UNIVERSITAT DE BARCELONA
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES
I DE LES CIENCIÈS EXPERIMENTALS

Estudio de casos sobre el Razonamiento Matemático de Alumnos con Éxito Académico en la ESO

Marc Antoine ARCHER
Barcelona - 2010

UNIVERSITAT DE BARCELONA
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES
I DE LES CIENCIÈS EXPERIMENTALS

Estudio de casos sobre el Razonamiento Matemático de Alumnos con Éxito Académico en la ESO

TESIS presentada por Marc Antoine ARCHER

Para optar al grado de Doctor por la Universidad de Barcelona en el Programa de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática

Tesis dirigida por los Doctores:
Dra. Núria Rosich Sala   Dr. Josep Mª Núñez Espallargas

Barcelona, 2010

Es hora de revelar el secreto: la función principal de las matemáticas no es organizar cifras en fórmulas y hacer cálculos endiablados. Es una forma de pensar y de hacer preguntas que sin duda es extraña a muchos ciudadanos, pero que está abierta a casi todos.

John A. Paulos

Les concepts bien acquis sont ceux à qui on a laissé le temps de naître et de se former, de problème en problème.

M. Rouche

Agradecimientos

Estos dos últimos años, algunos modelos de talento han emergido de forma sobresaliente en la sociedad, a nivel mundial. Un candidato a unas elecciones presidenciales, sin apenas apoyo, sin "pedigree político", sin "grandes éxitos previos", ha logrado ganar, de forma sobresaliente, frente a otros candidatos más curtidos, de mayor "empaque". Para mayor consolidación de esta personalidad emergente, que ha visto como un mensaje sencillo ha calado hondo en las mentes, se le ha otorgado un "Premio Nobel".

En otro aspecto completamente distinto, hemos asistido a la consolidación de un "talento" deportivo. Un entrenador de fútbol, sin apenas experiencia, ha hecho tambalearse los cimientos de un deporte como es el fútbol con la consecución de varios títulos consecutivos. Ha deslumbrado, mostrando como se puede tener "éxito", combinando con inteligencia el "talento" y las "aptitudes" de sus jugadores.

Podríamos seguir buscando otros ejemplos. Estoy convencido que hay más casos que se han quedado en el anonimato y que ayudarían a confirmar, de forma efectiva, que el "talento" tiene muchas caras, que la "inteligencia" se manifiesta de muchas formas, pero que, el "éxito", este "premio" a un esfuerzo reconocido, a un trabajo excepcional, no tiene porque acompañar, ni al talento, ni al esfuerzo. Hace falta algo más para tener ÉXITO.

Estos casos, seguramente, no se hubieran dado si no existiera un marco propicio o un "estimulante", un "detonante" que haga tomar conciencia, incite a seguir en el esfuerzo, a mantener el rumbo, a conseguir el éxito. Me da la sensación que a esta “presencia positiva”, a este “marco regulador, incitador y estimulante”, algunos lo llamarían “coaching”.

No me quiero comparar a estos casos de “éxito reconocido” que han deslumbrado al mundo últimamente pero puedo decir que en mi caso, conseguir este premio que consiste en terminar con éxito este trabajo de investigación, no hubiera podido ser una realidad si no hubiera tenido el aliento de unas personas, que me han estimulado durante el camino, sirviéndome de “guía”, de “acompañante”.

Todo mi afecto a ellas.

No puedo no hacer mención expresa de mis directores de tesis sin los cuales este trabajo se hubiera quedado en la fase de proyecto. Quiero manifestar mi agradecimiento expreso a:

- El Dr. Josep Mª Núñez Espallargas que me ha acompañado durante estos años, con paciencia.
- La Dra. Núria Rosich Sala que, sin desfallecer ni un segundo, siempre a mi lado, creyendo en este proyecto, me ha acompañado hasta el final del camino.

Todo mi reconocimiento para todos ellos.

Marc Antoine ARCHER.

INDICE

Capítulo I

PRESENTACIÓN GENERAL

«… Une connaissance nouvelle, vraie, ou valide sur un domaine plus vaste, ne s'établit pas " à partir " de l'ancienne connaissance mais contre elle. Elle utilise d'autres points de vue, d'autres méthodes etc. Elles n'ont pas entre elles de relations " logiques " évidentes qui permettraient de discréditer facilement l'erreur ancienne avec la nouvelle connaissance. Par contre elles sont concurrentes sur le domaine ancien.»

G. Brousseau

… Quien comprende cuáles son las mejores maneras de pensar y porque son mejores puede, si lo desea, modificar su propia manera de pensar para que resulte más eficaz…

John Dewey

1.1-Introducción

Estos últimos años, se ha asistido al desarrollo de un interés sostenido, por parte tanto de Instituciones como de investigadores de prestigio, con respecto al alumno con "dotes especiales" en el campo de las matemáticas. Esto ha dado lugar a una gran diversidad de propuestas que giran entorno a las "Altas Capacidades", a la "Calidad del Razonamiento matemático", a la "Sobredotación", etc. El caso más emblemático, dentro de España, lo constituye el investigador Miguel de Guzmán. Ha sido el centro y/o el provocador de una enorme cantidad de propuestas de investigación o de trabajos de investigación sobre la temática mencionada. Habiendo empezado con el seguimiento del trabajo de Miguel de Guzmán en la matemática recreativa, mi interés se ha ido acrecientando y, dentro del mismo marco, me he ido interesando por la problemática del "razonamiento matemático del alumno de ESO en un contexto de éxito académico".

Después de realizar una primera aproximación al tema mediante un breve recorrido por la situación actual, analizaremos en primer lugar las motivaciones que me han llevado a elegir el tema de investigación y en segundo lugar las razones personales que me han empujado a ello para finalmente comentar el interés de la Comunidad Educativa por esta problemática.

1.2- Una primera aproximación al tema objeto de la investigación

Si exceptuamos los momentos del día en los que nos vemos asaltados por corrientes mentales vanas y caóticas, o si excluimos los momentos de ensoñaciones y ensimismamientos (Dewey, 1989), podemos decir que nuestra vida transcurre diariamente entre tomas de decisiones, ocurridas de forma voluntaria. Vale la pena mencionar que no se puede tomar como "decisión" una elección realizada de forma arbitraria o una decisión tomada al azar. Tomar decisiones, nos empuja y nos obliga, de forma cotidiana, a elaborar algoritmos, a diseñar estrategias, a plantear y a resolver problemas, intentando eludir fracasos, buscando vías de éxito, independientemente tanto de nuestra condición social o económica como de las particularidades de nuestra personalidad (perfiles psicológicos, aptitudes intelectuales). Nuestra supervivencia personal y la de "Nuestra Comunidad" (reducida o amplia) dependen de ello. Está claro por lo tanto que, aunque sea por "instinto de conservación", hemos de procurar afinar lo máximo posible nuestra capacidad de razonar, desarrollando nuestras habilidades para resolver problemas y ejercitándonos en el difícil arte de tomar decisiones de forma acertada.

La vida cotidiana parece ser pues el primer terreno en el que nos encontramos con la obligación de ejercitarnos en "pensar de forma adecuada", en "saber pensar". Por lo tanto, hemos de saber como actuar para conseguir nuestras metas, como hacer para lograr los objetivos que nos hemos fijado, como controlar la secuencia de ideas originadas por una dificultad y destinadas a encontrar una respuesta a una pregunta formulada o una solución a un problema planteado (Dewey, 1989).

Si en la vida diaria la capacidad para resolver problemas es necesaria, el ámbito académico es él que generalmente se ha establecido, como marco formal, para ejercitarse en la resolución de problemas. Sin embargo, hasta el momento, en el aula, no se le ha acordado, a dicha tarea formadora, la suficiente atención ni se ha planteado una propuesta seria de formación, de calidad, basada sobre la capacidad de resolver problemas y sobre la mejora continua de dicha capacidad. En consecuencia, los alumnos se encuentran ante una gran variedad de dificultades cuando se enfrentan a una situación-problema (pasando desde su planteamiento hasta la solución) teniendo que analizar la situación propuesta, evaluar condiciones de contorno, plantear el problema propuesto modelizando la situación, resolver y explicar los resultados encontrados. Esto hace que, plantear correctamente un problema y llegar a la solución de forma exitosa, independientemente del tiempo que se tarde en llegar a ella, supone para la gran mayoría de los alumnos de secundaria una tarea titánica. Los alumnos, en general, se encuentran desamparados, angustiados, bloqueados a veces, frente a una situación-problema. No saben como tratar la información que tienen ante si, desconocen como codificarla, como extraer la información relevante y despreciar la irrelevante - a pesar de que estos alumnos puedan no tener obligatoriamente problemas de comprensión lingüística, muestran muchas veces un desconocimiento profundo del lenguaje matemático escrito y, a veces, claros síntomas de anumerismo - y como transmitir después o comunicar el resultado alcanzado.

Otro de los problemas que aparece - aun cuando algunas veces los alumnos logran iniciar correctamente el proceso resolutivo - es la gran cantidad de errores que cometen al utilizar los algoritmos algebraicos de resolución. Dichos algoritmos, considerados por los docentes como formando parte del grupo de las competencias cerradas (en el sentido de que una vez aprendidos, el alumno los puede manejar sin equivocación alguna - se sabe utilizar o no se sabe), aparecen entonces como competencia no adquirida. Así, errores en la transposición de términos o en la supresión de paréntesis, simplificaciones que se realizan de forma equivocada o utilización de forma incorrecta de las propiedades de las igualdades y desigualdades, confusión en los conceptos geométricos, parecen traducir una situación de razonamiento matemático deficitario en la educación secundaria.

