De la distinció entre sentit i referent es desprèn una conseqüència important: en la formació del significat dels conceptes, no solament s'han de considerar els exemples del concepte que són el seu referent, sinó que s'han de considerar també les relacions que el

lliguen amb altres conceptes. Aquesta conseqüència avui dia està àmpliament acceptada i es coneix com el principi reticular del significat.

1.10 La crítica al punt de vista referencial.

Després d'haver seguit l'anàlisi referencial del significat durant un temps, Wittgenstein va qüestionar aquest tipus d'anàlisi. Aquesta revisió culminà en les "Investigacions filosòfiques", llibre publicat pòstumament en 1953. En aquesta exposició dels seus nous punts de vista filosòfics, Wittgenstein renuncia al simbolisme lògic com a mètode per a tractar els problemes filosòfics, argumentant la infecunditat i la inaplicabilitat del simbolisme lògic i de les anàlisis abstractes del llenguatge en els complexos problemes de la filosofia, mostrant com una proposició filosòfica perd el seu significat si se la separa del seu context, o sigui, de la concepció general de la qual forma part. Wittgenstein considera que, encara que no sempre, en molts casos el significat d'una paraula no és més que el seu ús en la llengua corrent; que el significat de cada proposició es basa en aquestes premisses; i que cada paraula està circumdada d'una atmosfera particular que li és pròpia de manera que moltes frases, que materialment són les mateixes, adquireixen significats distints segons el context i segons la inflexió de veu amb què es pronuncien.

A partir d'aquestes consideracions, formulà el concepte de "joc lingüístic". Wittgenstein mantenia que hi ha una gran varietat de jocs del llenguatge, cadascun amb la seva pròpia manera de jugar-lo i les seves pròpies regles. En els diversos jocs del llenguatge, les paraules s'usen de maneres diferents. No s'usen sempre per a referir-se a objectes. L'expressió "joc lingüístic" destaca l'aspecte convencional de les regles a les quals obeeix un llenguatge determinat. No cal que un segueixi les regles del joc d'escacs, fins i tot se'n pot inventar un en què les mateixes peces es moguin d'acord amb altres regles, però un cop s'ha acceptat aquest joc, solament es poden seguir les regles establertes. Wittgenstein enumera diferents llenguatges que segueixin regles diverses: aquell que narra objectivament un esdeveniment, aquell amb el qual s'inventa una faula, el que expressa una hipòtesi científica, etc.

El punt de vista de Wittgenstein, que considera que el significat d'un concepte és l'ús que se'n fa en els diferents contextos d'acord a una pràctica sotmesa a regles pot il·lustrar-se en matemàtiques amb el concepte de nombre (Font i Nuñez 1995, Puig 1997) "*Los números se usan en contextos de comunicación (autocomunicación) diferentes, por ejemplo: contexto de secuencia, contexto de recuento, contexto cardinal, contexto ordinal y contexto de código. En cada uno de estos contextos de uso, el concepto de número tiene un significado concreto (sentido), por ejemplo, los números de teléfono (contexto de código) no se pueden sumar, mientras que los números en un contexto cardinal sí. A partir de los diferentes significados concretos aparece una red de significados del concepto número. Esta red de significados puede ir cambiando a medida que la persona utiliza el concepto de número en situaciones nuevas, como por ejemplo en un contexto de medida. En efecto, como resultado de la utilización de los números en un contexto de medida, el alumno se puede ver obligado a ampliar y*

cambiar la red de significados que habia construido a partir de los otros contextos. Desde esta perspectiva, la propuesta didáctica consistirá en presentar la mayor cantidad posible de contextos diferentes que puedan dar sentido al concepto que se quiere enseñar.” (Font i Nuñez 1995, pàg. 300).

El punt de vista que considera que el referent d'un concepte és una classe homogènia fou també fortament qüestionat pel segon Wittgenstein. Segons la concepció clàssica, un concepte està constituït per una sèrie d'atributs necessaris i suficients, de tal manera que tots els exemples del concepte tenen uns atributs comuns i cap contraexemple no els té tots. És a dir, els conceptes tindrien l'estructura de les classes lògiques : $C=R(x,y,...)$, on C seria el concepte, x,y els seus atributs i R la relació existent entre els seus atributs. La manera de formar els conceptes seria a partir de l'abstracció i la comprovació d'hipòtesis. O sigui, l'abstracció ens faria ser conscients de les similituds entre els exemples del concepte i ens permetria elaborar una hipòtesi respecte dels atributs rellevants del concepte. Aquesta hipòtesi seria comprovada en diferents casos i posada en qüestió per l'aparició de contraexemples que obligarien a modificar la llista d'atributs. La idea que un concepte és una classe formada per membres que tenen una sèrie d'atributs comuns fou qüestionada per Wittgenstein que, després de rebutjar-la, proposà que allò que uneix aquests exemplars dins d'un mateix concepte és un cert “aire familiar”, basat en una semblança no transitiva entre els membres de la categoria. Aquest punt de vista ha arribat a ser influent en la psicologia cognitiva recent a través sobretot de l'obra sobre conceptes i categorització de Eleanor Rosch (Rosch i Lloyd 1978).

1.11 El problema de la intencionalitat.

A continuació comentarem un tema central de la filosofia de la ment, el problema de si els fenòmens mentals es distingeixen dels fenòmens físics com a resultat de tenir una propietat coneguda com a “intencionalitat”. Un estat mental típic, per exemple una creença, és generalment sobre alguna cosa; puc creure que Barcelona és un lloc agradable per a viure, per la qual cosa la meva creença és sobre Barcelona. La intencionalitat és la capacitat dels estats mentals de ser sobre altres objectes o esdeveniments, els quals s'anomenen objectes intencionals. La capacitat de ser sobre altres estats és vertadera no solament de les creences, sinó de tot un seguit d'altres activitats mentals, tals com desitjar, témer, dubtar, esperar, planejar, etc. Si espero aprovar un examen, la meva esperança és sobre l'examen.

Brentano va enfocar la seva atenció cap al fet que les coses o esdeveniments a les quals es fa referència en els estats mentals no cal que siguin reals, sinó que podem tenir creences o altres estats mentals sobre objectes no existents. Per exemple, algú podria creure que els unicorns tenen una única banya. Encara que els unicorns no existeixin, Brentano afirma que, malgrat tot, es presenten en els estats mentals. Afirmar que tot estat mental - no solament aquells que normalment es considera que inclouen presentacions (escoltar un so, veure un objecte, sentir calor o fred), sinó també els judicis, records, inferències, opinions, etc. - inclouen un objecte que es presenta o apareix al subjecte. Afirmar també que el fet que els estats mentals incloguin tals presentacions de coses constitueix la seva

intencionalitat i es allò que els distingeix de tots els fenòmens físics: *“Todo fenómeno ‘psíquico’ está caracterizado por aquello que los escolásticos medievales llamaron inexistencia intencional (e inclusive mental) de un objeto, y que nosotros, usando expresiones no enteramente inequívocas, llamaríamos referencia a un contenido, dirección hacia un objeto (el cual no debe ser entendido como una realidad) o bien la inmanente objetividad. Todo fenómeno mental incluye algo como un objeto dentro de sí mismo, aunque no todos lo incluyen de la misma manera. En la presentación se presenta algo, en el juicio se afirma o se niega algo, en el amor es amado, en el odio es odiado, en el deseo deseado y así sucesivamente. Esta in-existencia intencional es característica exclusivamente de los fenómenos mentales. Ningún fenómeno físico exhibe algo parecido a esto. Podemos, por tanto, definir los fenómenos mentales diciendo que són aquellos fenómenos que contienen un objeto intencional dentro de ellos mismos.”* (Brentano 1874 citat en Cassirer 1976, pàgs. 231-232). Meinong, deixeble de Brentano, va interpretar que aquest considera una classe d'objectes (objectes del pensament) que existeixen fins i tot quan no hi ha cap objecte en el món físic que li correspongui. Així doncs, quan penso en quelcom, per exemple en una figura rodona perfecta, hi ha d'haver un objecte particular cap al qual es dirigeix el meu pensament. Però, donat que no hi ha cap objecte real que encaixi amb aquesta descripció, l'objecte del meu pensament ha de ser un gènere peculiar d'objecte mental. Aquesta consideració va portar Meinong a distingir entre el “Sosein” (el ser o subsistència) d'un objecte i el “Sein” (existència). Per a Meinong, els objectes que no existeixen efectivament, com les muntanyes d'or o els quadrats rodons, tenen malgrat tot una subsistència. És la subsistència de l'objecte allò que constitueix l'objecte intencional del pensament. Així, si dic del quadrat rodó que és rodó, estic parlant realment del quadrat rodó subsistent i no de cap objecte real.

De les possibles formes d'enfrontar-se al problema de la intencionalitat, una és de tipus no-representacional i consisteix a abstenir-se de postular objectes transcendents hipotètics. Aquesta opció implica renunciar a la versió forta de la representació. Una altra, des de la perspectiva realista representacionista, consisteix a postular que els objectes dels estats mentals que considerem que són coses externes a nosaltres no són els objectes del món sinó les seves representacions mentals. La ment estaria poblada de continguts, alguns dels quals serien el correlat d'objectes externs que existirien amb independència del subjecte que els representa. Aquesta opció, que és la que ha adoptat majoritàriament la psicologia cognitiva, permet mantenir la versió forta de la representació. En l'apartat 14 desenvoluparem com la psicologia cognitiva considera les representacions mentals.

