VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

- 1 resposta (Raúl B.) que confon la funció amb la funció derivada.

Les 10 justificacions correctes es poden classificar de la manera següent:

- 2 alumnes han calculat la funció derivada per límits.
- 8 alumnes han suposat que a és un valor qualsevol de la variable x o bé han repetit el càlcul de l'apartat anterior amb x.. Per exemple, la resposta d'Alex A. fou: *"Perquè si fem la derivada en a, f'(a) = 2a, si fem la de un número x serà la derivada 2x"*

Valoracions

- El primer procediment per trobar la funció derivada l'ha acabat el 50% de l'alumnat i amb la meva intervenció el 100%.
- El segon procediment l'ha pogut finalitzar el 44% sense utilitzar límits.
- Sembla que el primer mètode resulta més fàcil d'entendre per als alumnes que no pas el segon. El fet d'haver de calcular el pendent amb lletres, en comptes de calcular-lo numèricament, no sembla que sigui la causa d'aquesta dificultat sinó que més aviat sembla que la causa està en el fet de passar d'entendre el punt d'abscissa a primer com un punt fix i després suposar que és un punt qualsevol.
- Com ha resultat del procés d'instrucció entre el 9-1-98 (qüestionari del primer grup) i el 16-1-98 (qüestionari del segon grup) ha augmentat la utilització de la notació $f'(x)$ i el nombre d'alumnes que utilitzen els límits. També ha augmentat el percentatge d'èxit perquè aquest procediment per trobar la funció derivada, a partir de trobar una condició que compleixin totes les tangents, es va utilitzar a l'aula per trobar la funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i les afins.

5.2.20. Subseqüència 10. Derivada de les funcions polinòmiques i de les funcions racionals.

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 44-47 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3.

61 Entendre que la funció derivada de $f(x) = x^n$ és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$, a partir de la transformació de la fórmula de $f(x) = x^n$ i d'una generalització.

62 Calcular la funció derivada de les funcions polinòmiques i de les funcions racionals.

63 Entendre que la funció derivada es pot calcular utilitzant les regles de derivació.

L'alumnat, de moment, solament pot aplicar les regles de derivació en operacions amb funcions polinòmiques de primer i segon grau. Cal que entengui que per poder derivar qualsevol funció polinòmica o racional cal conèixer la derivada de la funció $f(x) = x^n$. En l'activitat 44 l'alumnat, fent una generalització a partir dels resultats obtinguts en derivar x^n, per $n = 1, 2, 3, 4$ i 5, ha de descobrir que la derivada de la funció $f(x) = x^n$ (amb n un nombre natural) és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$. En les activitats 45, 46 i 47 ha d'aplicar aquest resultat, juntament amb les regles de derivació, per calcular la funció derivada de funcions polinòmiques i de funcions racionals.

En acabar aquestes activitats és un bon moment per fer-los observar que la funció derivada es pot calcular directament utilitzant límits o trobant una propietat que compleixen totes les tangents, o bé indirectament, utilitzant les regles de derivació.

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en la sessió del 20-1-98

Sessió del 20-1-98

Falten: Mike D. i Angela L.

Planificació

1) Continuar treballant les regles de derivació en l'activitat 43.

2) Treballar les activitats 44-47.

Desenvolupament de la sessió

P: Començo recordant que havien de portar feta l'activitat 43 i faig sortir simultàniament a la pissarra a Sandra D per fer l'apartat *c* de l'activitat 42 i Alberto C. per fer l'apartat *a* de l'activitat 43.

A: Mentre aquests alumnes escriuen a la pissarra, d'altres reclamen la meva atenció particular per preguntar-me dubtes sobre aquestes activitats . Sandra escriu el següent a la pissarra

$$h(x) = (8x^2 - x - 1)\cdot(-3x^2+3x)$$
$$h'(x) = -16x - 1\cdot(-3x^2+3x) + (-6x + 3)\cdot(8x^2 - x - 1)$$
$$h'(x) = 48x^3 - 48x^2 + 3x^2 - 3x - 48x^3 + 24x^2 + 6x^2 - 3x + 6x - 3 = -15x^2 - 3$$

i Alberto C escriu el següent:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3)'\cdot x^2 - (x^2)'\cdot(x^2 - 3)}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)\cdot x^2 - (2x)\cdot(x^2 - 3)}{x^4}$$

P: Abans de comentar les respostes d'aquests dos alumnes comento que en aquesta activitat han de mirar la fórmula de la funció que s'ha de derivar no com <<un tot>> sinó com <<un tot format per parts>>, i que les fórmules de l'activitat 43 es poden considerar globalment, o bé com la funció que resulta de fer la divisió de dues funcions. Seguidament dic que han de saber de memòria aquesta regla de derivació i faig una analogia amb la multiplicació, comentant que si en un problema hem de fer una multiplicació i moltes altres coses, no podem estar mitja hora pensant com es fa la multiplicació, perquè no tindrem temps de resoldre el problema. Amb les derivades passa el mateix, és a dir, aplicar la regla de la derivada d'una divisió serà una de les moltes coses que hauran de fer en un problema i no podran estar mitja hora pensant com es troba la derivada d'una divisió. Remarco que, a partir d'ara, derivar serà com multiplicar en cursos anteriors Continuo dient que, si interpretem la funció de l'apartat *a* de l'activitat 43 com una divisió, puc aplicar la regla de la derivada d'una divisió de funcions, i assenyalo a la pissarra la resposta d'Alberto C. explicant com han aplicat la regla de la divisió.

A continuació comento la resposta de Sandra D. i li faig observar que si no posa el parèntesi en $-16x-1\cdot(-3x^2+3x)$ el factor $-3x^2+3x$ només multiplica al -1, en comptes de multiplicar a $-16x-1$. També comento que, malgrat no posar el parèntesi, en el pas següent ha fet la multiplicació com si l'hi hagués posat; li dic que de fet ha comès dos errors, però un ha compensat a l'altre.

Torno a insistir que saber derivar és una mica com saber les taules de multiplicar i que malauradament no s'aprèn a derivar copiant de la pissarra perquè és una qüestió de pràctica personal.

A: Jordi C. pregunta si a l'examen les derivades s'hauran de simplificar.

P: Li responc que allò que és desitjable és simplificar l'expressió que resulta després d'aplicar les regles de derivació i que, quan calcular la funció derivada sigui una eina per resoldre un problema, inevitablement s'ha de simplificar. Però, com que ara l'objectiu és aprendre a derivar i a practicar les regles de derivació, es proposen funcions per derivar que són més complicades que les que s'han de derivar normalment. Per tant, a l'examen, si la pregunta és calcular la derivada, no caldrà fer la simplificació, però si és una pregunta en què la funció derivada és una eina per resoldre el problema, llavors s'ha de simplificar la funció derivada. A continuació faig sortir David M. a la pissarra per respondre l'apartat *b* de l'activitat 43. Mentre l'alumne escriu la seva resposta a la pissarra, dic que facin els quatre primers apartats de l'activitat 7 de l'autoavaluació de la pàgina 363 i els tres primers apartats del problema 18 de la pàgina 356 de l'apartat <<Per practicar més>> i insisteixo molt que si no practiquen la tècnica de la derivació no aprendran a derivar.

A: David M. respon el següent:

$$g(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2}$$

$$g'(x) = \frac{(8x - 5)\cdot(x^2 + 2) - (2x)\cdot(4x^2 - 5x + 1)}{(x^2 + 2)^2}$$

P: Insisteixo que han d'interpretar aquesta fórmula no com un tot sinó com el resultat de la divisió del numerador pel denominador, i aplicar després la regla de la divisió. Assenyalant sobre la resposta que David M. ha posat a la pissarra, explico com ha aplicat la regla de la divisió i continuo fent la simplificació fins a obtenir el resultat

$$g(x) = \frac{5x^2 + 14x - 10}{(x^2 + 2)^2}$$

A: Alguns alumnes pregunten si no cal desenvolupar el denominador fent el quadrat d'una suma

P: Dic que efectivament es pot desenvolupar el denominador, però que jo els aconsello deixar el denominador elevat al quadrat sense desenvolupar, perquè d'aquesta manera és més fàcil fer la simplificació. A continuació pregunto quants d'ells han fet l'apartat *c* de l'activitat 43

A: Només 9 alumnes aixequen el braç.

P: Dic que són molt pocs els que han fet aquest apartat i insisteixo en el fet que no s'aprèn a derivar copiant de la pissarra i dic que facin el favor d'intentar fer tots l'apartat *c* de l'activitat 43.

A: Tots els alumnes es posen a fer l'activitat (crec que han intuït que m'he enfadat) i alguns reclamen la meva atenció particular.

P: Al cap d'una estona faig sortir Rocio P. a la pissarra.

A: Rocio P. escriu el següent

$$h(x) = \frac{7x^2 - 3x}{-2x^2 + 3x - 5}$$

$$h'(x) = \frac{(-14x - 3)\cdot(-2x^2 + 3x - 5) - (-4x + 3)\cdot(7x^2 - 3x)}{(-2x^2 + 3x - 5)^2}$$

$$h'(x) = \frac{15x^2 - 70x + 15}{4x^4 + 9x^2 + 25}$$

P: Pregunto a tota la classe on ha comès l'error Rocio P.

A: Alguns alumnes diuen que s'ha equivocat en desenvolupar el denominador.

P: Assenyalant la resposta de Rocio P. explico com aquesta alumna ha aplicat la regla de la divisió i dic que no s'ha equivocat en derivar sinó que l'error l'ha comès en desenvolupar el quadrat del denominador, ja que ha aplicat que el quadrat d'una suma és la suma dels quadrats dels sumands. Insisteixo que és millor no desenvolupar el denominador perquè, de cara a la simplificació, és millor, i també perquè no correm el perill de desenvolupar malament el quadrat del denominador. A continuació comento que, si fem la derivada quan només tenim sumes i restes, la funció derivada és més senzilla, mentre que, quan tens productes i divisions, la funció derivada pot ser força més complicada que la funció inicial. A continuació dic que més endavant hauran d'aplicar la tècnica de la derivació com una eina per resoldre problemes i que els caldrà tenir-ne un bon domini, que només s'aconsegueix practicant i els recordo que tenen activitats dels apartats <<Per practicar més>> i <<Autoavaluació>> que poden fer.

A: Alguns alumnes reclamen la meva atenció particular per comentar el càlcul de la funció derivada de l'apartat *c* de l'activitat 43. Hi ha alguns alumnes que creuen que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades.

P: A continuació comento que, amb el que sabem fins ara, només podem derivar les funcions afins i les paràboles o bé funcions que són el resultat de sumar, restar multiplicar o dividir aquestes dues famílies de funcions, i que ara veurem com es pot calcular la derivada de qualsevol funció polinòmica i després com es calcula la derivada de les funcions racionals. Recordo que les funcions racionals són aquelles que tenen per fórmula una divisió de polinomis. Seguidament escric a la pissarra l'expressió general d'una funció polinòmica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots a_1 x + a_0$$

i explico que aquesta funció es pot interpretar com la suma de funcions del tipus $nombre{\cdot}x^{exponent}$ i que, per tant, si sabem derivar $y = x^n$,podrem derivar qualsevol polinomi aplicant les regles de derivació. Remarco que, si sabem calcular la derivada de $y = x^n$, podrem calcular la derivada de qualsevol funció polinòmica .Dic que facin l'activitat 44.

A: Es posen a fer-la.

P: Mentre els alumnes fan l'activitat 44, escric a la pissarra una taula en què només poso el títol de les tres columnes (funció, transformació de la funció i derivada). Al cap d'una estona comento que a la primera fila tenim la funció $f(x) = x$,i que aquesta funció es pot escriure d'una altra manera que és equivalent, $f(x) = x^1$,i els pregunto quina és la derivada de $f(x) = x$.

A: Alguns alumnes responen que és 1.

P: Completo la primera fila de la taula fent-los observar que $f'(x) = 1$ també es pot escriure com $f'(x) = 1x^0$. A continuació escric $f(x) = x^2$ a la primera columna de la segona fila i comento que a la segona posarem la mateixa fórmula sense cap transformació, i els pregunto quina és la derivada de $f(x) = x^2$.

A: Molts alumnes responen que és $f'(x) = 2x$.

P: Completo la segona fila de la taula fent-los observar que $f'(x) = 2x$ també es pot escriure com $f'(x) = 2x^1$. A continuació escric $f(x) = x^3$ a la primera columna de la tercera fila i comento que a la segona posarem una transformació d'aquesta fórmula, $f(x) = x^2{\cdot}x$, la qual cosa ens permet aplicar-li la regla de la divisió del producte: $f'(x) = 2x{\cdot}x + 1{\cdot}x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$. Insisteixo en el fet que una transformació de la fórmula de la funció $f(x) = x^3$ ens ha permès interpretar-la com un producte de funcions més senzilles de derivada coneguda, amb la qual cosa hem pogut aplicar la regla de la divisió per obtenir, de manera indirecta, la derivada de la funció $f(x) = x^3$, que no coneixíem. A continuació dic que, si transformem $f(x) = x^4$ en el producte $f(x) = x^3{\cdot}x$, resulta que tenim un producte de funcions més senzilles de derivada coneguda i dic que completin la taula

Funció	Transformació de la funció	Derivada
$f(x) = x$	$f(x) = x^1$	$f'(x) = 1 = 1x^0$
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x = 2x^1$
$f(x) = x^3$	$f(x) = x^2{\cdot}x$	$f'(x) = 2x{\cdot}x + 1{\cdot}x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f(x) = x^3{\cdot}x$	$f'(x) =$
$f(x) = x^5$		
....	....	....
$f(x) = x^n$		

A: Els alumnes es posen a completar la taula i molts reclamen la meva atenció particular per aclarir dubtes.

P: Al cap d'una estona dic que han de trobar que la derivada de $f(x) = x^4$ és $f'(x) = 4x^3$ i pregunto si han obtingut aquest resultat.

A: La majoria dels alumnes responen que sí.

P: Completo la fila i a continuació dic que per a la funció $f(x) = x^5$ han de trobar que $f'(x) = 5x^4$.

A: La majoria dels alumnes responen que l'han trobada.

P: Completo la fila i poso $f(x) = x^6$ en la primera columna de la fila amb punts suspensius i dic que han de trobar que $f'(x) = 6x^5$

A: La majoria dels alumnes responen que l'han trobada.

P: Completo la fila i dic que posin a l'última fila la fórmula per a qualsevol exponent i pregunto quina és la fórmula de la derivada per a qualsevol exponent.

A: Alguns alumnes han trobat que $f'(x) = nx^{n-1}$, però molts d'altres són incapaços d'escriure aquest resultat.

P: Els suggereixo que intentin dir amb paraules allò que han fet, per exemple si tenim la funció $f(x) = x^1$, hem fet un per ics elevat a zero, si tenim $f(x) = x^2$, hem fet dos per ics elevat a u, etc., si tenim $f(x) = x^5$, pregunto on va a parar l'exponent 5.

A: Patricia F. i d'altres alumnes responen que passa davant multiplicant.

P: Pregunto a quin exponent elevem ics en la fórmula de la derivada.

A: Laura N. respon que hem de restar u a l'exponent.

P: Completo l'última fila i insisteixo que, per calcular la derivada de $f(x) = x^n$, l'exponent passa davant multiplicant, i la ics queda elevada a l'exponent menys u. La taula de la pissarra queda així

Funció	Transformació de la funció	Derivada
$f(x) = x$	$f(x) = x^1$	$f'(x) = 1 = 1x^0$
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x = 2x^1$
$f(x) = x^3$	$f(x) = x^2 \cdot x$	$f'(x) = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f(x) = x^3 \cdot x$	$f'(x) = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$
$f(x) = x^5$	$f(x) = x^4 \cdot x$	$f'(x) = 4x^3 \cdot x + 1 \cdot x^4 = 5x^4$
$f(x) = x^6$	$f(x) = x^5 \cdot x$	$f'(x) = 5x^4 \cdot x + 1 \cdot x^5 = 6x^5$
$f(x) = x^n$	$f(x) = x^{n-1} \cdot x$	$f'(x) = (n-1)x^{n-2} \cdot x + 1 \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}$

P: Després dic que amb aquest resultat, que està recollit en el <<Recorda>>, juntament amb les regles de derivació, ja podem trobar la derivada de qualsevol funció polinòmica i de qualsevol funció racional. Dic que facin les activitats 45, 46 i 47.

A: Es posen a fer aquestes activitats i molts reclamen la meva atenció particular per comentar dubtes.

P: Mentre fan les activitats, recordo que molts alumnes encara no han pagat el dossier de derivades i que fins i tot alguns ni tan sols han pagat el de límits, i que si no ho fan, deixaré de repartir material i hauran de copiar apunts.

A: El delegat comenta que ell ja està fart de perseguir la gent perquè paguin, d'altres diuen que això no és just i que el que he de fer és no repartir més dossiers als alumnes que no han pagat, etc

P: Faig sortir a la pissarra Raúl C. Per fer l'activitat 45.

A: Raúl C. escriu el següent:
a) $f(x) = x^7$ $\quad f'(x) = 7x^6$
b) $f(x) = x^{32}$ $\quad f'(x) = 32x^{31}$
c) $f(x) = 3x^4$ $\quad f'(x) = 12x^3$

d) $f(x) = \frac{3}{2}x^6$ $\quad f'(x) = 9x^5$

Alguns alumnes pregunten d'on surt el nombre 9 de l'apartat *d*.

P: Comento que surt de fer $f'(x) = \frac{3}{2}\cdot 6\, x^{6-1} = \frac{18}{2}x^5 = 9x^5$ i faig sortir Elia G. a fer l'activitat 46 a la pissarra.

A: Elia escriu el següent:
a) $f(x) = -4x^5 + 3x + 3$ $\quad f'(x) = -20x^4 + 3$
b) $g(x) = 18x^7 - 7x^3 - 12$ $\quad g'(x) = 126x^6 - 21x^2$
c) $h(x) = (x^3 - 7x - 12)\cdot(-3x^4)$ $\quad h'(x) = (3x^2 - 7)\cdot(-3x^4) + (-12x^3)\cdot(x^3 - 7x - 12)$

P: Toca el timbre i recordo que han de fer a casa seva l'activitat 47 i que han de pagar el dossier.

Valoracions

1) En relació als ítems 61-63 del subobjectiu 3.3 crec que:

Ítem 61	L'alumnat ha entès que la funció derivada de $f(x) = x^n$ és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$, a partir de la transformació de la fórmula de $f(x) = x^n$ i d'una generalització
Ítem 62	L'alumnat sap calcular la funció derivada de les funcions polinòmiques i començar a saber derivar les funcions racionals
Ítem 63	L'alumnat va entenent que la funció derivada es pot calcular indirectament utilitzant les regles de derivació.

5.2.21. Subseqüència 11. Derivada de les funcions exponencials i logarítmiques

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 48-55 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3:

64 Entendre que totes les rectes tangents a la funció $f(x) = e^x$ presenten una determinada propietat (totes les subtangents valen 1).

65 Calcular $f\,'(a)$ gràficament, partint de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f\,'(a) = e^a/1 = e^a$. I observar si l'alumnat entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f\,'(x) = e^x$.

66 Entendre que la funció $f(x) = \ln x$ és la inversa de la funció $g(x) = e^x$, i que la propietat que la subtangent sempre val 1 es traslladа a la funció logarítmica de la manera que indica la figura de l'activitat 50. És a dir, que totes les tangents a la funció $f(x) = \ln x$ compleixen una determinada propietat pel fet que totes les tangents a la funció $g(x) = e^x$ compleixen que la subtangent sempre val 1.

67 Entendre que les funcions exponencials i logarítmiques són inverses l'una de l'altra i quina relació hi ha entre les seves gràfiques.

68 Calcular, per a la funció $f(x) = \ln x$, $f\,'(a)$, partint de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f\,'(a) = 1/a$. I observar si l'alumnat entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = 1/x$.

69 Determinar si l'alumnat pot calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$, a partir de la transformació de la fórmula, mitjançant el canvi de base i aplicant les regles de derivació.

70 Entendre que una de les propietats de la funció exponencial de base a és que, per a qualsevol punt del gràfic de la funció, la subtangent sempre val el mateix nombre k.

71 Calcular $f\,'(c)$ gràficament, a partir de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f\,'(c) = a^c/k$. I observar si l'alumnat entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = a^x/k$.

72 Entendre que, per poder tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base a, només cal saber el valor de k. I que aquest valor es pot calcular utilitzant que la funció exponencial de base a té per inversa la funció $f(x) = \log_a x$, la derivada de la qual ja coneixem.

L'objectiu d'aquest apartat és calcular les funcions derivades de les funcions exponencials i logarítmiques. sense seguir el procediment que normalment se seguia a BUP :

1- Calcular el límit: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$

2- Obtenir la derivada de la funció $y = \log_a x$ a partir de la derivada de la funció $y = \ln x$ i del canvi de base.

3- Introduir la tècnica de la derivació logarítmica o bé la fórmula de la derivada de la funció inversa.

4- Aplicar la tècnica de la derivació logarítmica (o bé la funció inversa) per obtenir la derivada de la funció $y = a^x$.

5- Com a cas particular del resultat anterior s'obté que la funció $y = e^x$ és una funció tal que la seva funció derivada és ella mateixa.

perquè cal haver estudiat anteriorment les indeterminacions del tipus 1^∞, la derivació logarítmica i la derivada de la funció inversa. En la unitat hi ha dos possibles itineraris per calcular les derivades de les funcions exponencials i logarítmiques. El primer té com el punt de partida el fet que totes les rectes tangents a la funció $y = e^x$ presenten una determinada propietat (totes les subtangents valen 1), mentre que el segon es troba a l'apartat de <<Per saber-ne més>> i té com a punt de partida el càlcul del límit $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}$ .Aquest segon itinerari pressuposa que l'alumnat ha treballat anteriorment la indeterminació 1^∞.

En l'apartat *a* de l'activitat 48, l'alumnat ha de calcular $f'(a)$ gràficament utilitzant que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(a) = e^a/1 = e^a$. En canvi, a l'apartat *b* ha d'observar que el raonament que ha seguit en l'apartat *a* és vàlid per qualsevol valor de l'abscissa, i que, per tant, $f'(x) = e^x$. En l'activitat 49 ha d'utilitzar la derivada de la funció $y = e^x$ juntament amb les regles de derivació i les funcions derivades de les funcions elementals que ja coneix.

