VICENÇ FONT MOLL

PROCEDIMENTS PER OBTENIR EXPRESSIONS SIMBÒLIQUES A PARTIR DE GRÀFIQUES. APLICACIONS A LES DERIVADES

****

Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Programa de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica

Bienni 1994-1996

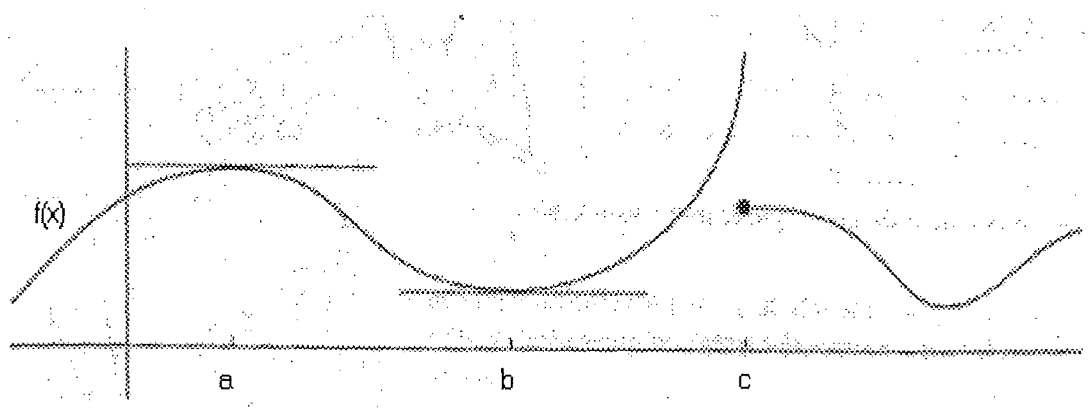
Per optar al títol de Doctor en Filosofia i Ciències de l'Educació
Secció Ciències de l'Educació

Director: Josep María Nuñez i Espallargas

Tutor: Josep María Nuñez i Espallargas

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA 1999



A: Jaime G. respon que no.

P: Pregunto en general a tota la classe per quin dels tres mètodes anteriors (els assenyalo amb la mà a la pissarra) podem trobar les derivades que pregunta l'activitat 27.

A: Silvia V., Sandra D. i d'altres alumnes contesten que per la segona (calculant el pendent de la recta tangent).

P: Assenyalo el punt d'abscissa $x = a$ i pregunto quina és la recta tangent.

A: Molts alumnes fan un senyal amb la mà per indicar que és la recta horitzontal i d'altres ho diuen explícitament.

P: Dic que efectivament aquesta (l'assenyalo amb la mà) és la recta tangent i pregunto quin és el seu pendent.

A: La majoria respon que és zero.

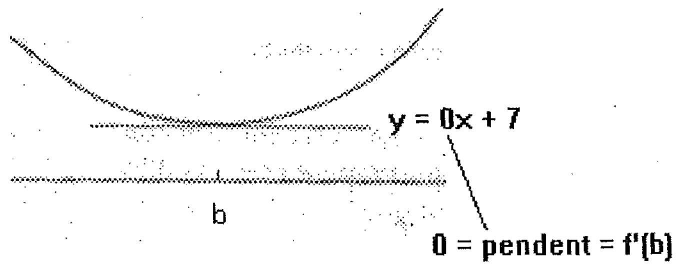
P: Poso a la pissarra $f'(a) = 0$ i després pregunto a Jordi A. quant val $f'(b)$.

A: Jordi i d'altres alumnes responen que també és zero.

P: Poso a la pissarra $f'(b) = 0$.

A: Luís G. em pregunta per què és zero.

P: Li responc que pel fet de ser horitzontal aquesta recta té una fórmula del tipus $y = 0x$ + nombre , per exemple $y = 0x + 7$ (ho escric a la pissarra) i, com que la derivada en aquest punt és el pendent de la recta tangent, que és zero, llavors $f'(b) = 0$.

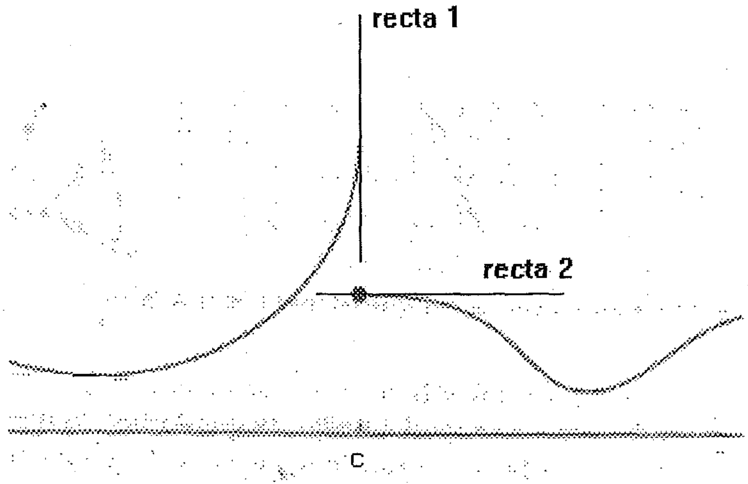


A: Fa un gest per indicar-me que ho entén (tot i que jo en dubto).

P: A continuació dic que per calcular $f'(c)$, hem de trobar primer el pendent de la recta tangent i pregunto quina és la recta tangent en aquest punt.

A: Silenci.

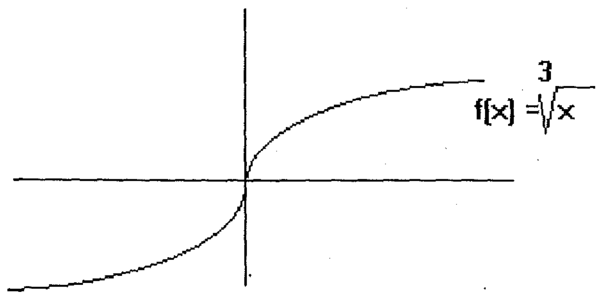
P: Recordo que la recta tangent és aquella que, en les proximitats del punt, és la que més s'aproxima a la gràfica i dibuixo a la pissarra les dues següents:



Els faig observar que hauria de ser una recta vertical per a valors més petits que c i horitzontal per a valors més grans que c però que això no és possible. Remarco que en aquest cas direm que no existeix $f'(c)$ perquè no podent trobar la recta tangent, tampoc podem trobar-ne el pendent. A continuació pregunto si ha quedat clar.

A: Silenci i Raúl B. em pregunta si la recta tangent pot ser vertical.

Li dic que sí i poso a la pissarra el següent exemple:



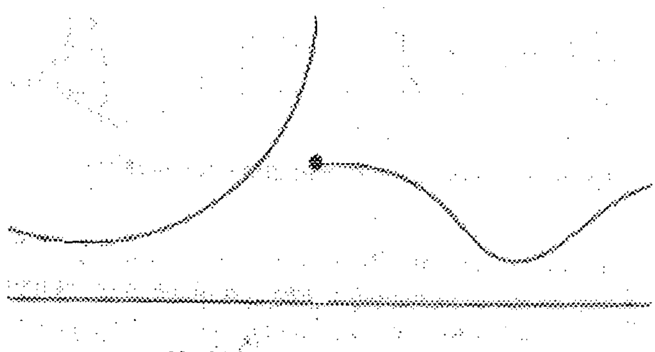
Comento que en $x = 0$ la recta tangent és vertical i pregunto quin és el seu pendent.

A: Raúl B. respon que 90°.

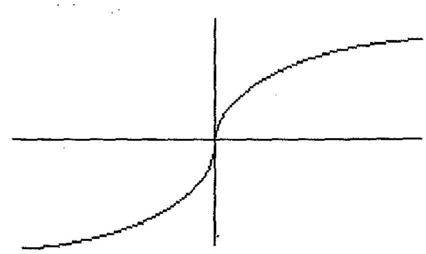
P: Li responc que l'angle és 90°, però que la derivada és la tangent trigonomètrica de l'angle i li dic que, si no sap quina és la tangent de 90°, la pot buscar amb la calculadora.

A: Raúl ho fa i diu que surt "error".

P: Li dic que surt "error" a la calculadora perquè el pendent és infinit i en aquest cas es diu que o bé no hi ha pendent o que el pendent és infinit. Després comento a tots en general que, quan es calcula la derivada en un punt, ens podem trobar que no hi ha recta tangent o bé que aquesta és vertical. En les dues situacions direm que no existeix la derivada. Mentre faig aquest comentari dibuixo el següent a la pissarra:



No hi ha recta tangent



recta tangent vertical

A continuació dic que llegeixin el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 27.

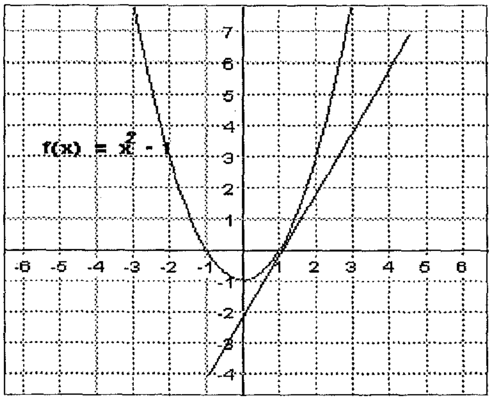
A: S'hi posen.

P: Comento que si una funció és discontínua (assenyalant la gràfica discontínua de la pissarra) no existeix la derivada, i que, per tant, si hi ha derivada en un punt, llavors és segur que la funció és contínua en aquest punt. Remarco que l'existència de la derivada és una manera indirecta d'assegurar la continuïtat de la funció i dic que facin l'activitat

28.

A: Es posen a fer-la.

P: Al cap d'una estona dibuixo la gràfica de l'activitat a la pissarra i pregunto en general com es pot calcular $f'(1)$.



A: Responen tots que buscant el pendent de la recta.

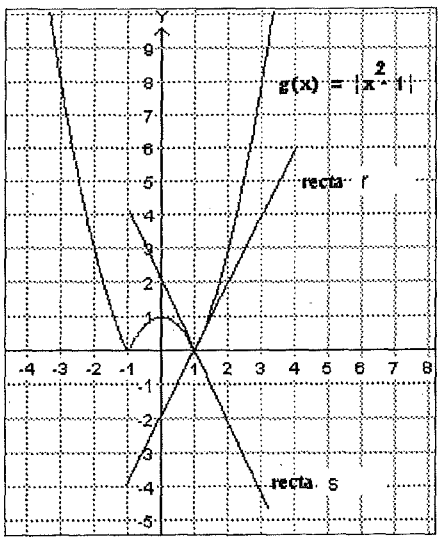
P: Pregunto a David R. quin és el pendent.

A: David R. respon que és 2.

P: Pregunto als altres alumnes si hi estan d'acord.

A: Responen que sí.

P: Poso a la pissarra $f'(1) = 2/1 = 2$, mentre assenyalo sobre la gràfica una unitat cap a la dreta i dues cap amunt. Després dibuixo a la pissarra la segona gràfica i explico amb gestos com aquesta última és el resultat de fer una reflexió de la part de la gràfica que està per sota de l'eix d'abscisses, fent-los observar que el valor absolut converteix els negatius en positius.



A: Alberto C. em demana que repeteixi l'explicació.

P: La hi repeteixo fent-li observar com el valor absolut converteix els negatius en positius i assenyalo a la pissarra com el punt (0 , -1) es converteix en el punt (0 , 1). Tinc la impressió que ho entén. A continuació comento les tres respostes possibles de l'aparta c) de l'activitat 28 i pregunto quina és la correcta.

A: Silenci.

P: Els faig observar que la part de la recta tangent que queda a l'esquerra de $x = 1$ es converteix en la part de la recta s que queda a l'esquerra de $x = 1$, mentre que la part de la recta tangent que queda a la dreta de $x = 1$ coincideix amb la part de la recta r que queda a la dreta de $x = 1$. Poso a la pissarra que el pendent de la recta r és 2 mentre assenyalo sobre la gràfica una unitat cap a la dreta i dues cap amunt. A continuació pregunto quin és el pendent de la recta s a Jaime G.

A: Jaime G., respon que -2.

P: Poso a la pissarra pendent de $r = -2/1 = -2$ mentre amb el dit assenyalo sobre la gràfica una unitat cap a la dreta i dues cap avall. I pregunto a tots en general quin valor té $f'(1)$: dos, menys dos o bé no existeix.

A: Alguns alumnes (Laura N. i d'altres alumnes) diuen que no existeix.

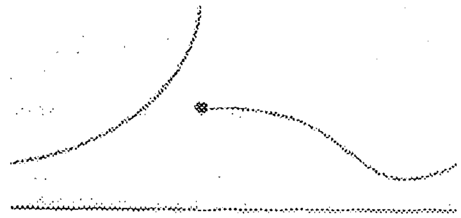
P: Dic que efectivament $f'(1)$ no existeix perquè, no havent-hi una recta que sigui la que més s'aproxima a la gràfica en les proximitats del punt, no hi ha recta tangent. En aquest punt la recta que més s'aproxima per l'esquerra és la recta s però no ho fa per la dreta, mentre que la que més s'aproxima per la dreta és la recta r que no ho fa per l'esquerra. Continuo explicant que tenim dues rectes en igualtat de condicions per ser la recta tangent i que quan passa això direm que no n'hi ha. A continuació dic que, quan la gràfica de la funció en un punt té forma de punxa, no hi ha derivada en aquest punt.

A: Silvia V., Jordi C. i Laura N. em demanen si puc repetir l'explicació.

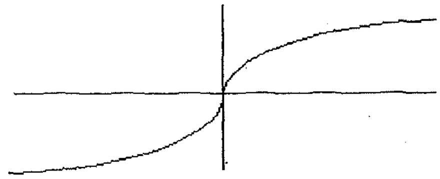
P: La repeteixo.

A: Laura N. fa una intervenció que posa de manifest que la seva idea de recta tangent exclou la possibilitat que travessi la gràfica.

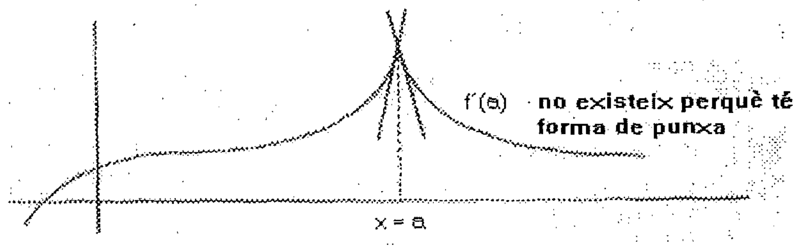
P: Li recordo que la recta tangent és la que més s'aproxima a la gràfica en les proximitats del punt i que no importa si travessa o no a la gràfica o si talla la gràfica en molts punts. Després comento que en aquesta activitat hem vist que una funció pot ser contínua en un punt i no tenir derivada en aquest punt. A continuació poso a la pissarra les tres situacions en què no hi ha derivada.



