VICENÇ FONT MOLL

# PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

************************

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

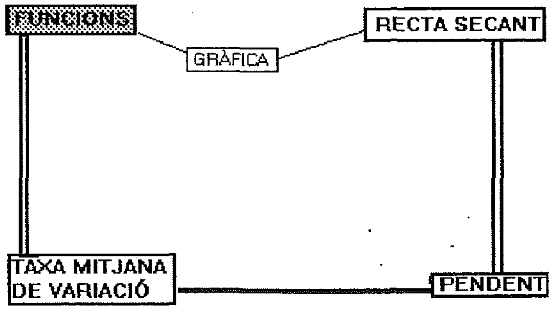
Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

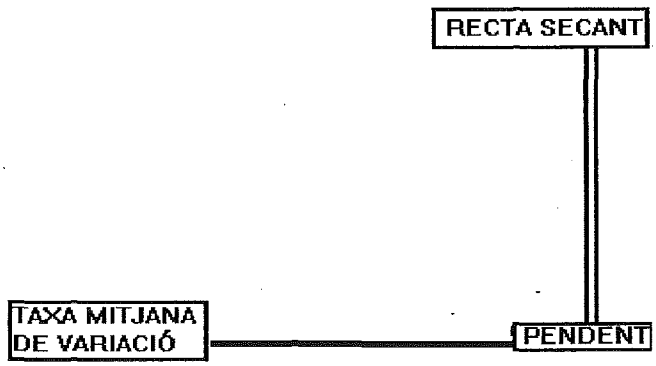
Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

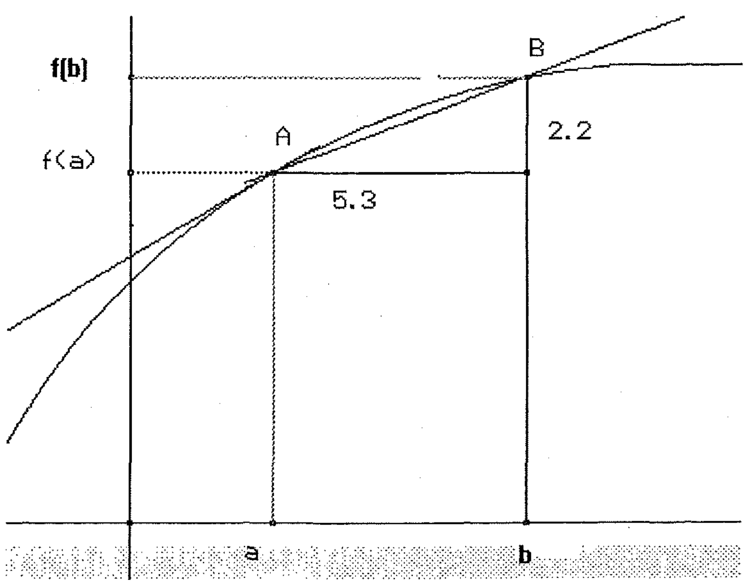



Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit geomètric del concepte de taxa mitjana de variació, podrà activar la següent part d'aquest diagrama:



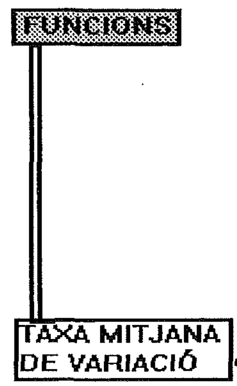

I davant d'un problema del tipus:

*Activitat*: a) La recta secant que passa pel punt $A$ $(a,f(a))$ i $B$ $(b,f(b))$ quin pendent té? b) Quina és la taxa mitjana de variació de la funció $f(x)$ entre $a$ i $b$?



Contestarà l'apartat a) calculant 2,2/5,3. En canvi, per contestar b) no farà cap tipus de càlcul sinó que aplicarà que la taxa mitjana de variació és el pendent de la recta secant i donarà com a resposta el mateix resultat que ha obtingut a l'apartat a).

Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit funcional del concepte de taxa mitjana de variació podrà activar la següent part del diagrama:

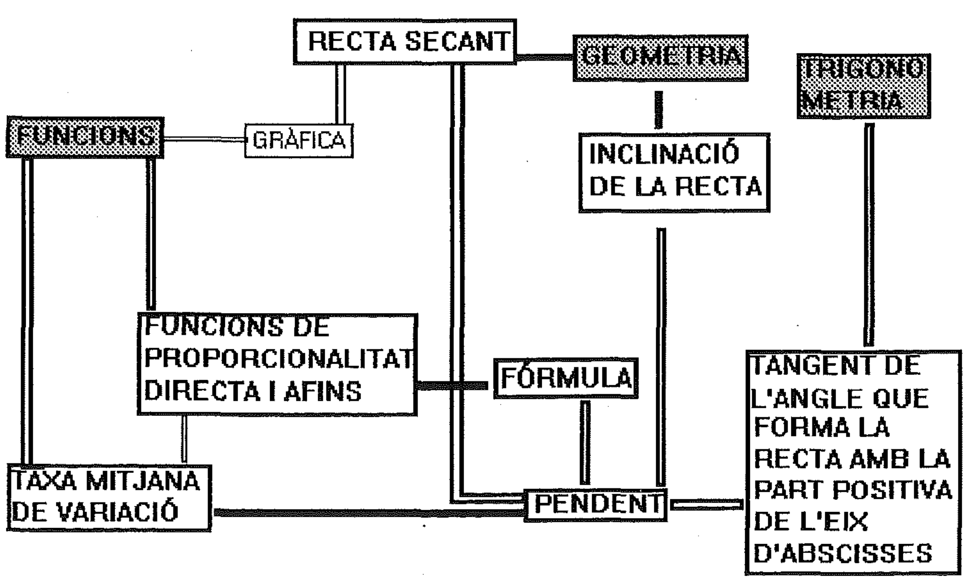



I davant d'un problema del tipus següent:

*Activitat:* Troba la taxa mitjana de variació entre 1 i 5 per a cada una de les funcions següents: $f(x) = x^2$ *i* $g(x) = 2x^2 - 3$.

Calcularà la taxa mitjana de variació a partir de l'expressió $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

La integració òptima dels objectes personals "pendent" i "taxa mitjana de variació" dels alumnes es pot representar pel següent diagrama:



Les diferències entre aquest diagrama i el que hem utilitzat per representar l'objecte personal de pendent i el de taxa mitjana de variació són les següents: 1) s'ha individualitzat dels continguts de geometria el contingut "recta secant", 2) Hi ha una nova connexió entre "funció" i "taxa mitjana de variació" i 3) Hi ha una connexió entre "pendent" i "recta secant". El punt 1 serveix per representar el fet que dels objectes personals previs de geometria de l'alumne se'n destaca un: la recta secant. La connexió entre "funció" i "taxa mitjana de variació" serveix per representar que l'alumne entén que té sentit calcular la taxa mitjana de variació entre dos punts per a qualsevol funció i no solament per a les funcions afins i de proporcionalitat directa. La connexió entre "pendent" i "recta secant" serveix per representar que l'alumne entén que la taxa mitjana de variació és el pendent de la recta secant.

Un objecte personal com el que hem descrit i les seves formes de representació associades produeixen diferents sentits i poden ser activats i utilitzats per les diferents tècniques que permeten calcular la t.m.v. d'una funció entre dos punts. Les tècniques que permeten les representacions anteriors i les traduccions entre elles són, entre d'altres, les següents:

1) Si tenim la fórmula, s'han de buscar les coordenades dels dos punts i calcular

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

2) Si tenim la gràfica, i les coordenades del dos punts són conegudes s'ha de calcular

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

4) Si tenim l'angle que forma la recta secant que amb l'eix d'abscisses, s'ha de calcular la tangent d'aquest angle.

5) Si la funció ve donada per una taula, s'han d'agafar dos punts de la taula i calcular

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

*6.2.3 Significat a priori de l'objecte institucional "velocitat mitjana" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"*

FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: problemes de velocitats mitjanes

SENTITS QUE AGAFA EL CONTINGUT EN ELS DIFERENTS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: físic (velocitat mitjana) i funcional (taxa mitjana de variació)

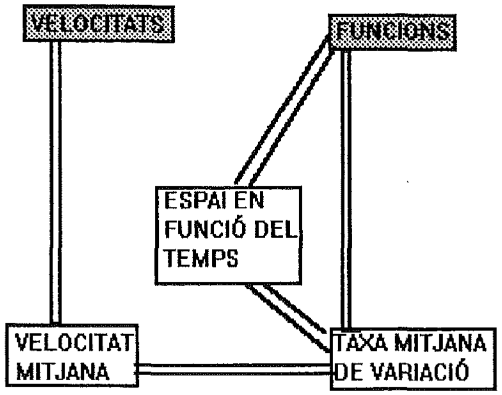
↓

CONTINGUT ORGANITZADOR (EMERGENT): velocitat mitjana

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:

$$v_m(t_1,t_2)= \frac{espai\ recorregut}{temps\ transcorregut} = \frac{d(t_2)\ -\ d(t_1)}{t_2\ -\ t_1} = \frac{f(x_2)\ -\ f(x_1)}{x_2\ -\ x_1} = t.m.v.$$

L'objectiu és aconseguir que l'alumne desenvolupi un objecte personal que es pot representar pel diagrama següent:




Amb aquest diagrama volem representar: 1) que l'alumne té molts coneixements previs sobre velocitats, 2) que entén que la funció que ens dóna l'espai sabent el temps és un cas particular de funció de la qual es pot calcular la taxa mitjana de variació i 3) que, en aquest cas, la taxa mitjana de variació és la velocitat mitjana.

Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit físic de velocitat davant de problemes del tipus següent aplicarà que la velocitat és l'espai recorregut dividit pel temps transcorregut.

$$v_m(t_1,t_2)= \frac{espai\ recorregut}{temps\ transcorregut} = \frac{d(t_2)\ -\ d(t_1)}{t_2\ -\ t_1}$$

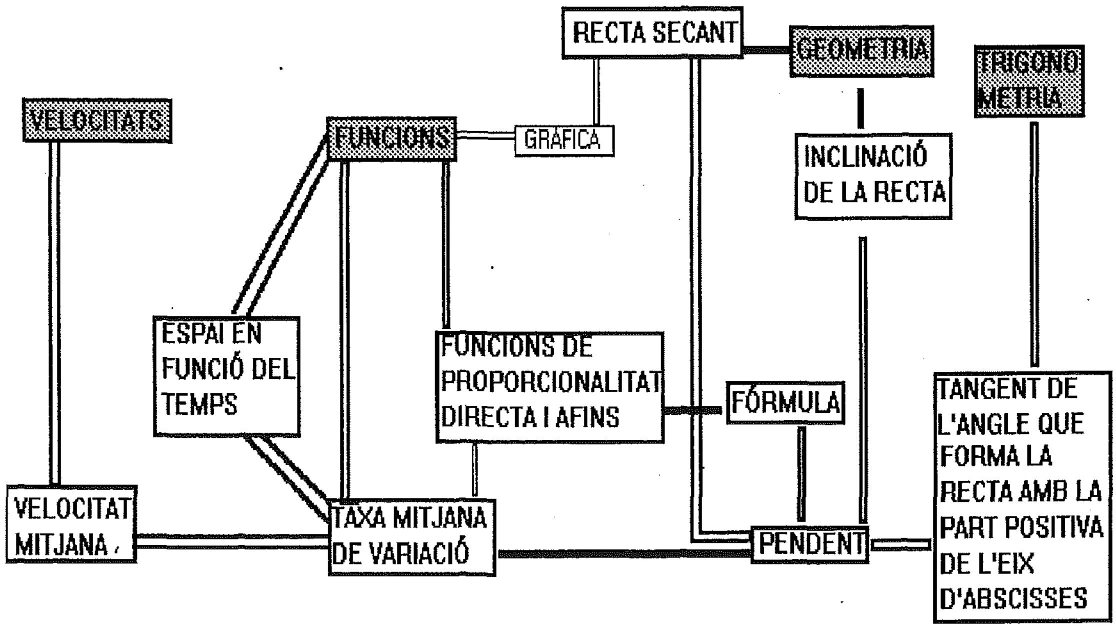
*Activitat*: Sabent que l'espai recorregut (en m) per una pedra que deixem anar des del capdamunt d'un edifici de 272 m en funció del temps (en s) ve donat per la fórmula $d(t)$ $=4,9t^2$, calcula la velocitat mitjana de la pedra entre els instants $t = 4$ s i $t = 6$ s.

Un alumne que pugui resoldre problemes en què hagi d'utilitzar el sentit funcional de velocitat, davant de problemes del tipus següent, no farà cap càlcul nou per contestar l'apartat b) i donarà la mateixa resposta que ha obtingut en l'apartat a)

*Activitat:* Sabent que l'espai recorregut (en m) per una pedra que deixem anar des del capdamunt d'un edifici de 272 m en funció del temps (en s) ve donat per la fórmula

$d(t) = 4{,}9t^2$.
a) Calcula la velocitat mitjana de la pedra entre els instants $t = 4$ s i $t = 6$ s.
b) Calcula la taxa mitjana de variació de la funció $d(t)$ entre 4 i 6.

La integració òptima dels objectes personals "pendent" , "taxa mitjana de variació" i "velocitat mitjana" dels alumnes es pot representar pel següent diagrama:




Les tècniques que permeten calcular la velocitat mitjana són les que hem comentat per a la taxa mitjana de variació.

*6.2.4 Significat a priori de l'objecte institucional "velocitat instantània" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"*

FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: situacions de velocitats instantànies

SENTITS QUE AGAFA EL CONTINGUT EN ELS DIFERENTS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: físic (velocitat instantània) i límit (de velocitats mitjanes)

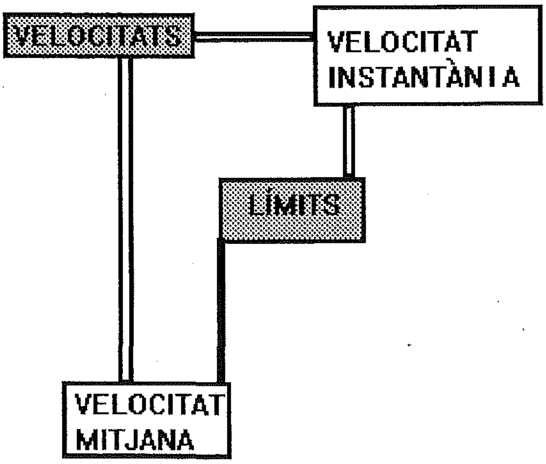
↓

CONTINGUT ORGANITZADOR (EMERGENT): velocitat instantània

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} v_m(t_0,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$

L'objectiu és aconseguir que l'alumne desenvolupi un objecte personal de "velocitat instantània" que es pot representar pel diagrama següent:




Amb aquest diagrama volem representar que l'alumne té molts coneixements previs sobre velocitats -entre ells una idea intuïtiva de velocitat instantània- i límits, i també que entén que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes.

El coneixement intuïtiu del concepte de velocitat instantània que té l'alumne, com a resultat de les seves experiències amb el velocímetre del cotxe li ha de permetre distingir la velocitat instantània de la mitjana i respondre, per exemple, que no a una pregunta del tipus següent:

*Activitat:* En una autopista multen a un conductor perquè va a 150 km/h en un moment determinat. Això vol dir que ha anat a una velocitat mitjana de 150 km/h?

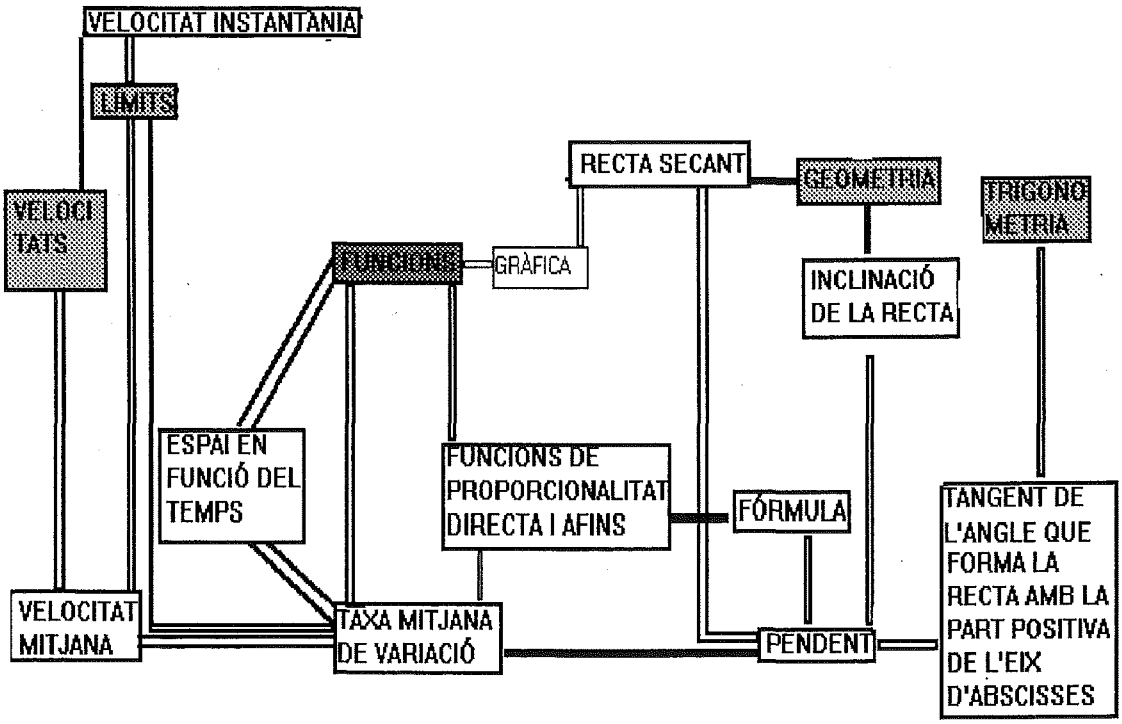
Un alumne que entengui que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes davant de problemes del tipus:

Activitat: Sabent que $d(t) = 5t^2$ troba la velocitat instantània en $t = 3$ .

Trobarà la velocitat instantània calculant

$$v(3) = \lim_{t \to 3} v_m(3,t) = \lim_{t \to 3} \frac{d(t)-d(3)}{t-3} = \lim_{t \to 3} \frac{5t^2-45}{t-3}$$

La integració òptima dels objectes personals "pendent" , "taxa mitjana de variació", "velocitat mitjana" i "velocitat instantània" dels alumnes es pot representar pel següent diagrama




En aquest diagrama cal destacar que, en fer la connexió "velocitat mitjana" amb "taxa mitjana de variació", és possible fer la connexió "taxa mitjana de variació" ⇒ "límits" ⇒ "velocitat instantània", la qual cosa permet entendre la velocitat instantània com un cas particular d'una situació més general: el límit de les taxes mitjanes de variació d'una funció. Aquesta nova interpretació de la velocitat instantània permet fer una generalització extensiva i definir la derivada d'una funció en un punt com el límit de les taxes mitjanes de variació d'una funció.

Un objecte personal com el que hem descrit i les seves formes de representació associades produeixen diferents sentits i poden ser activats i utilitzats per les diferents tècniques que permeten calcular la velocitat instantània. Les tècniques que permeten les representacions anteriors i les traduccions entre elles són, entre d'altres, les següents:

1) Si la funció ve donada per una fórmula, s'ha de calcular:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$

2) Si la funció ve donada per una taula, s'han de calcular les velocitats mitjanes per a instants de temps que s'aproximen a zero i treure conclusions del procés d'aproximació.