Per trobar la derivada de la funció $f(x) = \ln x$, s'ha d'utilitzar que és la inversa de la funció $g(x) = e^x$, i que la propietat que la subtangent sempre val 1, es traslada a la funció logarítmica de la manera que indica la figura de l'activitat 50. És a dir, que totes les tangents a la funció $f(x)=\ln x$ compleixen una determinada propietat pel fet que totes les tangents a la funció $g(x) = e^x$ compleixen que la subtangent sempre val 1.

En l'apartat *a* de l'activitat 50 l'alumnat ha de calcular $f'(a)$ gràficament, utilitzant que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(a) = 1/a$. En canvi, a l'apartat *b* ha d'observar que el raonament que ha seguit en l'apartat *a* és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que, per tant, $f'(x) = 1/x$. En l'activitat 51 ha d'utilitzar la derivada de la funció $y = \ln x$,juntament amb les regles de derivació i les funcions derivades de les funcions elementals que ja coneix.

Cal remarcar que, si bé s'utilitza que la funció $f(x) = \ln x$ és la inversa de la funció $g(x)$

$= e^x$, no s'utilitza que el punt $(a, f(a))$, en fer la simetria respecte a la bisectriu del primer quadrant, es converteix en $(f(a)\, ,\ a)$, sinó que a la gràfica de l'activitat 48 es considera un punt qualsevol (a, e^a) i a l'activitat 49 es considera un punt qualsevol $(a, \ln a)$.

En estudiar la família de les funcions logarítmiques en cursos anteriors, l'alumnat ha estudiat el canvi de base i per tant hauria de saber que qualsevol funció logarítmica compleix $\log_a x = k \cdot \ln x$, on k és igual a $\log_a e$ o bé $\dfrac{1}{\ln a}$. Per tant:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad o\ bé \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

En l'activitat 52 ha d'utilitzar la derivada de la funció $y = \ln x$ juntament amb les regles de derivació i les funcions derivades de les funcions elementals que ja coneix..

Les activitats de la unitat pressuposen que quan s'han estudiat les propietats de la funció exponencial de base a, s'ha vist que: per a qualsevol punt del gràfic de la funció la subtangent sempre val el mateix nombre k. En l'apartat a de l'activitat 53, l'alumnat ha de calcular $f'(c)$ gràficament utilitzant que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(c) = a^c/k$, mentre que a l'apartat b ha d'observar que el raonament que ha seguit en l'apartat a és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que, per tant, $f'(x) = a^x/k$.

Per poder tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base a, només cal saber el valor de k. Aquest valor es pot calcular utilitzant que la funció exponencial de base a té per inversa la funció $f(x) = \log_a x$. En l'apartat a de l'activitat 54, l'alumnat ha d'entendre que el segment BC té la mateixa longitud k que la subtangent de la funció exponencial de base a. En l'apartat b de l'activitat 54, l'alumnat ha de calcular la derivada de la funció $y = \log_a x$ gràficament, utilitzant que la derivada és el pendent de la recta tangent: $(\log_a x)' = BC/x$ i igualar a la fórmula de la derivada de la funció $y = \log_a x$, que ja coneix:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\frac{1}{\ln a}}{x} = \frac{k}{x} \Rightarrow \frac{1}{\ln a} = k$$

Un cop sabem que $k = 1/\ln a$. Tenim:

$$(a^x)' = \frac{a^x}{k} = a^x \cdot \frac{1}{k} = a^x \cdot \ln a$$

En l'activitat 55, l'alumnat ha d'utilitzar la derivada de la funció $y = a^x$ juntament amb les regles de derivació i les funcions derivades de les funcions elementals que ja coneix.

Cal remarcar que, si bé l'alumnat utilitza que la funció $f(x) = a^x$ és la inversa de la funció $g(x) = \log_a x$, no s'utilitza que el punt $(a, f(a))$ es converteix en $(f(a), a)$. En la gràfica de l'activitat 53 es considera un punt qualsevol (c, e^c) i en l'activitat 54, es considera un punt qualsevol $(c, \log_a c)$.

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en les sessions 21-1-98, 27-1-98 i 28-1-98

Sessió del 21-1-98

Faltes: no falta ningú.

Planificació

1) Acabar l'activitat 47.

2) Utilitzar el programa Calcula perquè els alumnes descobreixin que les funcions exponencials compleixen que totes les tangents tenen una subtangent d'igual longitud.

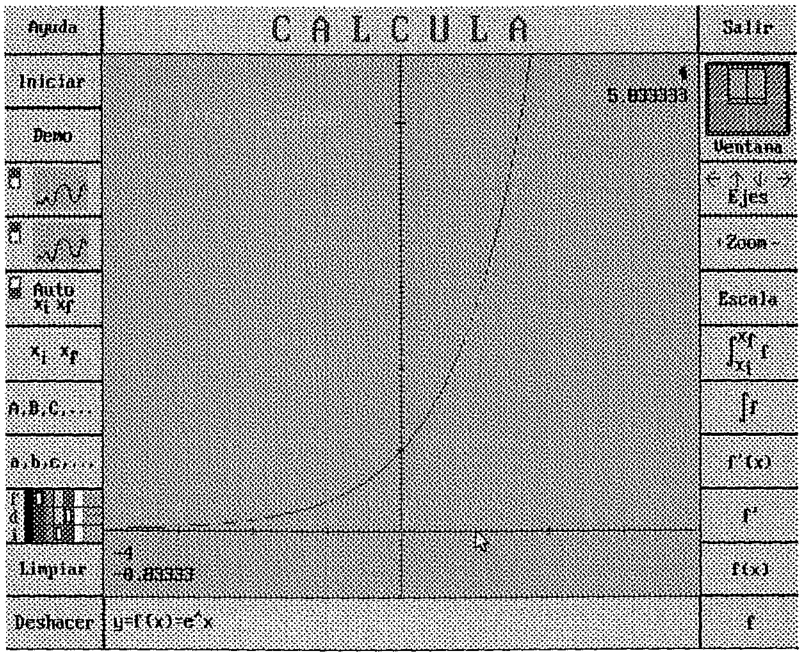
Desenvolupament de la sessió

Incidències: No he pogut accedir a l'aula d'informàtica perquè estava ocupada. Només puc accedir a l'ordinador del Departament de Matemàtiques, per la qual cosa decideixo portar els alumnes en grups petits a l'ordinador del Departament de Matemàtiques.

P: Dic que per veure una propietat que compleixen les funcions exponencials convé utilitzar els graficadors informàtics, que són programes per representar funcions. Explico que ara anirem de 10 en 10 a l'ordinador del Departament perquè l'aula d'informàtica està ocupada. Indico quins 10 alumnes han de venir i dic als altres que facin l'activitat 47 .

A: Els 10 alumnes vénen amb mi i els altres, majoritàriament, en comptes de fer l'activitat 47 parlen entre ells.

P: Sec davant de l'ordinador i els deu alumnes es posen al meu voltant. Amb el programa *Calcula* represento la funció $f(x) = e^x$ i en un punt qualsevol dibuixo la recta tangent



Seguidament moc el punt i els faig observar que el podem moure sobre la gràfica i que per a cada punt tenim la recta tangent a la gràfica en aquest punt. Tinc molta cura a fer-los notar que el punt <<no és el mateix punt que se mou>> sinó que anem obtenint diferents punts; així com tampoc és la mateixa recta tangent que <<es mou> sinó que obtenim per a cada punt rectes tangents diferents. Remarco que no han de cometre l'error de pensar que la gràfica és una carretera per on camina una persona (el punt) amb un sac a l'esquena (la recta tangent) i creure que sempre és la mateixa persona amb el mateix sac que està en diferents punts de la carretera. Pregunto si queda clar que són punts diferents i rectes tangents diferents.

A: Responen que sí.

P: A continuació moc el punt i dic que es fixin en la subtangent (assenaylo sobre la pantalla el segment que anomeno subtangent) i pregunto què observen.

A: Víctor B, Sandra D. i d'altres alumnes responen que val 1.

P: Comento que quan moc el ratolí hi ha moltes coses que varien, el punt és diferent, la recta és diferent, etc., però hi ha una cosa que no varia: que la subtangent sempre mesura.....

A: 1

P: Pregunto si tenen clar que per a la funció $f(x) = e^x$ les subtangents sempre valen 1.

A: Tots responen que sí.

P: A continuació repetim el mateix procés amb la funció $f(x) = 4^x$

A: Arriben a la conclusió que per a aquesta funció totes les subtangents mesuren aproximadament 0,75 .

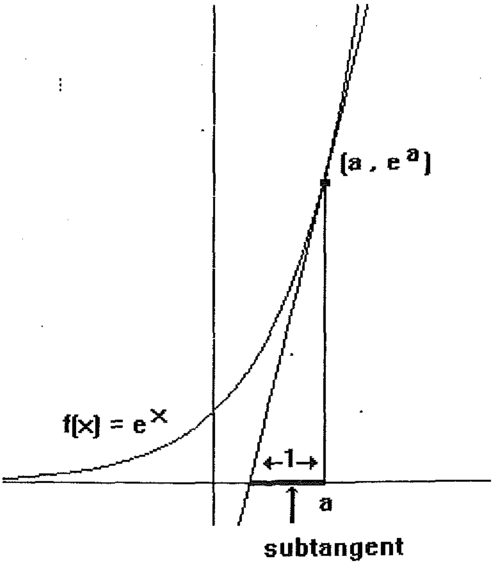
P: A continuació repetim el mateix procés amb la funció $f(x) = 2^x$.

A: Arriben a la conclusió que per aquesta funció totes les subtangents mesuren aproximadament 1,5 .

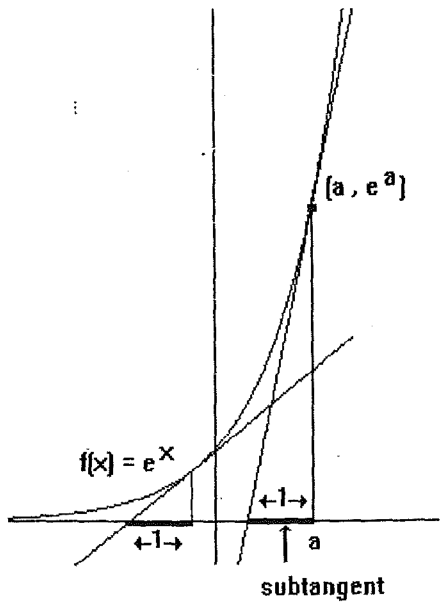
P: Comento que, donada una funció exponencial, totes les subtangents mesuren el mateix; ara bé, si canviem de funció exponencial, també totes les subtangents mesuren el mateix, però aquest <<mateix>> no és igual al <<mateix>> de la primera funció. Per exemple, per a la funció $f(x) = e^x$ totes les subtangents mesuren 1, però si considerem la funció $f(x) = 4^x$ totes les subtangents mesuren el mateix, que en aquest cas és aproximadament 0,75, i si considerem la funció $f(x) = 2^x$,totes les subtangents mesuren el mateix, que en aquest cas és aproximadament 1,5.

A: Repetim el procés anterior tres vegades més fins que tots els alumnes han passat per davant de l'ordinador.

P: Un cop hem tornat a l'aula, comento a la pissarra allò que hem observat amb l'ordinador i dic que, si tenim la funció exponencial $f(x) = e^x$ on $e = 2{,}718....$ i considerem un punt qualsevol i la recta tangent en aquest punt, resulta que la subtangent (allò que està per sota de la tangent, el segment que té per extrems l'abscissa del punt de tall de la recta tangent amb l'eix d'abscisses i l'abscissa del punt on considerem la tangent) sempre val 1.Mentrestant dibuixo a la pissarra la figura següent.



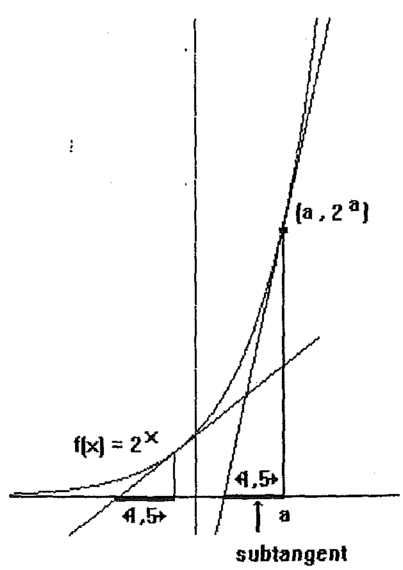
A continuació dibuixo diferents punts i les respectives tangents amb la subtangent igual a 1



P: A continuació pregunto als alumnes si ho han entès.

A: Responen que sí.

P: Continuo dient que si canviem de funció, per exemple $f(x) = 2^x$, les subtangents seran totes iguals a un nombre diferent, aproximadament 1,5. La longitud de les subtangents depèn de la base de la funció (modifico el dibuix de la pissarra de la manera següent)



Insisteixo que, en el cas que la base sigui el nombre e, la longitud de la subtangent és molt fàcil de recordar perquè és 1. A continuació dic que aquests resultats els utilitzarem més endavant i que ara seguirem on ho vàrem deixar l'altre dia, és a dir, en l'activitat 47,on es tractava de trobar la funció derivada de funcions racionals, és a dir, de funcions que són divisions de funcions polinòmiques.

A: Es posen a fer l'activitat 47.

P: Al cap d'una estona faig sortir Angela L. a la pissarra .

A: Angela L. escriu a la pissarra el següent:

a) $f(x) = \dfrac{3x^7 - 3x}{x^5 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(21x^6 - 3)\cdot(x^5 + 1) - 5x^4\cdot(3x^7 - 3x)}{(x^5 + 1)^2}$$

P: Dic que Angela L. ha aplicat correctament la regla de la divisió i que la segona feina a fer seria simplificar, però que ara ens limitarem a aplicar la regla de la divisió. A continuació faig sortir Victor B. a fer l'apartat *b* a la pissarra.

A: Victor B. escriu el següent:

b) $g(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 17}{-2x^2 + 2}$

$$g'(x) = \frac{(-2x - 3)\cdot(-2x^2 + 2) + 4x\cdot(-x^2 - 3x + 17)}{(-2x^2 + 2)^2} = \frac{-6x^2 + 64x - 6}{(-2x^2 + 2)^2}$$

mentre, d'altres alumnes em fan consultes personals sobre el càlcul d'aquesta derivada i de l'anterior.

P: Dic que Victor B. ha aplicat correctament la regla de la divisió i també ha fet bé la simplificació i pregunto als alumnes si han arribat a aquest resultat.

A: Patricia F. diu que ella ha continuat de la manera següent:

$$g'(x) = \frac{-6x^2 + 64x - 6}{(-2x^2 + 2)^2} = \frac{-3x^2 + 62x - 3}{2(-x^2 + 1)^2}$$

P: Dic que el que ella ha fet és correcte, però jo aconsello deixar el denominador elevat al quadrat sense desenvolupar, perquè en alguns casos podrem simplificar algun factor del denominador amb algun factor del numerador. A continuació faig sortir Laura A.a fer l'apartat *c*.

A: Laura A. escriu el següent:

c) $h(x) = \dfrac{-7x^7 - 3x^2}{-x^3 + 3x^2 - 5}$

$$h'(x) = \frac{(-49x^6 - 6x)\cdot(-x^3 + 3x^2 - 5)-(-3x^2 + 6x)\cdot(-7x^7 - 3x^2)}{(-x^3 + 3x^2 - 5)^2} =$$

$$= \frac{28x^9-105x^8+245x^6-3x^4+30x}{(-x^3 + 3x^2 - 5)^2}$$

mentre d'altres alumnes em fan consultes personals sobre el càlcul d'aquesta derivada i de les dues anteriors.

P: Pregunto si estan d'acord amb aquesta simplificació.

A: Alguns alumnes diuen que sí i d'altres reclamen la meva atenció particular per aclarir algun dubte.

P: A continuació dic que convé continuar practicant les regles de derivació i que farem els exercicis de l'apartat <<Per practicar més>> que tenim pendents i algun més. Explico que en aquest cas concret, i no en cap altre, només aplicarem les regles de derivació i no farem la simplificació i dic que els acabin de fer perquè de seguida els corregirem a la pissarra.

A: Es posen a fer aquests exercicis.

P: Mentre fan aquestes activitats torno a recordar que encara hi ha molts alumnes que no han pagat el dossier.

A: Hi ha algunes bromes sobre els morosos, demanant rebaixa, etc.

P: També aprofito per dir que hem de fixar la data de l'examen.

A. Després d'un estira i arronsa, acordem que la data de l'examen serà el dimarts 3 de febrer.

P: Dic que allò que entra a l'examen és tot el dossier.

A: Hi ha alguns intents per aconseguir que només entri la segona part del dossier, però acaben acceptant que l'examen serà de tot el dossier.

P: També recordo que vaig encarregar com a treball voluntari les activitats 35-37 de l'apartat <<Per saber-ne més>>, les quals servien per justificar la regla de la derivada del producte i del quocient. I dic que hi ha temps per lliurar-lo fins al dia de l'examen.

A: Alguns alumnes diuen que és molt difícil .

P: Contesto que la idea és que facin un treball individual, però que si tenen algun dubte puntual me'l poden preguntar. Remarco que el treball l'han de fer ells, no jo. A continuació dic que farem els apartats *a-d* de l'activitat 18 de la pàgina 356 de <<Per practicar més>> i recordo que ja els haurien de tenir fets.

A: Es posen a fer aquests apartats i els que ja els tenen fets es dediquen a parlar entre ells.

P: Recordo que també havien de fer els apartats *a-c* de l'activitat 7 d' <<Autoavaluació>> de la pàgina 363 i que ara ja poden fer l'apartat *d*.

A: A poc a poc es van posant quasi tots a treballar i alguns reclamen la meva atenció per preguntar-me alguns dubtes .

P: Faig sortir a la pissarra Jordi C. perquè faci l'activitat 18.

A: Jordi escriu:

a) $f(x) = -5x^3 + 2x + 3$ $\qquad$ $f'(x) = -15x^2 + 2$

b) $g(x) = (8x^2 -5x -12)\cdot(-4x^2)$ $\qquad$ $g'(x) = (16x -5)\cdot(-4x^2)$ $-8x\,(8x^2 -5x -12) = -128x^3 +60x^2 +96x$

P: Faig a la pissarra el següent

$$g(x) = -32x^4 +20x^3 +48x^2 \qquad g'(x) = -128x^3 +60x^2 +96x$$

i comento que en comptes de primer derivar i després simplificar, el que he fet és primer multiplicar i després derivar la funció polinòmica que resulta.

A: Jordi continua derivant els apartats *c* i *d* i escriu el següent:

c) $\quad h(x) = \dfrac{x^2 -3}{x^2 +3} \qquad h'(x) = \dfrac{(2x^2)\cdot(x^2 +3)-2x\cdot(x^2 -3)}{(x^2 +3)^2}$

d) $\quad i(x) = \dfrac{-4x^2 - 5x + 1}{x^2 +2} \qquad i(x) = -\dfrac{(-8x - 5)\cdot(x^2 +2)-2x(-4x^2 - 5x + 1)}{(x^2 +2)^2}$

Alguns alumnes demanen aclariments sobre el que ha escrit Jordi.

P: Assenyalant sobre allò que ell ha escrit a la pissarra explico com ha aplicat la regla de la derivada d'una divisió.

P: Toca el timbre i dic que facin l'activitat 7 de la pàgina 363 a casa seva fins a arribar a les solucions simplificades que escric a la pissarra.

A: Alguns vénen a preguntar-me dubtes sobre el càlcul de les derivades de l'activitat 18. A alguns d'ells els dic que seria convenient que repetissin a casa seva les derivades que ja hem fet a classe, sense mirar el resultat que tenen en el seu quadern, i que després comprovessin si els hi havia sortit el mateix resultat.

Valoracions

1) A poc a poc va millorant la tècnica de la derivació, però encara hi ha alumnes que consideren que la derivada d'un producte és el producte de derivades, i que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades. També cometen errors en el càlcul algèbric i en la simplificació del resultat.

2) En relació a l'ítem 64 crec que els alumnes han entès que totes les rectes tangents a la funció $f(x) = e^x$ presenten una determinada propietat (totes les subtangents valen 1).

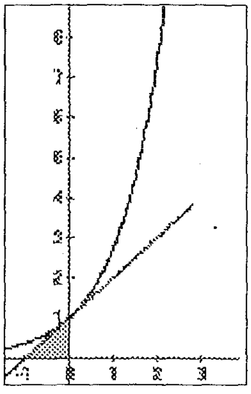
5.2.22. Subseqüència 5 d'avaluació (qüestionari 6)

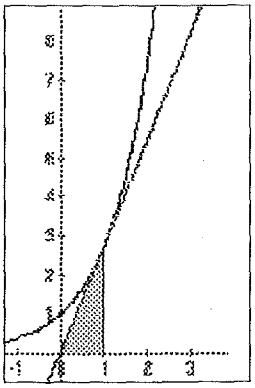
L'objectiu d'aquesta seqüència d'avaluació és esbrinar si els alumnes són capaços de trobar la derivada de la funció $f(x) = e^x$ per si sols a partir del fet, observat en la classe anterior, que totes les rectes tangents a la funció $f(x) = e^x$ presenten una determinada propietat (totes les subtangents valen 1). El qüestionari que vam dissenyar (núm 6) fou el següent:

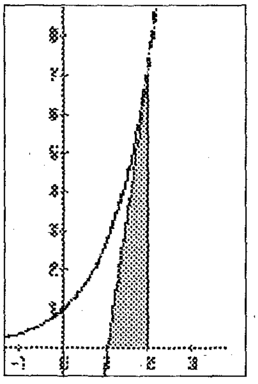
Qüestionari 6

1 A l'aula d'informàtica has observat que la funció $f(x) = e^x$ compleix que totes les seves subtangents tenen una longitud igual a 1. Utilitzant aquesta propietat:

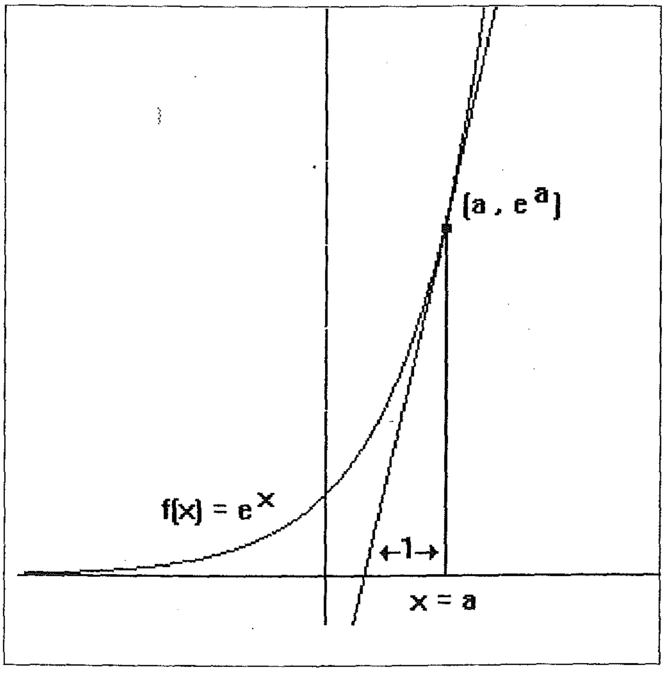
a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ i $f'(2)$







b) Calcula $f'(a)$



c) Demostra que la funció derivada de la funció $f(x) = e^x$ és la funció $f'(x) = e^x$.