No hi ha derivada perquè no hi ha recta tangent



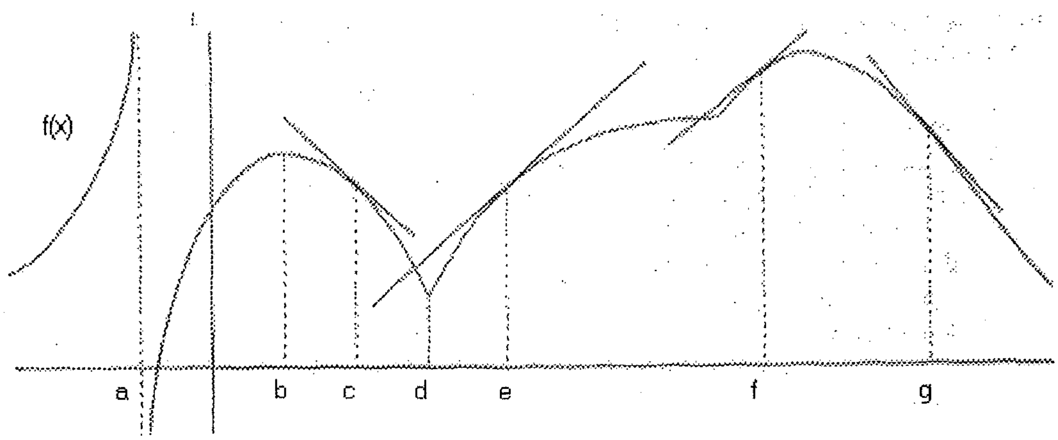
tangent vertical. No hi ha derivada perquè el pendent és infinit



També comento que, perquè una funció tingui derivada en un punt, la gràfica no ha de presentar forma de punxa, és a dir que ha de ser una gràfica suau i que això vol dir que, si fem zooms amb un graficador, veurem com la gràfica de la funció i la recta tangent són quasi coincidents, tal com vam veure a la pantalla de l'ordinador en una classe anterior. També remarco que, si una funció té forma de punxa, per molts zooms que fem, sempre tindrà forma de punxa (això no ho vam veure a l'ordinador). A continuació dic que facin l'activitat 29.

A: Es posen a fer l'activitat 29.

P: Dibuixo la gràfica de l'activitat 29 a la pissarra i, al cap d'una estona, pregunto en quins punts no existeix la derivada.



A: Responen que en $x = a$ i $x = d$.

P: Seguint amb la mà les línies sobre la gràfica dibuixada a la pissarra, per indicar que la recta tangent en $x = c$ és decreixent, pregunto quin és el signe de la derivada.

A: Responen tots que és negatiu.

P: Pregunto en quins altres punts la derivada és negativa.

A: Responen que en $x = g$.

P: Pregunto en quins punts la derivada és positiva.

A: Responen que en $x = e$ i $x = f$.

P: Pregunto quin és el signe de la derivada en $x = b$.

A: Responen que és zero.

P: Dic que si tenim la gràfica de la funció, és molt fàcil saber quin és el signe de la derivada. A continuació dic que facin l'activitat 30.

A: Es posen a fer-la.

P: Al cap d'una estona pregunto en quin moment li costa més esquiar.

A: Responen que en C.

P: Pregunto per què.

A: Responen que és perquè hi ha més pendent (alguns diuen perquè hi ha més costa o més inclinació).

P: Pregunto quina recta s'obté perllongant els esquís.

A: Responen que és la recta tangent.

P: Pregunto quin és el valor de la derivada en el punt A.

A: Responen que és zero.

P: Dic que efectivament és zero perquè la recta tangent és horitzontal, i a continuació pregunto quin és el signe de la derivada en el punt C.

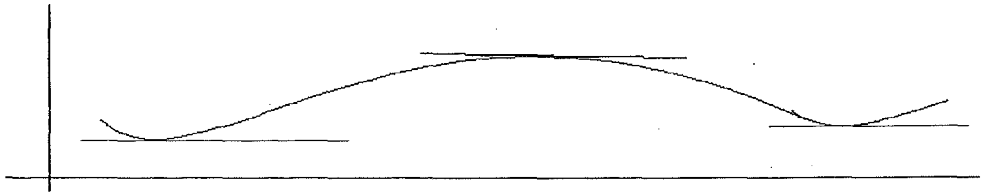
A: Responen que és positiu.

P: Pregunto quin és el signe de la derivada en el punt D.

A: Responen que és negatiu.

P: Faig sortir Alberto C. a la pissarra per contestar l'apartat *d*. Mentre Alberto dibuixa la seva resposta a la pissarra observo que la majoria d'alumnes ha respost correctament.

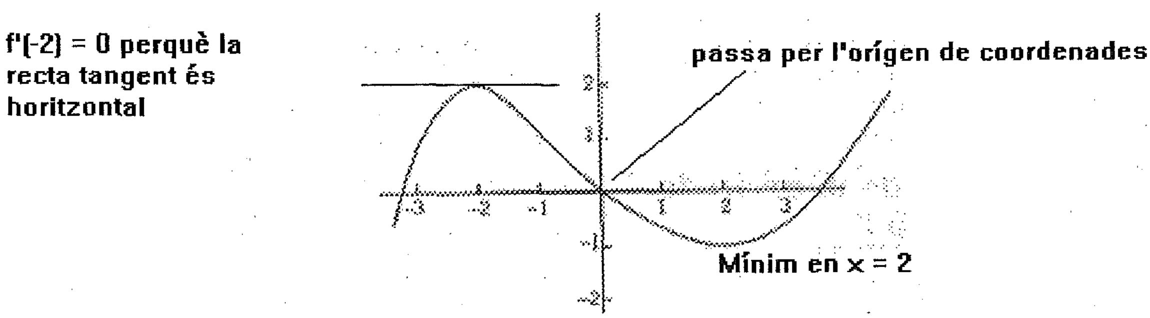
A: Alberto dibuixa la gràfica següent a la pissarra sense fer cap comentari.



P: Seguint amb la mà les línies de la gràfica que ha dibuixat Alberto, els faig observar que és correcta perquè primer tenim un punt en què la derivada val zero (tangent horitzontal), després tenim un tram amb derivades positives (tangents creixents) fins arribar a un altre punt en què la derivada val zero (tangent horitzontal), després segueix un tram amb derivades negatives (tangents decreixents) fins arribar a un altre punt en què la derivada val zero (tangent horitzontal). A continuació els faig observar que en aquest apartat, a partir d'un enunciat sobre derivades, hem pogut fer un esbós de la gràfica de la funció. Dic que quelcom de semblant s'ha de fer a l'activitat 31 on tenen enunciats sobre derivades i han de decidir quines gràfiques els corresponen.

A: Es posen a fer l'activitat 31.

P: Al cap d'una estona observo que molts han relacionat correctament la primera gràfica amb les condicions de l'apartat a). A continuació explico per què la primera gràfica compleix les condicions de l'apartat a) i poso a la pissarra el següent:



P: A continuació pregunto quina descripció compleix la segona gràfica.

A: Responen que les característiques de b).

P: Llegeixo les característiques de c) i pregunto quina gràfica les compleix.

A: Responen que la quarta gràfica.

P: Llegeixo les característiques de d) i pregunto quina gràfica les compleix.

A: Alguns alumnes (pocs) responen que és l'última gràfica.
P: Explico per què l'última gràfica compleix les condicions de d) dibuixant la gràfica a la pissarra amb algunes rectes tangents, que sempre són creixents, i fent-los observar que la recta tangent a l'origen de coordenades és l'eix d'abscisses, la qual cosa fa que la derivada en $x = 0$ sigui zero. A continuació llegeixo les característiques de e) i pregunto quina gràfica les compleix.

A: Responen que la tercera gràfica.

P: Comento el <<Recorda>> que segueix a l'activitat 31 remarcant que:

- Si en tots els punts d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és positiva $(f'(a) > 0)$, la funció és creixent en aquest interval.
- Si en tots els punts d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és negativa $(f'(a) < 0)$, la funció és decreixent en aquest interval.
- En els màxims i mínims relatius la derivada val zero.

També insisteixo, utilitzant l'última gràfica de l'activitat 31, que hi ha punts en els quals la derivada val zero, però que no són ni màxims ni mínims. La classe està a punt d'acabar, per la qual cosa dic que l'apartat <<Relació entre el signe de la derivada i la gràfica de la funció>> no entra en l'examen de demà. Com que tampoc tinc temps de resoldre el problema de velocitat instantània que tenim pendent, proposo que els alumnes que vulguin comentar-lo ho facin al final de la classe o vinguin a l'hora de l'esbarjo al despatx del Departament de Matemàtiques. Toca el timbre i acaba la classe.

A: Laura N. em diu que quan m'ha fet la pregunta sobre la tangent pensava que la recta tangent no podia travessar la gràfica, però que quan he comentat que a l'última gràfica de l'activitat 33 la recta tangent en $x = 0$ era l'eix d'abscisses, ha entès que la recta tangent pot travessar la gràfica.

A l'hora de l'esbarjo només 4 alumnes (David M., Judith P., Pilar G. i Anna G.) vénen a consultar-me el problema de la velocitat instantània.

P: Els explico el problema tal com ho vaig fer a l'hora B del dia 2-12-97.

Valoracions

1) Crec que l'alumnat entén que una funció discontínua no té derivada (ítem 40)

2) Crec que l'alumnat entén que en els punts en què la gràfica té forma de punxa no existeix la derivada (ítem 41).

3) Tinc dubtes que l'alumnat entengui que en els punts en què la gràfica té forma de punxa, aquesta es manté en fer zooms. Crec que entenen que en els punts en què existeix la derivada al fer zooms la corba arriba a tenir forma de recta (ítem 42).

4) Els alumnes tenen una idea intuïtiva de pendent d'una corba en un punt que fàcilment relacionen amb el pendent de la recta tangent en aquest punt (ítem 43).

5) L'alumnat relaciona el signe de la derivada i la gràfica de la funció, entenent que: 1) Si en tots els punts c d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és positiva ($f'(c) > 0$), la funció és creixent en aquest interval. 2) Si en tots els punts c d'un interval (a,b) la derivada d'una funció és negativa ($f'(c) < 0$), la funció és decreixent en aquest interval i 3) En els màxims i mínims relatius la derivada val zero. Però té dificultats per entendre que no tots els punts en què la derivada val zero són màxims o mínims (ítem 44).

5.2.12. Subseqüència 3 d'avaluació. 1r Examen

Aquesta subseqüència està formada per l'examen del dia 12-2-97 i pel comentari i la revisió que se'n va fer a la sessió posterior (16-12-97). És un dels tres que havia planificat per avaluar els alumnes en relació als continguts de la unitat. A diferència dels qüestionaris anteriors, els alumnes sabien la data de l'examen amb antelació i també que la nota comptava per a la nota de la 1a avaluació.

Sessió del 12-2-97

Planificació

A l'hora de confeccionar les preguntes de l'examen vam tenir en compte, entre d'altres, les conclusions del qüestionari 4 que posaven de manifest: 1) que els alumnes tenien dificultats amb el contingut <<variació d'una funció>> , 2) que el càlcul de la taxa mitjana de variació empitjorava quan la forma de presentació de la funció era la seva gràfica, 3) dificultats per calcular l'equació de la recta secant i 4) dificultats amb el tema de velocitat instantània. Aquestes consideracions ens van portar a formular:

- una pregunta en què, a partir de la gràfica de la funció, l'alumnat havia de calcular la variació d'una funció, la taxa mitjana de variació i la recta secant
- una pregunta en què l'alumnat havien de calcular velocitats mitjanes i velocitats instantànies a partir de taules.

D'altra banda, estàvem interessats a esbrinar:

- Quins alumnes encara tenien una idea de recta tangent com aquella que toca a la corba només en un punt (semblant al cas de la circumferència) i quins entenien la recta tangent com la que més s'aproxima a la corba en les proximitats del punt.
- Quins alumnes eren capaços de reconèixer una recta tangent encara que toqués a la corba en més d'un punt (fins i tot en infinits punts).
- Quins alumnes entenien que, amb un zoom adequat, una corba i la seva recta

tangent coincideixen en les proximitats del punt i quins entenien que en els punts en els quals la gràfica tenia forma de punxa seguien tenint forma de punxa després de fer un zoom.

- Si l'alumnat relacionava el pendent de la recta tangent i el concepte de derivada de la funció en un punt.

Aquestes consideracions ens van portar a posar una pregunta de resposta múltiple que servís per avaluar aquestes qüestions.

Un altre aspecte que volíem analitzar eren les dificultats que tenien els alumnes per calcular la derivada d'una funció a partir de l'expressió $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ i per calcular l'equació de la recta tangent. Aquestes consideracions ens van portar a posar una pregunta que servís per avaluar aquestes qüestions.

Faltes: Elia G (fan l'examen 39 alumnes).

Observacions: L'examen es va fer un divendres, de 13'30 a 14'30 (l'última hora de la setmana) i a l'hora anterior els alumnes havien fet un examen d'anglès. Per tant, les condicions no eren gaire bones. L'examen va durar fins a les 15h. L'examen constava de les preguntes següents:

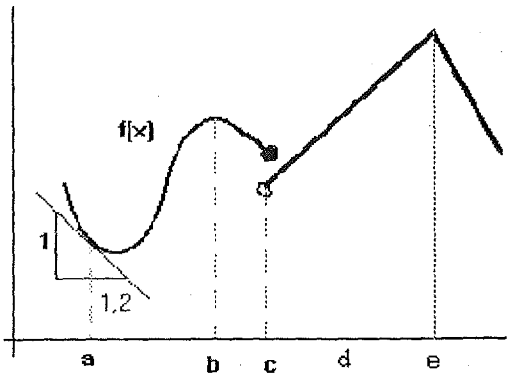
1r EXAMEN

1 a) Calcula, si és possible,

$f'(a) =$ $\qquad$ $f'(b) =$

$f'(c) =$ $\qquad$ $f'(e) =$

b) Si amb un graficador fem zooms successius de la funció en les proximitats del punt del gràfic d'abscissa $x = b$, creus que és possible obtenir un gràfic com el que mostren les il·lustracions següents?

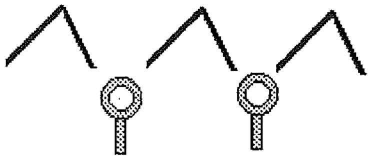


1. Sí, perquè la recta tangent en $x = b$ és horitzontal i, en fer zooms successius, el gràfic de la funció i la recta tangent coincideixen.

2. No, perquè per molt que ampliem el gràfic mai acabarà sent horitzontal.

3 Cap de les anteriors

c) Si fem zooms successius de la funció en les proximitats del punt del gràfic d'abscissa $x = e$, creus que és possible obtenir un gràfic com el que mostren les il·lustracions següents:



1. No, perquè l'angle es va obrint a mesura que l'ampliem
2. Sí, perquè l'aspecte de l'angle no canvia en canviar de zoom
3. Cap de les anteriors

d) La recta tangent a $f(x)$ en el punt d'abscissa $c<d<e$

1. No té sentit parlar de recta tangent perquè coincidirà amb la funció en infinits punts.
2. Serà la recta que resulta de perllongar el segment.
3. Cap de les anteriors.

e) Si suposem que tenim un programa que ens permet fer zooms successius de qualsevol gràfica, creus que podríem utilitzar el procediment següent per dibuixar rectes tangents?
"Ampliar la gràfica en un punt i perllongar-la quan sembli que sigui una recta"
1. No, solament serveix per gràfiques formades per segments de rectes.
2. Sí, perquè en fer zooms successius, el gràfic de la funció i la recta tangent no es poden distingir l'un de l'altre.
3. Cap de les anteriors.

f) La tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$ no pot tocar ni tallar a la gràfica de $g(x)$ en cap altre punt

1. Fals
2. Cert

2 La taula següent reflecteix l'espai recorregut per un cotxe i el temps transcorregut:

Temps	5	5,9	599	5,999	5,9999	..	6
Distància en m (des del km 0)	125	174,1	179,4005	179,940005	179,9940001	..	180

b) Calcula la velocitat mitjana durant els 6 primers segons.
d) Calcula la velocitat mitjana entre $t = 5{,}9$ segons i $t = 6$ segons.
d) Quina és la velocitat instantània en $t = 6$ segons?
e) L'espai recorregut per un mòbil ve determinat per la fórmula $d(t) = 3t^2$. Calcula la velocitat instantània en $t = 4$.

