VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

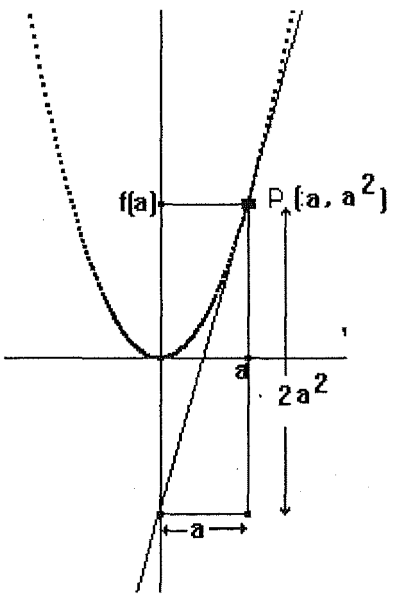
tipus: per un punt qualsevol les secants s'aproximen a la recta tangent (generalització extensiva).

A més de canviar els objectes inicials sobre els que l'alumne realitza les accions també es poden canviar les accions. Per exemple si fins ara l'alumne ha fet l'aproximació de les secants a la tangent anant de dreta cap a l'esquerra, se li pot demanar que faci l'aproximació de l'esquerra cap a la dreta. L'alumne observarà que el resultat anterior es pot reformular de la manera següent: per un punt qualsevol les secants s'aproximen a la recta tangent tant si l'aproximació es fa d'esquerra a dreta com de dreta a esquerra (generalització extensiva).

L'alumne que desenvolupa aquesta seqüència d'activitats connecta el seu l'objecte personal "tangent" amb el seu objecte personal "secant" la qual cosa fa que el significat d'aquests objectes personals inclogui pràctiques del tipus: dibuixar la recta tangent en un punt a partir de situar un regle secant que passi pel punt, i després moure el regle de manera que el punt on vol dibuixar la tangent sigui fix i l'altre se li vagi aproximant.

Exemple 2

En un dels qüestionaris que van contestar els alumnes (veure qüestionari 5, pàgs. 552-554) hi ha una seqüència d'activitats que tenen per objectiu trobar la funció derivada de la funció $f(x) = x^2$. Fins a arribar a la figura següent, els processos d'abstracció i generalització que ha de fer l'alumne són semblants als que hem comentat a l'exemple anterior (abstracció constructiva i generalització extensiva).



Ara bé, un cop l'alumne ha simbolitzat l'invariant que ha trobat de la manera següent:

$$\text{pendent} = 2a^2/a$$

per continuar ha de fer un procés de generalització intensiva, és a dir:

1) Ha de considerar els símbols "a^{2}", "/ ", "a" com a objectes sobre els quals pot realitzar accions.
2) Utilitzar el seu objecte personal "derivada" per tal d'estructurar aquests símbols en termes de derivada d'una funció en un punt.
3) Utilitzar el sentit geomètric de $f'(a)$, és a dir, realitzar la pràctica següent:

$$f'(a) = \text{pendent} = 2a^2/a = 2a$$

Un cop ha arribat al resultat $f'(a) = 2a$, una generalització extensiva li permet arribar al resultat $f'(x) = 2x$.

2.3 Pensament metafòric

Estudiar la creació, variació i ampliació del significats dels objectes personals dels alumnes no es pot fer sense tenir en compte el pensament metafòric. Des que Lakoff i Johnson van posar de manifest la importància del pensament metafòric, entès com la interpretació d'un camp d'experiències en termes d'un altre ja conegut (Lakoff i Johnson 1991) , el paper del pensament metafòric en la formació dels conceptes matemàtics és un tema que cada cop pren més importància en la investigació en didàctica de les matemàtiques (Pimm 1990, English 1997, Sfard 1994 i 1998, Van Dormolen 1991). En aquesta investigació ens limitarem a analitzar els efectes que produeixen sobre l'ensenyament dels conceptes de derivada d'una funció en un punt i de funció derivada les metàfores del tipus: 1) *"El gràfic d'una funció es pot considerar com la traça d'un punt que es mou subjecte a unes determinades condicions"*, 2) *"El gràfic d'una funció es pot considerar com la traça que deixa un punt que es mou sobre el gràfic"*, 3) *"Si interpretem el gràfic com la traça d'un punt subjecte a unes determinades condicions, la recta tangent ens dóna la direcció que seguiria el punt en cada instant"* i 4) *"El gràfic d'una funció es pot considerar com la traça d'un punt que es mou sobre una recta que en cada instant dóna la direcció del moviment, i que va variant de direcció"*.

En el subobjectiu 1.4 comentarem amb detall l'origen històric d'aquestes metàfores, per la qual cosa en aquest apartat ens limitarem a comentar en general el paper de la metàfora en la formació del registre matemàtic i a posar alguns exemples de com entendrem en aquesta investigació l'efecte que produeix la combinació del pensament metafòric amb els processos d'abstracció i generalització.

2.3.1 Metàfores extra-matemàtiques

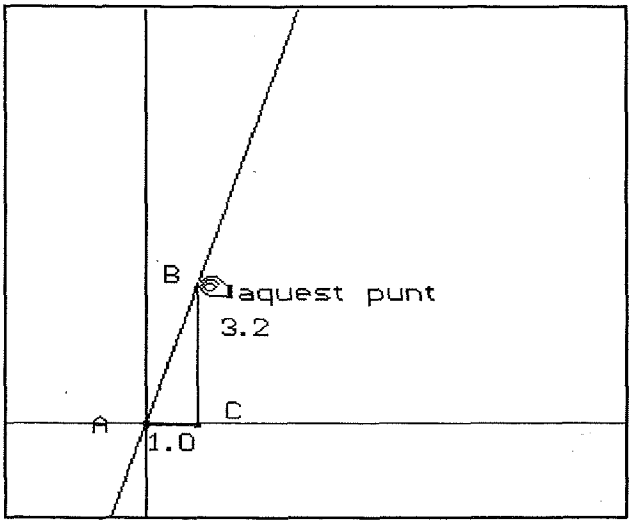
Hi ha una primera classe de metàfores de tipus extra-matemàtic que expliquen el significat i la utilització de determinats termes matemàtics. Aquest tipus de metàfores tracten d'explicar o interpretar situacions matemàtiques en termes de situacions reals. Per exemple, quan diem que "una funció és una màquina", "un vector és una fletxa", "una equació és una balança", etc. estem fent metàfores a fi d'una millor comprensió d'aquests conceptes. Termes que utilitzem en matemàtiques com, per exemple, "resta portant" o "cara d'un políedre" són termes que deuen el seu origen a metàfores extra-matemàtiques. També són el resultat d'aquest tipus de metàfores expressions com: "l'herència de

propietats matemàtiques" o "el descobriment de lleis matemàtiques", etc. Aquest tipus de metàfores plantegen algunes dificultats:
1) *Metàfores didàctiques utilitzades pel professor.* Pot passar que l'alumne, en comptes d'entendre que una funció es pot comprendre a partir d'entendre el funcionament d'una màquina, entengui l'expressió "una funció és una màquina" d'una manera literal, és a dir que es pensi que una funció realment és una màquina. Dit amb altres paraules: l'expressió anterior té un significat literal i d'altra banda té un segon significat que és el que volem que faci seu l'alumne; és a dir, volem que l'alumne estructuri el seu coneixement sobre funcions a partir del seu coneixement sobre les màquines, no que pensi que una funció és una màquina. Perquè l'alumne entengui que l'expressió "una funció és una màquina" no s'ha d'agafar de manera literal, s'ha de produir un conflicte entre el significat literal de l'expressió i el context en què s'usa. L'existència d'aquest conflicte és el que farà que l'alumne busqui un significat diferent del significat literal.
2) *Metàfores creades per l'alumne:* l'alumne pot crear les seves pròpies metàfores extra-matemàtiques. De vegades poden ésser correctes i facilitar la comprensió de la situació, però moltes vegades poden dificultar la comprensió d'allò que es vol ensenyar. Un dels exemples clàssics d'aquest tipus de metàfora és "una gràfica és un dibuix".

2.3.2 Metàfores matemàtiques.

A les classes de matemàtiques són freqüents les metàfores que permeten estructurar parts del coneixement matemàtic a partir d'altres parts que són conegudes. Exemples d'aquest tipus de metàfores són "els nombres reals són els punts d'una recta", "els nombres complexos són vectors", "les funcions de proporcionalitat són rectes que passen per l'origen de coordenades", etc. Aquesta última metàfora pot servir per il·lustrar com aquesta figura lingüística serveix per connectar diferents sentits i, per tant, ampliar el significat d'un objecte personal. En efecte, suposem que l'alumne ha treballat el concepte de pendent d'una recta en el context geomètric de l'activitat de la figura següent, de manera que entén el pendent d'una recta amb el següent sentit geomètric: "el pendent d'una recta és la longitud del segment BC de la figura i determina la inclinació de la recta; és a dir, la seva longitud determina l'angle que forma la recta amb l'eix horitzontal".

Activitat: Situa el punter del ratolí en el punt B i mou aquest punt. Observa que la longitud del segment AC sempre val 1.
a) I la del segment BC?
b) Quina relació observes entre la longitud del segment BC i la inclinació de la recta?



Si posteriorment treballem la funció de proporcionalitat en un context algèbric/funcional en què l'alumne ha de resoldre problemes del tipus:

Activitat: L'entrenador d'un corredor de fons li està cronometrant els temps. En els primers 16 segons els resultats són:

temps (s)	2	4	6	8	16
espai (m)	6	12	18	24	

a) Què es pot dir de la marxa del corredor durant aquest temps? A quina velocitat ha anat durant aquests 16 segons?
b) Busca la fórmula de la funció que ens dóna l'espai recorregut (en m) en funció del temps (en s).
c) Dibuixa el gràfic d'aquesta funció.
d) Quina és l'ordenada que correspon a l'abscissa $x = 1$? Creus que aquesta ordenada determina l'angle que forma la recta amb l'eix horitzontal?
e) Quina relació hi ha entre el pendent i el nombre de la fórmula de la funció que multiplica la x?

En aquest context algèbric/funcional el concepte de pendent agafa dos sentits que l'alumne pot relacionar entre ells: "el pendent d'una funció de proporcionalitat és el nombre que multiplica la x en la fórmula $y = ax$" i "el pendent d'una funció de proporcionalitat és el nombre que correspon a 1". És a dir, hauríem treballat el concepte de pendent en dos contextos diferents: el geomètric i l'algèbric/funcional i l'alumne tindria tres sentits del concepte de pendent. Amb la metàfora "la funció de proporcionalitat és una recta que passa per l'origen de coordenades" podríem aconseguir que l'alumne relacionés els tres sentits entre si i que els associés amb la paraula pendent. Aquest exemple serveix per il·lustrar com la metàfora es pot utilitzar per connectar i crear nous sentits, és a dir per veure com aquesta figura juga un paper clau en l'expansió del registre matemàtic.

La dificultat que pot presentar aquest tipus de metàfora és que l'alumne l'agafi literalment i consideri que una funció de proporcionalitat és una recta, en comptes de considerar que és una funció que té per gràfic una recta que passa per l'origen de coordenades. És a dir, que no mantingui diferenciats "recta que passa per l'origen" i "funció de proporcionalitat". Aquestes confusions és fàcil que es produeixin perquè en molts textos didàctics aquest tipus de metàfora apareix sense que l'autor del text sigui conscient que hi és; no s'han posat com un recurs didàctic sinó que s'han escrit sense adonar-se'n.

Una altra dificultat que es pot produir és que, en connectar el sentit geomètric que es trobava integrat dins un marc explicatiu més general amb els sentits algèbrics i funcionals, estem connectant els nous sentits amb bona part del marc que envoltava el significat geomètric. Això vol dir que relacions que eren vàlides dins el marc inicial es poden traslladar al context algèbric/funcional, però que dins el nou context pot passar que aquestes relacions siguin inadequades, falses o sense sentit, de manera que poden ésser causa de dificultats d'aprenentatge (un exemple seria la metàfora "les integrals són àrees" i el fet que hi ha integrals amb valors negatius). En aquesta investigació hem observat aquest tipus de dificultat en determinats alumnes. Per exemple, en el pre-disseny de l'activitat anterior que ha servit per il·lustrar com entenem els processos d'abstracció i de generalització (exemple 1 de la pàg. 117), vam observar que hi havia alumnes que, quan movien el punt A, es pensaven que el nou punt continuava sent el punt A i que la nova recta tangent era la mateixa que abans però amb diferent inclinació. De fet, és com si estructuressin la situació en termes d'una persona que es mou (punt A) amb un sac a l'esquena (recta tangent) per una carretera que primer puja i després baixa (gràfica) i consideressin que la persona i el sac sempre són els mateixos encara que estiguin en diferents llocs i amb diferent inclinació.

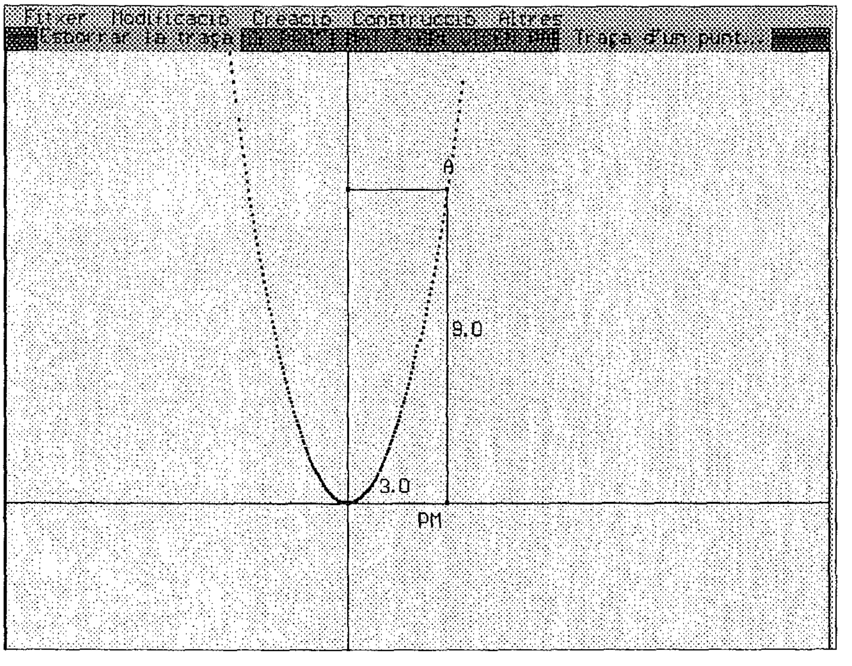
2.3.3 Exemples de com entendrem en aquesta investigació l'efecte que produeix la combinació del pensament metafòric amb els processos d'abstracció i generalització

A continuació il·lustrarem amb exemples com entenem nosaltres la combinació de les metàfores sobre les gràfiques que hem comentat anteriorment amb els processos d'abstracció i generalització.

2.3.3.1 Exemples relacionats amb la primera metàfora

Exemple 1

Si el professor utilitza la metàfora que la gràfica de la funció és la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions, i presenta als alumnes l'activitat següent en què l'alumne ha de moure el punt mòbil PM i ha d'observar que la distància del punt A a l'eix d'abscisses és el quadrat de la distància a l'eix d'ordenades i que la traça del punt és una paràbola. A partir d'aquí pot entendre que la condició que compleix qualsevol punt d'aquesta paràbola és que la seva distància a l'eix d'abscisses és igual que el quadrat de la seva distància a l'eix d'ordenades. Aquest resultat es pot expressar amb paraules: "tots els punts d'aquesta paràbola compleixen que la seva abscissa al quadrat és igual a la seva ordenada" i simbòlicament per "$y = x^2$".



El quadre següent resumeix l'activitat anterior:

METÀFORA:

UNA GRÀFICA ÉS LA TRAÇA QUE DEIXA UN PUNT QUE ES MOU SUBJECTE A UNES DETERMINADES CONDICIONS

INVARIANT DE L'ACCIÓ

DISTÀNCIA DEL PUNT A A L'EIX D'ABSCISSES	=	QUADRAT DE LADISTÀNCIA DEL PUNT A A L'EIX D'ORDENADES
ORDENADA	=	$(\text{ABSCISSA})^2$

SIMBOLITZACIÓ $y = x^2$

Exemple 2

En aquest exemple l'alumne ha de fer el mateix que a l'exemple anterior més una generalització extensiva. L'activitat consisteix en una variació de l'anterior, ja que la pantalla que té l'alumne només se'n diferencia perquè hi apareix el segment *MO* de longitud 1, però ara aquest segment, en variar de longitud, permet obtenir la família de paràboles $y = kx^2$

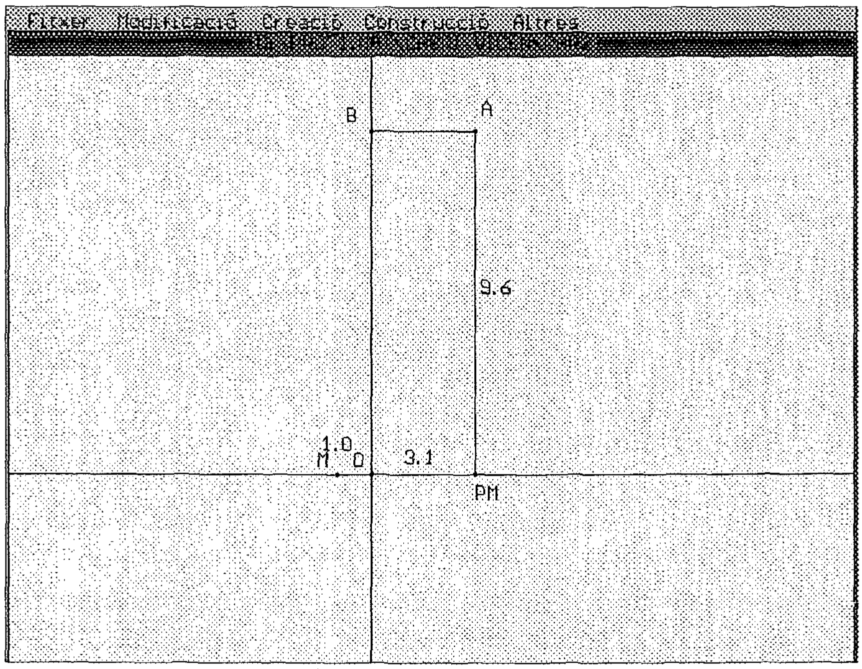


FIG A

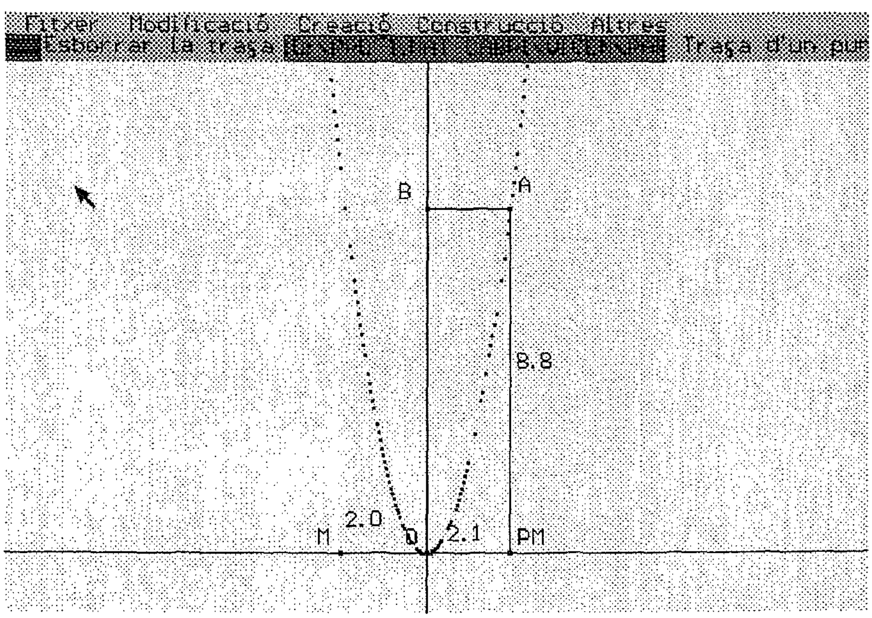


FIG B

METÀFORA:

UNA GRÀFICA ÉS LA TRAÇA QUE DEIXA UN PUNT QUE ES MOU SUBJECTE A UNES DETERMINADES CONDICIONS

FIG. A

INVARIANT DE L'ACCIÓ

DISTÀNCIA DEL PUNT *A* A L'EIX D'ABSCISSES	=	QUADRAT DE LADISTÀNCIA DEL PUNT *A* A L'EIX D'ORDENADES

ORDENADA = $(\text{ABSCISSA})^2$

SIMBOLITZACIÓ $y = x^2$

FIG. B

INVARIANT DE L'ACCIÓ

DISTÀNCIA DEL PUNT *A* A L'EIX D'ABSCISSES	=	DOBLE DEL QUADRAT DE LA DISTÀNCIA DEL PUNT *A* A L'EIX D'ORDENADES

ORDENADA = $2\cdot(\text{ABSCISSA})^2$

SIMBOLITZACIÓ $y = 2x^2$

ALTRES FIGURES

INVARIANT DE L'ACCIÓ

DISTÀNCIA DEL PUNT *A* A L'EIX D'ABSCISSES	=	SEGMENT OM PEL QUADRAT DE LA DISTÀNCIA DEL PUNT *A* A L'EIX D'ORDENADES

ORDENADA = $OM\cdot(\text{ABSCISSA})^2$

SIMBOLITZACIÓ $y = OMx^2$

GENERALITZACIÓ I SIMBOLITZACIÓ

TOTES LES GRÀFIQUES OBTINGUDES TENEN UNA FÓRMULA DEL TIPUS $y = kx^2$
SI $k > 1$, LLAVORS $y = kx^2$ ÉS UNA CONTRACCIÓ DEL GRÀFIC $y = x^2$
SI $0 < k < 1$, LLAVORS $y = kx^2$ ÉS UNA DILATACIÓ DEL GRÀFIC $y = x^2$

2.3.3.2 Exemples relacionats amb la segona metàfora

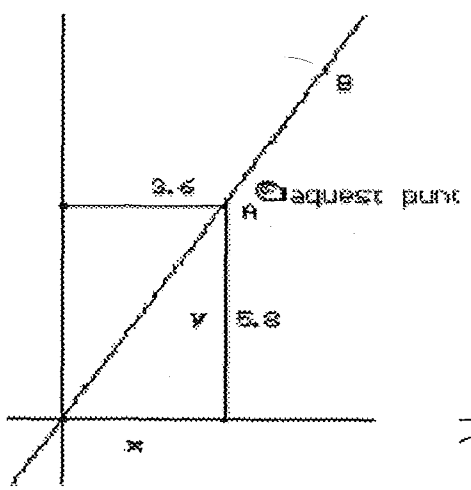
Exemple 3:

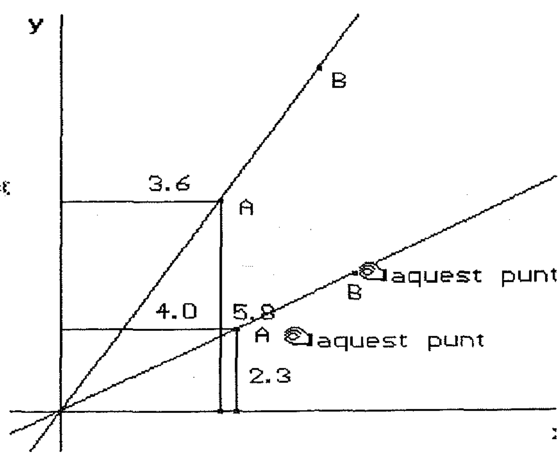
El professor, utilitzant la metàfora que la gràfica és la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica, proposa de fer l'activitat següent:

Activitat: utilitzant la figura que apareix a la pantalla del Cabrigéomètre (figura esquerra)
a) Mou el ratolí i situa la busca en el punt A. Desplaça-la al llarg de la recta. Observa els valors de l'abscissa i els valors corresponents de l'ordenada, i completa la taula següent (amb un sol decimal):

abscissa (x)	ordenada (y)	y/x

Què hi observes?





b) Mou el ratolí i situa la busca en el punt *B*. Desplaça-la tal com indica la figura de la dreta. A continuació situa la busca en el punt *A* i desplaça-la al llarg de la recta. Observa els valors de l'abscissa i els corresponents valors de l'ordenada i completa la taula següent:

abscissa (x)	ordenada (y)	y/x

Què hi observes?

