

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

**FENÓMENOS RELACIONADOS CON EL USO DE
METÁFORAS EN EL DISCURSO DEL PROFESOR. EL
CASO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES**

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

JORGE IVAN ACEVEDO NANCLARES

Dirigida per

Dr. VICENÇ FONT MOLL

i

Dra. JANETE BOLITE FRANT

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2007

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Resumen

En este último capítulo presentamos una síntesis de las aportaciones y conclusiones obtenidas, en forma de respuestas a las preguntas de investigación planteadas en el capítulo 1. También se sugieren posibles líneas de investigación que se pueden derivar de esta memoria de investigación

6.1 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA PRIMERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con relación a la primera pregunta *¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones?* Nuestra primera conclusión es que hemos corroborado, matizado y enriquecido la afirmación de Font (2000) que dice que las gráficas se han estructurado históricamente a partir de las siguientes metáforas: a) Las curvas son secciones b) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones c) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. d) La grafica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

La segunda conclusión a la que hemos llegado es que el análisis histórico realizado permite concluir que, más que coexistencia o una fusión de metáforas estáticas y dinámicas, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Desde una perspectiva histórica, más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual, nos parece más preciso hablar de la desaparición de una a manos de la otra. Ahora bien, aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Son diferentes porque en la conjuntista (estática) funciona, sobre todo, una proyección metafórica en la que el dominio fuente es el esquema *todo-parte* (en el sentido de que un

punto es una parte de la gráfica) mientras que en la dinámica funciona la de “estar sobre” (en el sentido de que el punto está sobre la gráfica en su movimiento ficticio). Ahora bien, a pesar de las diferencias, por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas.

Nuestra tercera conclusión es que la comprensión amplia de las gráficas de funciones es el resultado de la fusión de la visión dinámica y de la estática. El esquema de imagen “camino” sirve para estructurar las curvas de manera dinámica, mientras que la mezcla conjuntista de la parte derecha de la figura 1 sirve para considerar las curvas como gráficas de funciones formadas por los puntos de coordenadas $(a, f(a))$.

El esquema de la figura siguiente muestra los diferentes componentes de la “comprensión amplia” de las gráficas. La mezcla conceptual “plano con sistema de ejes coordenados” subyace tanto a la visión conjuntista estática como a la dinámica.

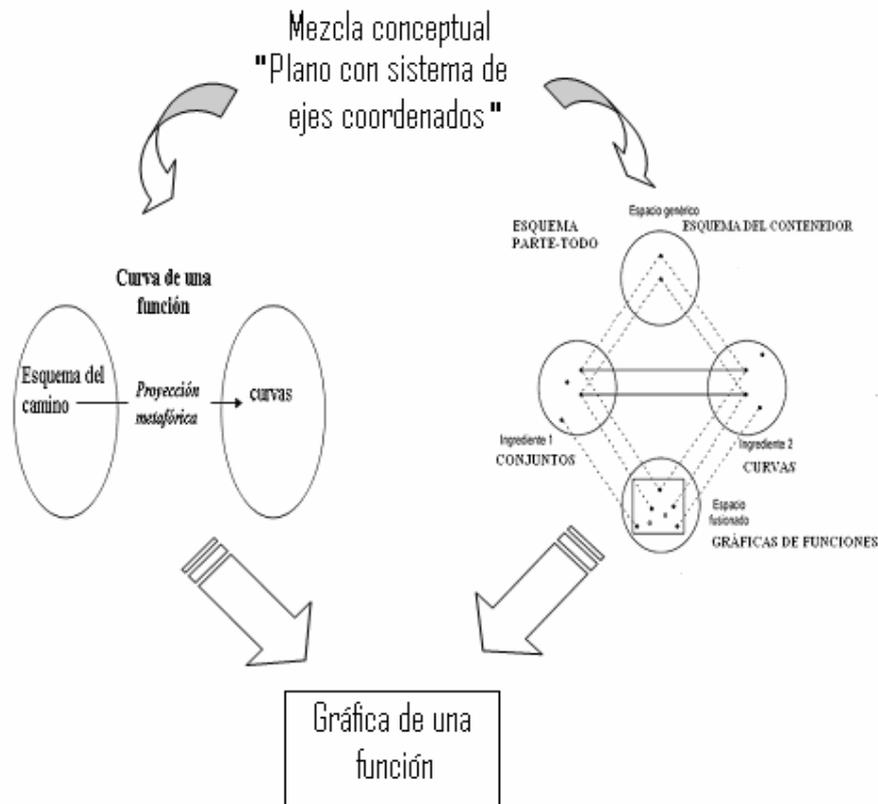


Figura 1. Comprensión integral de la gráfica de una función

6.2 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA SEGUNDA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con relación a la segunda pregunta de investigación *¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?* Nuestra conclusión es que los profesores estructuran su discurso sobre las gráficas de funciones a partir de un grupo reducido de metáforas - las cuales son proyecciones de los siguientes esquemas de imágenes: el esquema orientacional, el esquema del camino, el esquema del contenedor, el esquema parte-todo, el esquema objetual, etc. - y de algunas fusiones conceptuales como, por ejemplo, la zoomórfica (o antropomórfica). A continuación haremos un breve resumen de dichas proyecciones metafóricas y fusiones conceptuales.