3 Donada la funció $f(x) = x^2 + 3x - 5$ calcula:

a) $f'(2)$ Utilitzant que $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

b) L'equació de la recta tangent en $x = 2$

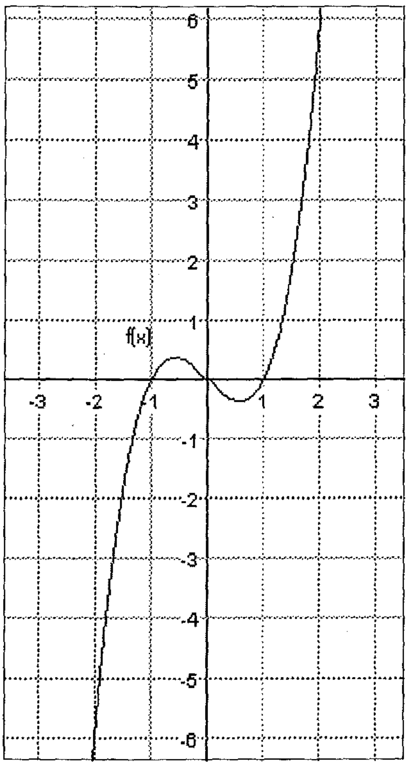
4 Donada la funció $f(x)$ troba:

a) La variació de la funció entre -2 i 1

b) Un nombre a tal que la variació entre 1 i a sigui 6

c) La taxa mitjana de variació de la funció entre x=-2 i $x = 2$.

d) L'equació de la recta secant que passa pels punts (-2, f(2)) i (2, f(2))



Desenvolupament de la sessió

Reparteixo els exàmens i faig les observacions següents sobre la primera pregunta:

- Han d'encerclar la resposta que considerin correcta en els apartats b) - f)
- Els apartats a) - d) fan referència a la funció $f(x)$ de la figura.
- L'apartat d) fa referència a la recta tangent en el punt d'abscissa $x = d$.

- Els apartats e) - f) fan referència a una funció $f(x)$ qualsevol.

En relació a la segona pregunta faig les observacions següents:

- Faig ordenar correctament els apartats que, per un error, no ho estaven.
- Comento que els tres primers apartats s'han de respondre a partir de la taula, mentre que el quart és independent perquè la funció $d(t) = 3t^2$ no dóna aquesta taula de valors.

Els alumnes es posen a fer l'examen i alguns em fan preguntes. Trobo molt significativa una d'Alberto C. de la qual dedueixo que, per trobar la velocitat instantània de l'apartat c) de la segona pregunta, ha seguit el procediment següent:

1) Ha trobat la fórmula $d(t) = 5t^2$ a partir de la taula
2) Ha calculat el límit següent:

$$v(6) = \lim_{t \to 6} \frac{d(t) - d(6)}{t - 6}$$

Aquest procediment m'ha sorprès perquè no esperava que cap alumne utilitzés un procediment d'aquest tipus.

Valoració de les respostes de l'examen

Primera pregunta

Apartat a)

Càlcul de $f'(a)$

Respostes	-0,83 *	0,83 *	Si	0,66666.....	Blanc
Alumnes	12 (31 %)	21 (54%)	1 (3%)	1 (3%)	4 (10%)

* -0,83 o qualsevol equivalent (-0,8333... , -0,8 , -1/1,2)

* 0,83 o qualsevol equivalent (0,8333... , 0,8 , -1/1,2)

El 85 % ha buscat el pendent dividint l'altura per la base, però només el 31% ha tingut en compte que la recta tangent és decreixent i que el pendent és negatiu.

Càlcul de $f'(b)$

Resp	0	Si	No és possible	$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$	Blanc
Alum	29 (74 %)	3 (8 %)	1 (3%)	1 (3%)	5 (13%)

El 75 % té clar que en un màxim la derivada val zero..

Càlcul de $f'(c)$

Respostes	No existeix	Blanc
Alumnes	37 (95 %)	2 (5 %)

La resposta <<No existeix>> es desglossa de la manera següent:

- 16 alumnes (41%) responen <<No existeix perquè és discontínua>>
- 15 alumnes (39 %) responen <<No existeix>>
- 1 alumne (3 %) respon <<No hi ha>>
- 4 alumnes (10 %) responen <<No és possible>>
- 1 alumne (3 %) respon <<No>>

El 95 % respon correctament i el 41% relaciona la no existència de la derivada amb la discontinuïtat.

Càlcul de $f'(d)$

Respostes	No existeix	Si	Blanc	0
Alumnes	34 (87 %)	1 (3%)	3 (8 %)	1 (3%)

La justificació de la resposta <<No existeix>> es desglossa de la manera següent:

- 11 alumnes (28%) responen <<No existeix perquè té forma de punxa / pic>>
- 13 alumnes (33%) responen <<No existeix>>
- 1 alumne (3%) respon <<No hi ha>>
- 2 alumnes (5%) responen <<No és possible>>

7 alumnes (18%) relacionen la no existència de la derivada amb la no existència de la recta tangent.

- 1 alumne (3%) respon <<No té perquè quan té forma de punxa té dos solucions i no s'agafa cap>>
- 2 alumnes (5%) responen <<perquè no té recta tangent>>.
- 1 alumne (3%) respon <<Perquè existeixi recta tangent en un punt i per tant derivada les corbes de la funció han de ser suaus, sense canvis bruscos>>
- 1 alumne (3%) respon <<No és possible perquè no apareix la recta tangent. La té una part, però l'altra desapereix>>
- 1 alumne (3%) respon <<No és possible perquè tindria dues ratlles la tangent>>
- 1 alumne (3%) respon <<No té recta tangent, en té dues i per això no existeix $f'(a)$>>

Un 87% entén que en els punts en què la gràfica té forma de punxa no existeix la derivada i un 18% relaciona la forma de punxa amb la manca de recta tangent.

Apartat b)

Respostes	1	2	3
Alumnes	37 (95%)	1 (3%)	1 (3%)

El 95 % dels alumnes té clar que, en fer zooms amb un graficador, la gràfica i la recta tangent coincideixen.

Apartat c)

Respostes	1	2	3
Alumnes	1 (3%)	37 (95%)	1 (3%)

El 95 % dels alumnes té clar que en els punts de la gràfica en forma de punxa, aquesta es manté en fer zooms. Aquest resultat em va sorprendre perquè, a diferència de la pregunta anterior, els alumnes no ho havien vist a la pantalla de l'ordinador.

Apartat d)

Respostes	1	2	3
Alumnes	21 (54%)	12 (31%)	6 (15%)

Les respostes dels alumnes posen de manifest que considerar <<la recta tangent a una corba com aquella que la toca només en un punt>> és un entrebanc per entendre que <<la recta tangent és la que en les proximitats del punt s'aproxima més a la corba>>; entrebanc que es manifesta amb més força quan la recta tangent toca la corba en un nombre infinit de punts. Aquest fet, que s'ha posat de manifest en moltes investigacions, creiem que justifica l'opció de calcular la funció derivada de les funcions de proporcionalitat directa i afins gràficament, buscant una condició que compleixin totes les tangents (tal com es fa en les activitats 37-39).

Apartat e)

Respostes	1	2	3
Alumnes	0 (0 %)	34 (87%)	5 (13%)

El poc treball que hem fet amb ordinador i els bolcats de pantalla que hi ha a la unitat sembla que han estat suficients perquè el 87% respongui correctament.

Apartat f)

Respostes	1	2
Alumnes	27 (69%)	12 (31%)

El 31% de respostes incorrectes tornen a posar de manifest que considerar <<la recta tangent a una corba com aquella que la toca només en un punt>> és un entrebanc perquè es manifesta en contextos on s'ha d'utilitzar que <<la recta tangent és la que en les proximitats del punt més s'aproxima a la corba>>. Aquest entrebanc es manifesta amb més força quan la recta tangent toca a la corba en un nombre infinit de punts.

Segona pregunta

Apartat a)

Resp	30 m/s	30 km/s	30	3 m/s	15 km/h	55 m/s	blanc
Alum	31 (80%)	2 (5%)	1 (3%)	1 (3%)	1 (3%)	2 (5%)	1 (3%)

Les respostes correctes es justifiquen de la manera següent:

- Alumnes que contesten quelcom semblant a:

$$v_m = \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \frac{180 - 0}{6 - 0} = \frac{180}{6} = 30 \text{ m / s}$$

- Alumnes que contesten 180 / 6 = 30 m/s
- Alumnes que contesten quelcom intermedi entre les dues respostes anteriors com, per exemple:

$$\frac{180 - 0}{6 - 0} = \frac{180}{6} = 30 \text{ m / s}$$

Cal destacar que 5 alumnes utilitzen la notació $v_m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ i un altre utilitza $v_m = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ Aquestes notacions no s'han utilitzat a l'aula i, per tant, són elaboració pròpia dels alumnes posant així de manifest que entenen que $d(t)$ és un cas particular de $f(x)$

L'error a les unitats (30 km/s) s'explica perquè la frase <<distància en m (des del km 0)>> s'interpreta com <<distància en km>>. És típic l'error de no posar unitats i respondre només 30, causat perquè l'alumne oblida que el resultat de la mesura d'una magnitud ha de ser un nombre seguit d'una unitat. L'alumne que ha contestat 3 s'ha equivocat en la divisió (la seva resposta fou 180 / 6 = 3 m/s). La resposta 15 km/h és d'un alumne que no dóna cap explicació , mentre que l'alumne que hem comptabilitzat com a blanc va respondre:

$$vm = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'error de posar 55 m/s es produeix perquè l'alumne considera que la velocitat mitjana durant els sis primers segons és la velocitat mitjana entre el primer valor de la taula $t = 5$ i $t = 6$

$$\frac{180 - 125}{6 - 5} = 55 \text{ m / s}$$

Tant l'alumne que ha respost $vm = \dfrac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$ (blanc) com els dos que han respost 55 m/s sembla que no tenen clar que, quan es demana la velocitat mitjana al llarg dels sis primers segons, $t_1 = 0$. No identificar t_1 amb 0 porta el primer alumne a no saber per quin valor ha de substituir t_1 , i als altres dos alumnes a considerar que t_1 és el primer nombre de la taula. Aquesta conclusió queda corroborada pel fet que aquests tres alumnes han respost correctament l'apartat b) on el valor de t_1 està explicitat.

Si considerem com acceptables les respostes 30 m/s , 30 km/s i 3 (error de divisió) tenim que el 90% ha sabut calcular la velocitat mitjana a partir de la taula .

Apartat b)

Resp.	59,5 m/s	59,5 km/s	59,5	55 m/s	14,999 km/s	59,99 m/s
Alum	33 (85%)	2 (5%)	1 (3%)	1 (3%)	1 (3%)	1 (3%)

- Les respostes correctes es justifiquen de la manera següent:
  - Alumnes que contesten quelcom semblant a:

$$v_m = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{180 - 174{,}05}{6 - 5{,}9} = \frac{5{,}95}{0{,}1} = 59{,}5\ m/s$$

- Alumnes que contesten només amb nombres com, per exemple:

$$\frac{180 - 174{,}05}{6 - 5{,}9} = \frac{5{,}95}{0{,}1} = 59{,}5\ \mathrm{m/s}$$

Cal destacar que 5 alumnes utilitzen la notació $vm = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

i un altre utilitza $vm = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

- Els dos alumnes que a l'apartat 2a) han respost 30 km/s, són coherents i responen 59,5 km/s.
- L'alumne que a l'apartat anterior ha respost 30 (sense unitats) és coherent i respon 59,5
- L'alumne que a l'apartat anterior va respondre 3 m/s , perquè es va equivocar dividint, ara respon correctament.
- Els dos alumnes que a l'apartat anterior van respondre 55 m/s ara respon correctament
- L'alumne que a l'apartat anterior va respondre 15 km/h ara respon:

$$\frac{180 - 174{,}9940001}{6 - 5{,}9999} = \frac{0{,}00059999}{0{,}0004} = 14{,}999\ \mathrm{km/s}$$

  Aquest alumne s'ha equivocat perquè ha agafat la columna corresponent a t = 5,9999 en comptes d'agafar la corresponent a t = 5,9. A més, fa malament la resta del denominador.
- L'alumne que en aquest apartat ha respost 55 m/s ha calculat la velocitat mitjana entre $t_1 = 5$ s i $t_2 = 6$ s en comptes de calcular-la entre $t_1 = 5{,}9$ s i $t_2 = 6$ s.
- L'alumne que ha respost 59,99 m/s s'ha equivocat restant 180 - 179,9940001

Es pot considerar que el 100% dels alumnes sap calcular la velocitat mitjana amb la fórmula $v_m = \dfrac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$ si t_1 i t_2 estan clarament determinats, ja que

les respostes incorrectes ho són perquè: 1) no han posat les unitats o les han posat malament, 2) s'han equivocat restant, i 3) s'han equivocat en l'elecció de t_1 i t_2. El fet que a l'apartat anterior el valor $t_1 = 0$ estigui donat indirectament fa augmentar una mica el nombre de respostes incorrectes a la pregunta 2a) en relació a 2b).

Apartat c)

Resp.	Blanc	Alguna expressió simbòlica de la velocitat instantània	60 m/s	55	30 m/s	180 m/s	12 m/s
Alum.	4 (10%)	4 (10%)	18 (46%)	1 (3%)	5 (13%)	6 (15%)	1 (3%)

- Les 4 respostes que posen alguna expressió simbòlica de la velocitat instantània són:

  - $$\lim_{h\to 0} = \frac{d(t+h)-d(t)}{h} = \frac{d(6+h)-d(6)}{h}$$

  - $$f'(6) = \lim_{h\to 0} = \frac{f(6+h)-f(6)}{h\to 0}$$

  - $$v(6) = \lim_{t\to 6} = \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$

  - $$v(6) = \lim_{t\to 6} = \frac{d(t)-d(6)}{t-6}$$

Sembla que aquests alumnes no poden continuar perquè no tenen una fórmula per a la funció $d(t)$. Aquesta conclusió es basa que a l'apartat següent, on $d(t)$ ve donada mitjançant una fórmula, tres d'aquests quatre alumnes han contestat correctament i l'altre només s'equivoca a l'últim pas en fer la substitució. Aquests quatre alumnes, davant la falta d'una fórmula, no han sabut respondre a partir de la taula, ni tampoc han estat capaços de buscar-ne una a partir de la taula amb la qual calcular el límit de les velocitats mitjanes.

- L'alumne que ha respost 55 m/s ha calculat la velocitat mitjana entre $t_1 = 5$ s i $t_2 = 6$ s. Sembla que el seu problema és que confon la velocitat mitjana entre dos instants amb la velocitat instantània.