Aquest qüestionari es va passar el dia 22-1-98 a tota la classe.

Sessió 22-1-98

Planificació

1) Passar el qüestionari 6 sobre el càlcul de la funció derivada de la funció $f(x) = e^x$
2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Falta Angela L.

P: Distribueixo els 39 alumnes perquè facin el qüestionari 6 individualment. El reparteixo i els demano que el contestin individualment. Abans que els alumnes comencin a respondre'l, faig les observacions següents:

- Aquest qüestionari inclou l'activitat 48 del dossier que treballarem a la propera classe *A*
- L'objectiu és esbrinar si són capaços de trobar la derivada de la funció $f(x) = e^x$ per si sols.
- A l'activitat 1 es fa referència a allò que vam observar ahir a la pantalla de l'ordinador: que la funció $f(x) = e^x$ compleix que totes les seves subtangents tenen una longitud igual a 1.
- Allò que és fonamental en aquest qüestionari és trobar la funció derivada de la funció exponencial de base el nombre *e*, utilitzant aquesta propietat de les subtangents.
- En l'apartat *a* d'aquest qüestionari s'ha de calcular la derivada per a tres valors concrets de l'abscissa. Aquestes derivades es poden calcular de manera aproximada, utilitzant la figura o bé de manera exacta, si es té en compte la fórmula de la funció.
- Insisteixo que l'objectiu d'aquest qüestionari és tenir informació sobre la classe en general i que no té cap sentit intentar copiar.

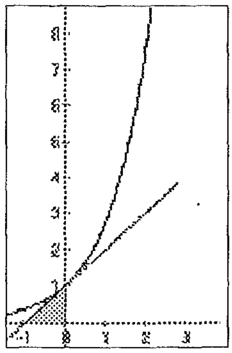
A: Es posen a treballar individualment per respondre el qüestionari 3. Tarden entre 23 minuts (el primer en lliurar-lo) i 36 minuts (l'últim).

P: Mentre han anat lliurant el qüestionari he anat mirant les seves respostes. Quan els he recollit tots, passo a comentar-los.

Apartat *a*

Respecte de l'apartat *a* comento que he observat el següent:

- En relació a la pregunta $f'(0)$ (dibuixo la figura a la pissarra)



(i assenyalant sobre la figura) la majoria heu considerat el triangle de la figura i heu dit <<un en vertical>> per <<un en horitzontal>>, llavors $f'(0) = 1/1 = 1$. Ara bé, alguns de vosaltres (miro cap a Alicia M, Jessica C., i d'altres alumnes que han considerat la subtangent negativa) què heu posat?

A: Alguns alumnes que han considerat la subtangent negativa responen que -1

P: Què s'ha de posar en el denominador 1 o -1?

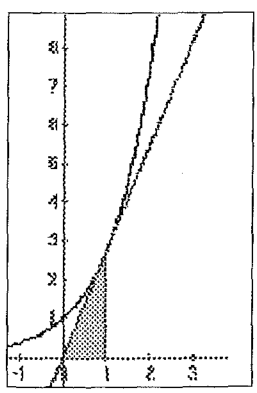
A: Tots els alumnes (inclosos els que han respost -1) ara diuen que 1.

P: Per què s'ha de posar 1?

A: Els alumnes responen que s'ha de posar 1 perquè és una longitud.

P: Dic que efectivament s'ha de posar 1, perquè estem considerant la longitud de la subtangent, i per tant, el fet que la subtangent estigui a la part negativa de l'eix d'abscisses o a la positiva (acompanyo aquest comentari amb gestos sobre la figura de la pissarra) no té cap importància.

- En relació a la pregunta $f'(1)$ (dibuixo la figura a la pissarra)



(i assenyalant sobre la figura) la majoria heu considerat el triangle de la figura i heu dit <<un en horitzontal>> per <<? en vertical>> i pregunto quina longitud té el segment vertical del triangle.

A: Alguns alumnes responen 2,5 i d'altres responen nombres entre 2,5 i 3.

P: Dic que la gràfica no permet determinar amb exactitut la longitud d'aquest segment i per això alguns alumnes han considerat que aquest segment mesurava 3 i han respost així: $f'(1) = 3/1 = 3$. Continuo fent-los notar que, si s'observa bé la gràfica, es veu que la longitud d'aquest segment no arriba a 3, de fet és 2,7, i que, per tant, com que la longitud de l'altura del triangle no es pot determinar exactament, és acceptable una resposta del tipus $f'(1) = 3/1 = 3$. També ho és una resposta d'aquest tipus en què en comptes de tres hem agafat una longitud aproximada.

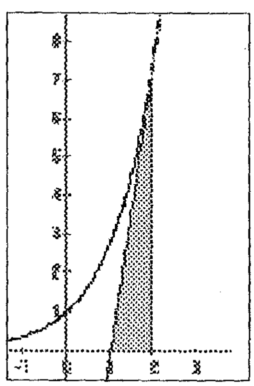
A continuació comento que era possible saber la longitud exacta de l'altura del triangle si es tenia en compte que la funció era $f(x) = e^x$ i que aquest segment era l'ordenada del punt d'abscissa 1, o sigui $f(1) = e^1 = e$. Per tant, la resposta correcta era $f'(1) = e/1 = e$, que aproximadament és 2,718....i li pregunto a Alex A. quin raonament ha seguit per donar una resposta tan precisa com 2,718...perquè no crec que aquest nombre l'hagi trobat a la gràfica perquè no crec que tingui una vista tan "fantàstica".

A: Alex respon que ha utilitzat la calculadora per buscar el nombre e.

P: O sigui que has fet el raonament que acabo d'explicar i després has utilitzat la calculadora per buscar el nombre e.

A: Alex respon que sí.

- En relació a la pregunta $f'(2)$ (dibuixo la figura a la pissarra)



(i assenyalant sobre la figura) dic que en aquest cas el resultat és $f'(2) = e^2/1 =$

e^2 que aproximadament és 7,389...

- En relació al càlcul $f'(0)$ també comento, sobre la figura, que si bé normalment es consideren desplaçaments en horitzontal cap a la dreta, també se'n poden considerar altres cap a l'esquerra. Els faig observar sobre la figura que desplaçant-nos una unitat cap a l'esquerra, s'ha de baixar una unitat en vertical per tornar a trobar la gràfica de la funció. Fent-ho d'aquesta manera el càlcul s'ha de fer així: $f'(0) = -1/-1 = 1$ on els menys indiquen esquerra i cap avall; els faig observar que el resultat és el mateix que quan considerem desplaçaments cap a la dreta.

Apartat *b*

P: En relació a la segona pregunta, faig les següents observacions, després de dibuixar la figura de l'apartat *b* del qüestionari:

- Tinc la sensació que hi ha alumnes que quan veuen el punt de coordenades (a, e^a), no acaben d'interpretar-ne correctament el, i li pregunto a Anna G. què entén quan veu aquesta notació (Anna G ha respost $f'(a) = \dfrac{a, e^a}{a}$)

A: Anna respon que a és l'abscissa.

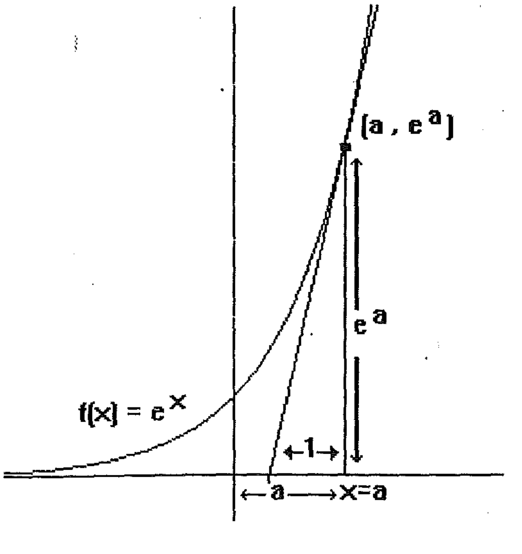
P: Li pregunto a Anna on comença i on acaba el segment de longitud a.

A: Anna respon que comença a l'origen de coordenades i acaba a sota del punt de la gràfica.

P: Li pregunto què és e^a.

A: Anna respon que és el segment vertical.

P: Mentre Anna responia les meves preguntes, he anat introduint les seves respostes a la gràfica, que queda així



Continuo dient que $f'(a) = \frac{e^a}{1} = e^a$ (assenyalo sobre la gràfica perquè quedi clar que e^a és l'altura del triangle determinat per la tangent, la subtangent i l'ordenada i 1 la base) i faig observar a Anna G que això és molt diferent que $f'(a) = \frac{a, e^a}{a}$. Li remarco que una cosa és un punt que queda determinat per dues coordenades: una abscissa i una ordenada, i una altra cosa molt diferent és l'ordenada d'aquest punt, que és un segment.

A continuació comento que d'altres alumnes han respost $f'(a) = \frac{e^a}{a}$ i que en aquest cas l'error està a interpretar malament la base del triangle i els assenyalo sobre la figura que el segment de longitud a no és la base del triangle que han d'utilitzar per calcular el pendent de la recta tangent.

Apartat *c*

P: Comento que, un cop sabem que a l'apartat *c*, $f'(a) = e^a/1$, hem de justificar que la derivada de la funció $f(x) = e^x$ és ella mateixa. A continuació dic que, per respondre l'apartat *c*, basta preguntar-se si el raonament que hem fet per al punt d'abscissa a en l'apartat *b* continuaria sent vàlid si a fos diferent (marco diferents punts sobre la gràfica de la pissarra). Pregunto als alumnes si allò que hem conclòs per al punt d'abscissa a de la figura, continua sent vàlid quan el punt és diferent.

A: Responen que sí.

P: Insisteixo que el raonament que hem fet a l'apartat *b* per al punt d'abscissa a és vàlid per a qualsevol punt de la gràfica; per tant, si en comptes d'utilitzar la a, utilitzem la x per representar l'abscissa d'un punt qualsevol del gràfic, tenim que $f'(x) = e^x/1 = e^x$, que és allò que demana l'apartat *c*.

A continuació dic que, en comptes de fer quelcom tan senzill com considerar que el raonament fet pel punt d'abscissa a era vàlid per a qualsevol punt, hi ha hagut alumnes que han aplicat límits i no se n'han sortit. És a dir, que, en comptes d'aplicar raonaments gràfics, que eren els més indicats, han intentat trobar la derivada per límits, procediment que en aquest cas és força complicat. També comento que, en general, les explicacions que fan es poden millorar força i li dic a Jordi A. que em permeti comentar la seva.

A: Jordi A. diu que no rient, mentre que d'altres alumnes demanen que la comenti.

P: Jordi ha comès un error molt típic, ja que ha fet el raonament següent: 1) la derivada de la funció de la funció $f(x) = x^n$ és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$, 2) la funció $f(x) = e^x$ és anàloga a la funció $f(x) = x^n$, ja que en les dues tenim base i exponent, 3) la derivada de $f(x) = e^x$ es calcula de manera anàloga a com es calcula la derivada de $f(x) = x^n$, per tant $f'(x) = xe^{x-1}$. L'error està a suposar que allò que funciona per a $f(x) = x^n$ també funciona per a $f(x) = e^x$ pel fet que en els dos casos tenim base i exponent. Remarco que en la funció $f(x) = x^n$, la variable està només a la base, mentre que en la funció $f(x) = e^x$, la variable només està a l'exponent.

A David M. li comento que ha comès l'error de considerar que e^x sempre és igual a 1, i que això és equivalent a dir que l'altura del triangle sempre val 1, quan resulta que allò que sempre val 1 és la base del triangle.

P: A continuació dic que facin l'activitat 48 .

A: Es posen a fer-la.

P: Toca el timbre i dic que la portin feta per a la propera classe *A*.

Anàlisi de les respostes al qüestinari 6

Apartat *a*

Respostes	Correcta	Incorrecta
Alumnes	37 (95%)	2 (5%)

- Els dos alumnes que no responen correctament ho fan perquè consideren que $f'(x) = xe^{x-1}$ i apliquen aquesta fórmula per a calcular $f'(0)$, $f'(1)$ i $f'(2)$.
- Entre els 37 alumnes que responen correctament hem inclòs els que han considerat que la subtangent era negativa i han respost que $f'(0) = -1$, perquè han aplicat que la derivada és la recta tangent i perquè han calculat correctament les altres dues derivades.
- També hem considerat com a correcta la resposta d'Albert C., que, en comptes de calcular la derivada en el punt, ha calculat l'equació de la recta tangent i no s'ha equivocat a l'hora de calcular el pendent.
- Els 37 alumnes que responen correctament es desglossen així:
  1) 24 responen calculant el pendent de la recta tangent.
  2) 4 donen el resultat correctament sense cap tipus de justificació geomètrica, però sí la donen als apartats *b* i *c*.
  3) 9 responen correctament sense cap justificació geomètrica i no la utilitzen tampoc en els apartats *b* i *c*. Es limiten a donar el resultat.

Apartat *b*

Resp	$f'(a) = 2a^2/a=2a=2$	$f'(a) = e^a$ (sense just)	$f'(a) = e^1/1$	$f'(a) = \frac{e^a}{1} = e^a$	$f'(a) = \frac{a, e^a}{a}$
Alum.	1(3%)	8 (21%)	1(3%)	17 (43%)	1 (3%)

$f'(a) = \frac{a, e^a}{1}$	$f'(a) = \frac{e^a}{a}$	$f'(a) = a/1$	$f'(a) = 1$	$f'(a) = ae^{a-1}$	Blanc	Per límits (malament)
2 (5%)	2 (5%)	1 (3%)	1 (3%)	2 (5%)	1(3%)	1(3%)

- Cal destacar que el 43% utilitza que la derivada és el pendent de la recta tangent i calcula correctament aquest pendent. Si hi sumen les respostes correctes sense justificació, un 64% contesta correctament.
- Cal destacar que hi ha un grup de respostes que intenten aplicar que la derivada és el pendent de la recta tangent, però tenen problemes per interpretar correctament les coordenades del punt (a , e^a). En efecte, en les respostes $f'(a) = \frac{a, e^a}{a}$ i $f'(a) = \frac{a, e^a}{1}$ hi ha una confusió entre punt i ordenada del punt. En les respostes $f'(a) = \frac{a, e^a}{a}$ i $f'(a) = \frac{e^a}{a}$ sembla que hi ha una confusió entre abscissa i subtangent. En la resposta $f'(a) = a/1$ hi ha una confusió entre abscissa i ordenada. I fins i tot creiem que en la resposta $f'(a) = e^1/1$ també hi ha confusió entre subtangent i abscissa, que porta a considerar $a = 1$. Podem concloure doncs que el 18% no tenen tant el problema en la interpretació de la derivada com el pendent de la recta tangent sinó que el seu problema rau en la incorrecta interpretació de les coordenades del punt (a , e^a).
- Un alumne (3%) ho intenta per límits sense èxit.
- Dos alumnes (5%) fan una analogia amb la derivada de la funció $f(x) = x^n$ i responen $f'(a) = ae^{a-1}$
- Creiem que l'explicació de l'error $f'(a) = 1$ és que consideren que $e^a = 1$ perquè $e^0 = 1$
- L'única explicació que trobem a la resposta $f'(a) = 2a^2/a=2a=2$ és que l'alumne ha barrejat aquest qüestionari amb l'anterior.

Apartat *c*

Respostes	Justificació correcta	Justificació incorrecta	Blanc
Alumnes	20 (51%)	15 (38%)	4 (21%)

- De les 15 justificacions incorrectes cal destacar:
  1) Dues cometen l'error de considerar que $f'(x) = 1$, segurament perquè consideren que $e^x = 1$ perquè $e^0 = 1$.
  2) Dues intenten calcular la derivada per límits.
  2) Dues diuen que no és veritat que la derivada de la funció exponencial de base e sigui ella mateixa perquè $f'(x) = xe^{x-1}$.

- Les 20 justificacions que hem considerat correctes majoritàriament són del tipus següent (Alfonso D.):

c) Demostra que la funció derivada de la funció $f(x) = e^x$ és la funció $f'(x) = e^x$.

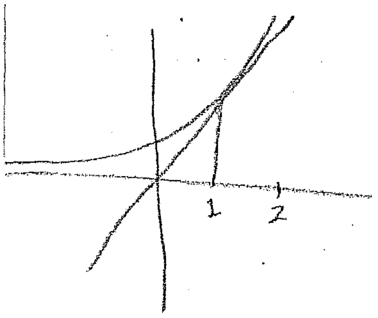
$$\text{Pendent} = \frac{e^x}{1}$$
$$P = e^x$$
$$P = g(x)$$
$$g'(x) = e^x$$

- o bé explicacions amb paraules com la de Victor B.

c) Demostra que la funció derivada de la funció $f(x) = e^x$ és la funció $f'(x) = e^x$.

La funció derivada d' $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$, perquè
la ~~deri~~ derivada d' una funció en un punt és igual al pendent
de la recta tangent en aquest punt.
El pendent ~~de~~ s'aconsegueix dividint: ~~[illegible]~~ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
en ~~la fun~~ aquesta funció, ~~la x sempre és igual a 1~~
~~l'augment horitzontal vertical sempre ens dona 1~~ ~~$x_2 - x_1$~~
$x_2 - x_1 \rightarrow$ sempre dona 1, i en dividir l'augment
vertical, que es e^x per l'augment horitzontal que
es 1, ens dona e^x

o bé són explicacions que combinen símbols, paraules i gràfics, com la d'Alex A.:



Totes les subtangents de la funció $f(x) = e^x$ és 1, llavors com el desplaçament vertical és e^x i la derivada de la funció és la pendent de la recta tangent, la fórmula seria

$$f'(x) = \frac{\text{desplaçament vertical}}{\text{desplaçament horitzontal}} = \frac{e^x}{1} = \boxed{e^x}$$

Volem destacar entre les respostes correctes, la de Rocio P. ,perquè simbolitza la situació en termes d'una equació diferencial:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\text{subtang}}$$

ej: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1} = e^x$$

Valoracions

1) Cal destacar que més del 50% ha pogut justificar que la derivada de $f(x) = e^x$ és ella mateixa i que, a més, ho han fet utilitzant diversos registres.

2) En relació als errors observats, cal destacar que, per al 20% dels alumnes, el seu significat de coordenades d'un punt del gràfic conté pràctiques en què es confon el punt amb una coordenada o bé una coordenada amb l'altra ; fins i tot no consideren l'abscissa com un segment amb l'extrem a l'origen de coordenades.

3) Un 15% (entre els apartats *b* i *c*) consideren que la funció $f(x) = e^x$ és del tipus $f(x) = x^n$. En relació a aquest error cal recordar que ,quan la funció exponencial ve donada

per una gràfica, també hi ha alumnes que consideren que és una paràbola. Ara bé, aquesta confusió ve determinada per la forma de presentació de la funció; per exemple, l'alumne Jordi L. va ser un dels pocs que va reconèixer la gràfica de la funció exponencial del qüestionari 2 com la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, mentre que en aquest qüestionari, a l'apartat *b*, ha respost $f'(a) = ae^{a-1}$ i ha deixat en blanc l'apartat *c*. D'altres alumnes, com David G., que havia reconegut la gràfica de la funció exponencial del qüestionari 2 com la gràfica d'una paràbola, ara també consideren que la funció $f(x) = e^x$ és del tipus $f(x) = x^n$, ja que la seva resposta a l'apartat *c* és <<no és aquesta perquè la derivada és $f'(x) = xe^{x-1}$ >> . Alberto C, que havia respost que la gràfica de la funció exponencial del qüestionari 2 era la gràfica d'una paràbola, ara respon correctament i no considera que la funció $f(x) = e^x$ és del tipus $f(x) = x^n$.

4) En relació a l'ítem 65 del subobjectiu 3.3:

Ítem 65 L'alumnat ha calculat primer $f'(a)$ gràficament, partint de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(a) = e^a/1 = e^a$; i després ha entès que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = e^x$.

El 50% ho ha fet contestant el qüestionari 6, mentre que l'altra 50% han necessitat primer comentar el qüestionari.

5.2.23. Subseqüència 6 d'avaluació (qüestionari 7)

L'objectiu d'aquesta seqüència d'avaluació és esbrinar si els alumnes són capaços de trobar, per si sols, la derivada de la funció $f(x) = \sin x$, a partir de l'explicació d'un procediment per trobar la recta tangent en qualsevol punt de la seva gràfica. Aquest procediment és el punt de partida per seguir el procés següent:

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió analítica de $f'(x)$

El primer pas d'aquest esquema indica que la gràfica de la funció sinus és la forma de representació de la funció $f(x)$, que es presenta a l'alumne com a punt de partida perquè aquest realitzi les accions (calcular pendents seguint el procediment que s'explica prèviament) que li permetran obtenir una forma de representació de la funció derivada, en aquest cas una taula de valors de $f'(x)$. Els altres dos passos són traduccions entre diferents formes de representar la funció $f'(x)$.