Brentano fou un dels precursors del moviment filosòfic conegut com a “fenomenologia”, el qual té com un dels seus màxims exponents Husserl. L'objectiu inicial de Husserl era combatre el psicologisme en la lògica, això és, la posició que redueix la lògica a actes psíquics, i dona una explicació empírica de les lleis de la lògica basada en l'associacionisme. Aquest objectiu el va portar a un positivisme radical, que li permet considerar tot objecte que es presenta a la consciència. A partir del concepte d'intencionalitat, Husserl intenta donar una descripció de tot allò que es manifesta en

la consciència, és a dir, allò que es veu, s'escolta, s'olora, es menja, etc. (fenòmens físics), allò que es pensa (fenòmens psíquics) i les relacions entre fenòmens (tant físics com psíquics). Husserl considera que hi ha falta de claredat en la formulació de Brentano, ja que aquest distingeix entre l'existència real de la cosa i la seva "inexistència" intencional o mental. El concepte d'intencionalitat de Brentano fou adoptat i desenvolupat per Husserl (1993/1913) com a concepte central de la seva filosofia. Quan Husserl parla d'actes significadors o actes que doten de sentit, en virtut dels quals un objecte es presenta en la consciència, distingeix entre l'acte intencional (noesi) i l'objecte intencional (noema). El noema no és l'objecte, sinó que aquest últim és el pol que agrupa els noemes de l'experiència viscuda (l'objecte "taula" agrupa els noemes "taula rodona", "taula polida", "taula de fusta", etc.). També distingeix taxativament entre allò que està contingut en un acte significador com a part pròpia (autèntica o real), i allò que hi està com a part impròpia (com a objecte al qual intencionalment es dirigeix).

Husserl distingeix entre cosa, fenomen i contingut. La cosa seria, per exemple, el cotxe tal com ell és fora de tota connexió amb la consciència d'un home; el fenomen seria el cotxe que un considera que veu; i el contingut seria el costat del cotxe que la persona realment veu. D'entrada, Husserl posa en qüestió la cosa i el fenomen i se centra exclusivament en allò realment viscut. El contingut realment viscut és el suport de la pretensió no intuitiva de tenir en el camp global de la consciència, el fenomen, la manifestació conscient del cotxe com un tot. En aquest sentit el fenomen no és essencialment distint del contingut intuït en cada cas, sinó que més aviat és la síntesi dels continguts que es viuen en els diferents actes intuïtius en què es percep un mateix cotxe. En relació a les coses, Husserl proposa la reducció fenomenològica (epokhé) que consisteix a deixar entre parèntesi l'actitud natural que ingènuament creu en l'evidència no problemàtica de la transcendència de les coses reals; en definitiva: proposa mostrar-se agnòstic en relació a l'existència de les coses reals fora de la consciència. La reducció fenomenològica és el primer pas, el segon consisteix a trobar en la vivència reduïda la seva essència intencional. De la vivència hem de passar a la corresponent essència. Aquesta cerca s'anomena reducció eidètica. El coneixement sobre les essències és coneixement universal perquè l'essència coneguda val per a totes les vivències en les quals apareix, i val, a més, per a tots els objectes intencionals als quals aquestes vivències es refereixen. Però l'objectivitat del coneixement no s'explica solament ni principalment des de l'essència descoberta en la vivència, sinó que en tota objectivitat hi ha una intervenció constituent per part del subjecte. A aquesta conclusió arriba Husserl mitjançant la reducció transcendental. En tot acte de coneixement objectiu jo puc reduir o prescindir dels meus actes psicològics, puc prescindir del subjecte concret i empíric que realitza l'acte de coneixement, però no puc prescindir que en qualsevol acte de coneixement hi ha d'haver un pol subjectiu del qual prové l'acte. És a dir, no hi pot haver acte objectiu de coneixement sense la intervenció d'un subjecte.

Aquest subjecte no pot ser el meu jo singular i empíric, perquè una objectivitat explicada des d'aquest jo seria una objectivitat relativa, empírica, no una objectivitat absoluta. Al subjecte que s'arriba després d'aplicar la reducció transcendental, Husserl l'anomena

subjecte transcendental. Es tracta d'un subjecte que podem adjectivar com a lògic, en tant que se'l pot considerar com l'entramat de totes les lleis lògiques que, encara que operen en cada un dels subjectes empírics, estan per damunt de tots ells. D'aquesta manera, conjugant la part que té l'essència descoberta en la vivència amb la part que correspon al subjecte transcendental s'aconsegueix el coneixement objectiu. És a dir, en tot coneixement objectiu hi ha una essència que se'm presenta en allò donat i una funció constitutiva que realitza el subjecte transcendental.

De l'obra de Husserl ens han interessat tres aspectes: 1) Els seus primers treballs sobre la representació impròpia i el seu punt de vista semiòtic, 2) la superació del solipsisme per mitjà de la intersubjectivitat i 3) la relació entre la intersubjectivitat i el món de la vida.

En el seus primers treballs ("Filosofia de l'aritmètica" i "Zur Logik der Zeichen (Semiotik)" al voltant de 1890), Husserl va exposar el seu punt de vista sobre la representació impròpia o simbòlica i el seu punt de vista semiòtic. Un resum d'aquests punts de vista l'hem trobat en García-Baró (1993). Per a Husserl, un contingut està donat autènticament o pròpiament quan està donat "com allò que ell és". Un contingut està donat simbòlicament quan està donat "mitjançant signes" (els quals, per la seva part, es donen llavors pròpiament). Això vol dir que la distinció és funcional i que, per tant, no es refereix a la naturalesa dels continguts considerada en si mateixa. Sempre està donat pròpiament cert contingut; però hi ha ocasions en què allò pròpiament donat funciona en el lloc d'un altre, remetent a un altre, de tal manera que l'acte (globalment considerat) està intencionalment referit a aquest altre només simbòlicament present. Així tota presentació en la sensació o la fantasia és un contingut propi (autèntic), en tant que no ens serveix de signe d'un altre; però si ho fa, llavors és, un contingut impropri (simbòlic). Husserl també considera que un contingut que no ens està directament donat com allò que ell és, sinó que només ens està donat indirectament mitjançant signes, com per exemple els objectes matemàtics, és un contingut impropri (només en tenim una representació simbòlica). Els objectes matemàtics només poden ser continguts impropis, mentre que els signes matemàtics poden ser continguts propis o impropis. El contingut propi (autèntic) d'una representació simbòlica és el signe, que en estar en lloc d'un altre, permet parlar de contingut impropri (representació simbòlica o inautèntica).

L'anàlisi semiòtica de Husserl no ofereix una definició estricta de signe, sinó que el considera en el més ampli sentit possible. Allò que observa Husserl és que el concepte de signe és un concepte relacional, és a dir, allò essencial per a l'existència d'un signe és la relació entre el signe i allò designat. Husserl distingeix entre signe "extern" i "signe conceptual". Un signe és extern si no té res a veure amb les característiques particulars d'allò designat. Un exemple de signe extern seria el nom de les persones ja que les designa però no les caracteritza. Els signes conceptuals o "notes" poden ser interns o externs. Les notes internes es defineixen com: "*determinaciones que se hallan incluidas a título de contenidos parciales, en la representación del contenido designado*" (citada en García-Baró 1993, pàg. 136), per exemple "tenir forma rodona" mentre que les externes són: "*determinacions relatives que caracterizan al contenido como uno de los fundamentos*

de ciertas relaciones que se apoyan en él” (citada en García-Baró 1993, pàg. 136), per exemple: ser semblant a un triangle rectangle de costats 3,4 i 5. Hi ha notes que són essencials i altres que no ho són, però per a Husserl basta un exemple per captar les notes essencials i després reconèixer-les en un altre exemple del concepte. Aquest punt de vista li permet criticar el punt de vista que considera que generalitzem com a resultat d'un procés de comparació (teoria associacionista) ja que considera que un únic exemple pot ser suficient per a intuir el concepte. Husserl considera que els universals no són inferits dels particulars sinó que són donats directament en el particular, amb la qual cosa també s'oposa al platonisme, ja que no accepta un món transcendent d'universals.

Husserl també considera signes amb un únic designatum (per exemple un nom propi) i signes amb una pluralitat de designatum (noms universals) i que hi ha signes que estan directament relacionats amb el seu designatum mentre que d'altres no. També distingeix els signes simples dels compostos, que són aquells que estan formats per parts que són alhora signes. Husserl també distingeix entre signes idèntics i signes equivalents. Dos signes són idèntics quan ambdós denoten el mateix objecte de la mateixa manera. Dos signes, en canvi, són equivalents, i no pura repetició l'un de l'altre, quan, denotant el mateix objecte, ho fan de distinta manera. Husserl separa els signes en formals i materials, segons que denotin la forma o la matèria dels pensaments (la matèria es representa, per exemple, mitjançant noms, i la forma mitjançant símbols relacionals, per exemple “i”).

La fenomenologia bàsicament és un mètode. Ara bé l'aplicació d'aquest mètode porta a qüestionar el representacionisme realista. L'aplicació del mètode fenomenològic porta, d'entrada, a mostrar-se agnòstic sobre la possibilitat de transcendir allò que apareix a la consciència, és a dir el món quotidià de les persones (el món de la vida). Malgrat la inclinació natural a suposar que els fenòmens són objectes que existeixen independentement de la consciència, la fenomenologia posa entre parèntesis la suposició que els fenòmens es corresponguin amb objectes transcendents. Aquest agnosticisme respecte de l'existència transcendent dels objectes del món de les coses també val per l'existència d'un món platònic d'objectes matemàtics. Ara bé, malgrat l'autolimitació de considerar d'entrada només un sol món de fenòmens, considera que aquest es pot subdividir en dues esferes clarament diferenciades: l'esfera d'allò físic i la d'allò psíquic.