6.2.1 Metáforas fosilizadas

Hemos observado que los profesores investigados utilizan en su discurso muchas expresiones metafóricas que se corresponden con metáforas fosilizadas, en el sentido de que la institución matemática las considera como expresiones literales y no es consciente de su origen metafórico. Este origen metafórico se puede observar tanto en la simbología utilizada (por ejemplo, la flecha del símbolo de límite) como en la lectura de dicha simbología (por ejemplo, límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito). Expresiones como, “ x tiende”, “límite por la derecha” etc. son consideradas literales en el aula y muchas veces fuera de ella, no obstante tienen un claro origen metafórico.

6.2.2 Metáforas orientacionales

Las metáforas conceptuales de tipo orientacional las podemos rastrear en muchas de las expresiones utilizadas por los profesores investigados en su discurso. La necesidad de representar las gráficas en un sistema de ejes coordenados les lleva a organizar el plano y las gráficas en términos de expresiones metafóricas del tipo “horizontal-vertical”, “arriba-abajo” o “izquierda-derecha” que son manifestaciones de este tipo de metáforas conceptuales.

En términos generales, vemos como el profesor explica a sus alumnos la representación gráfica de funciones mediante diferentes expresiones metafóricas que son casos individuales de la siguiente metáfora conceptual:

“paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical”, se trata de una metáfora de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “orientacional”.

Metáfora orientacional:

“Paralela al eje de abscisas es horizontal y paralela al eje de ordenadas es vertical”

Dominio de partida	Dominio de llegada
Punto de corte de los ejes vertical y horizontal	Origen de coordenadas
Eje Horizontal	Eje x
Eje Vertical	Eje y
Recta Horizontal	Paralela al eje x
Recta Vertical	Paralela al eje y
Arriba	Valores de $y > 0$
Subir	Función creciente
Abajo	Valores de $y < 0$
Bajar	Función decreciente
Derecha	Valores de $x > 0$
Izquierda	Valores de $x < 0$
Algo está a la izquierda de otra cosa que está a su derecha	$x_1 < x_2$
Algo está más abajo de otra cosa que está más arriba	$y_1 < y_2$

Tabla 1. Proyección metafórica del esquema orientacional

6.2.3 Metáforas ontológicas

En muchas de las expresiones del discurso de los profesores cuando explican las representaciones gráficas de funciones, podemos rastrear estructuras que son claramente producto de una organización conceptual marcada por metáforas ontológicas. A continuación describimos las tres que consideramos más relevantes y más comunes en su explicación.

La primera es la metáfora “La gráfica es un contenedor de puntos”. Se trata de una metáfora ontológica de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “contenedor”:

Metáfora ontológica:
“La gráfica es un contenedor de puntos”

Dominio de partida Esquema del contenedor	Dominio de llegada Gráficas de funciones
Contenedor (o interior del contenedor)	Gráfica
Objeto dentro del contenedor	Punto de la gráfica
Ser un objeto del interior	Esta en / estar incluido
Un contenedor dentro de uno más grande	Una parte de la gráfica dentro de otra parte que la contenga
Objeto contenido en dos contenedores diferentes	Puntos de intersección
El exterior de un contenedor	Puntos que no están en a la gráfica

Tabla 2. Proyección del esquema del contenedor en las gráficas de funciones

La segunda es la metáfora “Los puntos son partes de la gráfica”. Se trata de otra metáfora ontológica de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “parte-todo”:

Metáfora ontológica:
“Los puntos son partes de la gráfica”

Dominio de partida Esquema parte-todo	Dominio de llegada Gráficas de funciones
Todo	La gráfica
Partes constituyentes	Puntos de la grafica

Tabla 3. Proyección metafórica del esquema parte-todo en las gráficas

La tercera es la metáfora “Las entidades matemáticas son objetos”. Se trata de otra metáfora ontológica de tipo grounding, que se puede considerar casi como una metáfora fosilizada cuando se utiliza correctamente, cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “objetual”:

Metáfora ontológica:
“Las entidades matemáticas son objetos físicos”

Dominio de partida Esquema objetual	Dominio de llegada Entidades matemáticas
Objeto físico	Objeto matemático
Propiedades del objeto	Propiedades del objeto matemático

Tabla 4. Proyección metafórica del esquema objetual

En general, podemos afirmar que la metáfora ontológica “objetual” es omnipresente en el discurso del profesorado ya que en él las entidades matemáticas se presentan como “objetos que tienen propiedades”. La metáfora objetual pretende conseguir que la representación ostensiva de la cual se habla y que está dibujada en la pizarra (papel, ordenador, etc.) se constituya en un objeto no ostensivo ideal, explícita o implícitamente, por el tipo de discurso que se realiza sobre ella.

6.2.4 Metáforas dinámicas. Movimiento ficticio

Hemos observado que el discurso de los profesores investigados puede inducir al alumno a entender la gráfica como un camino que se recorre o una línea por la cual se transita. Palabras como “antes de cero”, “después de cero”, “viene por aquí”, etc. pueden producir este efecto en el alumno. Se trata de expresiones metafóricas que inducen el “movimiento ficticio” y cuya raíz es el esquema de imagen “camino”. En dicho esquema de imagen se sugiere una organización espacial, se tiene un origen (“de”), un camino (“pasa por”, “aquí”, “a lo largo”), y un fin (“a”, “hasta”) y además se contempla algo que se mueve (punto, objeto, etc.) y que se puede localizar en un momento dado, en algunos casos el inicio es el “más infinito” y en el final es “menos infinito”.