*6.2.5 Significat a priori de l'objecte institucional "recta tangent" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"*

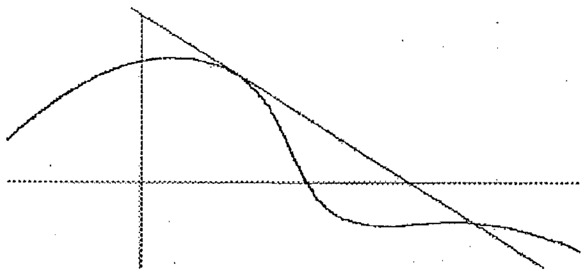
FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: gràfiques amb rectes que passen per un punt de la gràfica

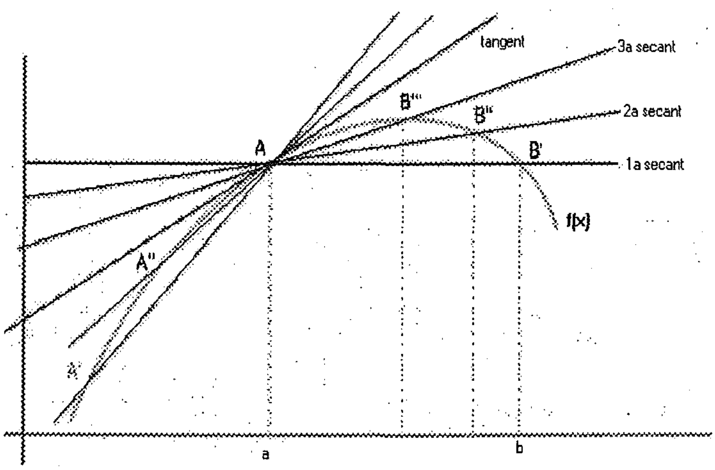
SENTITS QUE AGAFA EL CONTINGUT EN ELS DIFERENTS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: sentit gràfic / aproximació per zoom (la recta tangent és la que més s'aproxima a la gràfica fent un zoom) i sentit límit (la recta tangent és el límit de les rectes secants)

↓

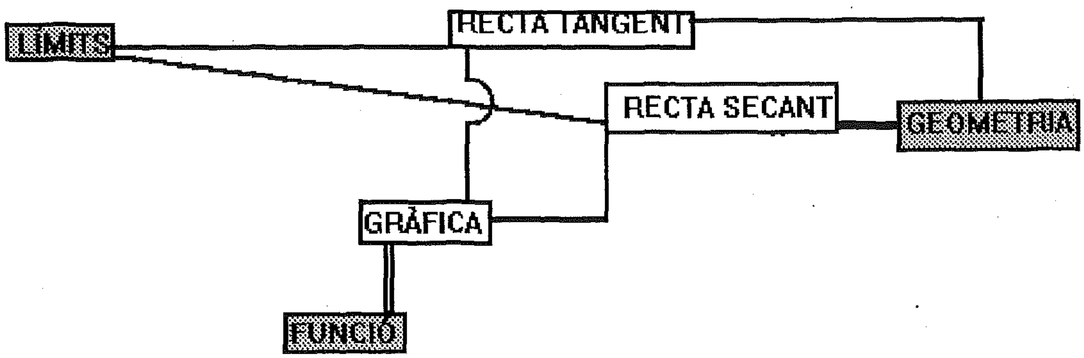
CONTINGUT ORGANITZADOR (EMERGENT): recta tangent

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:





L'objectiu és aconseguir que l'alumne desenvolupi un objecte personal de "recta tangent" que es pot representar pel diagrama següent:




Amb aquest diagrama volem representar que l'alumne té molts coneixements geomètrics previs sobre la recta tangent -entre ells una idea intuïtiva que la recta tangent és la que toca a la corba només en un punt- i límits, i també que entén que la recta tangent és el límit de les rectes secants.

El coneixement intuïtiu del concepte de recta tangent que té l'alumne, com a resultat de les seves experiències amb la geometria de cursos anteriors, s'ha de modificar de manera que entengui que de totes les rectes que passen per un punt de la corba, la recta tangent és la que més s'hi aproxima quan es fa un zoom de la gràfica. D'aquesta manera, davant una gràfica com la penúltima l'alumne reconeixerà que la recta és la recta tangent, malgrat que talla la corba en dos punts. Si l'alumne entén que la recta tangent és el límit de les rectes secants, en una gràfica com l'última, l'alumne hi reconeixerà el procés d'aproximació de les rectes secants a la recta tangent.

*6.2.6 Significat a priori de l'objecte institucional "taxa instantània de variació o derivada d'una funció en un punt" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"*

FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: situacions de velocitats instantànies i gràfiques amb rectes tangents i secants.

SENTITS QUE AGAFA EL CONTINGUT EN ELS DIFERENTS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: sentit funcional general (límit de taxes mitjanes) sentit geomètric (pendent de la recta tangent).

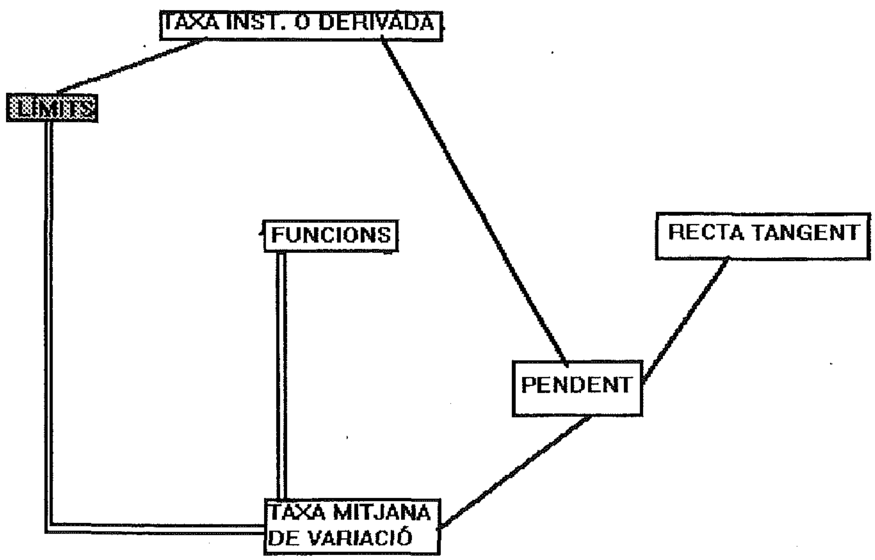
↓

CONTINGUT ORGANITZADOR (EMERGENT): taxa instantània o derivada en un punt.

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{pendent de la recta tangent} = \text{tg}\alpha$$

L'objectiu és aconseguir que l'alumne desenvolupi un objecte personal "taxa instantània de variació o derivada d'una funció en un punt" que es pot representar per l'esquema següent:



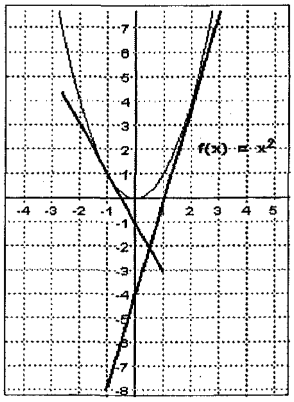

Un alumne que entengui que la derivada en un punt és el límit de les taxes mitjanes davant de problemes del tipus següent, trobarà la derivada calculant

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2-(2^2+2)}{x-2}$$

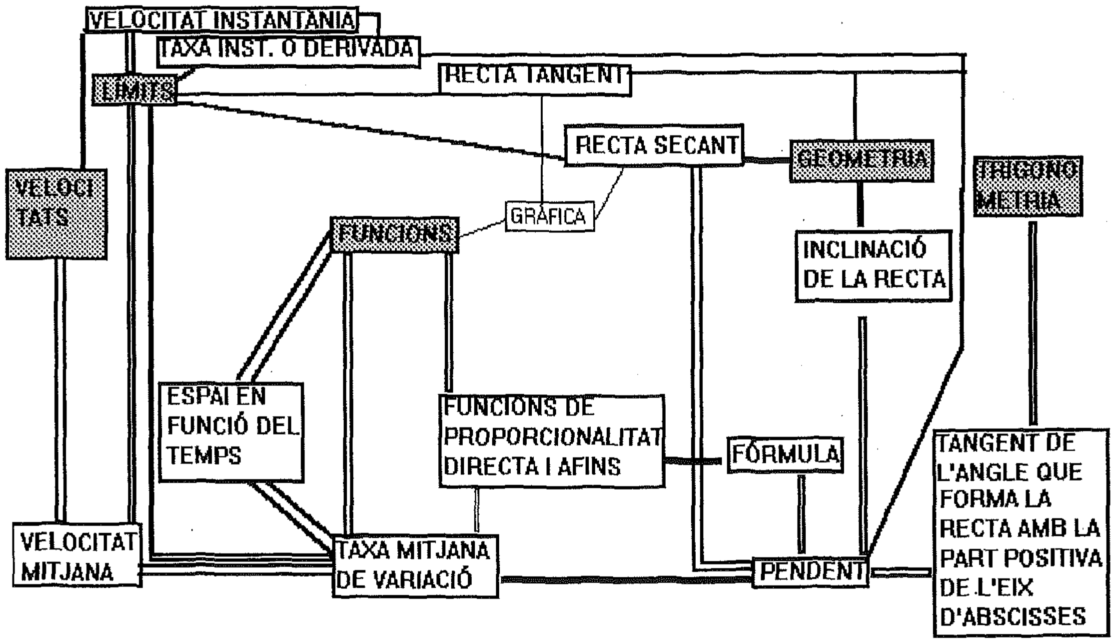
*Activitat:* Donada la funció $f(x) = x^2 + 2$ calcula $f'(2)$.

Un alumne que entengui que la derivada és el pendent de la recta tangent, davant de problemes del tipus següent, respondrà calculant el pendent de la recta tangent en cada punt.

*Activitat:* Donada la funció $y = x^2$ i les rectes tangents a la funció en $x = -1$, $x = 0$ i $x = 2$. Calcula $f'(-1)$, $f'(0)$ i $f'(2)$.



La integració òptima dels objectes personals "pendent" , "taxa mitjana de variació", "velocitat mitjana" , "velocitat instantània" , "recta tangent" i "taxa instantània o derivada en un punt" dels alumnes es pot representar pel següent diagrama:




Un alumne que hagi desenvolupat una integració dels seus objectes personals d'aquest tipus pot respondre correctament a preguntes del tipus següent:

*Activitat:* Utilitzant les expressions següents completa els punts suspensius de la taula següent:
a) Velocitat mitjana  b) Pendent de la recta tangent  c) Derivada de la funció en $x = a$

| *Interpretació física* | *Interpretació matemàtica* | |
|---|---|---|
| | *Interpretació funcional* | *Interpretació geomètrica* |
| $d(t)$ | $f(x)$ | Gràfica de $f(x)$ |
| ........................................ $v_h(t_0)) = \frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ | Taxa mitjana de variació $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ | Pendent de la recta secant |
| Velocitat instantània $v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ | ........................................ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ | ........................... |

Un alumne que hagi desenvolupat una xarxa d'objectes personals com la descrita en l'apartat anterior podrà calcular la derivada en un punt calculant límits o bé, si és possible, calculant el pendent de la recta tangent. És a dir, podrà resoldre les dues activitats descrites en la pàgina 271.

Aquest alumne també pot entendre com trobar aproximadament amb una calculadora la derivada en un punt, ja que pot entendre que, per a un valor $h$ molt petit com $10^{-6}$ o $10^{-7}$, $10^{-8}$, ..... la taxa mitjana de variació $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un valor molt pròxim a $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i que, per tant, per trobar un valor aproximat de $f'(a)$ basta calcular la taxa mitjana de variació pel valor de $h$ escollit, amb $h$ prou petit. Aquest alumne davant una activitat com la següent, calcularà $\dfrac{\ln(2+10^{-4})-\ln 2}{10^{-4}}$ arrodonint amb tres xifres decimals i donarà el resultat obtingut com a valor de $f'(2)$:

*Activitat:* a) Calcula la taxa mitjana de variació de la funció $f(x) = \ln x$ entre 2 i $2+10^{-4}$
b) Calcula un valor aproximat de $f'(2)$ amb tres xifres decimals.

Per tant, un alumne que hagi desenvolupat una xarxa d'objectes personals com la descrita a la pàgina anterior, pot entendre i utilitzar l'esquema següent per calcular $f'(a)$.

| | |
|---|---|
| Com es calcula $f'(a)$ ? | 1 Utilitzant límits<br>Calculant $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ .<br>2 Gràficament<br>Calculant el pendent de la recta tangent<br>3 Aproximadament<br>3.1) Calculant $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$<br>per a un valor de $h$ molt petit<br>3.2) Considerar que<br>$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ |

*6.2.7 Significat a priori de l'objecte institucional "funció derivada" per a un alumne des del punt de vista de la institució escolar "classe de matemàtiques de 3r de BUP / 1r de batxillerat"*

FENÒMENS QUE ES PRESENTEN ALS ALUMNES: problemes de càlcul de derivades en diferents punts

SENTITS EN ELS CONTEXTOS EN QUÈ ES PRESENTEN AQUESTS FENÒMENS: derivada en un punt i imatge de l'abscissa

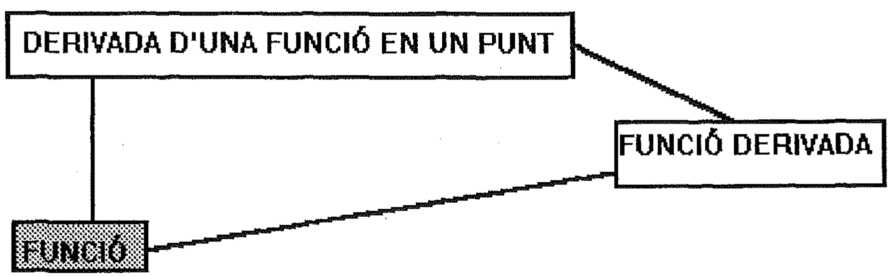
↓

CONCEPTE ORGANITZADOR (EMERGENT): funció derivada.

FORMES DE REPRESENTACIÓ I TRADUCCIONS ENTRE ELLES:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

L'objectiu és aconseguir que l'alumne desenvolupi un objecte personal que es pot representar pel diagrama següent:




Amb aquest diagrama volem representar que l'alumne entén que la funció derivada és una funció que a cada valor de l'abscissa $x$ li fa correspondre la derivada de la funció en el punt d'abscissa $x$ i que davant d'activitats com la següent:

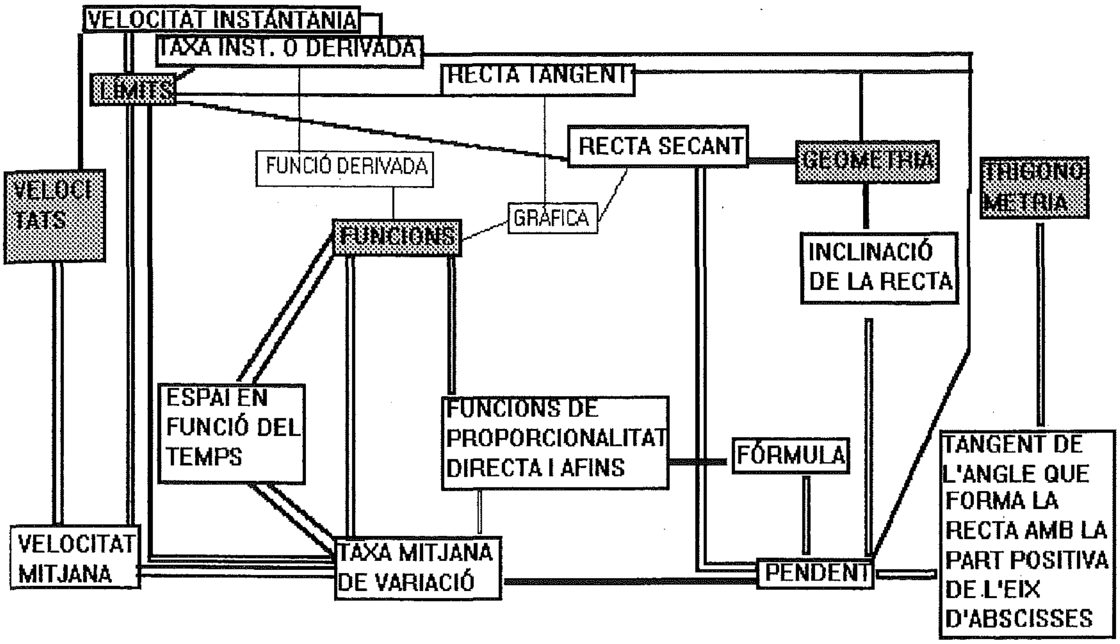
*Activitat:* la taula següent recull els valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| abscissa | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| derivada | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

a) A partir de la taula troba una fórmula que, sabent el valor de l'abscissa, ens permeti calcular la derivada de la funció $f(x) = x^2$ per a aquest valor de l'abscissa.
b) Utilitzant aquesta fórmula, troba $f'(-7)$, $f'(21)$ i $f'(40)$.

Trobarà, a partir dels valors de la taula, la fórmula $y = 2x$ i la utilitzarà per calcular $f'(-7)$, $f'(21)$ i $f'(40)$.

La integració òptima de l'objecte personal "funció derivada" amb tots els objectes personals anteriors es pot representar pel diagrama següent:




Un alumne que hagi integrat d'aquesta manera els seus objectes personals, entendrà que si podem trobar una funció que associa cada abscissa $x$ amb la derivada de la funció en aquest punt, tenim un mètode molt útil per trobar la derivada en un punt perquè basta substituir en aquesta funció $x$ per l'abscissa del punt en el qual volem trobar la derivada. Per tant, serà un alumne que podrà utilitzar l'esquema de la restricció 2 de la pàgina 245 per calcular la derivada en un punt.

Els tres primers procediments d'aquest esquema es poden considerar directes en el sentit que si la pregunta és calcular la derivada en un punt, el que fem és anar a buscar directament $f'(a)$. El quart procediment es pot considerar un procediment indirecte en el sentit que, malgrat que la pregunta és calcular la derivada en un punt, el que fem no és anar a buscar directament $f'(a)$, sinó que busquem primer $f'(x)$ i després calculem $f'(a)$.

L'esquema de la restricció 2 de la pàgina 245 per calcular la derivada en un punt porta a buscar procediments per respondre la pregunta: Com es troba la funció derivada? Nosaltres hem considerat que l'elaboració de la unitat havia de contemplar que la resposta a aquesta pregunta havia de ser l'esquema de la restricció 1 de la pàgina 244. Aquest esquema recull quatre procediments diferents:

1) Utilitzant límits.
2) Gràficament (buscant una condició que compleixen totes les rectes tangents).
3) Aproximadament (utilitzant els graficadors).
4) Indirectament utilitzant les regles de derivació.

Els procediments 1 i 4 són els que habitualment es troben en els llibres de text, mentre que els procediments 2 i 3 són els que permeten calcular la funció derivada a partir de la gràfica de $f(x)$ (procediment 2) i de la gràfica de $f'(x)$ (procediment 3).

En la justificació de la hipòtesi H1.1.1 hem fet una anàlisi de diferents alternatives per calcular la funció derivada de la funció sinus. L'alternativa 2 (pàg. 156) és un exemple del procediment 3, mentre que l'alternativa 5 (pàg. 158) és un exemple del procediment 2.

La integració dels procediments que permeten calcular la derivada en un punt amb els procediments que permeten calcular la funció derivada permet observar una analogia entre els quatre procediments que permeten calcular $f'(a)$ i els quatre que permeten calcular $f'(x)$ i entendre l'esquema de la restricció 3 (pàg. 246).

El significat personal d'un objecte personal com el que hem descrit conté també la tècnica que permet calcular rectes tangents seguint la tècnica següent:

1) Buscar $f'(a)$, que és el pendent $m$ de la recta tangent, de la manera següent:

   1.1 Calcular la funció derivada $f'(x)$.
   1.2 Substituir $x$ per $a$ en la fórmula de la funció derivada.

2) Buscar la segona coordenada del punt de tangència $(a, f(a))$ substituint $x$ per $a$ en la fórmula de la funció.

3) Trobar l'ordenada a l'origen $n$ sabent que la recta tangent passa pel punt de tangència.

## 7 Subobjectiu 2.7 Objectius i continguts de la unitat

### 1 Objectius

- Calcular la taxa mitjana de variació d'una funció i interpretar-la geomètricament.
- Interpretar la derivada d'una funció en un punt com la taxa instantània de variació.
- Interpretar la derivada d'una funció en un punt com el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt.
- Calcular la recta tangent al gràfic d'una funció en un punt.
- Relacionar la derivada d'una funció en un punt amb el creixement i decreixement i els màxims i mínims relatius.
- Comprendre el concepte de funció derivada.
- Calcular les funcions derivades de les polinòmiques, racionals, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques.
- Calcular la derivada de la suma, el producte i el quocient de funcions.