1.12 Intersubjectivitat i ostensivitat

A causa que qualsevol cosa experimentada, allò que veig, allò que escolto, etc es la meua experiència privada, el mètode fenomenològic ha d'explicar com podem evitar el subjectivisme absolut. La superació del solipsisme s'aconsegueix en l'obra de Husserl per mitjà de la intersubjectivitat “(..)Quizá la reducción al ego trascendental sólo implique en apariencia una ciencia permanentemente solipsista, mientras que, por el contrario, su consecuente ejecución, conforme a su propio sentido, conduzca a una fenomenología de la intersubjetividad trascendental y, en virtud de ésta, se despliegue en una filosofía trascendental en general. Habrá de mostrarse, en efecto, que un solipsismo trascendental constituye tan sólo un nivel filosófico inferior, que como tal, ha de ser

delimitado con un propósito metodológico, para poder poner en juego de modo adecuado la problemática de la intersubjetividad trascendental en cuanto fundada, esto es, en cuanto perteneciente a un nivel superior” (Husserl 1986/1929, pàg. 44). La consideració de l'altre és el que permet aconseguir la intersubjectivitat que elimina el perill del solipsisme: *“Tanmateix, la possibilitat d'un idealisme solipsista del jo i de la realitat és definitivament superada quan la fenomenologia Husserliana considera la presència de l'altre en el món de la vida”* (Viggiani-Bicudo, 1998, pàg. 476).

El punt de vista fenomenològic de Heidegger entronca amb la de Husserl, però en discrepa en un aspecte fonamental. Heidegger considera que l'intent de convertir la naturalesa del subjecte que coneix com a font de veritats necessàries, tal com pretenia Husserl, no està ben orientat. Amb aquesta crítica va posar les bases perquè la fenomenologia desemboqués en allò que Husserl va anomenar “mera antropologia” i que d'altres autors (Bubner 1984) consideren un desenvolupament de la fenomenologia cap a l'hermenèutica.

Les crítiques de Heidegger a Husserl van ser contestades per aquest últim en “La Crisi de les Ciències Europees i la Fenomenologia Transcendental” (Husserl 1991/1954) obra en la qual Husserl va treballar fins a la seva mort, i en la qual desenvolupa un concepte estretament relacionat amb el d'intersubjectivitat, el concepte de “món-vida”. Sense entrar en la polèmica de si aquesta obra és una desviació dels seus postulats inicials o bé la darrera presentació, segura contra totes les incomprendiments, de les seves autèntiques i incambiables intencions, cal remarcar que en aquesta obra proposa abandonar el seu projecte positivista inicial de convertir la filosofia en una ciència i es proposa establir la connexió entre l'activitat científica i l'esfera pragmàtica de la vida anterior a tota activitat científica. <<La visión principal de Husserl se define en la tesis siguiente: el “mundo-vida” es la olvidada fundamentación de significado para la ciencia. En el concepto de un “mundo-vida”, Husserl encontró un término comprensible listo para aquellos constituyentes cotidianos de la realidad en los que confía todo el mundo, y con los que tratamos incluso antes de aceptar teorías o reflexionar filosóficamente. El mundo-vida abarca todas aquellas orientaciones que se dan por sentado y que se han practicado desde un momento temprano. En nuestra vida práctica, hablando simple o complejamente, nos movemos en un mundo que nos es familiar por la costumbre, marcado por situaciones, interpretado a la luz de intereses y experimentado en contacto activo. (...)La ciencia no emerge de la nada; no debe sus estándares de conocimiento más exactos a ninguna inspiración de razón más elevada y no trata con una segunda realidad al margen en la que hemos confiado durante mucho tiempo. La actividad específica de la ciencia tiene sus orígenes en el mundo-vida, pues sin el conocimiento ahí disponible de nuestras relaciones con la realidad no podrían darse ni especialización ni perfección metodológica.>> (Bubner 1984, pàgs. 48-49) Per a Husserl el món de la vida és un fenomen intersubjectiu.

En base als punts de vista fenomenològics de Husserl i Heidegger es va desenvolupar la “fenomenologia social” de Schutz i la “sociologia de coneixement” de Berger i

Luckmann, i, més en general, allò que es coneix com la tradició “interpretativa en les ciències socials”, en la formació de la qual també hi va influir força la filosofia analítica desenvolupada a partir del segon Wittgenstein (Winch 1968). Aquesta manera d’entendre la sociologia mantenia que la societat no és una realitat independent i objectiva a la qual estan sotmesos els subjectes, sinó que té un cert grau d’objectivitat gràcies que els actors socials, en el procés d’interpretació del seu món social, l’exterioritzen i l’objectivitzen. De la mateixa manera, els coneixements objectius són un producte de les institucions de la societat i, malgrat l’objectivitat que els caracteritza, no adquireixen un estatus ontològic diferent de l’activitat humana que els produeix. Més endavant desenvoluparem la sociologia del coneixement de Berger i Luckmann en l'apartat 16, per la qual cosa ara ens limitarem a comentar com entén el significat el punt de vista “interpretatiu”.

El punt de vista interpretatiu en les ciències socials substitueix les nocions científiques “explicació”, “predicció” i “control”, pròpies del punt de vista positivista per les de “comprensió”, “significat” i “acció”, perquè considera que les primeres no serveixen per explicar la manera com les persones perceben les seves accions. La noció de “ciència social interpretativa” inclou gran varietat de postures i es pot explicar a partir d’una gran varietat de fonts, des de la fenomenologia i l’hermenèutica alemanya fins a la filosofia analítica anglesa. L’expressió més clara del punt de vista interpretatiu és la famosa definició de sociologia de Weber: <<La sociología [...] una ciencia que intenta el entendimiento interpretativo de la acción social [...] En “acción” se incluye cualquier comportamiento humano en tanto que el individuo actuante le confiere un significado subjetivo. En este sentido, la acción puede ser manifiesta o puramente interior o subjetiva; puede consistir en la intervención positiva en una situación, o en la abstención deliberada de tal intervención o en el consentimiento pasivo a tal situación. La acción es social en la medida en que, en virtud del significado subjetivo que le atribuye el individuo actuante (o los individuos), tiene en cuenta el comportamiento de otros y orienta su dirección en consecuencia>> (citat en Carr i Kemmis 1988, pàg. 102).

La noció de significat subjectiu és bàsica per distingir entre “acció humana” i “conducta humana”. La conducta humana és el comportament aparent i observable de les persones, mentre que l’acció humana té un sentit, tant per a qui la realitza com per a qui la interpreta. És a dir, no podem interpretar les conductes observables dels nostres alumnes sinó els atribuïm un sentit. És important remarcar que en la hipòtesi H2 hem utilitzat el terme “pràctica” en el sentit d’acció i no de conducta. És a dir, la nostra proposta de significat (H2) no s’ha d’entendre com una proposta conductista sinó que està més pròxima al paradigma interpretatiu. Nosaltres considerem que observar les pràctiques dels alumnes no es redueix a prendre nota de les seves conductes, sinó que cal una interpretació, per part del professor, del sentit que l’alumne dóna a la seva conducta. Dit d’una altra manera, considerarem que el significat d’un objecte personal és l’ús que en fa l’alumne. En un context social, aquest ús es concreta en un conjunt de pràctiques en les quals s’utilitzen ostensius que contenen un objecte intencional, és a dir d’una banda es presenten pròpiament i d’altra banda apunten a “quelcom”. Aquest “quelcom” és l’objecte personal de l’alumne (no-ostensiu). Aquest “objecte personal” no és estàtic sinó

que a la vegada és un emergent de les pràctiques realitzades.

La interpretació que dóna el professor al “sentit de l'acció”, és a dir, a la relació entre la conducta observable i un estat mental o experiència privada hipotètica de l'alumne, pot donar peu a interpretacions de tipus psicològic, les quals nosaltres no rebutgem d'entrada, entre d'altres motius perquè a vegades no en tenim d'altres de millors, ja que la psicologia cognitiva ha fet importants aportacions. Ara bé, s'ha d'anar amb molta cura amb les explicacions basades en processos mentals ocults, els quals són la causa de les accions. Això és així perquè l'afirmació que les accions humanes tenen significat implica força més coses que processos mentals ocults en les persones, ja que aquesta afirmació requereix tenir present el context social dins del qual adquireixen sentit aquestes accions. El sentit de les accions és públic, encara que les accions siguin privades, és a dir la interpretació que fan, tant el que actua com el que interpreta, es fa en base a unes regles que són públiques, les quals permeten que l'acció es pugui reconèixer com a correcta o com a incorrecta. L'explicació del sentit de l'acció que dóna el punt de vista interpretatiu fuig de les explicacions que pretenen explicar el comportament aparent a partir de processos mentals interns que en són la causa. És a dir, no pretén situar-se en la ment de l'alumne per explicar-ne el comportament, sinó comprendre el sentit de l'acció en el context social on es produeix. Les limitacions del cognitivisme per tractar les situacions humanes d'interacció és assumit en part per destacats cognitivistes *"Gran parte del estudio de los procesos cognitivos ha sido el estudio de la persona aislada (...) Por lo que sé, poco se ha hecho (...) para examinar los procesos cognitivos del individuo cuando se emplean dentro de situaciones interactivas. Pero, debido a que el modo normal de funcionamiento del ser humano es interactuar, los estudios de memoria, lenguaje, resolución de problemas y toma de decisiones llevados a cabo individualmente tan sólo tratan parte de los mecanismos de la cognición humana"* (Norman 1987, pàg. 334).

Si es consideren d'aquesta manera les accions humanes, resulta que no podem explicar-les, tal com pretenen els positivistes, de la mateixa manera que les ciències de la naturalesa expliquen el comportament dels objectes. És a dir, s'ha d'admetre que les ciències socials tracten sobre una matèria temàtica totalment diferent de les ciències de la naturalesa, i que els mètodes i la forma d'explicació que s'utilitzen en ambdós tipus de ciències han de ser diferents.