Todo alumno, al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria, y suponiendo cumplidas las expectativas instruccionales previstas, debería poder seguir la secuencia de pasos que conducen a la resolución -correcta- de un problema:

- Analizar correctamente la situación-problema propuesta,
- Plantear adecuadamente el problema propuesto,
- Llegar a la solución de forma exitosa o bien llegar a una posible solución.
- Evaluar el resultado obtenido y Contestar a la o a las preguntas formuladas.

Este objetivo que debería ser alcanzable por todos y cada uno de los alumnos escolarizados, como muestra de éxito académico (independientemente del Sistema Educativo), dista mucho de ser una realidad. Se puede observar, a través de las estadísticas que se suelen publicar (Informe PISA 2000, 2003, 2006), que este estadio anteriormente descrito, sólo es alcanzado por unos cuantos alumnos. Asimismo, el nivel de razonamiento matemático no logra alcanzar cotas altas, incluso en alumnos considerados "buenos alumnos" por el sistema educativo. Es frecuente, en los ámbitos académicos, entre los profesores de matemáticas, hablando de los fallos que se dan en el campo del razonamiento matemático de los alumnos, encontrase con reflexiones del tipo:

¿A qué se deben estos fallos?

¿Cuál es el origen de las disfunciones que se producen?

¿Es posible que se pueda encontrar una solución ?

¿Son fallos en el aprendizaje?

¿Son las estrategias de enseñanza que no son las adecuadas?

¿ Son los factores sociales, económicos, culturales, cada vez menos controlables, los que vienen a dificultar la tarea docente, produciendo así fallos generalizados en el aprendizaje?

¿En el caso de alumnos definidos por el sistema educativo como alumnos altamente cualificados, tendremos los mismos problemas observados en los casos generales?

¿El nivel de éxito académico puede modificar positivamente esta tendencia?

Las primeras explicaciones, procedentes de algunos estudios realizados, hablan de problemas o de fallos en la capacidad de razonar. Para categorizar la tipología de fallos se recurre a los conceptos de matematización, diciendo que el alumno presenta un cuadro de fallos de matematización horizontal cuando el alumno, a la hora de realizar actividades matemáticas que impliquen "t*raducir los problemas desde el mundo real al mundo matemático*", presenta serias dificultades para resolver las actividades que supongan (Informe PISA 2003):

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.

- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Y, si el alumno es capaz de superar la fase del problema matematizado pero, a pesar de saber aplicar los algoritmos conocidos o es capaz de utilizar los conceptos y las destrezas matemáticas aprendidos, presenta dificultades para realizar las tareas siguientes:

- Utilizar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- Argumentar.
- Generalizar.

Se habla entonces de problemas de matematización vertical. ¿ Qué tipo de soluciones se puede plantear en estos casos? ¿Podemos plantearnos provocar en nuestros alumnos una actitud reflexiva en el ámbito académico de forma que se pueda superar estas dificultades?

Esta situación que debería encontrar solución con una “instrucción normal” de nuestros alumnos, no encuentra aún solución y queda mucho camino por recorrer antes de llegar a alcanzar una situación de normalidad. Debido a esto, muchas veces, los docentes, nos encontramos entonces desamparados a veces frente a los errores repetitivos de nuestros alumnos, a su poca pericia a la hora de plantear un problema y a veces llegamos a la conclusión de obviar ciertas partes según sea el "nivel" de la clase que nos ha tocado. "Transmitimos" entonces "mínimos" y descuidamos, de esta forma, una parte importante de la formación de nuestros alumnos, condicionando, quizás, una parte muy importante de su “Desarrollo Integral”.

El primer paso, para rectificar, antes de que la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje de las matemáticas y así la formación matemática de nuestros alumnos se resienta de forma irremediable, es quizás investigar lo que ocurre en el nivel de razonamiento de nuestros alumnos. No se pierde generalidad si se empieza por los "Alumnos en situación de Éxito Académico", (vista la poca cantidad de trabajos de investigación en este campo) y luego poder decidir sobre el tipo de modificaciones a aportar en la forma y en el fondo de la enseñanza de las matemáticas. Es lógico por lo tanto interrogarse, antes de lanzarse en la investigación, sobre el estilo o sobre los estilos de reacción de los alumnos talentosos frente a una situación-problema y sobre el tipo de influencias que puede ejercer el entorno sobre su capacidad de respuesta o de análisis.

Hemos de aclarar que los alumnos que nos interesan en el estudio y a los cuales hemos llamado "alumnos en situación de Éxito Académico" no son obligatoriamente "alumnos superdotados". Formará parte del grupo de estudio los alumnos que se han adaptado perfectamente al sistema educativo en el que están escolarizados y que manifiestan buenas "capacidades lingüísticas y lógico-matemáticas" demostrando así ser "buenos estudiantes", "estudiantes con éxito". Además, hemos de aclarar que no se ha realizado ningún test de detección del talento y de las altas capacidades ni tampoco hemos realizado mediciones del coeficiente intelectual de los alumnos participantes. Eso significa que, en el grupo de alumnos elegidos, puede haber habido:

- Alumnos con Altas Capacidades
- Alumnos Talentosos
- Alumnos Superdotados.

Hemos de dejar claro otro aspecto de la problemática. Al hablar de "Alumnos en situación de Éxito Académico", no resulta baladí hacer hincapié en que la situación de "éxito académico" no se está tomando como la situación contraria a la de "alumno en situación de fracaso escolar". Tratamos de alumnos con un nivel promedio alto de buenos resultados académicos. Son entonces alumnos de "Alto rendimiento Académico".

Este trabajo de investigación ha de poder hacer nuevas aportaciones en este sentido. De las observaciones iniciales que han motivado la reflexión sobre estas dificultades e incitaron a realizar esta propuesta de investigación, sobre resolución de problemas y la calidad del razonamiento, esperamos poder encontrar nuevas bases sobre las que asentar propuestas futuras.

1.3- Interés personal y motivación por el tema

Analizar correctamente una situación-problema, plantear correctamente el problema propuesto y llegar a la solución de forma exitosa es uno de los objetivos fijados por la enseñanza de las matemáticas, independientemente del sistema educativo en el que nos encontremos. Esta situación, ideal, debería ser alcanzable por todos y cada uno de los alumnos escolarizados. Sin embargo, observamos que este estadio sólo es alcanzado por unos cuantos alumnos, y, el nivel de razonamiento matemático deja bastante que desear, incluso en alumnos considerado "buenos alumnos" por el sistema educativo. Nos encontramos, como decíamos en la introducción con problemas diversos, de aprendizaje, de enseñanza, sin contar los innumerables factores que vienen a dificultar aún más la tarea docente. Recordemos las reflexiones anteriores:

- Los alumnos, en su gran mayoría, se encuentran sin recursos frente a un problema con narración. No saben como tratar la información que tienen delante, como codificarla, como extraer la información relevante y despreciar la irrelevante Son generalmente alumnos sin ningún tipo de dificultades para desenvolverse con los "algoritmos de la vida cotidiana" y que muestran grandes y serios problemas cuando se trate de un tipo de lenguaje más formal.
- Otro de los problemas que aparece - aun cuando algunas veces logran plantear correctamente el problema - es la gran cantidad de errores que cometen al utilizar los algoritmos algebraicos de resolución.
- Nos encontramos entonces con errores en la transposición , la supresión de paréntesis , las simplificaciones , la aplicación de las propiedades de las igualdades y desigualdades , etc. ... .
- Nos encontramos también con dificultades a la hora de plantear un problema y de llegar a su resolución correcta.

¿A qué se deben estos fallos? ¿Cuál es el origen de estas disfunciones? ¿Es posible que se puedan solucionar? Independientemente del nivel en el que enseñamos, notamos una cierta dejadez de los alumnos en toda actividad que suponga hacer un uso de la argumentación. Estas observaciones que conducen a estas preguntas a las cuales no se puede contestar de forma rotunda han empujado muchas veces a los docentes a planteamientos extremos o a explicaciones y observaciones superficiales tales como: "los alumnos de hoy en día no piensan", "a los alumnos actuales les cuesta razonar", "no saben razonar". No quieren pensar, solemos decir, de forma categórica. Observamos además, que, alumnos con a veces una más que notable utilización de las técnicas argumentativas, fuera del aula, no logran a obtener respuestas razonadas a problemas matemáticos simples, dentro del aula.

Estas observaciones me empujaron a reflexionar sobre los niveles de razonamiento de los alumnos de la educación secundaria y a empezar esta investigación, a través de un estudio de casos, para determinar el Nivel de Razonamiento de Alumnos Catalogados como Talentosos, Escolarizados en nuestro Sistema Educativo. Era interesante plantear una investigación sobre el tipo de razonamiento utilizado por los alumnos frente a un "problema", y sobre si la forma de razonar, de forma matemática, es común a todos.