METÀFORA:

UNA GRÀFICA ES POT CONSIDERAR COM LA TRAÇA QUE DEIXA UN PUNT QUE ES MOU SOBRE LA GRÀFICA

INVARIANT DE L'ACCIÓ

(apartat a)
QUALSEVOL PUNT DE LA RECTA COMPLEIX QUE LA SEVA ORDENADA DIVIDIDA PER LA SEVA ABSCISSA SEMPRE DÓNA EL MATEIX QUOCIENT.

GENERALITZACIÓ

(apartat b)
QUALSEVOL PUNT D'UNA RECTA QUE PASSA PER L'ORIGEN DE COORDENADES COMPLEIX QUE LA SEVA ORDENADA DIVIDIDA PER LA SEVA ABSCISSA SEMPRE DÓNA EL MATEIX QUOCIENT. AQUEST QUOCIENT DEPÈN DE LA INCLINACIÓ DE LA RECTA.

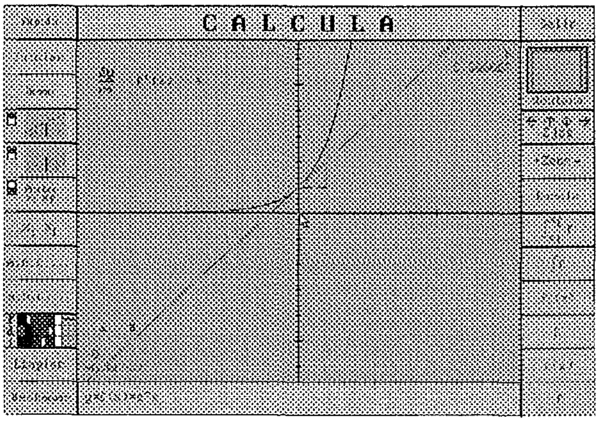
SIMBOLITZACIÓ

$$\frac{y}{x} = k$$
$$y = kx$$

2.3.3.3. Exemples relacionats amb la tercera metàfora

Exemple 4

La metàfora "una gràfica és la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica" es pot combinar amb la tangent com la direcció que seguiria el cotxe si sortís de la carretera en aquest punt, és a dir *"La gràfica de la funció es pot considerar com la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica , i la recta tangent ens indica la direcció que seguiria el punt"*. L'exemple següent serveix per il·lustrar aquesta metàfora



L'alumne pot moure amb el ratolí o amb la tecla de funció *F*4 el punt sobre la gràfica de la funció i observar que en les accions que ha realitzat hi ha un invariant: el segment determinat sobre l'eix d'abscisses pel valor $x=a$ i el punt de tall de la recta tangent a la funció $y=e^x$ en el punt d'abscissa $x=a$ (la subtangent) sempre mesura 1. A partir d'aquesta observació es pot justificar que la funció derivada de la funció $y = e^x$ és ella mateixa.

METÀFORA:

LA GRÀFICA DE LA FUNCIÓ ES POT CONSIDERAR COM LA TRAÇA QUE DEIXA UN PUNT QUE ES MOU SOBRE LA GRÀFICA , I LA RECTA TANGENT ENS INDICA LA DIRECCIÓ QUE SEGUIRIA EL PUNT

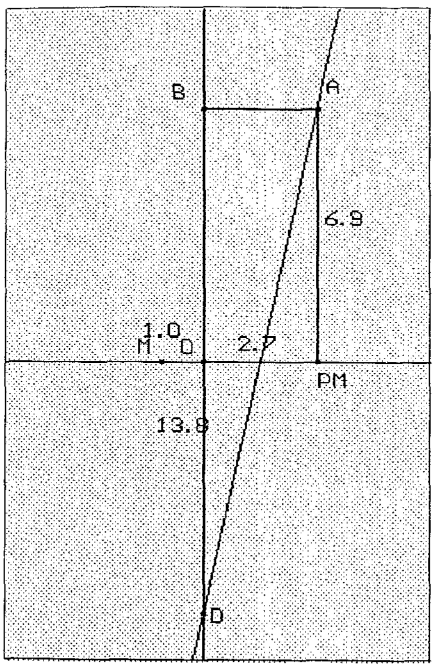
INVARIANT DE L'ACCIÓ:

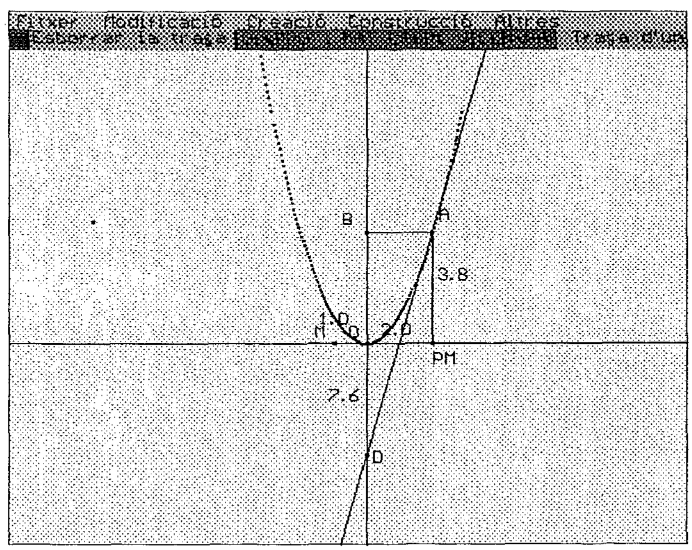
EL SEGMENT DETERMINAT SOBRE L'EIX D'ABSCISSES PEL VALOR $x=a$ I EL PUNT DE TALL DE LA RECTA TANGENT A LA FUNCIÓ $y=e^x$ EN EL PUNT D'ABSCISSA $x=a$ (LA SUBTANGENT) SEMPRE MESURA 1.

2.3.3.4 Exemples relacionats amb la quarta metàfora

Exemple 5

També podem considerar la metàfora següent: *"El gràfic d'una funció es pot considerar com la traça d'un punt que es mou sobre una recta que en cada instant dóna la direcció del moviment, i que alhora va variant de direcció".* La pantalla següent compleix que sempre el segment *APM* és la meitat del segment *BD*. L'alumne ha d'observar que, malgrat que la recta *DA* va canviant de direcció, el segment *BD* és el doble que el segment *APM* i que el punt *A* sempre està a sobre de la recta. En fer la traça del punt *A*, l'alumne ha d'observar que la traça és una paràbola.





METÀFORA:

LA GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ ES POT CONSIDERAR COM LA TRAÇA D'UN PUNT QUE ES MOU SOBRE UNA RECTA QUE EN CADA INSTANT DÓNA LA DIRECCIÓ DEL MOVIMENT, I QUE ALHORA VA VARIANT DE DIRECCIÓ

INVARIANT DE L'ACCIÓ:

EL SEGMENT DB SEMPRE ÉS EL DOBLE QUE EL SEGMENT APM
LA TRAÇA DEL PUNT A ÉS UNA PARÀBOLA

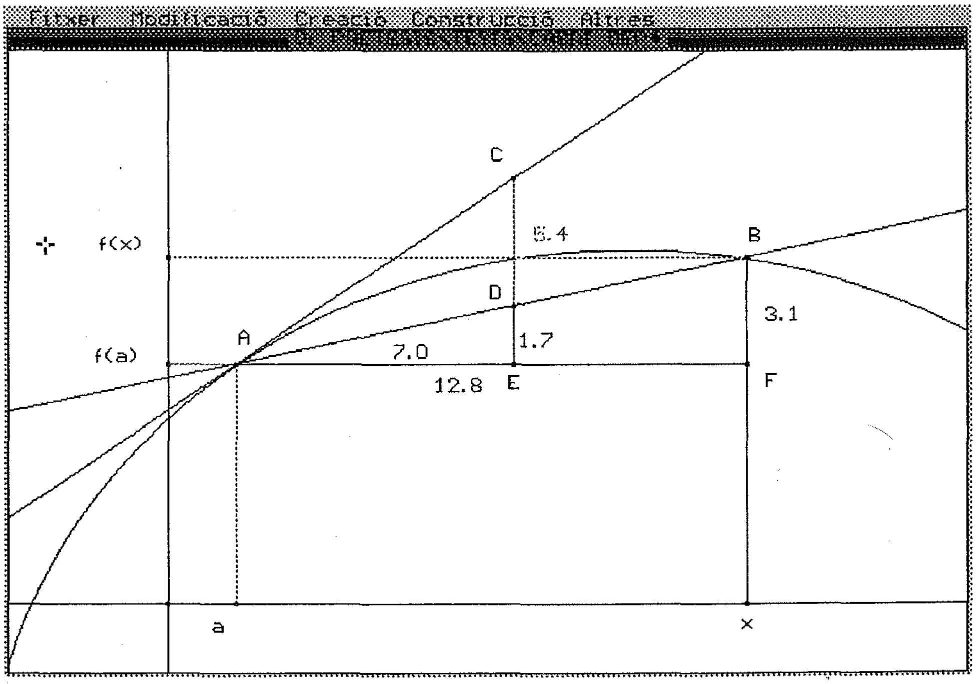
A partir d'aquesta observació es pot justificar que la funció derivada de la funció $y = x^2$ és la funció $y = 2x$.

3.4 Processos de semiosi

A continuació intentarem analitzar el procés de semiosi (aprehensió i producció de signes ostensius) d'una de les principals activitats de la unitat experimentada contemplant simultàniament els processos d'abstracció, generalització, metafòrics i les funcions semiòtiques.

Exemple

L'objectiu de l'activitat següent és que l'alumne comprengui que les rectes secants s'aproximen a la recta tangent (les accions es realitzen utilitzant el Cabrigéomètre).



En aquesta activitat la metàfora que estructura la figura és: "La gràfica d'una funció és la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica". El procés d'abstracció i generalització està descrit en l'exemple 1 de la pàgina 117 i bàsicament consisteix que l'alumne, com a resultat de les seves accions, observi un invariant: la recta secant *AB* s'aproxima a la recta tangent en el punt *A*, i que faci una descripció amb paraules (abstracció constructiva). Si a continuació els alumnes varien la posició del punt *A* i repeteixen el procés, realitzant la mateixa acció sobre una secant i una tangent inicials diferents, poden arribar a resultats del tipus: en un punt qualsevol les secants s'aproximen a la recta tangent (generalització extensiva).

Si analitzem les funcions semiòtiques que intervenen tenim, entre d'altres, que la recta de la figura tangent en *A* seria un contingut extensional de l'expressió notacional "tangent que passa per *A*"; que una descripció del tipus "la recta tangent en *A* és la recta a la qual s'aproximen les rectes secants" és un contingut intensional de l'expressió extensional "recta (de la figura) tangent en *A*" i de l'expressió notacional "tangent que passa per *A*"; que la descripció que ja coneix l'alumne de recta tangent com "la recta que en les proximitats d'*A* més s'aproxima a la corba" seria un contingut intensional de l'expressió intensional "la recta tangent en *A* és la recta a la qual s'aproximen les secants" i viceversa, etc. L'anàlisi d'una activitat tenint en compte els processos d'abstracció, generalització, metafòrics i les funcions semiòtiques, mostra la complexitat de l'acte de comprensió que han de realitzar els alumnes quan s'enfronten a determinades activitats i posa de manifest la importància de planificar les activitats tenint en compte els elements més rellevants que poden facilitar, o dificultar, la comprensió dels alumnes.

3.5 Conclusions

En la controvèrsia anàlisis referencials versus anàlisis pragmàtiques, en aquesta investigació ens hem posicionat en aquestes últimes. Considerarem que l'objecte personal que construeix l'alumne és el resultat de les seves accions al llarg del procés d'instrucció. És a dir, l'objecte personal de l'alumne es pot considerar com la xarxa de relacions que emergeix com a resultat de les pràctiques que ha realitzat l'alumne per resoldre les activitats proposades a l'aula. Aquesta xarxa de relacions que emergeix a partir de les activitats desenvolupades a l'aula es pot recórrer en moltes direccions, la qual cosa permet a l'alumne desenvolupar determinades pràctiques i també li impedeix realitzar-ne d'altres. El conjunt de pràctiques que pot realitzar en un moment determinat és el que entendrem per significat de l'objecte personal de l'alumne en aquell moment. Des d'aquest punt de vista, una part del significat personal, les pràctiques públiques, és observable, mentre que una altra part, les pràctiques constituïdes per accions privades, (processos d'abstracció, generalització, metafòrics, etc) no ho és. El significat entès d'aquesta manera es pot parcialitzar en diferents classes de pràctiques més específiques que són utilitzades en un determinat context i amb un determinat tipus de notació produint un determinat sentit. Un canvi de notació pot activar un sentit diferent, és a dir un subconjunt de pràctiques públiques i privades, que pot permetre o dificultar la resolució de l'activitat. Per aquest motiu considerem que les diferents representacions ostensives dels continguts matemàtics i les traduccions entre elles són un element fonamental per a la seva comprensió i, per tant, per al seu ensenyament i aprenentatge. Per tant, les opcions que hem adoptat en aquesta investigació en relació a les representacions dels objectes matemàtics i en relació a la seva comprensió són:

1) La classificació de les representacions en externes i internes pot abastar dos sentits. El primer, que no és gaire problemàtic, consisteix a considerar com a representació externa allò que és visible i públic, mentre que les representacions que no són accessibles a les altres persones es consideren interiors. El segon sentit, que té una càrrega ontològica molt forta, consisteix a considerar que els objectes exteriors tenen una còpia especular en la ment de les persones. En aquesta memòria considerarem que els actes de comprensió de les persones impliquen un conjunt d'experiències materials i mentals que actuen conjuntament; les experiències materials són públiques, mentre que les mentals són

privades, per la qual cosa considerarem la classificació extern/intern en el sentit de públic i privat. Per tant, distingirem entre pràctiques públiques en què es manipulen objectes ostensius i pràctiques privades en què es realitzen processos d'abstracció, generalització, etc.

2) En les pràctiques públiques de les persones es manipulen dues classes d'objectes: ostensius i no ostensius. Aquests objectes es poden classificar en: intensionals, notacionals i extensionals, cada un dels quals pot jugar el paper d'expressió i de contingut en les funcions semiòtiques.

3) Els sistemes de notació juguen un paper molt important en el procés de modelització matemàtica de fenòmens no matemàtics. Si entenem per modelització la descripció d'una situació-problema utilitzant signes matemàtics, podem considerar la modelització com la funció semiótica que relaciona una expressió constituïda per una situació-problema procedent d'un camp no matemátic amb un contingut constituït per un (o diversos) objectes matemàtics (normalment objectes intensionals). Aquesta funció aniria acompanyada d'una segona funció semiòtica que relacionaria aquest parell expressió/contingut (expressió) amb un contingut constituït per un conjunt de notacions matemàtiques. És a dir, la modelització matemàtica d'una situació matemàtica es pot descriure com el resultat de la composició de dues funcions semiòtiques, la primera relacionaria una expressió constituïda per una situació-problema procedent d'un camp no matemàtic amb un contingut intensional, i la segona relacionaria aquest parell expressió/contingut (expressió) amb un contingut constituït per un conjunt de notacions matemàtiques.

4) Els fenòmens que exemplifiquen un contingut matemàtic es poden entendre com la funció semiòtica que té per expressió una entitat intensional, i per contingut una entitat extensional.

5) El conjunt de pràctiques que pot realitzar en un moment determinat l'alumne és el que entendrem per significat de l'objecte personal de l'alumne en aquell moment. El significat entès d'aquesta manera es pot parcialitzar en diferents classes de pràctiques més específiques que són utilitzades en un determinat context i amb un determinat tipus de notació produint un determinat sentit. Un canvi de notació pot activar un sentit diferent, és a dir un subconjunt de pràctiques públiques i privades, que pot permetre o dificultar la resolució de l'activitat. En la producció de nou sentit també hi juguen un paper important els processos metafòrics.

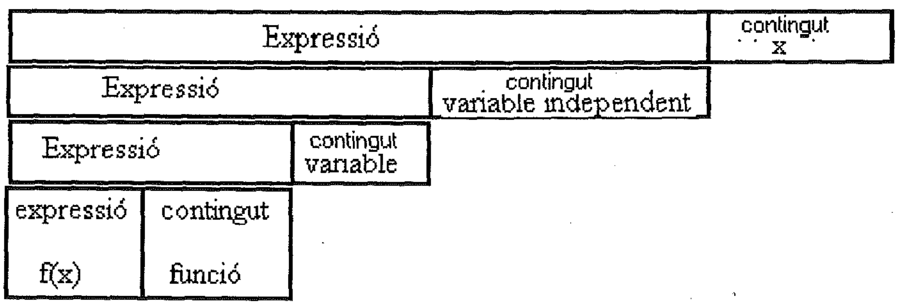
6) Generalment els continguts matemàtics es representen mitjançant notacions diferents que ajuden a produir diferents sentits. Cada una de les notacions ajuda a produir sentit, però no produeix tots els sentits. Per tant, comprendre un contingut matemàtic requereix utilitzar diferents notacions i convertir (traduir) una representació en una altra.

7) Les notacions no es presenten aïlladament sinó que formen sistemes, per la qual cosa es parla de sistemes matemàtics de signes o sistemes matemàtics de notacions. Les manipulacions d'aquests sistemes matemàtics de signes s'han de guiar també per determinades regles sintàctiques.

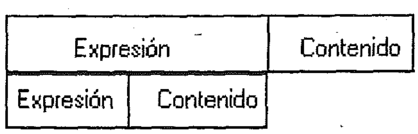
8) El procés d'abstracció i generalització, tal com l'hem descrit anteriorment, permet encapsular processos en objectes que es poden representar per notacions ostensives. Sobre aquests objectes i notacions hi podem realitzar noves accions que portaran a nous objectes i noves notacions i així successivament.

9) Els punts de vista de Piaget, Dörfler, Dubinsky i Sfard posen de manifest la importància de les accions dels alumnes. Només en el cas que l'alumne tingui curiositat o bé estigui motivat es posaran en funcionament els processos d'abstracció i de generalització. Per tant, els processos actuatius i els afectius tenen una importància fonamental en els processos de comprensió.

10) Quan hem introduït les funcions semiòtiques ho hem fet amb un exemple molt simple, però la producció i interpretació de signes en matemàtiques és un procés molt complex i quan veiem, per exemple, $f(x)$ no només interpretem aquesta notació com una funció sinó que aquesta notació, entre d'altres processos, ens porta a considerar la variable independent que es representa per x. Aquesta focalització en la variable independent es pot representar de la manera següent:



Una expressió $f(x)$ es relaciona amb el contingut "funció" ; aquest parell expressió/contingut és l'expressió que es relaciona amb el contingut "variable" ; aquest nou parell expressió/contingut és l'expressió que es relaciona amb el contingut "variable independent" ; aquest nou parell expressió/contingut és l'expressió que es relaciona amb el contingut notacional x. Podem considerar la funció que relaciona l'expressió inicial "$f(x)$" amb el contingut final "x" . Aquesta funció relaciona un objecte $f(x)$ amb l'objecte x, és a dir, relaciona un objecte amb un altre que no és de la mateixa classe. Aquest esquema segueix l'estructura proposada per Hjelmslev *"Semejante superelevación de códigos representa lo que Hjelmslev ha definido como "semiótica connotativa", cuya forma és:*



Es connotativa una semiótica en que el plano de la expresión está constituido por otra semiótica. En otros términos, existe código connotativo cuando el plano de la expresión es otro código. En el ejemplo ofrecido más arriba, el contenido de la primera significación (junto con las unidades expresivas que lo transmiten) se convierte en expresión de un contenido ulterior" (Eco 1995, pàg. 94).