La metáfora “La gráfica es un camino” es una metáfora de tipo grounding cuyo dominio de partida es el esquema de imagen “camino”:

“La gráfica es un camino”

Dominio de partida Esquema del camino	Dominio de llegada Gráficas de funciones
Camino	Gráfica
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen de la gráfica (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Tabla 5. Proyección metafórica del esquema camino

6.2.5 Fusiones conceptuales

Hemos observado en el discurso de los profesores dos tipos de mezclas conceptuales. Por una parte, la mezcla conceptual, dominante en las matemáticas institucionales, que lleva a entender las gráficas de funciones de manera estática (tal como ya se ha explicado en el capítulo 3) y como se ilustra en la siguiente figura:

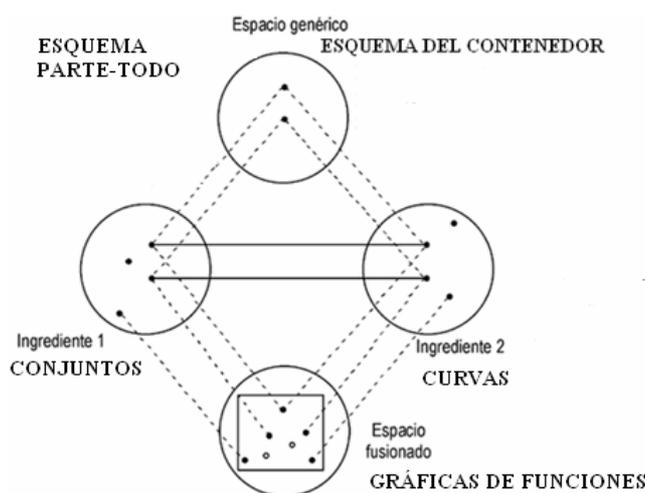


Figura 2. Fusión conceptual estática “Gráfica de funciones”

Y por otra parte, mezclas conceptuales que son el resultado de su intento de hacerse entender por los alumnos, por ejemplo, una mezcla conceptual de tipo antropomórfico (zoomórfico). Dicha mezcla produce una animación

de los objetos matemáticos, incluso se podría decir una animalización o personificación de los objetos matemáticos ya que éstos pasan a “hacer cosas” a “crecer” etc.

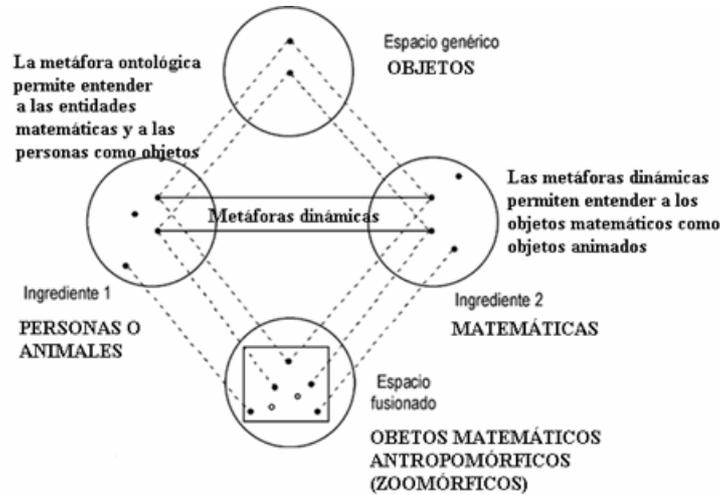


Figura 3. Fusión conceptual zoomórfica

Los diferentes tipos de metáforas conceptuales que acabamos de comentar se presentan en el discurso del profesor mediante diferentes expresiones metafóricas y, en muchos casos, son sugeridas y reforzadas por su gesticulación.

6.3 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA TERCERA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con relación a la tercera pregunta *¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?* En las entrevistas a los profesores A, B, C, D y E se pudo observar:

- 1) Que el nivel de consciencia de los profesores respecto de las expresiones metafóricas que utilizaban era muy bajo.
- 2) Cuando se les hizo observar las expresiones metafóricas que estaban utilizando se dieron cuenta de que efectivamente lo hacían.
- 3) Al usarlas de manera inconsciente no había ningún control sobre ellas (por ejemplo, alertar de las inferencias incorrectas que se podían derivar de la metáfora conceptual subyacente a las expresiones metafóricas).
- 4) Cuando se les preguntó que valoraran el efecto de dichas expresiones metafóricas sobre la comprensión de los alumnos, la valoración de todos ellos fue que las expresiones metafóricas facilitaban la comprensión de los alumnos.
- 5) Cuando se les preguntó que valoraran los posibles inconvenientes del uso de dichas expresiones metafóricas en la comprensión de los alumnos, la valoración de los profesores (A, B, C y D) fue que dichas expresiones no presentaban ningún inconveniente o peligro. En cambio, la valoración del profesor E fue que, si no se complementaban con explicaciones más rigurosas, podían ser peligrosas para la comprensión de los alumnos.

Nuestra conclusión, con relación al nivel de consciencia que tienen los profesores sobre el uso que hacen de las metáforas, es que los profesores sólo fueron conscientes del uso que hacían de las metáforas después de que los entrevistadores se lo hicieron notar. Con relación a su posible efecto en la comprensión de sus alumnos, la opinión difiere según los profesores. Mayoritariamente consideran que el uso de expresiones metafóricas facilita la comprensión de sus alumnos y no dan importancia a las posibles dificultades que pueda generarles, aunque hay algún profesor que considera que las metáforas pueden ser peligrosas para la comprensión de sus alumnos.