Ara comentarem com els partidaris del positivisme també van arribar, per un camí completament diferent al que va seguir la fenomenologia i l'hermenèutica, a postular la “intersubjectivitat”, encara que entesa de manera molt diferent de com l'entenen els fenomenòlegs. Les proposicions ostensives són proposicions del tipus: aquí i ara hi ha dibuixada una línia corba a la pissarra. Aquesta proposició formulada per mi mateix és verificable, però formulada per un altre planteja el problema de com es pot accedir a l'experiència de l'altre. Dit d'una altra manera, és molt distinta la meua experiència personal de veure la corba dibuixada a la pissarra de l'experiència que, en base al seu comportament, suposo que té l'alumne.

Un dels corrents filosòfics que més ha reflexionat sobre el significat i sobre les proposicions ostensives ha estat el neopositivisme. Si bé hi ha profundes divergències entre els distints autors neopositivistes, hi ha un cert corpus teòric comú. En l'obra d'Ayer es poden trobar els punts més importants del corpus teòric neopositivista. Segons Fano (1972) aquests són:

1) *La negació dels judicis sintètics a priori*. No existeixen proposicions científicament vàlides que no siguin les analítiques i tautològiques de la lògica i la matemàtica o les empíriques. Les segones es basen únicament en les percepcions sensibles, mentre que les primeres no proporcionen cap aportació objectiva nova, tan sols ens obliguen a ser coherents respecte d'allò que hem constatat empíricament.

2) *Identificació de semàntica i lògica*. La tasca de la lògica és la de mantenir sempre igual el significat dels símbols usats en un determinat raonament.

3) *La investigació filosòfica s'ha de reduir a l'anàlisi del llenguatge*. La funció de la filosofia no és la de crear teories que requereixin una confirmació en l'experiència, sinó tan sols fer explícites les conseqüències dels nostres usos lingüístics. Davant dues proposicions filosòfiques oposades podem estar segurs que una de les dues parts ha comès un error que pot ser descobert mitjançant una anàlisi molt acurada. Això explica la importància donada al simbolisme lògic, el qual hauria de proporcionar un llenguatge científicament correcte per a conferir una evidència immediata a les inconseqüències lògiques.

4) *Les proposicions protocol·làries*. Els neopositivistes es van formular la pregunta: Com es verifiquen les proposicions empíriques? La resposta inicial fou considerar que les proposicions empíriques es podien descompondre en proposicions atòmiques del tipus "què és això?" i confrontar-les amb la nostra immediata experiència. Però molt aviat va quedar palès que l'experiència immediata (la que es formula per mitjà de proposicions protocol·làries (ostensives)) era incontrolable.

5) *El principi de verificació*. Una proposició tindrà significat si el que l'enuncia sap com verificar-ne la veritat o falsedat, és a dir, si sap quines observacions el portaran a acceptar-la com a vertadera o a refutar-la com a falsa.

6) *El mètode fisicalista i la negació dels judicis de valor*. Els neopositivistes van considerar el mètode de les ciències físico-matemàtiques com el model de tot coneixement i van negar tot significat científic als judicis de valor.

7) *La negació del Jo*. Un contingut sensorial determinat és experimentat per un subjecte determinat, però la relació entre el subjecte i allò que sent no és la relació entre una "joidad" substancial (hipotètica) i els seus actes sinó més aviat una relació entre parts distintes de continguts de consciència. El meu Jo apareix davant meu com un feix de representacions que està en relació amb altres feixos de representacions. Ayer admet la distinció entre esperit i matèria, però considera que es tracta d'una distinció entre continguts de consciència, ja que tant les entitats que anomenem "subjectes sentints" com les que anomenem "coses materials" són fenòmens l'existència dels quals podem constatar de la mateixa manera.

8) *Idealisme i realisme*. Les afirmacions dels realistes i dels idealistes manquen de significat ja que no existeix cap procediment que permeti decidir si quelcom és real, en el sentit del realisme o solament ideal en el sentit de l'idealisme.

9) *El solipsisme lingüístic*. El problema del solipsisme lingüístic consisteix en com superar el problema que les experiències alienes no són accessibles a la meua experiència. En relació a aquest problema hi ha múltiples opinions discordants i la posició del mateix Ayer tampoc és gaire clara.

El problema de la verificació de les proposicions protocol·làries i la superació del solipsisme lingüístic estan en la base de la revisió crítica del neopositivisme. Aquesta revisió es va fer en diferents direccions. La que va fer Wittgenstein el va portar a escriure les seves "Investigacions" i fou continuada per la filosofia analítica anglesa, la qual al seu torn va incidir sobre el punt de vista interpretatiu que hem comentat abans. La que va fer Popper el va portar cap al seu racionalisme crític, mentre que la que va fer Carnap el va portar a postular també la "intersubjectivitat". La revisió de Wittgenstein l'hem comentada en diferents apartats i la de Popper ho farem en l'apartat 15, per la qual cosa ara només comentarem breument la que va fer Carnap.

Carnap va realitzar una revisió crítica de l'obra de Wittgenstein i es va proposar agrupar en una concepció unitària totes les investigacions lògiques i semàntiques de Frege, Russell, Tarski, les idees del Cercle de Viena i els mètodes dels pragmatistes i conductistes americans. A diferència del primer Wittgenstein, que considerava que per poder controlar la veritat d'una proposició complexa, se l'havia de descompondre en totes les seves proposicions elementals, i finalment comparar l'estructura de la proposició amb la del fet; Carnap, que en la seva lògica havia fet seva la tendència convencionalista de Hilbert, considera que no existeix límit en l'anàlisi del contingut de les proposicions ja que, en la pràctica, acabem l'anàlisi quan ens convencem intuïtivament que el significat d'una proposició està clar. Que un fet sigui considerat "atòmic" o no, depèn, doncs, d'una simple convenció, que tan sols serveix per a aquells que l'accepten.

Carnap (1928) reconeix que les descripcions qualitatives no són susceptibles de ser tractades científicament. Les qualitats s'agafen de l'experiència viscuda, és a dir, de les impressions i sensacions d'indiscutible caràcter subjectiu. Ara bé, fent abstracció de les diverses impressions i associacions que un símbol pugui suggerir en diversos subjectes, queda una zona intersubjectiva que és l'única que es pot tractar pel mètode "fiscalista", és a dir, l'única que és susceptible de ser analitzada sintàcticament i l'única que interessa a la ciència. Carnap considera que no es confronta una proposició amb un fet, sinó l'estructura de certes proposicions amb la d'altres.

Segons Carnap, la construcció d'un sistema de símbols depèn únicament de les convencions establertes. Tant les propietats dels símbols com les regles de joc, és a dir, les d'equivalència i transformació, s'estableixen arbitràriament, i poden existir diversos llenguatges basats en regles distintes. Naturalment, el significat i la veritat de les proposicions tan sols es refereix al sistema lingüístic preestablert.

Carnap elimina la possibilitat d'una confrontació entre les proposicions de la ciència i les nostres experiències immediates i sosté que l'única confrontació possible és de proposició

a proposició. El llenguatge intersubjectiu no es formula, doncs, comparant experiències viscudes entre si, sinó tan sols proposicions. Aquest és el llenguatge dels fisicalistes, i aquest és, segons Carnap, l'únic llenguatge legítim de la ciència.

El neopositivisme es troba que, d'una banda s'autoimposa l'exigència de controlar les proposicions amb l'experiència immediata, i per l'altra amb la impossibilitat de fer-ho. El plantejament inicial considerava l'experiència sensible com l'única font de coneixement, i sobre aquest principi pretenia basar l'establiment d'una concepció científica del món i la supressió dels problemes metafísics, que es consideraven falsos pel fet de no ser reductibles a proposicions elementals controlables en l'experiència immediata. Aquest plantejament inicial porta a un solipsisme que Carnap intenta superar transformant allò que havia de ser un mètode experimental perfecte en un mètode que tendeix a reduir al mínim tota referència a l'experiència individual. Carnap reconeix que les experiències d'un subjecte no poden ser conegudes ni tenen cap significat per a l'altre, però considera que no és necessari referir-se a les experiències d'altres, ja que la intersubjectivitat es forma no en base a les experiències interiors de diversos individus, sinó en base a les seves proposicions protocolars.

Segons Fano (1972), passar del supòsit que hi ha proposicions elementals que es controlen per l'experiència immediata (punt de vista inicial del neopositivisme) al supòsit que hi ha proposicions que es confronten amb d'altres proposicions (punt de vista de la sintaxi de Carnap), es pot interpretar com el pas del supòsit "hi ha sensacions sense conceptes" al supòsit hi ha "conceptes sense sensacions". Entre aquestes dues alternatives Fano en proposa una d'intermèdia que coincideix força amb la que hem adoptat i desenvolupat en aquesta memòria i que aquí solament apuntarem. Nosaltres considerem que tota experiència està carregada de teoria i que els conceptes que formen aquesta teoria es presenten en un context intersubjectiu de forma ostensiva. No podem parlar, per exemple, de la derivada sense utilitzar representacions ostensives ni podem interpretar l'ostensiu $f'(a)$ sense el concepte de derivada en un punt. Dit d'una altra manera: tot acte de coneixement intersubjectiu, tant si se li vol dir sensació o concepte, mobilitza un conjunt d'ostensius i de no ostensius. Això no implica, no obstant, que no puguem distingir les sensacions dels conceptes si ens situem en un joc del llenguatge en què quan es diu que l'ostensiu " $f'(a)$ " és molt petit s'entén que ens n'interessa l'aspecte individual, prescindint del general, mentre que quan es parla de la derivada en un punt utilitzant l'ostensiu " $f'(a)$ " prescindim de l'aspecte particular i ens centrem en l'aspecte general.