11) Les funcions semiòtiques poden ser una eina útil per fer l'anàlisi conjunta de la manipulació d'ostensius en un context social i del pensament que l'acompanya si les considerem de la manera següent:

	Ext	Int	Not
Ext	FS1	FS2	FS3
Int	FS4	FS5	FS6
Not	FS7	FS8	FS9

FS1 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb una altra entitat extensional

FS1.1 Relaciona un objecte amb un altre de la mateixa classe.
Per exemple, relaciona la funció $f(x)$ amb la funció $g(x)$.

FS1.2 Relaciona un objecte amb un altre que no és de la mateixa classe.
Aquesta funció semiòtica serveix per descriure, entre d'altres, la focalització en un dels objectes que són manipulats en els processos que són el resultat d'una desencapsulació (en termes de Dubinsky). Per exemple, si tenim l'objecte $f(x)$ el podem desencapsular en un procés que permet a l'alumne pensar la funció com quelcom que rep una entrada, o més, de valors de la variable independent, que realitza una o més operacions sobre les entrades, i que dóna els valors de la variable dependent com a resultat. És a dir, l'objecte $f(x)$ porta a d'altres objectes (per exemple la variable independent x) i a una seqüència d'accions (físiques o mentals) que s'han de realitzar amb aquests objectes. La focalització sobre un d'aquests objectes (per exemple la variable x) seria el resultat de la funció semiòtica que té per expressió inicial el parell " $f(x)$ / funció" i com a contingut final la notació x. És a dir , podem considerar la FS1.2 com la funció semiòtica que relaciona l'objecte $f(x)$ amb l'objecte x.

FS2 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb una entitat intensional

FS2.1 Relaciona un objecte amb la classe a la qual pertany.
Per exemple relaciona $f(x)$ amb la classe "funció".

FS2.2 Relaciona un objecte amb una classe a la qual no pertany.

Aquest tipus de funció semiòtica permet descriure, per exemple, la desencapsulació d'un objecte que és el resultat d'un procés en què intervenen objectes que es poden agrupar en una classe. Per exemple, si tenim l'objecte $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i l'interpretem com el valor al qual s'aproximen les taxes mitjanes de variació $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h \to 0$, i després focalitzem la nostra atenció en aquesta classe, estem associant a l'expressió $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (que és un parell expressió/contingut on el contingut és "derivada" o bé "límit") amb el contingut format per la classe de taxes mitjanes quan $h \to 0$ (que és un contingut que té per expressió $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h \to 0$).

Un altre exemple el tenim quan interpretem un objecte com una classe d'objectes. Per exemple, quan una corba es considera com un conjunt de punts.

FS3 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb un signe.

FS3.1 Aquesta funció semiòtica relaciona un objecte amb un signe que el representa.

Per exemple, la funció semiòtica que relaciona la funció que a cada nombre li fa correspondre el seu doble amb la fórmula $f(x) = 2x$.

FS3.2 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat extensional amb un signe que no la representa.

Aquesta funció semiòtica permet descriure situacions en què la presència d'un determinat objecte ens suggereix una notació relacionada. Per exemple, quan la gràfica d'un polinomi és l'expressió que ens suggereix que el terme dominant és x^n amb n parell.

FS4 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat intensional amb una entitat extensional.

FS4.1 Aquesta funció semiòtica relaciona una classe amb un exemple de la classe.

Per exemple quan utilitzem $f(x) = 2x$ com un exemple de la classe "funció" .

FS4.2 Aquesta funció semiòtica relaciona una classe amb un objecte que no és de la classe.

Aquest tipus de funció semiòtica permet descriure, per exemple, l'encapsulació d'un procés en què intervenen objectes que es poden

agrupar en una classe. Per exemple, si tenim les taxes mitjanes de variació $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h \to 0$ (expressió / contingut) i és l'expressió a la qual associem el límit, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En aquest cas estem associant a una expressió que és una classe d'objectes el contingut límit, és a dir, el resultat del procés d'aproximació.
Un altre exemple el tenim quan interpretem una classe d'objectes com un objecte. Per exemple: quan un conjunt de punts es considera com una corba.

FS5 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat intensional amb una altra entitat intensional.

FS5.1 Aquesta funció semiòtica defineix una classe d'objectes de manera diferent.
Per exemple, quan relacionem la definició de tangent en un punt com "la recta que en les proximitats del punt més s'aproxima a la corba" amb la definició de recta tangent com a "límit de les rectes secants".

FS5.2 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat intensional amb una altra entitat intensional diferent.
Aquesta situació permet descriure la relació entre conceptes que no sigui la relació d'inclusió. Per exemple, quan la classe de les funcions trigonomètriques ens porta a considerar la classe de les funcions trigonomètriques inverses o bé la classe de les funcions no periòdiques.

FS6 Aquesta funció semiòtica relaciona una entitat intensional amb un signe.

FS6.1 Aquesta funció semiòtica relaciona una classe amb un signe que la representa.
Per exemple, quan representen la classe de les funcions per $f(x)$.

FS6.2 Aquesta funció semiòtica relaciona una classe amb un signe que no la representa.
Per exemple quan relacionem la classe de les taxes mitjanes de variació

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h \to 0$ amb la notació $f'(x)$.

FS7 Aquesta funció semiòtica relaciona el signe amb una entitat extensional.

FS7.1 Aquesta funció semiòtica relaciona el signe amb l'objecte que representa
Per exemple, quan relacionem el signe $f(x) = 2x$ amb la funció que a cada nombre li fa correspondre el seu doble.

FS7.2 Aquesta funció semiòtica relaciona el signe amb un objecte que no representa.
Per exemple, quan relacionem el signe $f'(x)$ amb la funció $f(x)$.

FS8 Aquesta funció semiòtica relaciona el signe amb una entitat intensional.

FS8.1 Aquesta funció semiòtica relaciona el signe amb la classe que representa Per exemple, quan relacionem el signe "funció" amb la classe de les funcions.

FS8.2 Aquesta funció semiòtica relaciona el signe amb una classe que no representa.
Per exemple, quan relacionem la notació $f'(x)$ amb la classe de les taxes mitjanes de variació $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h \to 0$.

FS9 Aquesta funció semiòtica relaciona una notació amb una altra notació.

FS9.1 Aquesta funció semiòtica canvia la notació d'un objecte/classe per una altra d'equivalent.

FS9.2 Aquesta funció semiòtica relaciona una notació amb una altra que no és equivalent.
Per exemple, quan relacionem la notació de les derivades amb la notació de les integrals.

Si bé les funcions semiòtiques només són una eina de tipus descriptiu que no expliquen per què i com l'alumne realitza els procesos d'abstracció, metafòrics, d'analogia, d'encapsulació i desencapsulació, etc., considerem que poden ser útils, ja que permeten descriure amb un llenguatge unificat molts processos que s'han estudiat en el camp del pensament matemàtic avançat i que, en els diferents treballs d'investigació, estan descrits en terminologies diferents.

A continuació utilitzarem les funcions semiòtiques per intentar descriure la complexitat de la comprensió del contingut "funció derivada". En concret, analitzarem tres alternatives diferents per introduir-la a l'aula, utilitzant la complexitat semiòtica com a mesura a priori del grau de dificultat de cada una d'elles:

- La primera és la que habitualment es troba en els llibres de text i consisteix a definir-la com $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- La segona consisteix a trobar una condició que compleixen totes les tangents i, a partir d'ella, calcular la funció derivada. Aquest segon mètode és el resultat de la transposició d'un procediment present en el període històric que va de Descartes a Barrow.
- La tercera consisteix a construir una funció derivada a partir d'una taula.

Les funcions semiòtiques implicades en aquestes tres maneres diferents d'introduir la funció derivada es poden considerar com una mesura indirecta del grau de dificultat de cada una d'aquestes tres alternatives.

Utilitzant límits

La definició de la funció derivada per límits: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ implica considerar primer que x és constant i després que és variable. Entre d'altres processos l'alumne ha de:

1) Tractar separadament les variables relacionades per la funció $f(x)$. Això implica que l'objecte $f(x)$ s'ha d'entendre com un procés en què intervenen d'altres objectes, un dels quals és x, aquest procés de desencapsulació (utilitzant la terminologia de Dubinsky) es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS1.2 ja que passem de l'objecte $f(x)$ a l'objecte x.

2) L'objecte x es pot entendre com un valor fix o bé com una variable (una classe). El procés de considerar les dues alternatives per després elegir-ne una es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS 2.1 ja que passem de l'objecte x al domini.

3) A continuació s'ha de considerar la variable x com un valor x no variable. És a dir, l'alumne ha de considerar un punt fix d'abscissa x. Aquest procés es pot considerar una funció semiòtica intensional/extensional del tipus FS4.1 perquè passem d'un conjunt (el domini) a un element d'aquest conjunt (aquest pas es pot facilitar amb el canvi de notació de x per a)).

4) Associar a x la taxa mitjana de variació entre x i $x+h$ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ on x i h no són variables. Aquest procés es pot considerar com una funció semiòtica que relaciona un element x amb un altre element "la taxa mitjana de variació entre x i $x+h$". Aquest procés es pot considerar la FS1.2 ja que relacionem objectes de classes diferents.

5) Considerar la h com a variable, amb la qual cosa passem de l'element $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a la classe $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h\to 0$. Aquest procés es pot considerar com una funció semiòtica del tipus FS2.1 perquè relaciona un objecte amb la classe a la qual pertany.

6) Considerar el valor al qual s'aproximen les taxes mitjanes de variació $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h\to 0$. Això és associar a aquest conjunt de taxes mitjanes el valor $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ .Aquesta associació es pot considerar una funció

semiòtica FS4.2 perquè relaciona una classe amb un objecte que no és de la classe, ja que associa un procés amb el resultat del procés.

7) Associar $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ amb $f'(x)$. En aquest cas tenim una FS9.1 perquè estem relacionant una notació amb una altra d'equivalent.

8) Considerar x com a variable. En aquest cas tenim una FS2.1 perquè s'ha de relacionar un objecte amb la classe a la qual pertany.

9) Entendre la funció que ha calculat com un cas particular de la classe "funció derivada". En aquest cas tenim una FS2.1 perquè s'ha de relacionar un objecte amb la classe a la qual pertany.

Simbolitzant una condició gràfica que compleixen totes les tangents

Aquest procés està basat en els mètodes per a construir la tangent i la normal del període que va de Descartes a Barrow, els quals comentarem amb força detall en el subobjectiu 1.4. Es considera d'entrada un punt particular amb la tangent o normal dibuixada (i, per tant, la seva abscissa i la seva ordenada d'entrada no es consideren variables). A partir de la manipulació amb programes dinàmics com el Cabrigéomètre o el Calcula es troba una condició (per exemple que la subtangent és la meitat de l'abscissa) que permet, d'una banda fer la construcció geomètrica de la tangent i de l'altra calcular el pendent de la recta tangent. Per últim, l'alumne ha de tenir clar que la condició que ha trobat i el càlcul del pendent que se'n deriva és vàlid per a qualsevol punt, de manera que, si bé d'entrada era concret, passa a ser considerat després un punt qualsevol (veure exemple de la pàgina 118, qüestionari 5 pàg. 554 i qüestionari 6 pàg. 609).

Per aplicar aquest procediment l'alumne ha de:

1) Tractar separadament les variables relacionades per la funció $f(x)$. Això implica que l'objecte $f(x)$ s'ha d'entendre com un procés en què intervenen d'altres objectes, un dels quals és x. Aquest procés de desencapsulació (utilitzant la terminologia de Dubinsky) es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS1.2, ja que passem de l'objecte $f(x)$ a l'objecte x.

2) L'objecte x es pot entendre com un valor fix o bé com una variable (una classe). El procés de considerar les dues alternatives per després elegir-ne una es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS 2.1 ja que passem de l'objecte x al domini.

3) A continuació s'ha de considerar la variable x com un valor x no variable. És a dir, l'alumne ha de considerar un punt fix d'abscissa x. Aquest procés es pot considerar una funció semiòtica intensional/extensional del tipus FS4.1 perquè passem d'un conjunt (el domini) a un element d'aquest conjunt (aquest pas es pot facilitar amb el canvi de notació de x per a)).

4) Associar a x el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa x. Aquesta relació es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS1.2, ja que passem de l'objecte x a l'objecte "pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa x".

5) Associar l'expressió que dóna el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa x amb $f'(x)$. En aquest cas tenim una FS9.1 perquè estem relacionant una notació amb una altra d'equivalent.

6) Considerar x com a variable. En aquest cas tenim una FS2.1 perquè s'ha de relacionar un objecte amb la classe a la qual pertany.

7) Entendre la funció que ha calculat com un cas particular de la classe "funció derivada". En aquest cas tenim una FS2.1 perquè s'ha de relacionar un objecte amb la classe a la qual pertany.

Utilitzant Taules

Aquest procediment consisteix a trobar la funció derivada de $f(x) = x^2$ a partir de taules en les quals hi ha la derivada de la funció en diferents punts (calculats en activitats anteriors) i després entendre aquesta funció com un cas particular de la classe "funció derivada" (veure pàg. 337 de la unitat (annex I) i qüestionari 5 pàg. 553).

Entre d'altres processos l'alumne ha de:

1) Tractar separadament les variables relacionades per la funció $f(x)$. Això implica que l'objecte $f(x)$ s'ha d'entendre com un procés en què intervenen d'altres objectes, un dels quals és x. Aquest procés de desencapsulació (utilitzant la terminologia de Dubinsky) es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS1.2 ja que passem de l'objecte $f(x)$ a l'objecte x.

2) L'objecte x es pot entendre com un valor fix o bé com una variable (una classe). El procés de considerar les dues alternatives per després elegir-ne una es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS 2.1 ja que passem de l'objecte x al domini.

3) A continuació s'ha de considerar la variable x com un valor x no variable. És a dir, l'alumne ha de considerar un punt fix d'abscissa x. Aquest procés es pot considerar una funció semiòtica intensional/extensional del tipus FS4.1 perquè passem d'un conjunt (el

domini) a un element d'aquest conjunt (aquest pas es pot facilitar amb el canvi de notació de x per a)).

4) Associar a cada x de la taula la derivada en el punt d'abscissa x. Aquesta relació es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS1.2 ja que passem de l'objecte x a l'objecte "derivada de la funció en el punt d'abscissa x".

5) Considerar que tots els valors de la segona fila de la taula compleixen la condició de ser el doble de la primera fila. En aquest cas tenim una FS2.1 perquè s'ha de relacionar un objecte amb la classe a la qual pertany.

6) Considerar la classe anterior com la funció que relaciona cada abscissa amb el seu doble. En aquest cas tenim una FS4.2 perquè s'ha de considerar una classe d'objectes com un objecte.

7) Considerar que la funció que relaciona cada abscissa amb el seu doble es pot representar per $f'(x) = 2x$. En aquest cas tenim una FS3.1 perquè s'ha de representar per una fórmula.

8) Entendre la funció que ha calculat com un cas particular de la classe "funció derivada". En aquest cas tenim una FS2.1 perquè s'ha de relacionar un objecte amb la classe a la qual pertany.

La descripció dels procediments anteriors mitjançant les funcions semiòtiques permet veure que la definició de la funció derivada com $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ presenta una complexitat semiòtica superior a les altres dues, ja que implica funcions, com la funció semiòtica intensional/extensional de tipus procés / resultat del procés, que són força difícils per a l'alumne.

Malgrat que la segona manera d'introduir la funció derivada sembla més fàcil d'entendre que la primera, també té dificultats, ja que el càlcul del pendent de la recta tangent l'ha de fer l'alumne utilitzant lletres i el punt 6 implica considerar que el punt que primer era fix ara es converteix en variable. Dit d'una altra manera, el cas particular passa a ser considerat com la classe, i no hi ha un pas del cas particular a diversos casos particulars que facilitin el posterior pas al cas general.

Les dificultats anteriors queden molt disminuïdes en el tercer procediment, perquè el pas d'un punt fix a un de variable està clarament indicat i hi ha diversos casos particulars que faciliten el posterior pas al cas general.

També és significatiu que cada un d'aquests tres procediments utilitza ostensius diferents; en el primer sempre ens movem amb expressions simbòliques, en el segon amb gràfics i en tercer amb taules. La nostra conclusió de l'anàlisi anterior és que una seqüència d'activitats que combini els tres procediments anteriors té més possibilitats d'aconseguir la comprensió de l'alumnat que les que es basen només en una de les tres.

12) Si bé només hem considerat tres tipus d'entitats primàries (extensionals, intensionals i notacionals) com a expressió o contingut de les funcions semiòtiques convé remarcar que:

- La consideració d'una entitat com a notacional, extensional o intensional és una qüestió problemàtica, ja que segons l'interpretant, la mateixa entitat serà una cosa o l'altra.
- Creiem que qualsevol pràctica es pot descompondre en un paquet de funcions semiòtiques en què l'expressió i el contingut són entitats extensionals, intensionals o notacionals.
- Quan diem que creiem que qualsevol pràctica es pot descompondre en un paquet de funcions semiòtiques en què l'expressió i el contingut són entitats extensionals, intensionals o notacionals, volem dir que creiem que les pràctiques es poden analitzar a partir de funcions semiòtiques més elementals i no pas que existeixin unes funcions semiòtiques "elementals" que siguin irreductibles. Més aviat estem inclinats a pensar que no hi ha límit, i que de fet la descomposició s'acaba quan creiem que ja no és possible o bé que no cal continuar la descomposició.
- El fet que aquesta hipotètica descomposició en alguns casos sigui molt complexa i que, si bé explica allò que ha de fer el subjecte, no explica per què ho fa, ens porta a considerar que les pràctiques, si bé són entitats secundàries, en molts casos convé considerar-les quasi com a primàries, és a dir com un paquet i no pas com un conjunt de funcions semiòtiques.
- En d'altres casos convé considerar determinades pràctiques com a secundàries i fer la seva descomposició en funciones semiòtiques en què l'expressió i el contingut són entitats extensionals, intensionals o notacionals (por exemple per a comparar dues tècniques entre si).

13) De les hipòtesis H1 i H1.1 es desprenen dues implicacions metodològiques importants:

- La complexitat semiòtica i ontològica dels continguts matemàtics, juntament amb la complexitat del procés d'instrucció en una institució escolar permet un cert qüestionament de les metodologies que pretenen analitzar aquesta complexitat en tercera persona, des de fora, i sense cap implicació. Dit d'una altra manera, obliga a reconèixer un paper rellevant als "estudis de casos" en els quals l'investigador hi està implicat directament i, per tant, a relativitzar la importància de la generalització, transferència o replicabilitat de la investigació.
- La investigació d'allò que realment passa a l'aula s'ha de fer tenint en compte les restriccions que imposa la institució escolar. Dit d'una altra manera, la investigació necessàriament s'ha de compatibilitzar amb el desenvolupament ordinari del currículum, la qual cosa implica nombroses restriccions en la planificació i el desenvolupament de la investigació.

3 Subobjectiu 1.3: Il·lustrar mitjançant l'anàlisi amb profunditat d'un exemple la hipòtesi H1.1.1

De la investigació didàctica sobre el concepte de funció, cal destacar dos tipus d'investigacions: 1) Les que s'han ocupat d'analitzar el paper que juguen les diferents classes de representació del concepte de funció (Borba i Confrey 1996; Janvier 1987; Kaput 1987, 1991 i 1992; García 1994; García i Llinares 1994; Romberg, Carpenter i Fennema 1994) i 2) Les que han analitzat la noció de funció com a procés i com a objecte (Breindenbach i d'altres, 1992; Dubinsky i Harel 1992; Dubinsky 1991 i 1996; Sfard 1991).

1 Objectes ostensius associats a $f(x)$ i $f'(x)$ activats en el càlcul de $f'(x)$

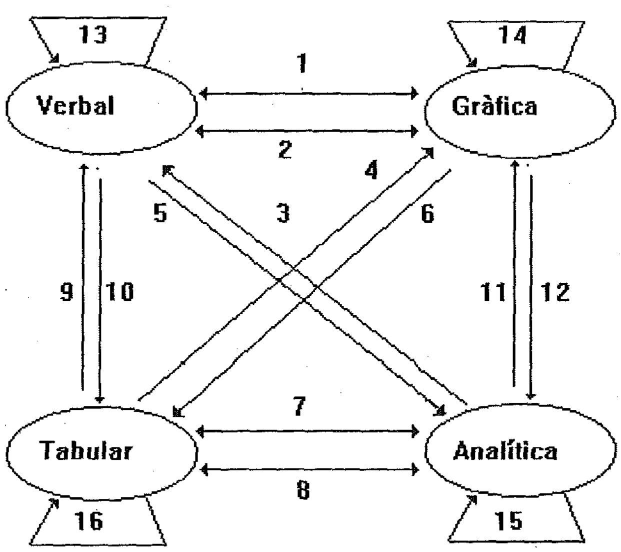
Janvier (1987) en els seus treballs sobre el concepte de funció considera que els objectes ostensius (representacions en el seu llenguatge) associats al concepte de funció es poden classificar en quatre classes (expressió analítica, taula, gràfic i expressió verbal) que, idealment, contenen la mateixa informació, però que cada una d'elles posa en funció diferents processos cognitius, cada un d'ells estretament relacionat amb els altres. La representació gràfica connecta amb les potencialitats conceptualitzadores de la visualització i es relaciona amb la geometria i la topologia. La representació en forma de taula posa de manifest els aspectes numèrics i quantitatius. L'expressió analítica connecta amb la capacitat simbòlica i es relaciona principalment amb l'àlgebra mentre que la representació verbal es relaciona amb la capacitat lingüística de les persones i és bàsica per interpretar i relacionar les altres tres. Les idees de Janvier, gràcies al seu poder explicatiu i relacional, han donat peu a moltes investigacions posteriors sobre la didàctica de les funcions i s'han concretat en materials d'aula que han canviat la manera de treballar les funcions[10] a les aules.