- Els cinc alumnes que han respost 30 m/s han calculat la velocitat mitjana durant els sis primers segons. Quatre han contestat: 180/6 = 30 m/s i un d'ells (Eva P.) ha escrit el comentari següent: <<És 30 m/s perquè la v_i en t_0 6 és el mateix que dir la v_m durant els sis primers segons>>. L'altre alumne (Luis J. G) ha donat una resposta que posa de manifest la contradicció entre la definició de velocitat instantània i la idea que totes les velocitats són velocitats mitjanes que es calculen per la fórmula espai / temps:

$$v_i = \lim_{t_0 \to 0} = \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$

$$\lim_{t_0 \to 0} = \frac{180-d(t_0)}{6-t_0}$$

$$\lim_{t_0 \to 0} = \frac{180-d(0)}{6-0} = \frac{180}{6} = 30 m/s$$

- L'alumne que ha respost 12 m/s (David M.) ha respost el següent:

c) velocitat instantània $\rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$ $\quad t=6$ $\quad$ 0

Formula $d(t)=3t^2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(6+h)-d(6)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(36+h^2+12h)-108}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{108}+3h^2+36h-\cancel{108}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3h+12h)}{\cancel{h}} = \boxed{12\,m/s}$$

En la resposta d'aquest alumne cal destacar, malgrat els errors, la utilització de la notació $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$, la qual no s'havia utilitzat a l'aula per calcular velocitats instantànies, sinó que només havia aparegut la notació $v(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ a l'activitat 19 i s'havia comentat que era el resultat d'aplicar la notació $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a l'expressió

$$v(t_0) = \lim_{t\to 6} = \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$

La necessitat d'utilitzar una fórmula va portar-lo a considerar, malgrat el comentari que jo havia fet abans de començar l'examen, que la de l'apartat d) corresponia a la taula de l'apartat c). Aquest alumne, que repeteix curs, s'ha equivocat en treure factor comú i en substituir h per zero. Sembla que el seu error, que ha repetit en l'apartat d), és causat pel convenciment que el nombre tres, que és factor comú, es pot eliminar (simplificar?). L'altre error que comès (posar $12h$) no sembla important perquè, en fer la substitució, no considera que el <<12>> estigui multiplicat per h; i, a més, no el repeteix en els apartats d) i 3a).

- Els 6 alumnes que han respost 180 m/s han confós la velocitat en $t = 6$ amb l'espai recorregut durant els 6 minuts. Han agafat el nombre 180 de la taula i l'han convertit en 180 m/s. Quatre d'ells han respost <<180 m/s>>; un altre (Alfonso M.) ha respost $\lim\limits_{x \to 6} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 180 m/s$ i el sisè (Alicia M.) ha respost <<$v(t_0) = \lim\limits_{t \to 6} = (6,t) = 180$, la velocitat instantània serà els límits de les seves velocitats mitjanes>>.

- Les respostes dels 18 alumnes que responen 60 m/s es desglossen així:
  - Dos no donen cap tipus d'explicació i només posen 60 m/s.
  - Un alumne (Alex A.) identifica la velocitat mitjana entre $t = 5{,}9999$ s i $t = 6$ s amb la velocitat instantània. Aquest alumne respon així:

2) a) $V_m = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{180-0}{6-0} = \boxed{30\ m/s}$

b) $V_m = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{180-174'05}{6-5'9} = \dfrac{5'95}{0'1} = \boxed{59'5\ m/s}$

c) $V_i = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{180-179'9940001}{6-5'9999} = \dfrac{0'006}{0'0001} = \boxed{60\ m/s}$

d) $d(4) = 3 \cdot 16 = 48$

$d(3'999) = 3 \cdot 15'992001 = 47'976003$

$V_i = \dfrac{48-47'976003}{4-3'999} = \dfrac{0'023997}{0'001} = 23'997 \simeq \boxed{24\ m/s}$

Cal tenir en compte que aquest alumne va utilitzar una calculadora que converteix 180 - 179,9940001 en 0,006 i no en 0,0059999, la qual cosa fa que el resultat sigui 60 m/s.

- 6 alumnes calculen la velocitat mitjana entre t = 5,9999 s i t = 6 s i fan alguna referència clara al límit, com per exemple l'alumne Jaume G:

2 a) $V_m = \dfrac{\text{espai recorregut}}{\text{temps transcorregut}} = \dfrac{180}{6} = \boxed{30\ m/s}$

b) $v_m = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{180-174{,}05}{6-5{,}9} = \dfrac{5{,}95}{0{,}1} = \boxed{59{,}5\ m/s}$

c) $v(6,t) = \lim\limits_{t\to 6} \dfrac{180-179{,}9940001}{6-5{,}9999} = \boxed{60\ m/s}$

O bé una referència no tan clara com la resposta següent (David G.):

a) $v = \dfrac{180}{6} = \boxed{30\ m/s}$

b) $v\ \text{mitjana} = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{180-174'05}{6-5'9} = \dfrac{5'95}{0'1} = \boxed{59'5\ m/s}$

c) $\dfrac{180-179'9940001}{6-5'9999} = \dfrac{0'0059999}{0'0001} = 59'999 \rightarrow \boxed{60\ m/s}$

- 3 alumnes contesten que la velocitat instantània és 60 m/s perquè és el límit de les velocitats mitjanes, però no les calculen. Per exemple, Jordi C. respon el següent: *"60 m/s. Si calculem les velocitats mitjanes entre 5, 5'9, 5'99, etc i 6, és a dir dels nombres que s'apropen a 6 ens fixem que s'apropen a 60 m/s"* .
- 1 alumna (Sandra D.) calcula dues velocitats mitjanes i diu que la velocitat instantània és 60 m/s sense fer cap referència a que les velocitats mitjanes s'aproximen a la instantània

c)

$\dfrac{180-179'4005}{6-5'99} = \dfrac{0'5995}{0'01} = 59'95\ m/s$ entre $t = 5'99\,s$ i $t = 6\,s$

$\dfrac{180-179'940005}{6-5'999} = \dfrac{0'059995}{0'001} = 59'995\ m/s$ entre $t = 5'999\,s$ i $t = 6\,s$

Velocitat instantànea en $t = 6\,s$ és $\boxed{60\,m/s}$

- Dos alumnes contesten que la velocitat instantània és 60 m/s perquè és el límit de les velocitats mitjanes i acompanyen aquesta afirmació amb el càlcul d'aquestes velocitats. Per exemple Judit P. respon:

2.

a/ $V_m(0,6) = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{180-0}{6-0} = 30\,m/s$

b/ $V_m(5'9,6) = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{d(6)-d(5'9)}{6-5'9} = \dfrac{180-174{,}05}{6-5{,}9} = 59{,}5\,m/s$

c/ La velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes

$V_m(5'9,6) = 59{,}5\,m/s$

$V_m(5'99,6) = 59{,}95\,m/s$

$V_m(5'999,6) = 59{,}995\,m/s$

$V_m(5'9999,6) = 59{,}999\,m/s$

Quan $t \to 6$ el límit es 60.

$V(6) = \lim_{t \to 6} V_m(t,6) = \boxed{60\,m/s}$! → la velocitat instantània es 60

- De les diferents preguntes trobo molt significativa la d'Alberto C. que ha trobat la fórmula $d(t) = 5t^2$ a partir de la taula i la utilitzada per calcular el límit

$$v(6) = \lim_{t \to 6} \frac{d(t)-d(6)}{t-6}$$

Apartat d)

Resp	24 m/s	24 km/s	24	18	16 m/s	8 m/s	48 m/s	36 m/s	12 m/s	75 m/s
Alum	21 (54%)	1 (3%)	6 (15%)	2 (5%)	1 (3%)	2 (5%)	2 (5%)	1 (3%)	2 (5%)	1(3%)

- Els dos alumnes que han respost 48 m/s han obtingut aquest resultat per procediments completament diferents. Esther E. dóna aquest resultat perquè confon l'espai recorregut durant els 4 primers segons amb la velocitat mitjana durant els 4 segons. La seva resposta fou:

$$d(t) = 3t^2 \qquad\qquad d(4) = 3 \cdot 4^2$$
$$t = 4 \qquad\qquad d(4) = 48\ m/s$$

aquesta resposta és coherent amb la que ha donat a l'apartat anterior en la que ha fet el mateix raonament i ha respost 180 m/s. En canvi, Oscar T dóna aquest resultat per un error de càlcul en l'últim pas. La seva resposta fou.

d) $d(t) = 3t^2$. en $t = 4$. $\qquad 3 \cdot 4^2 = 48$

V.I.- $V(4) = \lim_{t \to 4} \frac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{3t^2 - 48}{t - 4} = \frac{0}{0}$.

$\lim_{x \to 4} \frac{3\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \to 4} 3(x+4) = 24 + (24) = 48\ m/s$.

- Els 2 alumnes que han respost 12 m/s donen aquest resultat perquè confonen la velocitat instantània amb la velocitat mitjana. Antoni G. va respondre:

$$d(t) = 3t^2 \qquad e = 3(4)^2 = 48 \qquad 48/4 = 12\ m/s$$

Aquest alumne té molts problemes de seguiment perquè li manquen els coneixements previs. Aquest curs ha faltat molt a classe , i també el curs passat, perquè ha de seguir tractament mèdic. Si tingués assistís regularment no tindria problemes per seguir les classes. Crec que el seu cas és un exemple de dificultats a causa de manca dels coneixements previs.

En la resposta de l'altre alumne (Lluís Javier G.) es posa de manifest l'entrebanc <<la velocitat és espai / temps>> ja que, malgrat utilitzar la notació pròpia de la velocitat instantània, continua considerant que les velocitats són velocitats mitjanes que es calculen dividint l'espai pel temps. La seva resposta fou:

$$\lim_{t_0 \to 0} = \frac{3t^2 - d(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{48 - d(0)}{4 - 0} = \frac{48}{4} = 12 m/s$$

Aquest alumne ha repetit quasi tots els cursos i és tres anys més gran que els altres. Presenta diferents tipus de dificultats i crec que és l'únic que es pot incloure en la categoria <<dificultats causades per un baix nivell d'abstracció>>. La seva resposta incorrecta és coherent amb la seva resposta a l'apartat anterior.

- Els dos alumnes que han respost 8 m/s (Rocio P. i David M.) s'han equivocat en aplicar la propietat distributiva. Són un exemple de dificultat causada per una manca de domini de la manipulació algèbrica.

- L'alumne que ha respost 36 (Raúl B.) dóna aquesta resposta perquè comet un error en la notació de la velocitat instantània.

d) $$\lim_{d \to 4} \frac{d(4+h) - d(4)}{h} \Rightarrow \lim_{d \to 4} \frac{3(4+h)^2 - 48}{h} \Rightarrow \lim_{d \to 4} \frac{3(16+h^2+8h) - 48}{h}$$

$$\lim_{d \to 4} \frac{48+3h^2+24h-48}{h} \Rightarrow \lim_{d \to 4} 3h+24 = 3 \cdot 4 + 24 = 36$$

Si en comptes de considerar que $h \to 4$, hagués considerat $h \to 0$, hauria obtingut el resultat correcte (sense les unitats). A les respostes anteriors sempre havia donat un nombre i unes unitats, però en l'apartat anterior ha confós la velocitat instantània amb l'espai recorregut. Cal remarcar va ser un dels dos que va trobar la velocitat instantània quan vaig passar el qüestionari núm 3.

Si bé s'ha equivocat en considerar que $h \to 4$, cal remarcar que aquest tipus de notació no l'havíem utilitzat cap vegada a la classe per calcular velocitats instantànies i que la seva utilització en aquest cas pot venir condicionada pel fet de tenir la nova expressió de la derivada escrita en el problema següent.

- L'alumne que ha respost 75 m/s (Jessica C.) ha fet el següent:

d) $d(T) = 3T^2$ $T = 4$

$d(4) = 3(4)^2$

$d(4) = 48$

v instantània $= \dfrac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \dfrac{3t^2 - 48}{t - 4}$

$v_{inst} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(a+h)^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(4+h)^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(24+h^2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{72+3h^2}{h} = 72+3h$ $\boxed{75\ m/s}$

La resposta d'aquesta alumna evidencia el dilema de la notació que calia emprar. D'entrada intenta utilitzar la que s'havia utilitzat a l'aula per calcular velocitats instantànies i després prova d'aplicar la nova notació que té escrita en el problema 4. En els dos casos s'observa que no domina cap de les dues i que comet uns errors de manipulació de les expressions algèbriques molt greus.

- 21 alumnes han respost 24 m/s.

  2 d'aquests alumnes (Raquel G. i Alex A.) han calculat la velocitat mitjana en un interval de temps molt petit i després han identificat la velocitat mitjana amb la velocitat instantània. Per exemple Alex A. ha fet:

d) $d(4) = 3 \cdot 16 = 48$

$d(3'999) = 3 \cdot 15'992001 = 47'976003$

$v_i = \dfrac{48 - 47'976003}{4 - 3'999} = \dfrac{0'023997}{0'001} = 23'997 \simeq \boxed{24\ m/s}$

Aquest alumne utilitza el mateix procediment que havia utilitzat per respondre a l'apartat anterior només que ara ho fa a partir de la fórmula i a l'apartat anterior ho ha fet a partir de la taula. L'altra alumna (Raquel G.) aplica el mateix procediment quan té la funció donada mitjançant una fórmula, però no sembla capaç d'aplicar-lo quan la funció ve donada per una taula, ja que va deixar en blanc l'apartat anterior.

10 alumnes han calculat el $\lim_{t \to 4} = \dfrac{d(t)-d(4)}{t-4}$. 3 d'aquests alumnes han aplicat Ruffini, mentre que els altres 7 han tret factor comú i han utilitzat que la suma per la diferència és la diferència de quadrats. Cal comentar que deixar de posar $\lim_{t \to 4}$ abans de fer la substitució és un error força habitual. Per exemple Laura N ha fet el següent:

d) $d(t) = 3t^2$ $\quad v(4)$

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to 4} \frac{3t^2 - 48}{t - 4} =$$

$$= \frac{3(t^2 - 16)}{t - 4} = \frac{3\cancel{(t-4)}(t+4)}{\cancel{(t-4)}} = 3(t+4) = 3.(4+4) =$$

$$= 12 + 12 = 24 \text{ m/s}$$

7 alumnes han utilitzat la notació $\lim_{h \to 0} = \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$. 6 d'ells l'han obtingut correctament i 1 ha comès dos cops l'error de considerar que $4^2 = 8$. La compensació d'errors l'ha portat a obtenir el resultat correcte.