6.4 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA CUARTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con relación a la cuarta pregunta *¿Qué efecto producen las metáforas utilizadas en el discurso del profesor sobre los alumnos?* hemos confirmado nuestra hipótesis de que el uso de metáforas en el discurso del profesor produce efectos muy significativos en la comprensión de los alumnos. Hemos comprobado que las respuestas de los alumnos sugieren claramente que las metáforas utilizadas por el profesor tienen mucho más peso del que normalmente se considera, ya que son las que muchos de ellos utilizan para responder a las preguntas, en lugar de las definiciones más precisas que tienen recogidas en sus cuadernos y libros de texto.

Para llegar a esta conclusión, primero estudiamos, mediante las respuestas a un cuestionario específicamente diseñado para el caso, los efectos que produce el discurso metafórico de un determinado profesor en la comprensión de sus alumnos. El análisis de las respuestas al cuestionario nos permitió concluir que efectivamente el discurso metafórico de este profesor condicionaba la comprensión de sus alumnos. El siguiente paso fue investigar qué pasaba cuando las producciones escritas estudiadas eran las habituales de clase (como por ejemplo los exámenes) en lugar de un cuestionario específicamente diseñado. Después de analizar los exámenes de los alumnos de los profesores grabados en vídeo observamos dos grupos de alumnos. En el primer grupo había alumnos en cuyas producciones escritas no se utilizaba un discurso metafórico (más allá de las metáforas fosilizadas). El segundo grupo eran alumnos en los se podía observar, en su discurso escrito, el uso de metáforas. A continuación, nos centramos, sobre todo, en el primer grupo y los entrevistamos para estudiar si el uso de metáforas se manifestaba en su discurso oral, como así fue.

Nuestra conclusión es que los alumnos, de manera coherente con las metáforas encontradas en el discurso del profesor, estructuran su comprensión de las gráficas de funciones a partir de un grupo reducido de metáforas, las cuales son proyecciones de los siguientes esquemas de imágenes: el esquema orientacional, el esquema del camino, el esquema del contenedor y el esquema parte-todo. Las proyecciones metafóricas basadas en estos esquemas se pueden considerar un correlato de las proyecciones metafóricas observadas en el discurso del profesor.

Por otra parte, hay metáforas como “la asíntota es una barrera” de las cuales no se puede afirmar, taxativamente, que son un correlato del discurso del profesor, aunque en algún caso este discurso la puede sugerir. En nuestra opinión, metáforas como “la asíntota es una barrera” son generadas, sobre todo, por los propios alumnos.

En ciertas situaciones las metáforas que organizan la comprensión de los alumnos pueden entrar en contradicción entre ellas. En efecto, entender la asíntota como una “barrera” resulta bastante problemático en algunos casos y es fuente de contradicciones con otras metáforas. Por ejemplo, hay contradicción entre el movimiento ficticio de la gráfica (de izquierda a derecha) con el hecho de que la asíntota es algo que no se puede atravesar (barrera infranqueable). En este caso, se produce una colisión de metáforas incompatibles, que algunos alumnos resuelven mediante la proyección conjunta del esquema del camino y del esquema del “bloqueo”, lo cual permite aplicar la idea “salto de una barrera que una persona encuentra en su camino” al caso de la asíntota. El esquema del bloqueo está determinado por una entidad que obstaculiza el movimiento, se trata de una entidad estacionaria que se ha de “saltar” o “traspasar” de alguna manera. Como resultado de la presencia conjunta de estos dos esquemas, se produce una proyección del dominio fuente “persona que camina por un camino con una barrera” al dominio meta “gráfica de una función que tiene una asíntota vertical” en la que la idea de “salto” resuelve la contradicción:

Dominio de partida Camino	Dominio de llegada Gráfica de la función
Persona	Punto
Una persona que se mueve a lo largo de un camino	Un punto que se “mueve” sobre una curva que representa a una función real
Barrera	Asíntota vertical
Salto	La función no llega a tocar a la asíntota, pero continúa después de ella.

Tabla 6. Proyección metafórica de “salto de una barrera”

Cuando ciertas proyecciones metafóricas de esquemas muy básicos, como por ejemplo el orientacional, entran en conflicto semiótico, de tipo cognitivo, con los significados matemáticamente correctos, hay alumnos que se fían más de dichas proyecciones que de los significados matemáticamente correctos. Como caso paradigmático tenemos el caso del alumno *H* cuando el entrevistador le gira 90° la hoja en la que está representando la gráfica de la función (ver apartado 3.3 del capítulo 4)

6.5 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA QUINTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con relación a la quinta pregunta *¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?* Hemos observado que el rol que juega la metáfora en la negociación de significados en el aula, entendida como el acoplamiento entre significados personales e institucionales en el seno de un proceso de instrucción, no se puede hacer sin tener en cuenta toda la complejidad asociada a la metáfora, en especial su vinculación con los otros instrumentos de conocimiento. Con el análisis de diferentes configuraciones hemos mostrado como la negociación de significados en el aula se consigue gracias a la coexistencia simultánea de diferentes metáforas con diferentes representaciones, con el uso de elementos genéricos, etc. Dicho de otra manera, la metáfora es uno de los componentes esenciales de la negociación de significados, pero no el único.