Janvier considera que l'aprenentatge de les funciones no s'ha de limitar al d'una sola d'aquestes formes de representació, sinó que ha d'incloure la capacitat de traduir la informació d'una representació a l'altra. Les possibilitats de recodificar la informació d'una representació amb una altra queden recollides en la taula següent, que és una adaptació[11] de la de Janvier:

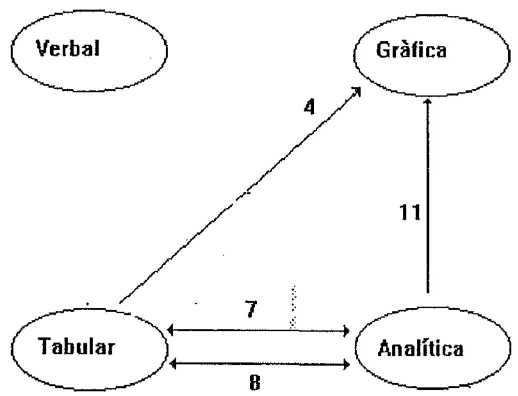
a de	Descripció verbal	Taula	Gràfic	Expressió analítica
Descripció verbal	Diferents descripcions	Estimació/càlcul de la taula	Croquis/esbós	Model
Taula	Lectura de les relacions numèriques	Modificacions de la taula	Traçat del gràfic	Obtenció de l'expressió (ajust numèric)
Gràfic	Interpretació del gràfic	Lectura del gràfic	Canvis d'escala, d'unitats, etc	Obtenció de l'expressió (ajust gràfic)
Expressió analítica	Interpretació de la fórmula (interpretació de paràmetres)	Càlcul de la taula donant valors	Representació gràfica	Transformacions de la fórmula

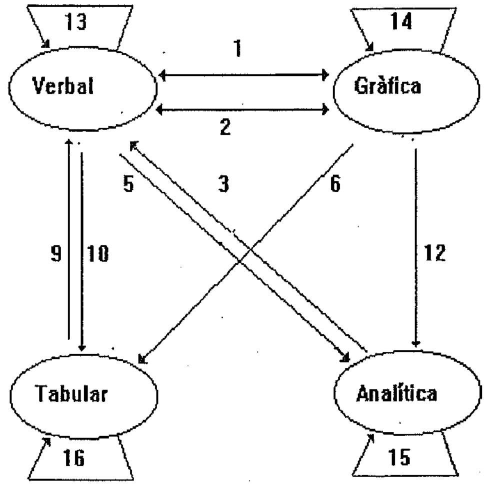
Aquesta taula contempla les possibles traduccions d'una forma de representació a l'altra, així com les traduccions dins de la mateixa forma de representació, que són les activitats de la diagonal. Aquestes últimes no estan contemplades en el quadre original de Janvier.

La taula anterior posa de manifest la multiplicitat de relacions que es poden establir entre les diferents formes de representar una funció. El pas de l'una a l'altra pot ampliar i reorganitzar la informació que està implícita en una de les formes de representació. El que seria desitjable és que l'alumnat treballés la traducció entre tots els diferents tipus de representacions de les funcions. Ara bé, la introducció de les calculadores gràfiques i els programes informàtics a l'ensenyament secundari permeten disposar de màquines que automatitzen i, per tant, faciliten i simplifiquen algunes de les possibles traduccions entre les representacions funcionals. La taula de Janvier es pot expressar mitjançant l'esquema següent:



Si en l'esquema anterior considerem les traduccions que són fàcilment automatitzables, gràcies a les calculadores gràfiques, graficadors i d'altres programes informàtics; apareix l'esquema de l'esquerra. El de la dreta posa de manifest quines són les traduccions menys automatitzables i que, per tant, necessiten ser més treballades, malgrat que fins ara són les que menys atenció han tingut a les classes.





Una de les hipòtesis de partida que hem utilitzat en aquesta investigació és la següent:

H1.1.1: El càlcul de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ es pot interpretar com un procés en el qual s'ha de considerar:

1) Traduccions entre les distintes formes ostensives de representar $f(x)$

2) El pas d'una forma de representació ostensiva de $f(x)$ a una forma de representació ostensiva de $f'(x)$.

3) Traduccions entre les distintes formes ostensives de representar $f'(x)$.

Un exemple d'aquest procés seria:

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió analítica de $f'(x)$

El primer pas d'aquest esquema indica que la gràfica de $f(x)$ és la forma de representació de la funció $f(x)$ que es presenta a l'alumne com a punt de partida perquè aquest realitzi les accions (per exemple calcular pendents) que li permetran obtenir una forma de representació de la funció derivada, en aquest cas una taula de valors de $f'(x)$. Els altres dos passos són traduccions entre diferents formes de representar la mateixa funció, en aquest cas la funció $f'(x)$. Aquest tipus d'esquemes estan formats per un pas que permet obtenir una forma de representació de la funció derivada $f'(x)$ a partir d'una forma de representació de la funció $f(x)$, i per altres passos que són traduccions entre diferents formes de representació de la mateixa funció. Per tant, es pot descompondre en tres subprocessos:

1) Representació ostensiva de $f(x) \Rightarrow$ D'altres representacions ostensives de $f(x)$

2) Representació ostensiva de $f(x) \Rightarrow$ Representacions ostensives de $f'(x)$

3) Representació ostensiva de $f'(x) \Rightarrow$ D'altres representacions ostensives de $f'(x)$

L'ús dels diferents ostensius associats a les funcions i a les funcions derivades mobilitza moltes de les funcions semiòtiques comentades en l'apartat anterior. Ara bé, totes les funcions semiòtiques van lligades a funcions semiòtiques del tipus FS9.1 (subprocessos 1 i 3) i FS9.2 (subprocés 2), les quals relacionen un ostensiu, que juga el paper d'expressió, amb un altre ostensiu, que juga el paper de contingut. En tot aquest apartat, ens limitarem a fer una anàlisi de les funcions semiòtiques FS9.1 i FS9.2 implicades en el càlcul de la funció derivada. Per tant, a partir d'ara, per forma de representació de la funció o de la funció derivada, entendrem l'ostensiu pel qual sen's fa present; i, per traducció entre dues formes de representació de $f(x)$ (subprocés 1) o entre dues formes de representació de $f'(x)$ (subprocés 2), entendrem la FS9.1 que va lligada a aquesta traducció, sense entrar en l'anàlisi de les altres funcions semiòtiques presents. Pel que fa al pas d'una representació ostensiva de $f(x)$ a una representació ostensiva de $f'(x)$ (subprocés 2) també ens limitarem a fer l'anàlisi de la funció semiòtica FS9.2, que és el suport ostensiu d'aquest pas.

Els treballs de Janvier sobre les traduccions entre formes de representació d'una funció ens han suggerit la taula següent,que recull totes les possibilitats d'aquests tres subprocessos.

a de	Descripció verbal de la situació (en termes de $f(x)$)	Descripció verbal de la situació (en termes de $f'(x)$)	Taula $f(x)$	Taula $f'(x)$	Gràfica $f(x)$	Gràfica $f'(x)$	Expressió simbòlica $f(x)$	Expressió simbòlica $f'(x)$
Descripció verbal de la situació (en termes de $f(x)$)								
Descripció verbal de la situació (en termes de $f'(x)$)								
Taula $f(x)$								
Taula $f'(x)$								
Gràfic $f(x)$								
Gràfic $f'(x)$								
Expressió simbòlica $f(x)$								
Expressió simbòlica $f'(x)$								

En aquesta taula tenim, a les caselles de quadrets, les traduccions entre les diferents formes de representar una funció (subprocés 1) i, a les caselles de ratlles, les traduccions entre les diferents formes de representar la funció derivada (subprocés 3). Les caselles blanques ens porten d'una forma de representar la funció a una forma de representar la funció derivada (subprocés 2) o viceversa (caselles grises). Les caselles blanques ens permeten calcular la funció derivada a partir de la funció, mentre que les grises ens permeten trobar la primitiva d'una funció a partir de la funció derivada.

Cal remarcar que, quan considerem que una de les formes de representació de $f(x)$ és la taula, ens estem referint a una taula de valors i no a les taules de monotonia que es poden obtenir a partir de l'estudi del signe de $f'(x)$. Per tant, en els comentaris que segueixen, quan considerem la traducció: Taula $f(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f(x)$, ens referirem al procés que permet dibuixar la gràfica a partir d'una taula de valors i no al procés que permet dibuixar la gràfica de la funció a partir de la taula de monotonia, que s'ha obtingut a partir de l'estudi del signe de la derivada.

A continuació posarem exemples d'activitats en què l'alumne ha de realitzar alguns d'aquests tres subprocessos.No posarem exemples de totes les possibilitats, sinó que només comentarem les que hem considerat més importants de cara a l'elaboració de la unitat.

1 Expressió simbòlica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

La forma habitual de calcular l'expressió simbòlica de la funció derivada és calcular-ne el límit $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ utilitzant l'expressió simbòlica de la funció $f(x)$.

2 Expressió simbòlica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$

Un exemple d'aquest subprocés seria, a partir de la fórmula d'una recta, com $f(x) = 3x+2$, dibuixar la gràfica de la recta horitzontal $y = 3$. Ara bé, nosaltres, amb aquest subprocés, ens volem referir al procés que permet obtenir la gràfica de la funció derivada a partir de l'expressió simbòlica de $f(x)$ utilitzant un graficador per representar la funció $pf_h(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (funció gradient o funció pendent de la funció $f(x)$ segons un increment h) amb h prou petit. La gràfica que dibuixa el graficador es pot considerar que és "quasi" la gràfica de la funció derivada.

3 Expressió simbòlica de f (x) ⇨ Taula de f '(x)

Per introduir el concepte de funció derivada és convenient calcular la derivada d'una funció en diferents punts, elaborar-ne una taula amb els valors obtinguts i, a partir de la taula obtinguda, trobar la fórmula de la funció derivada.

Activitat: La taula següent recull alguns valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts

abscissa	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
derivada	*-2*	*0*		*4*		*8*

que hem calculat en d'altres activitats utilitzant l'expressió

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Calcula $f'(1)$ i $f'(3)$ i completa la taula

4 Expressió simbòlica de f (x) ⇨ Descripció verbal de la situació en termes de f '(x)

Apareix en situacions contextualitzades quan, a partir de la fórmula de la funció, hem de fer una descripció de la situació en termes de derivada.

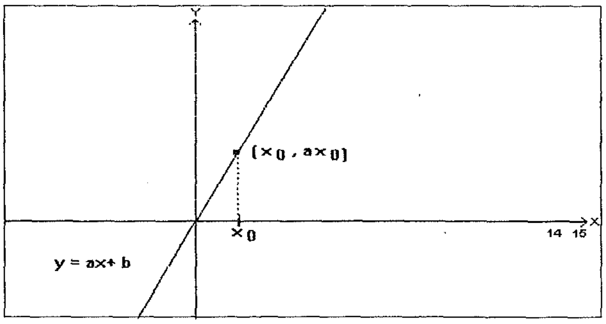
Activitat: La fórmula que dóna l'espai recorregut per un corredor en funció del temps és $f(x) = 4x$. La seva velocitat instantània és constant o bé va variant?

5 Gràfica de f(x) ⇨ Expressió simbòlica de f '(x)

A partir de la gràfica de la funció s'ha de trobar una condició que compleixin totes les tangents. L'Anàlisi d'aquesta condició permet trobar l'expressió simbòlica de la funció derivada. L'exemple paradigmàtic és el càlcul de la funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i de les funcions afins.

Activitat: a) Donada la funció de proporcionalitat $y = ax$ i un punt qualsevol d'abscissa x_0, quina és la recta tangent a la funció? Quin és el seu pendent?

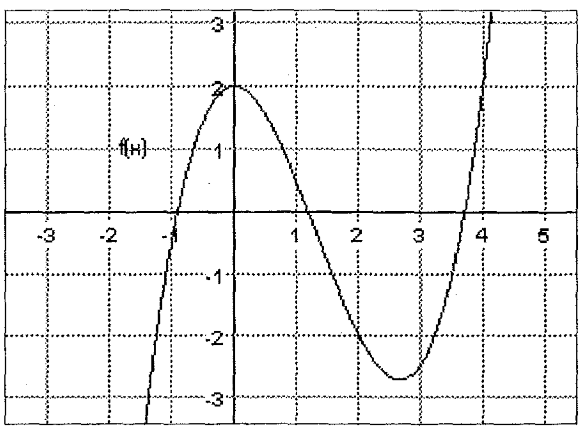
b) Demostra que la funció derivada de la funció de proporcionalitat $f(x) = ax$ és la funció $f'(x)=a$



6 Gràfica de f (x) ⇨ gràfica de f '(x)

Apareix quan s'ha de fer l'esbós de la gràfica de la funció derivada a partir de la gràfica de la funció, a base d'estudiar els intervals en els quals la funció creix, decreix, els màxims i mínims, etc.

Activitat: A partir de la gràfica de la funció $f(x)$ fes un esbós de la gràfica de la seva funció derivada.

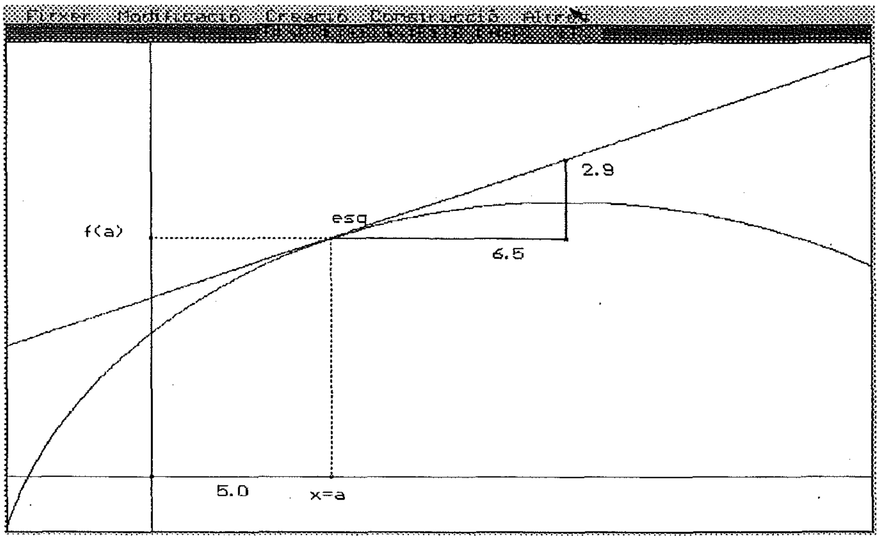


7 Gràfica de f (x) ⇨ Taula f '(x)

Activitat: a) Calcula el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 5$

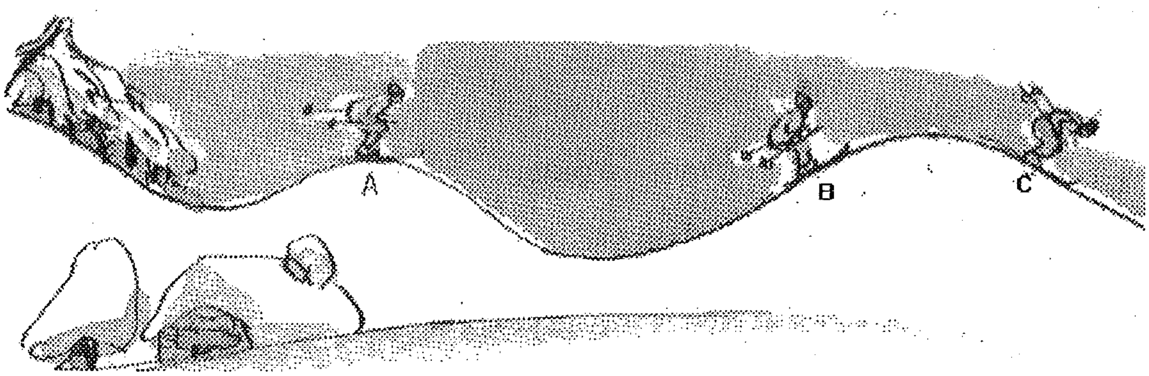
b) Mou el punt *esq* i completa la taula següent:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
pendent de la recta tangent												



8 Gràfica de $f(x)$ ⇨ Descripció verbal en termes de $f'(x)$

Activitat: La il·lustració següent ens mostra com s'ho passa de bé l'esquiador.



a) Podries dir en quin d'aquests tres moments li costa més esquiar? Per què?

b) Utilitza un regle i perllonga els esquís en els punts A, B i C. Quines rectes has obtingut?.

c) Si considerem que el perfil de les muntanyes són el gràfic d'una funció, què val la derivada de la funció en A? Quin és el signe de la derivada de la funció en els punts B i C?

9 Taula $f'(x)$ ⇨ Expressió simbòlica de $f'(x)$

Activitat: Si ara volguéssim trobar la recta tangent a la funció $f(x) = x^2$ en els punts d'abscissa $x = -7$, $x = -12$, $x = -15$, $x = 10$, $x = 21$ i $x = 40$ hauríem de calcular $f'(-7)$, $f'(-12)$, $f'(-15)$, $f'(10)$, $f'(21)$ i $f'(40)$. Bé doncs, abans de calcular totes aquestes derivades, completarem la taula següent amb els valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts que s'han calculat a les activitats anteriors:

abscissa	-1	0	1	2	3	4
derivada	-2	0	2	4	6	8

a) A partir de la taula troba una fórmula que, sabent el valor de l'abscissa, ens per calcular la derivada de la funció $f(x) = x^2$ per a aquest valor de l'abscissa.

b) Utilitzant aquesta fórmula troba $f'(-7)$, $f'(21)$ i $f'(40)$.

10 Expressió simbòlica de f '(x) ⇨ Expressió simbòlica de f '(x)

Aquest tipus de traduccions el trobem per a una funció general quan es pass l'expressió $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a l'expres

$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ i també per a moltes funcions particulars. Per exem

Funció	Funció derivada	Transformació de la deriva
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$f'(x) = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$

11 Gràfica de $f(x)$ ⇨ Gràfica de $f(x)$

Aquest tipus de transformació apareix quan es fa un zoom de la gràfica d'una funció, exemple, quan es vol fer observar que la recta tangent és la que més s'aproxima a la gràfica de la funció en les proximitats del punt.

12 Expressió simbòlica de $f(x)$ ⇨ Expressió simbòlica de $f(x)$

Aquest tipus de traducció és molt important a l'hora d'aplicar les regles de derivació. Per exemple, per calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$, el fet de considerar la transformació $\log_a x = k \cdot \ln x$, permet calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$

de la manera següent: $f'(x) = k \cdot (\ln x)' = k\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$

on k és igual a $\log_a e$ *o bé* $\frac{1}{\ln a}$. Per tant:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad o\ bé \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

2 Justificació de la hipòtesi H 1.1.1: Anàlisi de diferents tècniques per a calcular la derivada de la funció sinus.

Considerem que la millor manera de justificar la hipòtesi H 1.1.1 consisteix a veure que és pertinent per analitzar seqüències d'activitats que tenen per objectiu el càlcul de funcions derivades. A continuació il·lustrarem amb un exemple el tipus d'anàlisi que permet fer aquesta hipòtesi.

Exemple: Anàlisi de diferents tècniques per calcular la derivada de la funció sinus des del punt de vista de les representacions ostensives implicades.

Començarem amb la manera habitual de calcular la derivada de la funció sinus, a continuació comentarem algunes alternatives a l'ensenyament tradicional del càlcul de la derivada de la funció sinus, en les quals intervé el reconeixement de la gràfica de la funció cosinus. Seguidament, comentarem una nova alternativa inspirada en les equacions diferencials. Finalment, valorarem totes les alternatives des del punt de vista de les representacions implicades.

2.1 La derivada de la funció sinus en els llibres de text (tècnica 1)

El càlcul de les derivades de les funcions trigonomètriques elementals contemplades en el currículum de l'ensenyament secundari es concreta en diferents seqüències d'activitats en els llibres de text. Una lectura dels textos escolars actuals[12] posa de manifest una certa estructura comuna en la majoria d'ells. Aquesta estructura consisteix en:

1 Calcular la derivada de la funció $f(x) = \sin x$ directament a partir de la definició de la funció derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

de la manera següent:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2}) \cdot sen\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$$

2 Calcular les derivades de les altres funcions trigonomètriques indirectament, a partir de la regla de la cadena i de la regla de la derivada del quocient.

El primer punt d'aquesta seqüència necessita:

1 demostrar prèviament que $\lim_{h \to 0} \frac{sen h}{h} = 1$

2 Utilitzar les fórmules trigonomètriques que converteixen una diferència de sinus en un producte: $senA - senB = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot sen\frac{A-B}{2}$ (amb $A = x + h$ i $B = x$)

Des del punt de vista de les representacions implicades, aquesta demostració és del tipus:

Expressió simbòlica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

és a dir, l'expressió simbòlica de $f(x)$ és la forma de representació de la funció $f(x)$ que es presenta a l'alumne com a punt de partida de les accions que permetran obtenir una forma de representació de la funció derivada, en aquest cas l'expressió simbòlica de $f'(x)$.

La comprensió del càlcul de la derivada de la funció sinus per aquest mètode resulta difícil per a la majoria d'alumnes i, a més, ocupa força temps. Si a aquests elements afegim que una de les característiques del contracte didàctic vigent en l'ensenyament secundari és l'obligació del professor de "ensenyar a utilitzar determinats algorismes" s'obté com a resultat que la majoria del professorat s'estalvia aquesta demostració, malgrat estar explicada en el llibre de text, i es preocupa bàsicament que els alumnes dominin la tècnica de la derivació.