Tant la intersubjectivitat proposada per Husserl com la que proposa la sintaxi de Carnap es poden entendre com una versió dèbil de "coneixement objectiu" ja que aquest coneixement no es considera com una correspondència homeomòrfica amb una realitat transcendent (versió forta) sinó que s'entén com un coneixement que no es basa en efímeres impressions individuals, ja que és considerat vàlid, necessari, cert, vertader, ... per tots els subjectes (versió dèbil). La irrupció progressiva de la intersubjectivitat en la filosofia actual s'ha produït a partir de les últimes obres de Husserl, Heidegger, el segon

Wittgenstein, la fenomenologia social, la sociologia del coneixement, la teoria de l'acció comunicativa de Habermas, els paradigmes de Khun etc. Podem dir que la intersubjectivitat, tant per a la fenomenologia i l'hermenèutica que té els seus orígens en Husserl i Heidegger, com per a la filosofia lingüística i la teoria de la ciència, que té els seus orígens en el segon Wittgenstein, és una noció clau. Però també ho és per a la dialèctica i la filosofia de la pràctica, que té els seus orígens en el marxisme. A continuació comentarem la manera com interpreta la intersubjectivitat Habermas, un dels representants més importants d'aquest últim corrent.

El concepte d'intersubjectivitat comunicativa juga un paper clau en la teoria de l'acció comunicativa de Habermas (1987). Per a aquest autor la llengua articula les condicions que possibiliten la ubicació dels parlants en l'acte de comunicació. Els pronoms personals indiquen les possibles flexions i posicions que els interlocutors poden jugar dinàmicament en el procés de comunicació. L'infant, quan aprèn a articular-les, aprèn a situar-se amb els altres en la interacció comunicativa. El reconeixement de la diferència dels subjectes en l'acte de comunicació és paral·lel a l'obertura cap a l'assumpció de rols en la relació amb els altres. L'assumpció de rol per un subjecte en el procés d'interacció delimita al llarg de la seva vida la seva identitat social. En el procés de comunicació i assumpció de rols, l'individu diferencia progressivament tres nivells: el món de què es parla i en el qual actua, els altres amb qui parla i es comunica, i la pròpia subjectivitat des de la qual parla.

La intersubjectivitat lingüística és el producte històric de la comunicació social. Els parlants han assimilat les regles de la llengua durant el procés d'aprenentatge i socialització. En la seva praxi comunicativa el reactualitzen i modifiquen. En l'aprenentatge, la violació rellevant de les regles sintàctiques, semàntiques o pragmàtiques, és objecte de rectificació pels altres fins a establir el conjunt compartit de significats. D'aquesta manera cada infant és induït pràcticament a entrar en les estructures preexistents del llenguatge. Aquest procés continua durant tota la vida del parlant. No existeixen els significats privats. Els significats d'una llengua són intersubjectius. La racionalitat humana està estructurada comunicativament i discorre pels canals dialògics de la intersubjectivitat.

A més de l'orientació comunicativa, trobem un altre tipus d'orientació de l'acció humana, l'acció orientada a fins o teleològica. En ella els participants no adopten una posició orientada a l'enteniment, sinó a l'èxit, a la consecució de metes. L'acció teleològica és un component estructural de l'acció humana. Aquest tipus d'acció és constitutiva de l'acció humana a causa de la posició de l'ésser humà en el món natural i social que requereix instrumentar operacions per aconseguir metes. L'acció orientada a metes ha permès als éssers humans desenvolupar la seva capacitat d'actuar instrumentalment sobre el món i estratègicament en la relació amb els altres.

Una llengua es fa en la pràctica de la seva comunicació. Els processos comunicatius reiteratius tendeixen a sedimentar-se en significats compartits. La comunicació és un

procés d'intercanvi i homogeneïtzació simbòlica que condueix els parlants a la participació en els mateixos significats. La identitat de sentit entre els parlants és possible gràcies a la utilització de les mateixes regles de formació de significat.

Habermas interpreta el sentit de l'acció en els termes de la pragmàtica formal i el saber de fons de la fenomenologia social. Per a la pragmàtica formal, la parla entre dos o més subjectes pressuposa la identitat de significat dels termes i oracions utilitzats. Per a la fenomenologia social la interacció pressuposa un saber de fons compartit entre els participants. Un saber aporètic que constitueix el sentit comú adquirit pràcticament en el curs dels processos socialitzadors de la vida quotidiana.

El sentit és el significat de l'acció. El significat remet al context compartit entre els parlants. Hi ha un saber de fons compartit pels que es comuniquen. Aquest saber de fons està implícit i no pot ser explicat en un nombre finit de proposicions. Està estructurat contextualment, els seus elements es remunten mútuament. En actitud realitzativa no poden ser qüestionats en la seva totalitat. Només són revisables elements puntuals que es posen entre parèntesi en ser problematitzats, cercant una sortida al problema fins a un nou avís. El saber de fons és transmès culturalment i s'adquireix en els processos de socialització quotidians.

En la parla es pressuposen pretensions de validesa dirigides al reconeixement intersubjectiu entre parlant i oient. El contrari faria impossible l'expressió amb sentit orientada cap a l'enteniment, o sigui la comunicació. Per la qual cosa, cada un reacciona enfront de l'altre donant raons per a les quals es requereix algun tipus de validesa que l'altre pot criticar o acceptar.

L'acció s'orienta segons el tipus d'articulació cap a tres tipus de validesa. La funció de validesa es compleix per les condicions de veritat, interacció i veracitat posades en joc. Les condicions de veritat es refereixen a les funcions assertòriques, la veritat o falsedat en el món, formulades en tercera persona. Les condicions de rectitud es refereixen a les funcions regulatives, correctes o incorrectes en la interacció, formulades en segona persona. Les condicions expressives es refereixen a les funcions representatives, veracitat o la seva falta, formulades en primera persona.

En la pràctica quotidiana, dos o més subjectes fan afirmacions sobre el món, la interacció o la subjectivitat, suposant implícitament la possibilitat de consens entorn de la veritat, correcció o veracitat, respectivament, dels enunciat; contràriament les afirmacions no serien creïbles i no tindria sentit fer afirmacions sobre quelcom en qualsevol de les tres modalitats. Preguntar-se pel sentit del sentit possibilita virtualitzar els continguts comunicatius per part dels participants i orientar-se cap a la validesa discursiva dels enunciat. Entenem un acte de parla si coneixem les raons que el parlant dóna, o podria donar, en el seu favor amb la finalitat de convèncer l'oiant en circumstàncies determinades. La validesa és un requisit implícit de la praxi comunicativa.

L'acció orientada pel sentit remet al significat intersubjectiu del llenguatge. L'acció amb sentit és una acció comunicativa. No obstant, només la posta entre parèntesi de la dimensió comunicativa permet orientar l'acció cap a la consecució de l'èxit. Ambdós tipus d'acció són antropològicament constitutius i necessaris. En la pràctica es manifesten entrelligats.

L'acció teleològica, en executar un pla en una situació donada, aplica la racionalitat al càlcul de l'eficàcia dels mitjans que s'han posat en joc en una circumstància donada per a la consecució de les finalitats. Si l'acció humana es limita a l'acció orientada a metes, és monològica, ja sigui intervenint en unes determinades condicions materials o, interactuant amb altres per aconseguir metes particulars - al mateix temps que els altres estan capacitats per a actuar calculísticament de manera recíproca. En el primer cas es tracta d'una acció instrumental. En el segon, d'una acció estratègica. Les accions teleològiques són susceptibles de crítica quant a les pretensions de veritat de la situació i d'optimització dels mitjans implementats- en la mesura que el saber teòric i científic ens permet dilucidar la seva pertinença.

La xarxa que resulta de les interaccions de la pràctica comunicativa quotidiana constitueix el mitjà a través del qual es reproduïxen la cultura, la societat i la persona. Tals processos de reproducció només es refereixen a les estructures simbòliques del món de la vida. La reproducció material s'aconsegueix per mitjà de l'activitat teleològica amb la qual els individus socialitzats intervenen en el món per realitzar les seves metes.

En relació al punt de vista de Habermas sobre la possibilitat que l'acció constitutiva del subjecte porti a veritats necessàries, cal dir que és ambigu. Habermas considera que tant l'orientació comunicativa com l'orientació teleològica són antropològicament constitutives i necessàries. Ara bé, no queda clar si, malgrat ésser constitutives i necessàries són el resultat d'una producció social i, per tant, en el fons contingents perquè es poden trobar sotmeses a canvi, o bé són transcendents i situades fora de la història humana.

La teoria de l'acció comunicativa de Habermas i, més en general la teoria crítica de l'escola de Frankfurt, no ha passat desapercebuda en el camp de la didàctica, ja que és un dels referents de la proposta de Carr i Kemmis (1986) i de la d'Elliott (1993). Carr i Kemmis proposen una teoria educativa crítica basada en els principis següents: "*(...) la teoria educativa debe rechazar las nociones positivistas de racionalidad, objetividad y verdad (...) la teoría educativa debe admitir la necesidad de utilizar las categorías interpretativas de los docentes (...) que suministre medios para distinguir las interpretaciones que están ideológicamente distorsionadas de las que no lo están; y debe proporcionar también alguna orientación de cómo superar los autoentendimientos distorsionados (...) debe preocuparse de identificar aquellos aspectos del orden social existente que frustran la persecución de fines racionales, y debe poder ofrecer explicaciones teóricas mediante las cuales los enseñantes vean cómo eliminar o superar tales aspectos (...) la necesidad de reconocer que la teoría educativa es práctica, en el*

sentido de que la cuestión de su consideración educacional va a quedar determinada por la manera en que se relacione con la práctica” (Carr i Kemmis 1986 pàgs. 142-143).