En la interacción profesor alumnos, los análisis realizados ponen de manifiesto que en la negociación de significados las metáforas funcionan en dos direcciones diferentes. Por una parte, el profesor las usa creyendo que está facilitando el aprendizaje del alumno, para ello parte del dominio de las matemáticas y busca un dominio de la vida diaria del alumno de manera que éste último sirva para estructurar el objeto matemático que quiere enseñar. En cambio, el alumno debe partir del dominio de su vida diaria para proyectarlo metafóricamente sobre el objeto matemático que debe aprender. El problema es, por una parte, que el dominio de la vida diaria no siempre es el mismo para ambos, y, por otra parte, que las inferencias que puede hacer el alumno a partir de su proyección metafórica pueden ser muy diferentes a las que espera el profesor.



Figura 4. La metáfora en la negociación de significados entre el profesor y el alumno

En muchos casos, los conflictos semióticos entre los significados institucionales que el profesor ha querido implementar con la ayuda de determinadas metáforas y los significados personales que ha generado el alumno en base a dichas metáforas no se hacen explícitos en el aula. Dicho de otra manera, puede existir una brecha entre las matemáticas institucionales y las personales de los alumnos, aunque aparentemente parezca que se ha producido la negociación de significados.

En los casos en los que explícitamente se ha producido un conflicto semiótico causado por el uso de una determinada metáfora, como es el caso de la negociación de significados entre los dos alumnos del apartado 4.3, hemos observado que la negociación de significados pasa (1) por la puesta entre paréntesis de la metáfora que produce el conflicto, (2) el recurso a los significados literales e institucionales de los objetos matemáticos y (3) la adaptación (o generación de una nueva) de la metáfora a los significados literales e institucionales de los objetos matemáticos que solucione el conflicto.

6.6 RESPUESTA A LA SEXTA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Para contestar a la sexta pregunta de investigación ¿Cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS? hemos situado la metáfora en el centro del decágono siguiente y la hemos considerado desde cada una de las cinco facetas duales.

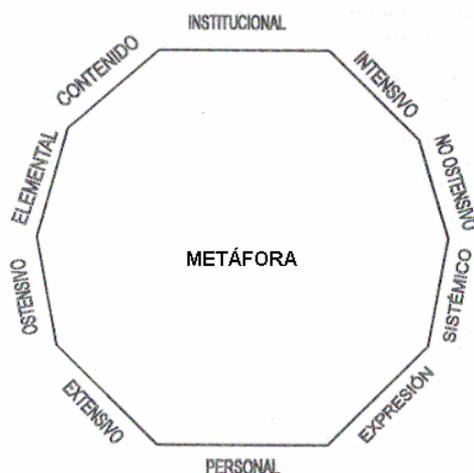


Figura 5. La metáfora con relación a las facetas duales del EOS

6.6.1 La metáfora con relación a la dimensión dual “personal / institucional”

Hemos justificado que el caso estudiado, las metáforas relacionadas con las gráficas de funciones, es un buen ejemplo para ilustrar cómo se sitúa la metáfora con relación a la dimensión dual “personal / institucional”. Por una parte, hemos justificado que la metáfora estática se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales (pregunta 1) y, por otra parte, que la metáfora dinámica es un recurso utilizado por el profesor (pregunta 2) que resulta determinante en la estructuración de los objetos matemáticos personales de los alumnos (pregunta 4). Puesto que las metáforas dinámicas y las estáticas estructuran de manera diferente a la gráfica de una función nos hemos preguntado por el tipo de coexistencia que se produce entre ambas, enmarcando esta pregunta en la dimensión dual “personal / institucional”.

A partir de un análisis histórico, la respuesta es que, más que coexistencia en el plano institucional, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la

metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual tenemos la desaparición de una a manos de la otra (pregunta 1). Aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función.

Con relación a la coexistencia de ambos tipos de metáfora en el proceso de instrucción, hemos observado una mayor presencia de las metáforas dinámicas (pregunta 3). Con relación a la coexistencia en el plano personal, hemos constatado que el uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la estructura del significado personal de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista (pregunta 4). Mientras que un profesor experto puede manejar de manera coherente las dos metáforas, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas, hay alumnos que no logran hacerlo. Esta falta de coherencia es una de las causas importantes de conflictos semióticos relacionados con la representación gráfica de funciones.

6.6.2 La metáfora con relación a la dimensión dual “extensivo / intensivo”

En esta investigación nos hemos formulado la siguiente pregunta: ¿Cómo es que ciertas metáforas, con el paso del tiempo, se entienden como aplicación de la faceta extensivo-intensivo? Se trata de una pregunta importante ya que en muchos casos no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización.

Tanto la subcategorización como la metáfora tienen una estructura del tipo A es B . De acuerdo con Lakoff y Johnson (1991) consideramos que la subcategorización y la metáfora son puntos extremos de un continuum único. En el caso de algunas metáforas es muy claro que A y B son muy diferentes y nos situamos en un extremo de este continuum, mientras que en la subcategorización A se considera un extensivo de un intensivo B y también es claro que nos situamos en el otro extremo del continuum. Pero cuando no está claro si A y B son muy diferentes o bien si se pueden relacionar como extensivo e intensivo, entonces la relación A es B cae en

algún punto de la mitad del continuum. Por otra parte, metáforas que en el momento de su aparición se situaban claramente en un extremo del continuo con el paso del tiempo se han convertido en subcategorizaciones situadas en el otro extremo.