2.2 Alternatives en les quals l'alumne ha de reconèixer la gràfica de la funció cosinus

A continuació segueixen dues seqüències per a calcular la derivada de la funció sinus en les quals l'alumne ha de reconèixer la gràfica de la funció cosinus.

2.2.1 Alternativa 1 (tècnica 2)

Consisteix en desenvolupar el procés següent:

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

El primer pas d'aquest esquema indica que la gràfica de $f(x)$ és la forma de representació de la funció $f(x)$ que es presenta a l'alumne com a punt de partida perquè aquest realitzi les accions (per exemple calcular pendents) que li permetran obtenir una forma de representació de la funció derivada, en aquest cas una taula de valors de $f'(x)$. Els altres dos passos són traduccions entre diferents formes de representar la mateixa funció, en aquest cas la funció $f'(x)$.

1 Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$

El primer pas d'aquest esquema es pot fer a partir de la gràfica de la funció sinus si l'alumne sap utilitzar un "mesurador de pendents". O bé presentant als alumnes una gràfica de la funció sinus en la què hi siguin dibuixades les tangents en diferents punts, per tal que ells en calculin els seus pendents. O bé se'ls hi pot facilitar aquest treball utilitzant un graficador, com per exemple el programa Calcula[13], que permet trobar diferents valors de $f'(x)$ a partir de la gràfica de la funció sinus.

2 Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$

A partir de la taula de valors, l'alumne ha de dibuixar una gràfica en paper mil·limetrat.

3 Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

L'alumne ha de reconèixer que la gràfica que ha obtingut és la de la funció cosinus.

En aquesta alternativa el punt de partida és la gràfica de $f(x)$ i la seva expressió simbòlica no s'utilitza en cap moment. És a dir, si l'alumne no sabés que la gràfica que li donen és la de la funció sinus, arribaria al mateix resultat.

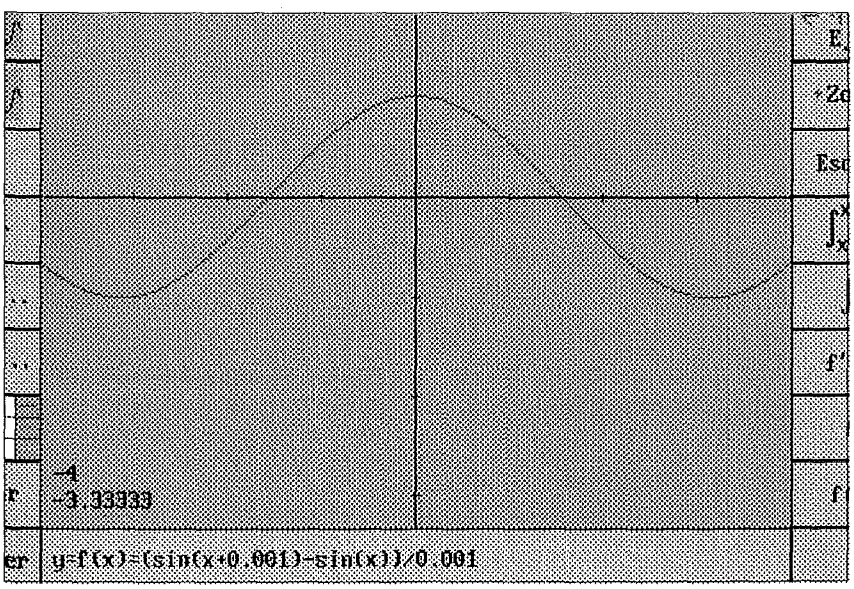
2.2.2 Alternativa 2 (tècnica 3)

Una altra alternativa diferent és la que hem incorporat a la unitat i consisteix a desenvolupar el procés següent[14]:

Expressió simbòlica de $f(x)$ ⇒ Gràfica de $f'(x)$ ⇒ Expressió simbòlica de $f'(x)$

1 Expressió simbòlica de $f(x)$ ⇒ Gràfica de $f'(x)$

Una manera d'obtenir la gràfica de la funció derivada a partir de l'expressió simbòlica de $f(x)$ és utilizar un graficador per representar la funció $\mathrm{pf}_h(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (funció gradient o funció pendent de la funció $f(x)$ segons un increment h) amb h prou petit. La gràfica que dibuixa el graficador es pot considerar que és la de la funció derivada.



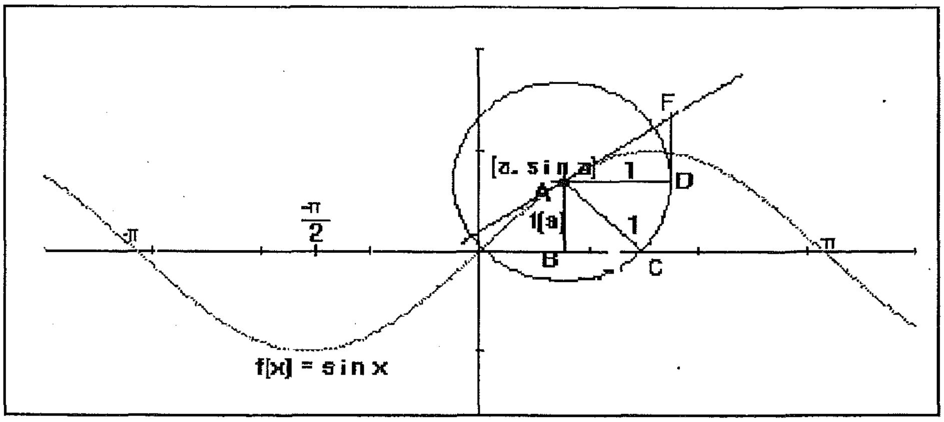
2 Gràfica de $f'(x)$ ⇒ Expressió simbòlica de $f'(x)$

L'alumne ha de reconèixer que la gràfica que ha obtingut és la de la funció cosinus.

L'últim pas de les dues seqüències anteriors suposa que l'alumne és capaç de reconèixer la gràfica de la funció cosinus que té al paper mil·limetrat o a la pantalla de l'ordinador.

2.3 Alternatives relacionades amb l'equació diferencial $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$

La funció sinus és una solució de l'equació diferencial: $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$. D'aquesta equació diferencial es treu que el següent procediment permet dibuixar la recta tangent en un punt qualsevol de la gràfica de la funció sinus:



1 Dibuixa una circumferència de radi 1 amb el centre a $(a, \sin a)$ i determina el punt de tall amb l'eix d'abscisses que es troba a la dreta d'a (punt C).

2 Dibuixa una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passi pel punt $(a, \sin a)$ i determina el punt de tall amb la circumferència anterior que hi ha a la dreta de $(a, \sin a)$ (punt D).

3 Mesura el segment de l'eix horitzontal que té per origen $x = a$ i per extrem el punt determinat en el primer pas (el segment BC).

4 Amb origen en el punt determinat en el pas 2 dibuixa un segment vertical d'igual longitud que el segment del pas 3 (cap amunt si la funció és creixent i cap avall si és decreixent) i fes-hi un senyal a l'extrem (punt F).

5 Uneix el punt obtingut en el pas anterior amb el punt $(a, \sin a)$

2.3.1 Alternativa 3 (tècnica 2)

En el marc d'aquesta investigació vam proposar als alumnes l'activitat del qüestionari 7 (veure pàg. 620) en la qual, donada la gràfica de la funció sinus en paper mil·limetrat, havien d'aplicar aquest procediment per:

1) Dibuixar tangents a la gràfica de la funció sinus en diferents punts

I a continuació:

2) Calcular-ne els pendents i confeccionar una taula de $f'(x)$.

3) Dibuixar una gràfica a partir de la taula anterior

4) Reconèixer la gràfica anterior com la de la funció cosinus.

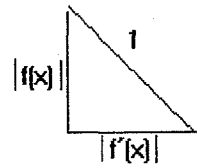
En aquest qüestionari (núm 8) tenim una variació de l'alternativa 1 i, per tant, seguim amb la tècnica 2:

Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

Alternativa 4 (tècnica 4)

En el qüestionari 8 (veure pàg. 679) vam proposar als alumnes una activitat guiada en la qual, a partir del procediment anterior per a dibuixar la recta tangent a la funció sinus en qualsevol punt, l'alumnat havia de:

a) Concloure que $DE = f'(a)$ i $BC = f'(a)$

b) Utilitzar el triangle 

i la igualtat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, per demostrar que $f'(x) = \pm\cos x$

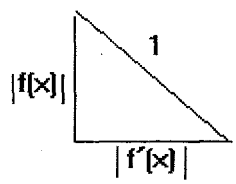
c) Comparar el signe de -cos x amb el creixement i decreixement de la funció sinus i explicar per què no és possible la solució $f'(x) = -\cos x$

En aquesta activitat, a més de tenir la gràfica de la funció i el procediment anterior, s'ha d'utilitzar que l'expressió simbòlica de la gràfica és $f(x) = \sin x$ i, per tant, tenim una altra tècnica que respon a l'esquema:

Gràfica de $f(x)$/Expressió simbòlica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

Amb aquest esquema simbolitzem que el punt de partida de les accions dels alumnes (aplicar el procediment per dibuixar tangents) és la gràfica de la funció. L'expressió simbòlica de $f(x)$ és necessària per a simbolitzar la condició que compleixen tots els pendents de les rectes tangents, la qual ens permet deduir l'expressió simbòlica de $f'(x)$. Si els alumnes han practicat el càlcul del pendent d'una recta i el significat geomètric de la derivada en un punt, poden arribar a descobrir fàcilment que $f'(a) = DE/1 = DE$ i que, per tant, $f'(a) = BC$. També poden entendre la demostració següent:

$$|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 = 1$$
$$|f'(x)|^2 = 1 - \sin^2 x$$



$$f'(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \cos x$$

I, a partir de la relació entre el signe de la derivada i el creixement de la funció sinus, poden descartar la possibilitat $f'(x) = -\cos x$, sempre que hagin treballat la relació entre la gràfica de la funció i el signe de la funció derivada.

3 Conclusions

1) Si analitzem les quatre tècniques que hem comentat per a calcular la derivada de la funció sinus des del punt de vista de les representacions implicades tenim la taula següent:

Mètode tradicional (Tècnica 1)	Expressió simbòlica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$
Alternativa 4 (Tècnica 4)	Gràfica de $f(x)$/Expressió simbòlica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$
Alternativa 2 (Tècnica 3)	Expressió simbòlica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$
Alternativa 1 i 3 (Tècnica 2)	Gràfica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Taula de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Gràfica de $f'(x)$ $\Rightarrow$ Expressió simbòlica de $f'(x)$

En aquesta taula es pot observar que allò que es perd en rigor es guanya en el nombre de representacions ostensives implicades. Aquest fet porta a considerar que el nombre de representacions implicades en una activitat ha de ser un element, tant o més important que el rigor, en el moment de decidir-nos per una activitat o una altra, ja que a major nombre de representacions implicades, major nombre de funcions semiòtiques.

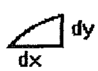
2) Considerem que l'exemple analitzat il·lustra clarament la potència de la hipòtesi H.1.1 per tal d'analitzar seqüències d'activitats que tenen com objectiu el càlcul de la funció derivada.

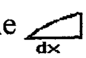
3) La taula de la pàgina 147 obre la possibilitat de fer una anàlisi del càlcul de primitives des del punt de vista de les representacions ostensives implicades. Aquesta és una de les línies d'investigació possible que obre el treball que presentem.

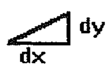
4 Subobjectiu 1.4: En relació al significat institucional i la seva evolució històrica donar arguments històrics que fonamentin les opcions preses en l'elaboració de la unitat per a calcular funcions derivades a partir de gràfiques (de $f(x)$ o de $f'(x)$)

4.1 Introducció

En aquesta investigació hem donat molta importància als processos de traducció entre les diferents formes de representar una funció i la seva funció derivada mobilitzats en el càlcul de la funció derivada $f'(x)$ a partir de $f(x)$. Aquest interès està motivat, en part, per la nostra interpretació de la gènesi històrica de les diferents formes de representació d'una funció i del càlcul diferencial. A continuació desenvoluparem alguns passatges de la història de les matemàtiques relacionats amb aquests dos aspectes; passarem més ràpidament per d'altres que, tot i ser molt importants, ja han estat tinguts en compte en d'altres investigacions o bé han jugat un paper més secundari en aquesta.

En relació a la traducció entre les diferents formes de representació, ens hem centrat bàsicament en el pas de la gràfica a l'expressió simbòlica. De la gènesi històrica del càlcul diferencial ens ha interessat especialment el període anterior a l'ús del triangle 

en el qual s'utilitzaven el triangle determinat per l'ordenada, la tangent i la subtangent, i el triangle determinat per l'ordenada, la normal i la subnormal, és a dir el període anterior a Barrow. I també en la primera presentació del concepte de diferencial de Leibniz publicada l'any 1684. En aquest article Leibniz proposa, en comptes del triangle 

, el triangle 

en el que la hipotenusa és un segment de la tangent. Aquesta manera d'entendre el concepte de diferencial coincideix amb l'actual definició de diferencial, i no amb la que utilitzava el mateix Leibniz en els seus manuscrits anteriors a l'any 1684. En aquests de l'any 1675, el diferencial s'entenia com una quantitat infinitament petita, mentre que en la seva primera publicació era un segment finit. El nostre interès en aquest triangle està motivat pel fet que, un cop introduïda la interpretació geomètrica de la derivada, la utilització per part de l'alumne, en una activitat guiada, del triangle determinat per l'ordenada, la tangent i la subtangent o bé del triangle determinat per la tangent, dx i dy permet calcular la funció derivada d'algunes funcions elementals sense utilitzar límits.

4.2 Evolució històrica del concepte de funció

El significat actual del concepte de funció és el resultat d'un llarg procés. A continuació n'exposem, de manera molt sintètica, l'evolució històrica [15].

1. Els matemàtics babilònics utilitzaven taules per als seus càlculs astronòmics.

2. Els matemàtics de la Grècia clàssica estudiaren les corbes des de dos punts de vista:

   1) Les corbes són seccions

2) Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions

3. En l'edat mitjana apareix la primera gràfica coneguda. Representa els canvis de latitud dels planetes respecte de la longitud. La primera idea de funció com a relació de variables apareix a les escoles medievals d'Oxford i París, que van ser molt importants al segle XIV. L'escola d'Oxford considerava com a "forma" qualsevol qualitat o quantitat variable de la natura (llum, calor, velocitat, distància, etc) i com a "latitud" d'una forma el valor numèric que li havien d'assignar. A la forma també se l'anomenava "longitud" o "extensió". Aquestes escoles representaven la mesura de les magnituds físiques per segments i la relació entre dues magnituds de manera retòrica o bé per gràfiques que es poden considerar com a precursores de les gràfiques cartesianes.

4. Galileu va fer l'estudi del moviment des d'un punt de vista que es pot considerar funcional utilitzant les paraules i les proporcions.

5. Fins a l'aparició de l'àlgebra simbòlica, les funcions es representaven per taules, gràfics o paraules. En els segles XXV i XVI cal destacar la creació de l'àlgebra simbòlica que, si bé inicialment no va incidir en el desenvolupament de la noció, de funció sí que posa les bases per a la posterior representació de les funcions en forma simbòlica.

6. En el primer apartat del segon llibre de "La Géométrie" , Descartes es pregunta quines són les línies corbes que es poden admetre en Geometria i es pregunta per què els antics no varen distingir diversos graus entre les línies més complexes i per què anomenaren mecàniques a algunes d'elles. En aquest primer apartat també divideix les corbes en mecàniques i geomètriques. Per a Descartes una corba és geomètrica si la podem imaginar descrita per un moviment continu o bé per diversos moviments successius, de manera que els darrers vinguin determinats pels anteriors. En canvi, les corbes mecàniques són les que resulten de dos moviments independents que no guarden entre si una relació que pugui ser mesurada. Segons Bourbaki (1976), Descartes és el primer que fa una classificació de les corbes en algèbriques i transcendents. Per clarificar el que entén per corba geomètrica, Descartes construeix un aparell que li permet dibuixar una sèrie de corbes més complexes que les còniques, i que, segons ell, tenen el mateix dret a l'existència i a ser estudiades com les seccions còniques. La corba geomètrica és entesa per Descartes com la traça que produeix un punt que es mou per un aparell articulat compost per diversos regles, de manera que el moviment efectuat sobre un regle es transmet pels diferents regles de l'aparell i fa que el punt es mogui traçant una determinada corba. Aquesta manera d'entendre la corba i la introducció implícita del sistema de coordenades fa que Descartes pugui trobar l'expressió algèbrica de la corba i el porta a definir clarament l'objecte del que després es va anomenar Geometria analítica: les corbes anomenades per ell geomètriques; i les tècniques

que s'han d'utilitzar per estudiar-les: la teoria de les equacions. Els treballs de Descartes són molt interessants perquè parteixen dels dos punts clàssics sobre les corbes:

1) Les corbes són seccions

2) Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions per afegir-ne una tercera:

3) Les corbes són la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions. L'anàlisi d'aquestes condicions permet trobar una equació que compleixen els punts de la corba.

7. Fermat va aplicar els mètodes de Vieta als problemes de llocs geomètrics i, en el seu assaig "Ad locos planos et solidos isagoge" escrit al voltant de 1637, presenta amb un estil modern, amb les notacions de Vieta, els principis fonamentals de la geometria analítica. En aquesta obra enuncia el principi fonamental de la geometria analítica: *"Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva"* (Collette 1985, vol II, pàg. 23). Aquesta proposició, a més de ser la base de la geometria analítica, introdueix la idea de variable algèbrica. Fermat enuncia que totes les equacions de primer grau representen línies rectes i que tots els problemes de llocs geomètrics que són una recta poden ser descrits per aquests tipus d'equacions; que totes les equacions del tipus $xy = k^2$ són hipèrboles; que l'equació $x^2 + y^2 + 2Dx + 2By = b^2$ és una circumferència; que les equacions $x^2 = By$, $y^2 = Dx$ i $b^2 \pm x^2 = By$ són paràboles; que $b^2 - x^2 = k y^2$ és una elipse i que $b^2 + x^2 = k y^2$ és una hipèrbola. També analitza l'equació $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ i demostra que correspon a una elipse. Fermat exposa molt clarament la idea que una equació amb dues incògnites és una expressió algèbrica de les propietats de la corba. Mentre que Descartes considera corbes generades per moviments de les quals busca l'equació, Fermat introdueix corbes donades per equacions algèbriques. En general, es pot dir que Descartes es preocupa més de la traducció de la gràfica a l'expressió simbòlica, mentre que Fermat es preocupa més de la traducció de l'expressió simbòlica a la gràfica.

8. Newton, l'any 1669, va fer circular entre els seus amics una monografia titulada "De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas" que fou publicada l'any 1711. En aquest llibre Newton considera increments infinitesimals de x, que anomena moments i representa per o. Posteriorment, l'any 1672, va escriure el seu llibre "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum" que fou publicat l'any 1736, en què considera els increments infinitesimals d'una manera diferent. En aquest treball diu que considera les variables com a generades pel moviment continu de punts, rectes i plans, més que com a agregats estàtics d'infinitessimals. A una quantitat variable l'anomena "fluent" i la representa per les lletres x, y, i al seu canvi relatiu "fluxió" que representa per $\dot{x}$ i $\dot{y}$. En aquest llibre, Newton

considera que el problema fonamental del càlcul és: donada una relació entre fluxions, obtenir una relació entre les seves fluents i recíprocament. La primera publicació de Newton que inclou el seu càlcul diferencial fou els "Principia", publicat l'any 1687. Aquesta obra és posterior tant a "De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas" (en què s'utilitzen els infinitesimals) com a "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum" (en què utilitza el mètode de les fluxions). En els Principia, Newton utilitza mètodes de demostració geomètrics, segurament perquè considerava que aquests tipus de demostracions eren més comprensibles per als seus contemporanis i exposa un mètode alternatiu als infinitesimals i al mètode de les fluxions: les quantitats divisibles evanescents. *<<Rechaza los infinitesimales o las cantidades indivisibles últimas en favor de las "cantidades divisibles evanescentes>>, cantidades que se puede hacer disminuir tanto com se quiera. En las ediciones primera y tercera de los "Principia" Newton dice: "Cocientes (o razones) últimos en los que las cantidades se anulan no son, estrictamente hablando, razones de cantidades últimas sino límites a los que se acercan las razones de esas cantidades, al decrecer sin límite, las cuales, aunque pueden hacerse más próximos (a sus límites) que cualquier diferencia dada, no pueden sobrepasarlos ni alcanzarlos antes que las cantidades hayan decrecido indefinidamente". Esta es la afirmación más clara de todas las que hizo con respecto a su cociente último. A propósito de la cita anterior, también dice: "Por velocidad última se entiende aquella con la que se mueve el cuerpo, ni antes de que llegue a su posición final, cuando cesa el movimiento, ni después, sino en el mismo instante en el que llega... Y, de la misma manera, por razón última de cantidades evanescentes debe entenderse la razón de cantidades, no antes de que se anulen, no después, sino aquella con que se anulan."* >> (Kline 1992, vol I pàg 482).

En general podem dir que en l'obra de Newton la funció és una eina fonamental que s'usa, però no és objecte d'estudi en si mateixa. Les gràfiques de funcions eren considerades no com un agregat estàtic d'infinitesimals, sinó com la trajectòria descrita per un punt en moviment, la qual es podia expressar mitjançant una fórmula (generalment en forma implícita). Aquesta manera d'entendre les gràfiques de funcions queda molt clara en l'obra de Newton, en la qual podem trobar constants referències a un punt que es mou sobre una paràbola, una hipèrbola, etc. A més de considerar que la gràfica es pot interpretar com la traça que deixa un punt que es mou sobre la gràfica, considera que el punt que genera la gràfica ve determinat per dos segments (abscissa i ordenada), cada un dels quals és generat per un punt que es mou en funció del temps. Una altra aportació important de Newton fou considerar que l'expressió simbòlica d'una funció es podia transformar en una sèrie infinita.