La teoria educativa que proposen Carr i Kemmis no pot limitar-se a explicar l'origen de tal o qual problema amb què topen els ensenyants, ni pot limitar-se a intentar resoldre els problemes aconseguint que els ensenyants adoptin o apliquin qualsevol de les solucions que ella elabori. La seva veritable finalitat és la d'informar i guiar les pràctiques dels educadors indicant quines accions han d'emprendre si volen superar els seus problemes i eliminar les seves dificultats. La teoria educativa crítica s'ha d'orientar cap a la transformació de les maneres com els ensenyants veuen la situació i a si mateixos, de manera que puguin reconèixer i eliminar els factors que impedeixen els seus objectius educatius. Aquesta teoria, en el fons, proposa com a actitud bàsica de l'ensenyant una “investigació activa” de la situació per tal de transformar-la, per la qual cosa no és sorprenent que adopti com a metodologia d'investigació la “investigació-acció”.

La teoria crítica de l'escola de Frankfurt tampoc ha passat desapercebuda en el camp de la didàctica de les matemàtiques ja que és un dels corrents fonamentals de l'anomenada “Educació matemàtica crítica” (Skovsmose i Nielsen 1996, Skovsmose 1998). L'educació matemàtica crítica no pretén trobar mètodes per ensenyar o per investigar, sino que s'interessa per aspectes educacionals. Aquests aspectes són: 1) preparar els estudiants per ser ciutadans; 2) introduir les matemàtiques com una eina per analitzar de manera crítica els trets socialment rellevants; 3) Tenir molt en compte els interessos dels estudiants; 4) considerar els conflictes culturals dins dels quals es desenvolupa el procés d'instrucció; 5) reflectir els punts anteriors sobre les matemàtiques per tal que es converteixin en una eina crítica i 6) donar molta importància a la comunicació a l'aula, entesa com el conjunt de relacions interpersonals que són la base de la vida democràtica. Un dels aspectes que més preocupa a l'educació matemàtica crítica són les relacions entre les matemàtiques i la tecnologia, la qual, al mateix temps que soluciona problemes, en genera de nous (Keitel 1989 i 1993; Keitel, Kotzmann i Skovsmose 1993).

1.13 Els objectes matemàtics des d'un punt de vista no-representacionalista

Els punts de vista no-representacionalistes permeten considerar una solució al problema de l'existència dels objectes matemàtics del tipus següent: els objectes matemàtics són continguts impropis de la consciència que es manifesten en la consciència per mitjà de signes que són continguts propis. Alguns d'aquests continguts propis, els signes físics ostensius, són considerats pel subjecte (o la institució) com un correlat (percepte) d'un objecte exterior que el subjecte (o la institució) creu que existeix amb independència del subjecte. D'acord amb aquest punt de vista, els objectes matemàtics d'una persona serien objectes intencionals que no serien un correlat mental de cap objecte exterior, mentre que les representacions materials d'aquests conceptes (els seus significants ostensius), els sistemes matemàtics de signes, serien objectes ostensius que serien considerats pel subjecte (o la institució) com a “exist-ents” exteriors. Des d'aquesta perspectiva, l'existència dels objectes matemàtics s'ha de situar en el pla personal de les experiències

mentals i en el pla públic, socialment compartible, de les experiències materials de les persones. Dit d'una altra manera, els objectes matemàtics personals d'un subjecte serien construccions mentals (domini d'allò personal) que poden ser materialitzades en sistemes de signes (experiències materials de les persones que pertanyen al domini d'allò públic) i que, per mitjà de la intersubjectivitat, es presenten objectivament en el món de la vida.

En aquesta memòria considerarem com a posicions no-representacionalistes en sentit ampli a totes aquelles que postulen un sol món d'experiències fenomèniques, encara que el considerin dividit en diferents esferes. Des d'aquest punt de vista serien no-representacionalistes, per exemple, la proposta d'un únic món formulada per Puig (1997) *"Las matemáticas están, por tanto, en el mismo mundo de fenómenos que organizan: no hay dos mundos sino uno que crece con cada producto de la actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática."* (Puig 1997, pàg. 67). Així com les propostes del constructivisme radical *"en camvi, els móns físics i subjectius es pensen millor com a dominis diferents de la experiència"* (Kaput 1991, pàg. 59). O la proposta fenomenològica de Viggiani-Bicudo (1998) *"Les entitats matemàtiques, d'acord amb el punt de vista fenomenològic, són objectes ideals. Es constitueixen per mitjà de la intuïció essencial o eidètica. Ara bé, aquesta idealitat excedeix aquesta esfera i, per mitjà de la intersubjectivitat, es presenten objectivament en el món de la vida, i així es presenten a la consciència"* (Viggiani-Bicudo, 1998, pàg. 481) En camvi, considerarem com a realista representacional la proposta de Vergnaud (1990a): *"(.) La solució epistemològica és, en principi, bastant simple: la construcció del coneixement consisteix en la progressiva construcció de representacions mentals, implícites o explícites, que són isomòrfiques a la realitat per a alguns aspectes i no ho són per a d'altres."* Vergnaud (1990a, pàg. 22).

Des d'aquest punt de vista, tots els processos de representació actuen sobre experiències de les persones, i per representació s'entén qualsevol experiència, material o mental, X que representa una altra experiència Y , material o mental (versió dèbil de la representació). Si considerem aquesta versió dèbil de la representació com un procés (el verb representar), es pot considerar una funció en què les antiimatges (el domini) poden ser una experiència qualsevol de les persones: un objecte material, una paraula, un gràfic, una fórmula o dibuix escrits en un paper, una text escrit, etc. (esfera d'allò públic) o bé qualsevol objecte concret, paraula, gràfic, fórmula, dibuix, text etc. pensat o imaginat (esfera d'allò privat). Igualment, el recorregut pot estar format per: una paraula, un gràfic, una fórmula o dibuixos escrits en un paper, un text escrit (esfera d'allò públic) o bé per qualsevol objecte concret, paraula, gràfic, fórmula, dibuix, text etc. pensat o imaginat (esfera d'allò privat). Si considerem la representació com un objecte (el resultat del procés), aquest serà un contingut de consciència format per una expressió que es presenta pròpiament a la consciència i per un contingut que hi està present només de manera indirecta. Si l'expressió forma part de l'esfera d'allò material, parlarem de representacions públiques (o externes si per externa entenem que forma part de l'esfera

d'allò públic), mentre que si forma part de l'esfera d'allò mental, parlarem de representacions privades (o internes, si per interna entenem no-pública).

El punt de vista que considera la representació com una relació entre experiències de les persones (físiques o mentals) el podem trobar en els treballs de Kaput (1987, 1991 i 1992) i Brown (1996). Les investigacions de Brown es basen en la fenomenologia de Schutz (1962 i 1967). Per referir-se al parell d'experiències relacionades en el procés de representació, Schutz, seguint Husserl i Peirce, distingeix entre allò que es presenta pròpiament a la consciència (appresenting) i allò amb què es relaciona (appresented), que moltes vegades només està simbòlicament present. Per referir-se a les situacions en què actua el parell "appresenting-appresented", Schutz utilitza l'expressió "appresentational situations". Brown (1996) ha aplicat el punt de vista de Schutz a les "appresentational situations" matemàtiques.

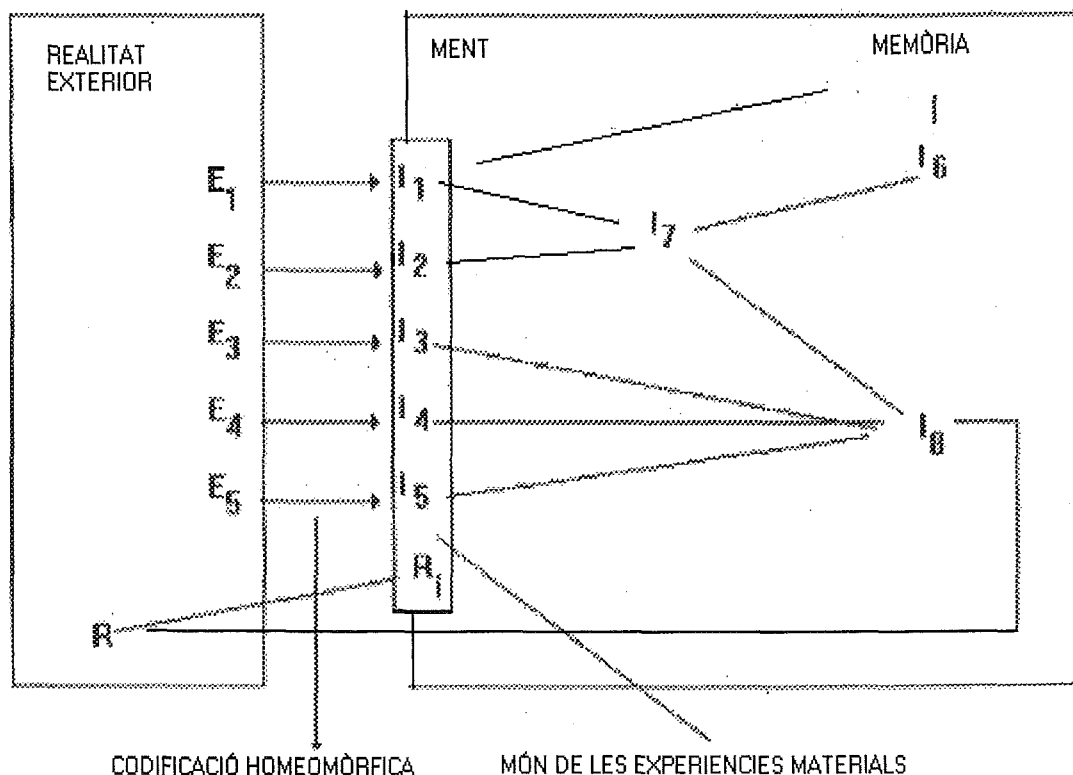
1.14 Les representacions mentals en la psicologia cognitiva

Mentre que la solució del no-representacionalisme al problema de la intencionalitat consisteix a renunciar a la versió forta de la representació (relació homeomòrfica entre objectes de móns diferents), la ciència cognitiva resol el problema de la intencionalitat postulant que la ment opera amb representacions mentals, algunes de les quals són representacions d'objectes exteriors. Aquest postulat genera el problema d'explicar com és que alguns dels nostres estats mentals tenen èxit en connectar amb coses del món, mentre que d'altres no ho aconsegueixen. Per resoldre aquest problema, la psicologia cognitiva parteix dels següents supòsits epistemològics: 1) existeix un món exterior predefinit 2) la nostra cognició apreheix aquest món, encara que sigui de forma parcial; 3) la manera en què coneixem aquest món predefinit consisteix a representar-ne els trets mitjançant representacions mentals que són homeomòrfiques, almenys en part, a la realitat i després actuar sobre la base d'aquestes representacions⁵.