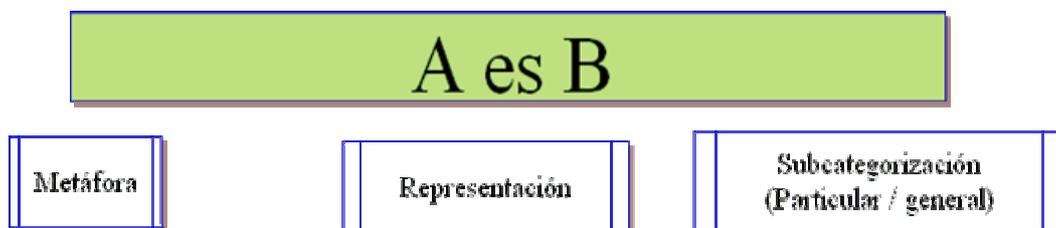


Figura 6. La relación A es B

Para el EOS, la forma en que las linking metáforas estructuran un campo de las matemáticas en términos de otra consiste, entre otros aspectos que comentaremos en la respuesta a la pregunta 7, precisamente en relacionar, mediante la dimensión extensivo-intensivo, objetos matemáticos que antes no se relacionaban entre sí de esta manera.

En esta investigación, hemos profundizado en el proceso que convierte una metáfora creativa en un caso de aplicación de la dualidad extensivo/intensivo. Para ello, nos hemos centrado en el momento de la aparición de la geometría analítica y hemos explicado el proceso histórico que convierte esta metáfora en una subcategorización. Dicho proceso sigue las siguientes fases, (1) dualidad extensivo-intensivo, (2) metáfora, (3) representación y (4) dualidad extensivo-intensivo. Se trata de un proceso que conlleva que un objeto matemático que “vivía” en un determinado programa de investigación (la geometría sintética) pasa a “vivir” también en otro programa de investigación (la geometría analítica).

6.6.3 La metáfora con relación a la dimensión dual “expresión / contenido”

Con relación a la dimensión expresión contenido tenemos que una nueva metáfora (A es B') es una expresión que permite entender los elementos de B (partimos previamente de la relación extensivo / intensivo A es B) como elementos de B' . Es decir, A es B' permite estructurar los elementos A de B en términos de B' . Dicho de otra manera, la metáfora dota de una nueva estructura a B . Visto de esta manera la expresión A es B' se puede considerar que funciona de manera icónica con respecto al contenido B .

Expresión		Contenido
		B'
Expresión	Contenido	
A	B	

Figura 7. La metáfora con relación a la dualidad expresión / contenido

Cuando desde el EOS se reflexiona sobre la metáfora desde la dimensión expresión-contenido se coincide con el punto de vista de otros investigadores que consideran que la metáfora actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto. Dicho de otra manera, la metáfora es primero una “forma de hacer ver” que, al tener consecuencias inferenciales, también es una “forma de hacer saber”.

El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al proceso que convierte una metáfora en una subcategorización permite refinar lo que se ha dicho en el apartado anterior (subcategorización inicial → metáfora → representación → subcategorización final). Este proceso se puede considerar el resultado de la siguiente cadena de funciones semióticas:

Función semiótica de tipo metonímico → Función semiótica de tipo metafórico → Función semiótica de tipo representacional → Función semiótica de tipo metonímico.

6.6.4 La metáfora con relación a las dimensión dual “elemental / sistémica

Si bien la metáfora se presenta de manera elemental (A es B), el hecho de que ahora B structure A permite aplicar a A un conjunto de prácticas que son el significado de B . Dicho de otra manera, la metáfora es una manera compacta de generar un sistema complejo de nuevas prácticas.

La dualidad elemental-sistémica en el caso de la metáfora ha sido puesta de manifiesto por diferentes autores. Según Max Black (1966) cuando usamos una metáfora tenemos en una sola expresión dos pensamientos de cosas distintas en actividad simultánea. El significado de la expresión metafórica sería el resultante de la interacción de los dos elementos. En "Juan es una roca" los dos pensamientos activos a la vez serían el de la fortaleza de Juan y el de la de solidez de la roca. Para Black los dos elementos vendrían a ser uno, el foco de la metáfora -el enunciado efectivo- y otro, el marco que lo rodea. Este segundo elemento ha de ser considerado como un sistema más

que como una cosa individual. Cuando decimos que "la sociedad es un mar", estamos poniendo delante de nuestros ojos, proyectando sobre la sociedad, todo un sistema conceptual en el que hay tempestades, puertos seguros, piratas, tiburones, naufragios y muchas cosas más.