9. Per a Leibnitz, igual que per a Newton, la funció és una eina fonamental que s'usa, però no és objecte d'estudi en si mateixa. Ara bé, sembla que Leibnitz considera la gràfica d'una funció com un agregat de segments infinitesimals més

que com la trajectòria d'un punt que es mou.

10. La primera definició explícita de funció apareix en un article de Bernouilli sobre solucions a problemes d'isoperímetres publicat en les memòries de l'Acadèmia Reial de Ciències de París l'any 1718. Per a Bernouilli, una funció d'una magnitud variable era una quantitat composta de qualsevol manera d'aquesta magnitud variable i de constants. Euler, deixeble de Bernouilli, en el capítol I del seu llibre "Introductio an analysin infinitorum" publicat l'any 1748, modifica la definició del seu mestre substituint el terme "quantitat" per "expressió analítica": <<*Euler define la función de una cantidad variable como una "expresión analítica" formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes*>> (citat en Collette 1985, vol II, pàg 192). En funció de les operacions que intervenen, Euler classifica les funcions en algèbriques i transcendents. Les funcions algèbriques, en irracionals i no-irracionals, i aquestes últimes, en polinòmiques i racionals (quocient de polinomis). També fa una classificació en funcions implícites i explícites, així com en uniformes (unívoques) i multiformes. En el capítol IV, dedicat al desenvolupament de sèries infinites, afirma que la forma universal per a l'expressió analítica d'una funció és la sèrie entera infinita de la forma: $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots$

11. En el segle XVIII, els matemàtics més importants (Euler, Lagrange, etc) consideraven, sense cap tipus de dubte, que tota funció de l'anàlisi es podia representar per una sèrie entera, sempre que no fos una funció definida a trossos. Euler considerava que a cada expressió analítica li corresponia una gràfica cartesiana, i que expressions analítiques, que d'entrada semblaven diferents, podien tenir la mateixa gràfica. Però, a gràfiques diferents corresponien expressions analítiques diferents. En la terminologia d'Euler, les gràfiques definides a trossos eren "discontínues o mixtes o irregulars".

12. La necessitat de considerar funcions mixtes en determinats problemes portà a Euler a buscar una definició de funció que englobés a totes les corbes que no es poden definir per una sola expressió, però que es poden dibuixar pel moviment lliure de la mà. En el seu llibre "Institutiones calculi differentialis" publicat l'any 1755 dóna la següent definició: *"Si ciertas cantidades dependen de otras, de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces se llama estas cantidadcs funciones de las últimas; esta denominación tiene la máxima amplitud y contiene, en ella misma, todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Si, por consiguicnte, x designa una cantidad variable, entonces las otras cantidades que dependen de x de cualquier manera, o que están determinadas por x, se llaman funciones de x."* (citat en Lacasta i Pascual 1998, pàg. 38).

13. Aquesta última definició de funció d'Euler es va anar imposant a poc a poc. Per exemple, Lacroix, en el seu llibre de text "Traité du calcul différentiel et du calcul

integral" publicat l'any 1797 dóna la definició següent: *"Toda cantidad cuyo valor depende de una o varias cantidades se llama función de estas últimas, tanto si se sabe como si se ignora cuáles son las operaciones por las que hay que pasar para pasar de éstas a la primera"* (citat en Lacasta i Pascual 1998, pàg. 42).

14. L'aritmetització de l'anàlisi feta per Cauchy, Bolzano, Weierstrass i d'altres porta a una definició de funció pràcticament equivalent a la que s'usa actualment. L'any 1837 Dirichlet va proposar la definició de funció en els termes següents:<<*Imaginemos que "a" y "b" son dos valores fijos y "x" una cantidad variable que toma sucesivamente todos los valores comprendidos entre "a" y "b". Corresponde entonces a cada valor "x" una cantidad única, "y", finita; mientras "x" recorre de modo contínuo el intervalo de "a" a "b", y = f (x) varía asimismo, e "y" representa una función para ese intervalo. No es, en absoluto, necesario que "y" dependa de "x" en todo ese intervalo de acuerdo con la misma regla, y no hay que pensar en una dependencia expresable en términos de fórmulas matemáticas. Representando de un modo gráfico, es decir, tomando a "x" como abscisa y a "y" como ordenada una función aparece como una curva a la que cada abscisa comprendida entre "a" y "b" le corresponde un solo punto. Esta definición no fija a las distintas partes de la curva ninguna regla común: se la puede uno imaginar compuesta de distintas partes o trazada de modo totalmente anárquico. De esto se desprende que una función sólo se puede contemplar como completamente precisada para un cierto intervalo ya si está dada gráficamente o si en las distintas partes del intervalo se dan de modo matemático las reglas vigentes. Mientras en una función sólo se tenga certeza de una parte del intervalo queda completamente en manos de la arbitrariedad el modo en que continuará el resto del intervalo*>> (Citat en Arenzana 1997, pàg. 72).

Per exemplificar l'arbitrarietat de la definició anterior, va proposar l'anomenada funció de Dirichlet, que compleix la condició de no ser contínua per a cap valor de $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ és\ racional \\ 0 & si\ x\ és\ irracional \end{cases}$$

15. Amb la posterior aplicació de la teoria de conjunts a les funcions, aquest concepte es va estendre a conjunts qualssevol i la gràfica de la funció $f(x)$ es va considerar com el conjunt de punts de coordenades $(x, f(x))$.

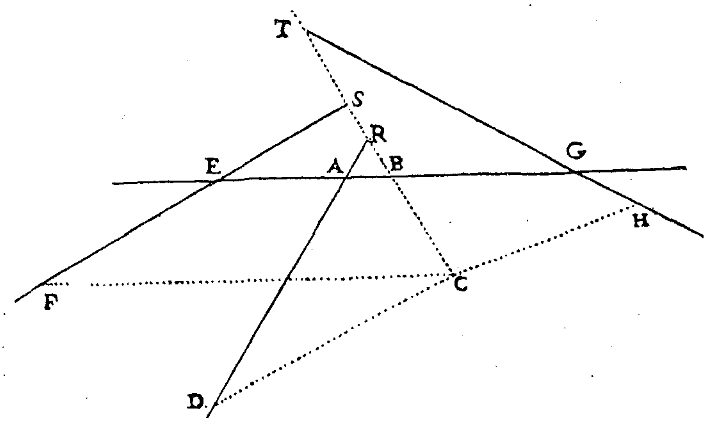
4.3 El pas de la gràfica a l'expressió simbòlica. Les corbes en l'obra de Descartes

En aquesta investigació ens ha interessat molt el pas de la gràfica a la seva expressió simbòlica per la qual cosa hem analitzat amb força detall el moment històric en què es produeix aquest pas. De Descartes ens ha interessat molt la seva manera d'entendre el pas de la corba a l'expressió simbòlica. Per demostrar la potència del seu mètode Descartes, a proposta de Golius, parteix d'una qüestió plantejada per la geometria clàssica, el problema de Pappus, per preguntar-se quins són els punts que en compleixen les condicions. El problema de Pappus era un problema obert, malgrat les temptatives d'Euclides, Apol·loni i del mateix Pappus per resoldre'l utilitzant els mètodes dels "antics".

Descartes al final de 1631 va enviar a Golius la solució que està exposada en el primer llibre de "La Géométrie". El que pretén Descartes en aquest llibre és posar a prova el seu mètode i arribar a una solució que sigui, com a mínim, tan bona com la dels antics. Aquest objectiu queda clarament explicat en el paràgraf següent: *"Pappus afirma que, cuando no existen sino tres o cuatro líneas rectas dadas, se encuentra en una de las tres secciones cónicas, pero no intenta determinarla ni describirla, al igual que tampoco intenta explicar aquellas en que deben encontrarse todos estos puntos cuando la cuestión es planteada para un número mayor de líneas. Solamente indica que los antiguos habían imaginado una de aquellas que habían mostrado ser muy útil, que parecía la más simple, pero, sin embargo, no era la más importante. Esto me ha dado la oportunidad para intentar si puedo llegar tan lejos como lo que ellos han alcanzado mediante el método que utilizo."* (Descartes 1981, pàg. 288).

Abans de donar resposta al problema de Pappus, Descartes es queixa d'una de les grans limitacions de la geometria grega: la pitagòrica. En efecte, l'aparició de la incommensurabilitat entre segments, és a dir, el fet que, donat un segment unitari, n'hi hagi d'altres que no puguin ésser mesurats amb exactitud per la unitat, féu que no es pogués acceptar que a cada segment rectilini se li associés un nombre que en donés la seva longitud. Descartes, en el paràgraf següent, es queixa d'aquesta limitació i de l'obscuritat que implicava la seva acceptació: *"Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en usar notaciones propias de Aritmética en Geometría, que no podía proceder sino de que no veían con bastante claridad su relación, era la causa de la gran oscuridad y dificultad en el modo en que se expresaban, pues Pappus sigue expresándose del modo siguiente:(...)"* (Descartes 1981, pàg. 287)

El problema de Papus és doncs d'un típic problema de llocs geomètrics, que Descartes formula de la següent manera: *"Sean AB, AD, EF, GH, etc..., varias líneas dadas debiendo hallarse un punto C, desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas como CB, CD, CF y CH, de modo que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema".* (Descartes 1981, pàg. 289).



Il·lustra l'enunciat amb un dibuix per a quatre rectes i després el resol.

Després de resoldre el problema de Pappus, Descartes es troba que, segons el nombre de línies que hi ha en el problema, obté una expressió algèbrica amb dues variables, la x i la y, que poden ésser de grau qualsevol. Per trobar un punt C que sigui solució del problema, dóna un valor arbitrari a la x o a la y i resol l'equació que li surt geomètricament de la manera següent:

- si és de segon grau, utilitzant el regle i el compàs.
- si és de 3r i 4t grau, utilitzant seccions còniques.

Per resoldre equacions de grau superior a quatre, necessita corbes més complexes que les còniques. Però es troba, d'una banda, amb la classificació que feien els grecs dels problemes en plans, sòlids i supersòlids o lineals:

- Els problemes plans són aquells que es poden resoldre construint segments utilitzant regle i compàs. Com a exemple de problema pla, tenim la construcció del quadrat de la diagonal a partir del costat, o bé el problema de Pappus, si es proposa per 3, 4 o 5 línies (exceptuant el cas que les 5 siguin paral·leles). La geometria dels "elements" d'Euclides consisteix a construir tot allò que és possible fer usant solament el regle i el compàs. És això, precisament, el que imposen els tres primers postulats d'Euclides.
- Els problemes sòlids són aquells que necessiten la introducció d'una secció cònica, és a dir, els casos en què cal algun instrument que permeti construir còniques per poder resoldre'ls. Com a exemple de problema sòlid, tenim la construcció de la diagonal d'un cub a partir del seu costat; o bé el problema de Pappus si es proposa per 5 línies paral.leles o bé 6, 7,8 o 9 línies (si exceptuem el cas en què les 9 línies són paral·leles)
- Els problemes supersòlids o lineals són aquells que necessiten la introducció d'una corba més complexa que les seccions còniques. Com a exemple de problema lineal tenim el problema de Pappus, si es proposa per 9 línies paral·leles o bé per a més de 9 línies.

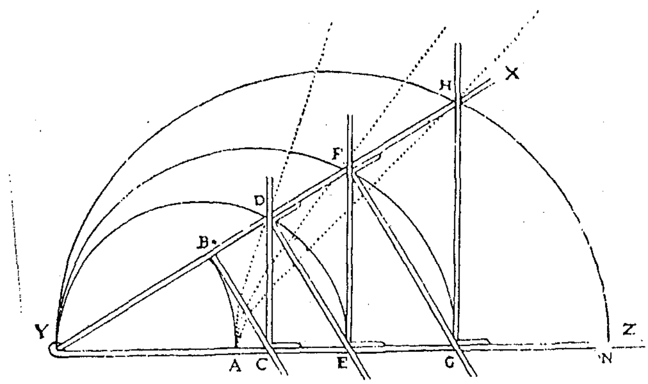
D'altra banda es troba també amb la limitació platònica. Plató, davant el fet que si bé la diagonal no és commensurable amb el costat del quadrat, però donat el costat del quadrat és possible construir la diagonal, imposa la limitació que tots els segments admissibles han de ser construïbles i que els únics aparells que es poden usar per a construir segments són el regle i el compàs. Descartes accepta la limitació platònica en el sentit que solament són acceptables segments construïbles, però el que no accepta és limitar-se als instruments imposats per Plató: el regle i el compàs.

En el primer apartat del segon llibre, Descartes es pregunta quines són les línies corbes que es poden admetre en Geometria i es pregunta per què els antics no varen distingir diversos graus entre les línies més complexes i per què anomenaren mecàniques a algunes d'elles. En aquest primer apartat també divideix les corbes en mecàniques i geomètriques. Per a Descartes, una corba és geomètrica si la podem imaginar descrita per un moviment continu o bé per diversos moviments successius de manera que els darrers vinguin determinats pels anteriors, mentre que les corbes mecàniques són les que resulten de dos moviments independents que no guarden entre si una relació que pugui ser mesurada. Segons Bourbaki (1976), Descartes és el primer que fa una classificació de les corbes en algèbriques i transcendents[16].

"LIBRO SEGUNDO
SOBRE LA NATURALEZA DE LAS LÍNEAS CURVAS
Sobre las líneas curvas que pueden admitirse en Geometría

Los antiguos distinguieron con toda perfección la existencia de tres clases de problemas en Geometría: planos, sólidos y lineales; es decir, unos pueden ser construidos con sólo trazar líneas rectas y círculos; los segundos, por el contrario no pueden serlo sin realizar la introducción de alguna sección cónica; finalmente, los terceros requieren el empleo de una línea más compleja. Pero no logro evitar la extrañeza que me produce el que, además de esto, no llegasen a distinguir diversos grados entre estas líneas más complejas, al igual que no logro comprender por qué las han denominado Mecánicas y no Geométricas. Pues si pensamos que las han denominado de tal modo porque es necesario utilizar algún instrumento para trazarlas, entonces deberíamos rechazar por la misma razón los círculos y las líneas rectas, puesto que no se trazan sobre el papel, sino utilizando la regla y el compás que también pueden ser considerados como máquinas. Tampoco puede explicarse porqué los instrumentos utilizados para trazarlas, siendo más complejos que la regla y el compás, no pueden llegar a alcanzar la misma precisión; en tal caso, deberían considerarse fuera de la Mecánica, pues la precisión de las obras realizadas por la mano es aún más buscada en ella que en la Geometría, donde exclusivamente se desea lograr precisión en el razonamiento, pudiendo obtenerse tanta perfección en relación con estas líneas como con las que son más simples. No afirmaré tampoco que tal exclusión sea debida a que no desearon aumentar el número de sus postulados y se consideraron satisfechos con admitir que pueden unirse dos puntos dados por una línea recta y describir un círculo desde el centro que pasase por un punto dado, pues no dudaron en modo alguno al realizar su estudio de las secciones cónicas en que debía suponerse la posibilidad de cortar un cono dado por un plano dado. Y, no es necesario suponer nada para trazar todas las líneas curvas que pretendo introducir, sino que dos o más líneas puedan moverse entre sí y que sus intersecciones *engendren otras curvas; esto en nada me parece más difícil. Verdad es que no han introducido de modo perfecto las secciones cónicas en su geometría, pero yo no deseo introducir modificación alguna en los nombres normalmente aceptados. Pero me parece totalmente claro que si entendemos, como generalmente se hace, por <<geométrico>> lo que es preciso y exacto y, en segundo lugar, por <<mecánica>> lo que no lo es; y, asimismo, si consideramos la Geometría como una ciencia que enseña en general a conocer las medidas de todos los cuerpos, no existe razón alguna para excluir de la misma el estudio de las líneas más complejas y no el de las más simples, con tal de que puedan imaginarse descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos y en los que los últimos vienen determinados por los anteriores; pues por este medio, puede siempre tenerse conocimiento exacto de su medida. Pero lo que puede quizá haber impedido la admisión por los antiguos geómetras de aquellas curvas que eran más complejas que las secciones cónicas, es que las primeras que analizaron por casualidad, fueron la Espiral, la Cuadratiz y semejantes, que no pertenecen propiamente sino a las Mecánicas y no son del número de las que pienso que deban ser incluidas aquí; pienso así, puesto que podemos imaginarlas descritas por dos movimientos independientes, no guardando el uno con el otro relación alguna que pueda ser exactamente medida; aunque posteriormente hayan examinado la Concoide, la Cisoide, y algunas otras que nosotros aceptamos, sin embargo, es posible que al no haber analizado suficientemente sus propiedades, no se hayan cuestionado su importancia más de lo que cuestionaron la de las primeras. También podría haber sucedido que pensasen que no debían iniciar el análisis de una materia más difícil, ya que no conocían sino algunas cosas sobre las secciones cónicas e ignoraban aún mucho de cuanto puede construirse mediante la regla y el compás. Pero, puesto que tengo la esperanza de que aquellos que tengan destreza para servirse del cálculo geométrico aquí propuesto, no encontrarán tema alguno como para hacerlos vacilar en relación con los problemas planos o sólidos, creo pues oprtuno invitarles a realizar otras investigaciones en las que nunca les faltará oportunidad para ejercitarse.*

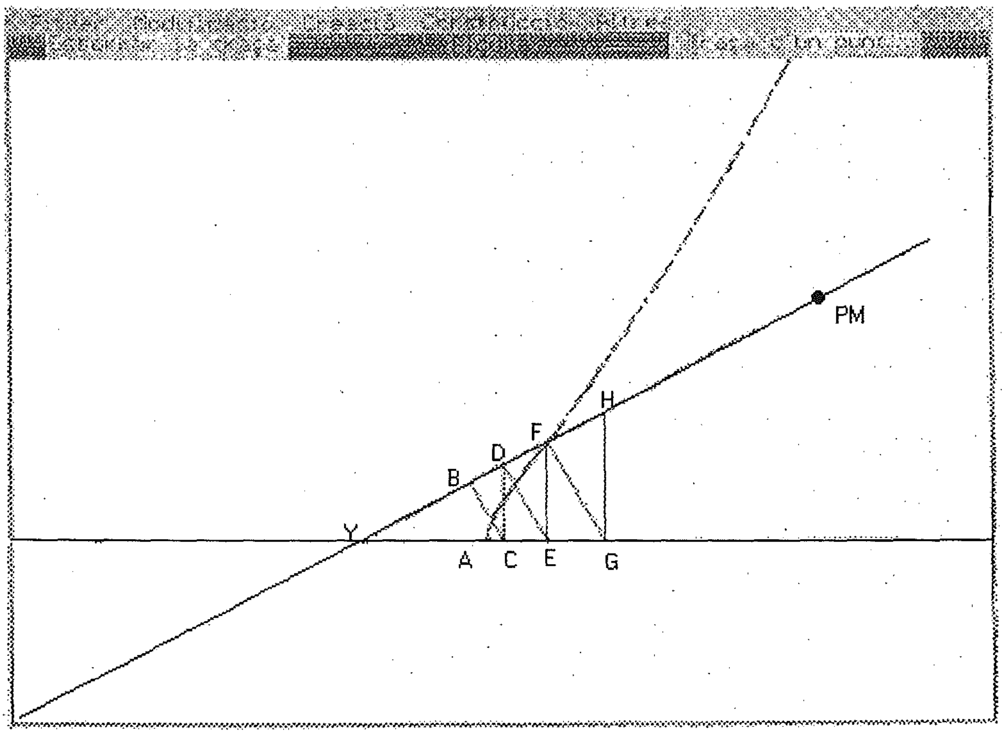
Considérese las líneas AB, AD, AF y semejantes, que supongo han sido descritas con la ayuda del instrumento XYZ, compuesto de varias reglas. Estas están unidas de tal forma que cuando la conocida como YZ está sobre la línea AN, puede abrirse y cerrarse el ángulo XYZ;



cuando, está totalmente cerrada, los puntos B, C, D, F, G, H, se encuentran todos en A; pero a medida que se abre, la regla BC, unida a XY de modo que forma ángulos rectos en el punto B, empuja hacia Z la regla CD; CD resbala sobre YZ formando siempre ángulos rectos con ella y empuja a DE, que se desliza igualmente sobre YX, permaneciendo paralela a BC. DE empuja EF; EF a FG y FG a GH; asimismo, podemos concebir una infinidad de otras, que se impulsan consecutivamente de igual modo: unas forman los mismos ángulos con YX, y los otros con YZ. Así cuando se abre el ángulo XYZ, el punto B describe la línea AB, que es un círculo; los otros puntos, D, F y H, en donde se encuentran las intersecciones de las otras reglas, describen otras curvas, como AD, AF y AH, siendo cada una de ellas progresivamente más compleja que el círculo. Pero no veo qué puede impedir que se conciba tan clara y distintamente la descripción de la primera como la del círculo o, al menos, como la de las secciones cónicas; nada veo que nos impida concebir la segunda, la tercera y cuantas se puedan describir, tan adecuadamente como la primera. En consecuencia, no veo por qué todas ellas no son igualmente aceptadas con el fin de contribuir a las especulaciones de la Geometría (Descartes, 1981, pàgs. 294-297).