1 Alumne (Sergio G) ha respost de les dues maneres. La seva resposta fou:

d) $d(t) = 3t^2$

$v(4) = \lim_{t\to 4} \frac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \lim_{t\to 4} \frac{3t^2 - 48}{t - 4} = \lim_{t\to 4} \frac{3(t^2 - 16)}{t - 4} = \lim_{t\to 4} \frac{3(t+4)\cancel{(t-4)}}{\cancel{t-4}} =$

$= \lim_{t\to 4} 3(t+4) = 3(4+4) = \boxed{24\ m/s}$

o també.- $v(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(h^2+16+8h) - 48}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + \cancel{48} + 24h - \cancel{48}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3h+24)}{\cancel{h}}$

$\lim_{h\to 0} 3h + 24 = \boxed{24\ m/s}$

1 Alumne (Mike D.) en comptes de calcular $\lim_{h\to 0} = \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ ha

calculat. $\lim_{h\to 0} = \frac{f(4-h)-f(4)}{h}$

- 1 alumna (Laura A.) ha calculat $\lim_{t\to 4} = \frac{d(t)-d(4)}{t-4}$ i ha donat com a resultat 24 km/s. En totes les respostes anteriors ha utilitzat aquestes unitats. Per calcular el límit ha utilitzat Ruffini.
- 6 alumnes han contestat 24 sense posar unitats. 3 d'ells han calculat

$\lim\limits_{t \to 4} = \dfrac{d(t)-d(4)}{t-4}$. Dos d'aquests 3 alumnes han tret factor comú i han utilitzat que la suma per la diferència és diferència de quadrats, mentre que l'altre ha utilitzat Ruffini. Cal destacar que, si bé Jordi A. ha utilitzat la notació a partir d'un determinat pas, substitueix la *t* per la *x*. La seva resposta fou:

$$d(t) = 3t^2$$

$$t_0 = 4$$

$$v.i = \lim_{t \to 4} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to 4} \frac{3t^2 - 48}{t - 4} \Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{3x^2 - 48}{x - 4} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{3(x^2 - 16)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{3\,\cancel{(x-4)}\cdot(x+4)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \to 4} 3x + 12 = 24 \text{ m/s}$$

2 alumnes han calculat $\lim\limits_{h \to 0} = \dfrac{d(4+h)-d(4)}{h}$

1 alumne (Raúl C) ha contestat 24 de la manera següent:

d) $d(t) = 3t^2$ $\quad \underline{24}$

Temps (s)	3	3'9	3'99	3'999	4
Distància (m)	27	45'63	47'7603	47'976003	48

$$\frac{48 - 45'63}{4 - 3'9} = \frac{2'37}{0'1} = 23'7 \text{ m/s.}$$

$$\frac{48 - 47'97}{4 - 3'999} = \frac{0'03}{0'001} = 23'997 \text{ m/s}$$

Aquest alumne ha fet: fórmula ⇨ taula ⇨ velocitat mitjana ⇨ velocitat instantània

- Les dues alumnes que han contestat 18 han calculat correctament la velocitat instantània en $t = 3$, en comptes de fer-ho en $t = 4$. L'alumna Silvia V. ha utilitzat

  la notació $f'(3) = \lim_{h \to 0} = \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$, mentre que l'altra (Elisabeth G.) ha

  calculat correctament $\lim_{t \to 3} = \dfrac{d(t)-d(3)}{t-3}$ utilitzant que la suma per la

  diferència és la diferència de quadrats, i traient factor comú.

- 1 Alumne (Javier F.) ha respost 16 m/s perquè en

  calcular $\lim_{h \to 0} = \dfrac{f(4-h)-f(4)}{h}$ s'ha equivocat en el moment d'utilitzar la

  propietat distributiva.

Conclusions a la pregunta 2 sobre velocitats

L'única activitat semblant a la pregunta 2c de l'examen treballada a classe era la pregunta 2 del qüestionari 4. Aquest qüestionari només es va passar a 17 alumnes el dia 5-12-97 i després vaig dictar la pregunta 2c per a tota la classe, perquè la fessin a casa seva. No el vaig comentar a classe, però vaig dir que si algú tenia dificultats per resoldre'l podia consultar-me-les. Només 4 alumnes van venir el dijous dia 11 a l'hora de l'esbarjo a consultar-me dubtes. Malgrat la meva explicació, tres dels que van venir (Anna G., David M., i Pilar G.) van contestar malament el dia de l'examen.

Per poder contestar correctament aquesta pregunta l'alumnat ha de calcular, utilitzant la taula, velocitats mitjanes per a intervals de temps cada cop més petits i a continuació ha de fer una hipòtesi sobre el valor al qual s'aproximen. És una pregunta que crea un fort conflicte cognitiu i provoca respostes significatives per a la nostra investigació. L'anàlisi de les respostes ens permet fer la següent tipologia de les respostes dels alumnes:

1) Alumnes que identifiquen la velocitat instantània amb la distància recorreguda. Aquest tipus d'identificació s'observa en les respostes a les preguntes 2c i 2d de l'alumna Esther E.

2) Alumnes que identifiquen la velocitat instantània amb la velocitat mitjana. Aquest tipus d'identificació s'observa en les respostes a la pregunta 2d de l'alumne Antonio G.

3) Alumnes que utilitzen el límit per simbolitzar la velocitat instantània per després identificar-la amb la velocitat mitjana entre el principi i el final. Aquest tipus d'identificació s'observa en les respostes a les preguntes 2c i 2d dels alumnes Jessica C. i Lluís Javier G.

4) Alumnes que identifiquen la velocitat instantània $v(t_0)$ amb la velocitat mitjana entre t_0 i un valor molt pròxim a t_0. Aquest tipus d'identificació s'observa en les respostes a les preguntes 2c i 2d dels alumnes Alex A. i Raquel G.

5) Alumnes que davant d'una pregunta semblant a la que han treballat a classe (2d) utilitzen que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes. Però que, davant d'una pregunta que els provoca un conflicte cognitiu (pregunta 2c quasi no treballada a classe) resolen malament el conflicte i identifiquen la velocitat instantània amb l'espai recorregut o bé amb la velocitat mitjana. Aquest tipus d'identificació s'observa en les respostes a les preguntes 2c i 2d dels 9 alumnes següents: Angela L. Mike D., Elisabeth G., Eva P., Raúl B., Alfonso J. M., Alicia M., David R. i Rocio P.

6) Alumnes que, davant d'una pregunta semblant a la que han treballat a classe (2d), utilitzen que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes. Però que, davant d'una pregunta que els provoca un conflicte cognitiu (2c), el resolen deixant la resposta en blanc o bé posant l'expressió simbòlica de la velocitat instantània i res més. Aquests 7 alumnes són: Laura N., Pilar G., Jordi L., Anna G., Silvia V. i David M.

7) Alumnes que davant d'una pregunta semblant a la que han treballat a classe (2d) utilitzen que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes. Però que, davant d'una pregunta que els provoca un conflicte cognitiu (2c), el resolen correctament utilitzant una altra vegada que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes. Aquests 17 alumnes són: Victor B., Raúl C., Alfonso D., Jordi A, Laura A., Sergio G., Maria Luisa V., Sandra D., Alberto C., Jaume G. Albert C, Isabel G., Jordi C., Judith P., Patricia F., David G. i Javier F.

La inclusió d'alguns alumnes en cada un d'aquests grups, a vegades, és una mica forçada. Per exemple, Alberto C i Raúl C. estan inclosos en aquest últim grup malgrat que l'originalitat de les seves respostes justificaria la creació de noves categories. Per incloure un alumne en una categoria també hem tingut en compte les seves respostes a les altres preguntes de l'examen.

Conclusions sobre la notació utilitzada en les respostes a la pregunta 2 sobre velocitats.

Apartat *a*

1) 20 alumnes, per calcular la velocitat mitjana de l'apartat a, ho han fet numèricament sense posar cap símbol que no fos v_m *o velocitat mitjana.*
2) 19 alumnes van posar algun tipus de fórmula.

- 7 van utilitzar $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
- 1 va utilitzar $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$
- 7 van utilitzar $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$
- 4 van utilitzar $\frac{espai}{temps}$

En relació a la utilització de la fórmula espai/temps, 4 ho fan explícitament i 16 implícitament (numèricament). Respecte a la fórmula $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$ (o bé alguna de les seves variants) 15 alumnes la utilitzen explícitament, mentre que 4 ho fan implícitament (numèricament).

Dels 15 que han utilitzat fórmula, 7 han utilitzat $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ i un $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$. És significatiu que aquests 8 alumnes (21%) apliquin la notació de la taxa mitjana de variació a la funció que ens dóna l'espai a partir del temps perquè en les activitats treballades a classe sempre vam utilitzar la notació $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$ i només en la sessió del dia 27-11-97 vaig fer-los observar la relació entre les dues notacions (veure descripció del dia 27-11-97). El fet que en un context de càlcul de velocitats mitjanes el 21% de l'alumnat utilitzi per pròpia iniciativa la notació de la t.m.v. es pot considerar una manifestació que els objectes personals de velocitat mitjana i de t.m.v. d'aquests alumnes estan força integrats. Sobretot si tenim en compte que en l'apartat següent 6 d'aquests 8 continuen utilitzant la notació de la t.m.v.

Apartat *b*

Per calcular la velocitat mitjana entre $t = 5{,}9$ s i 6 s.

- 5 han continuat amb la notació $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

- 1 ha continuat amb la notació $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$

- Un alumne que en l'apartat anterior ha utilitzat la notació $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ara s'equivoca i ha respost 174,05 / 5,9

- 12 han utilitzat la notació $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$. Un d'ells, l'apartat anterior, havia utilitzat la notació $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

- 1 ha utilitzat la notació $\frac{d(t)-d(a)}{t-a}$

- 2 han utilitzat la notació $\frac{d(6)-d(5,9)}{6-5,9}$

- 17 han utilitzat només nombres: $\frac{180-174,05}{6-5,9}$

Apartat *c*

Dels 10 alumnes que han utilitzat correctament la notació de límits en l'apartat 2c, cal destacar que 7 utilitzen la primera notació de derivada, mentre que 3 utilitzen la nova. Del grup de 7 alumnes que ha optat per la primera notació de derivada:

- 5 han utilitzat la notació $\lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$

- 1 ha utilitzat $\lim_{x \to 6} \frac{d(6)-d(x)}{6-x}$

- 1 ha utilitzat $\lim_{x \to 6} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Dels 3 alumnes que han optat per utilitzar la nova notació de derivada

- 1 ha utilitzat $\lim_{h \to 0} \frac{d(6+h)-d(6)}{h}$

- 1 ha utilitzat $\lim_{h \to 0} \frac{d(t+h)-d(t)}{h}$

- 1 ha utilitzat $\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

Apartat *d*

Dels 31 alumnes que han utilitzat la notació de límits, 14 han optat per l'expressió $\lim_{h\to 0} \frac{d(4+h)-d(4)}{h}$ i 17 per $\lim_{t\to 4} \frac{d(t)-d(4)}{t-4}$ que és la notació que s'havia utilitzat a classe per calcular velocitats instantànies. El fet que 14 alumnes hagin optat per aplicar la nova notació de derivada (que tenien en el problema següent) al càlcul de velocitats instantànies és una manifestació del procés següent:

Canvi de notació implícita realitzat per l'alumne

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0} \quad \Leftrightarrow \quad v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$$

↓ Generalització extensiva — ↑ Concreció

↓ explicada pel professor — ↑ realitzada per l'alumne

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \Leftrightarrow \quad f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Canvi de notació explicat pel professor

Aquesta producció de l'alumne posa de manifest que ha entès que la definició de derivada en un punt és una generalització de la definició de velocitat instantània en un punt a una funció qualsevol, i que pot utilitzar les dues notacions de derivada en un punt.

Si analitzem el procés anterior en termes de funcions semiòtiques, tenim que les fletxes verticals de l'esquerra serien, fonamentalment, una funció semiòtica, que a una expressió extensional li fa correspondre un contingut intensional. Les fletxes horitzontals de sota serien una funció semiòtica, que a una expressió notacional li fa correspondre un contingut notacional . Les fletxes verticals de la dreta serien una funció semiòtica, que a una expressió intensional li fa correspondre una expressió extensional, mentre que les fletxes horitzontals superiors serien una funció semiòtica, que a una expressió notacional li fa correspondre un contingut notacional. Mentre les dues primeres funcions semiòtiques han estat induïdes per les explicacions del professor, les dues últimes són creacions pròpies de l'alumne.

El procés anterior és més ric en funcions semiòtiques que el procés realitzat pels alumnes que han utilitzat la notació $\lim_{t \to 4} \frac{d(t)-d(4)}{t-4}$, ja que en aquest cas la funció semiòtica essencial és la que té una expressió intensional i un contingut extensional

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0} \quad \longrightarrow \quad v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{d(t)-d(4)}{t-4}$$

(Concreció realitzada per l'alumne)

Una conclusió força evident és que la variació notacional incideix sobre el nombre de funcions semiòtiques, ja que el fet de tenir dues notacions per a la derivada en un punt permet realitzar el procés que hem observat en els primers 14 alumnes. En canvi, si només s'hagués treballat la notació $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,tots haurien respost com ho han fet els altres 17 alumnes . Dit d'una altra manera, treballar diferents formes de representació i les traduccions entre elles permet que els alumnes realitzin pràctiques riques en funcions semiòtiques. Restringir-ne les formes de representació i les traduccions porta a pràctiques pobres en funcions semiòtiques.

Tercera pregunta

Apartat *a*

Respostes	7	9	10
Alumnes	37 (95%)	1(3%)	1(3%)

- L'alumne que ha respost 10 (Pilar G.) ha calculat malament $f(2+h)$.
- L'alumne que ha respost 9 (Luís G.) També ha calculat malament $f(2+h)$.
- 2 alumnes que han respost 7 s'han equivocat en els càlculs. Una (Angela L.) també ha calculat malament $f(2+h)$, mentre que l'altre (Alicia M.) s'ha equivocat al simplificar la h.

- Malgrat la meva insistència en les explicacions a l'aula perquè utilitzessin una taula auxiliar per calcular $f(a)$ i $f(a+h)$, només 7 alumnes (18%) ho fan explícitament en la seva resposta. Per exemple Judit P. dóna la resposta següent:

3. $f(x) = x^2+3x-5$

$$a/\ f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+3(2+h)-5-5}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4}+h^2+4h+\cancel{6}+3h-\cancel{10}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+7h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+7)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (h+7) = 7$$

x	y
2	$2^2+3\cdot 2-5 = 4+6-5 = 5$
$(2+h)$	$(2+h)^2+3(2+h)-5$

Les 35 respostes correctes (90%) posen de manifest que els alumnes poden calcular la derivada utilitzant l'expressió $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quan la funció és una funció senzilla. La principal dificultat la tenen a l'hora de calcular i desenvolupar $f(a+h)$ És de suposar que una funció més complicada hagués augmentat el nombre d'errors i també és important remarcar que aquesta era una pregunta esperada pels alumnes.

Apartat *b*

Resp	$y=7x-9$	$y=7x+9$	$y=7x-12$	$y=7x-7$	$y=10x-15$	$y=x+3$	Blanc
Alum	30 (77%)	3 (8%)	2 (5%)	1(3%)	1 (3%)	1(3%)	1(3%)

- L'alumna (Pilar G.), que va respondre $y=10x-15$, dóna aquest resultat perquè a l'apartat anterior va trobar que $f'(2) = 10$. Ara bé el procediment que ha aplicat és correcte.
- L'alumne que ha respost $y=7x-7$ (Victor B.) s'ha equivocat en calcular el punt de tangència, però el procediment que ha aplicat és correcte.
- Les dues alumnes (Angela L i Esther E.) que han respost $y=7x-12$, també s'han equivocat en calcular el punt de tangència, però el procediment que han aplicat és correcte.
- L'alumne que ha respost en blanc ha estat Toni G.
- L'alumne que ha respost $y=x+3$ (Lluís G.) ha calculat correctament el punt de tangència, però no ha tingut en compte que el pendent de la recta tangent era el valor de $f'(2)$ calculat en l'apartat anterior.

Conclusions sobre les respostes a la pregunta 3

- Cal destacar que 37 (95%) alumnes consideren que el valor de $f'(2)$ calculat en l'apartat anterior és el pendent de la recta tangent en $x = 2$ i que només dos alumnes no ho fan (Toni G i Lluís G.). Aquests 37 alumnes tenen clar que el procediment per calcular la recta tangent és el següent:

tipus de gràfic		fórmula tipus		determinació dels paràmetres
recta	⇒	$y = ax + b$	⇒	$a = 3$ i $b = 0$

Per determinar a utilitzen que el pendent és la derivada que ha calculat a l'apartat anterior.Per calcular el paràmetre b els alumnes utilitzen que la recta tangent passa pel punt de tangència.

- El 90% ha calculat $f'(2)$ sense cap error. Els errors en el càlcul de $f'(2)$ s'han produït per errors en el càlcul de $f(a+h)$ (8%) i en la simplificació de la h (3%).
- Si considerem conjuntament els errors en el càlcul de la derivada en un punt en les preguntes 2*d* i 3*a*, tenim que les alumnes Angela L, Alicia M, i Pilar G. no s'han equivocat en la pregunta 2*d* i sí que ho han fet en la pregunta 3*a* perquè la funció de la pregunta 2*d* és més senzilla que la del problema 3*a*.