En los trabajos de Lakoff y Núñez (2000) la dualidad elemental-sistémica también ocupa un lugar central. Por una parte, la metáfora es elemental (*A* es *B*), pero, por otra parte, nos permite generar un nuevo sistema de prácticas (perspectiva sistémica) como resultado de la comprensión del dominio de llegada en términos del dominio de partida. Lakoff y Núñez desarrollan la dualidad elemental sistémica para diferentes metáforas. Valga como ejemplo la metáfora del contenedor, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora que se usa para estructurar la teoría de clases. Para este autor se trata de una metáfora ontológica inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana (Núñez, 2000, p. 13):

Elemental:

“Las clases son contenedores”

Sistémica:

Dominio de partida Esquema del contenedor	Domino de llegada Clases
Interior del contenedor	Clase
Objetos dentro del contenedor	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	La unión de clases
El exterior de un contenedor	El complementario de la clase

Tabla 7. Proyección metafórica de “las clases son contenedores”

De hecho, nuestra conclusión es que la mayoría de las investigaciones sobre la metáfora se han dedicado principalmente al estudio de dicha dualidad. Por ejemplo, en Bolite y otros (2004b), siguiendo el modelo propuesto por Lakoff y Núñez (2000), se considera primero la metáfora elemental “los puntos son objetos físicos”. A continuación se descompacta

el dominio de partida (los objetos físicos) y el dominio de llegada (los puntos) para ver que relaciones, prácticas, etc. del dominio de partida se trasladan al dominio de llegada:

- Elemental (*A es B*):
 “Los puntos son objetos físicos”
- Sistémica:

Dominio de partida Objetos físicos	Dominio de llegada Gráfica de una función
Un cuerpo físico en el espacio	Un punto en el plano cartesiano
Un coche moviéndose a lo largo de una trayectoria	Un punto que se “mueve” sobre una curva que representa a una función real
Un coche que atraviesa un túnel es el mismo cuando entra que cuando sale	Un punto que se mueve a lo largo de una curva es siempre el mismo
La trayectoria representa el movimiento	La gráfica de la pizarra es la trayectoria del punto

Tabla 8. Proyección metafórica de “los puntos son objetos”

En esta investigación nos hemos preguntado sobre cuál es la estructura del dominio fuente que se proyecta en el dominio meta, cuando la metáfora se entiende de manera sistémica. Nuestra conclusión es que el constructo Configuración Epistémica/Cognitiva permite explicitar y precisar la estructura que se proyecta en las linking metáforas. Hay un dominio de partida que tiene estructura de Configuración Epistémica/Cognitiva (según que el punto de vista adoptado sea el institucional o el personal) que se proyecta en un dominio de llegada que también tiene estructura de Configuración Epistémica/Cognitiva.

6.6.5 La metáfora con relación a las dimensión dual “ostensivo / no ostensivo”

Los mecanismos mediante los cuales las personas, consideradas individualmente o socialmente, llegan a las ideas matemáticas y como éstas son materializadas en sistemas de signos a efectos de comunicación son motivo de investigación (directa o indirectamente) en casi todos los programas de investigación que se han desarrollado en el área de la Didáctica de las Matemáticas. En el caso que estamos tomando como

referente teórico en esta investigación, el “embodiment” de Lakoff y Núñez (2000), se propone la metáfora como uno de los mecanismos básicos para que las personas puedan llegar a generar las ideas matemáticas.

Con relación a la dimensión dual “ostensivo / no ostensivo” la metáfora actúa en ambos niveles ya que por una parte se presenta de manera ostensiva en los textos o en el discurso oral y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos. En esta investigación hemos profundizado en cómo se relaciona el aspecto ostensivo de la metáfora con el aspecto no ostensivo, en especial nos han interesado las inferencias no ostensivas que realiza el alumno y el proceso por el cual un ostensivo es considerado la representación de un no-ostensivo.

6.7 CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA SÉPTIMA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Con relación a la séptima pregunta de investigación *¿Cómo se relaciona la metáfora con los elementos constituyentes de las Configuraciones Epistémicas/Cognitivas?* Nuestra conclusión es que la linking metáfora proyecta una Configuración Epistémica/Cognitiva en otra de diferente.

Dada una situación problema, es posible que se pueda resolver por diferentes métodos. Es decir, que pueda formar parte de dos configuraciones epistémicas/cognitivas (dependiendo del punto de vista adoptado) diferentes que, a su vez, pueden formar parte de bloques matemáticos muy diferentes (por ejemplo geometría y álgebra):

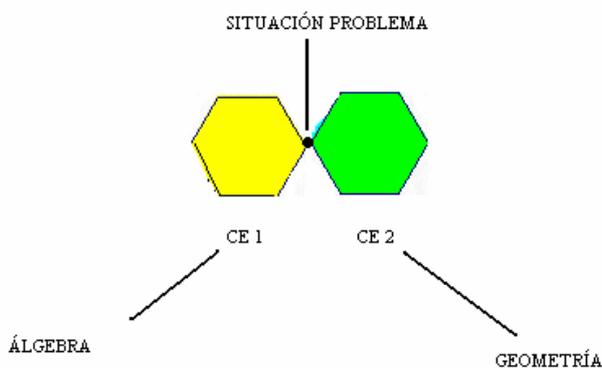


Figura 8. Configuraciones que comparten la misma situación problema

La comprensión de la relación que se produce entre las dos maneras de resolver el problema, en algunos casos, es el resultado de establecer una linking metáfora que permite la proyección de una de las dos configuraciones en la otra. En algunos casos, la linking metáfora se limita a producir el paso de una configuración que no permitía resolver el problema a otra configuración diferente, que ahora sí permite la resolución de dicho problema.

El constructo Configuración Epistémica/Cognitiva permite explicitar y precisar la estructura que se proyecta en las linking metáforas. Hay un dominio de partida que tiene estructura de Configuración Epistémica/Cognitiva (según que el punto de vista adoptado sea el institucional o el personal) que se proyecta en un dominio de llegada que también tiene estructura de Configuración Epistémica/Cognitiva.