El qüestionari que vam dissenyar (núm 7) fou el següent:

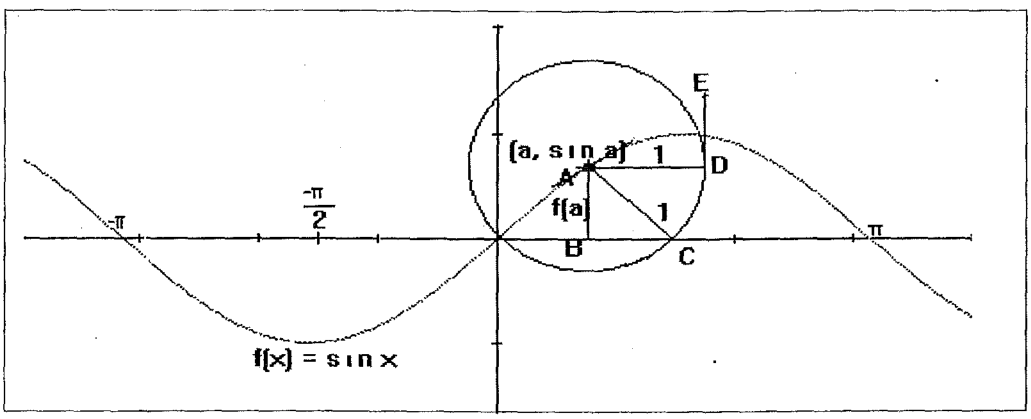
QÜESTIONARI 7

A continuació tens un procediment que permet dibuixar la recta tangent a la funció sinus en qualsevol punt.

Procediment

1) Dibuixa una circumferència de radi 1 amb centre en (a, sin a) i determina el punt de tall amb l'eix d'abscises que està a la dreta de a.
2) Dibuixa una recta paral.lela a l'eix d'abscises que passi pel punt (a, sin a) i determina el punt de tall amb la circumferència anterior que està a la dreta de (a, sin a).
3) Mesura el segment de l'eix horitzontal que té per origen $x = a$ i per extrem el punt determinat en el primer pas.
4) Amb origen al punt determinat en el pas 2 ,dibuixa un segment vertical d'igual longitud que el segment del pas 3 (cap amunt si la funció és creixent i cap avall si és decreixent) i marca'n l'extrem.
5) Uneix el punt obtingut en el pas anterior amb el punt (a, sin a).

1 a) A la figura següent completa el pas 5 del procediment anterior. Has obtingut la recta tangent?

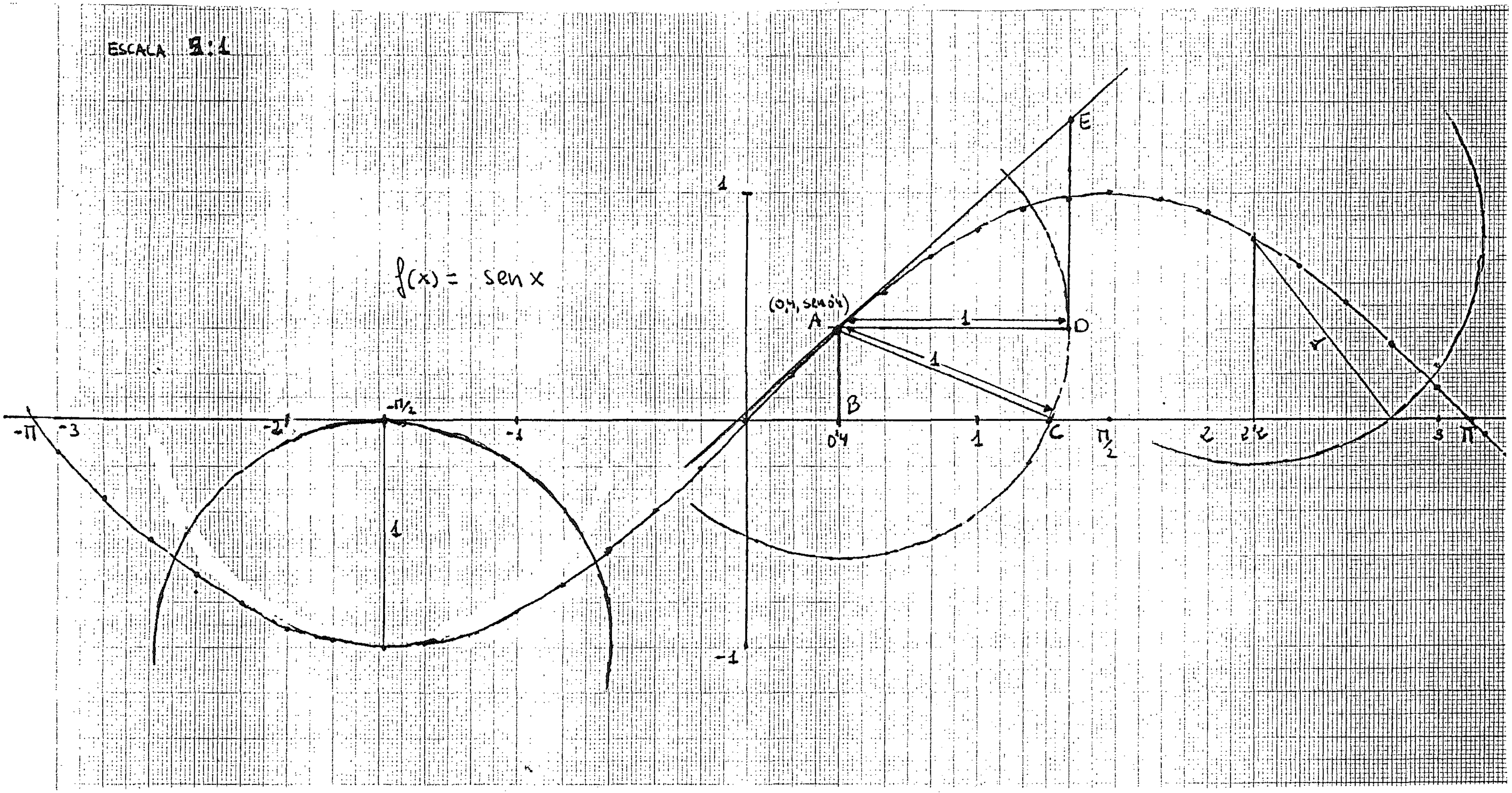


b) Utilitzant la gràfica de la funció sinus que s'adjunta, calcula $f'(0,4)$.
c) Utilitzant la gràfica de la funció sinus que s'adjunta, completa els passos 2-5 del procediment anterior i calcula $f'(-\pi/2)$ y $f'(2,2)$.

d) Utilitzant aquest procediment per dibuixar les rectes tangents i calculant-ne els pendents, hem fet la taula següent . Completa-la a partir dels resultats que has obtingut en els apartats b i c.

x	$-\pi$	-2,6	-2,2	-1,8	$-\pi/2$	-1,4	-1	0	0,4	0,8	1,4	$\pi/2$	2,2
$f'(x)$	-1	-0,9		-0,2		0,2	0,5	1		0,7	0,2		

e) Representa la taula en paper mil·limetrat i dibuixa la gràfica de la funció $f'(x)$. Quina gràfica has obtingut? Quina fórmula té la derivada de la funció sinus?



ESCALA 1:1
f(x) = sen x
(0'4, sen 0'4)
A
B
C
D
E
1
-1
-π
-3
-2
-π/2
0'4
π/2
2
2'4
3
π

Aquest qüestionari es va passar el dia 23-1-98 a mitja classe (19 alumnes).

Sessió 23-1-98

Planificació prèvia

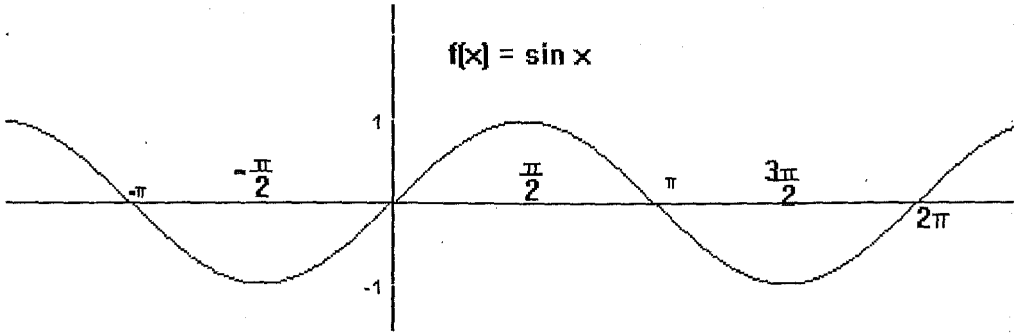
1) Passar el qüestionari 7 sobre el càlcul de la funció derivada de la funció $f(x) = \sin x$

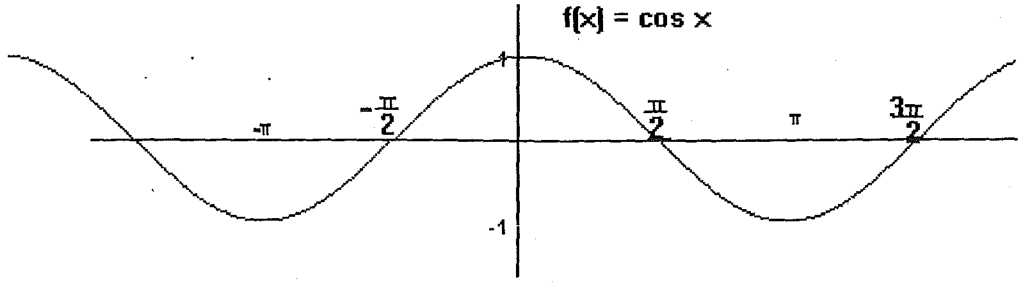
2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió del dia 23-1-98

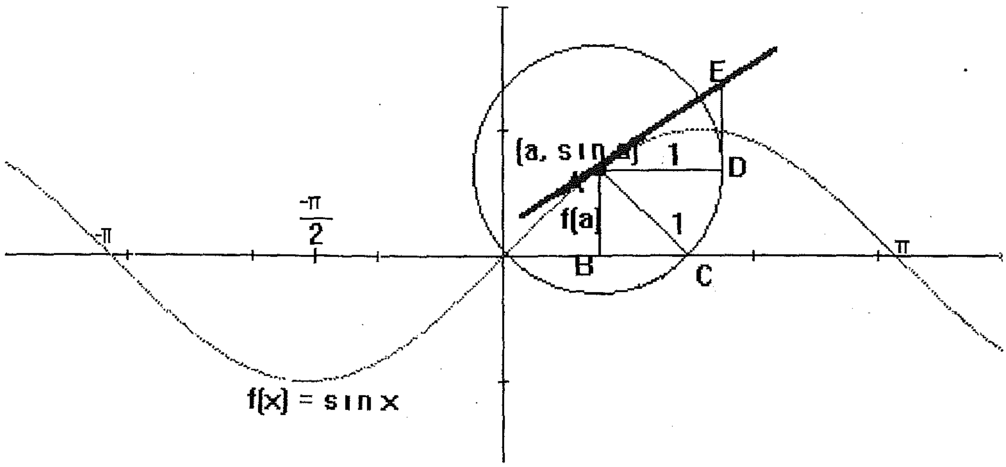
Faltes: Falta Alex A.

P: Distribueixo els 19 alumnes en grups de dos (Angela L es posa a treballar sola) i comento que poden consultar amb els grups del voltant. Abans que els alumnes comencin a respondre el qüestionari faig les observacions següents:
1) Comento que abans de començar les derivades, vam passar un qüestionari (el n. 2) en què ells havien de reconèixer les gràfiques de les funcions sinus i la funció cosinus. Dibuixo les dues funcions a la pissarra .





I comento que només un 30% va reconèixer la funció sinus i només un 29% , la funció cosinus. Anuncio que avui buscarem la derivada de la funció sinus (esborro de la pissarra la gràfica de la funció cosinus), a partir d'un procediment que permet calcular la recta tangent a la gràfica de la funció sinus en un punt qualsevol. Seguidament, explico dues vegades a la pissarra, amb molta cura, els passos del procediment del qüestionari.



A continuació comento que en la figura de l'apartat *a* del qüestionari tenen dibuixats els quatre primers passos del procediment i els dic que facin l'últim pas.

A: Els alumnes dibuixen la recta que uneix els punts *A* i *E*.

P: Pregunto quina recta han obtingut.

A: Responen que la recta tangent.

P: Comento que en el paper mil·limetrat tenen dibuixada la funció sinus i en tres punts hi ha aplicat aquest procediment totalment o parcialment. Segueixo comentant que en el punt d'abscissa 0,4 s'han aplicat tots els passos del procediment, que en els punts d'abscissa 2,2 i -π /2 només n'hi ha una part i ells han de completar els passos que falten.

A continuació dic que, quan aquest procediment s'aplica en un punt on la funció és decreixent, o sigui la funció baixa, el segment *ED* de longitud igual al segment *BC* s'ha de col·locar per avall. Remarco que el segment *ED* es posa cap amunt si estem en un punt on la funció creix i cap avall si la funció decreix.

Seguidament remarco que el gràfic està fet a escala 1:5, i que això vol dir que cada quadre gros del paper mil·limetrat té el costat de longitud 0,2. A continuació poso el següent exemple: si compto tres quadres en vertical, tinc un segment de longitud 3·0,2 = 0,6 , que és equivalent a dividir el nombre de quadres per cinc.

A: Alguns alumnes reclamen atenció particular perquè no acaben d'entendre el meu comentari sobre l'escala.

P: Dic que es posin a treballar.

A: Es posen a treballar amb grups de dos. Alguns em demanen aclariments sobre el procediment per dibuixar la tangent en el punt d'abscissa $-\pi/2$ i d'altres sobre l'escala. Observo que també pregunten als grups dels voltants.

P: Als alumnes que em pregunten per l'aplicació del procediment en el punt d'abscissa $-\pi/2$ els dic que no cal aplicar el procediment per trobar la recta tangent, però que si l'apliquen han de tenir en compte que en aquest cas el segment *BC* queda reduït a un punt.

A: Observo que l'observació anterior fa que els alumnes tinguin menys dificultats de les que havia previst en el punt d'abscissa $-\pi/2$, perquè saben quina és la solució, és a dir, saben que el resultat d'aplicar el procediment ha de ser una recta horitzontal i això fa que puguin aplicar-lo correctament.

P: Al cap d'una estona observo que Silvia V., per calcular $f'(0,4)$, utilitza el triangle format per l'origen de coordenades, el punt *A* i el punt *B* i interpreto que la causa d'aquest error és que en el paper mil·limetrat sembla que la recta tangent en el punt A passa per l'origen de coordenades. A continuació faig un comentari general per a tota la classe i els adverteixo que no ho facin com ella, perquè la recta tangent no passa per l'origen de coordenades, sinó que utilitzin el triangle format pels punts *A, D* i *E.*

A: els alumnes treballen i alguns em pregunten sobre el procediment i sobre l'escala. També comenten entre ells.

P: Com que hi ha moltes preguntes sobre l'aplicació del procediment en el punt d'abscissa $-\pi/2$, decideixo fer una explicació per a tota la classe. Dic que per a aquest punt no cal aplicar el procediment, perquè ja es veu que la recta tangent és horitzontal, i aplico el procediment perquè observin que també surt una recta horitzontal.

A: Alguns alumnes em pregunten en quin paper mil·limetrat han de dibuixar la taula.

P: Contesto que poden utilitzar el mateix paper mil·limetrat que jo he repartit per a representar la taula de l'apartat *c,* o bé ho poden fer en un dels seus fulls de paper quadriculat, utilitzant una unitat de deu quadres.

A: Alguns alumnes utilitzen un dels seus fulls, mentre que d'altres utilitzen el paper mil·limetrat que jo he repartit.

A: Hi ha alumnes que reclamen la meva atenció perquè no veuen clar com han d'unir els punts.

P: El seu problema és que han aplicat malament l'escala o bé que, quan han calculat

$f'(2,2)$,no han tingut en compte el signe negatiu. En ambdós casos els explico quin és el seu error.

A: A poc a poc van aconseguint la gràfica de la funció derivada que reconeixen com la gràfica de la funció cosinus, bé perquè la reconeixen ells sols, bé perquè algun altre grup els ho explica .

P: Toca el timbre i demano que em lliurin el qüestionari i la gràfica.

A: Alguns alumnes diuen que no em poden donar la gràfica, perquè l'han feta en el seu quadern i no poden arrencar la pàgina.

P: Observo que la tenen ben dibuixada i els dic que no arrenquin el full.

A: Tots els grups em lliuren el qüestionari i la gràfica, menys Anna G. i Maria L.V. que van més endarrerides que els altres grups. Anna em lliura el seu qüestionari, però Maria L. V. Encara continua treballant una mica més i és l'última .

A continuació segueix, com a exemple del tipus de resposta, el qüestionari d'Eva P.

Valoracions

1) Només el grup format per Anna G i Maria L. V. no ha reconegut la gràfica com la de la funció cosinus perquè, en anar més endarrerides que els altres grups, no ho han pogut comentar amb ells i per si soles no han sabut reconèixer la gràfica com la de la funció cosinus.

2) El 90% ha pogut contestar correctament el qüestionari, per si sols o bé amb l'ajut dels altres grups.

3) Crec que les respostes d'aquest qüestionari posen de manifest que la majoria dels alumnes saben calcular gràficament la derivada utilitzant que és el pendent de la recta tangent, encara que alguns continuen tenint problemes amb el signe del pendent de la recta tangent .Això els permet seguir el procés següent, sempre que tinguin un procediment per poder dibuixar la recta tangent a la gràfica en qualsevol punt:

$$\text{Gràfica de } f(x) \Rightarrow \text{Taula de } f'(x) \Rightarrow \text{Gràfica de } f'(x)$$

i, si saben calcular l'expressió simbòlica de $f'(x)$ a partir de la gràfica, fins i tot poden arribar a fer el procés següent:

$$\text{Gràfica de } f(x) \Rightarrow \text{Taula de } f'(x) \Rightarrow \text{Gràfica de } f'(x) \Rightarrow \text{Expressió simbòlica de } f'(x)$$

4) Crec que el treball amb el qüestionari ha millorat molt el reconeixement dels alumnes de la funció sinus i de la funció cosinus.

Eva P.

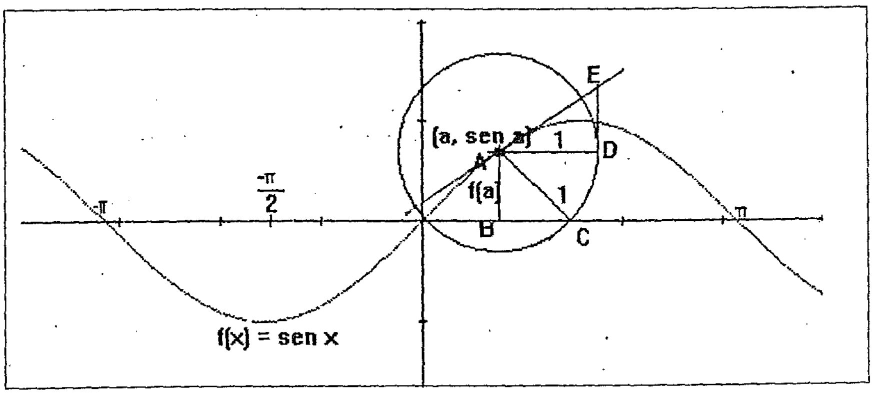
FUNCIÓ DERIVADA DE LA FUNCIÓ SINUS

A continuació tens un procediment que permet dibuixar la recta tangent a la funció sinus en qualsevol punt.

Procedimient

1 Dibuixa una circumferència de radi 1 amb centre en (a, sin a) i determina el punt de tall amb l'eix d'abscises que està a la dreta de a.
2 Dibuixa una recta paral.lela a l'eix d'abscises que passi pel punt (a, sin a) i determina el punt de tall amb la circumferència anterior que està a la dreta de (a, sin a).
3 Mesura el segment de l'eix horitzontal que té per origen $x = a$ i per extrem el punt determinat en el primer pas.
4 Amb origen el punt determinat en el pas 2 dibuixa un segment vertical d'igual longitud que el segment del pas 3 (cap a dalt si la funció és creixent i cap a baix si és decreixent) i marca el seu extrem.
5 Uneix el punt obtingut en el pas anterior amb el punt (a, sin a)

1 a) En la figura sigüent completa el pas 5 del procediment anterior. Has obtingut la recta tangent?