### 2 Coneixements previs

Els coneixements previs necessaris per treballar aquesta unitat són:

1 Continguts treballats a l'ESO

1.1 Pendent d'una recta.

1.2 Continguts vinculats a velocitats mitjanes (càlcul de la velocitat mitjana en un interval de temps en un moviment).

2 Continguts que l'alumnat ha d'haver treballat en les unitats anteriors.

2.3 Emprar diferents tipus d'intervals per representar conjunts de nombres reals.

2.2 Entendre i aplicar amb soltesa el concepte de funció i les seves formes d'expressió. Calcular els dominis i recorreguts corresponents. Distingir, gràficament, entre funcions contínues i discontínues. Interpretar i reconèixer gràficament els conceptes de funció creixent, decreixent, còncava i convexa. Reconèixer i distingir gràficament els màxims i mínims relatius, així com els punts d'inflexió de les funcions. Fer operacions aritmètiques entre funcions i reconèixer-ne les conseqüències gràfiques. Treballar amb funcions definides a trossos.

2.3 Utilitzar identitats notables i simplificar fraccions algèbriques.Uutilitzar taules per descriure les característiques de funcions polinòmiques i racionals. Reconèixer les transformacions elementals: translacions, dilatacions, i reflexions.

2.4 Conèixer les característiques de funcions exponencials i logarítmiques.

2.5 Conèixer les característiques de funcions trigonomètriques.

2.6 Relacionar la tangent trigonomètrica amb el pendent de la recta.

2.7 Calcular el límit d'una funció en un punt. Resoldre les indeterminacions del tipus 0/0.

## 3 Continguts

Conceptes

- Pendent d'una recta.
- Taxa mitjana de variació.
- Interpretació gràfica de la taxa mitjana de variació. Pendent de la recta secant.
- Relació entre la taxa mitjana de variació i la velocitat mitjana.
- Velocitat instantània.
- Derivada d'una funció en un punt.
- Recta tangent.
- Interpretació gràfica de la derivada d'una funció en un punt. Pendent de la recta tangent.
- Relació entre la derivada d'una funció en un punt i la continuïtat en aquest punt.
- Punts en què no existeix la derivada.
- Funció derivada.
- Derivada de les funcions de proporcionalitat directa i de les afins.
- Regles de derivació.
- Derivada de les funcions polinòmiques i racionals.
- Derivada de les funcions exponencials i logarítmiques.
- Derivada de les funcions trigonomètriques.
- Derivada de les funcions $f(x) = x^{n\ \ m}$.

Procediments

- Càlcul del pendent d'una recta a partir de la gràfica.
- Càlcul de la taxa mitjana de variació.
- Càlcul de velocitats mitjanes.
- Càlcul de velocitats instantànies.
- Càlcul de la derivada d'una funció en un punt (límits, calculadora i gràficament).
- Càlcul de l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció en un punt.
- Reconeixement, a partir de la gràfica de la funció, dels punts en què no existeix la derivada.
- Aplicació de la relació entre el signe de la derivada i els intervals de creixement i decreixement de la funció.
- Aplicació de la propietat que en els màxims i mínims la derivada val zero.
- Càlcul de la funció derivada utilitzant límits.
- Càlcul de la funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i de les afins.
- Càlcul de la funció derivada utilitzant les regles de derivació
- Càlcul de la funció derivada de les funcions polinòmiques i racionals
- Càlcul de la funció derivada de les funcions exponencials i logarítmiques
- Càlcul de la funció derivada de les funcions trigonomètriques
- Càlcul de la funció derivada de les funcions $f(x) = x^{n\ \ m}$.

Valors

1. Constatació que vivim en un món caracteritzat per canvis continus. Això fa que el concepte de t.m.v. d'una funció entre dos valors de la variable independent estigui molt present en la vida diària i que les persones l'utilitzin sense adonar-se'n per treure conclusions sobre la variació d'una variable amb respecte a una altra.
2. Interès per l'aplicació del concepte de derivada en contextos no matemàtics (per exemple, vinculats al càlcul de velocitats).
3. Atenció al context històric en el que es va desenvolupar el càlcul diferencial.
4. Interès per les possibilitats que ofereixen l'ordinador i la calculadora per al càlcul de derivades en un punt i de funcions derivades.

## 8 Subobjectiu 2.8: Explicitació dels objectius de les activitats d'ensenyament-aprenentatge

L'explicitació dels objectius de les activitats d'ensenyament-aprenentatge està feta al principi de les diferents seqüències d'activitats documentades en el 3r objectiu, per la qual cosa no les repetirem en aquest apartat.

## 9 Subobjectiu 2.9. Activitats d'avaluació i complementàries

A més de les activitats d'ensenyament-aprenentatge de la unitat, en vam preparar altres de complementàries i d'avaluació per quan féssim la implementació. Van ser dissenyades i experimentades conjuntament amb les de la unitat durant els cursos 95/96 i 96/97 i són documentades en el desenvolupament del 3r objectiu, per la qual cosa aquí ens limitarem a fer-ne un breu comentari.

*Activitats amb ordinador*

Activitats en què s'havien d'utilitzar els programes Cabrigéomètre i Calcula, les quals ja han estat comentades en part en els subobjectius 1.2 , 1.3 i 1.4.

*Activitats de sistematització*

Activitats que tenien per objectiu introduir els esquemes de les restriccions 1, 2 i 3.

*Qüestionaris d'avaluació*

Vam passar un total de 10 qüestionaris sense previ avís. Aquests qüestionaris s'havien de respondre individualment (excepte quan explícitament es deia que es respongués en grup).

*Comentari de les activitats d'avaluació*

Activitats en què es comentaven les respostes dels alumnes als qüestionaris. Aquests comentaris van ser de dos tipus: particulars o bé per a tot el grup.

*Exàmens i comentari dels exàmens*

Activitats d'avaluació habituals en la institució classe de matemàtiques de l'IES Margarida Xirgu. Aquests exàmens s'anunciaven amb força antelació i duraven entre una i dues hores. En total vam passar-ne 3, el tercer dels quals fou de recuperació.

Correcció i comentari dels exàmens a la classe perquè l'alumne fos conscient dels seus errors i pogués reclamar si considerava que l'examen no estava puntuat correctament.

*Treballs voluntaris*

Treballs voluntaris sobre activitats de l'apartat "Per saber-ne més". Només vam encarregar un treball d'aquest tipus.

### 10. Subobjectiu 2.10 : Activitats de la unitat

Les activitats de la unitat estan recollides en l'annex I.

CAPÍTOL V

# TERCER OBJECTIU IMPLEMENTACIÓ DE LA UNITAT

# CAPÍTOL V. TERCER OBJECTIU

## 1 Subobjectiu 3.1: Clarificació del constructe "viabilitat de la implementació"

Nosaltres entenem que la implementació d'una nova proposta d'organització de continguts és viable en una institució escolar de secundària quan es compleixen les dues condicions següents:
1) La proposta es pot implementar en la institució escolar.
2) La nova proposta té possibilitats de substituir l'organització de continguts habitual.

Aquestes dues condicions marquen límits a les possibles investigacions que tenen per objectiu realitzar una nova proposta d'organització matemàtico-didàctica d'un determinat tema. Quan diem que la proposta s'ha de poder implementar en la institució escolar, volem dir que ha de ser una proposta que no es basi en el voluntarisme del professorat sinó que pugui ser implementada per qualsevol professor amb un mínim de professionalitat.

L'anàlisi de la problemàtica que planteja l'ús de les matemàtiques en les distintes institucions, s'ha fet des de l'antropologia cognitiva a partir de la metàfora ecològica (Chevallard 1989, Godino 1993 i Rajoson 1988) . És a dir, les relacions dels objectes matemàtics entre si i amb d'altres camps de coneixement es fa a partir de la comparació amb la problemàtica de l'ecologia, considerada com la disciplina científica que s'interessa per les relacions entre els organismes i els seus entorns passats, presents i futurs. L'anàlisi de l'ecologia institucional d'un saber ens porta a conèixer els seus habitats, o sigui els llocs on es troba, els objectes amb els quals s'associa, és a dir els nínxols ecològics dels sabers matemàtics.

Nosaltres considerem que la metàfora ecològica pot constituir un recurs de gran utilitat per a comprendre la gènesi, el desenvolupament i les funcions dels sabers matemàtics en les institucions humanes i, per tant, l'anàlisi de la viabilitat d'una unitat didàctica que proposa una nova organització de continguts en una institució escolar de secundària, es pot fer utilitzant la metàfora ecològica. Ara bé, nosaltres hem considerat més pertinent la metàfora "zona de desenvolupament pròxim" , (ZDP a partir d'ara) la qual estructura la problemàtica de la viabilitat d'una proposta nova en els termes de la teoria psicològica de Vigotski. L'aplicació d'aquesta metàfora ens ha portat a les conclusions següents:

- Nosaltres considerem que les institucions escolars de secundària permeten determinades organitzacions innovadores d'un tema sempre que aquestes se situïn dintre de la ZDP.

- Aquesta ZDP depèn molt de cada institució i està en funció de la seva organització, evolució històrica, etc. Això vol dir que noves propostes que es poden convertir en habituals en una determinada institució escolar no tenen cap futur en d'altres institucions escolars.

- Malgrat aquesta variabilitat de zones de desenvolupament pròxim, hi ha una sèrie de principis que són força comuns a les institucions escolars de secundària.

- El primer ve determinat per l'examen de selectivitat i es pot formular de la manera següent: la distància entre l'organització habitual i la nova proposta és inversament proporcional al nivell on es proposa. O sigui, com més baix és el curs on se situa la nova proposta, més gran és la distància entre la proposta habitual i la nova proposta que pot acceptar la institució; i com més alt és el curs, més petita és aquesta distància.

- El segon està relacionat amb la resistència al canvi i es pot formular així: la possibilitat de supervivència de la nova proposta és inversament proporcional a la distància que la separa de la proposta habitual. Petites variacions tenen més possibilitat de convertir-se en habituals, mentre que grans variacions corren el perill de desaparèixer més fàcilment.

- El tercer està relacionat amb la tendència a l'oblit dels objectius generals i es pot formular així: les possibilitats de supervivència de la nova proposta són inversament proporcionals a la quantitat d'objectius de tipus general que pretén aconseguir. Això és així perquè objectius de tipus general com són, per exemple, treballar diferents formes de representació i les traduccions entre elles o bé treballar la modelització matemàtica de situacions no matemàtiques, consumeixen un temps que la institució prefereix dedicar a objectius terminals més concrets.

- El quart està relacionat amb la complexitat organitzativa i es pot formular així: les possibilitats de supervivència de la nova proposta són inversament proporcionals a la complexitat organitzativa que implica la nova proposta. Si la nova proposta implica condicionants horaris, aula d'informàtica, sortides, etc té menys possibilitats de supervivència que si no ho fa.

Aquestes conclusions les vam tenir molt presents en el disseny i elaboració de la unitat objecte d'aquesta investigació, ja que vam tenir cura que la proposta d'unitat no sortís fora de la ZDP d'una institució escolar de secundària "normal". També les vam tenir en compte en la implementació de la unitat, ja que vam tenir cura que no sortís fora de la ZDP de l'IES Margarida Xirgu.

## 2 Subobjectiu 3.2: Anàlisi de les restriccions que van afectar la implementació de la unitat

La implementació de la unitat va estar subjecta a tres restriccions importants. La primera fou una restricció imposada, mentre que la segona i la tercera van ser autoimposades.

### 2.1 Restriccions

*Restricció 1*: La implementació es va fer durant el curs 97/98 amb alumnes de 3r de BUP en comptes de fer-se amb alumnes de 1r de batxillerat.

Si bé en la nostra planificació inicial havíem previst desenvolupar la implementació amb grups de 1r del nou Batxillerat, l'endarreriment del calendari inicialment previst per part del Departament d'Ensenyament ens va obligar a fer l'experimentació amb dos cursos de 3r de BUP, un de ciències pures i un de mixt de lletres i de ciències.

*Restricció 2*: La implementació de la unitat s'havia de situar dintre de la ZDP de la institució escolar de secundària Margarida Xirgu.

Aquesta restricció ja fou contemplada en part en l'elaboració de la unitat. Tenir en compte aquesta restricció en el moment de la implementació ens va portar, d'una banda, a plantejar-nos un contracte didàctic que fos assumible per la institució, i, d'altra banda, a formular la restricció tercera.

*Restricció 3*: No incidir en les característiques dels grups que participarien en la implementació de la unitat.

### 2.2 Grups i Professorat implicat

L'experimentació es va fer en el 3*A* i 3*C*, dos dels quatre grups de 3r de BUP de l'IES Margarida Xirgu de L'Hospitalet de Llobregat, en els quals el doctorand impartia l'assignatura de matemàtiques. En l'assignació d'aquests grups no es va incidir, conscientment, per augmentar la fiabilitat i viabilitat de l'experimentació, si exceptuem la petició del doctorand d'impartir un grup mixt lletres/ciències i un grup de ciències de 3r de BUP. És a dir, vam fer l'experimentació amb els dos grups assignats pel Cap d'estudis sense cap tipus d'intervenció del doctorand.

El grup de ciències, el 3*A*, va començar amb 41 alumnes, i el grup mixt de lletres/ciències, el 3*C*, també amb 41. El fet de superar els 40 alumnes i tenir possibilitats de desdoblar un dels dos grups va portar al departament de matemàtiques, d'acord amb l'equip directiu, a desdoblar el grup mixt en dos grups de 20 i 21 alumnes. El fet que el grup mixt tingués dos professors, un dels quals no era el doctorand, obligava a un nivell de coordinació més fort amb aquest segon professor, Eudald Ratera, que no pas amb l'altre professor que impartia classes a l'altre grup de ciències de tercer (3*B*).

## 2.3 Horari i Organització de la classe

Per tal d'augmentar la fiabilitat i la viabilitat de l'experimentació vam optar, de manera conscient, per no incidir sobre l'assignació dels dos grups i acceptar els grups assignats pel Cap d'estudis segons els criteris habituals del centre. El fet de no posar cap condició prèvia va fer que els dos grups assignats fossin força diferents: un grup de ciències (3*A*) molt nombrós en una classe relativament petita i un grup mixt (3*C*) de pocs alumnes en una aula normal. Un altre fet a destacar és que l'horari de grup de ciències no permetia accedir a l'aula d'informàtica mentre que el del grup mixt sí que ho permetia. El doctorand tenia quatre classes de matemàtiques a la setmana amb cada grup, tres d'elles amb tots els alumnes, hores *A*, i una amb la meitat (hora *B*). És a dir, que el professor tenia 4 hores de classe, tres de tipus *A* i una de tipus *B*, mentre que els alumnes tenien 3 hores una setmana i 4 la setmana següent.

L'horari del 3*C* era força bo ja que les tres classes amb els 20 alumnes (hores *A*) eren: dilluns i dijous d'11,30 a 12,30 (després de l'esbarjo) i divendres de 10,30 a 11,30 (abans de l'esbarjo), mentre que la classe amb mig grup era el dimarts de 9 a 10 (2a hora de classe dels alumnes). L'horari del 3*A* no era tan bo, ja que les tres classes amb tot el grup eren: dimarts d'11,30 a 12,30 (després de l'esbarjo), dimecres de 12,30 a 13,30 (última hora de classe) i dijous de 8 a 9 (primera hora de classe) , mentre que la classe amb mig grup era el divendres de 13,30 a 14,30 (última hora de classe del dia i de la setmana).

L'aula del 3*A* era una classe petita, que per les seves dimensions no permetia organitzar grups de treball estables. Per tant, vam decidir acceptar l'organització que tenien normalment a les altres matèries que consistia en pupitres individuals junts, sense cap separació entre ells i amb un passadís al mig que dividia cada fila de pupitres en dues. Aquesta organització dels pupitres permetia que cada alumnes treballés i comentés amb els alumnes que tenia al seu costat, al davant i al darrera.

Una primera conclusió important és que la restricció conscient de no intervenir sobre l'horari i la composició dels grups que participarien en la investigació va portar, com sol passar en una situació escolar normal, a dues situacions organitzatives molt diferents: El 3*C* tenia pocs alumnes, l'aula gran, possibilitat d'accedir a l'aula d'informàtica i millor horari, mentre que el 3*A* era un grup molt nombrós amb una aula petita, sense possibilitat d'accedir a l'aula d'informàtica i amb un horari que no era gaire bo.

## 2.4 Tipologia d'alumnes

L'IES Margarida Xirgu és un centre de secundària situat a L'Hospitalet de Llobregat, una ciutat d'aproximadament 300.000 habitants que forma part del cinturó industrial de Barcelona, per la qual cosa els alumnes eren fills de la immigració dels anys seixanta i setanta. El 3*A* era un grup típic de ciències amb 21 nois i 20 noies, amb 8 repetidors i un alumne amb les matemàtiques de segon suspeses. És a dir, era un grup en què tots els alumnes havien triat com a assignatures optatives matemàtiques, física i química i ciències naturals. A l'inici de curs vaig detectar un bon nivell en general i alguns problemes de disciplina en alguns repetidors. Aquest problema inicial ja estava controlat quan vam començar l'experimentació de la unitat com a resultat de la meva experiència per tractar els temes de disciplina. Des de principi de curs fins a l'inici de l'experimentació es va anar perfilant un problema d'absentisme important en 5 alumnes. 3 d'ells eren repetidors amb un bon nivell de matemàtiques, i practicaven l'absentisme perquè consideraven que s'ho podien permetre ja que creien dominar l'assignatura de matemàtiques. Els altres dos casos d'absentisme tenien causes diferents, un dels dos alumnes era sudamericà amb una problemàtica familiar complicada, mentre que l'altre havia de seguir tractament mèdic. A més d'aquests casos concrets d'absentisme, vaig notar que a la classe del dijous a primera hora i el divendres a última hi havia més absentisme que a les altres dues. Un altre element important en relació a l'absentisme era que quan hi havia examen d'alguna altra assignatura, l'absentisme augmentava força.

El 3*C* era un grup mixt amb 7 nois i 13 noies, amb 3 repetidors i amb tres alumnes amb les matemàtiques de segon suspeses. És a dir, era un grup en què tots els alumnes havien triat com a assignatures optatives matemàtiques i dues assignatures de lletres (literatura castellana, grec o llatí). A l'inici de curs vaig detectar un baix nivell en general i alguns problemes greus de falta de motivació i d'autoestima en relació a les matemàtiques. No vaig detectar problemes de disciplina, però sí que es va anar perfilant un problema d'absentisme, menys important que en el 3*A*, ja que bàsicament es donava els dies que hi havia examen d'alguna altra assignatura.

**2.5 Gestió de l'aula i contracte didàctic**

La gestió del treball a l'aula que vaig realitzar va tenir quatre grans línies d'actuació:
1) Vetllar perquè hi hagués un ambient respectuós entre professor i alumnes i entre els alumnes entre si, que permetés un desenvolupament normal de les sessions de classe.
2) Gestionar el ritme de treball i l'organització dels continguts treballats a l'aula.
3) Dirigir el procés de construcció de significat dels alumnes.
4) Avaluar el procés de construcció de significat dels alumnes.

El primer punt era bàsic per assegurar els altres. En aquest aspecte no hi va haver cap problema. Els alumnes van tenir clar de seguida que jo no permetria actuacions que impedissin el bon funcionament de l'aula i, per tant, la implementació de la unitat es va desenvolupar en un bon ambient de classe.

Si bé el segon punt estava determinat en bona part per la selecció a priori de les activitats de la unitat, s'havia de marcar un ritme de treball, encarregar activitats per l'endemà, explicar determinades activitats, fer esquemes per organitzar els continguts, utilitzar l'ordinador, posar dates d'examen, posar noves activitats, etc.

El tercer aspecte és l'altra cara de la moneda de la gestió del ritme de treball i de l'organització dels continguts treballats a l'aula, ja que aquests no es poden separar de les actuacions dirigides a encaminar el procés de construcció de significats com, per exemple, interpretar les produccions a l'aula dels alumnes, les cares que posaven, les preguntes que feien o bé la falta de preguntes, les dificultats que podien tenir, etc., fer explicacions individuals o bé a tot el grup, animar a determinats alumnes, etc.