Pregunta 4

Apartat *a*

Res	6	-6	5	3	-3	2	Blanc
Alum	28(72%)	3(8%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	4(10%)	1(3%)

- 28 alumnes (72%) responen correctament. Les respostes van des de l'alumne que només posa <<6>> fins al que respon <<$f(x_2) - f(x_1) = f(1) - f(-2) = 0-(-6) = 6$ >>
- Dels tres alumnes que han respost <<-6>>, un només ha posat <<-6>> (David M; un altre s'ha equivocat en considerar que $x_2 = -2$ i $x_1 = 1$ (David R.)<<$f(x_2) - f(x_1) = -6-0 = -6$ >> i la tercera (Sandra D.) s'ha equivocat en calcular $f(x_1)$ ja que ha posat <<$f(x_2) - f(x_1) = f(1) - f(-2) = 0-6 = -6$ >>.
- Els 4 alumnes que han respost 2 ho han fet perquè han confós la variació amb la taxa mitjana de variació entre $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$.
- L'alumne que ha respost 5 s'ha equivocat en buscar l'ordenada del punt d'abscissa -2 ja que ha agafat -5 en comptes de -6.
- L'alumne que ha respost en blanc ha estat Toni G.
- L'alumne que ha respost 3 (Esther E.) confon x amb $f(x)$ <<$f(x_2) - f(x_1) = 1 - (-2) = 1+2 = 3$ >>
- L'alumne que ha respost -3 (Oscar T.) dóna una resposta que no permet saber quin és el seu error.

Cal destacar que només una alumna (Esther E.) confon x amb $f(x)$ i que els errors de lectures de coordenades i de confusió entre x_1 i x_2 són mínims. Sembla que la confusió entre la variació de la funció i la taxa mitjana de variació detectada en el qüestionari 4 es va corregint, encara que el 10% continua confonent-les.

Comparació de les respostes a la pregunta 4a amb les respostes a la pregunta 1a del qüestionari 4

- Una (6%) alumna (Raquel G.) en el qüestionari 4 confon la variació d'ordenades amb la variació d'abscisses i també s'equivoca en l'ordre, ja que en comptes de considerar $x_2 = 0$ i $x_1 = -2$, agafa $x_2 = -2$ i $x_1 = 0$. La seva resposta és:

  $$\text{Variació} = x_2 - x_1 = -2 - 0 = -2$$

  Aquesta alumna ha respost correctament la pregunta 4*a* de l'examen.

- 3 (24%) alumnes (Patricia F., Jaime G., i Raúl C.) responen correctament en el qüestionari 4, encara que Patricia i Raúl no utilitzen correctament la notació $f(x_2)$-$f(x_1)$. Només Jaime G. dóna una resposta del tot correcta:

  $$f(x_2) - f(x_1) = 0 - (-6) = 6$$

  Aquests tres alumnes responen correctament a la pregunta 4a de l'examen
- Un (6%) alumne (Victor B.) en el qüestionari 4 s'equivoca en l'ordre ja que, en comptes de considerar $x_2 = 0$ i $x_1 = -2$, agafa $x_2 = -2$ i $x_1 = 0$. La seva resposta és:

  $$f(x_2) - f(x_1) = -6 - 0 = -6$$

  Aquest alumne ha respost correctament la pregunta 4*a* de l'examen.
- 10 (60%) alumnes en el qüestionari 4 confonen la variació de la funció amb la taxa de variació de la funció. 6 (36%) d'aquests alumnes (Alfonso D., David G., Alex A., Javier F.,Esther E. i Jordi C.) calculen la t.m.v. correctament mentre que 4 (24%) la calculen malament (Raúl B., Jordi A., Jessica C. i Pilar G.). Dels 10 alumnes que van confondre la variació de la funció amb la taxa de variació de la funció, 9 (Alfonso D., David G., Alex A., Javier F.,.Raúl B., Jordi A, Jessica C, Pilar G i Jordi C.) ara responen correctament. Només Esther E. respon malament, però ara el seu problema no és confondre la variació de la funció amb la t.m.v., sinó x amb $f(x)$.
- Una (6%) alumna (Isabel G.) respon -1 en el qüestionari 4, sense cap tipus d'explicació. Confon la variació de la funció amb la t.m.v. a la pregunta 4*a* de

l'examen.

- Una (6%) alumna (Sandra D.) respon en blanc en el qüestionari 4. A la pregunta de l'examen s'ha equivocat en calcular $f(x_1)$, ja que ha posat <<$f(x_2) - f(x_1) = f(1) - f(-2) = 0-6 = -6$ >>.

Si comptabilitzem com a resposta correcta a l'examen la de Sandra D., tenim que 15 alumnes (88%) dels 17 que van contestar el qüestionari 4 ara han calculat correctament la variació de la funció entre -2 i 1. Les respostes a la pregunta 1*a* del qüestionari només foren el 24% (si comptabilitzem com a resposta correcta la de Victor B.). Per tant, hi ha una gran millora en el nombre de respostes correctes.

Si comparem els resultats de les respostes a la pregunta 1*a* del qüestionari 4 amb les respostes a la pregunta 4*a* dels alumnes que no van contestar el qüestionari 4, també es nota una millora ja que passem del 24% al 73% (considerant com a vàlides dues de les respostes <<-6>>). Crec que la detecció del problema de la confusió de la variació de la funció amb la t.m.v. i la meva intervenció a l'aula (comentant el problema a classe, encarregant activitats per fer a casa, etc) per combatre'l ha incidit clarament en la comprensió del contingut <<variació d'una funció>>.

Apartat *b*

Alumnes	2	6	7	3	-2	2 o -2
Respostes	20 (51%)	4(10%)	3(8%)	1(3%)	2(5%)	3(8%)

Alumnes	-1 o 2	-1, 0 o -1	-1 o 0	-1	-1 i 1	Blanc
Respostes	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)

- L'alumne que ha respost en blanc ha estat Toni G.
- Els alumnes que han respost <<-1, 0 o -1>>, <<-1 o 0>> i <<-1>> , 3 en total, ho han fet perquè en comptes de buscar un valor *a* tal que la variació fos 6, han buscat un valor *a* tal que la variació fos zero. Suposo que la causa d'aquest error és que en el qüestionari 4 i en els problemes d'autoavaluació i de <<per practicar més>> que he encarregat que fessin pel seu compte hi ha un apartat que pregunta trobar *a* tal que la variació entre *a* i un altre valor sigui zero.

- L'alumne que ha respost -1 i 1 ha considerat que a és -2 i després ha buscat nombres tals que la variació entre -2 i aquests nombres fos 6 i ha trobat que aquests nombres són -1 i 1
- Els tres alumnes que han respost 2 o -2 no han posat cap tipus d'explicació. Una hipòtesi raonable del que han fet és que han vist que la variació entre 1 i 2 és 6 i que després han vist que la variació entre -2 i 1 també és 6. Crec que consideren que és el mateix la variació entre 1 i a que la variació entre a i 1
- L'alumne que ha respost -2 tampoc dóna cap explicació, però crec que ha fet el mateix raonament que els que han respost 2 o -2.
- L'alumne que ha respost 3 no dóna cap explicació que permeti deduir el raonament que ha seguit.
- L'alumne que ha posat -1 o 2 no dóna cap explicació que permeti deduir el raonament que ha seguit.
- Els quatre alumnes que han respost 6 ho han fet perquè han identificat $f(a)$ amb a. Per exemple, Pilar G. ha contestat:

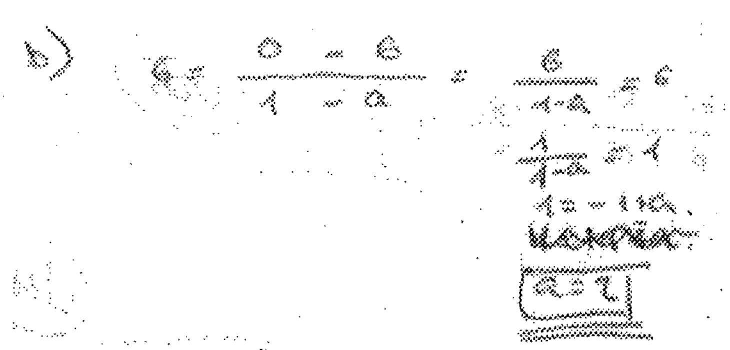
$$\begin{aligned} f(a) - f(1) &= 6 \\ a - 0 &= 6 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Els 3 alumnes que han respost 7 ho han fet perquè han identificat $f(a)$ amb a i $f(1)$ amb 1. Per exemple Jordi A. ha respost

"$f(x_2) - f(x_1) = 6$

$7 - 1 = 6$ El nombre a és 7 "

- La resposta de Lluís J. G., un dels 20 alumnes que han respost 2, és inacceptable perquè confon la variació amb la taxa mitjana de variació i, sobretot, pels errors que comet en fer les operacions. La seva resposta fou



Els altres 19 alumnes han donat respostes que van des de l'alumne que només respon 2 fins al que fa una explicació de tipus gràfica com, per exemple, la d'Alfonso D., que ha respost:

b) $a = ?$

$a = 2$ ho se perquè he mirat el gràfic i com que $f(1) = 0$ ha pujat sis unitats i en el 6 he mirat el punt que passava per allà hi és d'igual (2, 6)

O bé una explicació més simbòlica com la de Jordi C, que va respondre:

b) $f(a) - f(1) = 6$ a es el x_2 porque tiene que ser mayor que 1

$f(a) - 0 = 6$ para que al hacer $f(x_2) - f(x_1) =$ de +.

$f(a) = 6$

$a = 2$

Comparació de les respostes a la pregunta 4b amb les respostes a la pregunta 1c del qüestionari 4

Les respostes dels alumnes a la pregunta 1c del qüestionari 4 que vam considerar correctes foren només dues sobre 17 (12%); ara les respostes correctes són 8 sobre 17 (47%). En el qüestionari 4 vam observar dos tipus d'errors: 1) La confusió entre la taxa mitjana de variació i la variació de la funció i 2) la confusió entre la variació d'una funció i la variació d'abscisses. En les respostes equivocades de l'examen, la confusió entre la taxa mitjana de variació i la variació de la funció no es detecta en aquests 17 alumnes, mentre que la segona encara es pot observar. De fet s'observa la confusió entre la variació de la funció i la variació d'abscisses en els alumnes que consideren que $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1$, però també s'observa que hi ha alumnes que només identifiquen l'abscissa amb la imatge només en un dels dos punts (per exemple $f(a)$ amb a); també s'observa que hi ha alumnes que confonen la variació entre 1 i a amb la variació entre a i 1.

Sembla que com a resultat del procés d'instrucció s'ha aconseguit que els alumnes no confonguin la variació d'una funció entre dos punts amb la taxa mitjana de variació, però, malgrat que ha augmentat força la comprensió d'allò que és la variació d'una funció entre dos punts, aquest contingut encara no està prou clar per a la meitat de la classe.

Conclusions sobre les respostes a la pregunta 4b

- Només 19 alumnes (49%) han respost correctament. Aquest fet posa de manifest: 1) que la variació d'una funció és un concepte del pre-càlcul que cal treballar força abans de començar amb les derivades, 2) que una de les mancances de la unitat és el poc nombre d'activitats que tenen per objectiu treballar la variació d'una funció i 3) que la meva intervenció a l'aula (encarregant activitats per fer a casa, explicant, etc) no ha estat suficient per aconseguir una bona comprensió del contingut variació d'una funció.

- Queda clar que, quan la funció ve donada mitjançant una gràfica, els alumnes tenen més dificultat per trobar un valor a partir de la variació i d'un altre valor (pregunta 4*b*), que no pas per trobar la variació a partir de dos valors (pregunta 4*a*).

- Cal destacar que 7 alumnes (20%) confonen a amb $f(a)$, mentre que a l'apartat anterior aquesta confusió només la té un alumne.

- Hi ha alumnes que creuen que és el mateix la variació entre 1 i a que entre a i 1.

- No es confon la variació d'una funció amb la taxa mitjana de variació.

Apartat *c*

Alumnes	3	1,5	-6 i 6	Blanc
Respostes	36 (92%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)

- L'alumne que ha respost en blanc ha estat Toni G.
- L'alumne que ha respost 1,5 és Oscar T. La seva resposta va ser:

c) $t_m = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$

$$t_m = \frac{3-(-3)}{2-(-2)} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \boxed{1,5}$$

Sembla que el seu problema és que no ha buscat correctament les coordenades dels punts perquè està considerant els punts (-2 , -3) i (2 , 3) en comptes de considerar els punts (-2 , -6) i (2 , 6). També és significatiu que aquest alumne és l'únic de tot el grup que ha utilitzat la notació de la velocitat mitjana com a equivalent a la notació de la t.m.v. d'una funció $f(x)$. La producció d'aquest alumne és una manifestació del procés següent:

$$t.m.v. = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

↓ Concreció	↑ Identificació ? (Generalització?)
↓ explicada pel professor	↑ realitzada per l'alumne

$$v_m(t_1,t_2) = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$$

Aquesta producció de l'alumne posa de manifest que ha entès que hi ha una relació entre la t.m.v. d'una funció i la velocitat mitjana, però no queda clar que hagi entès que la velocitat mitjana és un cas particular de la t.m.v., més aviat sembla que considera que són equivalents. Si analitzem el procés anterior en termes de funcions semiòtiques i suposem que l'alumne ha fet una identificació tenim que les fletxes verticals de l'esquerra serien, fonamentalment, la funció semiòtica que a una expressió intensional li fa correspondre un contingut.extensional. Les fletxes verticals de la dreta serien una funció semiòtica que a una expressió notacional li fa correspondre un contingut notacional. La primera funció semiòtica ha estat induïda per les explicacions del professor, la segona és una creació pròpia, i segurament equivocada, de l'alumne.

- L'alumne que ha respost -6 i 6 és David M. i crec que no entén allò que és la t.m.v. La seva resposta va ser:

  " *c) x = -2 taxa de variació mitjana = -6/1 = -6*

  x = 2 taxa de variació mitjana = 6/1 = 6 "

- Dels 36 alumnes que han respost correctament, 34 han respost, com a mínim, així (Raúl C):

$$\frac{6-(-6)}{2-(-2)}=\frac{12}{4}=3$$

I com a màxim, així (Judit P.):

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{6-(-6)}{2-(-2)}=\frac{12}{4}=3$$

- L'alumne Lluís G.dóna el resultat correcte utilitzant la notació següent

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-6-6}{2-2}=\frac{-12}{-4}=3$$

- L'alumna Silvia V. també ha donat el resultat correcte donant una explicació en termes de variacions. La seva resposta fou:

c) variació vertical = 12　　taxa mitjana de variació = $\frac{\text{variació vertical}}{\text{variació horitzontal}}$ =
variació horitzontal = 4

$= \frac{12}{4} = 3$

Per cada unitat que ens desplacem a la dreta, pugem 3 verticalment.

Comparació de les respostes a la pregunta 4c amb les respostes a la pregunta 1b del qüestionari 4

Les respostes a l'apartat *b* del qüestionari 4 van posar de manifest un alt grau de coneixement del sentit funcional de la t.m.v. En les respostes a la pregunta 4*c*, aquest coneixement arriba al 92% i només hi ha dos alumnes que en les seves respostes posen de manifest que no tenen clar el sentit funcional de la t.m.v. (David M i Toni G.).