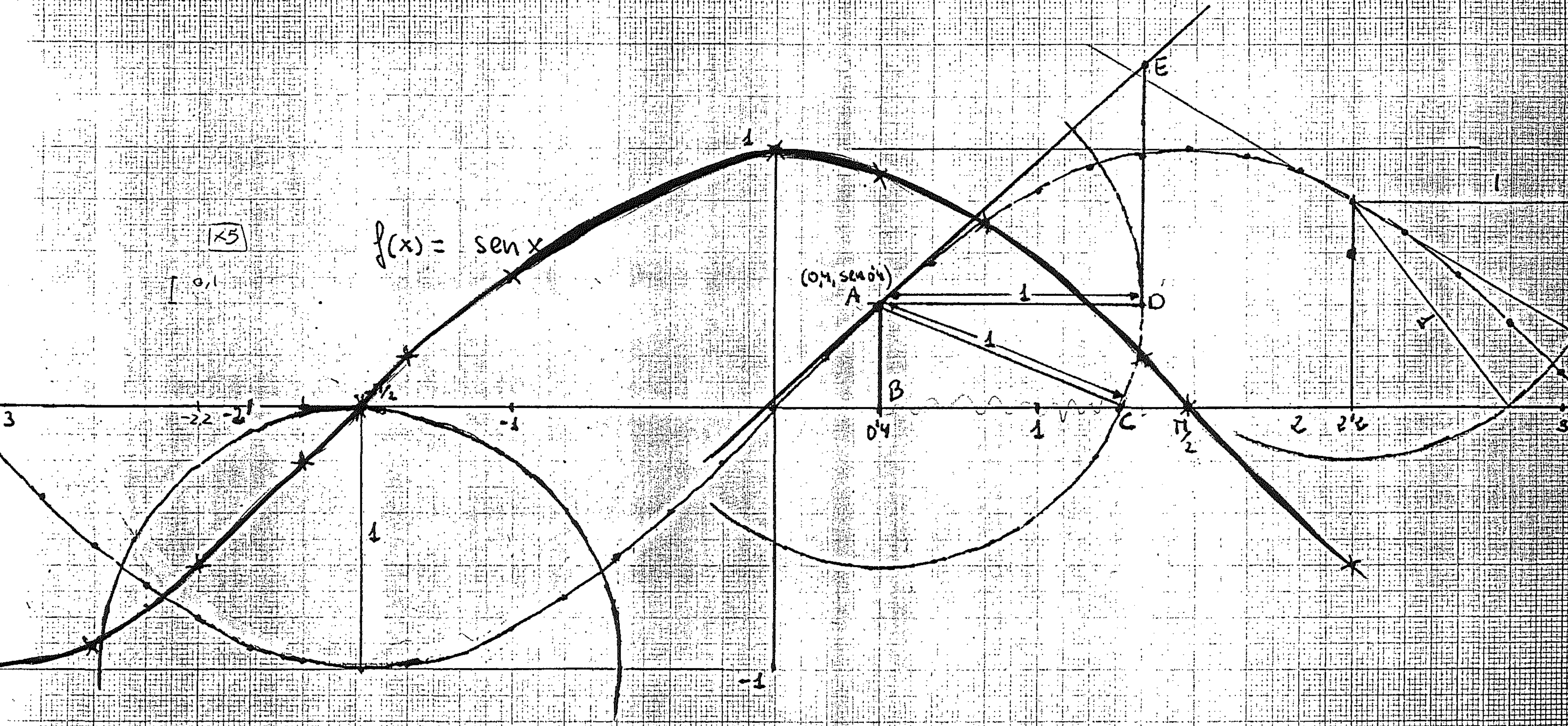


b) Utilitzant la gràfica de la funció sinus que s'adjunta calcula $f'(0,4)$ $f'(0,4) = \frac{0'9}{1} = 0'9$
c) Utilitzant la gràfica de la funció sinus que s'adjunta completa els passos 2-5 del procediment anterior i calcula $f'(-\pi/2)$ y $f'(2,2)$.
$f'(-\pi/2) = 0$ (perquè el pendent és 0) y $f'(2,2) = -0,6$ (perquè es la la dreta y 0,6 cap a baix.
d) Utilitzant aquest procediment per a dibuixar les rectes tangents i calculant els seus pendents hem fet la taula següent:. Completa-la a partir dels resultats que has obtingut en els apartats b i c.

x	-π	-2,6	-2,2	-1,8	-π/2	-1,4	-1	0	0,4	0,8	1,4	π/2	2,2
$f'(x)$	-1	-0,9	-0,6	-0,2	0	0,2	0,5	1	0,9	0,7	0,2	0	-0,6

e) Representa la taula en paper mil.limetrat i dibuixa la gràfica de la funció $f'(x)$. Quina gràfica has obtingut? Quina fórmula té la derivada de la funció sinus?
$f'(x) = \cos x$

ESCALA 5:1



5.2.24 Subseqüència 11. Derivada de les funcions exponencials i logarítmiques (continuació)

Sessió del 27-1-98

Desenvolupament de la sessió

P: Recordo que a l'última classe *A* havíem fet l'activitat 48 i dic que ara s'ha de calcular la derivada de funcions, que són el resultat de fer operacions amb funcions més senzilles, una de les quals és la funció $f(x) = e^x$, la derivada de la qual sabem que és ella mateixa.

A: Es posen a fer l'activitat 49.

P: Faig sortir Mara L. V. a la pissarra perquè faci l'activitat 49.

A: Mara L. V. fa correctament l'apartat *a* però s'equivoca en l'apartat *b* ,perquè aplica que la derivada d'un producte és el producte de derivades, i en l'apartat *c,* perquè aplica que la derivada de la divisió és la divisió de derivades

a) $f(x) = x^2 - 3e^x + 1$ $\qquad f'(x) = 2x - 3e^x$
b) $g(x) = (x^2 - 3x)\cdot e^x$ $\qquad g'(x) = (2x - 3)\cdot e^x$

c) $h(x)= \dfrac{e^x}{x^3}$ $\qquad h'(x)= \dfrac{e^x}{3x^2}$

P:Comento (assenyalant sobre la resposta de l'alumna) que la derivada de x^2 és $2x$, i que la derivada de $3e^x$ és 3 per la derivada de e^x ,que és ella mateixa, i que la derivada de 1 és zero. A continuació dic que la derivada de l'apartat *b* està malament perquè ha aplicat que la derivada d'un producte és el producte de derivades, la qual cosa no és correcta perquè la derivada d'un producte és igual a la derivada de la primera per la segona sense derivar, més la derivada de la segona per la primera sense derivar (mentrestant assenyalo sobre els dos factors de la funció $g(x)$ i escric a la pissarra el següent)

$$g(x) = (x^2 - 3x)\cdot e^x \qquad\qquad g'(x) = (2x - 3)\cdot e^x + e^x \cdot(x^2 - 3x)$$

Remarco que la derivada de l'aparat *c* també està malament, perquè ha aplicat que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades, la qual cosa no és correcta, perquè la derivada d'una divisió és igual a la derivada del numerador pel denominador sense derivar, menys la derivada del denominador pel numerador sense derivar, dividit tot pel quadrat del denominador (Mentrestant assenyalo sobre el numerador i el denominador de la funció $h(x)$ i escric a la pissarra el següent)

$$h(x)= \frac{e^x}{x^3} \qquad\qquad h'(x)= \frac{e^x\cdot x^3 - 3x^2\cdot e^x}{(x^3)^2}$$

A continuació dic que les derivades dels apartats *b* i *c* es poden simplificar, si observem que e^x és un factor comú, i explico les següents simplificacions:

$$g'(x) = (2x - 3)\cdot e^x + e^x \cdot(x^2 - 3x) = (x^2 - x - 3)e^x$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot e^x}{(x^3)^2} = \frac{e^x(x - 3)}{x^4}$$

A: Alguns alumnes no entenen per què el denominador és x^4.

P: Repeteixo l'explicació fent-los observar que $(x^3)^2$ és x^6, que en el numerador podem treure dos factors comuns: x^2 i e^x, i que el factor x^2 del numerador es pot simplificar amb dos ics del denominador.

A continuació remarco que han de memoritzar que la derivada de la funció $f(x) = e^x$ és ella mateixa i insisteixo que sobretot no cometin l'error de considerar que aquesta funció és com les funcions $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ i que, per tant, la seva derivada és $f(x) = xe^{x-1}$ perquè en les primeres la variable està a la base, mentre que en les funcions exponencials, està a l'exponent.

Seguidament dic que farem l'activitat 50, en la qual calcularem la derivada de la funció $f(x) = \ln x$, però que abans de fer-ho convé recordar alguns resultats sobre les funcions exponencials i logarítmiques que <<teòricament>> saben. Remarco que no hi ha res més perillós que suposar que saben allò que teòricament haurien de saber i que per tant vaig a recordar els següents resultats sobre les funcions exponencials i logarítmiques:

- Les funcions $f(x) = e^x$ i $f(x) = \ln x$ són una inversa de l'altra i això vol dir que, si apliques una funció a continuació de l'altra, el resultat final seria el mateix que no aplicant cap de les dues funcions, perquè una funció desfà el que fa l'altra i poso l'exemple següent: considereu $x = 2$ i busqueu $f(2) = e^2$ amb la calculadora i observeu que surt 7,38905..; si a continuació busqueu el logaritme de base *e* d'aquest nombre observareu que surt 2
  (Molts alumnes ho fan amb la calculadora i observem que surten els resultats que he dit)
  (Mentrestant escric a la pissarra el següent)

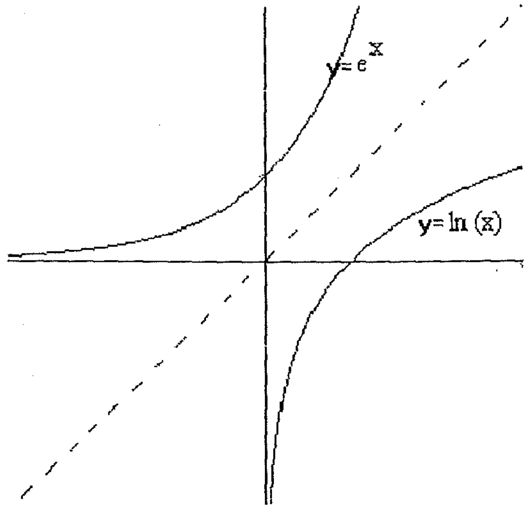
  $$2 \xrightarrow{\text{Funció exp.}} f(2) = e^2 = 7{,}38905\ldots \xrightarrow{\text{Funció log.}} \ln(e^2) = 2$$

  A continuació repeteixo el procés amb $x = 5$

  $$5 \xrightarrow{\text{Funció exp.}} f(5) = e^5 = 148{,}413.. \xrightarrow{\text{Funció log}} \ln(e^5) = 5$$

- El fet que les funcions $f(x) = e^x$ i $f(x) = \ln x$ siguin l'una inversa de l'altra gràficament vol dir que, si dibuixes les gràfiques de les dues funcions i doblegues el full per la diagonal del primer i tercer quadrants, les gràfiques se superposen

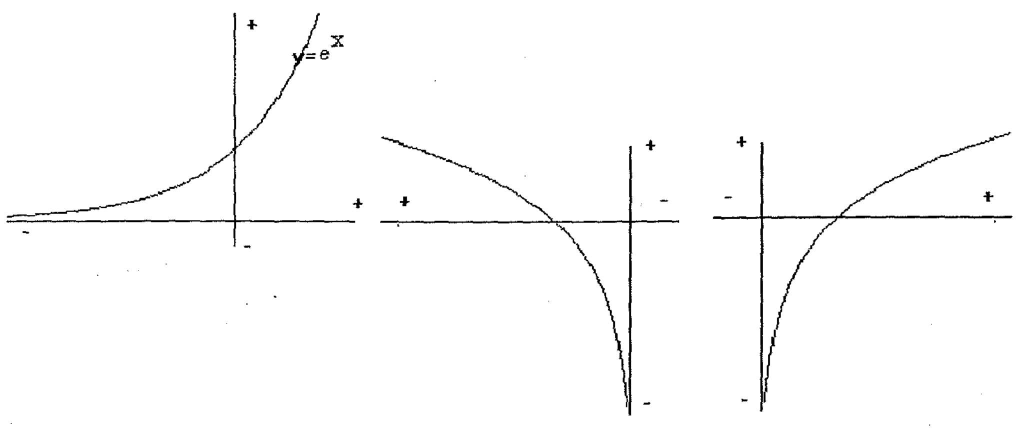
(dibuixo a la pissarra la figura següent i vaig assenyalant)



A continuació explico que això de doblegar no és gaire pràctic i que hi ha un altre mètode per trobar la gràfica de la funció derivada, que consisteix a girar 90° cap a l'esquerra, girar mitja volta el full i mirar al transparent (ho faig amb un full on he dibuixat la funció exponencial amb un retolador molt gruixut). Dic que dibuixin la funció exponencial en un full i que facin el mateix que jo.

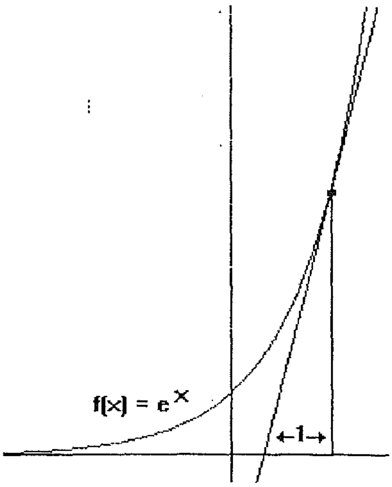
A: Ho fan i els fa força gràcia .

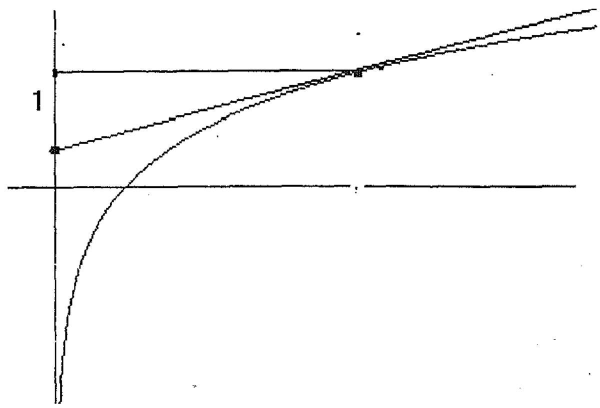
P: mentre ho fan dibuixo el següent a la pissarra



Un cop he fet aquest recordatori sobre les funcions exponencials i logarítmiques, dic que el nostre objectiu és trobar la derivada de la funció $f(x) = \ln x$, i que, per aconseguir-ho, utilitzarem que aquesta funció és la inversa de la funció $f(x) = e^x$. Més en concret: d'entrada esbrinarem com es trasllada a la funció $f(x) = \ln x$ la propietat que hem observat en la funció $f(x) = e^x$ que totes les subtangents tenen una longitud igual a 1.

A continuació dibuixo la recta tangent en un punt de la gràfica de la funció $f(x) = e^x$ en el full que he utilitzat abans, poso un 1 a sota de la subtangent, repeteixo el procés de girar 90° cap a l'esquerra el full i mirar al transparent i dic als alumnes que facin el mateix

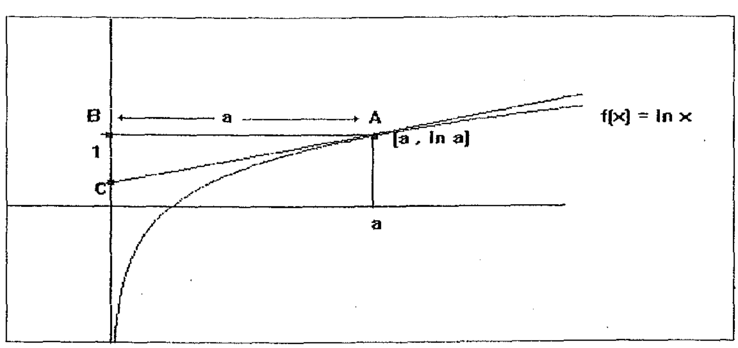




Primer sobre el full i després sobre un dibuix que faig a la pissarra els faig observar que el segment de longitud 1 de l'eix horitzontal ha anat a parar a l'eix vertical en la figura de la funció $f(x) = \ln x$.

A: Els alumnes repeteixen el procés i observen en el seu full on va a parar el segment de longitud 1.

P: Comento que acabem d'observar que la propietat de la funció $f(x) = e^x$, que ens assegura que la subtangent sempre val 1, es traslllada a la seva funció inversa de la manera següent: en qualsevol punt de la gràfica la recta tangent determina sobre l'eix vertical un segment BC de longitud 1 (completo la figura de la funció exponencial de la pissarra, de manera que quedi igual que la figura de l'activitat 50)



A: Alguns alumnes no ho entenen.

P: Repeteixo tot el procés fent-los observar la relació que hi ha entre les dues figures. Seguidament dic que amb aquesta propietat i utilitzant que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent poden contestar l'activitat 50.

A: es posen a fer l'activitat 50. Observo que alguns responen correctament, però molts altres tenen problemes per adonar-se que han d'utilitzar el triangle *ABC*.

P: Assenyalo sobre la figura com, per calcular $f'(a)$, s'ha de buscar el pendent de la recta tangent, o sigui s'ha de buscar un triangle i dividir l'altura per la base.

A: Continuo observant que tenen problemes per respondre a partir del triangle *ABC*.

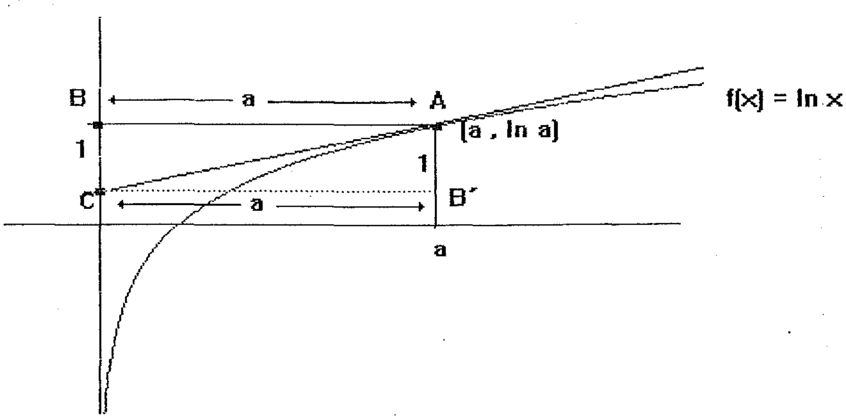
P: Sobre la figura de la pissarra comento que, si tenen dificultats per treballar amb el triangle *ABC*, ho poden fer amb el triangle *CAB'*. I pregunto quina longitud mesura l'altura d'aquest triangle.

A: Responen que 1.

P: I la base?

A: Sergio G.i d'altres responen que *a*.

P: completo el triangle posant les mesures de la base i de l'altura i la figura de la pissarra queda així:



i dic que $f'(a)$, que és el pendent de la recta tangent, és altura (1) dividit per base (a) i escric a la pissarra

$$f'(a) = 1/a$$

A continuació pregunto als alumnes si tot allò que hem fet seria diferent si en comptes de considerar el punt de la gràfica considerem altres punts de la gràfica (assenyalo diferents punts a sobre de la gràfica).

A: Responen que tot seria igual.

P: Comento que el resultat $f'(a) = 1/a$ és vàlid per a qualsevol punt d'abscissa a i pregunto quina serà la derivada de la funció $f(x) = \ln x$.

A: Patricia F. i d'altres alumnes responen que serà $f'(x) = 1/x$.

P: Remarco que la qüestió clau és preguntar-me si allò que he fet per al punt d'abscissa *a* és vàlid per a qualsevol punt. A continuació dic que ara a l'activitat 51 han de calcular la derivada de funcions que són el resultat de fer operacions amb funcions més senzilles, una de les quals és la funció $f(x) = \ln x$,la derivada de la qual ja sabem que és $f'(x) = 1/x$.

A: Es posen a fer l'activitat 51 i alguns d'ells reclamen la meva atenció particular per comentar-me dubtes sobre l'aplicació de les regles de derivació.

P: Faig sortir Silvia V a la pissarra.

A: Respon l'apartat *a* de la manera següent:
a) $f(x) = -2x^5 - \ln x + 12 \qquad f'(x) = -10x^4 - 1/x$

P: Pregunto si tothom hi està d'acord.

A: Responen que sí. Silvia continua i respon de la manera següent a l'apartat *b*

b) $g(x) = (x^2 - \ln x)\cdot e^x \qquad g'(x) = e^x(2x - 1/x) + (x^2 - \ln x)\cdot e^x$

P: Faig observar als alumnes que la resposta és correcta, però que no ha seguit l'ordre normal.

A: Silvia continua i respon de la manera següent a l'apartat *c*

c) $h(x) = \dfrac{1}{\ln x} \qquad h'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

Alguns alumnes no entenen la resposta de Silvia.

P: Comento que la derivada del numerador és zero i poso el següent a la pissarra

$$h'(x) = \frac{0\cdot \ln x - \frac{1}{x}\cdot 1}{(\ln x)^2} = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

remarcant com la *x* passa multiplicant a sota.

A: Silvia respon de la manera següent a l'apartat *d*

d) $h(x)= \dfrac{e^{x} + 3x}{\ln x}$ $\qquad h'(x)= \dfrac{(e^{x} + 3)\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot(e^{x} + 3x)}{(\ln x)^2}$

P: Comento que Silvia ha aplicat correctament la regla de la divisió.

A: Laura N. pregunta si a l'examen les derivades seran tan complicades

P: Li responc que ara l'objectiu és que aprenguin la mecànica de la derivació i que per això ara derivem funcions una mica més complicades que les que surten en els problemes on la derivació no és un objectiu en si mateix sinó que és una eina. Ara bé, quan la derivació és un instrument per respondre d'altres qüestions, la funció derivada s'ha de simplificar, mentre que ara no cal.

Seguidament dic que ara trobarem la derivada d'una funció logarítmica de base qualsevol $f(x) = \log_a x$. I poso a la pissarra

$f(x) = \log_a x.$ $\qquad f(x) = ?$

I dic que aquesta funció es pot trobar de diverses maneres, per exemple, calculant el límit

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}$,però que el sistema més ràpid consisteix a utilitzar el canvi de base. A continuació els faig observar que en la seva calculadora només tenen dues tecles per a calcular logaritmes: la tecla dels logaritmes nepperians (de base e) i la tecla dels logaritmes decimals (de base deu) i remarco que no n'hi ha cap més.

A: Els alumnes busquen aquestes tecles a la calculadora.

P: Formulo la pregunta següent: si només tenim aquestes dues tecles, com podem calcular, per exemple, el logaritme base 7 del nombre 25? Jo mateix responc que amb una sola tecla i amb les fórmules del canvi de base es pot trobar el logaritme de qualsevol nombre en qualsevol base i escric i comento a la pissarra el següent

Fórmules del canvi de base : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ i $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

Exemple. $\log_7 25 = \dfrac{\ln 25}{\ln 7}$ i $\log_7 25 = \dfrac{\log 25}{\log 7}$

Seguidament dic que aquestes fórmules les van treballar el curs anterior i remarco que les fórmules del canvi de base ens informen que la funció $f(x)= \log_a x$ és igual a un nombre per la funció $f(x) = \ln x$ i escric i comento a la pissarra el següent:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x = nombre \bullet \ln x = k\ln x$$

I resulta que la funció $f(x) = \ln x$ ja la sabem derivar i, a més, tenim una regla de derivació que diu: la derivada del producte d'un nombre per una funció és igual al nombre per la derivada de la funció.Escric i comento a la pissarra el següent:

$$f(x) = \log_a x. \text{ ----------------->} \quad f'(x) = k\cdot(\ln x)' = k\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

I a continuació pregunto quin nombre és el nombre k i jo mateix em responc que $\frac{1}{\ln a} = k$ o bé $k = \log_a e$. A continuació dic que segons quin valor de k utilitzem tindrem les següents expressions de la derivada (escric i comento a la pissarra).

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad o\ bé \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

A: Alguns alumnes em demanen si puc repetir l'explicació.

P: Repeteixo l'explicació des del principi i els pregunto si estan d'acord que a la calculadora només hi ha dues tecles per a calcular logaritmes.

A: Diuen que hi estan d'acord.