A título de ejemplo, la figura que sigue muestra la proyección metafórica de tipo linking asociada a la metáfora que se inicia en la Geometría de Descartes: “las curvas son los puntos cuyas coordenadas son la solución de

una ecuación”. A nuestro entender, esta figura explica muy claramente la preservación de estructuras y propiedades que se produce en las proyecciones metafóricas de tipo linking.

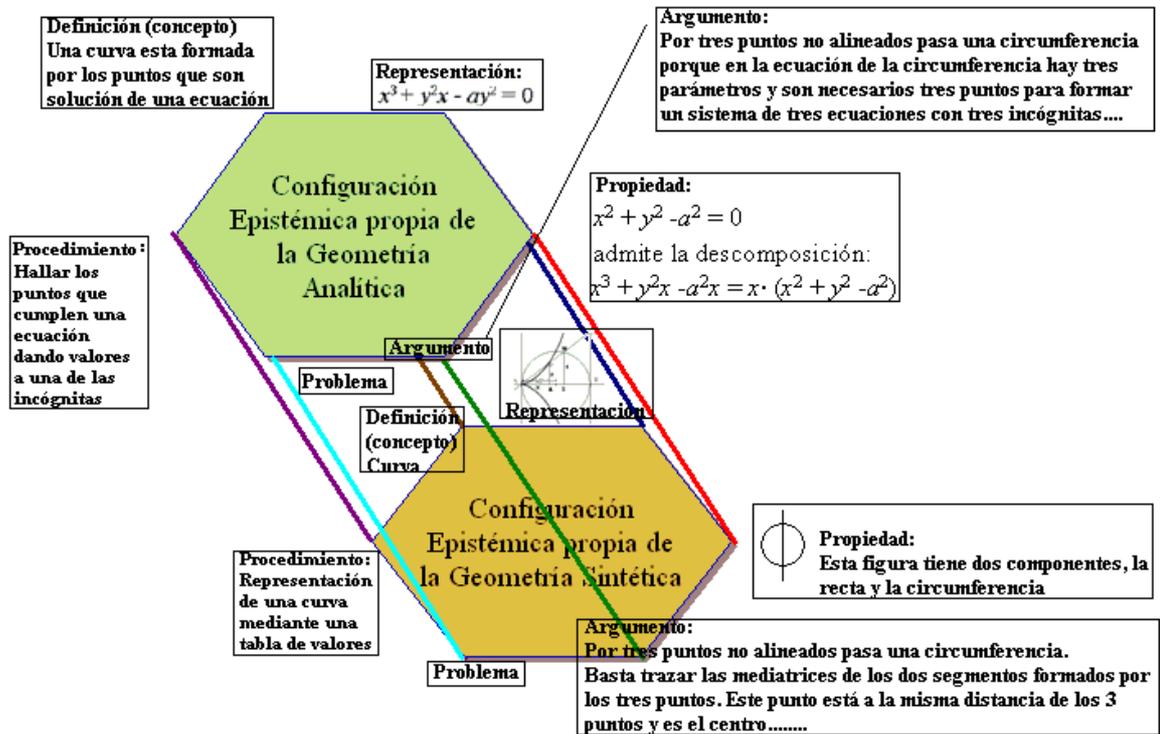


Figura 9. Preservación de la estructura de configuración en la proyección metafórica de tipo linking

6.8 CONSIDERACIÓN FINAL E IMPLICACIONES

Nuestra investigación sobre las metáforas ha permitido resaltar, por una parte la importancia que tienen éstas en el proceso de instrucción, tal como se ha puesto de manifiesto en las conclusiones obtenidas como respuesta a las preguntas de investigación 2-4, y, por otra, han puesto de manifiesto que cualquier reflexión sobre las metáforas tiene que tener presente la gran complejidad de factores relacionados con ellas –tal como se ha puesto de manifiesto en las conclusiones obtenidas como respuesta a las pregunta de investigación 5–. Por otra parte, las respuestas dadas a las preguntas de investigación 1, 6 y 7 han puesto de manifiesto que una investigación sobre metáforas es más fructífera si se enmarca en un programa de investigación de tipo holístico, como es el caso del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, ya que ésta es la manera de poder afrontar la complejidad de factores asociados a las metáforas.

Consideramos, pues, que con esta investigación hemos aportado, por una parte, datos empíricos que permiten un mejor conocimiento del uso de las metáforas en el proceso de instrucción de las gráficas de funciones en el bachillerato y su efecto en la comprensión de los alumnos. Y, por otra parte, hemos contribuido al desarrollo de la teoría sobre las metáforas, gracias a la visión ontológica semiótica que sobre ellas permite el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. También hemos contribuido al desarrollo del EOS ya que nuestra investigación permite el “encaje” de la metáfora en el actual desarrollo de dicho enfoque. Precisamente estas dos últimas aportaciones son las que consideramos que se pueden ampliar en futuras investigaciones. Para poner un solo ejemplo de pregunta de investigación relacionada con un mejor “encaje” de la metáfora en el actual desarrollo del EOS, que consideramos debería ser investigada en futuros trabajos, nos limitaremos a sugerir la siguiente pregunta: ¿Cómo se relaciona la metáfora con los criterios de idoneidad propuestos en el EOS?