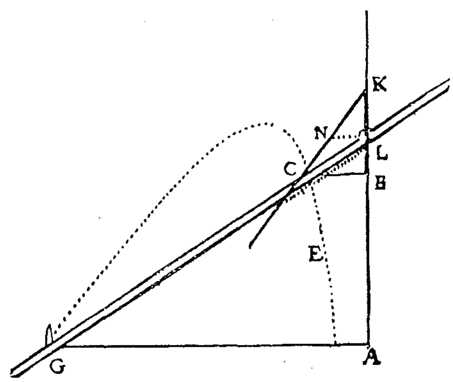
Abans de Descartes, les corbes es consideraven com el resultat de fer seccions (com per exemple les seccions còniques) o bé es consideraven com el resultat de la composició de moviments. Descartes es queixa de la falta de claredat dels antics sobre les corbes i fa una reflexió que el porta a fer una classificació entre corbes algèbriques i transcendents. Per clarificar el que entén per corba geomètrica, construeix un aparell que li permet dibuixar una sèrie de corbes més complexes que les còniques, i que, segons ell, tenen el mateix dret a l'existència i a ser estudiades com les seccions còniques. La corba geomètrica és entesa per Descartes com la traça que produeix un punt que es mou per un aparell articulat compost per diversos regles, de manera que el moviment efectuat sobre un regle es transmet pels diferents regles de l'aparell i fa que el punt es mogui traçant una determinada corba. Aquesta manera d'entendre la corba i la introducció implícita del sistema de coordenades fa que Descartes pugui trobar l'expressió algèbrica de la corba i el porta a definir clarament l'objecte del que després es va anomenar Geometria analítica: les corbes anomenades per ell geomètriques; i les tècniques que s'han d'utilitzar per estudiar-les: la teoria de les equacions.

Una de les conclusions d'aquest treball és que la metàfora que considera les funcions com la traça d'un punt que es mou subjecte a determinades condicions pot ser recuperada per a l'ensenyament gràcies a micromóns com el Cabri-géomètre. En efecte, la figura següent és una construcció del Cabri-géomètre que reprodueix l'aparell ideat per Descartes, amb la traça del punt *F*:



La manera que té Descartes de trobar l'expressió algèbrica que compleixen els punts de la corba consisteix a fer una anàlisi de les condicions que determinen el moviment del punt que descriu la traça i a partir d'aquesta anàlisi troba l'equació que compleixen els punts de la corba. A continuació il·lustrarem aquest mètode amb un exemple de "La Géométrie"

Exemple: *Así, supongamos que deseo saber a qué clase pertenece la línea EC, que imagino descrita por la intersección de la regla GL y del plano rectilíneo CNKL cuyo lado KN es prolongado indefinidamente hacia C, y que moviéndose sobre el plano en línea recta (de tal forma que su diámetro KL se encuentre siempre aplicado sobre algún lugar de la línea BA, prolongada por ambos extremos) da lugar al movimiento circular de esta regla GL, alrededor del punto G, puesto que tal regla está unida de tal modo a CNKL que pasa siempre por el punto L. En tal caso, escojo una línea recta como AB para relacionar con tales puntos todos los de la línea curva EC; asimismo, en esta línea, AB, tomo un punto tal como A para iniciar por él el cálculo. Digo que escojo tanto uno como la otra, porque pueden tomarse los que se deseen ya que aunque existan muchas alternativas que abrevien y simplifiquen la ecuación, sin embargo, de cualquier modo que se seleccionen, la curva pertenecerá siempre a la misma clase tal como es fácilmente demostrable. Después de esto, tomando un punto a discreción en la curva tal como C, sobre el que supongo que aplico el instrumento que sirve para describirla, trazo desde el punto C la línea CB paralela a GA; puesto que CB y BA son dos cantidades indeterminadas y desconocidas, las denomino "y" e "x", respectivamente. Pero con el fin de encontrar la relación de una con la otra, considero también las cantidades conocidas que determinan la descripción o trazado de esta curva: así GA (llamada "a"),* *KL (llamada "b") y NL, paralela a GA (llamada "c"). Seguidamente afirmo: que como NL es a LK (o bien "c" es a "b"), así CB o "y" es a BK que es, por tanto, igual a* $\frac{b}{c}y$.



Por tanto, BL es igual a $\frac{b}{c}y - b$ *, y AL es igual a* $x + \frac{b}{c}y - b$ *. Además, como CB es a LB, así GA es a LA, o bien como* y *es a* $x + \frac{b}{c}y - b$.

Multiplicando la segunda por la tercera tenemos $\frac{ab}{c}y - ab$ *que es igual a* $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$ *, que es el resultado obtenido al multiplicar la primera por la última. Por tanto, la ecuación buscada es:*

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

En virtud de la misma conocemos que la línea EC es de las del primer tipo; en efecto, no es sino una hipérbola (Descartes 1981, pàgs. 297-299).

Els càlculs de Descartes, amb els passos intermedis, són:

Si $NL = c$; $LK = b$; $CB = y$; $AB = x$ i $GA = a$

$$\frac{NL}{LK} = \frac{c}{b} = \frac{CB}{BK} = \frac{y}{BK} \quad ; \quad BK = \frac{by}{c}$$

$$LB = BK - LK = \frac{by}{c} - b$$

$$AL = AB + LB = x + \frac{by}{c} - b$$

$$\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{AL} \quad ; \quad \frac{y}{\frac{by}{c} - b} = \frac{a}{x + \frac{by}{c} - b}$$

d'on:

$$xy + \frac{by^2}{c} - by = \frac{aby}{c} - ab$$

$$\frac{by^2}{c} + yx - by - \frac{aby}{c} + ba = 0$$

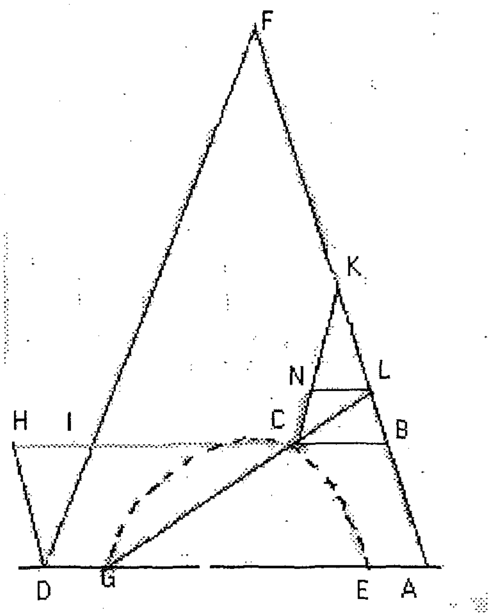
$$by^2 + cyx - cby - aby + cba = 0$$

$$y^2 + \frac{cyx}{b} - cy - ay + ca = 0$$

I per tant:

$$y^2 + \frac{cyx}{b} - cy - ay + ca = 0$$

Descartes no dóna cap justificació de per què aquesta equació és la duna hipèrbola. Ara bé, la resolució del problema de Pappus el va portar a fer una classificació de les còniques que li permetia saber que aquesta equació correspon a una hipèrbola. A l'edició de Van Schooten de1659 es pot trobar la següent justificació:



Dibuixem $DG = EA$; DF paral·lela a KN i DH paral·lela a AB. LLavors:

$$\frac{KL}{LN} = \frac{DH}{HI} \; ; \; \frac{b}{c} = \frac{x}{HI} \; ; \; HI = \frac{c}{b}x$$

$$IB = HB - IH = DA - IH = DG + GA - IH = c + a - \frac{c}{b}x$$

$$IC = IB - y = c + a - \frac{c}{b}x - y$$

Si $IC \cdot IB = DE \cdot EA$ la corba descrita és una hipèrbola que té per asímptotes les rectes AF i FD.

$$IC \cdot BC = DE \cdot EA \quad és \quad \left(c + a - \frac{c}{b}x - y\right) \cdot y = a \cdot c$$

D'on: $$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

que és l'equació que ha trobat Descartes.

El fet d'agafar $DG = EA$ està justificat per la següent propietat mètrica de la hipèrbola que es dedueix de les propietats projectives: els segments d'una secant qualsevol compresos entre les asímptotes i la corba són iguals[17].

La propietat que $IC \bullet IB = DE \bullet EA$ la compleixen els punts de la hipèrbola que té per asímptotes les rectes AF i FD, i és conseqüència que si una hipèrbola té l'equació $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, llavors les equacions de les asímptotes

són: $$y = \frac{b}{a}x \quad ; \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Les ordenades corresponents a la mateixa abscissa x en la hipèrbola són:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

corresponents a dos punts simètrics respecte de l'eix x. Sumant i restant els valors absoluts de les ordenades corresponents a l'asímptota i a la corba, obtindrem els segments PR i PR' compresos entre un punt P de la corba i les asímptotes.

$$PR = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) \quad ; \quad PR' = \frac{b}{a}\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

Multiplicant aquests valors, tenim:

$$PR \bullet PR' = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - x^2 + a^2\right) = b^2$$

Per tant, el producte d'aquests dos segments és constant.

Encara que Descartes diu, al final del primer llibre, que si en una equació algèbrica amb dues incògnites donem valors a una incògnita i busquem els corresponents valors de l'altra, trobarem infinits punts que descriuen una corba; no utilitza les equacions per dibuixar corbes. Descartes utilitza les equacions per classificar el tipus de corba. És a dir, les corbes que apareixen en “La Géométrie” no són construïdes a partir d’una equació, sinó que són generades pel moviment d’un punt a partir del moviment de corbes més simples, tal com es pot observar en l’exemple anterior. Per a Descartes, les corbes, més que el conjunt de punts que compleixen una determinada equació, són el resultat de moviments successius de corbes més simples, de manera que els últims vénen determinats pels anteriors. Descartes el que fa és considerar la corba generada a partir de corbes més simples, i a partir de l’estudi d’aquests moviments troba l’equació de la corba.

Descartes, encara que no utilitza les equacions per dibuixar-les, en el segon llibre reflexiona sobre quines són les corbes que es poden dibuixar trobant alguns dels seus punts i diu que les que es poden dibuixar a partir de punts qualssevol són les que ell ha anomenat geomètriques i que aquest és un mètode admissible per dibuixar corbes en geometria. També diu que la condició que han de complir aquests punts és que han de ser punts qualsevol de la corba i no punts determinats com, per exemple, en el cas de l’espiral.

“Sobre las líneas que se trazan hallando varios de sus puntos y que pueden ser admitidas en Geometría.

De igual modo estimo oportuno señalar que existe una gran diferencia entre la forma expuesta para llegar a conocer varios puntos que permitan trazar una curva y la que se utiliza para trazar la espiral y sus semejantes. En este último caso no se calculan indiferentemente todos los puntos de la linea buscada, sinó sólo aquellos que pueden ser determinados por algún procedimiento más simple que aquel que és requerido para formarla; propiamente hablando, no hallamos uno de sus puntos, esto es, alguno de aquellos que son puntos propios de esta línea de modo tal que no pudiesen ser hallados sino por su mediación. Por el contrario, no hay un punto en estas líneas que sirven para el problema propuesto, que no pueda ser determinado mediante el procedimiento indicado. Debe considerarse que si bien tal forma de determinar una línea curva, hallando indiferentemente diversos puntos de la misma, no es aplicable sino a las que puedan ser también descritas por un movimiento regular y continuo, no por ello se la debe excluir de la Geometría”. (Descartes 1981, pàg. 314).

Cal tenir en compte que Descartes considera que les corbes que tenen equació són les que ell ha anomenat geomètriques i aquestes es poden dibuixar a partir de punts obtinguts utilitzant l’equació, mentre que les mecàniques no tenen equació i, encara que es puguin trobar alguns punts, no és possible trobar-ne un de qualsevol.

El procés que Descartes explica en la Geometria, en termes de funcions semiòtiques, és el següent. D’entrada se’ns presenta una línia que identifiquem com una corba que és la traça que deixa un punt subjecte a determinades condicions. Això es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS2.1 perquè identifiquem l’expressió que se’ns presenta (una línia corba en el pla) com un objecte d’una determinada classe, la classe “corba generada a partir d'uns determinats moviments més simples”.

expressió	F(x,y)=0 (els paràmetres estan determinats)

FS4.1

expressió	contingut F(x,y,a,b,c...) =0 (a, b, c,..són els paràmetres)

FS6.1

expressió	contingut conjunt de punts que compleixen una fórmula tipus

FS5.1

expressió 	contingut traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions

FS2.1

A continuació, "corba que resulta de la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions" s'interpreta com a "corba formada pel conjunt de punts que compleixen una fórmula tipus". Això es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS5.1 perquè una determinada classe és interpretada d'una manera diferent. A continuació aquesta classe de corbes es representen per una fórmula tipus $F(x,y,a,b,c...)$ on a, b,c, són paràmetres. Això es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS6.1 perquè a una classe li fa correspondre una notació. Per últim, es determinen els paràmetres. Això es pot considerar una funció semiòtica del tipus FS4.1 perquè a una determinada classe li fem correspondre una entitat extensional (la fórmula que resulta de determinar els paràmetres)

Descartes suposa la corba generada a partir de corbes més simples, i a partir de l'estudi d'aquests moviments troba l'equació de la corba. També es planteja el problema invers: com dibuixar la corba a partir de saber-ne l'equació. Per a Descartes aquest últim procés seria una funció semiòtica FS8.1 que a una expressió notacional (l'equació) li fa correspondre un contingut intensional (el conjunt de punts que compleixen l'equació). Aquest parell és l'expressió d'un contingut extensional (la corba) (FS4.2).

expressió	contingut corba formada pels punts que compleixen l'equació

FS4.2

expressió F(x,y)=0	contingut conjunt de punts que compleixen l'equació

FS8.1

Per a Descartes hi ha dos mètodes per realitzar aquest procés. El primer consisteix a entendre l'equació com una relació entre segments, a partir de la qual és possible trobar un conjunt de moviments que generin la corba que té aquesta equació, i l'altre consisteix a fer una taula de valors a partir de l'equació.

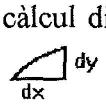
El procés que explica el mateix Descartes per passar de la corba a l'equació és molt probable que estigués complementat per un procés heurístic que no està reflectit en la Geometria. Aquest procés es basa en la possibilitat de: 1) Observar la gràfica que resulta de la traça que deixa un punt que es mou d'acord amb determinades condicions, 2) Identificar la gràfica com un membre d'una família de corbes, 3) Assignar a la gràfica una fórmula tipus i 5) Determinar els paràmetres. Aquest procés només és possible amb una classificació de les còniques, la qual cosa Descartes ja tenia, com a resultat de la seva solució al problema de Pappus. Aquest procés permet, en molts casos, saber el tipus de solució que s'ha de buscar, i en molts d'altres permet tenir alguna estratègia per trobar-la. Ara bé, aquest procés no serveix com a demostració perquè el pas 2 és el resultat d'una observació visual.

Per fer el pas de la gràfica a la seva expressió simbòlica, nosaltres considerem que en el nivell de secundària s'ha d'utilitzar aquest últim mètode per determinar la fórmula tipus

gràfica ⇒ classe de funció ⇒ fórmula tipus ⇒ determinació dels paràmetres

Per determinar els paràmetres de la fórmula tipus hi ha diferents procediments que depenen de cada família de funcions. En alguns casos en què s'estigui considerant la gràfica com la traça que deixa un punt que es mou subjecte a determinades condicions, l'anàlisi d'aquestes condicions permetrà determinar els paràmetres de la fórmula tipus.

4.4 Evolució del càlcul diferencial en el segle XVII. El problema de les tangents.

De la gènesi històrica del càlcul diferencial ens ha interessat especialment el període anterior a l'ús del triangle 

en el qual s'utilitzaven el triangle determinat per l'ordenada, la tangent i la subtangent i el triangle determinat per l'ordenada, la normal i la subnormal, és a dir, el període anterior a Barrow. I la primera presentació del concepte de diferencial de Leibniz publicada l'any 1684.

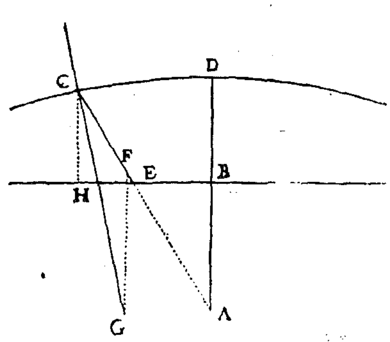
4.4.1 El mètode de la normal de Descartes

La importància que va tenir en el segle XVII el problema de trobar mètodes per construir la normal i la tangent en un punt d'una corba queda palès en el paràgraf següent de "La Géométrie": *"Por ello estimo haber expuesto cuanto se requiere en un estudio introductorio para realizar el análisis de las curvas, cuando haya desarrollado el procedimiento para trazar líneas rectas que formen ángulos rectos sobre cualesquiera de los puntos de aquellas que se elijan. Me atrevo a afirmar que éste es el problema cuyo conocimiento es más útil y no sólo el más general que yo conozco, sino también el que más he deseado llegar a conocer"*(Descartes 1981, pàg. 316).

Per a Descartes el problema de la normal (o de la tangent) consisteix a trobar un mètode general que li permeti trobar un procediment per dibuixar la normal i la tangent a cada corba en particular. És a dir, Descartes vol arribar a trobar, per a cada corba en particular, procediments de construcció del tipus següent: *"No facilitaré las construcciones en virtud de las que pueden describirse las tangentes o las perpendiculares buscadas, siguiendo el cálculo que acabo de exponer, puesto que son fácilmente calculables, aunque frecuentemente sea necesaria una destreza significada para que se realice de modo simple i breve.*

Ejemplo de la construcción de este problema en la concoide

Así, por ejemplo, si DC es la primera concoide de los antiguos, A es su polo y BH la regla, de tal modo que los segmentos de todas las líneas rectas, como CE y DB, que convergen en A y están comprendidas entre la curva CD y la línea recta BH, son iguales; pensemos que sea requerido hallar la línea CG que la corta en el punto C, formando ángulos rectos; se podría, calculando el punto por donde esta línea CD debe pasar en BH, según el método explicado, aventurarse en un cálculo tanto o más extenso que ninguno de los precedentes. Sin embargo la construcción que debe ser deducida es muy simple. Sólo es preciso tomar CF en la recta CA, siendo igual a CH, que cae perpendicular sobre HB; seguidamente, desde el punto F debe trazarse FG paralela a BA e igual a EA. Por este medio se halla el punto G, por el que debe pasar CG, la línea pedida." (Descartes 1981, pàgs. 324 i 325).

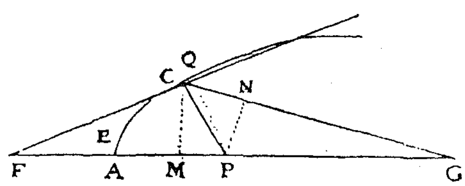


Segons Colette (1985) Descartes va elaborar tres mètodes per calcular les normals (o tangents). El primer és el que exposa en el llibre segon de "La Géométrie" i és el que comentarem a continuació. El darrer mètode expressa el punt de vista actual: la tangent està determinada per una recta que gira al voltant del punt de contacte donat, fins que l'altre punt de tall amb la corba coincideixi amb el primer. En aquesta investigació ens ha interessat el primer punt de vista perquè l'actual ja està incorporat en la manera habitual d'introduir la derivada en un punt.

Encara que Descartes va manifestar un cert interès en el desenvolupament de l'anàlisi no va participar en el seu desenvolupament perquè, d'una banda, els seus treballs matemàtics no eren més que una exemplificació del seu mètode filosòfic i, d'altra banda, perquè va evitar l'ús de mètodes infinitesimals a causa dels riscos que presentaven. Va utilitzar un mètode purament algèbric evitant els conceptes de límit o d'infinitèsim, allunyant-se d'aquesta manera d'un moviment molt important dins de la matemàtica de la seva època. Era conscient que conèixer l'equació de la recta era fonamental per trobar diàmetres, eixos, centres, normals, tangents, etc. Per a Descartes el problema de la normal (o de la tangent) consisteix a trobar un mètode general que li permeti trobar un procediment per dibuixar la normal i la tangent a cada corba en particular. És a dir, Descartes vol arribar a trobar, per a cada corba en particular, procediments de construcció com el de la concoide. El problema del càlcul de la tangent i la normal, tal com l'exposa Descartes, tenia per objectiu trobar un mètode constructiu per poder dibuixar la tangent i la normal (o més exactament la subtangent i la subnormal) a una corba determinada. En "La Géométrie" exposa un mètode general que li permet trobar procediments constructius per poder dibuixar la tangent i la normal a les corbes de les quals coneix l'equació (les que ell ha anomenat geomètriques), il·lustrant aquest mètode amb exemples.

"Procedimiento general para hallar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos

Sea CE la línea curva y que sea preciso trazar por el punto C una línea recta que forme ángulos rectos. Supongo solucionado el problema y que tal línea és CP, la cual prolongo hasta el punto P en el cual alcanza la línea recta GA con la que supongo que se relacionan todos los puntos de la línea CE.



De modo que siendo MA o CB = y, CM o BA = x, puedo establecer una ecuación que indica la relación entre x e y. Se establece que PC = s, PA = v, por lo que PM = v - y; pero en virtud de que el triangulo PMC es un triangulo rectángulo, tenemos que s^2, el cuadrado de la hipotenusa, es igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, la suma de los cuadrados de los dos lados. Es decir, que:

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

o también que: $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$

Mediante esta ecuación puedo eliminar una de las dos cantidades indeterminadas, x o

Si derivem, tenim:

$$- 2\, v f'(x) + 2f(x) f'(x) + f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; - 2\, v + 2f(x) + 1 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; - 2(f(x) + PM) + 2f(x) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; - 2f(x) - 2PM + 2f(x) + 1 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -2PM + 1 = 0 \;\Rightarrow\; PM = ½$$

El fet que la subnormal valgui sempre ½ permet trobar un procediment per dibuixar-la en qualsevol punt. També permet determinar que la subtangent és el doble de l'ordenada, a partir de la semblança dels triangles *TMC* i *PCM*:

$$\frac{TM}{MC} = \frac{MC}{PM}$$
$$\frac{TM}{x} = \frac{x}{1/2}$$
$$TM = 2x^2$$

Aquest últim resultat permet generar un procediment per dibuixar la subtangent en qualsevol punt de la paràbola $f(x) = x^2$.