P: Remarco que, malgrat només tenir dues tecles, podem trobar el logaritme de qualsevol nombre en qualsevol base si utilitzem les fórmules del canvi de base. I poso el següent exemple: per calcular logaritme base 7 de 25, busquem a la calculadora una tecla que posi logaritme en base 7, i no la trobem; però ,si busquem 1/ln7 i el multipliquem per ln25, calcularem el logaritme base 7 de 25, perquè estem aplicant la fórmula del canvi de base que havíem treballat el curs passat (escric el següent a la pissarra)

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{-------->} \quad \log_7 25 = \frac{\ln 25}{\ln 7}$$

Remarco que aquesta fórmula l'han de saber de memòria per poder calcular logaritmes amb la calculadora i que, si no la recorden del curs passat, facin un acte de fe i se la creguin.

Continuo repetint la següent transformació a la pissarra

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x$$

I a continuació explico com s'aplica la regla de la derivada del producte d'un nombre per una funció:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$

Per últim dic que com que $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$ l'expressió anterior es pot escriure de la manera següent:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \log_a e\cdot\frac{1}{x} = \frac{\log_a e}{x}$$

Després dic que es pot utilitzar qualsevol d'aquestes dues expressions però que normalment s'utilitza la primera. A continuació dic que facin l'activitat 52.

A: es posen a fer-la.

P: Faig a la pissarra la derivada de l'apartat a , utilitzant les dues expressions de la derivada de la funció logarítmica.

a) $f(x) = -x^5 - \log_5 x + 12$ $\qquad$ $f'(x) = -5x^4 - \dfrac{\log_5 e}{x}$

i $\quad f'(x) = -5x^4 - \dfrac{1}{x\ln 5}$

i comento que en aquest cas $a = 5$. Torno a insistir que qualsevol de les dues expressions és correcte, però que jo recomano utilitzar la primera de les dues.

A: Continuen fent els altres apartats i alguns d'ells reclamen la meva atenció particular per preguntar-me dubtes sobre aquesta activitat.

P: Faig sortir Jaime G a la pissarra per fer els apartats b .

A: Jaime escriu a la pissarra el següent:

b) $g(x) = (x^2 - \ln x)\cdot \log_2 x$ $\qquad$ $g'(x) = (2x - 1/x)\cdot \log_2 x + \log_2 e\,(x^2 - \ln x)/x$

P: Comento que Jaume ha aplicat correctament la regla de la derivada del producte. Toca el timbre i dic que facin els apartats b i c per al proper dia.

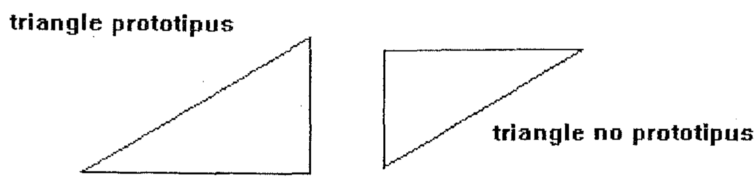
Valoracions

1) Els coneixements previs (canvi de base, que les funcions exponencials i logarítmiques són unes inverses de les altres, etc) no estan prou assolits per molts alumnes. És a dir, estem buscant la funció derivada de funcions que no són prou conegudes pels alumnes.

2) Crec que el procediment de girar cap a l'esquerra el full i després mirar al transparent facilita a l'alumnat entendre la relació que hi ha entre el gràfic de la funció exponencial i el gràfic de la seva inversa (la funció logarítmica).

3) Crec que l'alumnat ha entès que la propietat que la subtangent sempre val 1, es trasllada a la funció logarítmica de la manera que indica la figura de l'activitat 50. És a dir, que totes les tangents a la funció $f(x)=\ln x$ compleixen una determinada propietat pel fet que totes les tangents a la funció $g(x) = e^x$ compleixen que la subtangent sempre val 1.

4) He trobat més dificultats de les que havia previst en el càlcul gràfic de $f'(a)$ per a la funció $f(x) = \ln x$. La causa no està en la interpretació de la derivada en un punt com el pendent de la recta tangent. Ni tampoc en entendre que el raonament que s'ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa. Al meu parer la dificultat rau en el fet d'utilitzar un triangle no prototípic.



5) Les dificultats que tenen els alumnes per calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$ a partir de la transformació de la fórmula i de les regles de derivació, són degudes a la manca dels coneixements previs necessaris per fer aquest càlcul. És a dir, els alumnes no tenien clar que qualsevol funció logarítmica compleix $\log_a x = k \cdot \ln x$, ni tampoc que en virtut del canvi de base $k = \log_a e$ o bé $k = \dfrac{1}{\ln a}$.

5) En relació als ítems 66-69 del subobjectiu 3.3 crec que:

Ítem 66 L'alumnat ha entès que la funció $f(x) = \ln x$ és la inversa de la funció $g(x) = e^x$, i que la propietat que la subtangent sempre val 1 es trasllada a la funció logarítmica de la manera que indica la figura de l'activitat 50. És a dir, que totes les tangents a la funció $f(x) = \ln x$ compleixen una determinada propietat pel fet que totes les tangents a la funció $g(x) = e^x$ compleixen que la subtangent sempre val 1.

Ítem 67 L'alumnat ha entès que les funcions exponencials i logarítmiques són inverses l'una de l'altra i quina relació hi ha entre les seves gràfiques.

Ítem 68 L'alumnat ha pogut calcular (per a la funció $f(x) = \ln x$) primer $f'(a)$, partint de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(a) = 1/a$; i desprès ha entès que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = 1/x$.

Ítem 69 L'alumnat ha pogut calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$, a partir de la transformació de la fórmula, mitjançant el canvi de base i aplicant les regles de derivació.

Sessió del 28-1-98

Planificació prèvia

Acabar de treballar la derivada de les funcions exponencials i començar a treballar a l'ordinador el càlcul de la derivada de la funció sinus.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: no falta cap alumne

P: Recordo que a l'última classe *A*, havíem fet els apartats *b* i *c* de l'activitat 52. A continuació comento que en aquesta activitat s'ha d'interpretar les funcions que hem de derivar com el resultat de fer operacions amb funcions més senzilles, de les quals coneixem la derivada i aplicar després les regles de derivació juntament amb la taula de derivades de les funcions elementals que a poc a poc anem ampliant. Tot seguit faig sortir a la pissarra Raúl B. a fer l'apartat *c* de l'activitat 52.

A: Raúl comet l'error típic i considera que la derivada d'una divisió és la divisió de derivades (escriu a la pissarra el següent)

$$h(x)= \frac{\log x}{\ln x} \qquad h'(x)= \frac{\frac{\log e}{x}}{\frac{1}{x}}$$

P: Comento que Raúl B ha comès l'error típic i pregunto als alumnes quin és.

A: Alguns diuen que no ha aplicat correctament la regla de la derivació d'un quocient.

P: Dic que efectivament és així i pregunto a David R. quin és l'error típic quan es deriva aquest tipus de funcions.

A: David R. contesta que l'error està a considerar que, per derivar una divisió, s'ha de dividir la derivada del numerador per la derivada del denominador.

P: Insisteixo que l'error habitual en derivar un producte o una divisió de funcions consisteix a considerar que la derivada del producte és el producte de derivades, i que la derivada de la divisió és la divisió de derivades. A continuació faig a la pissarra la derivada de la funció de l'apartat *c* (escric i comento a la pissarra el següent)

c) $$h(x)= \frac{\log x}{\ln x} \qquad h'(x)= \frac{\frac{\log e}{x}\cdot \ln x - \frac{1}{x}\log x}{\ln^2 x}$$

Pregunto als alumnes si estan d'acord amb aquest resultat.

A: Alguns diuen que ells han simplificat el resultat fins a obtenir el resultat

$$h'(x) = \frac{\log e \ln x - \log x}{x \ln^2 x}$$

P: Explico a la pissarra com s'arriba a aquest resultat i insisteixo que en aquests moments no considero necessari fer la simplificació perquè en tinc prou si apliquen correctament les regles de derivació juntament amb la taula de derivades que anem calculant. Faig sortir Rocio P a la pissarra a fer l'apartat *d* de l'activitat 52.

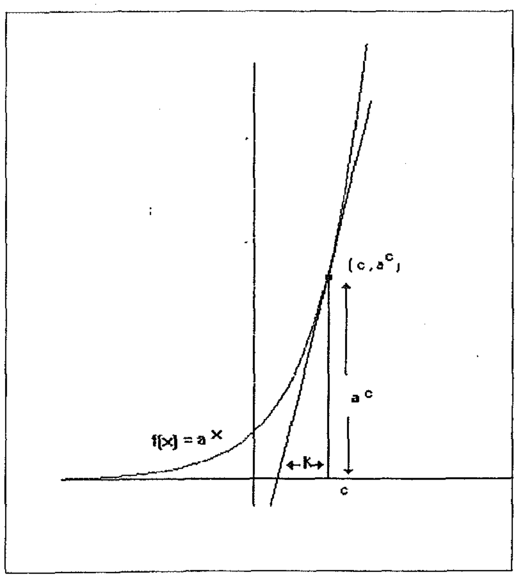
A: Rocio P. escriu el següent:

$$h(x) = \frac{2e^x + \log_7 x}{\ln x - 2x} \qquad h'(x) = \frac{(2e^x + \frac{\log_7 e}{x})\ln x - \frac{1}{x}(2e^x + \log_7 x)}{\ln^2 x}$$

P: Explico per a tota la classe per què la resposta de Rocio P és correcta i pregunto als alumnes si tothom hi està d'acord.

A: Contesten que sí.

P: Recordo que el nostre objectiu era trobar la derivada de les funcions exponencials i logarítmiques. A l'activitat 48, vam veure que la derivada de la funció exponencial de base e era ella mateixa; a l'activitat 50 , que la derivada de la funció $f(x) = \ln x$ era $f'(x) = 1/x$; i que la derivada de la funció logarítmica de base qualsevol, $f(x) = \log_a x$, és $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$. Per tant, només ens falta calcular la derivada de la funció exponencial $f(x) = a^x$, amb a un nombre qualsevol, com per exemple $f(x) = 4^x$, $f(x) = 5^x$, etc . Dic que facin l'activitat 53, utilitzant la propietat de les funcions exponencials que vam observar a la pantalla de l'ordinador: per a qualsevol punt del gràfic de la funció la subtangent sempre val el mateix nombre k. A continuació dibuixo i comento a la pissarra la figura següent i recordo el que vam fer amb el programa Calcula en la classe del dia 21-1-98.



A continuació pregunto quin valor té la derivada en el punt d'abscissa c.

A: No contesten.

P: Recordo que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent.

A: Eva P., Rocio P. i d'altres alumnes responen que serà $\dfrac{a^c}{k}$

P: Escric a la pissarra $f'(c) = \dfrac{a^c}{k}$ i pregunto si tothom està d'acord

A: Responen que sí.

P: Fent gestos sobre la figura anterior explico que el pendent de la recta tangent és la variació vertical (a^c) dividit per la variació horitzontal (k). A continuació dic que per respondre l'apartat b de l'activitat 53, cal fer-se la pregunta següent: això que hem comprovat per al punt d'abscissa a, continua sent vàlid per a qualsevol altre punt?

A: Alguns alumnes responen que el punt d'abscissa c pot ser qualsevol.

P: Dic que efectivament és així perquè, si considero altres punts (assenyalo diferents punts sobre la gràfica), resulta que la subtangent sempre val k. Per tant, el resultat

$f'(c) = \dfrac{a^c}{k}$ (assenyalo a la pissarra la fórmula que ja estava escrita) és cert per

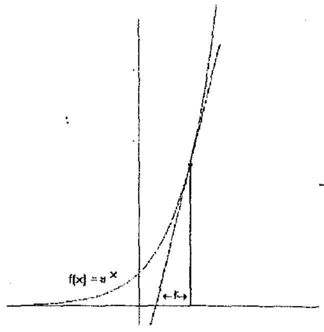
a qualsevol valor de a, o sigui és cert per a qualsevol x, per tant (escric a la pissarra):

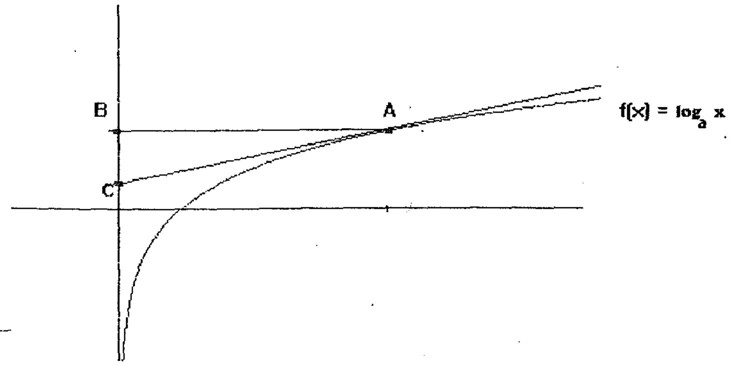
$$f'(x) = \frac{a^x}{k}$$

A continuació remarco que per poder tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base a, només cal saber el valor de k., és a dir, si és 1,5 o bé 0,8 o bé 3,2 etc. A continuació dic que girin 90° cap a l'esquerra i que després mirin al transparent el full on tenen la figura de l'activitat 53 i que observin on va a parar el segment de longitud k (la subtangent).

A: Es posen a fer-ho (aquesta activitat els resulta força divertida). Alguns d'ells no s'aclareixen i em pregunten com s'ha de fer.

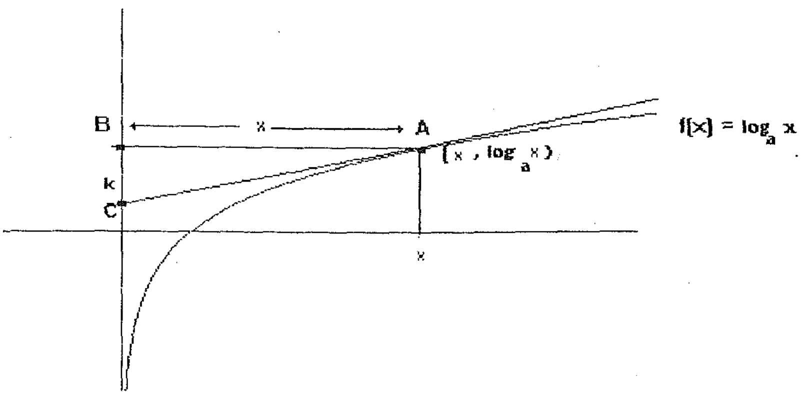
P: Dibuixo les gràfiques següents a la pissarra l'una al costat de l'altra. Remarco que les dues funcions són una la inversa de l'altra i pregunto on ha anat a parar la subtangent, o sigui el segment de longitud k de la gràfica de l'esquerra.





A: Responen que és el segment BC de la gràfica de la dreta.

P: Completo la gràfica de la pissarra, de manera que queda com la gràfica de l'activitat 54 (però utilitzo la x en comptes de la c que ells tenen en la figura de la unitat) i dic que acabem de fer l'apartat a d'aquesta activitat. Seguidament remarco que sabem que el segment BC té una longitud igual a k perquè la funció $f(x) = \log_a x$ és la inversa de la funció $f(x) = a^x$ i dic que intentin fer l'apartat b d'aquesta activitat



A: Isabel G. diu que no ho entén.

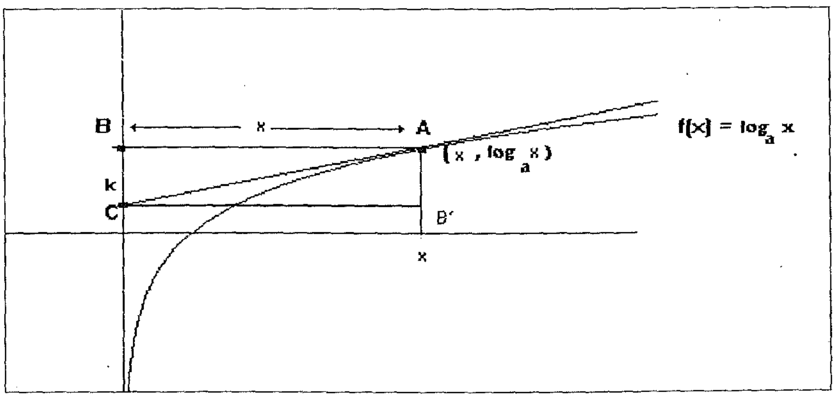
P: Li faig girar a ella el full 90° cap a l'esquerra i mirar al transparent i li faig observar on ha anat a parar el segment de longitud k.

A: Isabel G. diu que d'acord, que ja ho entén.

P: A continuació recordo que el nostre objectiu era saber el valor de k en la fórmula

$$f'(x) = \frac{a^x}{k}$$ (l'assenyalo a la pissarra) i dic que per determinar el valor de k

utilitzarem l'expressió de la funció derivada de la funció $f(x) = \log_a x$. A continuació recordo que la funció derivada de $f(x) = \log_a x$ tenia dues expressions, una de les quals era $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$. Seguidament, sobre la gràfica de la funció $f(x) = \log_a x$ que hi ha a la pissarra, dibuixo el següent triangle (ACB′) i pregunto quina és la longitud de la base i de l'altura .



A: Alguns alumnes responen que la base és x i l'altura és k

P: Els explico que la derivada en el punt d'abscissa x ,d'una banda, és $\dfrac{\log_a e}{x}$ i ,d'altra banda, és el pendent de la recta tangent , és a dir, la variació vertical dividida per variació horitzontal, o sigui k/x. Per tant (escric a la pissarra) $\dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{k}{x}$

A continuació els faig observar si els denominadors són iguals als numeradors també i que, per tant, $k = \log_a e$

A: molts alumnes fan cara de no haver entès la meva explicació.

P: La repeteixo tota.

A: Laura N. i d'altres alumnes diuen que no ho acaben d'entendre.

P: Repeteixo l'explicació a l'inrevés. És a dir, començo pel final i vaig cap enrera. Dibuixo la gràfica de la funció $f(x) = \log_a x$ i, en un punt qualsevol, dibuixo les coordenades i la recta tangent. A continuació els recordo que d'aquesta funció sabem que la derivada és $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$ perquè la vam calcular en la classe anterior i pregunto a Laura N. si està d'acord amb això que he dit fins ara.

A: Laura respon que sí.

P: Continuo dient que ara buscarem la funció derivada de la funció $f(x) = \log_a x$ per raonaments geomètrics i dic que en el punt de la figura, i en qualsevol altre, el pendent de la recta tangent és k/x. Remarco que, de fet, hem trobat la derivada de la funció derivada de $f(x) = \log_a x$ per dos mètodes diferents i escric el següent a la pissarra

derivada de la funció $f(x) = \log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{k}{x}$$

A continuació dic que aquestes dues expressions són iguals (escric a la pissarra): $\frac{\log_a e}{x} = \frac{k}{x}$ i els faig observar que, com que els denominadors són iguals, els numeradors també i que, per tant, $k = \log_a e$. Per últim els faig observar que, si girem 90° cap a l'esquerra i mirem al transparent la gràfica de la funció $f(x) = \log_a x$, obtenim la gràfica de la funció exponencial i podem concloure que la subtangent k de la funció exponencial és $k = \log_a e$

Pregunto si ho han entès.

A: Alguns diuen que ara sí i d'altres no diuen res.

P: Repeteixo l'explicació amb l'altra notació de la derivada de la funció exponencial fins a arribar al resultat $k = 1/\ln a$. Per últim, explico que, un cop sabem que $k = 1/\ln a$ i utilitzant el resultat de l'activitat 53, tenim:

$$(a^x)' = \frac{a^x}{k} = a^x \cdot \frac{1}{k} = a^x \cdot \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} \quad a^x \cdot \ln a$$

A: Patricia F. ,que sembla haver seguit l'explicació, em pregunta si no es pot utilitzar la fórmula

$$(a^x)' = \frac{a^x}{\log_a e}$$

P: Dic que efectivament es pot utilitzar, però que és més habitual utilitzar l'expressió $f'(x) = a^x \ln a$. A continuació dic que utilitzant les regles de derivació i la taula de funcions derivades del <<Recorda>> de la pàgina 347 facin l'activitat 55.

A: Es posen a fer-la.

P: Al cap d'una estona els dic que vinguin de 10 en 10 amb mi a l'ordinador del Departament de matemàtiques amb el dossier.

A: Vénen 10 alumnes amb mi i els altres continuen fent l'activitat 55.

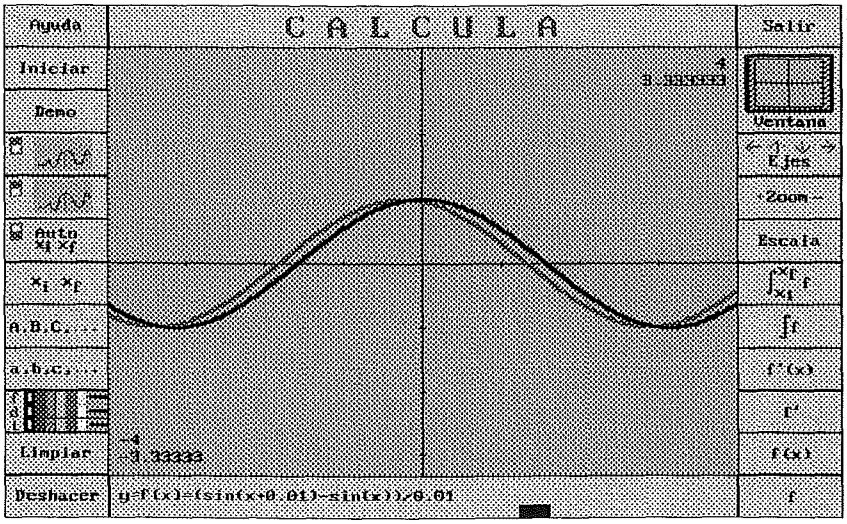
P: Sec a l'ordinador i dic que es posin al meu voltant. Explico que ara veurem a la pantalla de l'ordinador com es pot trobar la derivada de la funció sinus i remarco que el que farem es correspon amb l'explicació de les pàgines 348 i 349 de la unitat.

A: Els alumnes busquen aquestes pàgines.