D'acord amb aquest punt de vista, les persones tindriem un conjunt (probablement infinit) de representacions mentals $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$ que es poden agrupar en tres tipus:

- 1) les que la persona considera externes (les representacions internes que són el resultat de la codificació d'estímul externs)
- 2) Les pròpiament internes
- 3) Les representacions internes que serveixen per realitzar representacions considerades externes (representacions internes que es poden descodificar produint respostes en el medi exterior).

La figura següent il·lustra aquesta primera classificació.



Els estímuls externs E_1, E_2, E_3, \dots produeixen les representacions ostensives I_1, I_2, \dots que són les que considerem com a representacions externes. En aquestes representacions, a més dels estímuls externs, hi influeix el marc cognitiu de la persona, que representem esquemàticament per la línia que va de la memòria a I_1, I_2, \dots . La persona pot combinar representacions internes (I_6) amb representacions activades pels estímuls externs produint així una representació I_8 , que es pot descodificar produint respostes en el medi exterior R , les quals produeixen estímuls externs que són codificats per la persona com R_1 .

Si considerem la classificació anterior en un context social, tenim que el primer tipus de representacions (I_1, I_2, \dots) i el tercer tipus (R_1) són socialment compartibles. Per exemple, un professor, seguint una representació del tercer tipus, dibuixa a la pissarra una taula d'una funció i l'alumne genera una representació del primer tipus. Quan diem que aquestes representacions mentals són socialment compartibles, volem dir que el professorat i l'alumnat dialoguen sobre elles com si fossin exteriors. Molts autors fan referència a les representacions de tipus 1 i 3 com a "significant", i al conjunt de connexions que l'alumne pot establir amb d'altres representacions del tipus 2 com a "significat". Per tant, les representacions que es treballen a l'aula i que normalment són considerades exteriors, són l'experiència personal de cada una de les persones presents a l'aula, i per tant estan afectades pel marc conceptual de cada un dels presents. Dit d'una altra manera, el professor/a no veu a la pissarra exactament el mateix que veu l'alumne. Per exemple, si posem el símbol de la integral, el professor/a el veu com a tal, mentre que un alumne pot

veure simplement una *S* allargada. Encara que no vegin exactament el mateix, el llenguatge els permet consensuar certs acords sobre allò que veu cadascú; per exemple: que allò que estan veient no és rodó, que sembla la lletra *essa*, etc.

A partir d'aquests supòsits epistemològics, la psicologia cognitiva ha estudiat quines són aquestes representacions mentals i molt especialment, com s'emmagatzemen en la memòria secundària (a llarg termini) les representacions del tipus dos (les pròpiament internes). A diferència del conductisme que, almenys en la seva versió més radical, era un programa d'investigació antimentalista, que se centrava especialment en l'estudi de l'aprenentatge, mitjançant teories basades en l'anàlisi dels estímuls i les respostes (representacions del tipus 1 i 3), la psicologia cognitiva, i més concretament el programa d'investigació que rep el nom de "processament de la informació", en la mesura que s'ocupa de l'estudi de les representacions mentals, ha generat "teories de la memòria" (representacions del tipus 2). La tesi bàsica de la psicologia cognitiva és que la cognició consisteix en la manipulació de representacions (símbols que es refereixen a quelcom). Les representacions de tipus 2 (les pròpiament internes) es consideren símbols amb una certa corporeïtat (paraules pensades, evocació d'objectes, imatges mentals, etc), que representen quelcom. La psicologia cognitiva no diu que si obrim el cap d'una persona i li observem el cervell hi trobarem petits símbols sinó que postula un nivell simbòlic per a la cognició, encara que accepta que aquests símbols són emergents de l'activitat cerebral. Dit d'una altra manera, la psicologia cognitiva suposa un nivell neurobiològic (1r nivell) del qual emergeixen els símbols (2n nivell), els quals representen quelcom (3r nivell).

Els objectes representats per les representacions mentals de tipus 2 poden ser: 1) objectes ostensius (tipus 1 i 3) i 2) objectes no-ostensius personals (conceptes, idees, etc). Els objectes ostensius materials són alhora representacions personals d'objectes reals exteriors al subjecte (perceptes). En relació als no-ostensius, es consideren com a no-ostensius personals del subjecte, sense entrar en la polèmica de si existeixen en algun domini ideal diferent del món de les coses (platonisme) o bé són construccions socials que emergeixen dels no-ostensius personals (constructivisme social). Molts investigadors en didàctica de les matemàtiques es refereixen conjuntament als símbols mentals i als no-ostensius personals com a representacions internes i als objectes ostensius (tipus 1 i 3) com a representacions externes. Moltes d'aquestes investigacions tenen per objectiu l'estudi d'aquestes representacions internes.

En relació als símbols mentals, els psicòlegs cognitivistes mantenen una llarga polèmica que ha generat una abundant literatura a favor i en contra. En Johnson-Laird (1987), Pylyshyn (1983) i Anderson (1983) es pot trobar una exposició d'aquesta controvèrsia. Hi ha psicòlegs que creuen que en la memòria a llarg termini existeixen imatges espacials, mentre que altres se situen en l'extrem contrari i rebutgen que tals imatges mentals es guardin en la memòria en un format figuratiu diferent del format proposicional, perquè consideren que la imatge no està arxivada com a tal en la memòria sinó que es produeix quan es recupera i es codifica en format gràfic, el format proposicional guardat en la

memòria. Aquesta polèmica té la seva arrel en el fet que la imatge mental és una representació mental de l'objecte, mentre que les proposicions són representacions mentals que ens permeten dir coses de l'objecte. El fet que la imatge mental ens dona un coneixement "de" i que les proposicions ens donen un coneixement "que.." posen de manifest que estem considerant dos tipus de representacions distintes, i sembla lògic suposar que s'emmagatzemen en la memòria en dos formats diferents (lingüístic i figuratiu). Els psicòlegs cognitius han estudiat de manera més completa la representació proposicional que no pas les imatges mentals.

1.14.1 Esquemes

El "processament de la informació" és un programa d'investigació que es basa en l'acceptació de l'analogia entre el funcionament de la ment humana i el funcionament d'un computador⁶, i s'ha centrat, fonamentalment, en l'estudi de la memòria. Concretament analitza com s'organitza la nostra representació proposicional en la memòria a llarg termini. Per fer aquest estudi s'han proposat dues representacions hipotètiques sobre la manera d'organitzar en la memòria el nostre coneixement proposicional: les xarxes semàntiques i la teoria dels esquemes. Les xarxes semàntiques són representacions hipotètiques de les nostres estructures de coneixement que permeten explicar les regles d'ús dels conceptes i les relacions entre elles. Per això són útils per estudiar alhora els procediments i els seus principis subjacents. Els nòduls i les relacions són les parts fonamentals de la xarxa, la qual pot contenir moltes afirmacions, cada una d'elles en la forma nòdul-relació-nòdul. Actualment s'ha passat de les xarxes a unitats de coneixement més extenses: els esquemes.

El concepte de "esquema" té una llarga tradició no només en la psicologia sinó també en la filosofia, des de que fou usat per Kant. Recentment els esquemes han estat recuperats per la psicologia cognitiva actual, si bé el concepte actual d'esquema difereix en alguns punts dels seus avantpassats. El nou concepte d'esquema té un origen computacional, ja que ha sigut recuperat en el marc dels estudis sobre Intel·ligència Artificial. Segons Rumelhart: "*Un esquema es una estructura de datos para representar conceptos genéricos almacenados en la memoria*" (Citat en Pozo 1993, pàg. 136). Es tracta, doncs, d'una teoria de la representació i utilització dels conceptes emmagatzemats en la memòria. Els esquemes han tingut una notable acceptació i han estat usats en diverses àrees d'investigació (comprensió de fets, representació de fets, reconeixement de patrons visuals, raonament lògic, autoinstrucció, ..). Aquesta generalitat en l'ús del concepte d'esquema ha portat a una inevitable diversificació d'interpretacions d'allò que s'entén per esquema. Hi ha diversos tipus d'esquemes, que varien en la mateixa mesura que els dominis a què s'apliquen. Així hi ha "esquemes" de concepte, "guions" de successos, "marcs" en la percepció visual o "estereotipus" socials. Cada un d'aquests tipus d'esquema té trets propis, però el prototipus entre les diverses teories dels esquemes arrenca de la teoria proposicional desenvolupada per Norman, Rumelhart i els seus col·laboradors la qual permet explicar al mateix temps el "saber que" i el "saber com".