El quart punt també està molt relacionat amb els dos punts anteriors però presenta una certa autonomia en relació a ells. Vam plantejar l'avaluació de dues maneres diferents: 1) l'avaluació encaminada a posar una nota i 2) l'avaluació que no tenia incidència sobre la nota. El primer tipus d'avaluació era el normal en la institució classe de matemàtiques de l'IES Margarida Xirgu i consistia a fer la mitjana dels exàmens realitzats. Aquests exàmens s'anunciaven amb força antelació i eren corregits a la classe perquè l'alumne fos conscient dels seus errors i pogués reclamar si considerava que l'examen no estava puntuat correctament. Aquesta nota mitjana podia pujar en funció de l'actitud a classe i de la presentació del quadern, però la mitjana no podia baixar en funció de l'actitud o de la falta d'assistència a classe perquè la sanció d'aquests tipus d'actituds era facultat del tutor i del consell escolar. És a dir, el professor podia expulsar un alumne de l'aula pel seu comportament i passava les faltes al tutor, però l'expulsió no podia baixar la nota i la justificació de les faltes depenia del tutor. Aquest tipus de contracte escolar permetia, per exemple, l'absentisme dels alumnes els dies que tenien exàmens d'altres assignatures. El segon tipus d'avaluació no era normal en el contracte didàctic que regia l'avaluació en la institució classe de matemàtiques de l'IES Margarida Xirgu. Aquest tipus d'avaluació va consistir en les normes següents:
1) El professor podia passar un qüestionari sense cap avís previ.
2) Aquest qüestionari s'havia de respondre individualment (excepte quan explícitament es deia que es respongués en grup).
3) L'alumne havia d'intentar respondre les preguntes del qüestionari perquè els resultats eren importants de cara a prendre decisions sobre la marxa del grup- classe. Per exemple, segons els resultats caldria repassar algun tema de cursos anteriors.
4) Les seves respostes al qüestionari no tindrien cap influència sobre la nota individual per tal que les respostes reflectissin allò que realment sabien i per tant, tinguessin clar que en aquest cas no tenia cap sentit intentar copiar.

La gestió de la classe corresponia al contracte habitual en la institució classe de matemàtiques de l'IES Margarida Xirgu si exceptuem la novetat dels qüestionaris que s'havien de contestar sense cap avís previ. Si bé aquests qüestionaris representaven una novetat respecte al contracte didàctic habitual, era una novetat perfectament assumible per la institució classe de matemàtiques de l'IES Margarida Xirgu. Algunes de les preguntes d'aquests qüestionaris tenen un cert paral·lelisme amb allò que en la teoria de situacions es coneix com la devolució d'una situació a-didàctica a l'alumne. És a dir, són activitats en què l'alumne ha d'actuar, reflexionar i respondre comptant únicament amb ell mateix, sense cap intervenció del professor, ja que des que l'alumne accepta el problema com a seu fins al moment de la resposta no hi ha cap intervenció del professor i en alguns casos el coneixement que ha de construir l'alumne per respondre és un coneixement nou, o bé ha d'utilitzar un coneixement que no és nou en un context que sí que ho és.

El contracte didàctic explícit es pot resumir en les obligacions següents:

Alumnes:

- Assistir a classe.
- Portar el material (dossier d'activitats, quadern, etc).
- Intentar fer les activitats sols o bé conjuntament amb els companys que tenen al seu voltant.
- Intentar fer les activitats encomanades d'un dia per l'altre.
- Elaborar un quadern amb les respostes de les activitats i presentar-se als exàmens.
- Sortir a la pissarra quan el professor ho indiqui.
- Intentar contestar les preguntes dels qüestionaris.
- Tenir un comportament respectuós envers el professor i els seus companys.

Professor

- Facilitar als alumnes fotocòpies de la unitat "Introducció a les derivades" .
- Tenir un comportament respectuós envers els alumnes.
- Encarregar les activitats que s'han de fer, tant a l'aula com fora de l'aula.
- Contestar les preguntes i aclarir els dubtes dels alumnes.
- Gestionar l'aula: decidir quan cal o es pot preguntar, el temps dedicat a cada activitat, quan convé fer una explicació general, etc.
- Planificar amb temps la data dels exàmens i corregir-los a l'aula explicitant les puntuacions i els criteris de correcció.
- Posar uns exàmens adequats als continguts treballats.
- Portar el control de faltes d'assistència.
- Passar qüestionaris quan ho cregui convenient i sense previ avís.

El control d'algunes d'aquestes activitats no sempre era del tot efectiu. Per exemple, l'alumne podia faltar a classe amb força freqüència perquè el control de faltes i la justificació estava en mans del tutor i del Consell Escolar i no del professor. Igualment, si no feia les activitats encomanades d'un dia per l'altre això no tenia incidència negativa en la nota, etc.

Si bé inicialment volíem presentar els resultats de la implantació en els dos grups, finalment vam decidir restringir la crònica de la implementació només al 3*A* (grup de ciències pures). El motiu principal fou la gran quantitat de produccions i de gravacions que s'havien d'analitzar (cap a 800 produccions d'alumnes, algunes de més d'una pàgina, i unes 60 hores de gravació). Vam optar per descriure la implementació del grup més nombrós. Per referir-nos als alumnes del 3*A* utilitzarem el nom i la inicial del primer cognom de la llista següent:

Llista d'alumnes del 3*A*

| Nº | Nom | Observacions |
|---|---|---|
| 1 | Jordi A | |
| 2 | Laura A | Repetia curs |
| 3 | Alex A | Repetia curs |
| 4 | Victor B | |
| 5 | Raúl B | |
| 6 | Albert C | |
| 7 | Jessica C | |
| 8 | Alberto C | Repetia curs (va ser alumne meu) |
| 9 | Raúl C | |
| 10 | Jordi C | |
| 11 | Mike D | |
| 12 | Alfonso D | |
| 13 | Sandra D | |
| 14 | Esther E | |
| 15 | Patricia F | |
| 16 | Javier F | Tenia les matemàtiques de 2n pendents |
| 17 | Raquel G | |
| 18 | Jaime G | |
| 19 | David G | |
| 20 | Pilar G | |
| 21 | Isabel G | |
| 22 | Sergio G | |
| 23 | Toni G | |
| 24 | Anna G | Repetia curs (va ser alumna meva) |
| 25 | Elia G | |

| | | |
|---|---|---|
| 26 | Elisabeth G | |
| 27 | Luis J G | |
| 28 | Ester G | Repetia curs (va ser alumna meva) |
| 29 | Jordi L | Repetia curs |
| 30 | Angela L | Repetia curs |
| 31 | David M | Repetia curs |
| 32 | Alicia M | |
| 33 | Alfonso M | |
| 34 | Laura N | |
| 35 | Judith P | |
| 36 | Rocio P | |
| 37 | Eva P | |
| 38 | David R | |
| 39 | Oscar T (Humberto R) | L'alumne Humberto R es va canviar per Oscar T el 4-10-97 |
| 40 | Maria L V | |
| 41 | Silvia V | |

- Per distingir els alumnes 6 i 8 utilitzarem el nom en català per a l'alumne 6 i el nom en castellà per a l'alumne 8.
- Els tres repetidors que em van tenir a mi de professor el curs 96-97 ja havien treballat el curs passat la unitat i quasi tots els qüestionaris d'avaluació.
- Una d'aquests tres alumnes repetidors, Ester G, es va donar de baixa mentre estàvem fent la implementació de la unitat, amb la qual cosa el grup va passar de 41 alumnes a 40.

## 3 Subobjectiu 3.3: Concreció dels ítems a analitzar al llarg de la implementació

En aquest subobjectiu concretem els ítems que vam analitzar al llarg de la implementació. L'anàlisi es va realitzar de la manera que es fa en una classe normal, és a dir, mitjançant qüestionaris, preguntes, exàmens, observació de les expressions facials dels alumnes, impressions subjectives del professor, etc.

### 3.1. De la unitat anterior

(Límits i continuïtat de funcions)

1 Determinar les dificultats relacionades amb el tema de continuïtat i límit de funcions.

### 3.2 Abans de començar la unitat

(Coneixement previ del contingut funció)

Determinar si són capaços de:

2 Distingir la gràfica d'una funció d'una que no ho és.
3 Buscar imatges d'un valor de l'abscissa utilitzant la gràfica de la funció.
4 Reconèixer els punts d'una gràfica d'una funció $f(x)$ com els punts $(x, f(x))$.
5 Interpretar correctament el símbol $f(x)$.
6 Utilitzar la fórmula d'una funció per buscar la imatge d'un nombre.
7 Utilitzar la fórmula d'una funció per buscar la imatge d'una lletra.
8 Donada la fórmula d'una funció com per exemple $f(x)=x^2$, considerar els punts de la gràfica com els punts $(x, x^2)$.

(Coneixement previ de les funcions elementals)

9 Reconèixer una funció afí a partir de la seva gràfica.
10 Trobar la fórmula d'una funció afí a partir de la seva gràfica.
11 Reconèixer les funcions quadràtiques a partir de la seva gràfica.
12 Trobar la fórmula d'una funció quadràtica molt senzilla a partir de la seva gràfica.
13 Reconèixer una funció exponencial a partir de la seva gràfica.
14 Trobar la fórmula d'una funció exponencial senzilla, com per exemple $f(x)=2^x$, a partir de la seva gràfica.
15 Reconèixer les funcions trigonomètriques.
16 Associar gràfiques amb fórmules.

### 3.3 Al llarg de la unitat

Esbrinar si els alumnes, com a resultat del procés d'instrucció, són capaços de:

(Pendent)

17 Reconèixer que el pendent determina la inclinació de la recta.
18 Reconèixer que el pendent és el nombre $a$ de la fórmula $f(x) = ax + b$.
19 Reconèixer que el pendent és la tangent trigonomètrica de l'angle que forma la recta amb la part positiva de l'eix d'abscisses.
20 Reconèixer el significat funcional del pendent:

$$pendent = a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{variació \;\; vertical}{variació \;\; horitzontal}$$

és a dir, si sap que el pendent ens dóna, per cada unitat horitzontal desplaçada cap a la dreta, el nombre d'unitats que cal desplaçar-se en vertical per tornar a la recta (amb signe + si va cap amunt i signe - si va cap avall).
21 Calcular el pendent d'una recta a partir de la seva gràfica.

(Taxa mitjana de variació)

22 Construir el concepte de taxa mitjana de variació a partir del concepte de pendent d'una recta.
23 Entendre que la taxa mitjana de variació no varia al llarg d'una recta i sí que ho fa al llarg d'una corba.
24 Entendre la interpretació geomètrica de la taxa mitjana de variació.
25 Adonar-se que el concepte de taxa mitjana de variació d'una funció entre dos valors de la variable independent està molt present en la vida diària de les persones.

(Velocitat)

26 Entendre la velocitat mitjana com un cas particular de taxa mitjana de variació.
27 Entendre el concepte de velocitat instantània com el límit de les velocitats mitjanes.

(Derivada d'una funció en un punt)

28 Entendre la definició de derivada en un punt com la generalització de la definició de velocitat instantània a una funció qualsevol, és a dir, d'entendre la definició de la derivada d'una funció en un punt com el límit de les taxes mitjanes de variació.

(Recta tangent)

29 Entendre la recta tangent com la que més s'aproxima a la corba en les proximitats del punt, i reconèixer una recta tangent encara que toqui a la corba en més d'un punt.
30 Entendre que si amb un ordinador fem un zoom adequat, una corba i la seva recta tangent coincidiran en les proximitats del punt.
31 Entendre la recta tangent com la recta a la qual s'aproximen les secants.

(Significat geomètric de la derivada d'una funció en un punt)

32 Entendre que el pendent de la recta tangent és el nombre al qual s'aproximen els pendents de les rectes secants.
33 Relacionar el pendent de la recta tangent i el concepte de derivada de la funció en un punt.
34 Entendre la nova notació de la derivada.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

35 Relacionar les següents interpretacions de la derivada d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$: velocitat instantània, derivada de la funció en un punt i pendent de la recta tangent.

(Càlcul de la derivada d'una funció en un punt)

36 Calcular la derivada d'una funció a partir de l'expressió

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

37 Entendre que per a un valor $h$ molt petit, com $10^{-6}$ o $10^{-7}$, $10^{-8}$, ..... la taxa mitjana de variació $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un valor molt pròxim a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ i, per tant, per trobar un valor aproximat de $f'(a)$

basta calcular la taxa mitjana de variació per al valor de $h$ escollit, amb $h$ prou petit. Han de ser capaços també d'utilitzar-lo per fer el càlcul aproximat de la derivada d'una funció en $x = a$ emprant la calculadora.
38 Calcular $f'(a)$ quan la recta tangent en un punt està dibuixada, tenint en compte que és el pendent de la recta tangent.
39 Entendre que $f'(a)$ es pot calcular per tres mètodes diferents: utilitzant límits,

partint de la recta tangent o bé utilitzant el quocient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ amb $h$ prou petit, per obtenir-ne només un resultat aproximat.

40 Entendre que una funció discontínua no té derivada.

41 Entendre que en els punts en què la gràfica té forma de punxa no existeix la derivada.

42 Entendre que en els punts en què la gràfica té forma de punxa, aquesta es manté en fer zooms, mentre que en els punts en què existeix la derivada, en fer zooms, la corba arriba a tenir forma de recta.

(Relació entre el signe de la derivada i la gràfica de la funció)

43 Relacionar la idea intuïtiva de pendent d'una corba en un punt i la de pendent de la recta tangent en aquest punt.

44 Relacionar el signe de la derivada i la gràfica de la funció, entenent que: 1) Si en tots els punts $c$ d'un interval $(a,b)$ la derivada d'una funció és positiva ($f'(c) > 0$), la funció és creixent en aquest interval. 2) Si en tots els punts $c$ d'un interval $(a,b)$ la derivada d'una funció és negativa ($f'(c) < 0$), la funció és decreixent en aquest interval. 3) En els màxims i mínims relatius la derivada val zero, però no tots els punts en què la derivada val zero són màxims o mínims.

(Funció derivada)

45 Entendre, a partir d'una taula amb els valors de les derivades de la funció $f(x) = x^2$ per a diferents punts, que per a la funció $f(x) = x^2$, la funció $y = 2x$ és una funció que associa cada abscissa $x$ amb la derivada de la funció en aquest punt, i que pot utilitzar-la per calcular la derivada en diferents punts.

46 Entendre els avantatges que presenta la utilització de la funció derivada per calcular la derivada d'una funció en un punt.

47 Entendre que aquesta funció s'anomena funció derivada de $f(x)$ i es representa per $f'(x)$.

48 Distingir entre la derivada d'una funció en un punt i la funció derivada.

49 Utilitzar la funció derivada, fins i tot abans de conèixer-ne la definició formal, per trobar un punt de la funció $f(x)$ en què la derivada pren un valor determinat o bé per trobar el pendent de la recta tangent.

50 Entendre que $f'(a)$ es pot calcular directament per tres mètodes diferents: utilitzant límits, a partir de la recta tangent o aproximadament utilitzant el quocient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ amb $h$ prou petit. I indirectament a partir de substituir en la funció derivada $x$ per $a$.

51 Entendre que la funció derivada és $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(Càlcul de la funció derivada)

52 Calcular la funció derivada d'una funció a partir de l'expressió $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

53 Entendre que el càlcul de la funció derivada a partir del límit $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pot resultar molt dificultós per a determinades funcions i que, per tant, és convenient disposar d'altres mètodes alternatius que facilitin el càlcul de la funció derivada.

(Càlcul de la funció derivada de les funcions de proporcionalitat i de les funcions afins)

54 Entendre que les funcions afins compleixen la propietat següent: que la recta tangent en qualsevol punt és la mateixa funció, i que, per tant, el pendent de totes les rectes tangents sempre és $a$, la qual cosa implica que $f'(x) = a$

55 Arribar a aquest mateix resultat calculant el límit.

(Càlcul de les regles de derivació)

56 Entendre que hi ha unes regles de derivació que faciliten el càlcul de la funció derivada.

57 Seguir un raonament que demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que $(cf)'(x) = cf'(x)$.

58 Seguir un raonament que demostra, utilitzant la definició de funció derivada, que la funció derivada de la funció suma és la suma de les funcions derivades: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. I que el mateix raonament permet demostrar, canviant el signe + pel signe -, que la derivada d'una diferència de funcions és la diferència de les funcions derivades.

59 Acceptar, sense cap demostració, que la funció derivada del producte de dues funcions és: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$.
I que la fórmula de la derivada d'un quocient és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

60 Superar l'error típic de calcular la derivada d'un producte fent el producte de derivades, i la derivada d'un quocient fent el quocient de derivades.

(Derivada de les funcions polinòmiques i de les funcions racionals)

61 Entendre que la funció derivada de $f(x) = x^n$ és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$, a partir de la transformació de la fórmula de $f(x) = x^n$ i d'una generalització.

62 Calcular la funció derivada de les funcions polinòmiques i de les funcions racionals.

63 Entendre que la funció derivada de les funcions polinòmiques i de les funcions racionals es pot calcular utilitzant les regles de derivació.

(Derivada de les funcions exponencials i logarítmiques)

64 Entendre que totes les rectes tangents a la funció $f(x) = e^x$ presenten una determinada propietat (totes les subtangents valen 1).

65 Calcular $f'(a)$ gràficament, partint de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(a) = e^a/1 = e^a$. I observar si l'alumnat entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = e^x$.

66 Entendre que la funció $f(x) = \ln x$ és la inversa de la funció $g(x) = e^x$, i que la propietat que la subtangent sempre val 1 es trasllada a la funció logarítmica de la manera que indica la figura de l'activitat 50. És a dir, que totes les tangents a la funció $f(x)=\ln x$ compleixen una determinada propietat pel fet que totes les tangents a la funció $g(x) = e^x$ compleixen que la subtangent sempre val 1.

67 Entendre que les funcions exponencials i logarítmiques són inverses l'una de l'altra i quina relació hi ha entre les seves gràfiques.

68 Calcular, per a la funció $f(x) = \ln x$, $f'(a)$, partint de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(a) = 1/a$. I observar si l'alumnat entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = 1/x$.

69 Determinar si l'alumnat pot calcular la derivada de la funció $f(x) = \log_a x$, a partir de la transformació de la fórmula, mitjançant el canvi de base i aplicant les regles de derivació.

70 Entendre que una de les propietats de la funció exponencial de base $a$ és que, per a qualsevol punt del gràfic de la funció, la subtangent sempre val el mateix nombre $k$.

71 Calcular $f'(c)$ gràficament, a partir de la interpretació que la derivada és el pendent de la recta tangent: $f'(c) = a^c/k$. I observar si l'alumnat entén que el raonament que ha seguit és vàlid per a qualsevol valor de l'abscissa, i que per tant: $f'(x) = a^x/k$.

72 Entendre que, per poder tenir completament determinada la derivada de la funció exponencial de base $a$, només cal saber el valor de $k$. I que aquest valor es pot calcular utilitzant que la funció exponencial de base $a$ té per inversa la funció $f(x) = \log_a x$, la derivada de la qual ja coneixem.

(Derivada de les funcions trigonomètriques)

73 Entendre que per a un valor $h$ molt petit com $10^{-6}$ o $10^{-7}$, $10^{-8}$ ... la funció taxa mitjana de variació $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ és una funció "pròxima" a la funció derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ i, que per tant, per trobar una bona aproximació a la gràfica de la derivada del sinus, basta representar la funció taxa mitjana de variació per a un valor de $h$ prou petit.

74 Reconèixer que la gràfica de la funció $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ amb h prou petit és quasi igual a la gràfica de la funció cosinus.

75 Entendre que per a un valor $h$ molt petit com $10^{-6}$ o $10^{-7}$, $10^{-8}$, ... la funció taxa mitjana de variació $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ és una funció "pròxima" a la funció derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i, que per tant, per trobar una bona aproximació a la gràfica de $f'(x)$, basta representar la funció taxa mitjana de variació per valor de $h$ prou petit. Finalment, entendre que, si podem trobar l'expressió simbòlica de la gràfica, tindrem l'expressió simbòlica de la funció derivada.

76 Fer un esbós de la gràfica de la funció $f(x) = -\sin x$, a partir de la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$

77 Aplicar el procediment anterior per calcular la derivada de la funció cosinus.

78 Calcular les derivades de les funcions tangent i cotangent, a partir de considerar-les com a divisió de funcions i de l'aplicació de la regla de la divisió.

(Derivada de les funcions $f(x) = x^{n/m}$)

79 Entendre que la regla que hem obtingut per derivar la funció $f(x) = x^n$, amb $n$ un nombre natural, també és vàlida quan l'exponent és una fracció.