P: Comento que, per trobar la funció derivada de la funció sinus, s'ha de buscar el límit $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$, però que això és una mica complicat i que, per aquest motiu, en aquest curs ens limitarem a donar una justificació intuïtiva de les fórmules de les derivades de les funcions sinus i cosinus i en deixarem la demostració per al proper curs. A continuació faig una analogia amb la calculadora i dic que, així com amb la calculadora podien trobar aproximadament la derivada de la funció sinus en un punt, suposant que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} \simeq \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ amb h prou petit tal com vam fer a l'activitat 23, doncs ara podem fer el mateix amb la funció derivada; és a dir, podem considerar que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \simeq \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \qquad \text{(amb } h \text{ prou petit)}$$

A continuació, amb el programa Calcula, dibuixo la gràfica de la funció taxa mitjana de variació $\frac{\sin(x+0,5)-\sin(x)}{0,5}$ i comento que, si considerem que $h = 0,5$, obtenim una funció que té per gràfica aquesta de color blau (assenyalo la gràfica a la pantalla), que és una bona aproximació a la gràfica de la funció derivada. A continuació faig el mateix amb $h = 0,1$ i els faig observar que la nova gràfica (de color verd) és una millor aproximació a la de la funció derivada. Repeteixo el procés amb $h = 0,01$ i també els faig observar que la gràfica de color vermell que s'obté encara és una millor. Després ho repeteixo amb valors de $h >$ 0,01 i els faig observar que torna a sortir la gràfica anterior (de color vermell) perquè aquest programa ja no pot precisar més. Remarco, doncs, que la gràfica de color vermell a <<efectes pràctics>> és la gràfica de la funció derivada.



A: Silvia pregunta si és o no és la funció derivada.

P: Li responc recordant el que hem fet i li dic que com que aquest límit $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ és complicat de calcular, suposarem que la funció derivada que s'obté calculant-lo és quasi igual a la funció que s'obté si donem a h un valor prou petit, per exemple $h=0{,}01$. Per tant, la gràfica de la funció $\dfrac{\sin(x+0{,}01)-\sin x}{0{,}01}$ no és la de la derivada, però s'hi aproxima tant que el graficador no les distingeix i, per tant, podem suposar que ho és. Pregunto si la reconeixen.

A: Només un diu que és el cosinus.

P: Dic que efectivament és la gràfica de la funció cosinus. Per adonar-se'n han d'identificar-la com una funció trigonomètrica que pot ser el sinus o el cosinus. Després, per decidir-se per una d'aquestes dues possibilitats, basta fixar-se en la imatge del zero, en els punts de tall, etc. En aquest cas la imatge del zero és 1 , talla aproximadament en el punt d'abscissa 1,5 (els faig observar que 90° són $\pi/2$ radians $\approx 1{,}5$ radians), etc i, per tant, aquesta és la gràfica de la funció cosinus.

A continuació poso la fórmula del cosinus i la grafico perquè els alumnes vegin com la gràfica del cosinus coincideix amb la gràfica de color vermell. Per últim, torno a fer una analogia amb la calculadora dient que, així com la primera ens permet trobar aproximadament la derivada en un punt, un graficador ens permet trobar aproximadament la gràfica de la funció derivada, però després cal saber trobar la fórmula d'aquesta gràfica.

Tot seguit utilitzo aquest procediment amb la funció $f(x)=x^2$ i represento la funció taxa mitjana de variació de la funció entre x i $x+0{,}001$ amb la qual cosa obtinc el gràfic d'una funció que és quasi igual que la gràfica de la recta $y = 2x$. Per últim, els faig observar que aquest resultat coincideix amb el que vam obtenir en l'exemple de la pàgina 330 en què vam demostrar que la funció derivada de $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$.

A: Repeteixo el procés anterior amb dos grups més i observo que els alumnes que havien treballat a l'hora B del divendres anterior el qüestionari 7, tenen més facilitat per reconèixer que la gràfica de la funció derivada és el cosinus, que no pas els alumnes que no han treballat aquest qüestionari.

P: Toca el timbre i dic que el grup que no ha pogut anar a l'ordinador hi anirà demà.

Valoracions

1) Els alumnes no tenen cap dificultat per entendre que una de les propietats de la funció exponencial de base a és que, per a qualsevol punt del gràfic de la funció, la subtangent sempre val el mateix nombre k perquè l'han comprovada amb el programa <<Calcula>>.

2) L'alumnat no té cap dificultat per calcular $f'(c)$ gràficament, utilitzant que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(c) = a^c/k$. I també entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que, per tant: $f'(x) = a^x/k$.

3) L'alumnat també entén que, per poder tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base a, només cal saber el valor de k.

4) L'alumnat ha tingut moltes dificultats per entendre que aquest valor k es pot calcular utilitzant que la funció exponencial de base a té per inversa la funció $f(x) = \log_a x$, la derivada de la qual ja coneixem. Crec que la dificultat rau que ha de coordinar molts elements alhora (propietat de les subtangents, relació entre les gràfiques de les funcions $f(x) = \log_a x$ i $f(x) = a^x$, actualitzar un resultat anterior ($(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$ o bé $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$) utilitzar la interpretació geomètrica de la derivada en un punt amb un triangle no prototípic, etc.).

5) En relació als ítems 70-72 crec que:

Ítem 70	L'alumnat ha entès que una de les propietats de la funció exponencial de base a és que la subtangent sempre val el mateix nombre k.
Ítem 71	L'alumnat ha pogut calcular $f'(c)$ gràficament, a partir de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(c) = a^c/k$; i després ha entès que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = a^x/k$.
Ítem72	L'alumnat ha entès que, per poder tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base a, només cal saber el valor de k. I que aquest valor es pot calcular utilitzant que la funció $f'(x) = a^x$ té per inversa la funció $f(x) = \log_a x$, la derivada de la qual ja coneixem.

5.2.25. Subseqüència 12. Derivada de les funcions trigonomètriques

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 56-59 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3:

73 Entendre que per a un valor h molt petit com 10^{-6} o 10^{-7}, 10^{-8} ... la funció taxa mitjana de variació $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ és una funció <<pròxima>> a la funció derivada $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ i, que per tant, per trobar una bona aproximació a la gràfica de la derivada del sinus, basta representar la funció taxa mitjana de variació per a un valor de h prou petit.

74 Reconèixer que la gràfica de la funció $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ amb h prou petit és quasi igual a la gràfica de la funció cosinus.

75 Entendre que per a un valor h molt petit com 10^{-6} o 10^{-7}, 10^{-8}, ... la funció taxa mitjana de variació $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ és una funció <<pròxima>> a la funció derivada $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i, que per tant, per trobar una bona aproximació a la gràfica de $f'(x)$, basta representar la funció taxa mitjana de variació per valor de h prou petit. Finalment, entendre que,si podem trobar l'expressió simbòlica de la gràfica, tindrem l'expressió simbòlica de la funció derivada.

76 Fer un esbós de la gràfica de la funció $f(x) = -\sin x$, a partir de la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$.

77 Aplicar el procediment anterior per calcular la derivada de la funció cosinus.

78 Calcular les derivades de les funcions tangent i cotangent, a partir de considerar-les com a divisió de funcions i de l'aplicació de la regla de la divisió.

L'objectiu d'aquest apartat és que l'alumnat calculi la funció derivada de les funcions trigonomètriques estudiades <<teòricament>> en cursos anteriors.. L'alumnat ha d'entendre que el càlcul de la derivada de la funció sinus a partir del límit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$, encara que es pot fer, és massa complicat, i que, per aquest motiu, en aquest curs ens limitarem a donar una justificació intuïtiva de les fórmules de les derivades de les funcions sinus i cosinus, deixant per al proper curs la seva demostració rigorosa.

Es tracta d'aprofitar les possibilitats que ens ofereixen les noves tecnologies. Per trobar la funció derivada de la funció sinus, utilitzarem un graficador de funcions i el fet que per a un valor h molt petit com 10^{-6} o 10^{-7}, 10^{-8}, ... la funció taxa mitjana de variació entre x i x+h

$\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ és una funció que és quasi igual que la funció

derivada $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ Per tant, per trobar una funció que tingui el gràfic quasi igual que la funció derivada, basta representar en un graficador de funcions la funció taxa mitjana de variació entre x i $x+h$ per a un valor de h petit.

L'explicació que hi ha a la unitat s'ha de complementar a l'aula d'informàtica amb el graficador <<Calcula>>. L'alumnat ha d'entendre que, si en un graficador representen la funció taxa mitjana de variació de la funció $f(x) = \sin x$ entre x i x +0,5 ,s'obté el gràfic 1 (blau) ; si és entre x i x +0,1, s'obté el gràfic 2 (verd) ; entre x i x+0,01 s'obté el gràfic 3 (negre); i per a qualsevol valor de h més petit que 0,01, torna a obtenir-se el gràfic 3. Per tant, podem suposar que el gràfic de la funció derivada de la funció sinus és el gràfic de color negre (gràfic 3).

Si es pot trobar la fórmula de la funció que correspon al gràfic 3, haurem trobat la fórmula de la funció derivada de la funció sinus. Si observem el gràfic de color negre i recorden allò que saben sobre els gràfics de les funcions trigonomètriques, tot fa suposar que es tracta de la funció cosinus. Per confirmar aquesta suposició, basta representar amb el mateix graficador la funció cosinus i observar que torna a sortir el gràfic de color negre. Per tant, podem afirmar que la derivada de la funció sinus és la funció cosinus.

Cal remarcar que és necessari que l'alumnat hagi treballat les gràfiques de les funcions trigonomètriques anteriorment, perquè aquest mètode implica trobar la fórmula d'una funció a partir del seu gràfic.

A l'apartat *a* de l'activitat 56, l'alumnat ha de dibuixar el gràfic de la funció $f(x) =- \sin x$, a partir del gràfic de la funció sinus, que ja ha estudiat en cursos anteriors. A l'apartat *b*, l'alumne ha d'entendre que si representem la funció taxa mitjana de variació de la funció y = cos x entre x i x + 0,001 obtenim el gràfic d'una funció que és quasi igual que la gràfica de la funció derivada de la funció cosinus; i que aquest gràfic és el de la funció $f(x) =- \sin x$. Per tant, podem intuir que la derivada de la funció $f(x) = \cos x$ és la funció $f(x) = -\sin x$.

Cal tornar a remarcar que és necessari que l'alumnat hagi treballat les gràfiques de les funcions trigonomètriques anteriorment, perquè aquest mètode també implica trobar la fórmula d'una funció a partir del seu gràfic.

Pot ser convenient ampliar aquest procediment amb altres exemples. Així, per exemple, si considerem la funció $f(x) = x^2$ i representem la funció taxa mitjana de variació de la funció entre x i $x + 0{,}001$, obtindrem el gràfic d'una funció que és quasi igual que la gràfica de la recta $y = 2x$. En aquest cas, aquesta conjectura queda confirmada per l'exemple de la pàgina 330 en el qual ja s'ha demostrat que la funció derivada de $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$.

A les activitats 57 i 58, utilitzant la regla de la derivada d'un quocient i simplificant el resultat, l'alumnat ha de trobar les dues expressions de la derivada de la funció tangent i de la derivada de la funció cotangent. En l'activitat 59 ha d'utilitzar les derivades de les funcions trigonomètriques, juntament amb les regles de derivació i les funcions derivades de les funcions elementals que ja coneix..

Aquesta subseqüència es va desenvolupar en l'última part de la sessió del dia 28-1-98 i en la sessió del dia 29-1-98.

Sessió del 29-1-98.

Planificació prèvia

1) Acabar les activitats 56-59
2) Repetir el càlcul de la funció derivada de la funció $f(x) = a^x$

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Mike D.

P: Començo la classe dient que facin l'activitat 55 mentre m'emporto el grup de deu alumnes que no van poder passar per l'ordinador el dia anterior, per treballar el càlcul de la derivada de la funció sinus amb l'ordinador del meu Departament.

A: Repetim el mateix que vam fer amb els altres grups.

P: Quan tornem a la classe, dic que corregirem a la pissarra l'activitat 55 i faig sortir Laura N. a la pissarra.

A: Escriu el següent

a) $f(x) = 4^x - \log_3 x + 27$ $\qquad\qquad f'(x) = 4^x \ln 4 - \dfrac{\log_3 e}{x}$

P: Comento que la derivada és correcta i faig observar que, en el primer terme, el nombre a de la fórmula $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ és 4 i que el nombre a de la fórmula

$f'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$ és 3 i pregunto si tothom està d'acord amb aquest resultat.

A: Diuen que sí. Laura N. respon de la manera següent a l'apartat *b*
b) $g(x) = (5^x - \ln x)\cdot(\log_{12} x + 3)$

$$g'(x) = (5^x \ln 5 - 1/x)\cdot(\log_{12} x + 3) + \frac{\log_{12} e}{x}(5^x - \ln x)$$

P: Comento que Laura ha aplicat correctament la derivada del producte, però penso que l'altre dia no va quedar prou clar perquè la derivada de la funció $f(x) = a^x$ és $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ i crec que seria convenient repetir l'explicació.

A: La majoria callen, ja que estan davant d'una alternativa dura: o bé reconeixen que no ho van entendre i han d'aguantar una nova explicació, o bé diuen que ho van entendre per evitar-la. Alguns alumnes demanen que la repeteixi.

P: Repeteixo l'explicació de l'altre dia només amb una expressió de la derivada de $f(x) = \log_a x$, l'expressió $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$

A: Alguns (Jordi C i d'altres) diuen que encara no ho acaben d'entendre.

P: Torno a repetir.

A: Encara n'hi ha que no ho acaben de veure, però ara fan preguntes concretes, que puc anar aclarint. Per exemple, Elisabeth G. pregunta per què $k = \dfrac{1}{\ln a}$ .Arriba un moment que ja no fan més preguntes, alguns perquè ho han arribat a entendre i d'altres perquè no volen aguantar més explicacions.

P: Els demano que obrin el dossier de la unitat de derivades per la pàgina 347 i dic que ara el nostre objectiu és trobar la derivada de les funcions trigonomètriques, començant per la funció sinus. Seguidament comento que, per trobar la funció derivada de la funció sinus, s'ha de buscar el límit $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$, però que això és una mica complicat i que, per aquest motiu, ara ens limitarem a donar una justificació intuïtiva de les fórmules de les derivades de les funcions sinus i cosinus i deixarem per més endavant la seva demostració. A continuació recordo el que vam fer a l'ordinador i que podem considerar que la funció derivada és quasi igual a la funció taxa mitjana entre x i $x+h$, amb h prou petit (escric a la pissarra)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \approx \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \qquad \text{amb } h \text{ prou petit}$$

Seguidament recordo que, amb el programa Calcula, vam dibuixar la gràfica de la funció taxa mitjana de variació $\frac{\sin(x+0,5)-\sin(x)}{0,5}$ (els faig observar que és la funció que tenen a la primera fila de la taula de la pàgina 349 i també que és la gràfica de color blau de la tenen a la figura de la pàgina 348, que és una gràfica que és una bona aproximació a la gràfica de la funció derivada. A continuació faig el mateix amb $h = 0,1$ i els faig observar que la nova gràfica (de color verd) és una millor aproximació a la gràfica de la funció derivada que la gràfica de color blau. Repeteixo el procés amb $h = 0,01$ i també els faig observar que la gràfica de color vermell que s'obté encara és una millor aproximació a la gràfica de la funció derivada. Després recordo que per a valors de $h > 0,01$ vam observar que tornava a sortir la gràfica de color vermell perquè aquest programa ja no podia precisar més. Remarco que la gràfica de color vermell a <<efectes pràctics>> és la gràfica de la funció derivada la qual vam reconèixer com la gràfica de la funció cosinus i que, per tant, la derivada de la funció $f(x) = \sin x$ és la funció $f'(x) = \cos x$.

A continuació dic que facin l'activitat 56, on podran observar que la derivada de la funció cosinus no és el sinus. Insisteixo que la derivada de la funció sinus és la funció cosinus, però que la derivada de la funció cosinus no és el sinus, tal com podran veure si fan l'activitat 56.

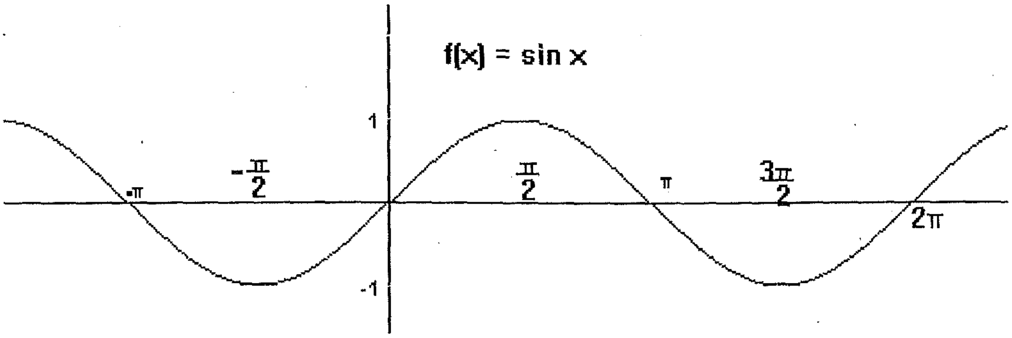
A: Es posen a fer l'activitat 56. Observo que tenen més dificultats per dibuixar la gràfica de la funció $f(x) = -\sin x$ perquè no són conscients de la transformació gràfica que es produeix quan multipliquem la funció per -1; no saben que, en multiplicar per -1, es produeix una reflexió sobre l'eix d'abscisses.

P: Comento que per dibuixar la gràfica de la funció sinus, primer han de dibuixar la gràfica de la funció sinus i després reflexionar sobre l'efecte que produeix sobre la gràfica d'aquesta funció el fet de multiplicar per -1

A: Observo que majoritàriament fan un esbós de la gràfica de la funció sinus. Els alumnes que més bé ho fan són els que van respondre el qüestionari 7 el divendres anterior.

P: Dic que algú surti a fer la gràfica de la funció sinus a la pissarra.

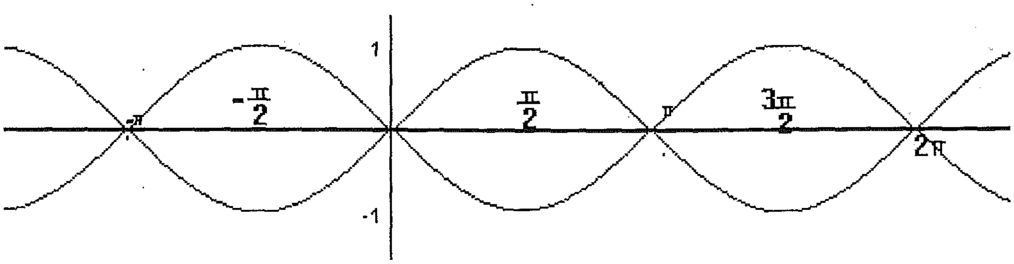
A: Patricia F. surt a la pissarra i fa una gràfica de la funció sinus força ben feta, que jo acabo de completar

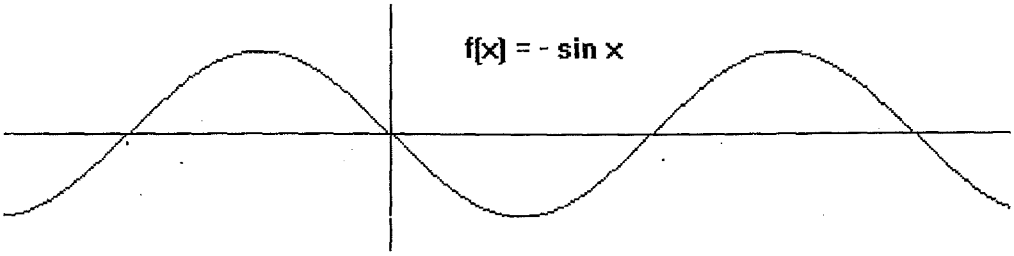


P: Pregunto quin efecte produeix sobre la gràfica el fet de multiplicar per -1

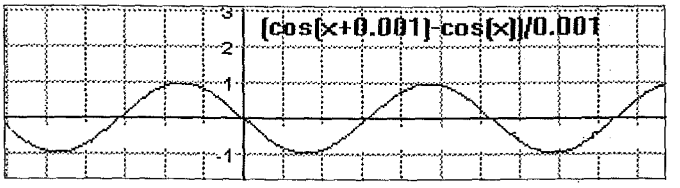
A: Molts alumnes reclamen la meva atenció per comentar l'efecte que produeix el fet de multiplicar per -1 i alguns d'ells s'adonen que, en multiplicar per -1, les ordenades positives passen a negatives i viceversa, però en la majoria dels casos els ho he de fer observar jo.

P: Comento per a tota la classe que quan multipliquem les imatges per -1 aconseguim que les que eren positives ara siguin negatives i viceversa. Acompanyo aquesta explicació amb gestos sobre la gràfica) i dibuixo les dues gràfiques següents:





A continuació dic que un cop hem respost l'apartat *a* de l'activitat 56, respondrem l'apartat *b,* que diu que en un graficador hem representat la funció taxa mitjana de variació de la funció y = cos x entre x i x + 0,001 obtenint el següent gràfic:



i pregunto si és correcte afirmar que la derivada de la funció $f(x)$ = cos x és la funció $f(x)$ =-sin x

A: Ningú contesta i alguns diuen que és correcte, però que no saben com explicar-ho.

P: Toca el timbre. Comento que, igual que hem fet amb la funció sinus, podem considerar que la funció derivada de la funció cosinus és quasi igual a la funció taxa mitjana entre x i $x+h$, amb h prou petit (escric a la pissarra)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \simeq \frac{\cos(x+0{,}001)-\cos x}{0{,}001} \qquad \text{amb } h = 0{,}001$$

i que, per tant, la gràfica de l'apartat *b de* l'activitat 56 (l'assenyalo a la pissarra) és quasi igual a la gràfica de la funció derivada de la funció cosinus. Continuo dient que només cal comparar aquesta gràfica amb la de la funció $f(x)$ =-sin x (assenyalo les dues gràfiques) per arribar a la conclusió que.................

A: Són la mateixa.

P: Per tant, la derivada de la funció cosinus és.................

A: Menys el sinus.

P: Escric a la pissarra: La derivada de $f(x)$ = cos x és $f'(x)$ =-sin x, i els faig observar que abans de saber que aquesta funció era la derivada, utilitzava la notació $f(x)$ = -sin x, sabent ara que és la derivada utilitzo la notació $f'(x)$ = -sin x.

A: Alguns alumnes em pregunten si farem l'examen el dia 3 .

P: Els contesto que seria bo endarrerir la data per acabar la unitat.

A: Proposen fer l'examen el dia 12-2-98 perquè el divendres 7 (hora B) no farem classe perquè la professora d'anglès m'ha demanat l'hora per fer un examen amb tot el grup i el dia 11-2-98 se'n van d'excursió.