Valoracions a les respostes a la pregunta 4c de l'examen

- Un 92% respon correctament
- El procediment seguit per tots els alumnes que han respost correctament ha consistit a buscar primer dos punts del gràfic i després calcular el quocient

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Només 1 alumna (Silvia V.) ha optat per donar una explicació en termes de quocient de variacions

Apartat *d*

Resp	y=3x	y=6x - 6	y=x	y=3x + b	3	1,5	y=2x+2	BLANC
Alum	32 (82%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)	1(3%)

- Entre els 32 que han respost correctament hi hem inclòs Alfonso D. perquè ho ha fet tot bé, però ha respost $y=2x$ en comptes de $y=3x$. 9 d'aquests alumnes han fet algun tipus d'observació que la t.m.v. de l'apartat anterior és el pendent de la recta secant. 20 alumnes han utilitzat que la t.m.v. de l'apartat anterior és el pendent de la recta secant, sense fer cap tipus de comentari. 3 alumnes tornen a calcular el pendent i no fan cap referència a l'apartat anterior. D'aquests tres alumnes Alex A. repeteix exactament el que ha escrit en l'apartat anterior, Patricia F. ha calculat el pendent gràficament:

c) Taxa mitjana de variació $= \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{6-(-6)}{2-(-2)} = \dfrac{6+6}{2+2} = \dfrac{12}{4} = 3$.

d) Equació de la recta: $y = mx + b \rightarrow m = \text{pendent} = \dfrac{3}{1} = 3$

alçada

base

Ho miro a la gràfica

Per tant: $y = 3x + b$ ← Per calcular la b he d'agafar dos punts qualsevols de la recta i substitueix. Ex. (0,0)

$0 = 3 \cdot 0 + b$ (També es pot fer mirant la gràfica).

$\boxed{b=0}$

$\downarrow$

$\boxed{y = 3x}$

El tercer alumne, David M , troba la fórmula de la recta a partir de la gràfica, seguint el procés següent:

gràfic ⇒ model de funció ⇒ fórmula tipus ⇒ determinació dels paràmetres

En efecte, David dibuixa primer la recta secant, després considera que té una fórmula tipus que és $y=ax$, i finalment determina el paràmetre a utilitzant que la recta passa pel punt (2 , 6). En la seva resposta a l'aparat c sembla que entén que la taxa mitjana ens dóna la variació vertical per unitat horitzontal ja que en el gràfic ha dibuixat el pas del punt (-2,-6) al punt (-1,0) i el pas del punt (1,0) al punt (2,6) però està clar que no entén que la t.m.v. entre -2 i 2 ens dóna la mitjana de les variacions verticals per unitat horitzontal. Tampoc li crea cap problema que el pendent de la recta de l'apartat *d* sigui diferent dels resultats de l'apartat *c*

- L'alumna que va respondre $y=2x+2$ (Isabel G.) ho va fer perquè (segons em va comentar després) va considerar que el pendent de la recta tangent era la t.m.v. que havia calculat a l'apartat anterior, però es va equivocar i, en comptes d'agafar el valor 3 com a pendent, va agafar el valor 2.

- L'alumne que va respondre $y=6x-6$ (Isabel G.) ho va fer perquè va considerar que el pendent de la recta tangent era 6, malgrat que en l'apartat anterior va trobar que la t.m.v. era 3. No queda clar en la seva resposta per què considera que el pendent de la recta tangent és.

- L'alumna (Ester E.), que va respondre $y=3x+b$, va considerar que el pendent de la recta secant era el valor que havia obtingut en l'apartat anterior, però no va saber trobar el paràmetre *b*

- L'alumne que va respondre 3 (Raúl B.) repeteix el que havia fet a l'apartat anterior quan va calcular correctament la t.m.v. En canvi, al problema anterior havia calculat correctament l'equació de la recta tangent.

- L'alumne que va respondre 1,5 (Oscar T.) el que fa és repetir el que va fer en l'apartat anterior quan va calcular correctament la t.m.v. utilitzant la notació de velocitats amb la notació funcional habitual. En canvi, al problema anterior havia calculat correctament l'equació de la recta tangent.

- L'alumne que va contestar $y=x$, va cometre l'error de considerar que $f(-2)=-2$ i que $f(2)=2$, de manera que va buscar l'equació de la recta que passava pels punts (-2 , -2) i (2 , 2). La seva resposta va ser: "Aquesta recta té la peculiaritat que a cada valor de la x li correspon com a imatge el mateix nombre, així doncs: $y=x$".

Comparació de les respostes a la pregunta 4d amb les respostes a la pregunta 2d del qüestionari 4

En el qüestionari 4 vam observar que la integració dels sentits funcional i geomètric de la t.m.v. era força elevada (71%). En les respostes a l'examen s'observa que aquest percentatge puja fins al 85%. El qüestionari 4 va posar de manifest que els alumnes tenien dificultats per calcular l'equació de la recta secant (només el 35% dominava el procediment). Les respostes a l'examen fan augmentar aquest percentatge al 82% si només considerem les respostes correctes, i fins a un 85% si acceptem com a bona la resposta de l'alumne que ha contestat $y=2x+2$.

Valoracions a les respostes a la pregunta 4

La primera valoració és que 33 alumnes (85%) han entès la interpretació geomètrica de la t.m.v, ja que saben que el pendent de la recta secant és la t.m.v. que han calculat en l'apartat anterior.

La segona és que el 85% utilitza correctament el procediment per buscar la recta secant. Aquests alumnes segueixen el procediment següent:

tipus de gràfic		fórmula tipus		determinació dels paràmetres
recta	$\Rightarrow$	$y = ax + b$	$\Rightarrow$	$a = 3$ i $b = 0$

Per determinar a, la majoria utilitza que el pendent és la t.m.v que ha calculat en l'apartat anterior, en canvi, Patricia F. calcula el pendent gràficament. Per calcular el paràmetre b, els alumnes utilitzen que aquesta recta passa per un punt del qual coneixen les coordenades.

Només dos alumnes s'aparten d'aquest model. Un d'ells, David M, ha fet el següent:

tipus de gràfic		fórmula tipus		determinació dels paràmetres
recta que passa per l'origen de coordenades	$\Rightarrow$	$y = ax$	$\Rightarrow$	$a = 3$

L'altre, Mike D., ha observat que les coordenades dels punts de la recta complien la condició que l'abscissa era igual a l'ordenada i després ha simbolitzat aquest invariant per $y = x$.

Sessió del 16-12-97

L'objectiu d'aquesta sessió és corregir, repartir i comentar l'examen del 12-12-97

Faltes: Com que els alumnes sabien que avui repartiria els exàmens no en falta cap.

Desenvolupament de la sessió

P: Començo comentant que la nota de l'avaluació serà la mitjana de la nota de l'examen de límits amb un pes del 60% i de la nota de l'examen de derivades amb un pes del 40%. El motiu d'aquesta diferència de ponderació és que l'examen de límits era sobre tot un tema mentre que el de derivades només era sobre la primera part del tema.

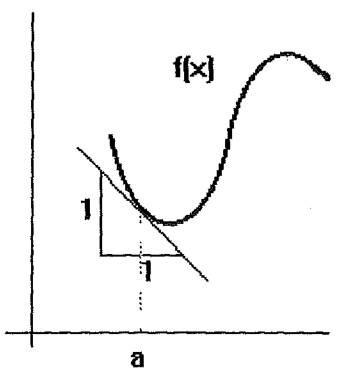
A: Com que la majoria dels alumnes té la sensació que l'examen de derivades els ha anat molt bé hi ha certa decepció, comentaris entre ells i peticions perquè els dos exàmens tinguin el mateix pes.

P: Dic que el motiu és que en el primer examen hi entrava molta més matèria que en el segon. A continuació comento que l'examen de derivades ha anat molt bé, ja que només han suspès 4 alumnes i dic que els motius pels quals han aprovat tants alumnes són:
1) L'examen no era difícil.
2) El qüestionari que vaig passar el 5-12-97 a la meitat de la classe em va permetre detectar algunes dificultats en la comprensió dels conceptes de t.m.v i de velocitat instantània que vaig poder comentar i aclarir durant la setmana anterior a l'examen.

Primera pregunta

A continuació passo a comentar alguns aspectes concrets de la primera pregunta de l'examen:

1) Si pregunten la derivada en el punt $x = a$, és el pendent de la recta tangent, és a dir és la variació vertical dividida per la variació horitzontal.

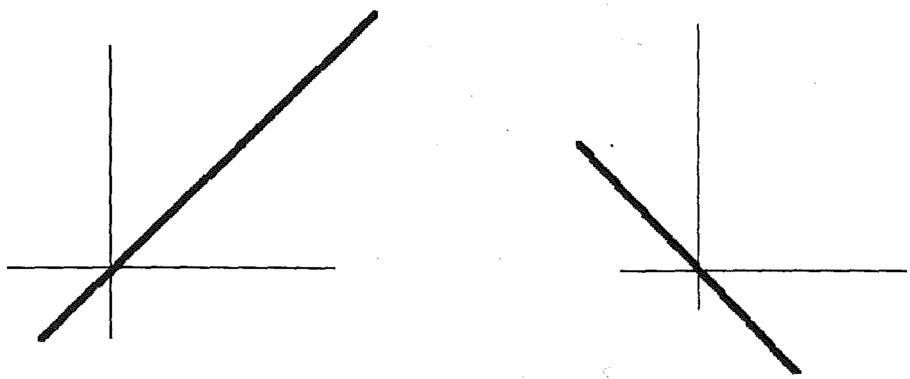


$$f'(a) = \frac{\text{variacio vertical}}{\text{variacio horitzontal}}$$

Ara bé, abans de fer cap càlcul quin signe ha de tenir la derivada?

A: Contesten que ha de ser negativa.

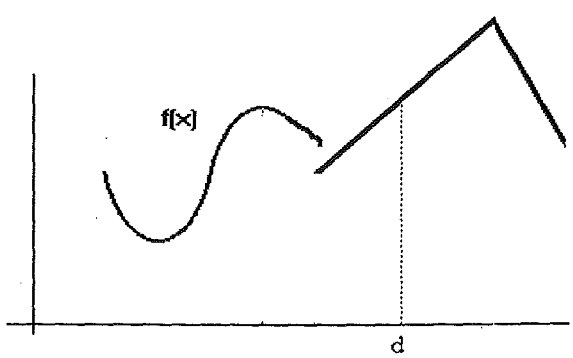
P: Bé ara tots dieu que ha de ser negativa, però més de la meitat de la classe es va oblidar del fet que si una recta és decreixent, va per avall (faig un moviment amb el braç) i té pendent negatiu. Si fóssiu accionistes d'una empresa us adonaríeu que no és el mateix tenir aquest compte de resultats (dibuixo a la pissarra i faig un gest amb el braç cap avall sobre la figura de l'esquerra) que aquest altre (dibuixo a la pissarra i faig un gest amb el braç cap amunt sobre la figura de la dreta) .



Hi ha " petites" diferències, ja que en el primer cas et pots fer milionari, mentre que en el segon et pots arruïnar. A continuació insisteixo que em va sorprendre molt que davant d'una recta decreixent, més de la meitat de la classe donés com a resposta un pendent positiu. Per acabar pregunto si queda clar que les rectes decreixents tenen pendent negatiu i que les rectes creixents el tenen positiu.

A: Responen que ara ho tenen clar.

2) Comento (i dibuixo la figura a la pissarra) que a l'apartat *a* de la primera pregunta, una de les respostes que podien escollir era que la recta tangent en el punt *d* era la que s'obté en perllongar el segment.



També dic que si un alumne té clar el concepte de recta tangent havia d'escollir aquesta resposta, ja que la recta tangent és la que passa pel punt i que en les proximitats del punt és la que més s'aproxima a la gràfica i si apliquem aquesta definició quan la gràfica és una recta, resulta que la recta que passa pel punt i que en les proximitats del punt més s'aproxima a la recta és la mateixa recta (acompanyo aquests comentaris assenyalant sobre la gràfica).

A continuació escric a la pissarra les respostes a les preguntes de l'examen i la seva puntuació

Apartat *a* de la primera pregunta

$f'(a) = \frac{\text{variacio vertical}}{\text{variacio horitzontal}} = \frac{-1}{1,2} = -0,83$ Puntuació 0,5 punts

$f'(b) = 0$ perquè la tangent és horitzontal Puntuació 0,25 punts

$f'(c) =$ no existeix perquè la funció és discontínua Puntuació 0,25 punts

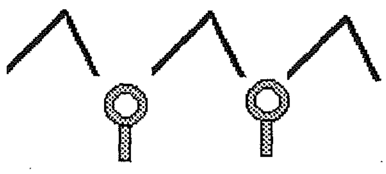
$f'(e) =$ no existeix perquè la funció té forma de punxa Puntuació 0,25 punts

Apartat *b* de la primera pregunta

Explico que la resposta correcta és l'opció 1, perquè, tal com vam veure a l'ordinador, si anem fent zooms primer tenim la figura intermèdia i finalment arriba un moment en què no podem distingir la gràfica de la recta tangent (mentre faig aquests comentaris dibuixo a la pissarra les figures de la pregunta). Puntuació 0,25 punts

Apartat *c* de la primera pregunta

Explico que la resposta correcta és la 2 perquè, si tenim una gràfica que presenta una forma de punxa i anem fent zooms, la punxa continua igual (mentre faig aquests comentaris dibuixo a la pissarra les figures de la pregunta). Puntuació 0,25 punts



Apartat *d* de la primera pregunta

Tal com he comentat abans la resposta correcta és la 2 perquè la recta tangent és la que resulta de perllongar el segment. Puntuació 0,25 punts

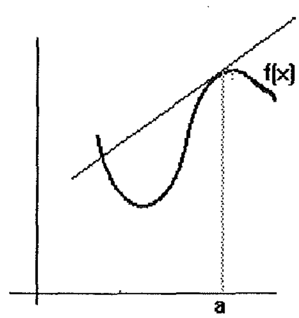
Apartat *e* de la primera pregunta

Si volem dibuixar la recta tangent, per exemple, en el màxim, (utilitzo el dibuix de l'apartat *a* de la pissarra)

una bona tècnica consisteix a fer zooms fins a aconseguir que la gràfica no es pugui distingir d'un segment de recta. Si a continuació en perllonguem el segment , tenim una recta que es pot considerar que és la tangent. Per tant, la resposta correcta era la 2. Puntuació 0,25 punts

Apartat *f* de la primera pregunta

L'afirmació que la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$ no pot tocar ni tallar la gràfica de $g(x)$ en cap altre punt és falsa perquè, per exemple, a la figura següent (la dibuixo a la pissarra) la recta tangent en $x = a$ talla la gràfica en dos punts. Puntuació 0,25 punts



Segona pregunta

P: Poso a la pissarra la taula de la segona pregunta

Temps	5	5,9	5.99	5,999	5,9999	.....	6
Distància en m (des del km 0)	125	174,05	179,4005	179,940005	179,9940001	....	180

i comento que si bé aquesta és una pregunta difícil, en el qüestionari 4 passat el 5-12-97 hi havia una pregunta que era molt semblant i que després vaig dictar per a tota la classe. Per respondre-la s'ha de tenir molt clar el concepte de velocitat instantània A continuació escric i comento a la pissarra les respostes als diferents apartats i la seva puntuació.