Puesto que no vamos a tratar sobre concepciones existentes sobre el razonamiento o sobre los tipos de razonamiento y antes de describir la metodología utilizada en esta investigación, digamos (para no inducir, a error, a malas interpretaciones y/o a razonamientos falaces) que nuestro trabajo se centra en el razonamiento matemático del alumno, en su capacidad para resolver problemas matemáticos utilizando todos los recursos posibles. Pretenderemos, en una palabra, y para decirlo claro, "Analizar" y "Cuantificar la Calidad" del "Razonamiento Matemático" de los alumnos Talentosos.

1.4- Interés de la Comunidad Educativa por el tema de investigación objeto de este trabajo. Pertinencia e importancia del tema elegido.

Lo anteriormente dicho nos permite ver que el tema elegido para la investigación es un tema importante sobretodo para el Diseño Curricular. Nuestra investigación, como todo trabajo de investigación, está diseñada para proporcionar respuestas a una serie de preguntas formuladas a la vez que busca reforzar la práctica educativa mediante aportaciones innovadoras. En este caso, nuestro estudio pretende arrojar luces sobre ciertos fenómenos pedagógicos y dar respuestas a las siguientes preguntas:

1- Siendo un alumno catalogado como "Alumno con Éxito Académico" o "Alumno Talentoso", el sistema educativo en el que está escolarizado, tiene alguna influencia sobre su modo o su nivel de razonamiento matemático?
2- Basándonos en el modelo de Van Hiele, ¿En qué nivel de razonamiento matemático operan los alumnos catalogados como "Talentosos? ¿Influye el sistema educativo?
3- ¿ Existe una intervención voluntaria y reflexiva por parte del profesor para facilitar el proceso de aprendizaje del alumno Talentoso?

1.5- Planteamiento, ubicación y delimitación del tema de la investigación

Estudiamos el nivel de razonamiento matemático de alumnos catalogados como "Talentosos" por el sistema educativo. Aceptamos por lo tanto como válido y definitivo, el "veredicto" de la Comunidad Pedagógica manifestado en forma de "Informes del Equipo Docente", de "Boletines de Notas", o de "Apreciaciones del equipo de Asistencia Psicopedagógica" en cuanto a las capacidades y competencias de los alumnos elegidos. Descartamos por lo tanto todo tipo de prueba adicional para detectar "competencias o aptitudes ocultas" de los alumnos. Pretendemos estudiar el nivel de razonamiento matemático utilizado por estos alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

1.6- Descripción de la estructura general del estudio presentado

En el capítulo II del trabajo, presentamos la investigación y definimos los elementos básicos. Planteamos el problema definitorio de la investigación así como los diferentes elementos colaterales.

En el capítulo III de la investigación, presentamos los diferentes elementos contextuales, describimos los diferentes perfiles asociados a los alumnos catalogados como "Talentosos" estudiando los puntos definitorios de dichos alumnos y analizamos las particularidades de los sistemas educativos (en los niveles correspondientes a Tercero de ESO) a los cuales pertenecen los alumnos de la muestra:

- El sistema educativo español
- El sistema educativo francés
- El sistema educativo italiano

En el capítulo IV, definimos el marco teórico de trabajo y aprovechamos para centrar el estudio sobre las diferentes variables que influyen en el rendimiento del tipo de alumno estudiado.

En el capítulo V, describimos las diferentes fases de la investigación estableciendo los objetivos así como la metodología utilizada. Los datos son analizados y consideramos las posibles desviaciones.

En el capítulo VI, presentamos las conclusiones y analizamos las perspectivas producidas, la adecuación de los resultados obtenidos a los objetivos inicialmente fijados.

En los Anexos, describimos los contenidos curriculares de matemáticas de los niveles a los cuales pertenecen los alumnos de la muestra y comentamos las particularidades de los sistemas educativos de escolarización de los alumnos participantes a este estudio de casos así como el contenido del trabajo complementario realizado con uno de los grupos.

Capítulo II

CONTEXTO GENERAL Y PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

El camino que va del niño al objeto y del objeto al niño pasa a través de otra persona.

Vygotski, 1979

2.1-El Contexto de la Investigación

En este capítulo presentamos el contexto que envuelve la investigación que pretendemos llevar a cabo. La investigación se desarrolla en Centros Educativos ubicados en la Provincia de Barcelona y con alumnos catalogados como “Alumnos en Situación de Éxito Académico”, escolarizados en tres IES diferentes:

- Un IES del sistema educativo español
- Un IES del sistema educativo francés
- Un IES del sistema educativo italiano

Esto nos llevará a considerar diferentes referentes tanto institucionales como socioeconómicos. Procuraremos estudiar la incidencia de los diferentes parámetros sobre la problemática estudiada.

2.2- Los problemas de contorno

La práctica diaria, en las escuelas de secundaria, ofrece una visión de la realidad educativa que permite apreciar una serie de problemas que dificultan, tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas, complicando la tarea educativa y aumentando el fracaso escolar. Podemos citar, entre ellos:

1- Problemas de Aprendizaje

    a. Problemas Cognitivos

        i. Alteración de las aptitudes

    b. Problemas Motivacionales

    c. Problemas Afectivos, Emocionales

i. Desorden afectivo

ii. Fobias

d. Problemas Clínicos

i. Patologías

ii. Capacidades limitadas

e. Inexistencia de Hábitos positivos

2- Problemas de Enseñanza

a. Problemas situados al nivel de la metodología utilizada

b. Problemas al nivel del Diseño Curricular

3- Problemas Sociales que afectan tanto la enseñanza como el aprendizaje

a. Problemas Conductuales

i. Violencia escolar

ii. Disciplina en el aula

b. Problemas de Orden Social

i. Presión social de las matemáticas

ii. Situación socioeconómica y cultural de los padres

Todo esto condiciona tanto la enseñanza como el aprendizaje del alumnado, reduciendo las expectativas del alumno motivado o interesado. Está claro entonces que ciertas estructuras de apoyo deberían existir, para ayudar al profesorado en su labor educativa, minimizando su sensación de “impotencia” y creando los mecanismos adecuados para estimular el aprendizaje del alumnado. Además de los problemas mencionados, hemos de aludir también a los problemas generados por las disfunciones citadas debido a la red de interacciones que se producen entre los diferentes actores, alumnos, familias, administración, profesores, etc. Estos actores, a saber :

- El Profesorado y el Alumnado (como Elementos Primarios)
- Los Padres (como Elementos Secundarios)
    - Padres y Asociaciones de Padres vinculadas o no al Centro Educativo
- El Centro Educativo
- Los Elementos que influyen y son influidos por el Entorno Educativo.
    - Sindicatos
    - Administración
    - Patronales
    - Colegios Profesionales asociados a la docencia

configuran una Comunidad Educativa creando una red de interacciones y un circuito de retroalimentación que amplifica muchas veces los problemas y dificulta el encuentro de soluciones.

2.2.1- La creación de interacciones

Estos problemas de contorno incitan a pensar en las interacciones que se pueden producir debido a la presencia, dentro del proceso educativo, de los diferentes actores interactuando con los factores principales (Landsheere, 1983):

- Los fines perseguidos
- Los Agentes y los medios
- Los resultados esperables

Es lógico pues que existan conflictos, que haya interacciones. Sin interacciones, no hay aprendizaje. Sin intercambios, no hay aprendizaje (Vygotski, 1979). Ha de haber intercambio, ha de existir proceso cooperativo para que se despierten, en el individuo, los procesos evolutivos que conducen al aprendizaje. El educando necesita por lo tanto la existencia de intercambios con su entorno y la presencia de algún "semejante" más capaz (Vygotski, 1988), que posibilite la creación de Zonas de Desarrollo Próximo desde los cuales construir conocimiento a partir de la necesidad de encontrar respuestas, explicaciones a dudas creadas. En este sentido el ZDP es entendido como la distancia entre "el nivel de desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas" y el nivel más elevado de "desarrollo potencial y tal como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con iguales más capaces" (Vygotski, 1980).

El "semejante más capaz" que es quien posibilita la creación de conocimiento nuevo a partir de informaciones disponibles y utilizables, puede ser o un compañero o el profesor. Para facilitar la creación de conocimiento nuevo, el semejante ha de trabajar en un nivel de conocimientos superior al que está trabajando el educando. Dentro del aula se "Re-Crea" un mundo en el que las interacciones verbales, gestuales, actitudinales, procedimentales, tienen una enorme influencia sobre el aprendizaje. Coll (2001) propone por ejemplo la imagen de un triángulo interactivo conteniendo en los vértices: Alumnos, Contenidos, Docentes. En este supuesto, el alumno es quien elabora su aprendizaje a través de la interactividad con el docente y sus compañeros. Eso posibilita entonces la intervención de múltiples factores ajenos al conocimiento en si: aspectos afectivos, parámetros motivacionales, además de los procesos cognitivos que vehiculan los contenidos académicos. Los fines pedagógicos sirven de motor de los diferentes procesos elaborados dentro de esta red de interacciones en el aula (Colomina, Mayordomo y Onrubia, 2001).

La tarea educativa es generadora de conflictos y las interacciones que se producen en el seno de la Comunidad Educativa los alimenta, los entretiene y los modula:

- Relaciones Profesor – Profesor (Claustro de Profesores)
- Interacciones Profesor-Administración Educativa
- Interacciones Profesor – Alumno
- Interacciones Profesor-Grupo-Clase
- Relaciones Profesor-Familias
- Relaciones Alumno-Alumno

La buena o mala gestión de los conflictos derivados de estas interacciones (conflictos latentes o declarados, pasajeros o permanentes (renuentes – enquistados), violentos o tranquilos) dará lugar a un proceso educativo armonioso o conflictivo.