P. Dic que hi estic d'acord i acaba la classe.

Valoracions

1) El fet de treballar amb el graficador Calcula facilita que l'alumnat entengui que, per a un valor h molt petit com 10^{-6} o 10^{-7} , 10^{-8} , ... la funció taxa mitjana de variació $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ és una funció <<pròxima>> a la funció derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$. Per tant, per trobar una bona aproximació a la gràfica de la derivada del sinus, basta representar la funció taxa mitjana de variació per a un valor de h prou petit (ítem 73).

2) He observat que els alumnes que a l'hora B del divendres anterior havien treballat el qüestionari 7 tenen més facilitat que no pas els altres per reconèixer que la gràfica de la funció $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ amb h prou petit (que és la gràfica de la funció derivada) "a efectes pràctics" és quasi igual a la gràfica de la funció cosinus (ítem 74).

3) Crec que l'alumnat pot generalitzar el que ha fet amb la funció sinus i entendre que per a un valor h molt petit com 10^{-6} o 10^{-7} , 10^{-8} , ... la funció taxa mitjana de variació $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ és una funció <<pròxima>> a la funció derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Per tant, per trobar una bona aproximació a la gràfica de $f'(x)$ basta representar la funció taxa mitjana de variació per valor de h prou petit. Finalment, si podem trobar l'expressió simbòlica de la gràfica, tindrem l'expressió simbòlica de la funció derivada (ítem 75).

4) Els alumnes tenen moltes dificultats per fer un esbós de la gràfica de la funció $f(x) = -\sin x$, a partir de la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ perquè no tenen clar que el fet de multiplicar per -1 produeix una reflexió de la gràfica de la funció sinus sobre l'eix d'abscisses. Dit d'una altra manera: les transformacions gràfiques de les funcions no formen part dels seus coneixements previs (ítem 76).

5) L'alumnat, si bé no ha pogut explicar el càlcul de la derivada de la funció sinus, no ha tingut dificultat per entendre l'aplicació del procediment anterior per a calcular la derivada de la funció cosinus (ítem 77).

5.2.26. Subseqüència 6 d'avaluació (qüestionari 7). Continuació

Aquest qüestionari es va passar el dia 30-1-98 a mitja classe (19 alumnes).

Sessió 30-1-98

Planificació prèvia

1) Passar el qüestionari 7 sobre el càlcul de la funció derivada de la funció $f(x) = \sin x$

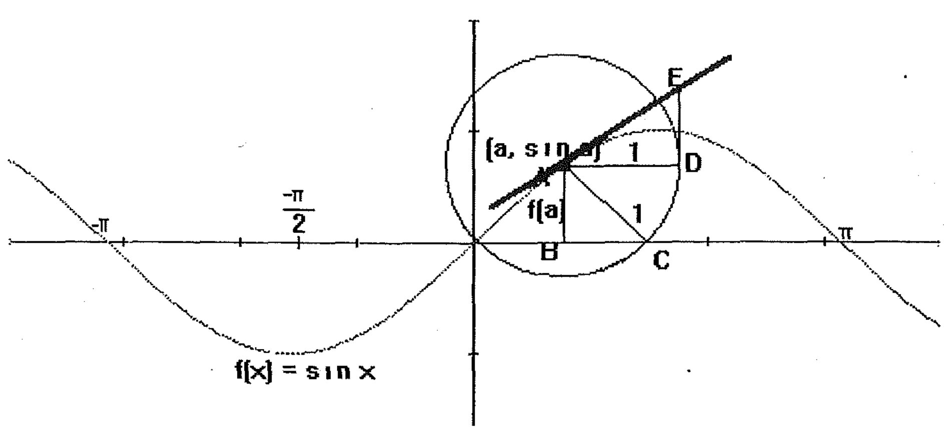
2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió del dia 23-1-98

Faltes: Laura A., Alex A., i Mike D.

Incidències: la classe ha començat 10 minuts més tard perquè els alumnes han tingut un examen a l'hora anterior; alguns fins i tot arriben més tard. L'alumne Alberto C em va demanar permís per venir avui en comptes del dia 23.

P: Com que sóc conscient que potser no tindran temps d'acabar el qüestionari 7, distribueixo els alumnes en grups de dos i comento que poden consultar amb els grups del voltant.. Abans que comencin a respondre'l, els recordo que a les hores *A* hem vist que la derivada de la funció sinus és el cosinus i que avui tornaran a comprovar una cosa que ja saben: que la derivada de la funció sinus és el cosinus, i que ho faran a partir d'un procediment que permet calcular la recta tangent a la gràfica de la funció sinus en un punt qualsevol. Seguidament explico dues vegades a la pissarra amb molta cura els passos del procediment del qüestionari



A continuació comento que en la figura de l'apartat *a* del qüestionari tenen dibuixats els quatre primers passos del procediment i els dic que facin l'últim pas.

A: Els alumnes dibuixen la recta que uneix els punts *A* i *E*.

P: Pregunto quina recta han obtingut.

A: Responen que la recta tangent.

A: Alberto C. arriba més tard i es posa a fer el qüestionari sol. Una mica més tard arriba Javier F. i també es posa sol. Tots els altres treballen en grups de dos.

P: Comento que en el paper mil·limetrat tenen dibuixada la funció sinus i en tres punts hi ha aplicat aquest procediment totalment o parcialment. Segueixo comentant que en el punt d'abscissa 0,4 ja s'han aplicat tots els passos del procediment; en canvi, en els punts d'abscissa 2,2 i $-\pi/2$ només n'hi ha una part i ells han de completar els passos que falten.

A continuació dic que quan aquest procediment s'aplica en un punt on la funció és decreixent, o sigui la funció baixa, el segment *ED* de longitud igual al segment *BC* s'ha de col·locar per avall. Remarco que el segment *ED* es posa cap amunt si estem en un punt on la funció creix i cap avall si la funció decreix.

Seguidament remarco que el gràfic està fet a escala 1:5, i que això vol dir que cada quadre gros del paper mil·limetrat té el costat de longitud 0,2. Després poso el següent exemple: si compto tres quadres en vertical, tinc un segment de longitud $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$ que és equivalent a dividir el nombre de quadres per cinc.

Per últim dic que es posin a treballar.

A: Es posen a treballar en grups de dos. Alguns em demanen aclariments sobre el procediment per a dibuixar la tangent en el punt d'abscissa $-\pi/2$, i d'altres sobre l'escala. Observo que també pregunten als grups dels voltants.

P: Als alumnes que em pregunten per l'aplicació del procediment en el punt d'abscissa $-\pi/2$ els dic que no cal aplicar el procediment per trobar la recta tangent, però que si l'apliquen han de tenir en compte que en aquest cas el segment *BC* és un punt.

A: Observo que l'observació anterior fa que els alumnes tinguin menys dificultats de les que havia previst en el punt d'abscissa $-\pi/2$, perquè saben quina és la solució; és a dir, saben que el resultat d'aplicar el procediment ha de ser una recta horitzontal i això fa que puguin aplicar correctament el procediment.

A: Els alumnes treballen i alguns em pregunten sobre el procediment i sobre l'escala. També comenten entre ells.

P: Dic que poden utilitzar el mateix paper mil·limetrat que jo he repartit per a representar la taula de l'apartat *c* i que n'hi ha prou amb un gràfic per grup.

A: Hi ha alumnes que reclamen la meva atenció perquè no veuen clar com s'han d'unir els punts.

P: El seu problema és que han aplicat malament l'escala o bé que, quan han calculat $f'(2,2)$, no han tingut en compte el signe negatiu. En ambdós casos els dic quin és el seu error.

A: A poc a poc van aconseguint la gràfica de la funció derivada, que reconeixen com la gràfica de la funció cosinus, bé perquè la reconeixen ells sols, bé perquè algun altre grup els explica que la gràfica és la de la funció cosinus.

P: Malgrat que hi ha alguns alumnes que van més endarrerits i no han contestat l'apartat *e* dic que em lliurin el qüestionari perquè vull aprofitar els últims deu minuts per comentar-lo. Faig un resum del procés que han seguit i en remarco els passos:

- D'entrada tenim la gràfica de la funció sinus juntament amb un procediment que ens permet dibuixar la recta tangent en qualsevol punt de la gràfica.
- Després hem dibuixat la recta tangent en diferents punts, seguint aquest procediment.
- A continuació hem utilitzat que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent i hem calculat gràficament la derivada en els punts on la teníem dibuixada.
- Hem recollit en una taula els valors de les abscisses i els valors de les derivades corresponents. És a dir, hem confeccionat una taula de la derivada de la funció sinus.
- Seguidament hem dibuixat una gràfica a partir d'aquesta taula; és a dir, hem trobat la gràfica de la funció derivada de la funció sinus.
- L'últim pas és reconèixer aquesta gràfica com la de la funció cosinus, la qual cosa ens permet assegurar que la derivada de la funció sinus és la funció cosinus.

A: Albert C. Em fa una pregunta sobre la relació entre les gràfiques de les dues funcions.

P: Aprofito la pregunta per fer-los veure la relació entre la gràfica de la funció sinus i la gràfica de la seva derivada. En concret els faig observar, posant la mà sobre la gràfica com si fos la recta tangent i fent consideracions sobre el pendent de la recta tangent, la relació entre les dues funcions; i remarco especialment qué, quan la funció derivada talla l'eix d'abscisses, la funció sinus té un màxim o un mínim (punts de derivada nul·la).

Valoracions

1) Per haver començat la classe una mica tard, 7 (37%) alumnes (els que han arribat més tard) no han pogut contestar l'últim apartat del qüestionari, en el qual havien de respondre que sortia la gràfica de la funció cosinus i que aquesta funció era la derivada de la funció sinus. Aquest fet no el considero important perquè jo he preferit poder comentar el qüestionari que donar-los temps per acabar-lo. He pres aquesta decisió perquè aquest grup d'alumnes (a diferència de l'altre grup d'hora B) ja sabien que la derivada de la

funció sinus és el cosinus i, per tant, ja sabien que els hi havia de sortir la gràfica de la funció cosinus. La meva conclusió és que en aquest grup no és significatiu no respondre l'apartat *e* tenint en compte que la manca de temps els ha impedit contestar.

2) Tots han dibuixat la gràfica de la funció cosinus per si sols o bé amb l'ajut dels altres grups.

3) Crec que les respostes d'aquest qüestionari posen de manifest que la majoria dels alumnes saben calcular gràficament la derivada, utilitzant que és el pendent de la recta tangent (encara que alguns continuen tenint problemes amb el signe del pendent de la recta tangent), i que això els permet seguir el procés següent, sempre que tinguin un procediment per poder dibuixar la recta tangent a la gràfica en qualsevol punt:

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$

i, si saben calcular l'expressió simbòlica de $f'(x)$ a partir de la gràfica, fins i tot poden arribar a fer el procés següent:

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

4) Crec que el treball amb el qüestionari ha millorat el reconeixement dels alumnes de la funció sinus i de la funció cosinus.

5.2.27. Subseqüència 12. Derivada de les funcions trigonomètriques (continuació)

Sessió del 3-2-98.

Planificació prèvia

1) Repetir l'activitat 56
1) acabar les activitats 57-59

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Laura A. i Antoni G.

P: Com que a la classe anterior vaig explicar l'activitat 56 després que toqués el timbre, començo la classe repetint l'explicació (quasi amb els mateixos termes que ho vaig fer en la classe anterior) i pregunto als alumnes si ho han entès.

A: Diuen que sí i Jordi C. comenta <<o sea que la derivada del coseno no es el seno>>

P: Responc que no i remarco que la derivada del sinus és el cosinus, però que la derivada del cosinus no és el sinus sinó que és <<menys el sinus>>.A continuació dic que a les hores *A* hem vist que la derivada del sinus és el cosinus i que a les hores *B* vam arribar al mateix resultat seguint un altre procés diferent que fou:

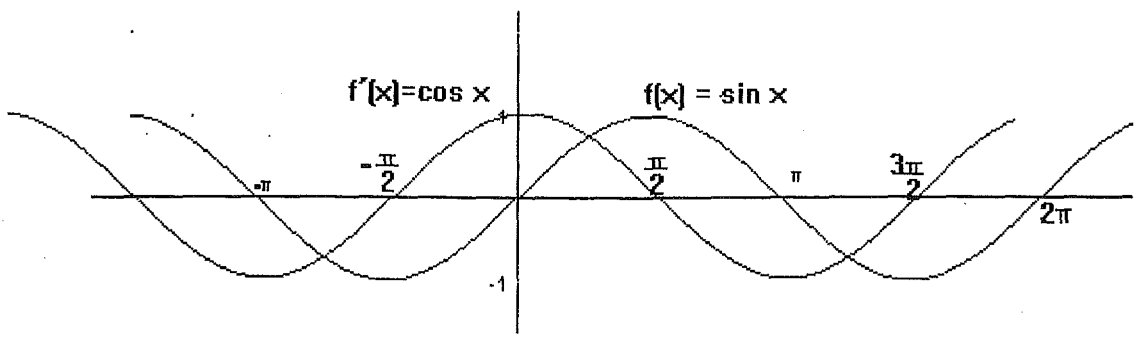
1. D'entrada teníem la gràfica de la funció sinus juntament amb un procediment que ens permet dibuixar la recta tangent en qualsevol punt de la gràfica.
2. Després vam dibuixar la recta tangent en diferents punts seguint aquest procediment.
3. A continuació vam utilitzar que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent, i vam calcular gràficament la derivada en els punts on la teníem dibuixada.
4. Vam recollir en una taula els valors de les abscisses i els valors de les derivades corresponents. És a dir, vam confeccionar una taula de la funció derivada de la funció sinus.
5. Seguidament vam dibuixar una gràfica a partir d'aquesta taula, és a dir, vam trobar la gràfica de la funció derivada de la funció sinus.
6. L'últim pas fou reconèixer aquesta gràfica com la de la funció cosinus, la qual cosa ens permet assegurar que la derivada de la funció sinus és la funció cosinus.

Mentre anava comentant els passos anteriors he anat dibuixant a la pissarra l'esquema següent

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

Seguidament faig les observacions següents:

- Normalment la funció i la funció derivada són diferents.
- Malgrat que són diferents són dues funcions que estan estretament relacionades tal com es pot comprovar si s'observa la gràfica de la funció sinus i la gràfica de la seva derivada (dibuixo a la pissarra les dues gràfiques juntes)



i els faig observar que, quan la funció sinus presenta un màxim o un mínim, la recta tangent és horitzontal i la derivada en aquests punts val zero, per la qual cosa la funció derivada en aquests punts val zero, és a dir talla l'eix d'abscisses. Seguidament dibuixo la recta tangent a la funció sinus en l'origen de coordenades i els faig observar que en aquest punt la recta tangent té la màxima inclinació, (màxim pendent) és a dir, la derivada és màxima; i els faig observar que en aquest punt la funció cosinus, la funció derivada, presenta un màxim

A: Alguns alumnes demanen si puc repetir l'explicació perquè no els ha quedat clar.

P: Repeteixo l'explicació en termes semblants però més a poc a poc i assegurant-me que van entenen tot el que comento. Seguidament dic que facin les activitats 57 i 58 en les quals han d'aplicar la regla de la derivada d'una divisió.

A: Es posen a fer aquestes activitats i observo que apliquen la regla de la derivada de la divisió correctament però no simplifiquen, perquè cap d'ells recorda la igualtat:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

P: Explico que la funció tangent és la que resulta de fer la divisió de la funció sinus per la funció cosinus i, donat que nosaltres ja sabem quina és la derivada de la funció sinus i de la funció cosinus, basta aplicar la regla de la derivada d'una divisió (escric i comento a la pissarra el següent)

$$(tg)'\,x = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ -------->} \ (tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Recordo que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és una igualtat que van estudiar el curs passat.

A: Si bé cap alumne l'ha utilitzat per pròpia iniciativa, quan jo he fet el comentari, molts han fet gestos de recordar-la.

P: Seguidament dic que podem trobar una altra expressió de la derivada de la tangent si, en comptes d'utilitzar $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, fem el següent:

$$(tg)'\,x = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x+1$$

I els faig observar que sinus al quadrat, dividit per cosinus al quadrat, és igual a la tangent al quadrat; i que cosinus al quadrat, dividit per cosinus al quadrat, és igual a 1. També els faig observar que aquestes dues expressions de la derivada de la tangent estan recollides en el <<Recorda>> de la pàgina 350 i dic que normalment s'utilitza la primera de les dues expressions que hem trobat. Després dic que intentin fer de manera anàloga l'activitat 58 fins arribar a les dues expressions que hi ha en el <<Recorda>> de la pàgina 350.

A: Es posen a fer l'activitat 58 i observo que molts arriben a la primera expressió i alguns fins i tot a la segona i que alguns cometen l'error de confondre, per exemple, $\sin^2 x$ amb $\sin x^2$.

P: Comento que aquells que hagin fet l'activitat 58 passin a fer la 59.

A: Molts encara continuen fent l'activitat 58 i alguns comencen a fer la 59.

P: Al cap d'una estona explico l'activitat 58 a la pissarra.

$$(cotg)'\ x = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x\cdot\sin x-(\cos x)\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$cotg\ x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ --------> } (cotg\ x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

i remarco que passem de $-\sin^2 x - \cos^2 x$ a $-(\sin^2 x + \cos^2 x)$ perquè podem treure -1 com a factor comú. Seguidament explico com hem de trobar la segona expressió.

$$(cotg)'\ x = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x\cdot\sin x-(\cos x)\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1-cotg^2\ x$$

I els faig observar que menys sinus al quadrat, dividit per sinus al quadrat, és igual a menys 1 ; que cosinus al quadrat, dividit per sinus al quadrat, és igual a cotangent al quadrat. També , que normalment s'utilitza la primera de les dues expressions que hem trobat i que és igual escriure $\sin^2 x$, que $(\sin x)^2$,però que no confonguin $\sin^2 x$ amb $\sin x^2$, perquè en el primer cas es calcula primer el sinus i després es fa el quadrat, mentre que en el segon,es fa primer el quadrat i després es busca el sinus.

A: Es posen a fer l'activitat 59 i alguns em pregunten dubtes.

P: Faig sortir Pilar G. a fer els apartats *a* i *b* a la pissarra.

A: Pilar G. escriu el següent:

a) $f(x) = 3x^3 + \cos x$ $\qquad f'(x) = 9x^2 - \sin x$
b) $g(x) = 3x^3 + \sin x - \cos x$ $\qquad g'(x) = 9x^2 + \cos x + \sin x$

P: Pregunto si tothom hi està d'acord.

A: Responen que sí i Isabel G. em pregunta d'on surt el + sin x de l'apartat *b*

P: Li responc que $-(\cos x)' = -(-\sin x) = +\sin x$. Després faig sortir Elia G. a fer els apartats *c-f*

A: Elia G. escriu el següent:

c) $h(x) = (x^5 + \cos x)\cdot \sin x$ $\quad h'(x) = (5x^4 - \sin x)\cdot \sin x + \cos x \cdot (x^5 + \cos x)$
d) $i(x) = (x^5 + \operatorname{tg} x)\cdot e^x$ $\quad i'(x) = (5x^4 + 1/\cos^2 x)\cdot e^x + e^x \cdot (x^5 + \operatorname{tg} x)$

P: Comento que en els apartats *c* i *d* s'ha d'aplicar la regla de la derivada d'un producte i els pregunto si tenen cap dubte.

A: Laura N.pregunta si cal simplificar.

P:Li responc que l'objectiu d'aquesta activitat és aplicar les regles de derivació i la taula de derivades de les funcions elementals, més que no pas fer simplificacions, i li recordo que en aquest tipus d'activitat no cal simplificar.

A: Elia respon els apartats *e* i *f* de la manera següent:

$$k(x) = \frac{tg\ x}{\sin x} \qquad k'(x) = \frac{(1+tg^2 x)\cdot\sin x - \cos x\cdot tgx}{\sin^2 x}$$

$$l(x) = \frac{cotg\ x}{\cos x + 4x} \qquad l'(x) = \frac{(-1-cotg^2 x)\cdot(\cos x + 4x) - (-\sin x+4)\cdot cotgx}{(\cos x + 4x)^2}$$

P: Comento que la resposta és correcta i els faig observar que ha aplicat correctament la regla de la derivada de la divisió i que ha utilitzat les segones expressions de les derivades de la tangent i la cotangent en comptes de les primeres .Pregunto si tenen cap dubte.

A continuació comento que un cop hem trobat les derivades de les funcions trigonomètriques buscarem la derivada de les funcions $f(x)=x^{n/m}$, és a dir, les funcions del tipus $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$. En concret, veurem que la regla que hem obtingut per a les funcions $f(x)= x^n$ amb n un nombre natural continua sent vàlida quan l'exponent és una fracció. Seguidament explico com es pot trobar la funció derivada de $f(x) = \sqrt{x}$. El primer que comento és la igualtat següent:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$$

i els faig observar que, derivant les funcions que hi ha en els dos costats de la igualtat, hem d'obtenir el mateix resultat ; i que, per derivar el producte de l'esquerra, aplicarem la regla de la derivada d'un producte (comento i escric a la pissarra el següent)

$$\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)' = (x)'$$
$$\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = 1$$
$$2\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x} = 1$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

A: Judit P. em pregunta d'on surt $2(\sqrt{x})'\cdot\sqrt{x}$

P: Li responc que en la igualtat anterior tenim dos sumands iguals i que si els sumem obtenim el doble. Després els faig observar que, si escrivim el resultat anterior en forma de potència d'exponent fraccionari, tenim:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

i els demano que responguin l'activitat 60, o sigui que diguin si creuen que la fórmula $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ continua sent vàlida per $n = 1/2$.

A: Molts alumnes responen que sí.

P: Dic que efectivament és així i els faig observar que l'exponent 1/2 de la funció ha passat multiplicant en la derivada i que el nombre -1/2 de l'exponent de la funció derivada és el resultat de restar 1 a l'exponent 1/2 de la funció. Toca el timbre i acaba la classe.

Valoracions

1) l'alumnat no ha recordat la igualtat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, però sí que ho ha fet quan jo he dit que l'havien estudiat el curs passat.

2) Els alumnes han pogut calcular les derivades de les funcions tangent i cotangent a partir de considerar-les com a divisió de funcions i de l'aplicació de la regla de la divisió, però no han pogut fer per si sols la simplificació perquè no han pogut actualitzar el coneixement previ: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3) Observo que els errors típics (la derivada d'un producte és el producte de derivades, i la derivada d'una divisió és la divisió de derivades) a poc a poc van desapareixent.