Apartat *a* de la segona pregunta

$$v_m(0,6) = \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = \frac{180 - 0}{6 - 0} = \frac{180}{6} = 30m/s$$

Comento que la velocitat mitjana durant els sis primers segons és la velocitat mitjana entre els instants 0 i 6. Puntuació 0,25 punts

Apartat *b* de la segona pregunta

$$v_m(5{,}9\ ,\ 6) = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{180 - 174{,}05}{6 - 5{,}9} = \frac{5{,}95}{0{,}1} = 59{,}5\ m/s$$

Puntuació 0,25 punts

Apartat *c* de la segona pregunta

Comento que la velocitat instantània és el límit de les velocitats mitjanes i que, per tant, el que s'havia de fer era calcular, a partir de la taula, diferents velocitats mitjanes (mentre escric a la pissarra el següent):

$$\begin{aligned} v_m\ (5{,}9\ ,\ 6) &= 59{,}5 \text{ m/s} \\ v_m\ (5{,}99\ ,\ 6) &= 59{,}95 \text{ m/s} \\ v_m\ (5{,}999\ ,\ 6) &= 59{,}995 \text{ m/s} \\ v_m\ (5{,}9999\ ,\ 6) &= 59{,}9995 \text{ m/s} \end{aligned}$$

i veure a quin valor s'aproximaven quan $t \to 6$ s.

59,5 m/s , 59,95 m/s , 59,995 m/s , 59,9995 m/s , ...⇨ 60 m/s

Aquesta manera de contestar utilitza la taula que ens dóna l'enunciat del problema, però una altra manera de contestar aquesta pregunta consisteix a canviar la forma de representació de la funció, és a dir, a partir de la taula, trobar que la funció és $d(t) = 5t^2$ i després calcular la velocitat instantània utilitzant aquesta fórmula (escric a la pissarra)

$$v_6 = \lim_{t \to 6} = \frac{5t^2 - 5 \cdot 6^2}{t-6} = \lim_{t \to 6} \frac{5(t-6)(t+6)}{t-6} = \lim_{t \to 6} 5(t+6) = 60m/s$$

Comento que només un alumne ho ha resolt d'aquesta manera, que és força original. La puntuació era 1 punt sempre que en la resposta hi hagués una explicació de com s'obtenia el resultat de 60 m/s

Apartat *d* de la segona pregunta

Recordo que el dia de l'examen vaig dir que la fórmula d'aquest apartat no era la de la funció dels apartats anteriors. Ara bé, com que en aquest cas sí que tenim la fórmula de la funció la resposta era (escric a la pissarra)

$$v_4 = \lim_{t \to 4} = \frac{3t^2-3\cdot 4^2}{t-4} = \lim_{t \to 4} \frac{3(t-4)(t+4)}{t-4} = \lim_{t \to 4} 3(t+4) = 24 m/s$$

Hi ha hagut alguns alumnes que han calculat v_3 en comptes de v_4. Aquestes respostes les he donat per bones. La puntuació era 1 punt.

A: Sandra D. pregunta si era igual utilitzar Ruffini en comptes de la diferència de quadrats.

P: Li responc que és igual, però que en aquest cas és més còmode treure factor comú i utilitzar que la diferència de quadrats és suma per diferència. A continuació faig un comentari en el sentit que el concepte de velocitat instantània és difícil i que en el qüestionari del dia 4 ja vaig detectar que hi havia molts alumnes que no el tenien clar. També, que en l'explicació de la pregunta del qüestionari i en les observacions que després vaig fer a la classe es va aclarir una mica el concepte de velocitat instantània, però que encara hi ha alumnes que no ho tenen clar, cosa normal d'altra banda, si tenim en compte que és un concepte difícil d'entendre. Insisteixo en l'avantatge de passar qüestionaris perquè em permeten detectar dificultats i errors que puc intentar corregir abans de l'examen.

Pregunta 3

Apartat *a* de la tercera pregunta

Comento que en aquest apartat, donada la funció $f(x) = x^2 + 3x - 5$, s'havia de calcular

$f'(2)$ Utilitzant que $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Per tant, la resposta era:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2+3(2+h)-5-5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4+4h+h+6+3h-5-5}{h} = \lim_{h \to 0} h+7 = 7$$

Sense adonar-me'n cometo l'error de posar en l'última fracció h en comptes de h^2

A: Elia G. em diu que m'he oblidat de posar el quadrat a la h.

P: Rectifico l'error i comento que en aquest apartat he observat errors que corresponen a cursos anteriors, com són: errors a l'hora de simplificar, desenvolupar quadrats de sumes, aplicar la distributiva, etc. Comento que són preocupants perquè són molt resistents i apareixen molt sovint.

Apartat *b* de la tercera pregunta

Comento que el procediment per a calcular la recta tangent és el següent:

tipus de gràfic		fórmula tipus		determinació dels paràmetres
recta	$\Rightarrow$	$y = ax + b$	$\Rightarrow$	$a = 3$ i $b = 0$

Per determinar a s'ha d'utilitzar que el pendent és la derivada que s'ha calculat en l'apartat anterior. Per calcular el paràmetre b s'ha d'utilitzar que la recta tangent passa pel punt de tangència, que és un punt que pertany a la gràfica i a la recta tangent (escric a la pissarra)

Punt de tangència = $(2\ , f(2)\ ) = (2\ , 5)$
La recta tangent té una fórmula del tipus $y = ax + b$
a = pendent de la recta tangent = derivada de la funció = $f\,'(2) = 7$
La recta $y = 7x + b$ passa pel punt de tangència $(2\ , 5)$
$5 = 7(2) + b \;\; ; \;\; 5 = 14 + b\ ; \;\; -9 = b$
La recta tangent en $x = 2$ és la recta $y = 7x - 9$

Puntuació 1 punt

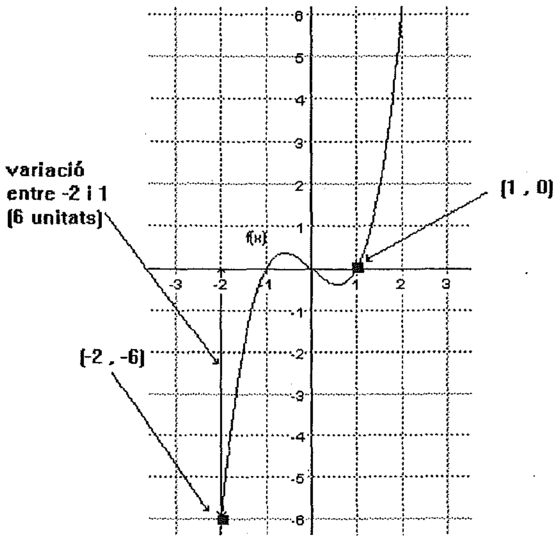
Pregunta 4

Apartat *a* de la quarta pregunta

La resposta era

$$f(x_2) - f(x_1) = f(1) - f(-2) = 0-(-6) = 6.$$

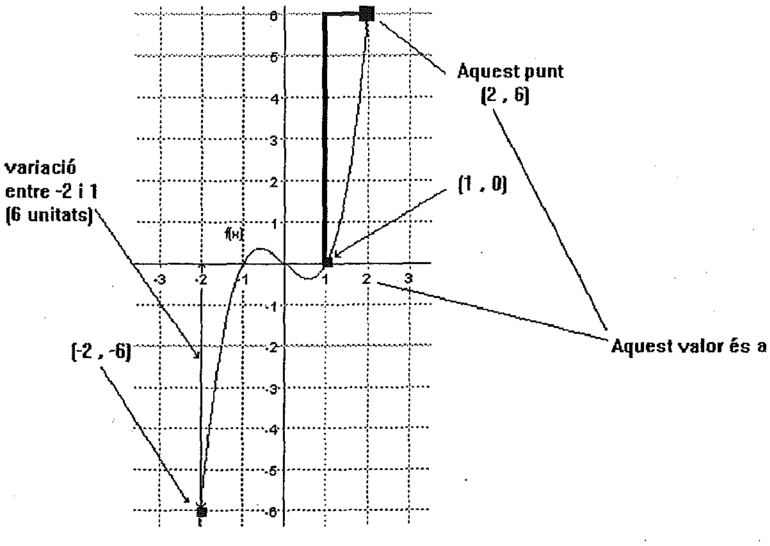
Per determinar que $f(1) = 0$ i $f(-2) = -6$, s'havia d'utilitzar el gràfic (dibuixo a la pissarra la gràfica de la pregunta i assenyalant-hi els punts (-2 , -6) i (1 , 0)). També comento que aquesta pregunta es podia respondre gràficament, ja que bastava d'observar que per passar d'una altura -6 a una altura zero s'ha de pujar 6 unitats (ho assenyalo sobre el gràfic).



Comento que els errors en aquesta pregunta són confondre la variació amb la taxa mitjana de variació i confondre la variació vertical amb l'horitzontal. Insisteixo que la variació entre dos valors és la variació d'altura, mentre que la t.m.v. és la variació d'altura per unitat horitzontal. La puntuació d'aquesta pregunta era 0,25.

Apartat *c* de la quarta pregunta

Per respondre aquesta pregunta he de buscar un nombre a la dreta de 1 de manera que la diferència d'altures entre (1 , *f*(1)) i el punt d'abscissa aquest valor sigui 6. Per tant, si pugem des del punt (1 , 0) sis unitat cap amunt, s'observa que desplaçant-nos una unitat cap a la dreta obtenim el punt (2 , 6), que és de la gràfica.Per tant, la resposta era $a = 2$ (dibuixo els desplaçaments verticals i horitzontals sobre la gràfica de la pissarra.



La puntuació d'aquesta pregunta era 0,5 punts

Apartat *c* de la quarta pregunta

Dic i escric a la pissarra que la taxa mitjana de variació de la funció entre x=-2 i x = 2 és:

$$t.m.v. = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{6-(-6)}{2-(-2)} = \frac{12}{4} = 3$$

També comento, assenyalant sobre la gràfica de la pissarra, que, si ens desplacem primer en horitzontal i després en vertical des del punt (-2 , -6) fins al punt (2 , 6), tenim una variació vertical de 12 per una variació horitzontal de 4 i que, per tant, també es podia contestar així:

$$t.m.v. = \frac{variació\ vertical}{variació\ horitzontal} = \frac{12}{4} = 3$$

La puntuació d'aquesta pregunta era 0,5 punts

Apartat *d* de la quarta pregunta

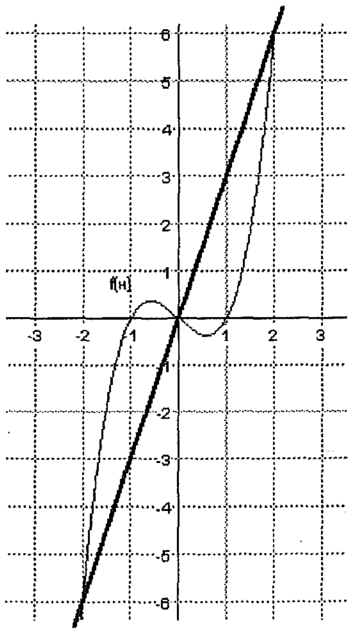
Explico que aquest apartat es podia contestar de dues maneres. Una consistia a dibuixar la recta i trobar la fórmula de la recta a partir de la gràfica, seguint el procés següent:

gràfic ⇒ model de funció ⇒ fórmula tipus ⇒ determinació dels paràmetres

$y = ax$

$a = \frac{6}{2} = 3$

$y = 3x$



Un cop s'ha dibuixat la recta secant, s'observa que passa per l'origen de coordenades, de manera que té una fórmula tipus que és $y=ax$. Finalment determina el paràmetre a, utilitzant que la recta passa pel punt (0 , 0) i (2 , 6) que determinen un triangle de base 2 i altura 6.

Si s'ha dibuixat la recta secant, una variació del procediment anterior és:

tipus de gràfic		fórmula tipus		determinació dels paràmetres
recta	⇨	$y = ax + b$	⇨	$a = 3$ i $b = 0$

Per determinar que $a = 3$ es calcula gràficament el pendent i per determinar que $b = 0$ s'utilitza que la recta passa per l'origen de coordenades.

El segon procediment és el següent:

tipus de gràfic		fórmula tipus		determinació dels paràmetres
recta	⇨	$y = ax + b$	⇨	$a = 3$ i $b = 0$

Per determinar a, s'ha d'utilitzar que el pendent és la t.m.v que s'ha calculat en l'apartat anterior. Per calcular el paràmetre b, s'ha d'utilitzar que aquesta recta passa per un punt del qual coneixen les coordenades com, per exemple, (2 , 6) (escric a la pissarra el següent)

Punt = $(2 , f(2)) = (2 , 6)$
La recta secant té una fórmula del tipus $y = ax + b$
a = pendent de la recta secant = t.m.v. entre -2 i 2 = 3
La recta $y = 3x + b$ passa pel punt (2 , 6)
$6 = 3(2) + b$; $6 = 6 + b$; $0 = b$
La recta secant és la recta $y = 7x - 9$

La puntuació d'aquest apartat era d'1,25 punts

A continuació, reparteixo els exàmens i dic la nota de cada alumne (tant de l'examen com de l'avaluació). Comento quins alumnes han sortit beneficiats i quins perjudicats per la mitjana ponderada. També comento i recrimino la falta d'assistència d'alguns alumnes tot recordant el nombre de faltes que tenen.

A: Durant una bona estona (15 minuts aproximadament) comparen el seu examen amb el que han anat copiant de la pissarra i amb els exàmens dels companys. Alguns alumnes reclamen la meva atenció particular per comentar-me el seu desacord amb la manera com els he puntuat.

P: Com a conseqüència de les reclamacions rectifico la nota de dos alumnes.

A: Alberto C., em pregunta per què li he posat un suficient en comptes d'un bé.

P: Li contesto que és perquè falta molt a classe.

A: Alberto em diu que li posi un bé i que vindrà a classe sempre.

P: Li dic que li agafo la paraula i que li posaré el bé.

5.2.13. Subseqüència 6. Càlcul de la derivada en un punt (continuació)

Sessió del 17-12-97

Planificació prèvia

1) Treballar el càlcul aproximat de la derivada en un punt (activitats 22-25).

2) Fer un esquema on quedin recollides les diferents maneres de calcular la derivada en un punt.

3) Treballar les activitats 32 i 33

Aquesta era l'última sessió abans de les vacances de Nadal i el meu objectiu era treballar les activitats 22-25 i les activitats 32 i 33, que no van entrar a l'examen, de manera que després de les vacances pogués començar amb la funció derivada.

Desenvolupament de la sessió

Faltes: Mike D. i Toni G.

P: Començo la classe comentant que ara treballarem el càlcul de la derivada amb calculadora, que va quedar pendent, i dic que intentin fer l'activitat 23 de la pàgina 330. Com que observo que falta Alberto C., recordo públicament que ahir m'havia jurat i perjurat que vindria a classe cada dia si li posava un bé en aquesta primera avaluació i avui mateix, en la primera classe en què ha de complir la seva part del pacte ja no ha vingut.

A: Els alumnes riuen i alguns fan comentaris en el sentit que a l'Alberto li costa anar a classe.

A: Just en aquell moment entra l'Alberto C.

P: Dic que m'he precipitat en fer el comentari anterior i li dic a Alberto C. que hem de reformular el nostre acord en el sentit que, no només ha de venir a classe, sinó que també ha de ser puntual.

A: Alberto C. diu que serà puntual i els altres alumnes riuen.

P: Comento que donat que és l'última classe abans de vacances, farem un resum del que hem treballat. Començo recordant com la necessitat de calcular la velocitat instantània ens va portar a l'expressió (escric a la pissarra)

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t_0,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{d(t)-d(t_0)}{t-t_0}$$