Es en este contexto que se desarrolla la labor educativa de los docentes. Es también en este contexto que han de ser educados los alumnos, buenos o no tan buenos. El estudio de casos que realizaremos habrá de tomar en cuenta esta realidad compleja:

- Por un lado, hemos de poder elaborar estrategias pedagógicas diversas para facilitar el acceso del alumno al conocimiento
    - La Comunidad Educativa conforma un universo de Conocimientos, de Valores, de Normas y de Actitudes, que regula el acceso del alumno al conocimiento.
- Por otro lado, el alumno vive en el seno de una FAMILIA, en un BARRIO, o sea, dentro de un contexto socioeconómico y un ambiente cultural determinado, y acude a un CENTRO educativo.

Este universo de relaciones, a su vez, influye también en las relaciones del “alumno” con el “conocimiento”. Esta figura, de elaboración propia, puede mostrarnos la multiplicidad de relaciones que se producen:

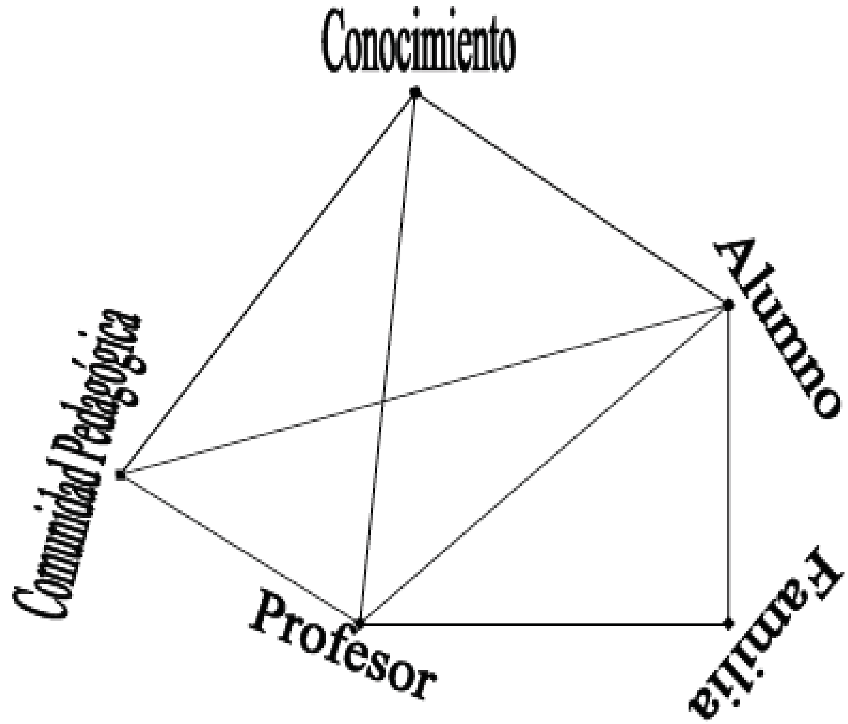


Figura 1 – T2
Red de Interacciones Alumno-Conocimiento

Esta forma de plantear las interacciones que tienen lugar en durante el binomio enseñanza-aprendizaje , se ajusta a las teorías desarrolladas por los didactas Brousseau (1986) en sus teorías de las situaciones didácticas como por Chevallard (1982). El “Medio” y el “Mundo Exterior” intervienen e influyen en las formas utilizadas por el alumno para “otorgar significado” a las nociones enseñadas.

Y, si pensamos que el alumno accede al Conocimiento a través de las interacciones con los diferentes elementos que conforman la Comunidad Educativa, podríamos representar el "Universo" anterior de la forma siguiente:

Figura 2 – T2
Esquema descriptivo de la red de interacciones generadas entorno al alumno

Las influencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son enormes. Resaltar los aspectos positivos en beneficios del alumno, supone un conocimiento profundo de las interrelaciones existentes entre fuentes y sumideros, entre actores activos y pasivos, entre los diferentes elementos sensibles de la Red de interacciones. Hemos de notar además que la necesidad de aprender del alumno viene motivada por las influencias a las cuales esta sometido. Se ha de inscribir en un PROYECTO

PERSONAL y, la satisfacción de esta necesidad es la que facilitará o dificultará la tarea educativa. Estas influencias se van notando cada vez más, ahora, en estos momentos de CRISIS DE AUTORIDAD, en la familia, en la escuela. La sociedad cambia, y, con los cambios sociales la escuela, el entorno educativo, la Comunidad Educativa sufre a su vez unos impactos que modulan y modifican las relaciones dentro de la escuela en general y dentro del aula en particular. Nos encontramos entonces, aparte de los problemas de orden cognitivo o clínico, con una fuerte influencia de los factores sociales. Así, la violencia escolar, los problemas de disciplina en el aula, la situación socioeconómica de las familias, el estrés social en general, son factores que influyen negativamente tanto en el aprendizaje como en la enseñanza de las matemáticas[1].

2.3- El valor de las interacciones en el aprendizaje matemático

El aprendizaje es Intercambio (Van Bosten, 1997). El aprendizaje es "Interacción con el entorno" (Resnick 1987). En el acto del aprendizaje, el individuo está sometido a estímulos directos de su ambiente y a estímulos mediados por las personas encargadas de su educación (Feuerstein 1993). La concepción constructivista de la educación así nos lo ha mostrado, presentándonos generalmente el binomio Enseñanza-Aprendizaje como intercambios funcionales realimentados entre 3 grandes pilares (tal como mostrábamos en las figuras 1 y 2 del presente capítulo), los cuales actúan dentro de un marco global que es el entorno. Dichos pilares son:

- El sujeto, el discente, el individuo que aprende
- El objeto de aprendizaje, el contenido, el CONOCIMIENTO a adquirir.

[1] Monks y Boxtel (1988) llaman la atención sobre el hecho de que no es posible que un niño o una niña muestre habilidades superiores a la media si su entorno más cercano no le es favorable.

- El que atribuye sentido al saber enseñado, el docente, el profesor que ayuda al sujeto a construir significado.

Estos intercambios ocurren dentro de un ámbito que puede favorecer o dificultar el aprendizaje. Podemos crear ambientes para facilitar el trabajo colaborativo entre los alumnos, facilitando la negociación de significados y el intercambio de argumentos. Comparando las propias ideas con las de otros, analizando las afirmaciones , las conjeturas de los otros, el individuo que aprende construye significados, modifica conceptos aprendidos, extiende sus conocimientos (Van Bosten 1997). Dentro de tal contexto, tiene sentido hablar de Comunidad Educativa a la que aludíamos antes y dentro de ella o no, podemos tener otras comunidades favorecedores del aprendizaje, de la enseñanza. Dentro de estos marcos podemos encontrar las Comunidades de Práctica, los Grupos de trabajo, los Grupos de discusión, etc.

Figura 3 – T2

Las interacciones, los intercambios potencian más el aprendizaje. En este caso, un concepto fundamental para mostrar la importancia de las interacciones es el de ZDP (Zona de Desarrollo Próximo), zona facilitadora del aprendizaje mediante interacciones entre pares (Vygotski 1995).

2.4- Descripción de las Interacciones generadas en la Comunidad Escolar

Es cada vez más numeroso el número de profesionales de la Educación, preocupado por las dificultades cada vez mayores, encontradas en el ejercicio de su tarea educativa, de su labor docente. Nos encontramos con una tupida red de interacciones entre los tres actores del acto de educar: El Alumno, el Profesor, los Agentes Educativos, la cual, lejos de facilitar el acceso del Alumno al Conocimiento, haciéndolo más asequible, más importante tanto para el bienestar del Educado como para la supervivencia del sistema, crea nuevas barreras e imposibilita la Promoción de los menos favorecidos (cognitivos, sociales). Se producen entonces fracasos, frustraciones, rechazos, incomprensiones.

Los tiempos cambian y, con ellos, se modifican hábitos, pautas, modos, modales. Eso provoca una transformación del "Entorno Educativo" que conduce a la adaptación de les estilos docentes y los enfoques pedagógicos. Se crean nuevos ambientes de aprendizaje, aparecen nuevos escenarios de aprendizaje y nuevas tecnologías que modulan la enseñanza (Salinas 1995). Estos procesos no son súbitos aunque la modificación de planes de estudio nos lo pueda hacer creer. Esto provoca conflictos entre los diferentes actores y nos encontramos, como decíamos antes, enfrente a una red de interacciones que comprende varios subgrupos que pasamos a describir.

2.4.1- Interacciones Profesor-Alumno

En primer lugar, nos encontramos con una red de relaciones entre el profesor, el alumno y el conocimiento, estableciéndose diversas estrategias pedagógicas para facilitar el acceso del alumno al conocimiento. Diferentes técnicas han de ser elaboradas con el fin de conciliar las diferentes necesidades, sobretodo del Alumno. Le corresponde al profesor crear y mantener diferentes ambientes propicios al aprendizaje, favoreciendo, para este menester, los climas interactivos, promoviendo elementos que inciten a la cooperación, a la colaboración.