80 Pot transformar les funcions $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ en $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ i les funcions $f(x) = \frac{k}{x^n}$ en $f(x) = kx^{-n}$

(Càlcul de la recta tangent)

81 Entendre que per calcular la recta tangent s'ha de seguir el procediment següent:
1) Buscar $f'(a)$, que és el pendent $m$ de la recta tangent, de la manera següent:
1.1 Calcular la funció derivada $f'(x)$
1.2 Substituir $x$ per $a$ en la fórmula de la funció derivada.
2) Buscar la segona coordenada del punt de tangència $(a, f(a))$ substituint $x$ per $a$ en la fórmula de la funció.
3) Trobar l'ordenada a l'origen $n$ sabent que la recta tangent passa pel punt de tangència.

82 Aplicar aquest procediment en funcions elementals que no són paràboles.

(Relació entre les diferents tècniques per a calcular la funció derivada i la derivada en un punt)

83 Entendre que la funció derivada es pot calcular utilitzant límits o a partir d'una propietat que compleixen totes les tangents, o bé utilitzant la funció taxa mitjana de variació $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ amb $h$ prou petit per obtenir-ne només una aproximació, o bé indirectament utilitzant les regles de derivació.

84 Entendre el paral·lelisme entre els diferents mètodes de càlcul de la derivada en un punt i els mètodes de càlcul de la funció derivada.

## 4 Subobjectiu 3.4. Planificació de les subseqüències d'ensenyament-aprenentatge i de les subseqüències d'avaluació

Vam planificar la implementació de la investigació en tres fases:

- Fase I. Abans de la implementació de la unitat.
- Fase II. Implementació de la unitat.
- Fase III. Després de la implementació de la unitat.

A la fase I havíem previst analitzar el procés constructiu dels conceptes de límits i de continuïtat de funcions, i també passar els qüestionaris 1 i 2 per esbrinar els coneixements previs dels alumnes sobre les funcions (el 2 el vam considerar com un pretest i el vam passar abans que l'1).

A la fase II havíem de posar en pràctica l'experimentació de la unitat, dividida en subseqüències de classe normal i subseqüències d'avaluació. La duració d'aquesta fase havia de ser de 30 sessions aproximadament.

A la fase III havíem previst passar el qüestionari 9 i tornar a passar el qüestionari 2 com a posttest, així com un examen de recuperació de la unitat.

La implementació real de les tres fases de la investigació fou la següent:

Fase I. Abans de la implementació de la unitat

| Data | Tipus d'activitat | Elements d'observació |
|---|---|---|
| 35620 | Qüestionari 1 | Respostes dels alumnes |
| 35712 | Entrevista a alumnes sobre les seves respostes al qüestionari 1 | Notes escrites en què vaig recollir les respostes dels alumnes |
| 17-10-97 | Entrevista a alumnes sobre les seves respostes al qüestionari 1 | Notes escrites en què vaig recollir les respostes dels alumnes |
| 35774 | Examen sobre la unitat "Límits i continuïtat" | Exàmens dels alumnes |
| 30-9-97 | Qüestionari 2 (Pretest) | Respostes dels alumnes |

Fase II Implementació de la unitat

Les sessions d'aquesta fase les hem classificat en dos tipus de subseqüències: 1) de classe normal i 2) d'avaluació. Les subseqüències d'avaluació són sessions en què els alumnes havien de respondre a un qüestionari, sessions d'exàmens i sessions de comentari i revisió d'exàmens.

Els elements d'observació pel que fa a les sessions de classe normal foren el diari de classe i la gravació de la sessió. Els elements d'observació pel que fa a les sessions d'avaluació foren el diari de classe, la gravació de la sessió i les respostes escrites dels alumnes.

| Subseqüència de classe normal | Data | Data | Subseqüència d'avaluació |
|---|---|---|---|
| Subseqüència 1<br>Pendent | 18-11-97<br>19-11-97 | | |
| Subseqüència 2<br>Taxa mitjana de variació | 20-11-97<br><br><br>25-11-97<br>26-11-97 (1/2 sessió) | 21-11-97 | Subseqüència 1<br>Qüestionari 3 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 3<br>Velocitat mitjana i instantània | 26-11-97 (1/2 sessió)<br>27-11-97 | | |
| | | 28-11-97 | Subseqüència 1 (continuació)<br>Qüestionari 3 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 4<br>Taxa instantània de variació | 2-12-97 (1/2 sessió) | | |
| Subseqüència 5<br>Interpretació geomètrica de la derivada | 2-12-97 (1/2 sessió)<br>3-12-97 (no es va impartir sessió)<br>4-12-97<br><br><br>9-12-97 (1/2 sessió) | 35561 | Subseqüència 2<br>Qüestionari 4 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 6<br>Càlcul de la derivada en un punt | 9-12-97 (1/2 sessió)<br>10-12-97<br>11-12-97<br><br><br><br>17-12-97 | 12-12-97<br>16-12-97 | Subseqüència 3<br>1r examen<br>comentari i revisió del 1r examen |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Subseqüència 7<br>Funció derivada | 8-1-98<br>13-1-98 | 9-1-98 | Subseqüència 4<br>Qüestionari 5 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 8<br>Funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i afins | 14-1-98 | | |
| Subseqüència 9<br>Regles de derivació | 15-1-98 | | |
| | | 16-1-98 | Subseqüència 4 (continuació)<br>Qüestionari 5 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 10<br>Funció derivada de les funcions polinòmiques i racionals | 20-1-98 | | |
| Subseqüència 11<br>Funció derivada de les funcions exponencials i logarítmiques | 21-1-98<br>27-1-98<br>28-1-98 | 22-1-98<br>23-1-98 | Subseqüència 5<br>Qüestionari 6<br>Subseqüència 6<br>Qüestionari 7 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 12<br>Funció derivada de les funcions trigonomètriques | 29-1-98<br>3-2-98 | 30-1-98 | Subseqüència 6 (continuació)<br>Qüestionari 7 (1/2 grup d'alumnes) |
| Subseqüència 13<br>Funció derivada de les funcions $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ | 4-2-98 (1/3 sessió) | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Subseqüència 14<br>Equació de la recta tangent | 4-2-98 (2/3 sessió) | | |
| Subseqüència 15<br>Síntesi final | 5-2-98<br>6-2-98 (no es va impartir sessió) | | |
| | | 36069 | Subseqüència 7<br>Qüestionari 8 |
| | 11-2-98 (no es va impartir sessió) | 12-2-98<br>13-2-98 | Subseqüència 8<br>2n examen<br>Comentari i revisió del 2n examen |

Fase III Després de la implementació de la unitat.

| Data | Tipus d'activitat | Elements d'observació |
|---|---|---|
| 27-2-98 | Qüestionari 9 (1/2 grup d'alumnes) | Respostes dels alumnes |
| 35948 | Qüestionari 9 (continuació)<br>(1/2 grup d'alumnes) | Respostes dels alumnes |
| 14-3-98 | Examen de recuperació de la unitat "Introducció a les derivades" | Exàmens dels alumnes |
| 27-3-98 | Qüestionari 10 (repetició del qüestionari 2 com a Posttest) | Respostes dels alumnes |

En total hem analitzat 13 produccions per a cada alumne (14 si van fer l'examen de recuperació) que sumen un total de 526 .

## 5 Subobjectiu: 3.5: Descripció de les classes des del punt de vista del professor com a mediador en la construcció social i personal realitzada en el procés d'instrucció

### 5.1 Fase I. Abans de començar la unitat

Les classes començaren el 22 de setembre amb el tema de límits i continuïtat.

#### *5.1.1 Límits i continuïtat*

Abans de començar l'experimentació de la unitat vam treballar el tema de continuïtat i límits de funcions, utilitzant com a material una unitat elaborada pel doctorand. Els objectius i continguts treballats en aquesta unitat foren:

Objectius

1 Interpretar i reconèixer el concepte de funció contínua en un punt.
2 Reconèixer i calcular els diferents tipus de discontinuïtat.
3 Relacionar la continuïtat amb el límit d'una funció en punt.
4 Relacionar les asímptotes verticals i horitzontals amb els límits.
5 Calcular el límit d'una funció en un punt i a l'infinit.
6 Resoldre les indeterminacions del tipus 0/0, $\frac{\infty}{\infty}$ $\infty - \infty$ i $1^{\infty}$.

Continguts

Conceptes

1 Noció intuïtiva de funció contínua en un punt.
2 Discontinuïtat asimptòtica.
3 Límit infinit d'una funció quan $x \to a$. Asímptota vertical.
4 Discontinuïtat de salt.
5 Límits laterals d'una funció quan $x \to a$.
6 Discontinuïtat evitable.
7 Límits d'una funció quan $x \to a$.
8 Relació entre continuïtat i límit.
9 Propietats dels límits. Operacions.
10 Discontinuïtats de les funcions racionals.
11 Indeterminacions del tipus 0/0.
12 Límits finits a l'infinit. Asímptota horitzontal.
13 Límits infinits a l'infinit.
14 Indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$.
15 Indeterminacions del tipus $\infty - \infty$ .
16 Indeterminacions del tipus $1^{\infty}$.

Procediments
1 Reconeixement de la discontinuïtat d'una funció en un punt i identificació del tipus de discontinuïtat a partir de la seva gràfica.
2 Càlcul de límits infinits i d'asímptotes verticals.
3 Càlcul de límits laterals i absoluts en un punt.
4 Utilització de les propietats dels límits respecte de les operacions: suma, resta, producte i quocient.
5 Càlcul de límits finits a l'infinit i càlcul d'asímptotes horitzontals.
6 Resolució de les indeterminacions del tipus $0/0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ i $1^{\infty}$
7 Reconeixement de la discontinuïtat d'una funció racional i identificació del tipus de discontinuïtat a partir de la seva expressió simbòlica.

Valors
1 Atenció al context històric en què es van desenvolupar els conceptes de límit i continuïtat d'una funció en un punt.
2 Interès per les possibilitats i problemes que ofereixen l'ordinador i la calculadora per al càlcul de límits i discontinuïtats.

Aquesta unitat està dissenyada per treballar els límits a partir de la continuïtat. Per tant, en el moment de començar l'experimentació els alumnes ja havien treballat durant dos mesos el tema de límits i continuïtat de funcions d'una manera que el doctorand considerava satisfactòria, i que li va facilitar conèixer de primera mà el procés constructiu dels conceptes de límit i de continuïtat desenvolupats pels alumnes a l'aula. Aquest fet va permetre que no calgués investigar quins eren els coneixements previs que tenien els alumnes relacionats amb els conceptes de continuïtat i límits.

*5.1.2 Coneixements previs del concepte de funció*

En els estudis preliminars d'aquesta investigació va quedar clar que el concepte de funció no està prou assimilat per molts alumnes quan se'ls explica els temes de límits, continuïtat i derivades. Més en concret, molts alumnes no són capaços de distingir la gràfica d'una funció d'una gràfica que no correspon a una funció. Per determinar quins alumnes sabien fer aquesta distinció, vam utilitzar fonamentalment tres elements d'observació: activitats de classe, les respostes al qüestionari 1 i una pregunta de l'examen de límits i continuïtat.

Les activitats de classe eren del tema de límits i continuïtat, com per exemple del tipus següent: Representa la funció $f(x)= E(x)$, on $E(x)$ representa la part entera del nombre $x$. És contínua en $x = 3$ aquesta funció?.

Quan es va treballar aquesta activitat a la classe i d'altres de semblants, molts alumnes van dibuixar una gràfica contínua formada per segments verticals i horitzontals (en forma d'escala). Aquest tipus de resultat és habitual perquè l'alumnat té tendència a fer la gràfica contínua. Per exemple, Deulofeu (1995) va obtenir aquest tipus de resposta en un 23% d'alumnat en un estudi sobre construcció de gràfiques amb alumnes de secundària de 14-15. Ara bé, en aquest cas es tractava d'alumnes de 16-17 anys i d'una activitat sobre la discontinuïtat de salt.

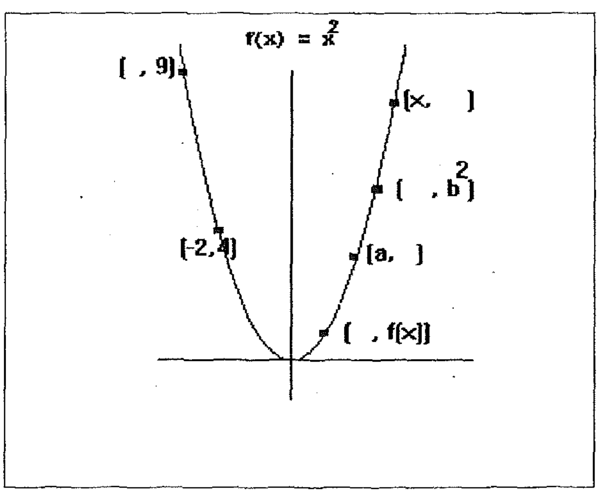
Com que el tema de funcions s'havia treballat en cursos anteriors, per saber quina era la situació dels alumnes en relació als ítems 2-16 dels subobjectiu 3.3, mentre s'impartia el tema de límits i continuïtat, vam passar els qüestionaris 1 i 2 elaborats i experimentats el curs anterior.

*5.1.2.1 Qüestionari 1*

Per tal d'analitzar la situació dels alumnes en relació als ítems 2-8, vaig passar el 7 d'octubre el qüestionari 1 en el curs de 3*A*. Vaig comentar-los que les respostes del qüestionari no tindrien cap influència sobre la nota individual, però que era important contestar-lo de cara a prendre decisions sobre la marxa de la classe. Per exemple, segons els resultats, caldria repassar algun tema de cursos anteriors. També vaig insistir-los que era molt important que les respostes reflectissin allò que realment sabien i que no copiessin, ja que en aquest cas no tenia cap sentit. Els alumnes van mostrar bona disposició per contestar el qüestionari i no van intentar copiar. Dels 41 alumnes el 7 d'octubre en va faltar dos (Mike D. i Toni G.). Per tant, van contestar el qüestionari 39 alumnes.

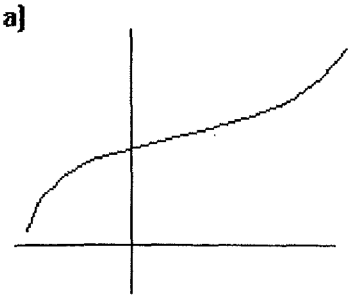
QÜESTIONARI 1

1) Donada la funció $f(x) = x^2$ completa les coordenades que falten



2 Dels gràfics següents digues quins corresponen a funcions.

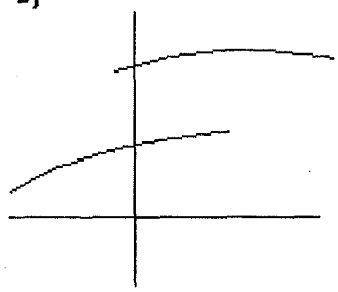
**a)**



☐ **Si** ☐ **No**

**Justificació de la resposta**

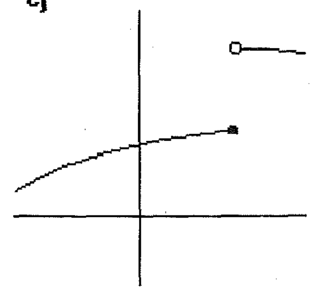
**b)**



☐ **Si** ☐ **No**

**Justificació de la resposta**

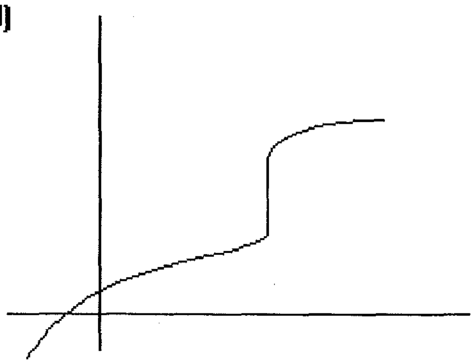
**c)**



☐ **Si** ☐ **No**

**Justificació de la resposta**

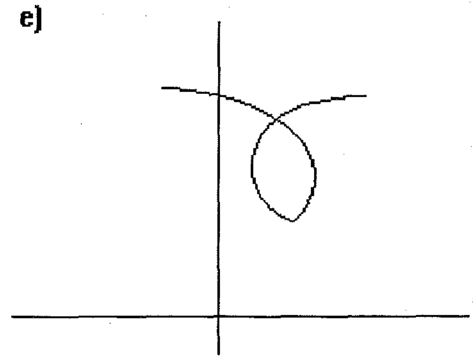
**d)**



☐ **Si** ☐ **No**

**Justificació de la resposta**

**e)**



☐ **Si** ☐ **No**

**Justificació de la resposta**

*Respostes al qüestionari 1.*

Primera pregunta

Els objectius d'aquesta pregunta eren:
1) Determinar si els alumnes sabien trobar antiimatges de valors numèrics i quin procediment utilitzaven.
2) Determinar si sabien trobar imatges de valors que estaven representats per lletres i quin procediment utilitzaven.
3) Determinar si entenien la gràfica de la funció com el conjunt de punts $(x, f(x))$.

Els dos primers aspectes tenen a veure amb la concepció d'una funció com un procés, ja que es tracta de trobar imatges de nombres o lletres utilitzant la fórmula (o la gràfica), mentre que el tercer té més a veure amb una concepció de la gràfica com un objecte.

Les respostes a ( , 9) foren:

| Respostes | -3 | 3 | -5 |
|---|---|---|---|
| Alumnes | 29 (74%) | 9 (23%) | 1 (3%) |

Les respostes a ( $a$ , ) foren:

| Respostes | $a^2$ | $x^2$ | $b$ | 2 | blanc |
|---|---|---|---|---|---|
| Alumnes | 34 (87%) | 1 (3%) | 2 (5%) | 1 (3%) | 1 (3%) |

Les respostes a ( , $b^2$) foren :

| Respostes | $b$ | $a^2$ | 3 | blanc |
|---|---|---|---|---|
| Alumnes | 35 (90%) | 1 (3%) | 1 (3%) | 2 (5%) |

Les respostes a ( $x$ , ) foren:

| Respostes | $x^2$ | y | 4 | blanc |
|---|---|---|---|---|
| Alumnes | 35 (90%) | 2 (5%) | 1 (3%) | 1 (3%) |

Les respostes a ( , $f(x)$) foren:

| Resp. | $x$ | 1 | $\sqrt{f(x)^2}$ | $f(x)^2$ | $x^2$ | $f$ | $f(x)$ | blanc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum. | 15 (38%) | 5 (13%) | 7 (18%) | 1 (3%) | 6 (15%) | 1 (3%) | 1 (3%) | 3 (77%) |

Conclusions:

1) El fet que 29 (74%) alumnes contestin correctament la pregunta ( , 9) i que 9 s'equivoquin en el signe (23%), permet concloure que quasi tots els alumnes saben utilitzar la fórmula (i en algun cas la gràfica) per buscar antiimatges de nombres. La capacitat per utilitzar la fórmula i la gràfica com a procés per trobar imatges i antiimatges de nombres és una habilitat que tenen quasi tots els alumnes.

2) El fet que 34 alumnes contestin correctament la pregunta ( $a$ , ), que un contesti <<$x^2$>>, que es pot considerar acceptable, i que 35 contestin correctament la pregunta ( $x$ , ), permet concloure que la majoria dels alumnes (90%) sap utilitzar la fórmula per buscar imatges de lletres i que un 10% no ho pot fer.

3) El fet que 35 alumnes contestin correctament a la pregunta ( , $b^2$) permet concloure que la majoria (90%) dels alumnes sap utilitzar la fórmula per buscar antiimatges de lletres i que un 10% no ho sap fer .

4) Dels 4 alumnes (10%) que són incapaços d'utilitzar la fórmula per buscar imatges o antiimatges de lletres, a la pregunta <<( , $f(x)$ )>> un respon en blanc, 3 supleixen aquesta mancança utilitzant la gràfica per respondre <<( 1, $f(x)$ )>> i un dels tres utilitza la gràfica per contestar, equivocadament, a totes les altres preguntes.

5) La diversitat de respostes a la pregunta ( , $f(x)$ ) posa de manifest la dificultat que tenen els alumnes per entendre la gràfica d'una funció com el conjunt de punts ( $x$ , $f(x)$), és a dir com un objecte. Les 15 respostes <<$x$>> , dues de les 5 respostes <<1>> i les 7 respostes << $\sqrt{f(x)^2}$ >> impliquen, implícitament, que l'alumnat ha utilitzat que la gràfica de la funció són els punts ( $x$ , $f(x)$ ). Els set que han respost << $\sqrt{f(x)^2}$ >> han utilitzat la fórmula explícitament per trobar l'abscissa, mentre que molts dels que responen <<$x$>> també ho han fet i ho verbalitzen així:

P: Per què has respost ( $x$ , $f(x)$ )?

A: doncs perquè $x$ elevat al quadrat és $x^2$.

Dit d'una altra manera, cap alumne va verbalitzar explícitament que la resposta era $(x, f(x))$ perquè els punts de la gràfica són els punts $(x, f(x))$ malgrat utilitzar aquesta propietat implícitament. Les dues respostes <<1>> posen de manifest una estratègia basada en la utilització de la gràfica en comptes de la fórmula, malgrat haver utilitzat la fórmula per respondre les altres preguntes. És significatiu que alumnes que van contestar les altres preguntes utilitzant la fórmula van optar en aquest cas per utilitzar la gràfica.

P: Per què has respost $(1, f(x))$?
A: perquè està a distància 1.
P: Per què no vas intentar utilitzar la fórmula?
A: No podia elevar al quadrat, no podia aplicar la fórmula.

6) Les 7 respostes incorrectes <<$f(x)^2$>> i <<$x^2$>> a la pregunta anterior posen de manifest que els alumnes tenen més dificultats per utilitzar la fórmula per trobar antiimatges que per trobar imatges.

7) Les respostes <<$f$>>, <<$f(x)$>> i blanc són d'alumnes que van descartar les respostes <<$f(x)^2$>> i <<$x^2$>> i no van saber què contestar.

P: Per què has respost $(f, f(x))$?
A: No ho sé, no podia posar $x^2$ perquè $f(x)$ és $x^2$ i vaig posar només $f$ per distingir-la de $f(x)$.

2a pregunta

Respostes de l'apartat *a*

| Resp. | Si (Justificació Correcta) | Si (Justificació Accep) | Si (Sense Justificació) | Si (Justificació No Acceptable) | No |
|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 13 (33%) | 15 (38%) | 1 (3%) | 9 (23%) | 1 (3%) |

Per justificació correcta entenem respostes del tipus: "és una funció contínua perquè cada punt $x$ té un punt $y$ diferent". Per justificació acceptable entenem respostes descriptives del tipus: "és una funció contínua". En canvi no considerem com a justificació acceptable una resposta del tipus: "és una funció perquè és contínua".

Respostes de l'apartat *b*

| Resp. | No (Just Correcta) | No (J. Accep) | No (Sense J.) | No (J. No Acceptable) | BLANC | Si |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 18 (46%) | 5 (13%) | 2 (5%) | 12 (31%) | 2 (5%) | 0 |

Respostes de l'apartat *c*

| Resp. | Si (Justificació Correcta) | Si(Justificació Acceptable) | Si (Justificació. No Acceptable) | NO (amb justificació) |
|---|---|---|---|---|
| Alum. | 9 (23%) | 27 (69%) | 2 (51%) | 1(3%) |

Respostes de l'apartat *d*

| Resp | No (Just Correcta) | No (Just. Accep) | No (Sense Just). | No (Just. No Acceptable) | BLANC | Si (amb just) | Si |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 21 (54%) | 2 (5%) | 1 (3%) | 4 (10%) | 2 (5%) | 8 (21%) | 1(3%) |

Respostes de l'apartat *e*

| Resp | No (Just Correcta) | No (J. Accep) | No (Sense J). | No (J. No Acceptable) | BLANC | Si (amb j) | Si |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 14 (36%) | 9 (23%) | 5 (13%) | 6 (15%) | 1 (3%) | 4 (10%) | 0 (0%) |

Conclusions:

1) El concepte de funció no estava prou assimilat per molts alumnes. Més en concret, molts alumnes no eren capaços de distingir la gràfica d'una funció d'una gràfica que no corresponia a una funció.

2) En relació a la gràfica *a* cal remarcar que hi ha un 23% d'alumnes que consideren explícitament que la condició perquè una gràfica sigui la d'una funció és que sigui contínua. Si bé la justificació correcta només la donen un 33% dels alumnes, només un alumne no reconeix aquesta gràfica com la gràfica d'una funció. Podem dir que per als alumnes la gràfica *a* és el prototipus de gràfica de funció i que per a molts d'ells la condició de continuïtat és necessària per ser considerada gràfica de funció.

3) La gràfica *b* seria el prototipus de gràfica que no ho és d'una funció. Cal remarcar que cap alumne considera aquesta gràfica com la d'una funció. Per al 46% no és una funció perquè hi ha valors de la *x* que tenen dues imatges. El 10% diu que no poden existir funcions d'aquest tipus i fins i tot el 8% diu que són dues funcions. El 10% diu explícitament que no és una funció perquè és discontínua.

4) L'alt percentatge de respostes positives a la pregunta *c* s'explica perquè els dies anteriors havíem treballat a la classe la discontinuïtat de salt i el significat del punt negre i del punt buit. En aquestes classes havia insistit que aquest tipus de gràfiques eren funcions.

5) En relació a la gràfica *d* cal remarcar que el 23% considera que és la gràfica d'una funció i que el 18% dels alumnes diu explícitament que és una funció perquè és contínua.

6) En relació a la gràfica *e* cal remarcar que només el 10% considera explícitament que és la gràfica d'una funció. Tots aquests alumnes contesten que és una funció perquè és contínua.

7) Podem considerar que la gràfica *a* és el prototipus de funció per a la majoria dels alumnes i que la *b* ho és d'una gràfica que no és una funció. El major nombre d'errors en la gràfica *d* que no pas en la *e*, es pot explicar perquè la gràfica *d* s'assembla més a la gràfica *a* i que la gràfica *e* s'assembla més a la gràfica *b*. Les respostes a la gràfica *c* no les considerem representatives perquè podien estar molt determinades per les explicacions de classe.

Les conclusions de cara a la futura intervenció del doctorand a l'aula foren:

1) En relació als continguts:
- Calia insistir i explicitar que la gràfica d'una funció són els punts $( x , f(x) )$ a fi i efecte de poder fer posteriorment raonaments sobre un punt qualsevol $( a, f(a))$ de la gràfica.
- Calia insistir en el concepte de funció i en el fet que la continuïtat o discontinuïtat no era una condició determinant per decidir si una gràfica ho era d'una funció.

2) En relació a l'avaluació:
- Entrevistar alguns alumnes per comentar les seves respostes a la pregunta 1 del primer qüestionari.
- Posar una pregunta a l'examen de límits i continuïtat en la qual els alumnes haguessin de dibuixar gràfiques de funcions, per poder comparar les seves respostes amb les de la 2a pregunta del qüestionari 1.

Entrevistes amb els alumnes

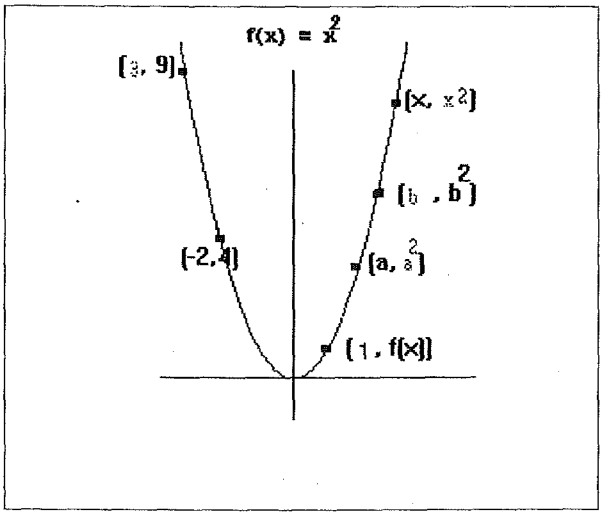
A les hores *B* del divendres només tenia la meitat del grup, per això vaig utilitzar-les per entrevistar alguns alumnes del curs de 3*A* a fi de comentar les seves respostes a la pregunta 1 del qüestionari. Mentre els alumnes resolien problemes del tema de límits i continuïtat, anava cridant alguns alumnes a un extrem de l'aula i els entrevistava individualment. Vaig escriure en un full tot el que ells em deien, la qual cosa fou molt positiva perquè els alumnes van adonar-se que les respostes als qüestionaris eren importants per a mi i que podien ser requerits per comentar-les en qualsevol moment. El dia 10 d'octubre vaig entrevistar-ne dos i el 17 d'octubre tres.

A continuació segueix la transcripció d'una d'aquestes entrevistes.

NOM: Jessica C
CURS: 3*A*
DATA. 17/10/97
TEMPS: 11 minuts

Resposta de l'alumna

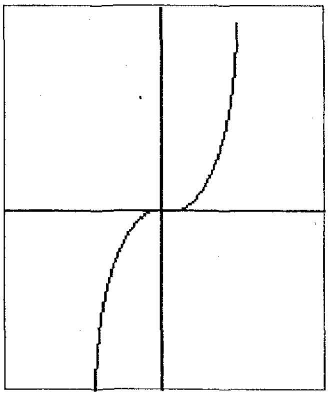
1) Donada la funció $f(x) = x^2$ completa les coordenades que falten




Entrevista

P: Pots explicar per què vas contestar (3, 9)?
A: Perquè vaig veure que nou era el quadrat de 3.
P: Sí, però el punt està a l'esquerra.
A: És (-3,9).
P: Per què vas contestar, $(a , a^2)$ , $(b , b^2)$ i $(x , x^2)$ ?
A: Vaig aplicar la fórmula.
P: Per què vas contestar $(1 , f(x))$ ?
A: No podia elevar al quadrat, no podia aplicar la fórmula i em va semblar que aquest punt era $(1 , f(x))$.
P: Suposa que no saps que és $(1 , f(x))$, quina altra resposta pots donar?
A: No ho sé.
P: Fixa't que a $( x ,\quad )$ has contestat $( x , x^2 )$ que és correcte. Ara bé, hi ha altres alumnes que contesten $( x , y)$ o bé $( x , f(x))$. Aquestes respostes també es poden considerar vàlides perquè estan utilitzant el fet que els punts de la gràfica d'una funció són els punts formats per un valor de l'abscissa i la seva imatge: $( x , f(x))$ i, algunes vegades la imatge es representa per la lletra $y$ : $( x , y)$. Però de fet la millor contestació és $( x , x^2 )$. Quina resposta donaries ara?
A: $( x , f(x))$.

P: A continuació tens la gràfica d'una funció $f(x)$ de la qual no coneixem la fórmula. Com representaries un punt qualsevol?



A.- $(x, f(x))$.
P.- I si la funció fos $f(x) = x^3$, què contestaries?
A.- $(x, x^3)$.
P.- D'acord.

Conclusions:

1.- Pot aplicar la fórmula de la funció a nombres i a lletres.
2.- Quan no pot utilitzar la fórmula no és capaç d'utilitzar que la gràfica de la funció està formada per tots els punts $(x, f(x))$.
3.- En no poder utilitzar la fórmula opta per utilitzar la gràfica per respondre: <<(1 , $f(x)$>>.
3.- No té gaires dificultats per entendre que la gràfica de la funció està formada per tots els punts $(x, f(x))$ ja que sembla que, en sentir l'explicació, ho recorda de cursos anteriors.

*5.1.2.2 Examen de límits i continuïtat*

El dia 12-11-97 vam fer l'últim examen de límits i continuïtat. En aquest examen vaig posar la pregunta següent en què els alumnes havien de fer la traducció <<enunciat gràfica>>:

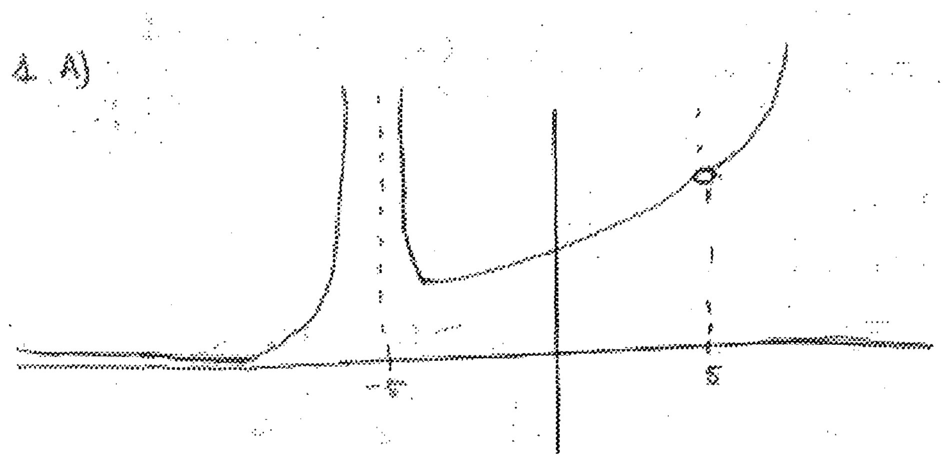
1. Per a cada un dels apartats següents dibuixa un gràfic d'una funció $f(x)$ tal que compleixi les condicions de l'apartat.

a) En $x = -5$ hi ha una discontinuïtat asimptòtica, en $x = 5$ hi ha una discontinuïtat evitable i no existeix $f(5)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ .

b) $\lim_{x \to 7} f(x) = -\infty$ , en $x = -4$ no hi ha imatge, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -4$ i $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$ .

c) $\lim_{x \to 8} f(x) = +\infty$ , en $x = -2$ hi ha una discontinuïtat de salt i en $x = 5$ una discontinuïtat evitable i $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ .

La majoria dels alumnes van dibuixar gràfiques en les quals, en les proximitats de la discontinuïtat asimptòtica, a un valor de la variable independent li feien correspondre més d'un valor de la variable dependent, (dibuixaven un tros vertical o bé inclinaven la gràfica cap a un costat). Per exemple Anna G. a l'apartat *a* va respondre:




Si considerem la dificultat que presenta dibuixar una funció en les proximitats del punt de discontinuïtat asimptòtica i que, probablement, jo mateix havia dibuixat a la pissarra gràfiques com aquesta, ens vam plantejar si aquest tipus de respostes es podien considerar com a vàlides o no. Vam optar per preguntar a molts alumnes si reconeixien l'error. Per exemple, en el cas d'aquesta alumna la resposta fou:

P: La gràfica que has dibuixat no és del tot correcta en les proximitats del punt de discontinuïtat asimptòtica $x = -5$. Saps per què?

A: Ah sí! La gràfica ha de ser així (dibuixa una gràfica en què rectifica les dues branques de la gràfica en les proximitats de $x = -5$, de manera que la nova gràfica sí que és la d'una funció).

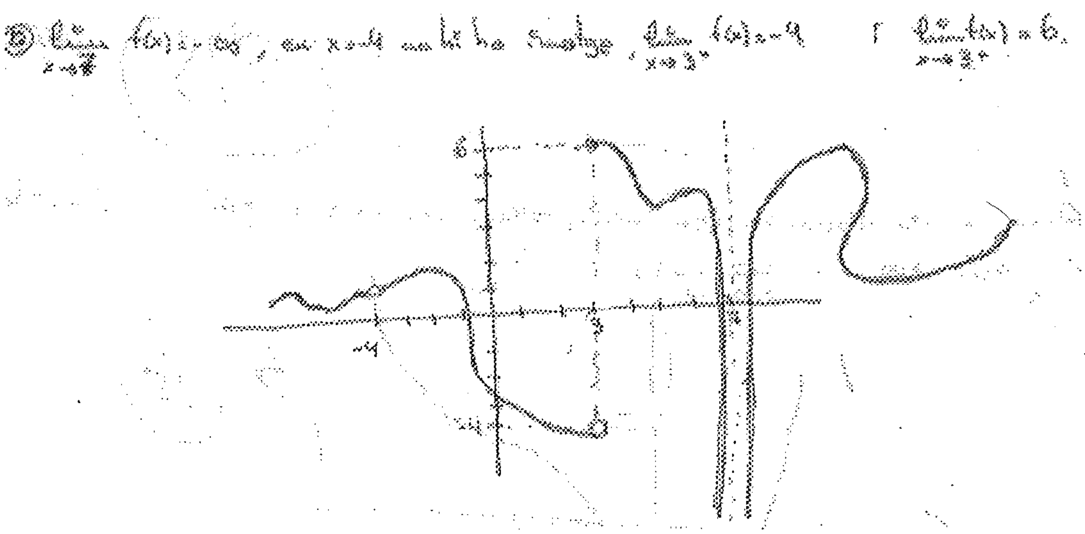
Les respostes dels alumnes ens van inclinar per considerar aquests tipus de gràfiques com a vàlides.

8 alumnes (20%) en alguna de les seves respostes van dibuixar gràfiques que no ho eren

de funcions, en valors que no estaven pròxims dels valors de discontinuïtat asimptòtica. Els errors eren de dos tipus:

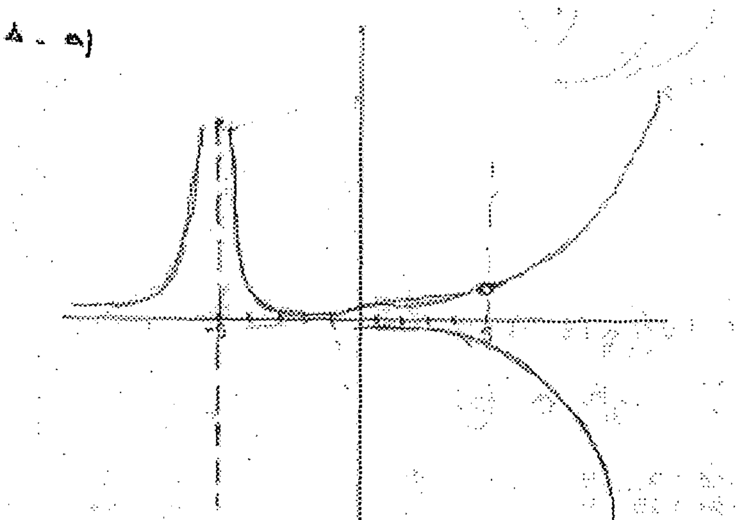
1) dibuixar un tros vertical o bé inclinat cap a un costat

Per exemple, Patricia F. va respondre així l'apartat b):



2) Dibuixar gràfiques com la gràfica *b* de la segona pregunta del qüestionari 1, és a dir gràfiques en les quals a molts valors de l'abscissa li corresponen dues imatges

Per exemple, Isabel G. va respondre així l'apartat a):

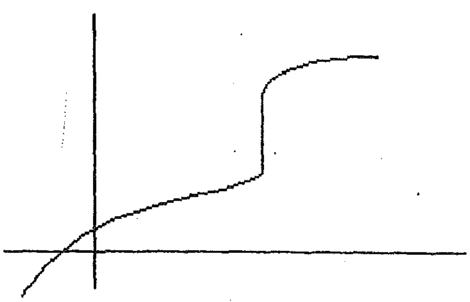


Conclusions

1) Al començament del tema de límits i continuïtat hi havia molts alumnes que cometien l'error típic de dibuixar gràfiques de funcions escalonades unint els segments horitzontals amb segments verticals, perquè no tenien clar que a cada valor de la variable independent li ha de correspondre un únic valor de la variable dependent. La nostra intervenció a classe per combatre aquesta idea va donar com a resultat que cap alumne unís amb un segment vertical les discontinuïtats de salt.

2) La nostra conclusió és que, si bé els alumnes no uneixen les discontinuïtats de salt amb segments verticals després d'estudiar aquest tipus de discontinuïtat, un 20%, quan han de coordinar el seu significat personal de funció amb els significats personals de límit i continuïtat d'una funció, continua considerant que una gràfica ho és d'una funció, malgrat hi hagi valors de l'abscissa que tinguin més d'una imatge.

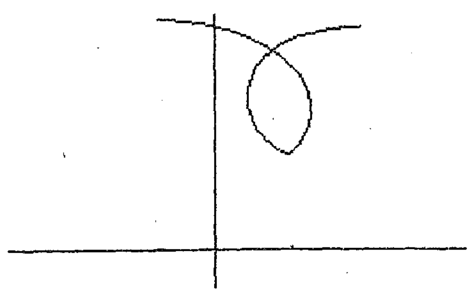
3) La conclusió que les respostes incorrectes a la pregunta 1 de l'examen són causades per la dificultat d'utilitzar i connectar significats personals d'objectes personals diferents la basem en el fet que 6 dels 8 alumnes que van dibuixar gràfiques que no ho eren de funcions, en alguna de les gràfiques de la pregunta 2 del qüestionari 1 havien justificat la seva resposta argumentant que no hi podia haver valors de la *x* amb més d'una imatge. Per exemple, l'alumna Patricia.F., la resposta de la qual hem comentat a la pregunta 1 de l'examen, anteriorment, havia respost així a la gràfica *d* i *e* de la pregunta 2 del qüestionari 1:



☐ Si ☒ No

**Justificació de la resposta**

Perqué hi han valors d'x que els hi correspon dos o més d'y



☐ Si ☒ No

**Justificació de la resposta**

Perqué hi han valors d'x que els hi correspon dos o més d'y

4) Molts alumnes, quan han d'utilitzar el significat personal de funció conjuntament amb el significat personal de límit i continuïtat d'una funció, en les proximitats dels punts de discontinuïtat asimptòtica, dibuixen gràfiques que no ho són de funcions, encara que són capaços de dibuixar-les correctament quan se'ls fa observar el seu error.

5) Les conclusions que vam treure en relació als ítems 2-8 a partir del qüestionari 1, les entrevistes amb alumnes i l'examen de límits i continuïtat són:

| | |
|---|---|
| Ítem 2 | Molts alumnes no saben distingir la gràfica d'una funció d'una que no ho és. |
| " 3 | Quasi tots saben buscar imatges d'un valor de l'abscissa utilitzant la gràfica de la funció. |
| " 4 | Molts alumnes tenen dificultats per reconèixer els punts d'una gràfica d'una funció $f(x)$ com els punts $(x, f(x))$. |
| " 5 | No tenen clar que el símbol $f(x)$ d'una banda representa la funció i d'altra banda indica la imatge de l'abscissa $x$ |
| " 6 | Quasi tots saben utilitzar la fórmula d'una funció senzilla per buscar la imatge d'un nombre. |
| " 7 | Quasi tots saben utilitzar la fórmula d'una funció senzilla per buscar la imatge d'una lletra. |
| " 8 | Quasi tots saben que donada la fórmula d'una funció com per exemple $f(x)=x^2$, els punts de la gràfica són els punts $(x, x^2)$ |

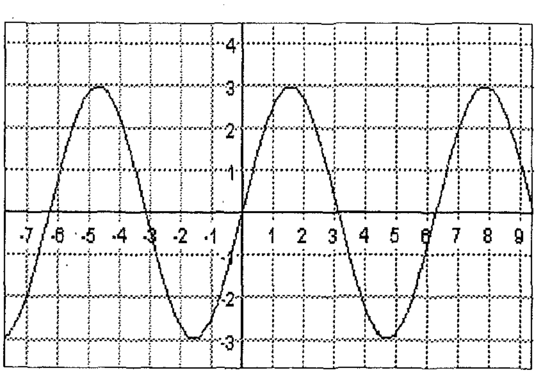
*5.1.2.3 Qüestionari 2*

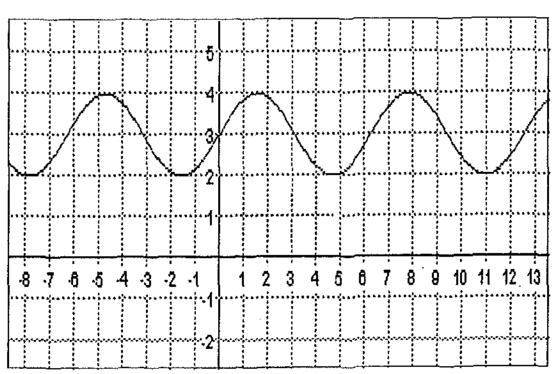
En la traducció <<gràfica ⇒ expressió analítica>> podem distingir dues fases:

1ª Elecció del tipus de funció d'ajust (interpolació). És a dir, l'elecció d'una família de funcions $f(x; \lambda_1, ........\lambda_k)$ en l'expressió de les quals figuren $k$ paràmetres.

2ª Determinació dels paràmetres $\lambda_1, ........\lambda_k$.

Perquè un alumne de secundària trobi la fórmula d'una gràfica com, per exemple, aquestes:




Ha de seguir el procediment següent:

- Identificar aquestes gràfiques com a gràfiques de funcions trigonomètriques.

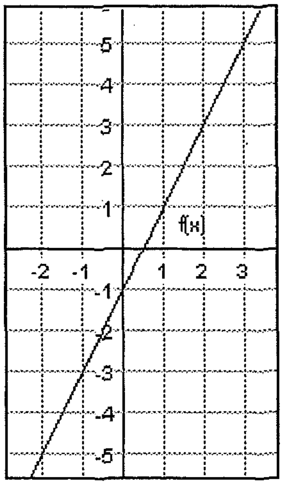
- D'aquesta família de funcions trigonomètriques escollir la subfamília $f(x) = a\text{sen}\,(bx) + c$.
- Determinar per a cada una de les dues gràfiques anteriors el valor dels paràmetres $a$, $b$, i $c$.

Per poder trobar l'expressió simbòlica corresponent a les gràfiques anteriors l'alumne ha d'utilitzar els seus coneixements sobre:
1 Les funcions trigonomètriques en general.
2 La funció sinus en particular.
3 Transformacions de funcions.
4 Graduació d'eixos (no apareix la lletra $\pi$).

La majoria dels alumnes tenen moltes dificultats per realitzar els passos anteriors. L'explicació d'aquestes dificultats s'ha de buscar en la falta d'activitats d'aquest tipus en els exercicis escolares. Les activitats escolars en què els alumnes treballen les funcions normalment fan referència a funcions concretes considerades aïlladament, però es treballa relativament poc les transformacions de funcions i les famílies de funcions, i encara es treballa menys el pas de la gràfica a l'expressió analítica d'una funció.

Per tal d'analitzar la situació dels alumnes en relació als ítems 9-16 vaig passar el 30 de setembre el qüestionari 2 en el curs de 3*A*, que tenia per objectiu saber 1) la capacitat que tenien els alumnes de reconèixer les gràfiques de les funciones afins, quadràtiques, exponencials i trigonomètriques i 2) la capacitat que tenien els alumnes de fer la traducció <<gràfica ⇨ expressió analítica>> quan la gràfica era d'aquestes famílies de funcions. Vaig comentar-los que el qüestionari no tindria cap influència sobre la nota individual de cada un d'ells, però que era important de cara a prendre decisions sobre la marxa de la classe. Per exemple, segons els resultats caldria repassar algun tema de cursos anteriors. També vaig insistir-los que era molt important que les respostes reflectissin allò que realment sabien i que no copiessin, ja que en aquest cas no tenia cap sentit. Els alumnes van mostrar bona disposició per contestar el qüestionari i no van intentar copiar. Van contestar el qüestionari els 41 alumnes, un dels quals era Humberto R. que va ser canviat dies després per Oscar T., el qual, per tant, no va respondre aquest qüestionari.

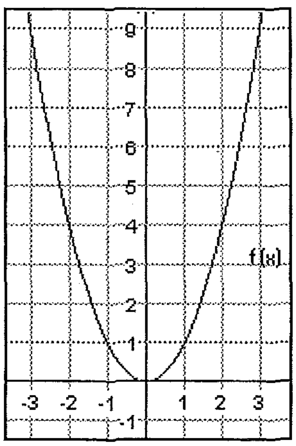
QÜESTIONARI 2




1 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

*Resposta:* f(x) = ......................

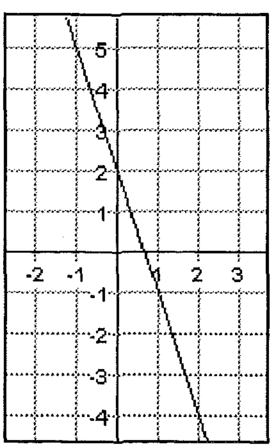
*Justificació de la resposta*:




2 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

*Resposta:* f(x) = ....................

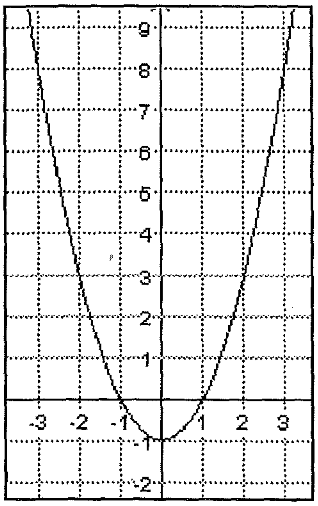
*Justificació de la resposta:*




3 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

*Resposta:* f(x) = ....................

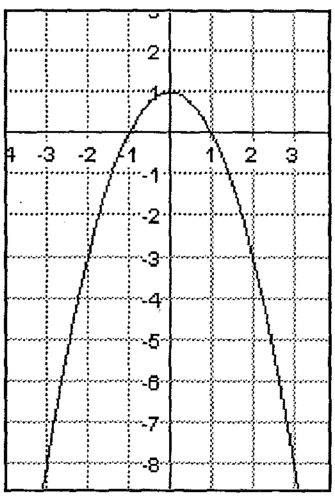
*Justificació de la resposta:*




4 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

*Resposta:* f(x) = ....................

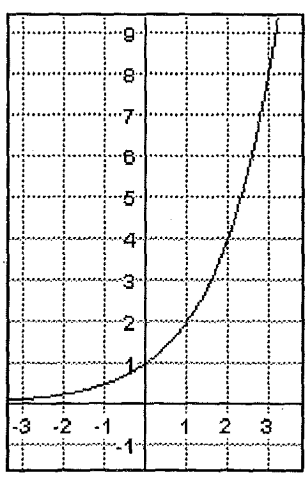
*Justificació de la resposta*




5 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

*Resposta:* f(x) = ....................

*Justificació de la resposta:*

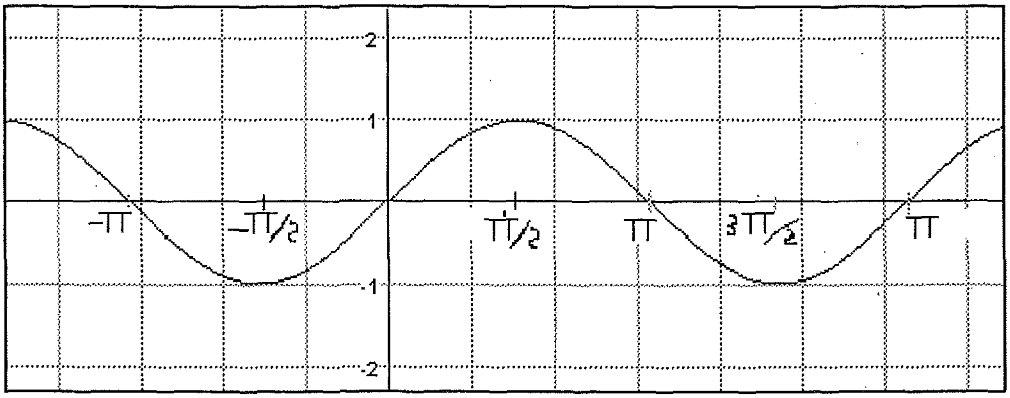



6 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:

*Resposta:* f(x) = ....................

*Justificació de la resposta:*

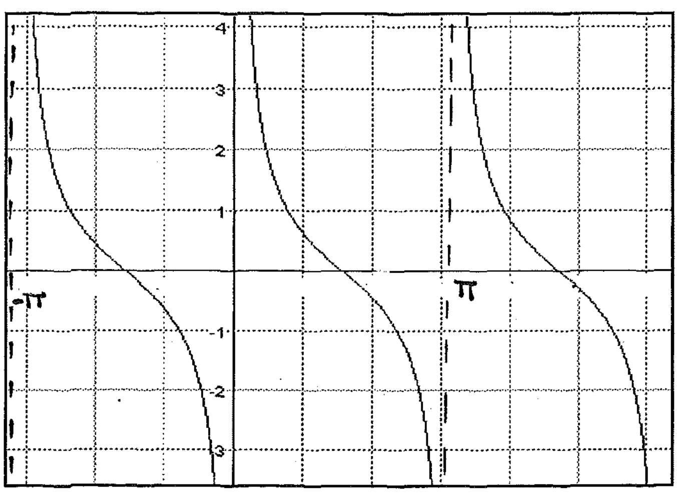
7 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:




*Resposta:* f(x) = ...............

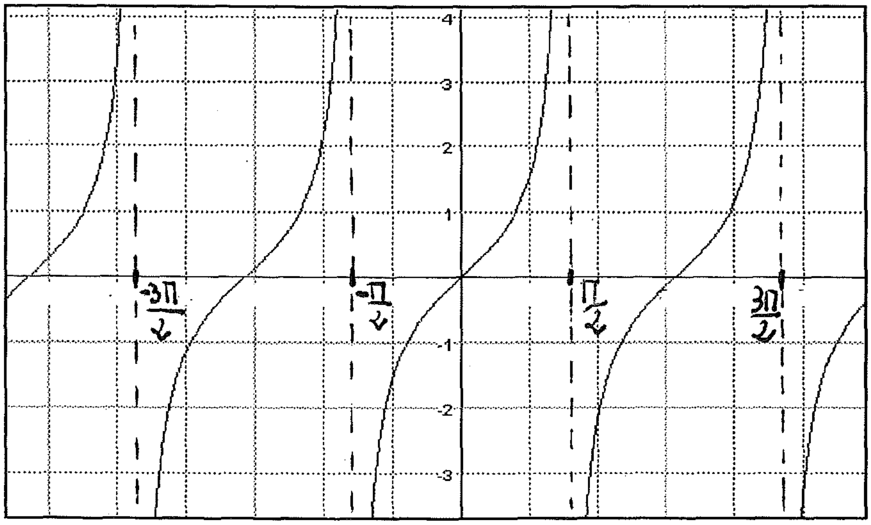
*Justificació de la resposta:*

8 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:




*Resposta:* f(x) = ...............
*Justificació de la resposta:*

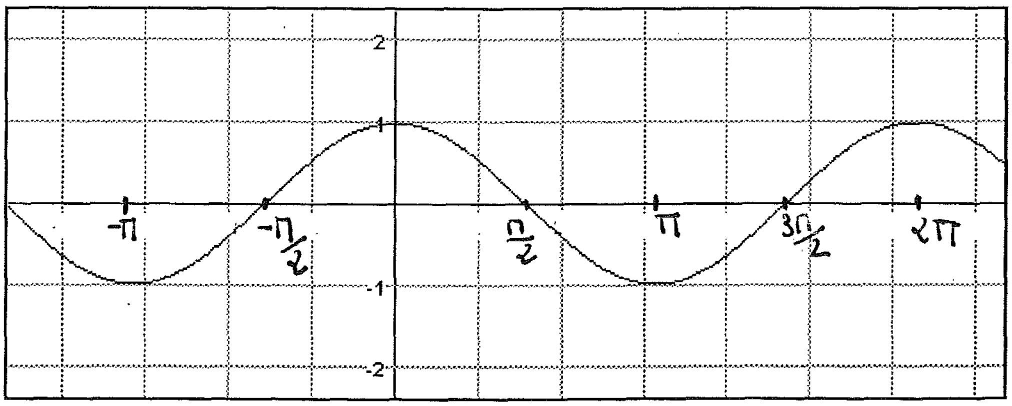
9 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent:




*Resposta:* f(x) = ...............

*Justificació de la resposta:*

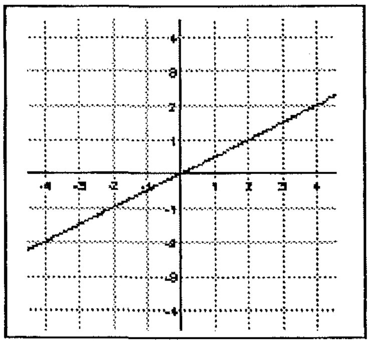
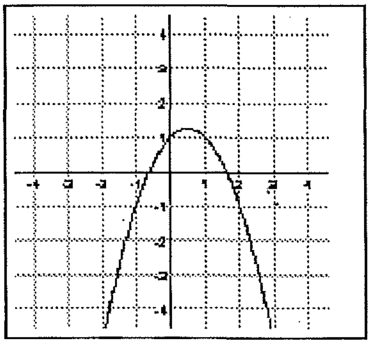
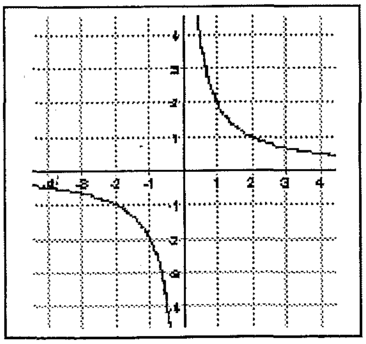
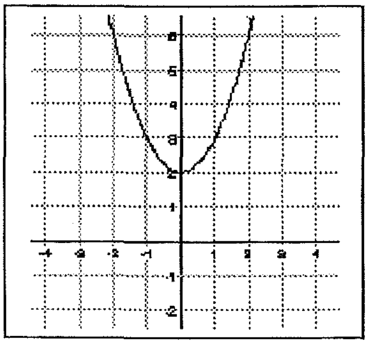
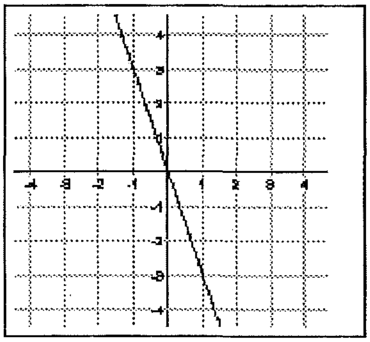
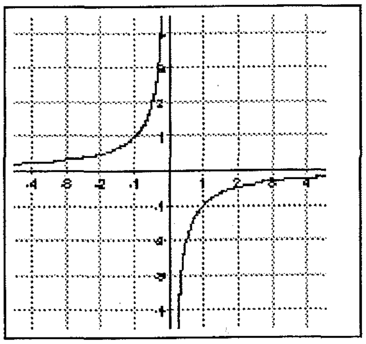
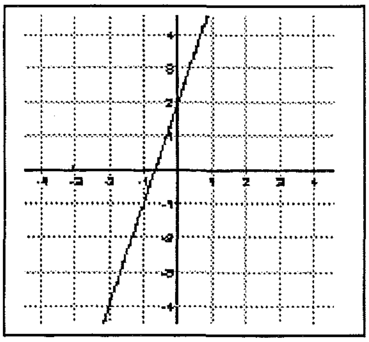
10 Troba la fórmula de la funció que té el gràfic següent




*Resposta:* f(x) = ...............

*Justificació de la resposta:*

11 Donades les funcions $f(x) = -3x$ , $g(x) = x/2$ , $h(x) = 3x + 2$ , $i(x) = -x^2 + x + 1$ , $j(x) = x^2 + 2$, $k(x) = 2/x$ , $t(x) = -1/x$ . Identifica-les amb els gràfics següents i raona la teva elecció

*Respostes al qüestionari 2*

Abans d'analitzar les respostes a les preguntes una a una cal avançar una de les conclusions sobre tot el qüestionari: els alumnes es poden classificar en tres grups. El grup *A* són alumnes que utilitzen bàsicament taules (19) , el grup *B* són alumnes que utilitzen que les gràfiques pertanyen a una família de funcions de fórmula tipus coneguda (17) i el grup *C* són alumnes que no es poden classificar en cap dels dos grups anteriors perquè les seves explicacions no són prou clares per poder-los assignar al grup *A* o al *B* o bé perquè majoritàriament han contestat en blanc ( 5 alumnes). L'assignació d'un alumne a un grup, per exemple al grup *A*, no vol dir que justifiqui totes les respostes a partir de taules, sinó que majoritàriament ha utilitzat les taules en les seves justificacions.

Respostes a la pregunta 1

| Resp. | $f(x)=2x-1$ | $f(x)=x+1$ | $f(x)=x-1$ | $2x-y+1=0$ | $f(x)=2x-x-2$ | $f(x)=1-x$ | $f(x)=x^2+x-1$ | blanc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 24(59%) | 3(7%) | 3(7%) | 2(5%) | 1(2%) | 1(2%) | 1(2%) | 6(15%) |

Conclusions a partir de les respostes a la pregunta 1

1) Només 24 alumnes (59%) responen correctament i el 41% és incapaç de trobar la fórmula de la funció afí a partir de la gràfica. Només 1 alumne (2%) dóna com a resposta un model de fórmula que no té per gràfica una recta ($f(x)=x^2+x-1$). Del grup *A* responen correctament 8 (20 % sobre el total i 42% sobre el grup *A*). Del grup *B* responen correctament 15 (37 % sobre el total i 88% sobre el grup *B*). Del grup *C* un respon correctament (2 % sobre el total i 20% sobre el grup *C*).

2) En relació a la justificació de la resposta s'observen els procediments següents:

*Interpolació*: aquest mètode consisteix a fer una taula de valors i trobar després una fórmula tal que aquests valors compleixin. Per exemple (Laura N.):

*Resposta:* f(x) = ..2x−1........

*Justificació de la resposta*:

$f(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$f(-1) = 2\cdot(-1) - 1 = -3$

$f(-2) = 2\cdot(-2) - 1 = -5$

$f(3) = 2\cdot 3 - 1 = 5$

| x | y |
|---|---|
| 1 | 1 |
| −1 | −3 |
| −2 | −5 |
| 3 | 5 |

referència explícita al model $y = mx+n$. D'aquests 14 alumnes, 5 (12 %) fan la taula i obtenen una fórmula equivocada, 1 (2%) fa la taula però respon en blanc i 8 (20%) responen correctament. Cal remarcar que el nombre de punts utilitzats varia de l'un al set. Dels 14 alumnes, només 3 (7%) intenten explicar el que han fet amb paraules. L'explicació més elaborada és la de l'alumne següent (David R.):

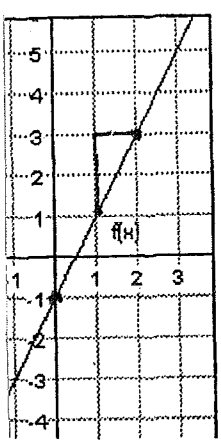
*Resposta:* f(x) = 2x-1............

*Justificació de la resposta*:

Primer he posat totes les coordenades en una taula. Després m'he fixat
i me he donat compte de que una de les coordenades, la del 0, l'altra
donava -1. Això vol dir que a la x se li restava -1.
Però després en les altres com per exemple la del 3, m'he fixat que la
y era 5, i això vol dir que era el doble -1. Així l'he trobada.

Primer he posat totes les coordenades en una taula. Després m'he fixat i me he donat compte de que una de les coordenades, la del 0, l'altra donava -1. Això vol dir que a la *x* se li restava -1. Però després en les altres, com per exemple la del 3, m'he fixat que la *y* era 5, i això vol dir que era el doble -1. Així l'he trobada.

*Utilització explícita del model* $y = mx+n$: Aquest procediment consisteix a identificar la gràfica com la gràfica d'una funció d'una família coneguda (les funcions afins) de la qual sabem el model de fórmula, per després trobar els paràmetres del model. Dels 17 alumnes del grup *B*, 2 no donen cap justificació, dos diuen que és una recta i 13 alumnes (32 %) fan referència explícita al model $y = mx+n$ i tots 13 responen correctament. Tots diuen que troben *n* fixant-se en el punt de tall amb l'eix d'ordenades, 9 d'aquests 13 alumnes (22%) utilitzen que el pendent és l'augment vertical dividit per l'augment horitzontal i 6 d'ells (15%) dibuixen un triangle. Per exemple (Raquel G):




*Resposta:* f(x) = ...2X.-1.......

*Justificació de la resposta*:

És del tipus $y = mx+b$;
on $m = \frac{\text{alçada}}{\text{base}}$ (inclinació de la recta)
y b: punt de tall a l'eix d'ordenada. (Terme indep.)
Per tant $y = \frac{2}{1}x+(-1) \Rightarrow y = 2x-1$

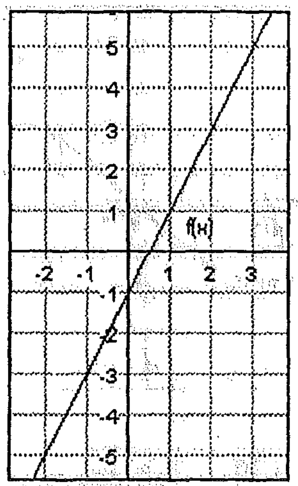
Només un dels 13 alumnes (Elisabeth G.) que han fet referència explícita al model $y = mx+n$ (2%) diu que ha trobat el pendent a partir de la taula:

*Resposta:* f(x) = ..2x − 1........

*Justificació de la resposta:*

He trobat aquesta fórmula perquè quan la gràfica de la funció és aquesta significa que la fórmula serà així y=ax±b, en la qual b és el número pel que corta l'eix y, i a el trobaràs fent la taula de valors

*Utilització de la geometria analítica*: Aquesta tècnica consisteix a buscar l'equació vectorial de la recta per deduir-ne després l'equació general. Només un alumne (2%) (Luis J.G) del grup *A*, en comptes d'utilitzar la taula, ha utilitzat aquesta tècnica. Cal remarcar que tots els alumnes la van estudiar el curs anterior:




*Resposta:* f(x) = ..2x − y + 1...

*Justificació de la resposta:*

$\vec{v} = (1,2)$

$(x,y) = (0,-1) + \lambda(1,2)$

$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad \boxed{x=1} \rightarrow 2 - y + 1 = 0$

$\boxed{3 = y}$

$-x = -\frac{y+1}{2}$

$-2x + y + 1 = 0$

$2x - y + 1 = 0$

Respostes a la pregunta 2

| Respostes | $f(x)=x^2$ |
|---|---|
| Alumnes | 41(100%) |

Conclusions a partir de les respostes a la pregunta 2:

1) Tots els alumnes responen correctament. 22 (54%) alumnes fan una taula de valors i responen $f(x)=x^2$ sense fer cap referència al fet que la gràfica és una paràbola. 14 alumnes (34%) expliciten que la gràfica és una paràbola.

2) Sembla que en aquesta pregunta també es manifesten els dos procediments que hem comentat a la pregunta anterior. Un grup d'alumnes fa una taula de valors a partir de la gràfica i després troba una fórmula que compleixen aquests valors. Per a aquests alumnes

el reconeixement de la gràfica com la gràfica d'una funció d'una determinada família de funcions no sembla important. L'altre grup reconeix la gràfica com la de la paràbola $f(x)=x^2$ i després alguns confirmen, amb una taula de valors, que efectivament els punts de la gràfica són els punts $(x, x^2)$. Per exemple (Raquel G.):

*Resposta:* f(x) = ...$x^2$...............

*Justificació de la resposta:*

Com que és una paràbola serà eq. de 2n grau, si faig taula de valors veig que sempre es fa al quadrat. Deduïm doncs que la fórmula serà $y = x^2$.

| x | y |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 1 | 1 |
| -1 | 1 |
| -2 | 4 |

Respostes a la pregunta 3

| Resp | $f(x)=$ $-3x+2$ | $f(x)=$ $2x-1$ | $f(x)=$ $x+2$ | $f(x)=$ $-x^2$ | $f(x)=$ $x-2$ | $f(x)=$ $x-6$ | $f(x)=$ $x-1$ | blanc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 22 (54%) | 1(2%) | 2(5%) | 1(2%) | 1(2%) | 1(2%) | 1(2%) | 12 (29%) |

Conclusions a partir de les respostes a la pregunta 3

1) Només 22 alumnes (54%) responen correctament i el 46% és incapaç de trobar la fórmula de la funció afí a partir de la gràfica. Només 1 alumne (2%) dóna com a resposta un model de fórmula que no té per gràfica una recta ($f(x)=x^2$). Del grup *A* responen correctament 7 (17 % sobre el total i 37% sobre el grup *A*). Del grup *B* responen correctament 15 (37 % sobre el total i 88% sobre el grup *B*). Del grup *C* no n'hi ha cap que respongui correctament.

2) Els 14 alumnes (34%) que per respondre la pregunta 1 van utilitzar la interpolació, sense cap referència explícita al model $y = mx+n$, també la utilitzen ara. 3 (7%) fan la taula i obtenen una fórmula equivocada, 4 alumnes (10%) responen en blanc i 7 (17%) responen correctament. Cal remarcar que 2 alumnes (5%) que no havien contestat correctament la primera pregunta ara sí que ho fan i que 1 alumne (2%) que havia contestat correctament la pregunta primera ara respon incorrectament, i que 3 alumnes (7%) que havien contestat correctament la pregunta primera ara responen en blanc. S'observa doncs una petita disminució de respostes positives entre els alumnes que

utilitzen aquest procediment per obtenir l'expressió simbòlica de la funció a partir de la gràfica.

3) Els 13 alumnes (32%) que fan referència explícita al model $y = mx+n$ per respondre a la primera pregunta, continuen utilitzant aquest procediment per respondre (correctament) la tercera pregunta.

3) L'alumne que utilitza explícitament el model $y = mx+n$ per respondre les preguntes 1 i 2 i 3 té una tècnica més potent que el que utilitza la interpolació. Això és així perquè l'èxit en la interpolació depèn molt del nombre de valors escollits per fer la taula.

Pregunta 4

| Respostes | $f(x) = x^2 -1$ | $f(x) = x^2 -2$ | $f(x) = 3x -1$ | blanc |
|---|---|---|---|---|
| Alumnes | 38(93%) | 1(2%) | 1(2%) | 1(2%) |

Conclusions:

1) 38 alumnes (93%) responen correctament. Només 1 alumne (2%) dóna com a resposta un model de fórmula que no correspon a una paràbola ($f(x)=3x-1$). Del grup *A* responen correctament 19 (46 % sobre el total i 100% sobre el grup *A*). Del grup *B* responen correctament 17 (41% sobre el total i 100% sobre el grup *B*). Del grup *C* 2 responen correctament (5% sobre el total i 40% sobre el grup *C*)

2) Dels 38 alumnes que responen correctament,. 19 alumnes (46%) fan una taula de valors i responen $f(x)=x^2 -1$ sense fer cap referència al fet que la gràfica és una paràbola. 17 (41%) d'aquests 19 alumnes són del grup *A*, i 2 alumnes (5%) són del grup B. Aquests dos alumnes havien respost les preguntes 1 i 3 utilitzant el model $y = mx+n$ mentre que ara utilitzen la interpolació.

3) 13 (32%) dels 17 alumnes del grup B utilitzen que la gràfica és de la família de les paràboles (9 ho diuen explícitament). Aquests 13 alumnes donen justificacions basades en les transformacions de les gràfiques. Per exemple (Alex A.):

*Resposta:* f(x) = $x^2 - 1$

*Justificació de la resposta*

És una paràbola, elevat al quadrat i com que és un lloc cap a abaix -1

És una paràbola, elevat al quadrat i com que és un lloc cap a abaix, -1

4) Cal remarcar que un alumne del grup *B* (Albert C) que ha utilitzat els models $y = mx+n$. en les preguntes 1 i 3 i el model <<paràbola>> a la pregunta 2 ara intenta trobar la fórmula de la paràbola utilitzant la mateixa tècnica que ha utilitzat en el cas de les rectes

*Resposta:* f(x) = $x^2 - 1$

*Justificació de la resposta*

$m = \frac{1}{1} = 1$

$b = -1$

Aquest alumne ha utilitzat que el pendent és l'augment vertical dividit per l'augment horitzontal i que l'ordenada a l'origen és l'ordenada del punt de tall amb l'eix d'abscisses per respondre les preguntes 1 i 3 i en la pregunta 4 insisteix en la utilització d'aquest procediment. Però el que és més destacable és que ho fa correctament, ja que fa l'augment vertical dividit per l'augment horitzontal no entre dos punts qualsevol sinó que ho fa entre el vèrtex i un punt de la paràbola situat una unitat cap a la dreta, amb la qual cosa obté correctament el coeficient de $x^2$ . Això és així perquè el coeficient de $x^2$ és el pendent de la recta que passa pel vèrtex $(p , q )$ i pel punt $(p + 1, f(p + 1))$ de la paràbola.

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \quad ; f(p + 1) = a(p + 1 - p)^2 + q \; = a + q$$

$$\frac{f(p + 1) - f(p)}{p + 1 - p} = \frac{a + q - q}{1} = a$$

Aquest alumne també aplica aquest procediment per contestar correctament la pregunta següent.

5) En aquesta pregunta també es manifesten els dos procediments que hem comentat a les preguntes anteriors. Un grup d'alumnes primer fa una taula de valors a partir de la gràfica i després troba una fórmula que compleixen aquests valors. Per a aquests alumnes el reconeixement de la gràfica com la gràfica d'una funció d'una determinada família de funcions no sembla important. L'altre grup reconeix la gràfica com la d'una paràbola, la qual cosa li suggereix una fórmula amb $x^2$ que ha trobat amb una taula de valors o bé utilitzant les transformacions de funcions.

Respostes a la pregunta 5

| Resp | $f(x) = -x^2-1$ | $f(x) = x^2+1$ | $f(x) = -x^3-1$ | $f(x) = x+2$ | $f(x) = x^2-1$ | $f(x) = \sqrt{x}-1$ | $f(x) = x\rightarrow 1$, $x\rightarrow -1$ | blanc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 28 (68%) | 3 (7%) | 1 (2%) | 2(5%) | 1(2%) | 1(2%) | 1(2%) | 4(10%) |

Conclusions a les respostes a la pregunta 5:

1) 28 alumnes (68%) responen correctament i 5 alumnes (12%) donen com a resposta un model de fórmula que no correspon a una paràbola. Del grup $A$ responen correctament 12 (29 % sobre el total i 63% sobre el grup $A$). Del grup $B$ responen correctament 14 (34% sobre el total i 82% sobre el grup $B$). Del grup $C$, 2 alumnes responen correctament (5% sobre el total i 40% sobre el grup $C$).

2) Dels 28 alumnes que responen correctament, 13 són del grup $A$. Aquests alumnes fan una taula de valors i responen sense fer cap referència al fet que la gràfica és una paràbola. 2 alumnes (5%) són del grup $B$, és a dir, que havien respost les preguntes 1 i 3 utilitzant el model $y = mx+n$ i ara utilitzen la interpolació, un és del grup $C$ i també utilitza una taula i 1 és del grup $A$, però en aquest cas utilitza que la gràfica és una paràbola i no fa cap taula. Els altres 11 són del grup $B$ i responen sense utilitzar taules. Dels 28 alumnes 19 han utilitzat la interpolació. D'aquests 19 alumnes, 13 ( 32% sobre el total i 68% sobre els 19)) han respost correctament, 2 en blanc (5% sobre el total i 11% sobre els 19) i 4 ho han fet incorrectament (10% sobre el total i 21% sobre els 19).

3) Els alumnes que fan referència explícita al fet que la gràfica és la d'una paràbola però no al·ludeix a cap taula de valors donen justificacions basades en les transformacions de les gràfiques. Per exemple (Angela L):

*Resposta:* f(x) = ... $-x^2 + 1$

*Justificació de la resposta:*

Gráfica de $x^2$, al revés ⇒ gráfica de $-x^2$, y con ordenada en el origen = 1

4) Cal remarcar que alumnes que havien utilitzat la interpolació en les tres primeres preguntes ara donen justificacions basades en el model paràbola i en les seves transformacions i que alumnes que no havien utilitzat interpolació en les preguntes anteriors ara la utilitzen.

Respostes a la pregunta 6

| Respostes | Alumnes |
|---|---|
| $f(x) = x+4$ | 1(2%) |
| $f(x) = x - 1$ | 1(2%) |
| $f(x) = 1/x^2$ | 1(2%) |
| $f(x) = 2x+1$ | 1(2%) |
| $f(x) = x^2 + 1$ | 2(5%) |
| $x - y + 1$ | 1(2%) |
| $f(x) = x^2 / x$ | 1(2%) |
| $f(x) = x+2$ | 1(2%) |
| $f(x) = -x^2 /2 - x/2 + 1$ | 1(2%) |
| $f(x) = 2^x$ | 5(12%) |
| $f(x) = e^x$ | 3(7%) |
| blanc | 22(54%) |

Conclusions a partir de les respostes a la pregunta 6:

1) 5 alumnes (12%) responen correctament i 8 (20%) reconeixen la gràfica com la d'una funció exponencial. 11 alumnes (27%) donen com a resposta un model de fórmula que no

correspon a una exponencial. Del grup $A$ responen correctament 2 (5 % sobre el total i 11% sobre el grup $A$). Del grup $B$ responen correctament 2 ( 5% sobre el total i 12% sobre el grup $B$). Del grup $C$, 1 alumne respon correctament (2% sobre el total i 20% sobre el grup $C$).

2) Els alumnes que utilitzen la interpolació tenen poc èxit en l'intent de trobar la fórmula de la gràfica de la pregunta 6. Això és així perquè, malgrat que en les seves respostes no utilitzen explícitament un model de fórmula, implícitament tenen tendència a fer una hipòtesi de fórmula de primer o segon grau. Aquest fet comporta que tinguin moltes dificultats per trobar la fórmula quan la gràfica de la funció no és d'aquest tipus.

3) Els alumnes que utilitzen un model de funció també tenen molt poc èxit. En aquest cas la causa és el desconeixement del model exponencial, la qual cosa s'explica per la manera d'impartir el tema de les exponencials el curs anterior.

4) Cal remarcar que dos alumnes del grup $A$ i un del grup $B$ van respondre $f(x) = e^x$. En aquest cas és evident que van reconèixer la gràfica com la d'una funció exponencial.

*Respostes a les preguntes 7-10*

Els alumnes podien utilitzar la calculadora i només havien de reconèixer que les quatre gràfiques corresponen a les funcions trigonomètriques ( sinus, cosinus, tangent i cotangent) i relacionar cada gràfica amb la fórmula corresponent. Les respostes foren:

*Funció sinus*

| Resp. | $f(x) =$ sen $x$ | $f(x) =$ cos $x$ | Altres funcions trigonomètriques | funcions no trigonomètriques | Blanc |
|---|---|---|---|---|---|
| Alum. | 13 (32%) | 4 (10%) | 2 (5%) | 5 (12%) | 17 (41%) |

*Funció cosinus*

| Resp. | $f(x) =$ cos $x$ | $f(x) =$ sen $x$ | Altres funcions trigonomètriques | funcions no trigonomètriques | Blanc |
|---|---|---|---|---|---|
| Alum. | 11(29%) | 4(10%) | 3 (7%) | 2 (5%) | 20 (49%) |

*Funció tangent*

| Resp | $f(x) =$ tg $x$ | $f(x) =$ cotg $x$ | Altres funcions trigonomètriques | funcions no trigonomètriques | Blanc |
|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 6 (15%) | 6 (15%) | 4 (10%) | 0 (0%) | 25 (61%) |

*Funció cotangent*

| Resp | $f(x) =$ cotg $x$ | $f(x) =$ tg $x$ | Altres funcions trigonomètriques | funcions no trigonomètriques | Blanc |
|---|---|---|---|---|---|
| Alum | 6 (15%) | 7 (17%) | 3 (7%) | 2 (5%) | 23 (56%) |

Conclusions a partir de les respostes a les preguntes 7-10:

1) En aquestes quatre preguntes vam procurar reduir la dificultat de l'ajust al mínim. En les marques de graduació apareix la lletra $\pi$, i l'alumne no havia de buscar cap paràmetre. Només havia de reconèixer que les quatre gràfiques corresponen a les funcions trigonomètriques. Un exemple de reconeixement és la resposta següent (Alberto C.):

*Resposta:* f(x) = ...seno (x)

*Justificació de la resposta:*

ya coneix aquesta gràfica

2) En aquest cas el mètode d'interpolació basant-se en una taula obtinguda a partir de la gràfica només podia servir per discriminar entre les diferents funcions trigonomètriques. És a dir, prèviament s'havia de fer la hipòtesi que la gràfica corresponia a una funció trigonomètrica i després comprovar amb la taula que la hipòtesi era la correcta (els alumnes podien utilitzar la calculadora). Això vol dir que tant el grup $A$ com el $B$ havien d'utilitzar explícitament un model de funció. Això és el que va fer el següent alumne del grup $A$ (Luis J.G.):

*Resposta:* f(x) = ..sin..x.

*Justificació de la resposta:*

Sin -180 = 0
Sin -90 = -1
sin 0 = 0
Sin 90 = 1
Sin 180 = 0

2) Només 4 alumnes del grup $A$ (10% sobre el total i 21% sobre el grup $B$) responen correctament a la pregunta 7 (sinus), mentre que del grup $B$ ho fan correctament 9 alumnes (22% sobre el total i 53% sobre el grup $B$).

Només 1 alumne del grup $A$ (2% sobre el total i 5% sobre el grup $A$) respon correctament la pregunta 8 (cotangent), mentre que del grup $B$ ho fan correctament 5