1.14.2 Els esquemes en la proposta constructivista

El marc de referència de la reforma educativa actual és un conjunt de teories i explicacions que, si bé mantenen entre si discrepàncies importants en nombrosos punts, participen d'una sèrie de principis comuns o, almenys, no contradictoris. Aquest marc de referència segons Coll (1989) està delimitat per allò que podem denominar enfocaments cognitius en un sentit ampli: a) la teoria genètica de J. Piaget i dels seus col·laboradors de l'Escola de Ginebra, b) la teoria de l'activitat en les formulacions de Vygotsky, Luria, Leontiev, i en els seus desenvolupaments posteriors (Wertsch, Forman, Cazden, etc), c) la teoria de l'aprenentatge verbal significatiu de D. Ausubel i la seva prolongació en la teoria de l'assimilació de R.E. Mayer, d) la teoria del processament de la informació (teoria dels esquemes) i e) la teoria de l'elaboració de M. A. Merrill i Ch. M. Reigeluth. A partir d'aquests enfocaments, s'ha formulat la proposta constructivista que inspira l'actual reforma educativa de l'ensenyament no universitari a Catalunya.

El constructivisme considera l'estructura cognitiva de l'alumne com un conjunt d'esquemes, els quals són modificats d'acord amb la teoria de l'equilibració de Piaget: <<11) *L'estructura cognoscitiva de l'alumne(..) pot concebre's com un conjunt "d'esquemes de coneixements" (...). Els esquemes són "un conjunt organitzat de coneixement (..) poden incloure tant coneixement com regles per a utilitzar-lo, poden estar compostos de referències a altres esquemes (..) poden ser específics (..) o generals" (..) "Els esquemes són estructures de dades per a representar conceptes genèrics emmagatzemats dins la memòria, aplicables a objectes, situacions, esdeveniments, seqüències d'esdeveniments, accions i seqüències d'accions."*>> (Coll, 1989, pàg. 20). Per als psicòlegs constructivistes que han formulat el marc de referència de la reforma educativa, un esquema és la representació que posseeix una persona en un moment determinat de la seva història sobre una parcel·la de la realitat (Coll 1983). Però quins són els elements que inclouen aquests esquemes? Per exemple, per a Miras (1993) són els següents: conceptes, procediments, fets, explicacions, normes, actituds i experiències personals. Si bé no es diu explícitament que les imatges mentals i l'evocació d'experiències no formen part dels esquemes, tampoc s'hi fa referència explícita com a elements integrants.

1.14.3 ¿Existeix un model d'organització de dades en la memòria a llarg termini que impliqui representacions gràfiques i proposicionals?

Si bé a la majoria de les persones els sembla bastant evident que per contestar certes preguntes, especialment aquelles que impliquen l'espai i el temps, s'ha d'usar algun tipus d'imatge que tenim arxivada en la memòria, hi ha pocs estudis sobre el format amb què es guarden les representacions visuals en la memòria a llarg termini. Hi ha psicòlegs que creuen en l'existència en la memòria a llarg termini d'imatges espacials que contenen informació rica i densa, disposada de manera bi- o tridimensional i que pot ser inspeccionada per un mecanisme perceptiu intern que n'extreu informació per oferir-la a "l'ull mental". En canvi, altres se situen en l'extrem contrari i rebutgen que tals imatges

mentals estiguin guardades en la memòria en un format figuratiu diferent del format proposicional, perquè consideren que la imatge no hi està arxivada com a tal, sinó que es produeix en recuperar, i codificar en format gràfic, el format proposicional guardat en la memòria. La polèmica no és si existeix la capacitat per a formar i utilitzar imatges mentals, sinó si hi ha un format específic de tipus figuratiu, diferent del format proposicional, que serveix per guardar en la memòria a llarg termini les imatges mentals; així com tampoc no es discuteix l'existència d'imatges mentals en la memòria sensorial immediata. Dit en altres termes: la polèmica és si existeix la "imatge mental cosa" arxivada en la memòria a llarg termini com una fotografia o un dibuix i no si existeix la funció que permet formar imatges mentals. Una altra manera de formular la polèmica seria la següent: convé ampliar el contingut dels esquemes arxivats en la memòria a llarg termini amb un conjunt d'imatges mentals enllaçades a l'esquema? O bé, basta considerar que els esquemes de format proposicional permeten crear imatges mentals, i també recordar experiències en format espacial i no només descripcions verbals d'aquestes experiències?

El problema és que, si bé la majoria de les persones creu que té imatges mentals, és difícil dir amb exactitud què són. Considerem el cas de la imatge mental de triangle. Podem distingir un primer nivell que és el dibuix d'un triangle en un llibre que estem mirant. Un segon nivell és el record del dibuix del triangle que hem vist anteriorment en una pàgina d'un llibre. En aquest cas crec que puc veure el triangle iestic segur, per exemple, que és rectangle. Un tercer nivell seria considerar la imatge d'un triangle que no sigui el record directe d'una experiència anterior, és a dir que intentem imaginar un triangle en un full en blanc. En aquest cas la imatge ha de ser la d'un triangle concret, per exemple amb base horitzontal. Un quart nivell seria la possibilitat de tenir la imatge mental d'un triangle general, una espècie d'imatge-plantilla que servis per a qualsevol triangle, és a dir, una espècie de classe d'equivalència de totes les figures del nivell anterior. És evident que el primer nivell, la percepció directa d'un triangle no és allò que normalment s'entén per imatge mental, mentre que el quart nivell resulta difícil de diferenciar del concepte de triangle i de la capacitat per a determinar quina figura és o no és un triangle. Per tant, els exemples paradigmàtics d'imatges mentals de triangle són el nivell dos i tres, mentre que el primer i el quart estarien a la frontera d'allò que es pot considerar una imatge mental. El primer perquè, en ser un percepte, es pot considerar com la "cosa en mi" que, en ser immanent, es podria anomenar imatge, i el quart perquè resulta difícil de diferenciar del concepte de triangle. Per tant, si ens limitem als exemples paradigmàtics (nivells 2 i 3), no podem parlar amb propietat de la imatge mental de triangle sinó d'un conjunt d'imatges mentals de triangles: rectangles, escalens, de base horitzontal, equilàters, etc. relacionades entre si.

La psicologia cognitiva utilitza bàsicament tres criteris a l'hora de decidir-se per una de les dues opcions següents: 1) La informació s'emmagatzema en la memòria a llarg termini en format proposicional i 2) Existeix un codi de representació en la memòria a llarg termini de tipus dual que implica representacions de tipus gràfic juntament amb d'altres en format proposicional en igualtat de condicions. El primer criteri és que el constructe

teòric ha de servir per a explicar les entrades i sortides de la facultat cognitiva estudiada, és a dir, ha d'explicar les conductes de les persones. Aquest primer criteri és massa tosc per decantar-nos a favor d'alguna de les dues opcions anteriors perquè les dues expliquen la funció imaginativa de les persones. El segon, consisteix que els constructes siguin coherents amb les capacitats del sistema nerviós de l'individu, però no és gaire útil en aquest cas perquè el sistema nerviós té la capacitat de formar conceptes i imatges. El tercer criteri és en un refinament del primer; consisteix a considerar que si dos constructes expliquen la mateixa conducta, però un l'explica, per exemple, amb dos procediments, i l'altre només amb un, podem esperar que en igualtat de totes les altres condicions, els dos procediments triguin més a donar una resposta. Per tant, un estudi dels temps que triguen les persones a respondre ens permetrà decidir-nos per un dels dos constructes.

Els estudis experimentals basats en el tercer criteri no permeten decidir-se clarament per cap de les dues alternatives anteriors, la qual cosa fa que la discussió sobre el format en què s'arxiva en la memòria a llarg termini la informació continuï oberta entre els psicòlegs cognitius. Per tant, en principi es poden formular, com a mínim, dues propostes d'esquema diferents. La primera correspon a aquells que consideren que un esquema conté: conceptes, procediments, fets, explicacions, normes, actituds i experiències personals en format proposicional i s'abstenen de considerar que l'esquema incorpori imatges mentals ni records en format visual. La segona, correspon a aquells que postulen que els esquemes, a més de conceptes, procediments, fets, explicacions, normes, actituds i experiències personals, contenen imatges mentals i records en format gràfic. Podríem dir que la primera opció peca de prudent, i la segona d'atrevida, en postular l'existència en la memòria a llarg termini d'imatges mentals.

1.15 Teories científiques realistes versus teories científiques instrumentalistes

En aquest apartat comentarem una controvèrsia sobre les teories científiques que està estretament relacionada amb el problema de la intencionalitat. Popper (1983) classifica les teories científiques en dos grups: instrumentalista i essencialista. Segons la concepció "instrumentalista", les teories són mers instruments que ens permeten deduir uns fenòmens a partir d'altres fenòmens previs; una llei universal, o una teoria, no és un enunciat pròpiament dit, sinó més aviat una regla o un conjunt d'instruccions per a la derivació d'uns enunciats singulars a partir d'altres enunciats singulars. Popper rebutja la concepció instrumentalista de les teories argumentant que la manera d'assajar les regles per al càlcul és diferent de la manera de verificar les teories, i que l'habilitat que requereix l'aplicació de regles d'inferència és molt diferent de la que es necessita per a l'examen teòric i per a la determinació teòrica dels límits d'aplicabilitat de les teories. Per a Popper, la concepció "essencialista" de les teories conté tres premisses bàsiques:

- 1) El científic aspira a trobar una teoria o descripció vertadera del món (i especialment de les seves regularitats o "lleis") que sigui alhora una explicació dels fets observables.
- 2) El científic pot aconseguir, finalment, establir la veritat de tals teories por damunt de tot dubte raonable.
- 3) Les millors teories, les vertaderament científiques, descriuen les "essències" o les