2.4.2- Interacciones Alumno-Entorno sociocultural

En segundo lugar, sabemos que el alumno vive en el seno de una FAMILIA, en un BARRIO, o sea, dentro de un contexto socioeconómico y un ambiente cultural determinado, y que acude a un CENTRO. En el centro educativo, tenemos conformado una Comunidad Pedagógica. Entendiendo por Comunidad Educativa, el conjunto formado por:

- El Profesorado y el Alumnado (como Elementos Primarios)
- Los Padres (como Elementos Secundarios)
- Los Elementos que influyen y son influidos por el Entorno Educativo.

Cabría hacer mención en este caso de la influencia de las “particularidades” culturales y/o de las diferencias étnicas en el desarrollo de las interacciones en el aula (Cazden, 1991).

2.4.3- Interacciones Alumno-Alumno (Grupo-Clase)

No se puede despreciar en ningún momento la influencia de las interacciones Alumno-Alumno, matizadas por el Grupo-Clase. El grupo enjuicia la actividad docente, intenta influir en el estilo docente, hace lo posible para modificar las relaciones preferenciales que pudieran existir entre el Profesor y algunos Alumnos por la relación con el Saber, etc. Los factores motivacionales, los problemas de orden emocional, la problemática conductual, todo esto crea un ambiente que puede entorpecer la labor educativa y dificultar el acceso del alumno al saber. El tipo de interacción productiva se produce cuando en el grupo se facilita el intercambio de experiencias, de interpretaciones, de opiniones, conocimientos y actitudes. En este tipo de interacciones influyen las experiencias sociales de los alumnos creando para nosotros, en esta investigación dos ambientes diferenciados en los cuales nos encontramos con una gran homogeneidad sociocultural en el IES y una gran heterogeneidad en el centro francés principalmente. En este caso, no podemos omitir los trabajos sobre procesos de construcción de "saber" a través de la red de interacciones entre pares (Cazden, 1991, Edwards y Mercer 1988, Mercer 1997).

2.4.4-Interacciones Comunidad Pedagógica-Alumno

La Comunidad Educativa, a través de los "Contenidos Curriculares" crea las estructuras de funcionamiento en el seno de la Comunidad Pedagógica, establece los límites del marco de intervención. Y, de allí, regula las relaciones entre profesor y alumno, y fija así, los códigos de funcionamiento de la Comunidad Pedagógica. Es así en todos los aspectos de la vida educativa, y, como no, también en la formación matemática.

En el caso de la enseñanza de las matemáticas por ejemplo, los contenidos curriculares son explícitos, estableciendo que, "La educación matemática, en las etapas obligatorias, ha de contribuir a formar ciudadanos y ciudadanas que conozcan el mundo en el que viven y que sean capaces de fundamentar sus criterios y sus decisiones, así como adaptarse a los cambios, en los diferentes ámbitos de su vida"[2]

[2] Contenidos curriculares – Currículum educació secundària obligatòria – Decret 143/2007 DOGC núm 4915

Los “contenidos procedimentales” a transmitir, las “actitudes” a desarrollar, las “normas y valores” a interiorizar, describen el universo pedagógico de la Comunidad. Hay por lo tanto, una multiplicidad de opiniones, la diversidad del universo asociado a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas crea, entre el profesor de matemáticas y el alumno en situación de aprendizaje, una red compleja de acciones, de reacciones, de actos, de inhibiciones, de frustraciones, por parte de uno y de otro. Si la Comunidad Educativa establece una Estructura de funcionamiento compleja, el Subsistema formado por la Comunidad Pedagógica no es menos compleja. Es en su seno donde se ejercen las tensiones debidas a las poco definidos contornos. El profesor sufre una cierta “crisis” de autoridad dentro del aula, dentro de la Comunidad Pedagógica. El universo: Conocimientos, Valores, Normas, Actitudes no queda bien delimitado en sus contornos. Y eso es generador de problemas.

Cobra sentido hablar de los conceptos de “Contrato Didáctico” (Brousseau 1988) y de “Normativa” (Normas sociales, normas matemáticas, normas sociomatemáticas) (Blumer 1969, Cobb y Bauersfeld 1995, Yackel y Cobb 1996) que sirve para apuntalar lo dicho antes. Las dificultades para hacer frente a todos estos problemas así generados han permitido diseñar estrategias y también llegar a la elaboración de modelos, de teorías.

En este caso, además de los trabajos antes mencionados, debemos hablar de los trabajos sobre el aprendizaje por medio de la construcción de las ideas con los otros en tareas compartidas (Rogoff B. 1993), cuyas características relevantes son:

a. El docente juega un papel de “guía” y no de mero transmisor de información y de saberes.
b. El docente es un “facilitador” de la comunicación entre los diferentes actores del aprendizaje.
c. El discurso no es una conversación diádica entre el profesor y el resto de los niños, sino que tanto los estudiantes como los profesores son miembros activos en el desarrollo de las ideas.
d. Se crea un marco en el que el alumno aprende aprende a escuchar y a “hacer suya” la experiencia del compañero, mediante la “ayuda” del “Profesor-Guía”.
e. El profesor guía, orienta los debates, facilita la comunicación, crea y entretiene un ambiente positivo de trabajo que facilite la discusión.

2.5- Descripción de la problemática de la investigación

No podemos no tener en cuenta la influencia de estos factores también sobre los alumnos que consideramos en este estudio. Esperamos poder delimitar esta influencia y poder aclarar el impacto resultante sobre dichos alumnos. Partíamos de unas preguntas básicas que volvemos a considerar:

¿Cómo resuelven los alumnos altamente cualificados los problemas algebraicos y geométricos?

¿Los procedimientos que utilizan estos alumnos son diferentes que el resto de los alumnos?

¿En qué medida el sistema educativo puede influir en estos alumnos?

¿Teniendo éxito académico, ha de resultarse una alta capacidad de razonamiento matemático?

Estas preguntas básicas, formuladas en nuestra preocupación de buscar aportaciones innovadoras para reforzar nuestra práctica educativa, ha servido para plantear este trabajo de investigación que pretenderá proporcionar, no sólo respuestas a las preguntas formuladas sino también arrojar luces sobre ciertos fenómenos pedagógicos asociados al razonamiento matemático de los alumnos “Talentosos”.

2.6-Objetivos del estudio

Así, el trabajo de investigación, nos deberá capacitar para responder a las preguntas tales como:

1- Siendo un alumno catalogado como “Alumno con Éxito Académico”, o “Alumno Talentoso”, el sistema educativo en el que está escolarizado, tiene alguna influencia sobre su modo o su nivel de razonamiento matemático?

2- Basándonos en el modelo de Van Hiele, ¿En qué nivel de razonamiento matemático operan los alumnos catalogados como “Talentosos? ¿Influye el sistema educativo?

3- ¿ Existe una intervención voluntaria y reflexiva por parte del profesor para facilitar el proceso de aprendizaje del alumno Talentoso?

4- ¿ Es adecuado el Modelo de van Hiele para determinar el nivel de razonamiento Matemático de alumnos reconocidos como Talentosos por el sistema?

Estas preguntas nos sirven para fijar nuestro sistema de hipótesis. Hemos de aprovechar para hacer notar que el trabajo de investigación no es un trabajo sobre el "razonamiento" sino sobre el "razonamiento matemático" del alumno en general y del Alumno Talentoso en concreto. Eso nos obliga a hacer algunas aclaraciones para dejar bien delimitado el marco en el que intervenimos.

2.7- Aclaraciones sobre el razonamiento matemático

Llegados a este punto, conviene aclarar el uso que haremos del concepto de "Razonamiento matemático" en este trabajo de investigación. Tratamos en este trabajo de analizar los procedimientos utilizados por los alumnos de la ESO, considerados con "Éxito Académico", para resolver unos problemas matemáticos que se les ha sido propuesto. Son alumnos que, debido a su condición académica están supuestamente habituados a razonar y a tomar conciencia de su propio razonamiento. Ya decíamos al principio de este trabajo, en la introducción, que si exceptuábamos los momentos del día en los que nos veíamos asaltados por corrientes mentales vanas y caóticas, o si excluíamos los momentos de ensoñaciones y ensimismamientos (Dewey, 1989), podíamos decir que nuestra vida transcurre diariamente entre tomas de decisiones, ocurridas de forma voluntaria. Eso significa por lo tanto que el hecho de tomar decisiones, nos empuja y nos obliga, de forma cotidiana, a elaborar algoritmos, a diseñar estrategias, a plantear y a resolver problemas, intentando eludir fracasos, buscando vías de éxito, independientemente tanto de nuestra condición social o económica como de las particularidades de nuestra personalidad (perfiles psicológicos, aptitudes intelectuales). Esto obliga a razonar, a desarrollar las habilidades para resolver problemas.

El razonamiento aparece pues vinculado al pensamiento, obedece a una forma de ordenar las ideas, de forma que se pueda llegar a deducir una conclusión, en armonía con las premisas fijadas o respondiendo a unas expectativas. El razonamiento es un producto del pensamiento: *Razonar ayuda a ampliar el conocimiento, mientras que al mismo tiempo depende de lo ya conocido y de las facilidades existentes para comunicar conocimiento y convertirlo en un recurso público y abierto*.

Las matemáticas proporcionan el ejemplo típico de hasta dónde se puede llevar la operación de relacionar ideas entre sí, sin tener que depender de las observaciones de los sentidos. (Dewey, 1989)

El razonamiento matemático encuentra en la resolución de problemas la mejor forma de expresarse, de manifestarse plenamente. El estudiante, en este caso, se encuentra en la obligación de elaborar, desarrollar y consolidar los esquemas mentales adecuados. Ha de movilizar las competencias que le servirán para:

- Comprender el enunciado determinando las diferentes relaciones existentes entre las variables y los datos
- Conseguir una modelización de la situación problemática propuesta
- Encontrar la situación final que explique y justifique la situación inicial propuesta.
- Ha de verificar que la situación final a la que ha llegado corresponde a la solución del problema planteado.