Nosaltres hem arribat a aquest resultat aplicant la tècnica de la derivació de la composició de funcions, però Descartes no ho podia fer d'aquesta manera. El seu mètode, en el llenguatge actual, consistia a considerar que la circumferència: $v^2 - 2\, v f(x) + (f(x))^2 + f(x) - s^2 = 0$ només talla la corba en un punt quan *CP* és la normal. És a dir, que el polinomi:

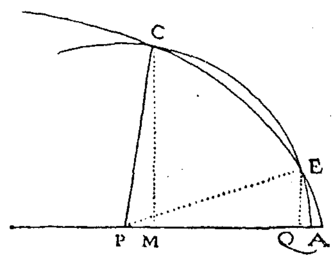
$$v^2 - 2\, v f(x)) + (f(x))^2 + f(x) - s^2$$

té una arrel doble quan *CP* és la normal. Per construcció, *AM* és una arrel d'aquest polinomi. Per tant:

$$(f(x))^2 + (1 - 2\, v) f(x) + v^2 - s^2 = (f(x) - AM)^2$$
$$(f(x))^2 + (1 - 2\, v) f(x) + v^2 - s^2 = (f(x))^2 - 2\, AM f(x) + AM^2$$
$$1 - 2\, v = - 2\, AM$$
$$1 - 2\, v = -2\, (v - PM)$$
$$1/2 = PM$$

Descartes explica així la idea central del seu mètode:

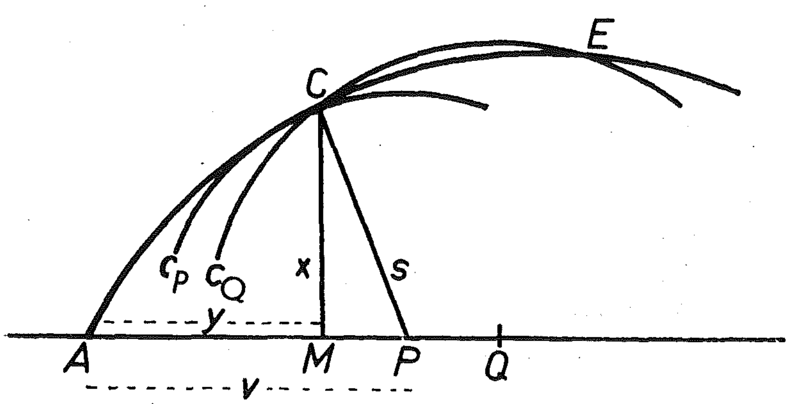
<<A tal efecto, es preciso considerar que si este punto P cumple las condiciones exigidas, el círculo con centro en P y que pasa por C, tocará pero no cortará la curva CE; pero si el punto P se encuentra a mayor o menor distancia de A de lo que debe estar, este círculo cortará la curva no sólo en C, sino también y necesariamente en algún otro punto. Asimismo, es preciso considerar que si este círculo corta la línea curva CE, la ecuación por la que se halla el valor de "x" e "y" o cualquiera otra, suponiendo que conozcamos PA y PC, debe tener necesariamente dos raíces diferentes.



Supóngase, por ejemplo, que el círculo corta la curva en los puntos C y E; trácese EQ paralela a CM; por otra parte vemos que x e y convienen por igual a EQ y a QA del mismo modo que a CM y MA, ya que PE es igual a PC, pues son dos radios. Si buscamos EQ y QA, suponiendo dadas PE y PA, tendremos la misma ecuación que si hubiésemos buscado CM y MA, suponiendo que PC y PA sean dados. Se deduce de ello que el valor de "x", de "y" o de cualquier otra cantidad supuesta debe ser doble, es decir, la ecuación tendrá dos raíces distintas entre sí; si deseamos conocer el valor de "x", una de estas raíces será CM y la otra EQ; si se desea conocer "y", una raíz será MA y la otra QA. Es verdad que si E no se encuentra en el mismo lado de la curva que C, entonces solamente una de ellas será la raíz verdadera y la otra deberá ser opuesta o menor que cero; asimismo, cuanto más próximos se encuentren estos dos puntos, C y E, menor será la diferencia entre estas dos raíces; cuando ambos puntos coincidan serán iguales. Este sería el caso en que el círculo trazado por C toca la curva CE sin llegar a cortarla.

Además debe considerarse que cuando una ecuación tiene dos raíces iguales, necesariamente tiene la misma forma que si se multiplica, por si misma, la cantidad que se supone desconocida menos la cantidad conocida igual a ella; si la expresión o suma resultante no es de grado semejante a la ecuación original, multiplicando ésta por otra expresión con tantas dimensiones como las que le faltan, se logrará que sea del mismo grado. De este modo cada uno de los términos de las dos expresiones se corresponderán término a término.>> (Descartes 1981, pàgs. 319 i 320).

El mètode de Descartes en la notació actual és el següent:

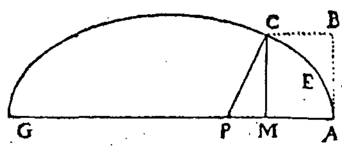


La corba ACE suposarem que ve donada per l'equació $x = f(y)$. C_p és la circumferència que passa per C i té per centre el punt P, o sigui el cercle d'equació $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. Substituint x a l'equació de la circumferència, tenim:

$$f(y)^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0 \qquad (*)$$

$f(y)^2 + (v - y)^2 - s^2$ és un polinomi que té per arrel doble AM si CP és la normal. Descartes arriba a aquesta conclusió a partir del raonament següent: la circumferència C_q, amb centre en un punt Q diferent de P i que passa per C, talla la corba no solament en C sinó que també ho fa en algun altre punt E. Això vol dir que l'equació $f(y)^2 + (v_q - y)^2 - s_q{}^2 = 0$ té dues arrels diferents, però quan els dos punts coincideixin seran iguals. La suposició de Descartes és correcta perquè AM és una arrel del polinomi $f(y)^2 + (v - y)^2 - s^2$ per construcció i si CP és la normal AM també és una arrel del polinomi que resulta de derivar el polinomi anterior: $2f(y)f'(y) - 2(v - y)$ perquè PM és la subnormal i, per tant, $v - y = PM = f(y)f'(y)$, d'on es dedueix que $2f(y)f'(y) - 2(v - y) = 0$. Si AM és la solució d'un polinomi i del que resulta de derivar, llavors és una arrel doble. Descartes aplica aquest mètode en el cas de l'el·lipse: *"Por ejemplo, si CE es una elipse, MA el segmento de su eje, correspondiéndole CM, "r" su lado recto y "q" su eje transversal, entonces mediante el teorema 13 del libro I de Apolonio tenemos que:*

$$x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2 \qquad (*)$$

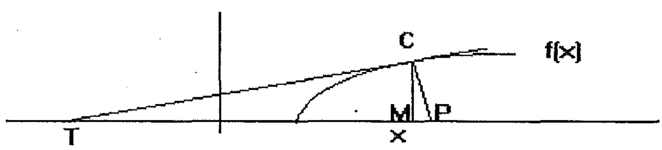


(Descartes 1981, pàg. 317).

Descartes resol el problema de Pappus per quatre rectes i troba que les solucions compleixen una equació de segon grau amb dues incògnites, i que, segons els valors dels coeficients, obtindrà un tipus o un altre de corba. Per saber la classe de corba que li pot aparèixer, fa una classificació de les còniques que li permet afirmar que l'equació (*) és d'una el·lipse.

y , de la otra ecuación, de aquella que expressa la relación de los puntos de la línea curva CE con los de la recta GA. Si x debe ser eliminada puede realizarse fácilmente con sólo sustituir x por $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ *, y x^2 por el cuadrado de esta misma expresión, x^3 por el cubo de la misma expresión, etc...; pero si deseásemos eliminar "y", entonces "y" debería sustituirse por* $v + \sqrt{s^2 - x^2}$ *, así como y^2 , y^3 por el cuadrado o cubo de esta misma expresión, y así sucesivamente. El resultado que llegaremos a obtener sería el de una ecuación con una sola cantidad desconocida, bien "x" o bien "y"".* (Descartes 1981, pàgs. 316 i 317).

En el llenguatge actual la subnormal i la subtangent tenen l'expressió següent:

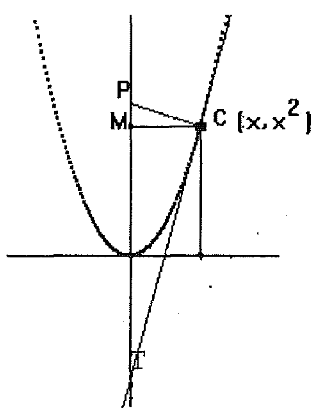


Subtangent = segment TM = $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Subnormal = segment $MP = f(x) \cdot f'(x)$

En la notació de Descartes la subnormal és: segment $PM = v - y$

El que fa Descartes és considerar el sistema format per l'equació que es desprèn d'aplicar el teorema de Pitàgores al triangle PMC i per l'equació de la corba. Per exemple, en el cas de la paràbola $f(x) = x^2$ tenim el sistema format per $(v - f(x))^2 + x^2 = s^2$ i $f(x) = x^2$



$$(v - f(x))^2 + f(x) - s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 - 2\,v f(x) + (f(x))^2 + f(x) - s^2 = 0$$

Considerem l'equació de la circumferència de centre P i radi CP. Si $CP = s$, $CM = x$, $PA = v$ i $MA = y$ obtenim les equacions: $(v - y)^2 + x^2 = s^2$ i $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$

Substituint x queda: $s^2 - (v-y)^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

$$qs^2 - qv^2 + 2qvy - qy^2 - qry + ry^2 = 0$$
$$(r - q)y^2 + (2qv - qr)y + qs^2 - qv^2 = 0$$

Si CP és la normal, aquesta equació té una arrel doble, que és AM. Si $AM = y_0$ tenim:

$$y^2 + \frac{2qv - qr}{r - q}y + \frac{qs^2 - qv^2}{r - q} = (y - y_0)^2$$

$$y^2 + \frac{2qv - qr}{r - q}y + \frac{qs^2 - qv^2}{r - q} = y^2 - 2yy_0 + y_0^2$$

Igualant els coeficients obtenim les següents equacions:

$$\frac{qs^2 - qv^2}{r - q} = y_0^2 \qquad \text{i} \qquad \frac{2qv - qr}{r - q} = -2y_0$$

les quals ens permeten trobar la subnormal:

$2qv - qr = 2y_0 q - 2y_0 r \Rightarrow 2v - r = 2y_0 - 2y_0 r/q \Rightarrow v - y_0 = r/2 - y_0 r/q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Subnormal $= r/2 - AM\, r/q$

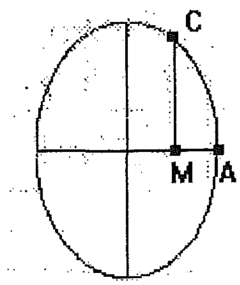
Aquesta caracterització de la subnormal permet trobar un procediment per dibuixar la normal en un punt qualsevol de l'el·lipse, ja que en el principi del primer llibre, Descartes explica com cal fer geomètricament les operacions amb segments. A continuació intentarem fer una simulació del mètode que seguiria Descartes per trobar, a partir d'aquesta expressió, un procediment per dibuixar la normal i la tangent.

Exemple: El següent procediment permet construir la normal a l'el·lipse en qualsevol punt, i consisteix a fer geomètricament les operacions de la igualtat:

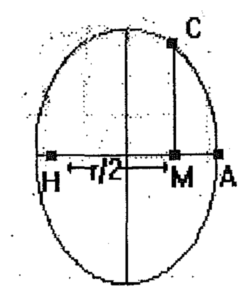
Subnormal $= r/2 - AM\, r/q$

d'acord amb el mètode que el mateix Descartes proposa en el començament del llibre primer de "La Géométrie". El procediment per construir la normal en un punt qualsevol d'una el·lipse consisteix a seguir els passos següents:

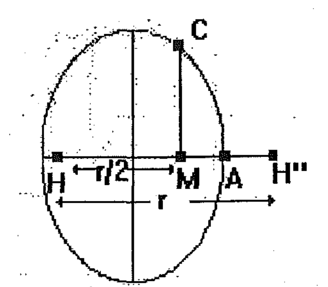
1- Determinar el segment *AM* dibuixant la perpendicular que passa pel punt *C*.

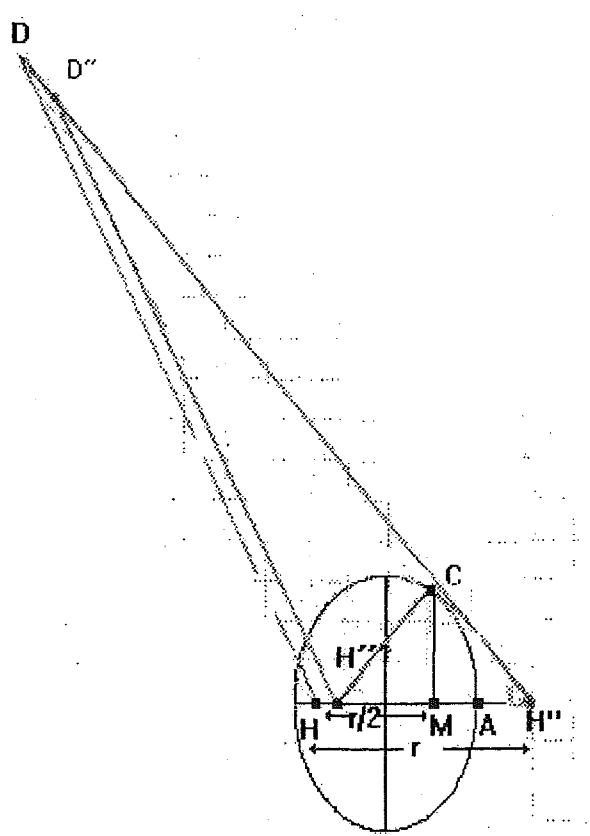


2- Dibuixar un segment de longitud *r*/2 amb extrem el punt *M*



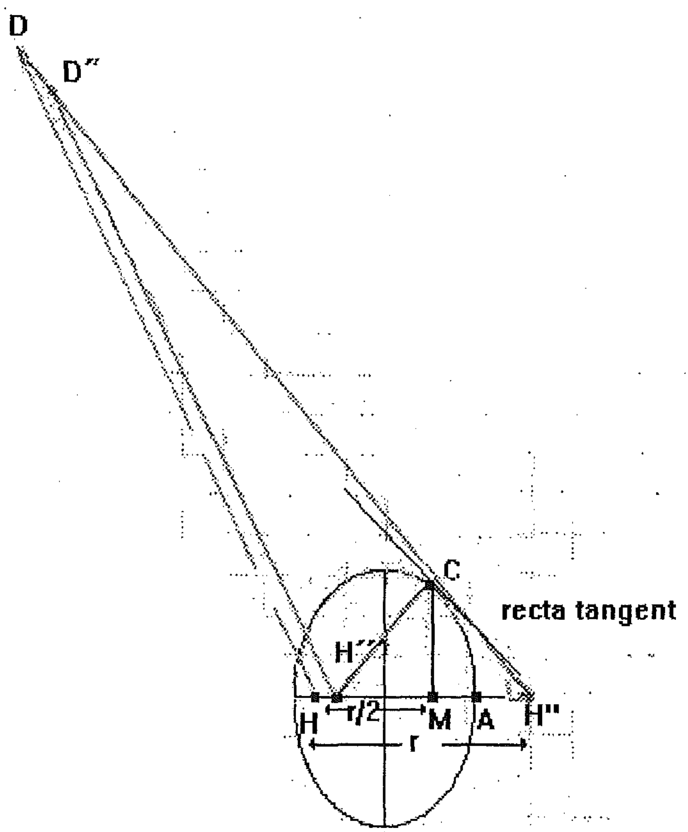
3- Amb origen el punt *H,* dibuixar un segment de longitud *r* d'extrem *H''*



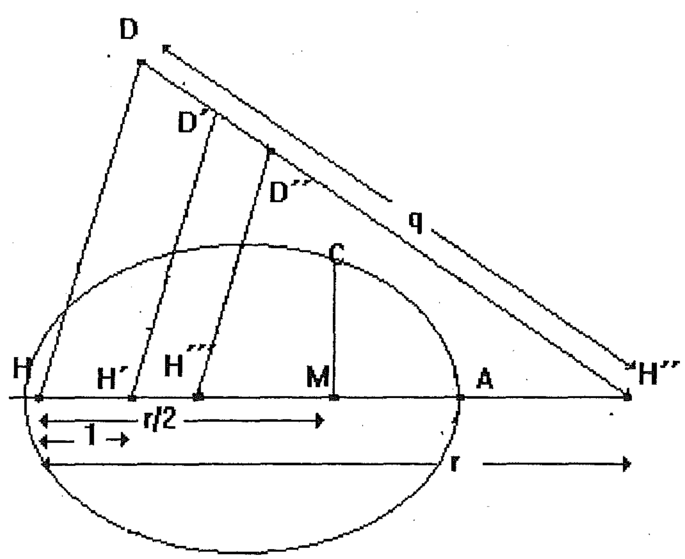


4- Amb origen el punt *H''* dibuixar un segment de longitud *q*, unint el seu extrem *D* amb el punt *H***.** Amb origen *D* dibuixar un segment de longitud igual a *AM* obtenint el punt *D''*. Després, fer una paral.lela a *DH* que passi pel seu extrem *D''* i determini el punt *H'''*.

5 El segment *CH'''* és la normal i *MH'''* és la subnormal. Per trobar la tangent basta dibuixar una perpendicular a *CH'''* que passi per *C*.



Aquest procediment és correcte perquè si considerem el punt *H'* tal que el segment *HH'* és 1 i fem una paral·lela a *DH* que passi per *H'* s'obté el punt *D'* sobre el segment *DH''*



El segment DD' té per longitud q/r perquè:

$$\frac{r}{1} = \frac{q}{DD'} \Rightarrow DD' = \frac{q}{r}$$

El segment HH''' té una longitud igual a $AM\, r/q$ perquè

$$\frac{AM}{\frac{q}{r}} = \frac{HH'''}{1} \Rightarrow HH''' = \frac{AMr}{q}$$

El segment CH''' és la normal perquè $MH''' = \frac{r}{2} - \frac{AMr}{q}$ és la subnormal

4.4.2 La regla de Hudde per trobar subtangents

El mètode de Descartes és aplicable a qualsevol corba algèbrica, però, si l'equació de la corba no és senzilla, el mètode es complica molt a causa dels càlculs que s'han de fer per determinar v i s.

El matemàtic holandès Johann Hudde va trobar un mètode per calcular arrels dobles, que va comunicar a Frans Van Schooten, en una carta que aquest publicà en la seva edició llatina de 1659 de "La Géométrie" de Descartes: *"Si una ecuación tiene dos raices iguales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido serà una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada"* (Andersen 1984, pàg. 32). Hudde va donar una demostració d'aquesta regla que en notació moderna seria:

Sigui $x = x_0$ una arrel doble del polinomi $p(x)$, és a dir:

$$p(x) = (x - x_0)^2 \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x^{i+2} - 2x_0 x^{i+1} + x_0^2 x^i)$$

i sigui $a, a+d, \ldots\ldots, a+(n+2)d$ una progressió aritmètica arbitrària. Multiplicant el terme constant $\alpha_0\, x_0^2$ de $p(x)$ per a, el terme de primer grau per $a+d$, i així successivament, i representant el resultat d'aquesta operació per $(\,p(x)\,,\, a\,,\, d\,)$ tenim:

$$(*) \qquad (p(x),a,d) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \{(a+(i+2)d)x^{i+2} - 2(a+(i+1)d)x_0 x^{i+1} + (a+id)x_0^2 x^i\}$$

Si representem per $p'(x)$ la derivada de $p(x)$ tenim: $(\,p(x)\,,\, a\,,\, d\,) = a\,p(x) + xd\,p'(x)$

per tant, si substituïm x per x_0 en (*) es compleix que $(p(x), a, d) = 0$.

Aquesta condició necessària perquè un polinomi tingui una arrel doble feia més fàcil aplicar el mètode de Descartes, perquè es podia agafar una progressió aritmètica preparada perquè un possible terme complicat quedés multiplicat per zero. De fet, en els treballs de Newton de la tardor de 1664 es pot observar com aquest troba la subnormal d'una corba aplicant una combinació del mètode de Descartes i de la regla de Hudde[18].

L'exemple següent permet il·lustrar la regla de Hudde amb la notació actual:

Sigui $y = x^2$, el sistema format per $(v - f(x))^2 + x^2 = s^2$ i $f(x) = x^2$ ens porta a l'equació:

$$(v - y)^2 + y = s^2$$
$$v^2 - 2vy + y^2 + y - s^2 = 0$$

considerem la progressió aritmètica de terme inicial $a = 0$ i raó $d = 1$

$$(p(y), a, d) = 2y^2 + (1 - 2v)y + 0(v^2 - s^2)$$
$$2y^2 + (1 - 2v)y = 0$$
$$2y + (1 - 2v) = 0$$

$$\text{Subnormal} = v - y = 1/2$$

D'aquesta manera obtenim el mateix valor per a la subnormal que hem obtingut abans aplicant directament el mètode de Descartes.

Hudde va aplicar el seu mètode al càlcul de màxims i mínims, utilitzant la hipòtesi que si en $x = a$ el polinomi $p(x)$ presenta un màxim o un mínim, llavors el polinomi $p(x) - p(a) = 0$ té una arrel doble. Aquest resultat és equivalent a la condició necessària d'extrem relatiu: $p'(a) = 0$. Hudde també va utilitzar la seva regla per formular un mètode general per trobar subtangents en una carta del 21 de novembre de 1659, publicada en 1713, arran de la polèmica entre Newton i Leibniz. Aquest mètode diu que, si tenim una corba d'equació $p(x, y) = 0$, amb p un polinomi en x i y; llavors la subtangent t corresponent a un punt (x, y) ve donada per:

$$t = \frac{-x(p(x,y),a,d)_y}{(p(x,y),a,d)_x}$$

on els subíndexs signifiquen que el numerador s'ha de considerar com un polinomi en y mentre que el denominador com un polinomi en x.

Tenint en compte que $(p(x), a, d) = a\,p(x) + xd\,p'(x)$, l'expressió anterior es converteix en: