VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

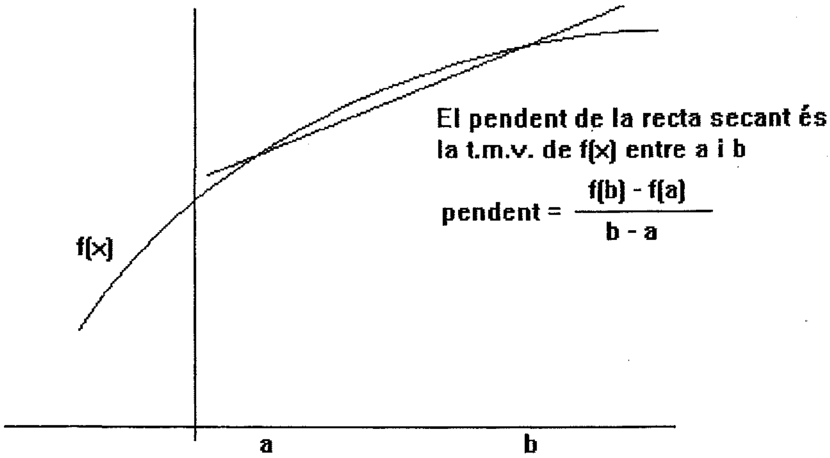
Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

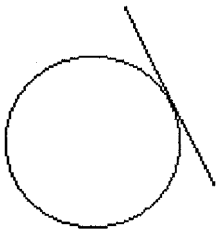
UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999

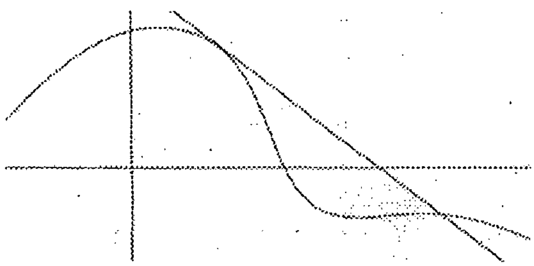
Continuo dient que ara veurem la interpretació geomètrica de $f'(a)$ i comento que així com hi ha una relació entre la taxa mitjana de variació d'una funció entre $x = a$ i $x = b$ i el pendent de la recta secant al gràfic de la funció que passa pels punts d'abscissa a i b, també hi ha una interpretació geomètrica de la derivada (al mateix temps dibuixo a la pissarra el següent:)

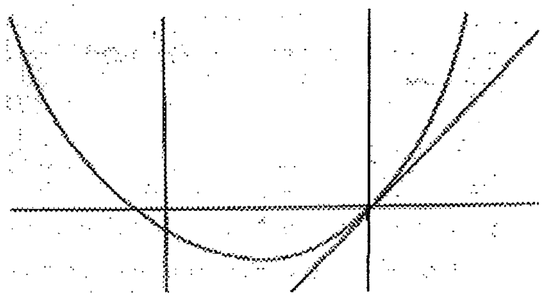


Però dic que prèviament cal clarificar el concepte de recta tangent a una funció en el punt d'abscissa $x=a$. Comento que en geometria elemental, l'única corba que s'estudia és la circumferència, i per a ella es defineix la recta tangent com una recta que té només un punt en comú amb la corba (mentrestant dibuixo a la pissarra):



Faig observar que aquest fet pot portar-los a creure que la condició perquè una recta sigui tangent a una gràfica en un punt és que només tingui aquest punt en comú amb la gràfica. D'aquesta manera arribaríem a la conclusió que la recta de la figura de l'esquerra no seria tangent al gràfic, mentre que una paràbola tindria dues rectes tangents en qualsevol dels seus punts.





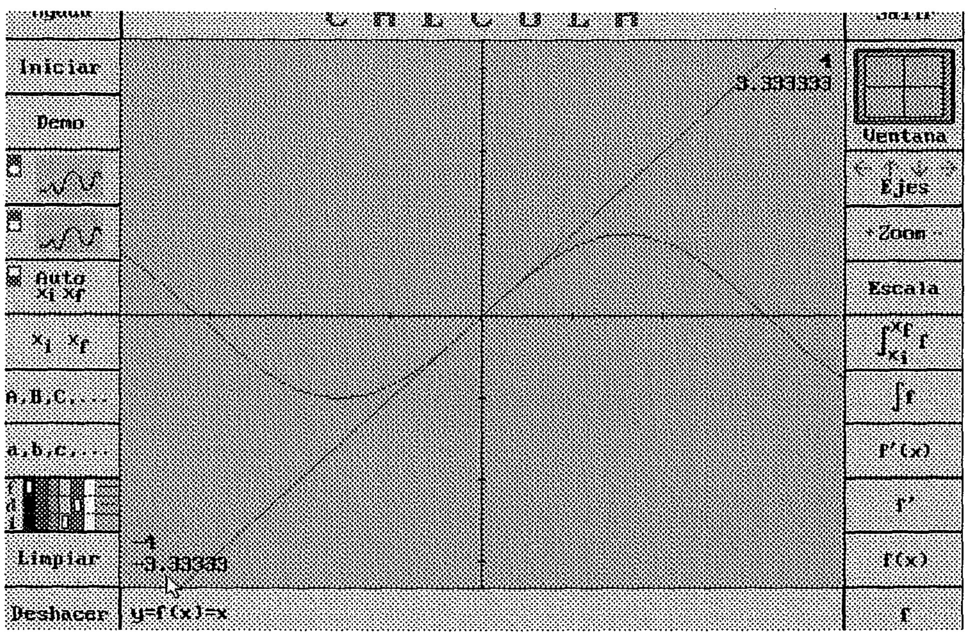
Remarco que cal revisar aquest concepte i dic que el concepte vàlid de recta tangent té relació amb la idea d'aproximació: de totes les rectes que passen per un punt de la corba, la recta tangent és la que més s'hi aproxima (almenys en un veïnatge del punt). Tot seguit pregunto quina de les dues rectes s'aproxima més a la paràbola.

A: Molts alumnes responen <<aquesta>> (responen correctament).

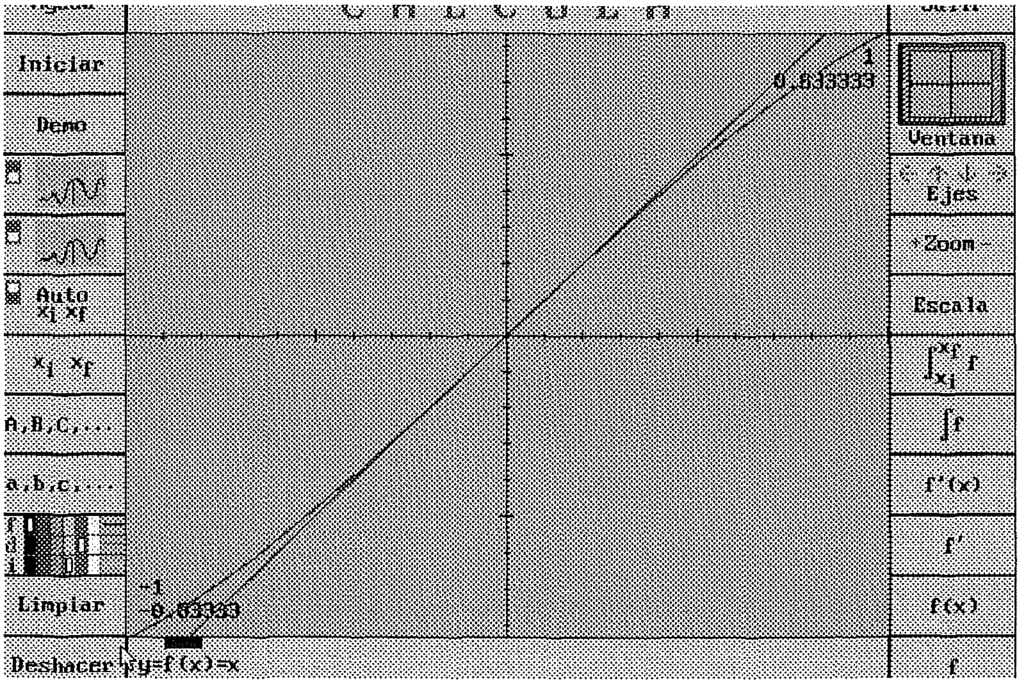
P: Dic que per veure quin és el significat d'aquesta definició de recta tangent convé utilitzar els graficadors informàtics, que són programes per representar funcions, que normalment permeten fer zooms en les proximitats d'un punt. Explico que ara anirem de 10 en 10 a l'ordinador del Departament perquè l'aula d'informàtica està ocupada. Indico quins 10 alumnes han de venir i dic als altres que llegeixin les pàgines 322 i 323.

A: Els 10 alumnes vénen amb mi i els altres, majoritàriament, en comptes de llegir, parlen entre ells.

P: Sec davant de l'ordinador i els deu alumnes es posen al meu voltant. Amb el programa *Calcula* represento la funció sinus i la recta tangent en $x = 0$



Faig observar als alumnes que tenim la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ i que, en $x = 0$, la recta $y = x$ i l'eix d'ordenades tallen la gràfica només en un punt. Faig 3 zooms i la recta $y = x$ quasi coincideix amb la funció sinus



Dic que la recta $y = x$ i l'eix d'ordenades tallen la gràfica en un sol punt, però que la recta tangent és $y = x$ perquè és la que més s'aproxima a la gràfica en les proximitats del punt (0 , 0). Pregunto si queda clar.

A: Responen que sí.

A: Repetim el procés anterior tres vegades més fins que tots els alumnes han passat per davant de l'ordinador.

P: Comento que a la pàgina 323 hi ha representades la paràbola $y = x^2$, la recta $y = 2x - 1$, i la recta $x = 1$, que són rectes que tallen la paràbola només en el punt (1,1). Pregunto quina de les dues rectes és la tangent.

A: Responen que la recta $y = 2x - 1$.

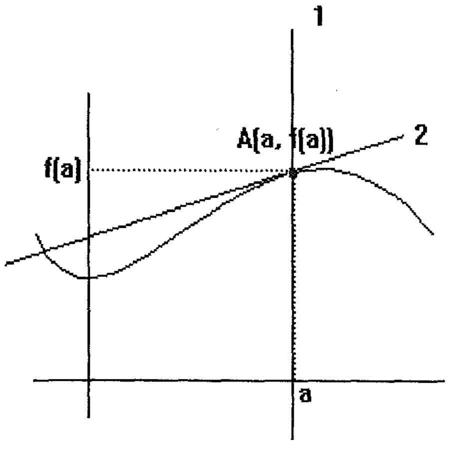
P: Pregunto el perquè.

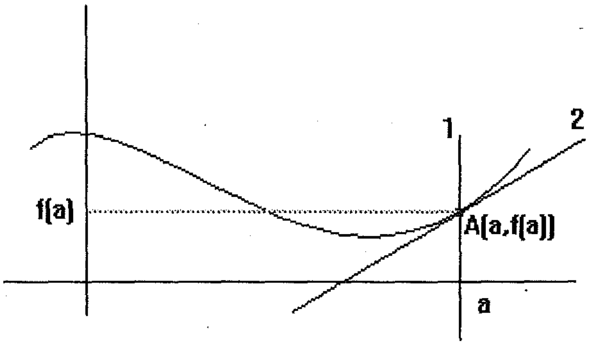
A: Responen que és la que més s'aproxima a la gràfica.

P: Insisteixo que la recta $y = 2x - 1$ és la tangent perquè és la que més s'aproxima a la gràfica en les proximitats del punt (1,1) i no importa en quants punts talla la recta tangent a la gràfica. Dic que ho pot fer en 1, 2 o 50 punts. A continuació, dic que facin l'activitat 16.

A: es posen a fer-la.

P: Dibuixo les figures de l'activitat 16 a la pissarra i pregunto quina és la recta tangent en el punt A en la primera figura.





A: Responen majoritàriament que és la recta 2 . Alguns encara responen que és la recta 1.

P: Pregunto a Albert C. per què ha contestat que la tangent és la recta 1.

A: Albert C. respon que la recta 2 talla a la gràfica en dos punts.

P: Torno a insistir que la <<2>> és la recta tangent perquè és la que més s'hi aproxima i que el fet que la recta 2 talli la gràfica en dos punts no té cap importància. Insisteixo que això vol dir que si fem un zoom de la gràfica per ampliar els voltants del punt A, ens trobarem que la gràfica de la funció i la recta 2 quasi coincideixen, la qual cosa no passa amb la recta 1. A continuació pregunto quina és la recta tangent la figura de la dreta.

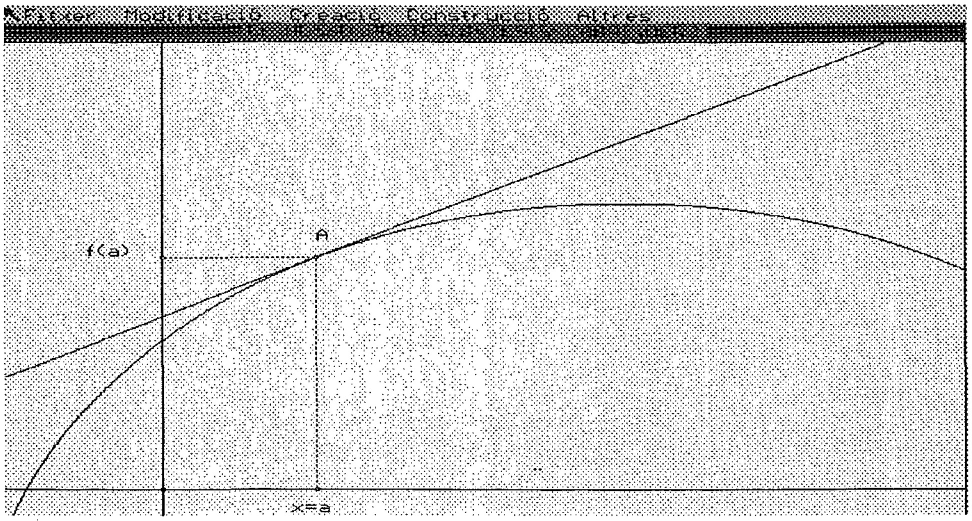
A: Ara tots responen que és la recta 2 i no hi ha cap alumne que digui que és la recta 1.

P: Pregunto si ha quedat clar.

A: Responen que sí.

P: Dic que els ha de quedar molt clar que, quan fem un zoom, quasi no es pot distingir la gràfica de la recta tangent. Un cop clarificat el concepte de recta tangent, recordo el nostre objectiu: trobar una interpretació geomètrica del nou concepte que hem introduït: la derivada de la funció en un punt (mentre poso a la pissarra $f'(a)$). Dic que l'activitat 17 ens permetrà trobar aquesta interpretació geomètrica de la derivada i faig que 10 alumnes vinguin amb mi a l'ordinador del Departament, mentre que els altres fan l'activitat 17.

P: Sec davant de l'ordinador i els deu alumnes es posen al meu voltant. Utilitzo el programa Cabri-géomètre per tenir a la pantalla la construcció següent:



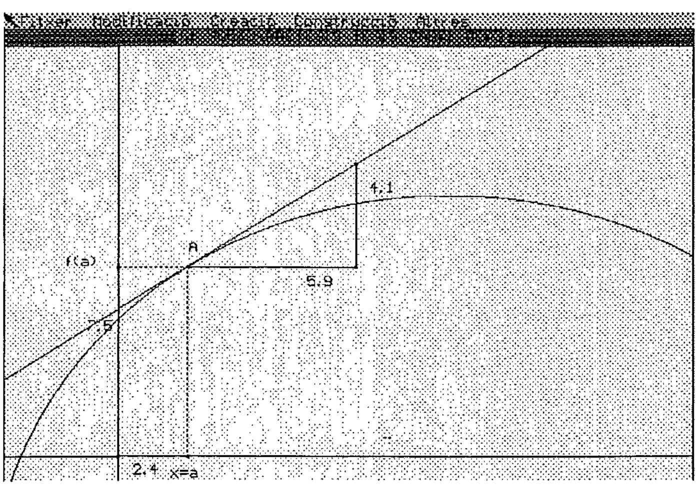
Pregunto quina classe de recta és la que passa pel punt *A* (mentre l'assenyalo amb el dit)

A: Responen que la tangent.

P: Pregunto per què.

A: Alguns alumnes diuen que és la que més s'aproxima a la gràfica.

P: Canvio la pantalla anterior per la següent:



I pregunto quin és el pendent d'aquesta recta i com el puc calcular.

A: Hi ha silenci, fins que un alumne diu que no sabem les coordenades del punt per aplicar la fórmula.

P: Pregunto a quina fórmula es refereix.

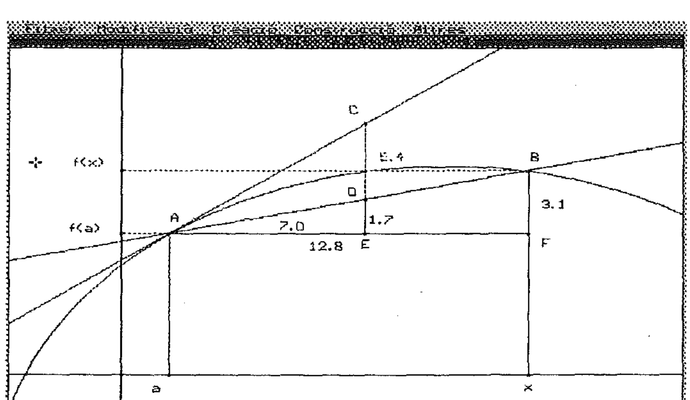
A: L'alumne diu que a la fórmula $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

P: Li dic que en aquest cas s'ha d'anar viu perquè, a la pantalla, la funció $f(x)$ és la que té per gràfica la corba, mentre que, quan diem d'aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ a la recta, s'està suposant que la funció $f(x)$ és la recta. De tota manera, per aplicar aquesta fórmula a la recta, no cal saber les coordenades de dos punts de la recta, perquè basta saber quina és la variació vertical $f(x_2) - f(x_1)$ i quina és la variació horitzontal $x_2 - x_1$. Torno a insistir que quan apliquem aquest quocient a la recta estem suposant que la funció $f(x)$ és la recta.

A: Laura A. i David G. responen que el pendent és 5,4/7.

P: A continuació moc el punt A perquè els alumnes vegin com va variant la inclinació de la recta tangent i els catets del triangle que han utilitzat per calcular el pendent. Insisteixo molt que, quan movem el punt A, el que fem és anar passant pels diferents punts de la gràfica, i que no han de cometre l'error de creure que és el mateix punt que es va movent. Dic que, en moure el punt, hauríem de posar A', A'', A''', etc. o bé canviar de lletra, però que això el programa no ho permet. Remarco que, movent el punt, passem per diferents punts amb rectes tangents diferents, i comento que hi ha alumnes que, sense adonar-se'n, pensen que el punt és com una persona que porta un sac (la recta tangent) i que es mou sobre una carretera (la gràfica) i consideren que, si bé canvia la posició de la persona, aquesta i el sac no varien, sempre són els mateixos. Torno a insistir que en aquest cas tenim diferents punts i diferents rectes tangents.

P: Canvio la pantalla anterior per la següent:



i pregunto quina classe de recta és la que passa pels punts AB (mentre l'assenyalo amb el dit) .

A: David R. I d'altres responen de seguida que és la recta secant.

P: Pregunto com podem calcular-ne el pendent.

A: Victor B. respon que calculant el quocient 3,1/12,8.

P: Moc el punt *B* i faig que s'aproximi al punt *A*. Mentre ho repeteixo diverses vegades seguides dic que aquest procés que fem a l'ordinador és el que tenen a les pàgines 325-326 de la unitat. A continuació pregunto a quina recta s'aproximen les rectes secants.

A: Responen molt ràpidament que s'aproximen a la tangent.

P: Repeteixo el procés anterior amb deu alumnes diferents.

A: En aquest grup hi ha els repetidors Alberto C., Alex A., i Angela L., que agafen el protagonisme i responen correctament a les meves preguntes.

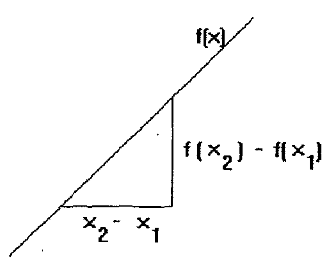
P: Torno a repetir el procés anterior amb deu alumnes diferents.

A: En aquest grup el procés és més lent i observo que també hi ha alumnes que tenen dificultats per trobar el pendent de la recta tangent, perquè no poden trobar els dos punts que necessiten per aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

P: Torno a repetir el procés anterior amb deu alumnes diferents.

A: En aquest grup també observo que hi ha alumnes que tenen dificultats per trobar el pendent de la recta tangent.

P: Un cop som tots a l'aula, dibuixo a la pissarra la figura següent:



i remarco que, per trobar el pendent, no cal saber les coordenades de dos punts, perquè basta saber quina és la variació vertical $f(x_2) - f(x_1)$ i quina és la variació horitzontal

$x_2 - x_1$ i aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

A continuació dibuixo a la pissarra la figura de la pantalla de l'ordinador i faig una explicació per a tot el grup, remarcant amb paraules i gestos que les rectes secants s'aproximen a la recta tangent.

Toca el timbre i dic que portin feta l'activitat 17 per a la propera classe.

Valoracions

1) En relació a l'ítem 28 del subobjectiu 3.3

Ítem 28 L'alumnat ha entès la definició de derivada en un punt com la generalització de la definició de velocitat instantània a una funció qualsevol, és a dir, la definició de la derivada d'una funció en un punt com el límit de les taxes mitjanes de variació.

2) Crec que la majoria d'alumnes tenen clar que la recta tangent és la que més s'aproxima a la gràfica en les proximitats del punt. Si bé els bolcats de pantalla del graficador que hi ha a la unitat poden ser suficients per introduir el nou significat de recta tangent, fer aquesta explicació amb un graficador com el *Calcula* facilita molt la comprensió dels alumnes. Aquest graficador permet fer zooms de la gràfica en les proximitats d'un punt, de manera que apareix quasi com un segment de recta, la perllongació de la qual no es distingeix visualment de la recta tangent a la gràfica en el punt.

3) És una llàstima no haver tingut accés a l'aula d'informàtica per poder treballar l'aproximació de les secants a la tangent amb més detall. Ara bé, malgrat tenir accés només a un ordinador, crec que ha quedat prou clar que les rectes secants s'aproximen a la tangent. Si bé els bolcats de pantalla del Cabri-géomètre que hi ha a la unitat poden ser suficient per entendre com les rectes secants s'aproximen cap a la recta tangent, fer aquesta explicació amb un ordinador facilita molt la comprensió dels alumnes.

4) M'ha sorprès que molts alumnes tinguessin dificultats per aplicar el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. quan només es coneix la variació vertical $f(x_2) - f(x_1)$ i la variació horitzontal $x_2 - x_1$. Crec que convé insistir en aquest tema el proper dia remarcant que, quan apliquem aquest quocient a la recta tangent, la funció $f(x)$ és la recta.

Sessió del 3-12-97

El 3-12-97 no vaig poder impartir la classe perquè els alumnes van participar en una activitat fora del centre organitzada pel Departament de Filosofia. La pèrdua d'aquesta hora és preocupant perquè no em permet treballar la interpretació geomètrica de la derivada en un punt fins al dia 4-12-97. És important remarcar que en un dels continguts bàsics del tema, la derivada en un punt, és justament quan he tingut més problemes organitzatius (només poder utilitzar un ordinador i pèrdua d'una hora de classe).

Sessió del 4-12-97

Planificació

Treballar la interpretació geomètrica de la derivada fent, com a mínim, les activitats 17 i 18.

Desenvolupament de la sessió

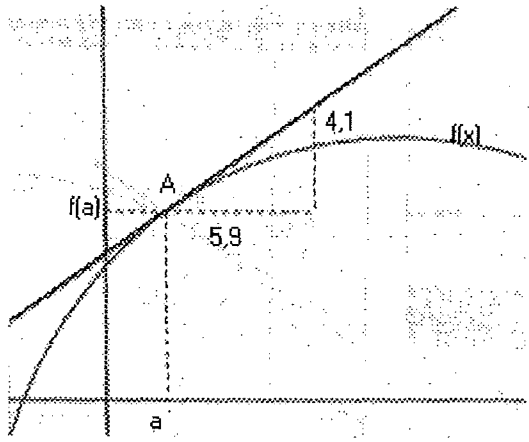
Falten: Toni G, Angela L., Laura A., Jordi L., Ester E., Elia G. i Mike D.

Observació: Avui falten molts alumnes perquè, a més que la classe comença a les 8 del matí, després tenen un examen d'una altra assignatura.

P: Faig un comentari general dient que la classe d'avui és molt important perquè treballarem un dels conceptes claus de tot el tema de derivades i que falta molta gent (massa). Els recrimino que s'han acostumat a faltar a les classes quan tenen un examen d'una altra assignatura i que això és una pràctica que pot dificultar molt el seguiment de la classe de matemàtiques. A continuació comento que el que volem fer és trobar una interpretació geomètrica de la derivada en un punt, de manera anàloga a com vam trobar una interpretació geomètrica per a la taxa mitjana de variació d'una funció, i poso a la pissarra el següent:

$$\underbrace{f'(a)}_{?} = \lim_{x \to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{pendent de la recta secant}}$$

Continuo dient que la interpretació geomètrica de $f'(a)$ té a veure amb la recta tangent i que per això vam haver de clarificar el concepte de recta tangent, i els recordo que l'últim dia vam veure a la pantalla de l'ordinador com les secants de l'activitat 17 s'aproximaven a la recta tangent i que ells havien d'acabar l'activitat 17. Mentrestant dibuixo a la pissarra la figura de l'apartat *a* de l'activitat 17.



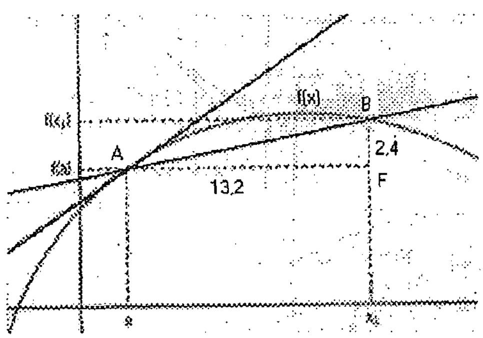
I pregunto quina classe de recta és la que passa pel punt A.

A: Responen que és la recta tangent.

P: Pregunto per què.

A: Molts alumnes responen que és la que més s'aproxima a la gràfica.

P: Recordo que a la classe anterior vam calcular el pendent d'aquesta recta tangent. Per tal d'aclarir la dificultat observada a la classe anterior, explico que, per calcular el pendent d'una recta, s'ha de calcular el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. I que, si a la figura hi hagués una quadrícula, buscaríem les coordenades dels punts de la recta (x_1 , $f(x_1)$) i (x_2 , $f(x_2)$) per aplicar a continuació aquest quocient. A la figura no tenim cap quadrícula, però això no ens va impedir trobar el pendent perquè basta conèixer la variació vertical $f(x_2) - f(x_1)$ i la variació horitzontal $x_2 - x_1$ per poder calcular el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Aquestes dues variacions són les que tenim en els catets del triangle de la figura (dibuixo a la pissarra la figura de l'apartat *b*).



i pregunto quina és la longitud del segment *FB*.

A: responen que és 2,4.

P: Després pregunto quina és la longitud del segment *AF*.

A: responen que és 13,2.

P: Pregunto quin és el pendent de la recta secant *AB*.

A: Alguns alumnes responen que 0,18, mentre que d'altres responen que és 2,4/13,2.

P: Dic que la resposta és correcta, poso a la pissarra el següent i pregunto si tothom ho té clar.

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = \frac{FB}{AF} = \frac{2,4}{13,2} = 0,18$$

A: responen que sí.

P: Explico que les cinc figures de l'apartat *c* són bolcats de les que havíem vist a la classe anterior a la pantalla de l'ordinador i mentrestant amb la mà faig el gest de moure la secant cap a la tangent. A continuació pregunto a quina recta s'aproximen les rectes secants.

A: Els alumnes responen que a la tangent.

P: Poso a la pissarra la taula de l'apartat *d* i la comento. A la primera columna hi tenim les diferents rectes secants, i a la segona, llurs pendents Els faig observar que el punt $(x, f(x))$ del quocient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a la primera recta secant és el punt $(x_1, f(x_1))$; a la segona, el punt $(x_2, f(x_2))$; a la tercera, el punt $(x_3, f(x_3))$ i així successivament. A continuació poso a la casella de la segona fila i segona columna, el següent: $\dfrac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = 0,18$ i dic que completin la taula.

A: Alguns es posen a treballar i molts ja la tenen feta.

P: Pregunto quin és el pendent de la recta secant *AB'* de la primera figura de l'apartat *c*.

A: Molts alumnes responen que 0,349.

P: Observo que Laura N. ha posat tots els passos i la faig sortir a la pissarra.

A: Laura N. escriu a la taula de la pissarra $\dfrac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \dfrac{2{,}9}{8{,}3}=0{,}349$

P: Dic que arrodoneixin el resultat i escriguin amb tres xifres decimals tots els pendents. Després pregunto a Raquel G. quin és el pendent de la recta secant que passa pels punts *AB'''*.

A: Raquel G. respon que 0,548.

P: Li pregunto com ha trobat aquest resultat.

A: Raquel G. respon que dividint 1,7 entre 3,1.

P: Pregunto a Elisabeth G. quin és el pendent de la recta secant AB^{iv}

A: Elisabeth G. respon que 0,636.

P: Li pregunto com ha trobat aquest resultat.

A: Elisabeth G. respon que dividint 0,7 entre 1,1.

P: Pregunto a Rocio P. quin és el pendent de la recta secant AB^{v}

A: Rocio P. respon que 0,4 dividit per 0,6.

P: Dic que 0,4 dividit per 0,6 és 0,666, i pregunto a on s'aproximaran les rectes secants si continuem aquest procés.

A: Els alumnes responen que a la tangent.

P: Ho escric a la taula i després pregunto a on s'aproximen els pendents de les rectes secants, al pendent de la recta...........

A: Alguns alumnes diuen que al pendent de la recta tangent.

P: Comento que els pendents de les rectes secants s'aproximen al pendent de la recta tangent perquè les rectes secants s'aproximen a la recta tangent. Pregunto quin és el pendent de la recta tangent i recordo que el van calcular a l'apartat *a* d'aquesta activitat.

A: Els alumnes responen que 0,6949.

P: Escric aquest resultat amb tres xifres a la taula, que queda així:

Recta secant	Pendent de la recta secant : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Recta secant *AB*	$\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}=0{,}182$
Recta secant *AB'*	$\dfrac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}=0{,}349$
Recta secant *AB''*	$\dfrac{f(x_3)-f(a)}{x_3-a}=0{,}453$
Recta secant *AB'''*	$\dfrac{f(x_4)-f(a)}{x_4-a}=0{,}548$
Recta secant AB^{iv}	$\dfrac{f(x_5)-f(a)}{x_5-a}=0{,}636$
Recta secant AB^{v}	$\dfrac{f(x_6)-f(a)}{x_6-a}=0{,}666$
....	....
Rectes secants → Recta tangent	Pendents de les rectes secants → Pendent de la recta tangent = 0,695

A continuació escric els nombres que han sortit de la manera següent:

0,182 , 0,349 , 0,453 , 0,548 , 0,636 , 0,666 , ... → 0,695

I comento que podem assegurar que aquests nombres s'aproximen a 0,695 pel fet que les rectes secants s'aproximen a la recta tangent. Insisteixo dient que, si les rectes secants s'aproximen a la recta tangent, la inclinació de les rectes secants s'aproxima a la inclinació de la recta tangent. Dic que els nombres obtinguts confirmen la suposició visual, que en aquest exercici queda molt clara, més que no pas l'aproximació numèrica, que, de fet, es dedueix de l'aproximació visual. A continuació dic que responguin l'apartat *e*.

A: Es posen a fer aquest apartat i tinc la sensació que la majoria no sap què respondre.

P: Comento que la derivada de la funció $f(x)$ en $x = a$ és el nombre al qual s'aproximen

els quocients $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ perquè $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

A: Després d'aquest comentari alguns alumnes (pocs) responen que la derivada en $x = a$ és 0,695

P: Escric a la pissarra

$$\textit{pendent de la recta tangent} = 0{,}695 = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

i explico amb paraules que la derivada té dues interpretacions: pendent de la recta tangent i límit de les taxes mitjanes $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

I que, a causa que les rectes secants s'aproximen a la recta tangent, podem assegurar que els seus pendents, els quocients $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, s'aproximen al de la recta tangent, que

és el nombre 0,695. És a dir, que $0{,}695 = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ .Ara bé, la

definició de derivada que vam donar l'altre dia fou $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Per tant, tenim que $f'(a) = 0{,}695$. Acabo la classe repetint que la derivada en un punt es representa pel símbol $f'(a)$ i que quan ells vegin aquest símbol l'han d'interpretar com el pendent de la recta tangent o bé com el límit de les taxes mitjanes de variació

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pregunto si ho han entès.

A: Silenci.

P: Pregunto a Lluís G. si ho ha entès.

A: Lluís G respon que sí.

P: Li pregunto si està segur que ho ha entès.

A: Lluís G torna a respondre que sí.

P: Pregunto a Alfonso D. si ho ha entès.

A: Alfonso D. respon que sí.

P: Pregunto a Raúl B. si ho ha entès.

A: Raúl B respon que sí.

P: Pregunto a Oscar T. si ho ha entès.

A: Oscar T. respon que sí.

P: Pregunto a tota la classe si no hi ha ningú que no ho hagi entès.

A: Silenci.

P: Dic que em sorprèn que tothom ho hagi entès perquè no és un concepte fàcil d'entendre.

A: Sandra D. Pregunta si la a no varia, si és fixa, si sempre és la mateixa.

P: Aprofito la pregunta de la Sandra per explicar que la a pot variar, que podem escollir el valor de a que vulguem, però que, un cop escollit un valor per la a, ja no varia i el que ho fa és la x. Li responc a Sandra que a pot ser 2, 3, 4, -6 etc i que per a cada un d'aquests valors la derivada serà, per exemple, $f'(2) = 0{,}695$, $f'(3) = 1{,}2$, $f'(4) = 2$; $f'(-6) = 1$ .... També li dic que el que ha de tenir clar és que en l'expressió

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ la a és una constant, mentre que la x és una variable. Si, per

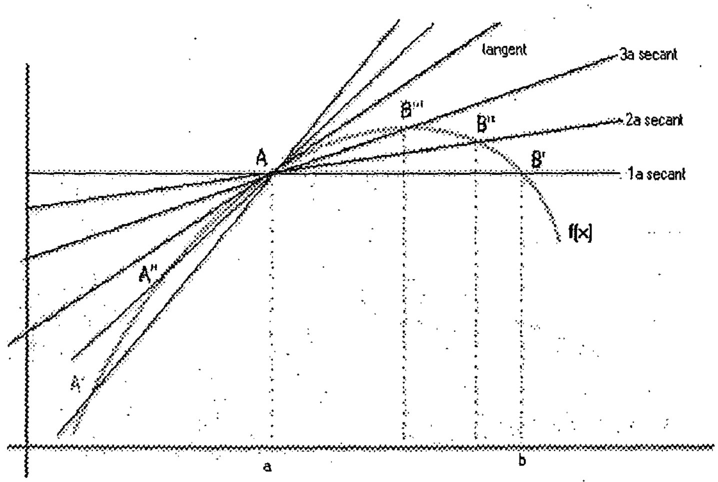
exemple, considerem $f'(2)$, llavors la a és 2 i en l'expressió $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ la x varia perquè agafa valors cada cop més pròxims a 2. Després podem calcular $f'(3)$, ara la a val 3 i la x varia, perquè agafa valors cada cop més pròxims a 3. Li faig observar que en l'expressió $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tant la a com la x són lletres, però que la a és fixa i la x varia. Aquesta duplicitat ja l'havíem vist anteriorment; per exemple: en l'expressió $y = ax + b$ tot són lletres, però a (pendent) i b (ordenada a l'origen) són constants, mentre que la x i la y varien, ja que són les coordenades dels punts de la recta. És a dir, que un cop escollit un pendent (per exemple $a = 2$) i una ordenada a l'origen (per exemple $b = 3$) tenim la recta $y = 2x + 3$, que passa per infinits punts, de manera que tenim infinits valors de la x i de la y que compleixen aquesta equació. Després podem escollir un altre valor per al pendent (4) i per a l'ordenada a l'origen (-3), obtenint la recta $y = 4x - 3$, que també passa per infinits punts i, per tant, també podem trobar infinits valors de la x i de la y que compleixen aquesta equació. És a dir, jo puc escollir entre infinits valors de la a i de la b, però un cop triats, no varien; els que varien són la x i la y. Amb la derivada passa el mateix: podem escollir el valor de la a, però un cop escollit, és fix i allò que varia és la x. A continuació pregunto a Sandra si ho ha entès.

A: Sandra diu que ho entén.

P: A continuació dic que llegeixin el paràgraf que segueix a l'activitat 17.

A: Es posen a llegir el paràgraf.

P: Mentre els alumnes llegeixen el paràgraf dibuixo a la pissarra la figura de la pàgina 327



A continuació comento que en l'activitat anterior han vist dues coses importants. La primera és la interpretació geomètrica de la derivada en un punt i escric a la pissarra el següent:

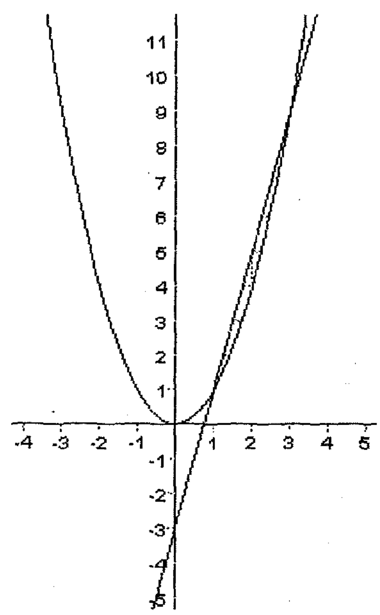
$$\textit{pendent de la recta tangent en } A = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

La segona és un mètode per determinar gràficament la recta tangent en el punt d'abscissa a: dibuixar un altre punt B' d'abscissa b. Els punts A i B' determinen una recta secant. Si mantenim A fix, en moure B' sobre el gràfic de $f(x)$, de manera que es vagi apropant a A, obtenim diverses rectes secants que s'aproximen a una recta determinada: és aquesta la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$. Mentre faig aquesta explicació, assenyalo amb la mà sobre la figura de la pissarra l'aproximació a A per la dreta (B', B'' , B''' ,....) i per l'esquerra (A' , A'' , A''', ...). A continuació remarco que aquest procediment per trobar la recta tangent a la funció en un punt permet també precisar la idea intuïtiva de recta tangent que hem utilitzat fins ara i donar-ne la següent definició: la recta tangent al gràfic de la funció $f(x)$ en el punt A és la recta a la qual s'aproximen les rectes secants que passen per A i per un altre punt B del gràfic quan B s'aproxima a A.

Dic que seguidament farem l'activitat 18, que té per objectiu repetir el procés que hem vist a l'activitat 17, però sense ordinador i on l'aproximació numèrica dels pendents de les rectes secants al pendent de la recta tangent queda més clar. Dic que facin a casa seva els apartats a i b amb paper mil·limetrat i que després ho enganxin al quadern i que ara facin els apartats a i b graduant els eixos de coordenades, de manera que hi hagi dos quadres entre dues marques.

A: Es posen a fer l'activitat 18.

P: Després d'una estona dibuixo a la pissarra la gràfica de la funció $f(x)= x^2$ i la recta secant que passa pels punts (1,1) i (3,9) i faig sortir a la pissarra Silvia V. perquè calculi el pendent d'aquesta secant.

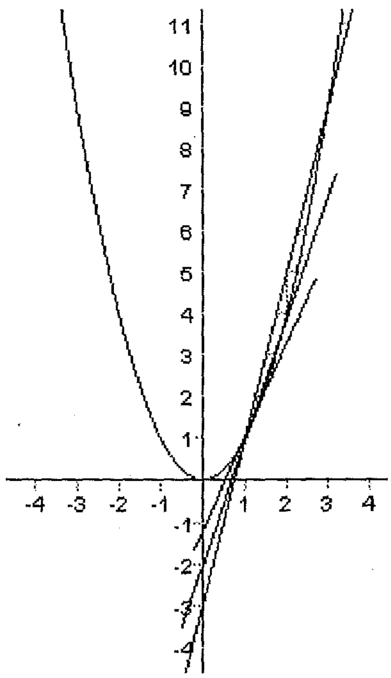


A: Silvia V. escriu el següent: $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

P: Dic que facin l'apartat *b* de manera semblant.

A: Es posen a treballar.

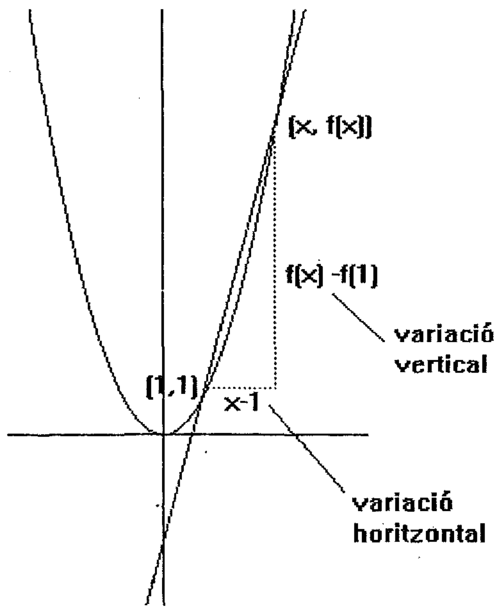
P: Al cap d'una estona observo que la majoria dels alumnes han respost correctament i dibuixo a la gràfica de la pissarra les dues secants de l'apartat *b*.



i pregunto als alumnes el valor dels seus pendents.

A: Tots plegats responen que 3 i 2,5.

P: Explico com han d'interpretar la taula de l'apartat *c*. Dibuixo a la pissarra la figura següent i comento que sobre aquesta figura $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ és el quocient que resulta de dividir la variació vertical per la variació horitzontal, i que aquest nombre també és el pendent de la recta secant que passa pels punts (1,1) i pel punt $(x, f(x))$



I que si considerem que $x = 3$ tenim $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$, si considerem $x = 2$ tenim $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ etc.

A continuació escric la taula de l'apartat *c* amb els resultats dels apartats *a* i *b*.

x	3	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 4$	$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3$	$\frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1} = 2,5$				

pregunto a Sandra D., Jordi C., David G. i Rocio P. els resultats de les caselles que falten.

A: Sandra D. respon 2,1; Jordi C. respon 2,01 ; David G respon 2,001 i Rocio P. respon 2,0001.

P: Completo la taula de la pissarra amb aquests resultats.

x	3	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 4$	$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 3$	$\frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1} = 2,5$	2,1	2,01	2,001	2,0001

A continuació dic que en els apartats *d, e* i *f* s'ha de fer el mateix que en els apartats *a, b* i *c* , però que ara les rectes secants passen pel punt (1,1) i per un punt de la gràfica que està a l'esquerra del punt (1,1) i ho assenyalo sobre la gràfica que encara està a la pissarra. Dic que a casa seva dibuixin les rectes secants amb paper mil·limetrat i que ara calculin els pendents per completar la taula de l'apartat *f*.

A: Es posen a treballar.

P: Al cap d'una estona escric a la pissarra la taula següent:

x	-1	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	$\frac{f(-1)-f(1)}{-1-1}=?$	$\frac{f(0)-f(1)}{0-1}=?$	$\frac{f(0{,}5)-f(1)}{0{,}5-1}=?$	?	?	?	?

i pregunto a David M., Laura N., Alicia M., Judit P., Alfonso M., Pilar G. i Raúl C. els resultats.

A: David M. respon 0; Laura N. respon 1; Alicia M. respon 1,5; Judit P. respon 1,9; Alfonso M. respon 1,99; Pilar G. respon 1,999 i Raúl C respon 1,9999.

P: Completo la taula de la pissarra amb aquests resultats

x	-1	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$	$\frac{f(-1)-f(1)}{-1-1}=0$	$\frac{f(0)-f(1)}{0-1}=1$	$\frac{f(0{,}5)-f(1)}{0{,}5-1}=1{,}5$	1,9	1,99	1,999	1,9999

P: pregunto cap a quin nombre s'aproximen els quocients $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ de les dues taules quan $x \to 1$ (apartat *h*).

A: Responen que 2.

P: Pregunto quin és el pendent de la recta tangent al gràfic en $x = 1$ (apartat *i*) i dic que pensin en la relació que hi ha entre el pendent de la recta tangent i el límit dels quocients

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

A: Alguns alumnes (no gaires) responen que també és 2.

P: Dic que efectivament és 2, i els faig observar que els apartats *g* i *h* són dues maneres diferents de preguntar el mateix. A continuació pregunto quin valor té la derivada de la funció $f(x)=x^2$ en $x=1$.

A: Jordi C., Sandra D., Victor B. i alguns altres (pocs) responen que també és 2.

P: Dic que efectivament torna a ser 2 i els faig observar que els apartats *g*, *h* i *i* són tres maneres diferents de preguntar el mateix. Mentrestant poso a la pissarra el següent:

pendent de la recta tangent (en $x = 1$) = 2 = $f'(1)$ = $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

i explico els diferents significats que té la derivada en un punt. Acaba la classe i dic que facin els apartats *j* i *k* per a la propera classe A.

Valoracions

1) Es nota que ha començat un període d'exàmens per posar les notes de la primera avaluació. Això incideix molt negativament en la gestió de la classe perquè es nota que estan pensant en altres assignatures i perquè falten molts alumnes.

2) Avui ha estat una classe en què jo he tingut una participació molt activa.

3) En relació als ítems 29-35 del subobjectiu 3.3

Ítem 29	Els alumnes van entenent la recta tangent com la que més s'aproxima a la corba en les proximitats del punt, i reconeixen una recta tangent encara que toqui a la corba en més d'un punt.
Ítem 30	Els alumnes entenen que si amb un ordinador fem un zoom adequat, una corba i la seva recta tangent coincidiran en les proximitats del punt.
Ítem 31	Els alumnes entenen la recta tangent com la recta a la qual s'aproximen les secants.
Ítem 32	Els alumnes entenen que el pendent de la recta tangent és el nombre al qual s'aproximen els pendents de les rectes secants.
Ítem 33	Els alumnes entenen la relació que hi ha entre el pendent de la recta tangent i el concepte de derivada de la funció en un punt.

La comprensió d'aquests ítems s'ha de continuar treballant al llarg de tota la unitat

5.2.9 Subseqüència 2 d'avaluació. Qüestionari 4

De la nostra intervenció a l'aula teníem la sensació que els alumnes havien desenvolupat uns objectes personals i uns significats personals del contingut <<taxa mitjana de variació>> d'acord amb les nostres expectatives. En relació al contingut <<velocitat mitjana>> una de les conclusions que havíem tret era que els alumnes entenien que la velocitat mitjana és l'espai dividit pel temps i que sabien calcular-la entre dos instants donats, fins i tot si són molt pròxims En relació al contingut <<velocitat instantània>> dubtàvem que tots haguessin entès que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes. El qüestionari 4 tenia per objectiu realitzar una activitat d'avaluació formativa per analitzar si la integració dels objectes personals i dels significats personals dels continguts <<pendent>> , <<taxa mitjana de variació>> , <<velocitat mitjana>> i <<velocitat instantània>> dels alumnes s'havia fet d'acord amb les nostres expectatives i, més en concret, volíem esbrinar si l'objecte personal i el significat personal del contingut <<velocitat instantània>> dels alumnes els permetia utilitzar-lo en contextos en què havien de posar en funcionament el sentit <<límit de velocitats mitjanes>>.

El qüestionari que vam elaborar fou el següent:

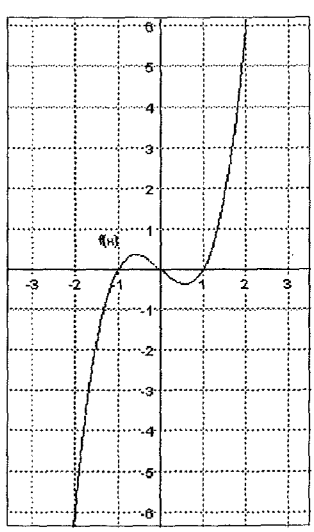
QÜESTIONARI 4

1 Donada la funció $f(x)$ troba:

a) La variació de la funció entre -2 i 0.

b) La taxa mitjana de variació de la funció entre x=-1 i x = 2.

c) Un nombre a tal que la variació entre a i 1 sigui zero.



2 Donada la funció $f(x) = x^2 + 3$ calcula:

a) La taxa mitjana de variació de la funció entre $x = 1$ i $x = 3$.

a) El pendent de la recta secant que passa pels punts $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.
b) L'equació de la recta secant que passa pels punts $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.

3 La taula següent reflecteix l'espai recorregut per un cotxe i el temps transcorregut:

Temps	4	4,9	4.99	4,999	....	5
Distància en m (des del km 0)	81	121,05	125,5005	125,950005	....	126

a) Calcula la velocitat mitjana durant els 4 primers segons.
b) Calcula la velocitat mitjana durant els 5 primers segons.
c) Calcula la velocitat mitjana entre $t = 4$ segons i $t = 5$ segons.
d) Calcula la velocitat mitjana entre $t = 4{,}9$ segons i $t = 5$ segons.
e) Calcula la velocitat mitjana entre $t = 4{,}99$ segons i $t = 5$ segons.
d) Quina és la velocitat instantània en $t = 5$ segons?

Aquest qüestionari es va passar a la meitat dels alumnes a l'hora *B* del divendres 5-12-97 i a l'altra meitat no es va poder passar perquè durant l'hora *B* del divendres 12-12-97 vam fer el primer examen.

Sessió 5-12-97

Planificació prèvia

1) Passar el qüestionari 4 sobre els continguts taxa mitjana de variació, velocitat mitjana i velocitat instantània.
2) Utilitzar la 2a part de la classe per comentar els resultats del qüestionari.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Laura A., Albert C, Alberto C. i Mike D.

P: Distribueixo els 17 alumnes perquè facin el qüestionari 4 individualment. Reparteixo el qüestionari 4 i els faig observar que l'han de contestar individualment. També dic que el seu l'objectiu és saber si han entès els conceptes de taxa mitjana de variació , velocitat mitjana i velocitat instantània.

A: Es posen a treballar individualment per respondre el qüestionari 4. Tarden entre 22 minuts (el primer en lliurar-lo) i 33 minuts (l'últim).

P: Mentre han anat lliurant el qüestionari he anat mirant les seves respostes. Quan els he recollit tots observo que queda molt poc temps per comentar- les i decideixo comentar només la tercera pregunta. Faig els apartats *a-e* del problema 3 a la pissarra:

a) $v_{\mathrm{m}} = 81 / 4 = 20{,}25$ m/s

b) $v_{\mathrm{m}} = 126 / 5 = 25{,}2$ m/s

c) $v_m(4{,}5) = \dfrac{126-81}{5-4} = 45 m/s$

d) $v_m(4{,}9\ {,}5) = \dfrac{126-121{,}05}{5-4{,}9} = \dfrac{4{,}95}{0{,}1} = 49{,}5 \text{ m/s}$

e) $v_m(4{,}99\ {,}5) = \dfrac{126-125{,}5005}{5-4{,}99} = \dfrac{4{,}995}{0{,}01} = 49{,}95 \text{ m/s}$

A continuació dic que fins aquí l'activitat es podia respondre fàcilment i que la pregunta difícil era la de l'apartat *f*, ja que per calcular la velocitat instantània en $t = 5$ s, cal tenir molt clar aquest concepte (escric a la pissarra)

$$v(5) = \lim_{t \to 5} v_m(5,t) = \lim_{t \to 5} \frac{d(t)-d(5)}{t-5}$$

explico que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes i que, per tant, per respondre la pregunta s'havia de calcular primer la velocitat mitjana entre $t = 5$ s i l'instant 4,999 (escric a la pissarra)

$$v_m(4{,}999\ {,}5) = \frac{126-125{,}950005}{5-4{,}999} = \frac{4{,}9995}{0{,}001} = 49{,}995 m/s$$

i després fer la hipòtesi que la velocitat instantània en $t = 5$ s és 50 m/s perquè les velocitats mitjanes quan $t \to 5$ sembla que s'aproximen a 50 m/s (escric a la pissarra)

45 m/s , 49, 5 m/s , 49,95 m/s , 49,995 m/s ......$\to$ 50 m/s

Tot seguit faig observar que una resposta acceptable era dir que no teníem prou informació per calcular la velocitat instantània en $t = 5$, mentre que allò que no es podia respondre de cap manera era 126/5 = 25,2 m/s, perquè això implica confondre la velocitat mitjana amb la velocitat instantània. I molt menys respondre 126, perquè això implica confondre l'espai amb la velocitat.

Segueixo comentant les seves respostes a la pregunta 3. Dic que tots han respost correctament l'apartat *a* encara que tres d'ells (Victor B., Jessica C. i Jordi C.) no han posat les unitats i que Alfonso D. ha posat km/s .

A: Alfonso diu que ha llegit malament la frase que diu "Distància en m (des del km 0)" i que per això ha agafat la distància en km.

P: Comento que l'apartat *b* l'han respost tots menys Raquel G., que ha agafat la columna següent a la dels quatre segons en comptes d'agafar la columna corresponent als cinc segons i Alex A.que també ha comès el mateix error.

A: Alex diu que s'ha despistat perquè en ser 5 el següent de 4 ha agafat la columna següent. Raquel diu que a ella li ha passat el mateix.

P: Comento que tots menys 4 (2 en blanc) han respost correctament l'apartat *c*. Pregunto a Patricia F. i Raquel G. per què han deixat la resposta en blanc.

A: Patricia diu que ha faltat a algunes classes i que va faltar quan vaig explicar la velocitat instantània . Raquel diu que ella també va faltar.

P: Els dic que ja poden estudiar per a l'examen i que em preguntin els dubtes que tinguin

A: Diuen que ho faran.

P: Pregunto a Jordi C. per què ha respost $\dfrac{25{,}2 - 20{,}25}{5-4} = 4{,}95$

A: Jordi dóna una explicació que no entenc.

P: Li dic que no entenc la seva explicació.

A: Jordi diu que ell tampoc.

P: Li pregunto a Alex A. per què ha respost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{121{,}05 - 81}{4{,}9 - 4} = 44{,}5 m/s$$

A: Alex diu que s'ha equivocat de columna, però que ho té clar i que en les altres respostes ha corregit aquest error.

P: Passo a comentar les respostes de l'apartat *d.*. Dic que 13 alumnes han respost correctament, 2 han respost en blanc (Patricia F. i Raquel G), Jordi C. ha respost 121,05/4,9 = 24,7 i Jordi Agustina ha respost 126-121,05. Li dic a Jordi C. que el que ha fet ha estat calcular la velocitat mitjana durant els 4,9 primers segons.

A: Jordi respon que sí.

P: Li dic a Jordi A. que no ha dividit pel temps.

A: Jordi diu que sí que ho ha fet, però que en aquest cas el temps és 1 segon.

P: Li responc que això és veritat en l'apartat *c,* on ha ell ha respost 126-81 perquè

126-81 = $\dfrac{126-81}{5-4}$,però que en aquest apartat la resposta correcta és

$$v_m(4{,}9\ ,5) = \frac{126 - 121{,}05}{5 - 4{,}9} = \frac{4{,}95}{0{,}1} = 49{,}5 \text{ m} / \text{s}$$

i que confon una dècima de segon amb un segon.

A: Jordi diu ¡Ah clar!, ara ho entenc.

P: Li torno a preguntar a Jordi si ho entén.

A: Jordi respon que ara sí.

P: Li dic a Alex A. que ara sí que ha respost correctament. A continuació passo a comentar les respostes a l'apartat *e* i dic que 12 han respost correctament, 2 han respost en blanc (Patricia F. i Raquel G), Jordi A. ha comès l'error de confondre una centèsima amb 1 segon, Jordi C., ha tornat a calcular la velocitat mitjana des de l'instant zero (125,5005 / 4,99 = 25,15) i Isabel G., s'ha equivocat restant en el denominador (0,4995/0,001).

A: Isabel G.diu que entén el seu error. Jordi A. i Jordi C. també diuen que entenen el seu error.

P: Comento les seves respostes a l'apartat f) i dic que 4 alumnes (Alex A, David G., Alfonso D., Raúl C. han calculat la velocitat mitjana durant els cinc primers segons i poso a la pissarra 126/5 = 25,2 m/s; que 6 (Patricia F. , Raquel G., Jaime G. Javier F., Esther E.,Isabel G), han respost en blanc; que 4 (Victor B., Pilar G., Jordi A i Jessica C.) han respost 126 m, que és l'espai recorregut durant els cinc primers segons; que Jordi C. ha respost $\frac{25,2-24,7}{5-4,9}=5$; i que només dos alumnes (Sandra D. i Raúl B.) han respost correctament, encara que cap ha calculat la velocitat mitjana entre 4,999 i 5. Sandra D no dóna cap justificació per a la seva resposta i Raúl B. ha fet referència que la velocitat mitjana és el límit de les velocitats mitjanes, encara que s'ha equivocat en la notació. En aquest moment toca el timbre i acaba la classe.

Valoracions

1) Els alumnes semblaven molt cansats. Aquesta classe és el divendres de 13,30 a 14,30 i és l'última classe de la setmana. A més avui han fet un examen a la classe anterior, la qual cosa ha fet que la classe comencés amb deu minuts de retard.

2) Un dels problemes d'aquesta classe és que falten molt. Avui Raquel G. i Patricia F. han reconegut que les seves faltes influeixen sobre el seu rendiment. El costum que tenen els

alumnes de tercer de BUP de faltar quan tenen un examen d'una altra assignatura crea molts problemes de seguiment perquè estem treballant els continguts més importants (velocitat instantània i derivada en un punt) en el període d'exàmens.

3) Han seguit amb força interès els comentaris sobre les seves respostes. Tinc la impressió que per a molts d'ells els comentaris que he fet sobre les seves respostes han estat molt útils per millorar la seva comprensió de la velocitat instantània.

4) Crec que en general saben calcular la velocitat mitjana aplicant la fórmula espai/temps. També saben calcular la velocitat mitjana entre dos instants de temps molt pròxims.

5) En una situació de fort conflicte cognitiu, en què cal tenir molt clar que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes, molts alumnes opten per la velocitat mitjana i fins i tot cometen errors més greus com és confondre la velocitat amb l'espai.

Valoració de les respostes al qüestionari 4 (dia 5-12-97)

Primera pregunta

Apartat *a*

- Una (6%) alumna (Raquel G.) confon la variació d'ordenades amb la variació d'abscisses i també s'equivoca en l'ordre ja que, en comptes de considerar $x_2 = 0$ i $x_1 = -2$, agafa $x_2 = -2$ i $x_1 = 0$. La seva resposta és:
$$\text{Variació} = x_2 - x_1 = -2 - 0 = -2$$
- Una (6%) alumna (Isabel G.) respon -1 sense cap tipus d'explicació.
- Una (6%) alumna (Sandra D) respon en blanc.
- 10 (60%) alumnes confonen la variació de la funció amb la taxa de variació de la funció. 6 (36%) d'aquests alumnes (Alfonso D., David G., Alex A., Javier F.,Esther E. i Jordi C.) calculen la taxa .mitjana de.variació correctament, mentre que 4 (24%) la calculen malament (Raúl B., Jordi A., Jessica C. i Pilar G.).
- Un (6%) alumne (Victor B.) s'equivoca en l'ordre ja que, en comptes de considerar $x_2 = 0$ i $x_1 = -2$, agafa $x_2 = -2$ i $x_1 = 0$. La seva resposta és:
$$f(x_2) - f(x_1) = -6 - 0 = -6$$

- 3 (24%) alumnes (Patricia F., Jaime G., i Raúl C.) responen correctament, encara que Patricia i Raúl no utilitzen correctament la notació $f(x_2)$-$f(x_1)$. Només Jaime G. dóna una resposta del tot correcta:

$$f(x_2)-f(x_1) = 0 - (-6) = 6$$

Apartat *b*

- 8 (48%) alumnes (Isabel G., Alex A., David G., Alfonso D., Jordi A, Raúl C., Jaime G. i Raúl B) calculen correctament la taxa mitjana de variació.
- 5 (30%) alumnes (Javier F., Patricia F., Victor B., Sandra D. i Raquel G.) calculen malament la taxa mitjana de variació, encara que de les seves respostes es pot deduir que tenen clar el sentit funcional de taxa mitjana de variació. Victor B s'equivoca al final i respon que 6/3 és 3. Sandra D. s'equivoca perquè calcula la taxa mitjana de variació entre 1 i 2, en comptes de fer-ho entre -1 i 2, Javier F. i Patricia F. s'equivoquen en la lectura de les coordenades del punt (2 , 6) i agafen el punt (2 , 5) i Raquel G. calcula la taxa .mitjana de variació entre -2 i 0 en comptes de calcular la taxa mitjana de variació entre -1 i 2.
- 3 (18%) alumnes donen respostes de les quals es dedueix que no poden usar el sentit funcional de la taxa mitjana de variació.
- Una (6%) alumna (Esther E.) respon en blanc.

En relació als alumnes que responen correctament, cal destacar que podem trobar tres tipus de resposta:

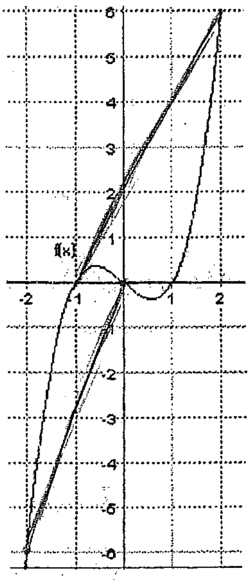
- Els que responen només $\dfrac{6-0}{2-(-1)} = \dfrac{6}{3} = 2$

- Els que utilitzen el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{2-0} = \frac{6}{3} = 2$$

- Els que utilitzen el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i a més dibuixen la recta secant que passa pels punts (-1 , 0) i (2 , 6). Només 2 alumnes (Alex A. i Alfonso D.) donen aquest tipus de resposta en què es posa de manifest la integració dels sentits funcionals i geomètrics de la taxa mitjana de variació. La resposta d'Alex A. fou:

1 Donada la funció $f(x)$ troba:
a) La variació de la funció entre -2 i 0
b) La taxa mitjana de variació de la funció entre x=-1 i x = 2.
c) Un nombre a tal que la variació entre a i 1 sigui zero.



a) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{0-(-6)}{0-(-2)} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$

b) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{6-0}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$

c) $a = 1$ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

Apartat *c*

- Blanc. Dos (12%) alumnes (Esther E., i Javier F.)
- 0,75. Una (6%) alumna (Pilar G.)
- 1. Una (6%) alumna (Raquel G.)
- -1. Set (41%) alumnes (David G., Jessica C., Sandra D., Patricia F., Raúl C., Alfonso D., Isabel G).
- 0. Sis (35%) alumnes (Alex A., Jordi C., Jordi A., Jaime G., Victor B. i Raúl B.)

Si bé les 13 respostes 0 i -1 són correctes, només dues (12%) es poden considerar correctes (Victor B. i Patricia F.). Aquests dos alumnes no donen cap justificació, però han utilitzat la noció de variació de la funció entre dos punts per respondre l'apartat *a* d'aquesta mateixa pregunta.

Cal destacar que en les justificacions dels alumnes s'observen dos tipus d'errors: 1) La confusió entre la taxa mitjana de variació i la variació de la funció i 2) la confusió entre la variació d'una funció i la variació d'abscisses. El primer tipus d'error es pot observar en la resposta d' Alex A (recollida en les respostes a l'apartat b) mentre que el segon tipus d'error es pot observar en la resposta de Jaime G.:

$$f(x_2) - f(x_1) = 1 -(-1) = 0$$

Valoració de les respostes a la primera pregunta

- La variació d'una funció és un contingut que els alumnes no tenen clar. Un dels defectes de la unitat és la suposició que els alumnes coneixen aquest contingut. En una segona elaboració de la unitat cal treballar més a fons aquest contingut.
- El sentit funcional de la taxa mitjana de variació entre dos punts és un contingut que els alumnes tenen força assumit (80%) ,

Segona pregunta

Apartat *a*

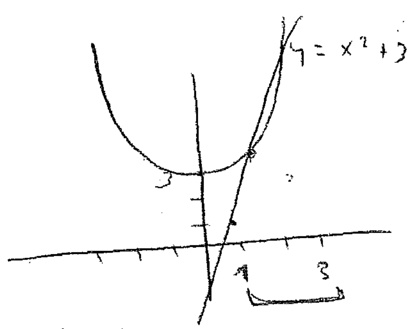
16 (94%) alumnes responen correctament aquest apartat. Només una alumna (6%) respon incorrectament (Esther E.) perquè en comptes de calcular el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ calcula els quocients $\frac{f(x_1)}{x_1}$ i $\frac{f(x_2)}{x_2}$ per separat. Els alumnes que responen correctament utilitzen explícitament o implícitament el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Apartat *b*

- 12 alumnes (71%) responen correctament.
- 1 (6%) alumna (Patricia F.) respon en blanc.

- Dos (12%) alumnes (Raúl B. i Jordi A.) apliquen el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i cometen l'error de confondre la variació de la funció amb la variació de l'abscissa.
- Dues alumnes (Jessica C. i Raquel G.) dibuixen la paràbola i una recta secant i apliquen que el pendent és l'augment vertical dividit per l'augment horitzontal. Raquel G. s'equivoca en calcular l'augment vertical, mentre que Jessica C. s'equivoca en calcular l'augment horitzontal. Per exemple, la resposta de Raquel G. fou la següent:

(2) $f(x) = x^2 + 3$



a) t.m.v. = $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 4}{3 - 1} = \frac{8}{2} = (4)$

b) pendent r.s. = $\frac{\text{alç}}{\text{base}} = \frac{2}{2} = (1)$

c) $e_1 = \boxed{y = x}$

- 5 (29%) alumnes han respost de manera diferent els apartats *a* i *b*. 4 alumnes (Raúl B. , Jordi A., Jessica C. i Raquel G) han calculat correctament la taxa mitjana de variació i s'han equivocat en el càlcul del pendent, mentre que Esther E. s'equivoca en el càlcul de la taxa mitjana de variació però calcula correctament el pendent.

Apartat *c*

- 4 (24%) alumnes (Jaime G., Victor B., Jordi C. i Alfonso D.) calculen correctament l'equació de la recta secant.
- 1 (6%) alumne (Jordi A.) aplica el procediment correctament, però s'havia equivocat en calcular el pendent a l'apartat anterior.

- 1 (6%) alumne (Alex A.) aplica el procediment correctament, però s'equivoca perquè passa un nombre que està sumant a l'altre costat de la igualtat dividint.
- 3 alumnes (Raúl C., Isabel G. i Sandra D.) confonen el pendent amb l'equació de la recta secant i responen <<4>>.
- 6 alumnes (Pilar G., David G., Esther E., Javier F., Jéssica C. i Patricia F.) responen en blanc.
- 1 (6%) alumne (Raúl B.) respon que l'equació de la recta secant és $y = x^2$
- 1 (6%) alumna (Raquel G.) respon que l'equació de la recta secant és $y = x$ sense donar cap justificació.

Entre les respostes correctes la més elaborada és la de Victor B. que dóna la resposta següent:

Equació de la recta secant que passa pe $P_1(1,4)$ $P_2(3,12$

$y = mx + b$

m = pendent $= 4$

b = ordenada a l'origen.

$y = 4x + b$ substituim $4 = 4 \cdot 1 + b$; $b = 0$

Valoració de les respostes a la segona pregunta

- El sentit funcional de la taxa mitjana de variació entre dos punts és un contingut que els alumnes tenen força assumit (94%).
- El càlcul de la taxa mitjana de variació millora quan la forma de presentació de la funció és una fórmula senzilla (pregunta 2) i empitjora quan la forma de presentació és la gràfica de la funció (pregunta 1).
- La integració dels sentits funcional i geomètric de la taxa mitjana de variació és força elevada (71%).
- Els alumnes tenen dificultats per calcular l'equació de la recta secant (només el 35% domina el procediment).

Tercera pregunta

Apartat *a*

Tots (100%) han respost correctament, encara que tres d'ells (Victor B., Jessica C. i Jordi C.) no han posat les unitats i que Alfonso D. ha posat km/s .

Apartat *b*

Tots han respost correctament, menys Raquel G. i Alex A.(88%), que han agafat la columna següent a la dels quatre segons en comptes d'agafar la columna corresponent als cinc segons .

Apartat *c*

Tots han respost correctament menys 2 (Jordi A.i Alex A) i 2 en blanc (Patricia F. i Raquel G.) (76%). Jordi A. ha respost $\dfrac{25{,}2-20{,}25}{5-4}=4{,}95$ i Alex A s'ha equivocat de columna i ha respost $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{121{,}05-81}{4{,}9-4}=44{,}5m/s$

Apartat *d*

- 13 (71%) alumnes han respost correctament.
- 2 (12%) han respost en blanc (Patricia F. i Raquel G.).
- Jordi C. (6%) ha respost 121,05 / 4,9 = 24,7.
- Jordi A. (6%) ha respost 126-121,05 (confon una dècima de segon amb un segon).

Apartat *e*

- 12 (71%) han respost correctament.
- 2 (12%) han respost en blanc ((Patricia F. i Raquel G.),
- Jordi A.(6%) ha comes l'error de confondre una centèsima amb 1 segon.
- Jordi C.(6%), ha calculat la velocitat mitjana des de l'instant zero (125,5005/ 4,99 = 25,15).
- Isabel G (6%) s'ha equivocat restant en el denominador (0,4995 / 0,001).

Apartat *f*

- 4 (24%) alumnes (Alex A, David G., Alfonso D., Raúl C. han calculat la velocitat mitjana durant els cinc primers segons (126/5 = 25,2 m/s).

- 6 (35%) (Patricia F. , Raquel G., Jaime G., Javier F., Esther E.,Isabel G.), han respost en blanc.
- 4 (24%) (Victor B., Pilar G., Jordi A. i Jessica C.) han respost 126 m, que és l'espai recorregut durant els cinc primers segons.
- Jordi C. (6%). ha respost $\dfrac{25{,}2 - 24{,}7}{5 - 4{,}9} = 5$.
- 2 (12%) alumnes (Sandra D.i Raúl B.) han respost correctament, encara que cap ha calculat la velocitat mitjana entre 4,999 i 5. Sandra D no dóna cap justificació per a la seva resposta i Raúl ha fet referència al fet que la velocitat mitjana és el límit de les velocitats mitjanes, encara que s'ha equivocat en la notació. La resposta de Raúl B. fou

3) a) $\dfrac{81\,m}{4\,seg} = 20{,}25$ m/seg

b) $\dfrac{126\,m}{5\,seg}$ 25,2 m/seg

c) $\dfrac{126 - 81}{5 - 4} = 45$ m/seg

d) $\dfrac{126 - 121{,}05}{5 - 4{,}9} = 49{,}5$ m/seg

e) $\dfrac{126 - 125{,}5005}{5 - 4{,}99}$ 49,95 m/seg

f) $v = \lim_{x \to 5} \dfrac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = 50$ m/seg

Valoracions a les respostes a la tercera pregunta

1) En general saben calcular la velocitat mitjana aplicant la fórmula espai/temps. També saben calcular la velocitat mitjana entre dos instants de temps molt pròxims.

2) En una situació de fort conflicte cognitiu en què cal tenir molt clar que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes, molts alumnes opten per la velocitat mitjana i fins i tot cometen errors més greus com és confondre la velocitat amb l'espai. No tenen clar que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes.

5.2.10. Subseqüència 5. Interpretació geomètrica de la derivada en un punt (Continuació)

Sessió del 9-12-97

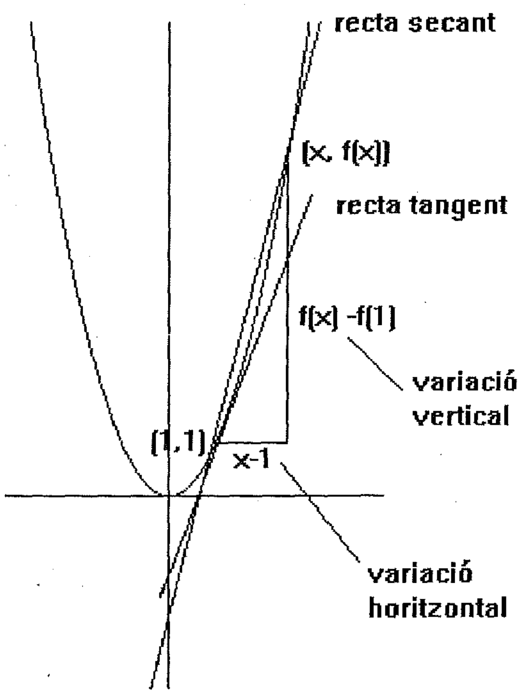
Planificació prèvia

1) Treballar les activitats 18 i 19.
2) Comentar els errors detectats en les respostes del qüestionari 4.
3) Iniciar la subseqüència 6 (càlcul de la derivada en un punt).

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Elia G.i Laura A.

P: Començo recordant que a la classe del 4-12-97 havíem contestat els apartats *a-i* de l'activitat 18 i en faig un petit resum-recordatori. Dibuixo a la pissarra el següent:



$$\textit{pendent de la recta tangent (en } x = 1) \quad = 2 = f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

mentre comento que $f'(1)$ és el símbol que utilitzem per representar la derivada en el punt $x=1$ i que $f'(1)$ és el pendent de la recta tangent en $x=1$. I, com que la recta tangent és el límit de les rectes secants, per calcular $f'(1)$, hem de calcular el límit dels pendents de les rectes secants $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$,és a dir, el límit de les taxes mitjanes de variació quan

$x \to 1$. També remarco que l'apartat *g* que pregunta el límit de les taxes mitjanes de variació quan $x \to 1$; l'apartat *h* que pregunta el pendent de la recta tangent a la corba en x=1; i l'apartat *i* que pregunta la derivada en el punt x=1 són tres maneres diferents de fer la mateixa pregunta. Continuo dient que havien de fer els apartats *j* i *k* a casa seva i pregunto a tota la classe quines són les coordenades del punt de tangència, o sigui el punt comú a la corba i a la recta tangent.

A: Molts alumnes responen que és el punt (1,1).

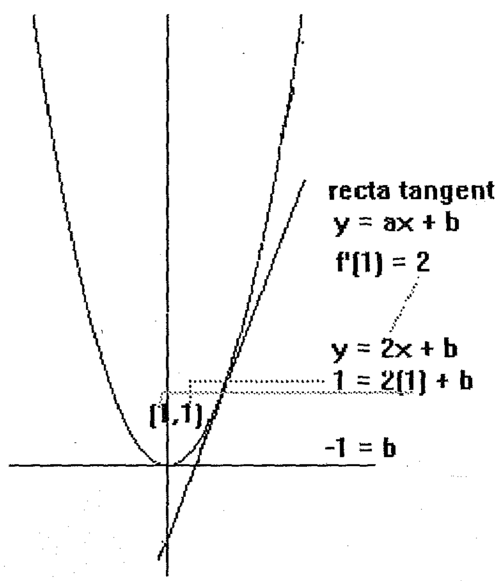
P: Explico que, per trobar aquest punt, s'ha de substituir en la fórmula de la funció la x per 1, i escric a la pissarra:

$$(1\ ,\ f(1)) = (1\ ,\ 1^2) = (1\ ,\ 1)$$

Pregunto als alumnes si ho entenen.

A: Responen que sí.

P: Dic que a continuació trobarem l'equació de la recta tangent amb el mateix procediment que vam utilitzar en l'activitat 11 per trobar l'equació de la recta secant. I, mentre ho comento, escric a la pissarra el següent:



La recta tangent, pel fet de ser recta, té una equació del tipus $y = ax + b$. El pendent d'aquesta recta és la derivada de la funció en $x = 1$. Com que sabem que $f'(1)$ =2, tenim que l'equació de la recta tangent és $y = 2x + b$. Aquesta recta passa pel punt de tangència $(1,1)$, la qual cosa vol dir que les coordenades d'aquest punt compleixen aquesta equació, és a dir, que si substituïm la <<x>> per la primera coordenada i la y per la segona, la b ha de ser un nombre que compleixi $1 = 2(1) + b$, d'on s'obté $b = -1$.

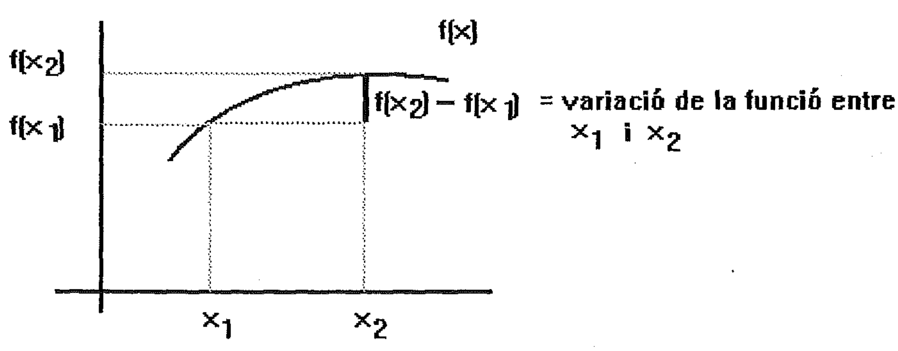
A: Alex A. em demana si ho puc repetir.

P: Repeteixo l'explicació i aprofito la seva pregunta per comentar-li que el nombre 2 de l'equació $1 = 2 + b$ passa a l'altre costat de la igualtat restant, i no dividint (Alex havia comès aquest error en la segona pregunta del qüestionari del dia 5-12-97). Li pregunto si sap per què li faig aquest comentari.

A: Alex em respon que sí.

P: Explico que d'aquesta manera es troba l'equació de la recta tangent i que hem acabat l'activitat 18. A continuació comento que, abans de continuar fent les activitats del dossier, vull clarificar alguns dels errors que vaig observar en les respostes del qüestionari del dia 5-12-97

- Dic que tenen bastant clar el concepte de pendent.
- En relació a la taxa mitjana de variació dic que molts alumnes confonen la variació d'una funció entre dos punts amb la taxa mitjana de variació d'una funció entre dos punts. Després explico la diferència entre aquests dos continguts posant a la pissarra i comentant la figura següent:



insistint que la variació d'una funció és la variació vertical, mentre que la taxa mitjana de variació és el quocient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ que ens dóna la variació vertical per unitat horitzontal.

- També comento que sembla que tenen més problemes per trobar la taxa mitjana de variació a partir de la gràfica que a partir d'una fórmula senzilla. Això és així perquè, si la fórmula de la funció és senzilla, calcular el quocient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ és relativament fàcil. En canvi, si en comptes de la fórmula tenim la gràfica, hi han de buscar dos punts i, a partir d'ells, determinar la variació vertical i l'horitzontal per fer la divisió a continuació. Això últim provoca errors del tipus: lectura incorrecta de les coordenades dels punts, equivocacions en el signe de les variacions, etc.

- Comento que alguns alumnes (pocs) no tenen clar que el pendent de la recta secant i la taxa mitjana de variació són el mateix.

- Dic que també vaig observar dificultats per trobar l'equació d'una recta un cop sabem el seu pendent. Una recta (secant o tangent) , pel fet de ser recta, té una equació del tipus $y = ax + b$. Si sabem el pendent d'aquesta recta i un punt, per trobar b hem de substituir la x per la primera coordenada i la y per la segona, llavors la b ha de ser un nombre que compleixi l'equació que en resulta.

A continuació dic que facin pel seu compte les activitats 1-4 de <<Per practicar més>> (pàg. 353) i 1-2 de <<Autoavaluació>> (pàg. 362) per tal de clarificar les dificultats que acabo de comentar. Explico que les dues primeres preguntes del qüestionari del dia 5-12-97 són semblants a les activitats que acabo d'anomenar, mentre que la pregunta 3 del qüestionari tractava sobre la velocitat instantània.

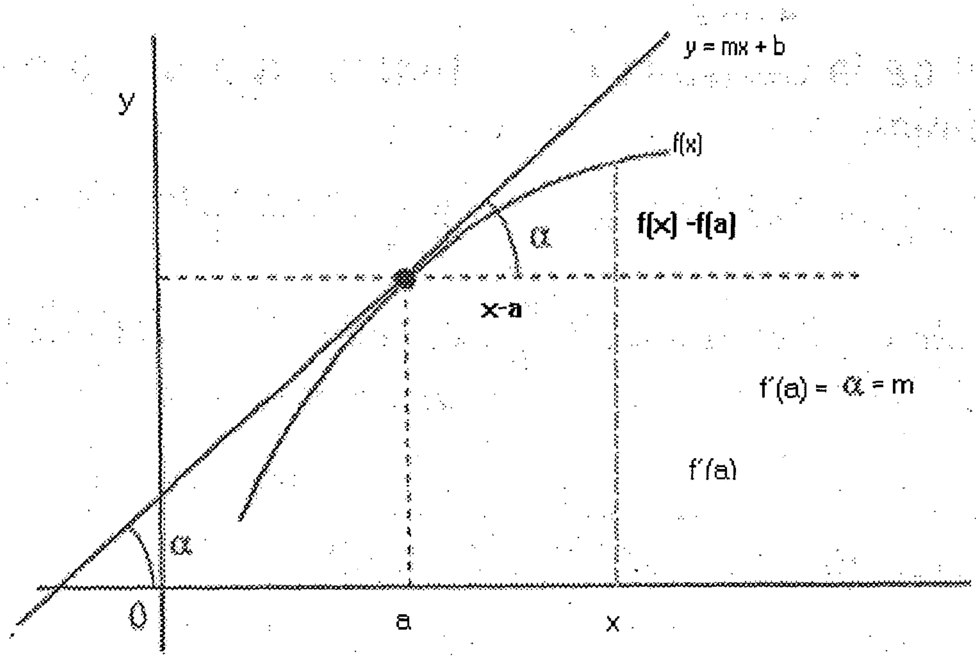
Dicto el problema 3 del qüestionari i dic que, si bé la meitat de la classe ja l'ha fet, és molt important que l'altra meitat intenti fer-ho individualment, sense consultar amb els primers, perquè és un problema que només es pot fer si es té molt clar el concepte de velocitat instantània.

A: Copien en el seu quadern el problema que dicto.

P: Torno a insistir que intentin fer aquest problema individualment i comento que, de 17 alumnes, només dos el van contestar correctament. Dic que és un problema que permet detectar quins alumnes no tenen clar el concepte de velocitat instantània. Continuo comentant que amb aquest problema s'observen coses curioses i em dirigeixo a Patricia F. i li demano si se'n recorda que va fer a la pissarra el problema 15 en el qual s'havien de calcular velocitats instantànies utilitzant límits.

A: Després de dubtar i de buscar el problema 15 en el seu dossier, Patricia diu que se'n recorda que va fer el problema 15 a la pissarra.

P: Li dic a Patricia F.que va fer sense cap dificultat el problema 15 utilitzant els límits per calcular la velocitat instantània i en canvi, a la pregunta 3 del qüestionari, on només cal tenir clar el concepte de velocitat instantània, respon en blanc. Torno a dir que facin el problema que he dictat per corregir-lo el proper dia. A continuació explico i amplio el <<Recorda>> de la pàgina 329 dibuixant a la pissarra i comentant la figura següent:



Remarco les idees següents:

- La derivada és el pendent de la recta tangent.
- La derivada és el límit de les t.m.v.
- La derivada és la tangent trigonomètrica de l'angle α.

I poso a la pissarra el següent:

$$\textit{pendent de la recta tangent (en } x = a) \quad = tg\ \alpha = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

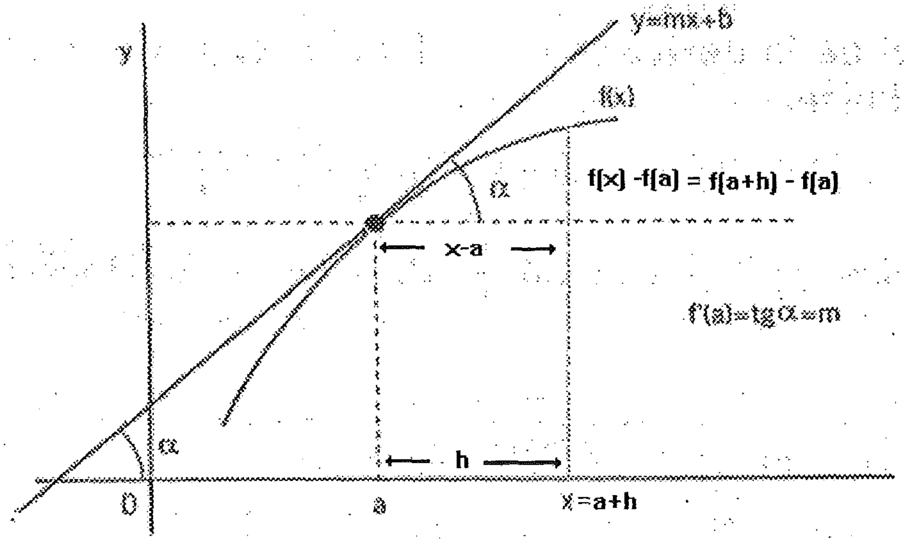
Els faig observar que s'utilitza m per representar el pendent en comptes de a, perquè la lletra a l'estem utilitzant per representar l'abscissa del punt. Després pregunto als alumnes si ho tenen clar.

A: Responen que sí.

P: Dic que, en calcular l'expressió $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,ens hem trobat amb la indeterminació 0/0 que hem resolt aplicant Ruffini. Per exemple, Patricia F. a l'activitat 15 i Alberto C. a l'activitat 14 van acabar aplicant-lo.

A: Patricia i Alberto diuen que sí.

P: Continuo dient que la utilització d'aquesta notació ens porta en el cas de les funcions algèbriques (les més habituals) a la indeterminació 0/0 i a la utilització de la regla de Ruffini, però que, si fem el canvi de notació que ara explicaré, ens trobarem que el càlcul de la indeterminació 0/0 serà més fàcil perquè només caldrà simplificar. Modifico la figura que tenia a la pissarra així:



Després de comentar que si considerem que $x - a = h$, la notació de la figura anterior es converteix en aquesta nova notació, pregunto als alumnes què li passa a h quan $x \to a$.

A: Alguns diuen que es fa petita i molts no diuen res.

P: Dic que la separació entre els dos punts va disminuint (mentre assenyalo amb la mà sobre la figura per fer-los observar el procés d'aproximació quan $x \to a$) i pregunto quan $x \to a$, h a on s'aproxima.

A: Responen tots plegats que s'aproxima a zero.

P: Comento que a partir d'ara tenim dues maneres d'escriure la derivada en un punt i poso a la pissarra el següent:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A continuació, dic que facin l'activitat 19 en què tenim una taula amb els diferents sentits de la derivada que hem anat treballant, escrits amb la nova notació.

A: Els alumnes es posen a treballar l'activitat 19. Eva P. em pregunta què ha de fer.

P: Li dic que tenim una taula amb els diferents sentits de la derivada que hem anat treballant escrits amb la nova notació i que ha de completar els punts suspensius de la taula amb les frases de l'enunciat.

P: Mentre els alumnes estan treballant, poso la taula a la pissarra amb la notació antiga. Reclamo la seva atenció i els faig observar com la notació antiga es converteix en la taula de l'activitat 19 a partir del canvi $x = a + h$. Després pregunto als alumnes què he de posar en els punts suspensius.

A: Responen correctament on s'ha de posar <<Velocitat mitjana>> , <<Pendent de la recta tangent>> i <<Derivada de la funció en $x = a$>>. La taula de la pissarra queda així:

Interpretació física	*Interpretació matemàtica*	
	Interpretació analítica	*Interpretació geomètrica*
$d(t)$	$f(x)$	Gràfica de $f(x)$
Velocitat mitjana $v_h(t_0)) = \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$	Taxa mitjana de variació $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Pendent de la recta secant
Velocitat instantània $v(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$	Derivada de la funció en $x = a$ $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Pendent de la recta tangent

P: Torno a insistir que la taula és tot el que hem treballat fins ara amb la nova notació, la qual té per objectiu fer més fàcil el càlcul del límit. A continuació comento que, si bé treballarem diferents maneres per calcular la derivada d'una funció en un punt, la principal consisteix a calcular el límit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Després pregunto en general com s'ha de calcular aquest límit.

A: Sergi G. diu que substituint h per zero.

P: Dic que, efectivament, el primer que s'ha de fer és substituir h per zero i poso a la pissarra el següent:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+0)-f(a)}{0} = \frac{0}{0}$$

Comento que calcular derivades és calcular límits que presenten la indeterminació 0/0, però que, amb la nova notació, el càlcul de la indeterminació 0/0 es fa més fàcil tal com es veu en l'exemple de la pàgina 330. A continuació, mentre escric a la pissarra, dic que tenim la funció $f(x) = x^2 + 2$ i volem calcular $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ que és l'expressió que resulta de substituir la a per 2 en l'expressió anterior i pregunto quin nombre és $f(2)$.

A: Alguns alumnes responen que 6.

P: Poso a la pissarra la taula següent:

x	y
2	$f(2) = 2^2 + 2 = 6$

I pregunto quin nombre correspon al nombre $2 + h$

A: Silenci

P: Comento que la funció $f(x) = x^2 + 2$ fa correspondre a cada nombre el seu quadrat més dos i que si el nombre és $2 + h$, llavors li correspon el seu quadrat més dos. A continuació completo a la pissarra la taula anterior de la manera següent:

x	y
2	$f(2) = 2^2 + 2 = 6$
$2 + h$	$f(2 + h) = (2 + h)^2 + 2$

A continuació explico i escric a la pissarra l'exemple de la pàgina 330 fent-los observar que el tercer pas és el resultat de desenvolupar el quadrat d'una suma i que la indeterminació 0/0 desapareix simplificant de manera que no cal aplicar Ruffini.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+2-(2^2+2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^2+4h+h^2+2-2^2-2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} 4 + h = 4$$

Torno a remarcar que el canvi de notació fa que sigui més fàcil el càlcul del límit. A continuació dic que facin de manera anàloga les activitats 20, 21 i 22.

A: Es posen a fer aquestes activitats i observo que alguns cometen l'error de desenvolupar malament el quadrat d'una suma.

A: Silvia V. i Laura N. reclamen la meva atenció individual per preguntar-me un dubte de l'apartat g de l'activitat 18. Em pregunten que si $x \to 1$ per l'esquerra, llavors la t.m.v.

hauria de ser $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ en comptes de $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

P: Els dic que tenen raó, però que és igual perquè:

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \frac{-(f(x)-f(1))}{-(x-1)} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

A: Mike D.reclama la meva atenció individual per preguntar-me un dubte de l'exemple que he explicat a la pissarra. La seva pregunta és per què he tret dues h en el numerador per una sola del denominador, és a dir per què no he fet

$$\frac{4\cancel{h} + \cancel{h}^2}{\cancel{h}}$$

P: Li explico que a l'exemple he tret factor comú en el denominador i després he simplificat i li faig observar que l'expressió anterior es pot escriure com a suma de fraccions així:

$$\frac{4h + h^2}{h} = \frac{4h}{h} + \frac{h^2}{h}$$

perquè per sumar fraccions amb el mateix denominador es posa el mateix denominador i se sumen els numeradors.

A: Mike interromp la meva explicació i diu ¡Ah sí claro! i sembla que ho entén

A: Alberto C. em pregunta com es calcula $f(3 + h)$ a l'activitat 20.

P: Li explico amb paraules que la funció de l'activitat 20 fa correspondre a cada nombre el doble del seu quadrat més tres. Si el nombre és 3, li correspon el doble del quadrat de tres més tres i si el nombre és $3 + h$, li correspon el doble del quadrat de $3 + h$ més 3. Mentrestant escric en el seu quadern la taula següent:

x	y
3	$f(3) = 2(3^2)+ 3 = 21$
$3 + h$	$f(3 + h) = 2(3 + h)^2 + 3$

A: Alberto diu que ho entén.

A: Els alumnes continuen treballant fins que toca el timbre.

P: Dic que facin les activitats 20-22 a casa seva i que les corregirem a la propera classe.

Valoracions

1) Hi ha un bon ambient de treball.

2) Fer el comentari del qüestionari 4 m'ha obligat a tenir una participació molt activa en el desenvolupament de la classe.

3) En relació als ítems 34-35 del subobjectiu 3.3

Ítem 34 No he notat moltes dificultats per entendre la nova notació de la derivada en un punt.

Ítem 35 Tampoc he observat dificultats per relacionar els diferents sentits de la derivada en un punt <<Velocitat instantània>> , <<Pendent de la recta tangent>> i <<límit de les t.m.v.>> utilitzant la nova notació.

4) En relació al càlcul del límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ he observat els errors típics:

- Desenvolupament incorrecte del quadrat d'una suma.
- Simplificació incorrecta de la *h*.

$$\frac{4\cancel{h} + h^2}{\cancel{h}}$$

- Dificultats per calcular $f(a + h)$.

En relació a aquesta última dificultat, sembla que la descripció de la fórmula amb paraules i la utilització de taules del tipus

x	y
a	$f(a) =$
$a + h$	$f(a + h) =$

faciliten la comprensió del càlcul de $f(a + h)$.

5.2.11. Subseqüència 6. Càlcul de la derivada en un punt

Aquesta subseqüència està formada per les activitats 20-33 i pretén aconseguir com a resultat del procés d'instrucció els següents ítems del subobjectiu 3.3.

36 Calcular la derivada d'una funció a partir de l'expressió

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

37 Entendre que per a un valor h molt petit, com 10^{-6} o 10^{-7}, 10^{-8}, ... la taxa mitjana de variació $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un valor molt pròxim a $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i, per tant, per trobar un valor aproximat de $f'(a)$ basta calcular la taxa mitjana de variació per al valor de h escollit, amb h prou petit. Han de ser capaços també d'utilitzar-lo per fer el càlcul aproximat de la derivada d'una funció en $x = a$ emprant la calculadora.

38 Calcular $f'(a)$ quan la recta tangent en un punt està dibuixada, tenint en compte que és el pendent de la recta tangent.

39 Entendre que $f'(a)$ es pot calcular per tres mètodes diferents: utilitzant límits, partint de la recta tangent o bé utilitzant el quocient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ amb h prou petit, per obtenir-ne només un resultat aproximat.

40 Entendre que una funció discontínua no té derivada.

41 Entendre que en els punts en què la gràfica té forma de punxa no existeix la derivada.

42 Entendre que en els punts en què la gràfica té forma de punxa, aquesta es manté en fer zooms,mentre que en els punts en què existeix la derivada, en fer zooms, la corba arriba a tenir forma de recta.

43 Relacionar la idea intuïtiva de pendent d'una corba en un punt i la de pendent de la recta tangent en aquest punt.

44 Relacionar el signe de la derivada i la gràfica de la funció, entenent que: 1) Si en tots els punts c d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és positiva ($f'(c) > 0$), la funció és creixent en aquest interval. 2) Si en tots els punts c d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és negativa ($f'(c) < 0$), la funció és decreixent en aquest interval. 3) En els màxims i mínims relatius la derivada val zero, però no tots els punts en què la derivada val zero són màxims o mínims.

En les activitats 20-22, l'alumnat, després d'un exemple, ha de calcular $f'(a)$ a partir del càlcul del límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. En substituir h per zero s'obté la indeterminació $\frac{0}{0}$, que desapareix després de simplificar h en el numerador i el denominador. Aquestes activitats permeten detectar els alumnes que tenen dificultats en el desenvolupament de les identitats notables i en la simplificació de fraccions algèbriques.

Hi ha funcions per a les quals pot ser difícil calcular el límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Per a aquestes funcions es pot trobar un valor aproximat de $f'(a)$ utilitzant la calculadora. L'objectiu de les activitats 23-25 és que l'alumnat entengui que per un valor h molt petit, com 10^{-6} o 10^{-7}, 10^{-8}, ... la taxa mitjana de variació $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ és un valor molt pròxim a $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i, per tant, per trobar un valor aproximat de $f'(a)$ basta calcular la taxa mitjana de variació pel valor de h escollit, amb h prou petit.

Si tenim gràfics en què la recta tangent en un punt està dibuixada, també es pot trobar gràficament la derivada, tenint en compte que $f'(a)$ és el pendent de la recta tangent. L'activitat 26 té per objectiu que l'alumnat calculi derivades d'una funció en un punt, a partir de trobar gràficament el pendent de la recta tangent que està dibuixada. També ha de calcular l'equació de la recta tangent en un punt (contràriament a l'activitat 18 el procediment per trobar la recta tangent no està pautat).

L'objectiu de l'activitat 27 és que l'alumnat entengui que en els punts d'abscissa $x = a$ en els quals la funció $f(x)$ és discontínua, no existeix $f'(a)$ perquè no hi ha recta tangent. Per tant, si una funció $f(x)$ té derivada en $x = a$, la funció és contínua en $x = a$.

L'objectiu de l'activitat 27 és que l'alumnat entengui que en els punts d'abscissa $x = a$, en els quals el gràfic de la funció té forma de punxa, no existeix la derivada de la funció. L'activitat utilitza que el gràfic de la funció $g(x) = |x^2 - 1|$ coincideix amb el de la funció $y = x^2 - 1$ menys a l'interval (-1, 1) en què n'és una reflexió del gràfic de $y = x^2 - 1$. Si es considera un entorn de $x = 1$, es veu que la recta r és la que més s'aproxima a la funció per a valors de x més grans que 1. En canvi, per a valors de x més petits que 1, la recta s ,que resulta de reflectir la recta 1, és la que més s'aproxima a la funció. És molt convenient ampliar aquesta activitat amb l'ajut de l'ordinador. Amb un graficador es pot ampliar aquesta funció perquè l'alumnat entengui que en fer zooms en les proximitats d'un punt on la gràfica té forma de punxa, la gràfica apareix sempre amb aquesta forma.

D'aquesta manera es pot introduir la idea que una funció és derivable si en fer zooms, la gràfica queda quasi com un segment de recta (la perllongació de la qual és la recta tangent a la gràfica en el punt).

En l'apartat *a* de l'activitat 29, han de dir per a quins valors de l'abscissa no existeix la derivada de la funció, fixant-se en la discontinuïtat i en la forma de punxa. En l'apartat *b* de l'activitat 29 han de dir quin és el signe de la derivada, observant si la recta tangent és creixent o decreixent.

En l'apartat *a* de l'activitat 30, l'alumnat ha d'utilitzar la seva idea intuïtiva de pendent d'una corba per contestar que en el punt *C* costa més esquiar. En l'apartat *d*, es tracta que l'alumnat relacioni la seva idea intuïtiva de pendent o inclinació d'una corba en un punt amb el concepte de recta tangent a la corba en un punt. En l'apartat *c* han de dir quin és el signe de la derivada, observant si la recta tangent (els esquís) és creixent o decreixent. A l'apartat *d*, a partir d'una descripció verbal en la que s'indica el signe de la derivada, l'alumnat ha de fer un esbós de la gràfica de la funció.

En l'activitat 31 l'alumnat ha d'identificar quins són els gràfics de les funcions, descrites, mitjançant enunciats que contenen informació sobre el signe de la derivada.

L'objectiu de les dues activitats anteriors és que l'alumnat relacioni el signe de la derivada i la gràfica de la funció, entenent que: 1) Si en tots els punts *c* d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és positiva ($f'(c) > 0$), la funció és creixent en aquest interval. 2) Si en tots els punts *c* d'un interval (a,b), la derivada d'una funció és negativa ($f'(c) < 0$), la funció és decreixent en aquest interval. 3) En els màxims i mínims relatius la derivada val zero, però no tots els punts en els quals la derivada val zero són màxims o mínims (la funció de l'apartat *d* de l'activitat 31 no té cap màxim ni cap mínim relatiu, però en $x = 0$ es compleix que la derivada val zero).

Les activitats 32 i 33 tenen per objectiu que l'alumnat faci la traducció del gràfic a una taula. En l'activitat 32 se li presenta el model de la taula, que ell ha d'acabar de completar, mentre que a la 33 ell ha d'elaborar tota la taula.

Aquesta subseqüència va ocupar 1/2 sessió del 9-12-97 i les sessions del 10-12-97 , 11-12-97, 17-12-97 i 1/4 de la sessió del 8-1-98

Sessió del 10-12-97

Planificació prèvia

1) Treballar les activitats 20, 21 i 22 com a mínim.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Alberto C., Alex A. Elia G i Angela L.

Observació: Els alumnes han fet un examen de català a la classe anterior i es troben força cansats.

P: Pregunto qui ha fet l'activitat 20.

A: La meitat de la classe aixeca la mà.

P: Faig sortir a la pissarra Anna G.

A: Anna fa l'activitat 20 a la pissarra (com la majoria dels alumnes que surten a la pissarra Anna escriu el problema i no fa cap comentari). La resta dels alumnes continuen parlant entre ells de l'examen de català com si la classe no hagués començat. Anna escriu el següent:

$$f'(3) = \lim_{h \to a} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to a} \frac{2(3+h)^2+3-21}{h} = \lim_{h \to a} \frac{2(9+6h+h^2)+3-21}{h} =$$

$$= \lim_{h \to a} \frac{18+12h+2h^2+3-21}{h} = \lim_{h \to a} \frac{12h+2h^2}{h} = \lim_{h \to a} 12+h = 12$$

P: Per aconseguir que els alumnes se centrin en la classe de matemàtiques comento que havien de fer uns exercicis de <<Per practicar més>> i uns de <<Autoavaluació>> i un de velocitats. Insisteixo que és molt important que intentin fer l'exercici de velocitats perquè crec que el concepte de velocitat instantània no ha quedat clar per a molts d'ells. Em dirigeixo a Jordi C. i li dic que per exemple ell no ho té clar.

A: Jordi C. em respon que no ho té clar i Jordi A. (que també s'ha sentit al·ludit) diu que ell ara sí que l'hi té.

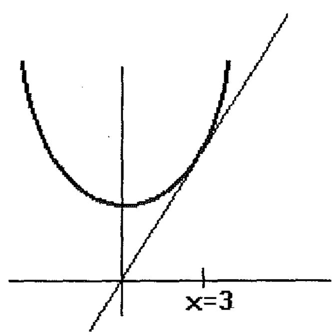
P: Torno a dir que facin el problema de la velocitat i que el comentarem a la propera classe. A continuació dic que entre la classe d'avui i la de demà hem d'arribar a l'apartat <<Funció derivada>> i que allò que entra a l'examen del dia 12-5-97 és des del principi de la unitat fins a l'apartat <<Funció derivada>> exclòs. Abans de comentar la resposta d'Anna G. a l'activitat 20 poso a la pissarra el següent:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \textit{pendent de la recta tangent}$$

i dic que la derivada en $x = a$ és el límit de les t.m.v les quals es poden expressar en la forma $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ o bé en la forma $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i que també és el pendent de la recta tangent. Recordo que a les activitats 14 i 15 vam utilitzar la primera notació i vam resoldre la indeterminació 0/0 aplicant Ruffini, però que amb la segona notació la indeterminació 0/0 es resol simplificant. També recordo que les dues expressions anteriors són dues maneres diferents d'escriure el pendent de la recta secant i que el límit dels pendents de les rectes secants és el pendent de la recta tangent i que, quan ens referim al significat gràfic o geomètric de $f'(a)$, el que volem dir és que la derivada en un punt és el pendent de la recta tangent.

A: Observo que a poc a poc els alumnes van callant i van escoltant el resum anterior. Crec que són conscients que amb aquest resum estic remarcant les idees principals i que els pot ser útil per estructurar els continguts treballats.

P: Continuo comentant que per calcular normalment la derivada en un punt s'utilitza la notació $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, tal com ho ha fet l'Anna G. per resoldre l'activitat 20. Dic que en aquesta activitat ens donen la funció $f(x) = 2x^2 + 3$ i ens demanen que calculem $f'(3)$, i que, per tant, en aquest cas $a = 3$ i $f'(a) = f'(3)$. A continuació faig la traducció gràfica del problema fent-los observar que no es demana i que no cal per resoldre'l, però que és convenient fer-la. Dibuixo a la pissarra i comento la figura següent:



f'(3) = el pendent de la recta tangent en x=3

Dic que la funció és una paràbola que resulta de traslladar la paràbola $f(x) = 2x^2$ tres unitats cap amunt i que el que ens pregunten és el pendent de la recta tangent en $x = 3$. Assenyalant sobre el que ha posat a la pissarra Anna G. els faig observar que $a = 3$ i que a tot arreu on tenim a hem de posar 3, però que busquem el límit quan $h \to 0$ i no quan $h \to a$.

A: Anna G. fa una exclamació que posa de manifest que entén perfectament el seu error.

P: Continuo comentant la resposta d'Anna G. i dic que en aquesta activitat la funció $f(x)$ és la funció $f(x) = 2x^2$, que $a = 3$ i que hem de buscar la imatge de 3 i de $3+h$. Pregunto a tots en general com hem de buscar la imatge de tres.

A: Sandra D. em respon que s'ha d'utilitzar la fórmula.

P: Escric a la pissarra la taula següent:

x	y
3	$f(3) = 2(3)^2 + 3 = 21$

A: Raquel G. pregunta si es fa primer el quadrat o primer es multiplica per dos i després s'eleva al quadrat.

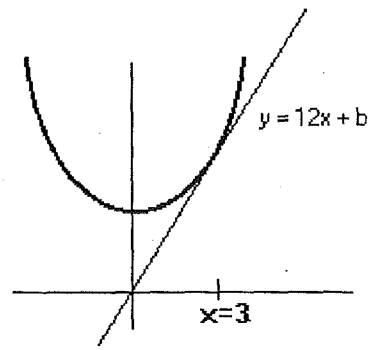
P: Li responc que aquesta fórmula fa correspondre a un nombre el doble del seu quadrat més tres i que primer s'eleva al quadrat i després es multiplica per dos. A continuació pregunto com es troba $f(3+h)$.

A: Silenci

P: Comento que, si traduïm la fórmula a paraules, és més fàcil d'entendre com es calcula $f(3+h)$. Els faig observar que la fórmula ens indica que, per trobar la imatge d'un nombre, el que hem de fer és elevar-lo al quadrat, després l'hem de doblar i, per últim, li hem de sumar tres. I que, per tant, aquests passos són els que hem de fer amb el nombre $3+h$. Mentre faig aquest últim comentari escric a la pissarra una nova fila a la taula anterior.

x	y
3	$f(3) = 2(3)^2 + 3 = 21$
$3+h$	$f(3+h)=2(3+h)^2 + 3$

Remarco que el que s'ha de fer és substituir a la fórmula la x per $3+h$. Assenyalant el que ha posat l'Anna G. a la pissarra, dic que el pas següent ha estat desenvolupar el quadrat d'una suma i que després s'ha d'aplicar la propietat distributiva i multiplicar per dos els sumands del parèntesi. A continuació s'eliminen 18 + 3 amb -21 i se simplifica la h del denominador amb les del numerador. Acabo comentant que aquest resultat ($f'(3)=12$) és el pendent de la recta tangent i poso en la gràfica de la pissarra el següent:



f'(3) = el pendent de la recta tangent en x=3

A continuació pregunto quants alumnes han fet l'activitat 21

A: Uns 10 alumnes aixequen la mà.

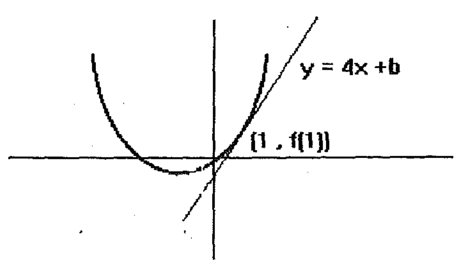
P: Faig sortir a la pissarra Jordi L.

A: Jordi escriu el problema a la pissarra sense fer cap comentari. Els altres alumnes parlen entre ells.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+2(1+h)+1-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2+2+2h+1-4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h = 4$$

P: Mentre Jordi fa el problema a la pissarra, comento que aquesta activitat és igual que l'anterior, ja que només canvia la funció i el punt. A continuació dic que la interpretació gràfica del problema és la següent:



4=f'(1) = pendent de la recta tangent en x=1

Insisteixo que el gràfic és un esbós, ja que no he dibuixat la funció amb detall, de fet només m'he fixat que és una paràbola pel tipus de fórmula i que té l'obertura cap amunt perquè el nombre que multiplica a x^2 és positiu. També dic que $f'(1)=4$ implica que el pendent de la recta tangent és 4.

A continuació vaig comentant i assenyalant a la pissarra la resposta de Jordi L. Amplio el primer pas traduint la fórmula en paraules i escrivint la taula següent:

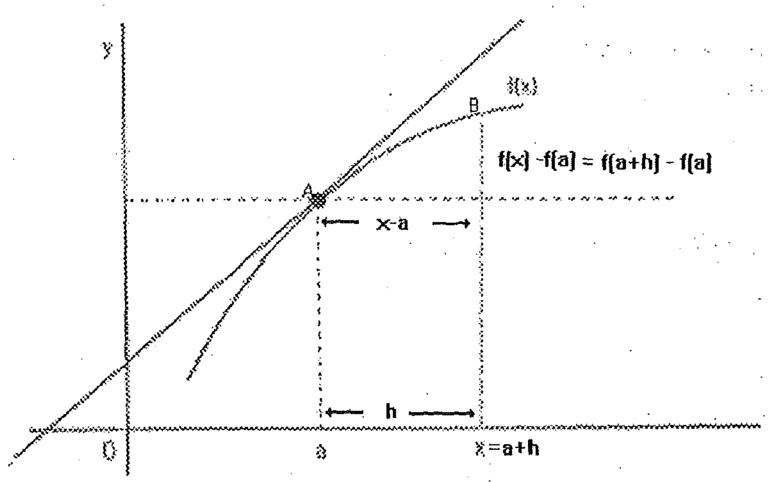
x	y
1	$f(1) = 1^2 + 2(1) + 1 = 4$
$1+h$	$f(1+h)=(1+h)^2 + 2(1+h)+1$

i dic que després ha desenvolupat el quadrat d'una suma, ha aplicat la distributiva multiplicant per dos els sumands del parèntesis. A continuació ha eliminat 1 +2+1 amb -4 i ha simplificat la h del denominador amb les del numerador. Per últim faig observar a Jordi L. que en el penúltim pas ha deixat d'escriure la notació de límit i que aquesta només es treu quan substituïm la <<h>> per zero.

A: Jordi L. diu que s'ha oblidat de posar-lo.

A: Jordi A. Pregunta per què $h \to 0$.

P: Poso la figura següent a la pissarra



I amb el dit li faig observar que quan $B \to A$ resulta que $h \to 0$. També li dic que això ja ho vam veure a la classe anterior. A continuació comento que el problema 22 és més complicat que els dos anteriors perquè, a més de demanar el pendent de la recta tangent, demana l'equació de la recta tangent i pregunto quants alumnes l'han fet.

A: Només 3 alumnes aixequen el braç.

P: Dic que es posin a fer el problema 22.

A: Els alumnes es posen a fer l'activitat 22. Patricia F. demana atenció particular perquè no té clar si -2+*h* és el mateix que *h*-2.

P: Li explico perquè -2+*h* = *h*-2.

A: Sandra D. demana atenció particular perquè no té clar si primer es multiplica o primer s'eleva al quadrat.

P: Li explico per què primer s'ha d'elevar al quadrat i al cap d'una estona faig sortir Sergi G. a la pissarra a fer el problema 22 (Sergi és un dels tres alumnes que havien fet el problema).

A: Sergi escriu a la pissarra la resposta del problema 22 mentre els alumnes continuen comentant entre ells:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{-2(-2+h)^2+(-2+h)-1+11}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-10+9h-2h^2-1+11}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9h-2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 9-2h = 9$$

pendent = 9
-11 = 9(-2) + *b*
-11 = -18 + *b*
7 = *b*
La recta és $y = 9x + 7$

P: Li dic a Sergi G. que la seva resposta és correcta però que s'ha saltat alguns passos i poso a la pissarra

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2(-2+h)^2+(-2+h)-1-(-11)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2(-4-4h+h^2)-2+h-1+11}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-8+8h-2h^2-2+h-1+11}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-10+9h-2h^2-1+11}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9h-2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(9-2h)}{h} = \lim_{h\to 0} 9-2h = 9$$

A: Laura A. pregunta d'on surt el nombre onze

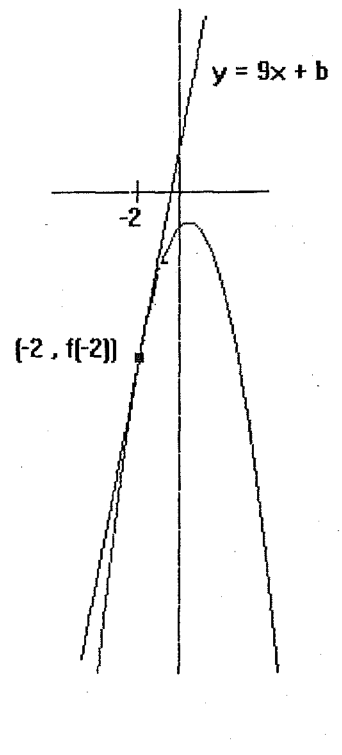
P: Amplio el primer pas fent la traducció amb paraules de la fórmula i escrivint la taula següent:

x	y
-2	$f(-2) = -2(-2)^2 + (-2)- 1 = -11$
$-2+h$	$f(-2+h)=-2(-2+h)^2 + (-2+h)-1$

dic que el pas següent ha estat desenvolupar el quadrat d'una suma i que després s'ha d'aplicar la propietat distributiva i multiplicar per menys dos els sumands del parèntesi. Després s'eliminen -8 -2-1 amb +11 i se simplifica la h del denominador amb les del numerador.

A: Jordi C. diu si puc tornar a explicar com he fet la taula anterior.

P: Repeteixo l'explicació per a tots. A continuació faig la traducció gràfica del problema i comento que la funció és una paràbola amb obertura cap avall perquè el nombre que multiplica a x^2 és negatiu. També dic que la recta tangent, pel fet de ser una recta té una fórmula del tipus $y = ax + b$ i que $f'(-2)=9$ implica que el pendent de la recta tangent és 9 i que, per tant, la fórmula de la recta tangent és $y = 9x + b$. Continuo dient que per trobar la b necessito un punt de la recta i que l'únic que puc trobar és el de tangència que és $(-2 , f(-2))$ i pregunto com puc trobar $f(-2)$ i quin valor té.



A: Alguns responen que utilitzant la fórmula i d'altres que és -11.

P: Continuo dient que sabem que la recta tangent té una fórmula del tipus $y = 9x + b$ i passa pel punt (-2,-11), la qual cosa vol dir que, si substituïm la x per -2 i la y per -11, s'ha de complir la igualtat (mentre assenyalo a la pissarra el que ha posat Sergi G.); després aïllem la b y obtenim b =7, de manera que l'equació de la recta tangent és $y = 9x + 7$. A continuació pregunto si porten calculadores.

A: La majoria diu que no la porta.

P: Com que els problemes 23-25 s'han de fer amb calculadora, els farem el proper dia i insisteixo que la portin. A continuació poso a la pissarra el següent:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \textit{pendent de la recta tangent (en } x = a\text{)}$$

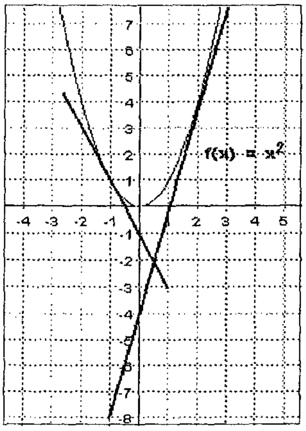
I comento que a les activitats anteriors hem estat calculant la derivada utilitzant

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ amb funcions relativament senzilles (polinòmiques),

però que, si intentem calcular aquest límit per a les funcions dels problemes 23-25 (sinus, logaritmes i arrels), resulta que el càlcul d'aquest límit és força complicat i només es pot fer aproximat amb la calculadora tal com veurem el proper dia. També dic que, si tenim dibuixada la recta tangent i podem calcular-ne el pendent, també ens podem estalviar el càlcul d'aquest límit, tal com es veu en l'activitat 26 i dic que es posin a fer-la.

A: Es posen a fer l'activitat 26. Observo que molts ho fan bé calculant el pendent a partir de triangles.

P: Al cap d'una estona comento l'enunciat del problema i poso a la pissarra la figura i els faig observar que en $x = 0$ la recta tangent és l'eix d'abscisses.



A: Continuen comentant entre ells.

P: Pregunto a David R. quin valor té $f'(2)$

A: David R. respon que 4.

P: Pregunto a la resta de la classe si hi estan d'acord.

A: Responen que sí.

P: Amb el dit assenyalo un triangle de base 1 i altura 4 i dic que el pendent de la recta tangent és 4 i, per tant, $f'(2) = 4$. A continuació li pregunto a Victor B. quin valor té $f'(-1)$.

A: Victor B. respon que -2.

P: Pregunto a la resta de la classe si hi estan d'acord.

A: Alguns alumnes responen que no (Judith P., Jessica C. i. Pilar G., entre d'altres).

P: Vaig cap a on són ells i els faig observar que per a una unitat cap a la dreta en baixen dues i observo que el seu error és que no donen importància al signe del pendent. A continuació faig el mateix sobre la figura de la pissarra per a tota la classe. Després pregunto a David R. quin valor té $f'(0)$.

A: Isabel G. respon que zero perquè la recta és horitzontal.

P: Pregunto a la resta de la classe si hi estan d'acord.

A: Responen que sí.

P: Faig sortir a Alfonso D. a la pissarra a fer l'apartat b) de l'activitat 26.

A: Alfonso escriu el següent sense fer cap comentari:

$$4 = 4(2) + b$$
$$4 = 8 + b$$
$$-4 = b$$

P: Comento que sabem que la recta tangent té una fórmula del tipus $y = 4x + b$ i que passa pel punt (2, 4) la qual cosa vol dir que si substituïm la x per 2 i la y per 4, s'ha de complir la igualtat (mentre assenyalo a la pissarra el que ha posat Alfonso D.); després aïllem la b y obtenim $b = -4$ de manera que l'equació de la recta tangent és $y = 4x - 4$. Mentre faig aquesta explicació toca el timbre i s'acaba la classe.

Valoracions

1) Continua el problema d'assistència d'alguns alumnes. Aquest problema s'accentua aquests dies perquè estem en període d'exàmens.
2) Costa aconseguir l'atenció dels alumnes perquè estan més pendents dels exàmens que han fet o dels que han de fer que no pas de seguir la classe.
3) Malgrat tot hi ha un bon ambient.

4) En relació al càlcul del límit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ítem 36) he observat els errors típics:

- Desenvolupament incorrecte del quadrat d'una suma.
- No saber si primer s'ha d'elevar al quadrat o bé s'ha de multiplicar.
- Simplificació incorrecta de la h
- $$\frac{4\cancel{h} + h^2}{\cancel{h}}$$
- Dificultats per calcular $f(a + h)$

5) En relació a l'ítem 38 crec que saben calcular $f'(a)$ gràficament buscant el pendent de la recta tangent (encara que hi ha alumnes que donen molt poca importància al signe del pendent).

7) En relació a l'ítem 39 crec que els alumnes han entès que $f'(a)$ es pot calcular per diferents mètodes: 1) calculant el límit i 2) calculant el pendent de la recta tangent

8) He decidit deixar el càlcul aproximat de $f'(a)$ amb calculadora per després de l'examen (ítem 36).

Sessió del 11-12-97

Planificació prèvia

1) Treballar les activitats 27-33 que són les que entren a l'examen.
2) Fer resums que permetin estructurar els continguts treballats.
3) Resoldre el problema de velocitat instantània que vaig encarregar que fessin (problema 3 del qüestionari 4 d'avaluació).

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Avui no he passat el control de faltes però falten 5 alumnes.

Observació: Els alumnes han de fer un examen d'una altra assignatura després de la classe de matemàtiques. Això es nota per les faltes d'assistència i perquè estan més pendents d'estudiar l'altra assignatura que de seguir la classe de matemàtiques.

P: Per aconseguir que s'oblidin de l'examen de l'altra assignatura i se centrin en la classe de matemàtiques poso a la pissarra el següent:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \textit{pendent de la recta tangent}$$

I recordo que a les activitats anteriors hem calculat la derivada utilitzant

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ amb funcions relativament senzilles

(polinòmiques), i que tot i amb això, vaig detectar errors del tipus: desenvolupament incorrecte del quadrat d'una suma, no saber si primer s'ha de multiplicar o elevar al quadrat, simplificar malament, etc. Després comento que, si intentem calcular aquest límit per a les funcions dels problemes 23-25 (sinus, logaritmes i arrels), resulta que el càlcul d'aquest límit és encara més complicat, i només es pot fer aproximadament amb la calculadora tal com veurem el proper dia. També dic que, si tenim dibuixada la recta tangent i podem calcular-ne el pendent, també ens podem estalviar el càlcul d'aquest límit, tal com vam fer a l'activitat 26. Mentre faig aquests comentaris poso a la pissarra l'esquema següent:

Com es calcula $f'(a)$?	1 Calculant $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. 2 Calculant el pendent de la recta tangent 3 Aproximadament amb calculadora

Explico també que pot passar de no poder calcular $f'(a)$, i que això és el que veurem en les activitats 27-29 i dic que facin l'activitat 27.

A: Els alumnes estan més pendents de l'examen proper que no pas de fer l'activitat 27.

P: Vista l'actitud dels alumnes decideixo tenir un paper més actiu a la classe i dibuixo la gràfica de l'activitat 27 a la pissarra. I pregunto a Jaime G. si en aquesta activitat ens donen la fórmula de la funció.