Los alumnos objeto de esta investigación son alumnos que saben:

- Establecer y formular conjeturas
- Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas
- Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y/o demostraciones
- Desarrollar y evaluar argumentos
- Comunicar su pensamiento matemático mediante el uso del simbolismo adecuado

El razonamiento matemático es lo que le permite establecer esta serie lógica de hechos interrelacionados. En este trabajo, pretendemos evaluar, mediante un estudio de casos, la capacidad de razonar y la calidad del razonamiento matemático de estudiantes de ESO, catalogados como "Alumnos con Éxito Académico". Partimos de un esquema de funcionamiento que es el que describimos a continuación y que fijará nuestras líneas de la investigación.

El proceso se encuentra descrito en el esquema de la página siguiente.

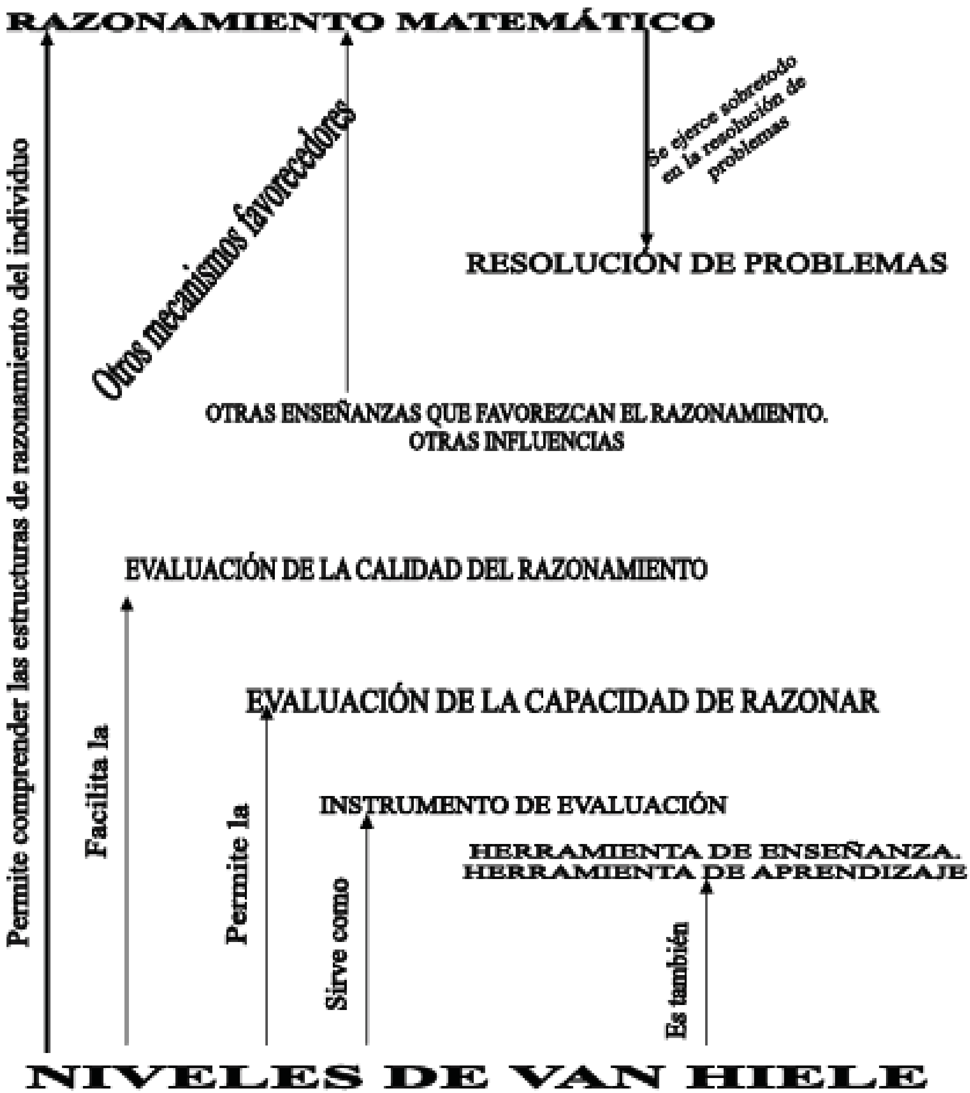


Figura 4 – T2
Esquema descriptivo del procedimiento de evaluación

A lo largo del trabajo de investigación se podrá comprender mejor la justeza de este esquema ilustrativo e intentaremos profundizar, a lo largo del trabajo, sobre estas primeras afirmaciones.

Capítulo III

Elementos Contextuales

La función del pensamiento reflexivo es la de transformar una situación en la que se experimenta oscuridad, duda, conflicto o algún tipo de perturbación, en una situación clara, coherente, estable y armoniosa.

John Dewey

3.1-Presentación del contexto de la investigación – Descripción del tema

Presentamos, en este capítulo, los diferentes elementos contextuales de la investigación. Asimismo, describiremos los diferentes perfiles asociados a los alumnos catalogados como Altamente Capacitados, procurando analizar los parámetros definitorios de dichos alumnos, intentando no alejarnos del marco impuesto por el trabajo. Además de describir los parámetros definitorios del tipo de alumno analizado en el trabajo, nos fijaremos también en la tipología de procesos que intervienen en su aprendizaje y lo factores que influyen en su marco de enseñanza. Esto supone entonces tratar en este tema, además de la descripción de los parámetros antes citados, del estudio de los modelos y estilos de aprendizaje en general y sobretodo del tipo de aprendizaje que se da en el alumno Talentoso. Dentro del mismo contexto, nos centraremos en reflexiones del tipo:

1- ¿Qué tipos de perfiles podemos asociar a los alumnos con éxito académico?
2- ¿Existe alguna intervención didáctica voluntaria y reflexiva, por parte del profesor, para facilitar los procesos de aprendizaje de los alumnos?
3- ¿ Es permeable el alumno con éxito académico a las influencias externas?
4- ¿Hasta qué punto puede influir en su aprendizaje su entorno más inmediato: la clase, los amigos del barrio, la familia?

3.2- Descripción contextual de la problemática

Para centrarnos en el análisis de las publicaciones y de las investigaciones referidas al tema tratado en este trabajo de investigación, se ha de aclarar que este trabajo no pretende en absoluto investigar los procesos de "razonamiento" en general ni tampoco los procesos que acompañan el "razonamiento matemático" en sí. Es un trabajo de investigación sobre "los niveles de razonamiento matemático en los que trabajan los alumnos considerados talentosos" siendo el "éxito académico" uno de los criterios definitorios del "Talento". Además, nos centramos en la franja de edad 14-15 años, teniendo en algún caso algún alumno de la muestra acercándose a la frontera de los 16 años. Creemos que en esta etapa, la consolidación de los procesos cognitivos supone la plena madurez intelectual de los alumnos que forman parte de la muestra y nos permite asegurar la fiabilidad de los resultados a los cuales habremos llegado.

Hemos de aprovechar también para aclarar que se trata de alumnos clasificados según su "rendimiento académico", sin que haya mediado ninguna prueba específica de evaluación de las aptitudes. La muestra de trabajo estará pues formada no por alumnos con "altas capacidades innatas demostradas" (aunque se pueda incluir en el grupo de trabajo, a alumnos que reúnan dichas características) sino por alumnos catalogados por la Comunidad Educativa como "Buenos Alumnos". Por lo tanto, el rendimiento académico ha de permitir su selección. Es decir, se requiere que los informes de la Comunidad Educativa les sean favorables.

Habiendo aclarado este punto, hemos de decir que nos centraremos principalmente en las publicaciones e investigaciones referidas a los temas siguientes:

1- La resolución de problemas
2- El razonamiento matemático
3- Los niveles de aprendizaje de Van Hiele (y otros modelos taxonómicos)
4- El aprendizaje matemático en general y el aprendizaje matemático del alumno Talentoso.

5- Influencia de los parámetros externos sobre el binomio enseñanza-aprendizaje en general y sobre el aprendizaje matemático en particular.

Haremos un breve recorrido a través de lo más representativo sobre lo que asentaremos nuestro trabajo.

3.2-1. Panorama de las publicaciones y de las investigaciones referidas al tema de trabajo.

Vivir de cerca la “vida académica” permite apreciar que, si bien la “atención a la diversidad de capacidades” que se dan en el aula puede quedar relativamente bien cubierta o sino suficientemente bien enfocada en el caso del alumnado “considerado normal”. En los casos de alumnos con “necesidades especiales” para poder tener un “instrucción adecuada” parece que también el sistema funciona de forma correcta. Sin embargo, queda aún mucho trabajo por hacer desde los diferentes ámbitos de la educación para “explorar” y “explotar” de forma óptima todo el potencial creativo del Alumno Talentoso. Los cambios habidos en la sociedad en estos últimos años, el conocimiento más profundo que se tiene de los procesos cognitivos, las concepciones sociales así como las investigaciones habidas sobre los diferentes aspectos de la inteligencia han creado un entorno más propicio que facilita actualmente el trabajo con los “Alumnos Talentosos” creando un interés más genuino por los procesos que se dan en la tarea de educarlos.

Puesto que el análisis de los diferentes enfoques o de las diferentes teorías elaboradas con respecto a la inteligencia, a la superdotación o al Talento, desborda el marco de este trabajo de investigación, decíamos en el apartado anterior que nos interesaríamos y que nos centraríamos principalmente en las publicaciones e investigaciones referidas a los temas siguientes:

a- La resolución de problemas

b- El razonamiento matemático

c- Los niveles de aprendizaje de Van Hiele

d- El aprendizaje matemático en general y el aprendizaje matemático del alumno Talentoso.

e- La Influencia de los parámetros externos sobre el binomio enseñanza-aprendizaje en general y sobre el aprendizaje matemático en particular.

Este planteamiento nos obliga a considerar varias teorías o modelos de investigación sobre los cuales asentar nuestra investigación. Entre éstas, podemos citar por ejemplo:

- Las líneas de trabajo sobre una mejor “Gestión de la calidad del razonamiento matemático” : Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof (1984).
- Las líneas de investigación que pretenden adaptar los perfiles de aptitudes de los alumnos a los currículos de enseñanza de forma que puedan armonizarse, contenidos, secuenciación, estrategias de enseñanza, métodos de evaluación. Los teóricos que más se acercan a esta línea de trabajo son: Fey (1980), Roberg y Carpenter (1986), Rico (1990).
- La tendencia en hacer de la resolución de problemas el “pilar fundamental” del aprendizaje matemático y el diseño de estrategias cognitivas asociadas a la resolución de los propblemas: Polya (Como plantear y resolver problemas, 1978).

- Las líneas de pensamiento de Dewey(1989), Vigotsky (1979), Ausubel (2002),
- El esquema de construcción de conocimiento de Piaget (1981).
- La Resolución de problemas: Aprender matemáticas es un proceso continuo que se ve favorecido en un ambiente de resolución de problemas donde los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar formas de pensamiento en consonancia con el quehacer matemático (Schoenfeld, 1998).
    - Otras propuestas más recientes van en el mismo sentido sugiriendo organizar el aprendizaje de las matemáticas alrededor de la resolución de problemas. Así, resulta importante que los problemas o tareas se transformen en una plataforma donde los estudiantes formulen conjeturas, utilicen distintas representaciones, empleen varios caminos de solución y comuniquen sus resultados (NCTM, 2000).

No podemos eludir hablar de los trabajos que han influenciado la educación estos últimos años y que tratan principalmente de la excepcionalidad de un individuo con respecto a los demás o de las manifestaciones del "comportamiento talentoso". Existen varios modelos explicativos de estas " manifestaciones excepcionales" a las cuales haremos referencia. Cabe citar el proyecto para la detección y el estímulo del talento matemático, promovido por Miguel de Guzmán, el proyecto ESTALMAT. Dicho proyecto nació con la voluntad de *mantener y estimular el interés de los chicos de 12 a 15 años que se sienten especialmente atraídos por la belleza, la profundidad y la utilidad de las matemáticas.* Tampoco podemos no hacer mención de los programas relacionados con el talento matemático (Study of Mathematically Precocious Youth –

SMPY) en la Universidad Johns Hopkins de Baltimore, promovido por el profesor Julian Stanley, que funciona desde 1971 y el de la Universidad de Hamburgo, iniciado en 1982 por los profesores Harald Wagner y Bernd Zimmermann (Identification and Fostering of Mathematically Gifted Students), ni tampoco los trabajos de Bloom (1985- Developping Talent in Young People) o de Callejo (2002) sobre el comportamiento talentoso de los alumnos.

Hemos de hacer mención también de algunas investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos considerados como "Alumnos Altamente Capacitados y Talentosos" y la influencia de un entorno educativo favorable sobre su formación académica, como por ejemplo los trabajos de:

a) Van Tassel-Baska sobre el modelo eficiente de instrucción de los alumnos Talentosos (Effective curriculum and instructional models for talented students)
b) Harry Passow, sobre el curriculum adaptado para la enseñanza de alumnos Talentosos (Curriculum for the gifted and talented at the secondary level).
c) Hayes Jacobs, sobre modelos conceptuales de enseñanza.
d) Renzulli, sobre los modelos para el desarrollo de un curriculum diferenciado para los alumnos de altas capacidades (Model for developping differentiated curriculum for the gifted and talented students).

No podemos no considerar estudios y modelos basados sobre, las configuraciones cognitivas de los alumnos talentosos o bien teniendo en cuenta su rendimiento o su adaptación sociocultural. Por ejemplo:

- Modelo de Marland (1972)

- Modelo de Renzulli (1977)
- Modelos socioculturales
    - Tannenbaum (1986)
    - Mönks y Van Boxtel (1988)
    - Mönks (1992)
- Modelo de Stenberg (1985)
- Modelo de Superdotación y Talento de Gagné (1991)
- Modelo de las Inteligencias Múltiples de Gardner (1983)
- Modelo de la Inteligencia Emocional de Goleman
- Teoría de Terman (1925) que considera el talento fruto de lo innato o genético. Su manifestación en un individuo es puramente aleatorio, fruto del azar y estable en el tiempo.

Considerando los diferentes hechos relacionados con las altas capacidades, el talento y la superdotación y dentro del panorama de las publicaciones relativas a la inteligencia y el talento, podemos establecer la siguiente categorización:

*** Modelos basados en capacidades.**

a) El modelo de Terman: poca viabilidad en relación con la intervención y la predicción de conductas en los niños y adolescentes superdotados.

b) El modelo de Marland: define a los talentosos como estudiantes que debido a su alta capacidad demuestran elevada realización y requieren programas educativos especiales para su beneficio y el de la sociedad.

c) El modelo de Taylor (1986) que contempla seis capacidades: académica, creatividad, planificación, comunicación, pronóstico y decisión.

d) El modelo de Gardner (1985) sugiere que la inteligencia se manifiesta de forma múltiple.

e) El modelo de Cohn su definición de superdotado está basada en los niveles del factor “g”, partiendo del modelo jerárquico de Vernon.

*** Modelos basados en el rendimiento.**

El talento es una expresión superior del rendimiento en un área determinada del conocimiento.

Podemos incluir en esta categoría:

a)El modelo de Renzulli (1978) propone la teoría de los Tres Anillos, describiendo la sobredotación como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos:

- Saber,
- Capacidad general por encima de la media,
- Altos niveles de implicación en la tarea y
- Elevada creatividad.

b) El modelo de Mönks (1992) asume la concepción de la sobredotación de los Tres Anillos de Renzulli y la amplía incluyendo la dimensión evolutiva y los marcos sociales específicos del colegio, los compañeros y la familia.

c) El modelo de Feldhusen (1992) considera que existen una serie de habilidades determinadas por los genes que emergen prematuramente y que se nutren de experiencias familiares, escolares y sociales.

d) Se puede incluir aquí también el modelo de Gagné (1991), pues este autor diferencia entre las competencias que muestra el alumno superdotado y el rendimiento que manifiesta el alumno talentoso.

*** Modelos basados en componentes cognitivos**

a)Sternberg y Davidson (1985) son los grandes representantes de este modelo. Se centran en los procesos cognitivos en la elaboración de la información y analizan los metacomponentes de la inteligencia en la denominada Teoría Triárquica de la Inteligencia. Ésta pretende definir la inteligencia mediante tres subcategorías (individual, experiencial y contextual).

b) El modelo de Borkowski y Peck (1986) subraya la importancia de componentes y estrategias metacognitivas.

c) El modelo de Jackson y Butterfield (1986) también considera los componentes cognitivos, aunque son más partidarios de estudiar los rendimientos actuales de los alumnos sobredotados más que esas capacidades potenciales que éstos aún no han manifestado en ninguna realización.

*** Modelos socioculturales**

Dentro de estos modelos podemos mencionar el de Tannenbaum (1986) y el de Mönks (1992).

a) El modelo de Tannenbaum ha planteado una definición psicosocial de la sobredotación y la concibe como la conjunción de cinco factores que influyen en el rendimiento superior: capacidad general (Factor "g"), o la inteligencia general que miden los tests, habilidades específicas, factores no intelectuales (fuerza personal, motivación, voluntad para hacer sacrificios, autoconcepto), influjos ambientales (hogar, colegio, comunidad), que proporcionan estímulo y apoyo y el factor suerte o circunstancias imprevistas que ofrecen oportunidades para que aflore el potencial excepcional.

b) El modelo de Mönks (1992), como hemos dicho, hace suyo el modelo de Renzulli, añadiéndole la tríada social: contexto familiar, escolar y núcleo de amigos. En su opinión en el desarrollo de la elevada capacidad además de la personalidad del alumno influye el ambiente que le rodea. Así un ambiente adecuado proporcionará al estudiante autoconfianza, responsabilidad, interdependencia e interés por el aprendizaje.

c) También podríamos incluir aquí a otros autores que hacen énfasis en la importancia de los diferentes contextos en el comportamiento del sobredotado como Csikszentmihalyi y Robinson (1986) y Albert y Runco (1986).

*** Otros Modelos**

a) Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento de Gagné formulado inicialmente en 1991, pero posteriormente modificado por el autor en 2000. En éste se realiza una sutil distinción entre superdotación (aptitudes y competencias) y talento (rendimiento). La superdotación la define como “la competencia que está claramente por encima de la media en uno o más dominios de la aptitud humana” y el talento como “el rendimiento que se sitúa claramente por encima de la media en uno o más campos de la actividad humana (Gagné, 1991).

b) Modelo Global de la Superdotación de Pérez y Díaz (1995) se sintetiza en los siguientes puntos:

    1. Retoma las propuesta de Renzulli,
    2. Distingue siete núcleos de capacidad: matemática, lingüística, espacial, motriz, musical, artística e interpersonal,
    3. Reconoce las diferencias en los estilos intelectuales y las formas de autogobierno mental según Sternberg,
    4. Incorpora la idea de inteligencia fluida y cristalizada, que denomina “probable” y “posible”, respectivamente,
    5. Tiene en cuenta el contexto: escuela, familia y entorno socioeconómico, y
    6. Considera factores de personalidad como el auto-conocimiento y el autocontrol.

c) Modelo explicativo de la superdotación de Prieto y colaboradores (1997). Este modelo abarca cuatro componentes:

    1. Altas Habilidades que incluye la capacidad intelectual general y las habilidades específicas,
    2. Capacidad de manejo del conocimiento en dominios generales y particulares de contenido de manera cualitativa y cuantitativa,
    3. Factores de personalidad en el que incluye las habilidades inter e intrapersonales, y
    4. Ambiente.

Según este modelo cada componente está presente de forma distinta en cada sujeto y lleva a precisar si éste es superdotado, talentoso, experto o creativo. El criterio es que se den niveles mínimos de todos o de la mayor parte de ellos. Éstos se combinan entre sí de forma interactiva y las influencias entre ellos son recíprocas y no sólo sumativas.

d) Modelo evolutivo global e integrador explicativo de la buena dotación intelectual de Hume (2000). Considera que el modelo de individuo intelectualmente bien dotado debe estar respaldado y derivarse de una teoría sobre la inteligencia. Este modelo se fundamenta en la teoría que concibe la inteligencia como un potencial biopsicológico que se va actualizando a lo largo de la vida.

3.3-Interacciones e Influencias de los factores socioeconómicos y culturales sobre la educación.

Los estudios que ven en causas socioeconómicas y/o culturales el origen de las desigualdades en los rendimientos de los estudiantes no son muy abundantes y, por lo tanto, la importancia del efecto que puedan tener los valores subtendidos por el núcleo familiar y el entorno de socialización del alumno no ha sido suficientemente estudiado. Sin embargo, en las sociedades modernas, ciertas variables tanto sociales como económicas o culturales tienen una influencia cada vez mayor sobre el rendimiento académico del alumno. Podemos considerar por ejemplo:

- La situación económica de la familia
- El nivel de estudios de los padres y/o de los miembros del entorno familiar próximo
- El interés manifestado por los padres por la escolarización del hijo

- La coyuntura del mercado laboral y las perspectivas de empleo así como las "realidades laborales" del entorno familiar
- El tipo de trabajo realizado por los padres
- La dedicación de los padres (tiempo de permanencia en casa)
- Existencia de problemas en el seno de la familia
    - Problemas de adicciones (Drogas – Ludopatías – otros tipos)
    - Separaciones , Divorcios y otros desencuentros
    - Malos tratos
    - Problemas Psicológicos y otros trastornos

¿ De qué forma actúan estas variables sobre la educación del individuo?

Vamos a intentar analizarlo de forma sucinta. Empecemos por categorizar los efectos de las carencias económicas sobre la educación. La alimentación constituye la necesidad básica de todo ser humano y su satisfacción va ligada a un continuo flujo de consumo alimenticio. Los demás servicios que requiere el hombre para satisfacer sus necesidades, digamos sociales, están proporcionados por los stocks.

Generalmente, cuando se habla de miseria se piensa en la circulación de los flujos alimenticios, ya que es la base sobre la que descansan otros flujos y la necesidad básica de salud. Si queremos medir el nivel de miseria de una determinada población, nos fijaremos en un mínimo de flujos nutritivos necesarios para mantener un nivel determinado de salud, capaz de permitir al ser humano desarrollar , con satisfacción y eficacia , las actividades propias del medio en el cual vive. En una situación de miseria, está claro que lo más importante es la supervivencia y la educación queda relegada a un plano inferior. En las sociedades organizadas, esta situación queda prácticamente extinguida o relegada al plano de la indigencia por trastornos sociales.

Para funcionar y adaptarse a la sociedad en la que vive, el individuo necesita poder adquirir un nivel mínimo de flujos nutritivos, en un sistema de mercado, lo que requiere un determinado nivel de renta , al que se suele llamar "límite de pobreza". Esta situación se puede entender en función de la circulación de flujos y de stocks.[3]

Hablaremos de miseria cuando el problema consiste en una carencia de flujos, reservando el término de privación para los casos en que existe una carencia de stocks, utilizando el término de pobreza para referirnos a uno o ambos tipos de carencia.

Decíamos antes que la miseria era una insuficiencia de flujos y la privación de stocks y que en ambos casos el individuo afectado tiene un funcionamiento social inadecuado. Cuando hablamos de pobreza, nos damos cuenta de que es un fenómeno no estático, es dinámico; una carencia de stocks puede desembocar en una carencia de flujos y conducir a una deterioración del funcionamiento social del individuo afectado. De esta forma, puede bastar el término pobreza para referirnos indistintamente a la miseria o a la privación. Nos encontramos por lo tanto con una estructura dinámica que atrapa al individuo y a su "círculo dependiente" impidiéndoles acceder a mejores niveles de renta, de educación, de vida.

[3] Si un individuo dispone de un flujo de bienes alimenticios y de una cantidad de stocks suficientes, sus necesidades se encontrarán satisfechas y su funcionamiento social se considerará satisfactorio; en el caso contrario, sus necesidades no están satisfechas y se dirá de él que se encuentra en la pobreza. Tal carencia puede ser de flujo o de stocks o bien de ambos elementos ...
Dudley Jackson (1974), Análisis económico de la pobreza, Vicens Vives

La influencia que pueden tener ciertos fenómenos sociales o socioeconómicos sobre el individuo y su entorno inciden en su adaptación social y, en su educación. La pobreza tiene una influencia sobre el rendimiento escolar de un individuo. En toda sociedad moderna, el "Estado de Bienestar" intenta minimizar dichos efectos ofreciendo alternativas a los afectados, orientándoles y apoyándoles.

Quedaría también por incluir la influencia de los demás factores que interaccionan con los citados en el diagrama anterior:

- La situación económica de la familia
- El nivel de estudios de los padres y/o de los miembros del entorno familiar próximo
- El interés manifestado por los padres por la escolarización del hijo
- La coyuntura del mercado laboral y las perspectivas de empleo así como las "realidades laborales" del entorno familiar
- El tipo de trabajo realizado por los padres
- La dedicación de los padres (tiempo de permanencia en casa)
- Existencia de problemas en el seno de la familia
    - Problemas de adicciones (Drogas – Juegos – otros tipos)
    - Separaciones , Divorcios y otros desencuentros
    - Malos tratos
    - Problemas Psicológicos y otros trastornos

¿Pueden estos factores influir sobre la escolaridad o el rendimiento académico de los alumnos talentosos ?

3.4- Características y factores que influyen en el rendimiento académico.

La existencia de los factores económicos, sociales o culturales, por sí solos no justifican una situación de fracaso o de éxito académico. Sabemos que entran en juego muchos factores externos que pueden tener que ver con la red de interacciones que se ejercen entre el sujeto que aprende y el contexto en el que se desarrolla su aprendizaje (Bourdieu, 1997, J. Palacios 1998).

Según Bourdieu (1997), citado por Téllez Jiménez (Capital cultural, escuela y espacio social), el estudiante, en la construcción de su éxito académico, asume percepciones, actitudes, valoraciones o desvaloraciones sobre la educación, la escuela y sobre sí mismo desde el contexto social al que pertenece y, desde ahí, dirige y construye su empeño escolar, asume e interpreta las prácticas educativas para dar sentido a sus inquietudes, intereses y concepciones. Construye así su relación con el medio académico y elabora sobre ello su código de éxito.

Según Palacios (1998), el entorno familiar (por lo tanto los valores contextuales que rigen el entramada de relaciones) influye en la relación del estudiante con el éxito académico en una serie de hechos, actos, valoraciones, hábitos que clasifica de la forma siguiente:

1- Organización de la vida cotidiana y establecimiento de rutinas: Disponibilidad de espacio para el estudio y de tiempo de dedicación al estudio; Buenos hábitos y rutinas (tiempo de TV, lectura, música, cultura); Buena gestión de las tensiones familiares.
2- La estimulación que aporta la familia: Cultura del esfuerzo, Respeto a los

demás, Sentido de la responsabilidad, Dedicación adecuada a cada tarea realizada.

3- La motivación por aprender: Importancia de los estudios en la vida, Capacidad para hacer frente al tedio o al fracaso.
4- La capacidad de ajustar las expectativas de éxito a las capacidades y posibilidades del estudiante: Capacidad para saber sacar lo mejor del estudiante sin traumatizarle en los casos en los cuales el esfuerzo no conduzca al resultado esperado.
5- La supervisión por parte de los padres de las experiencias que el estudiante está teniendo en el ámbito educativo y concretamente en el ambiente del centro educativo.
6- Las relaciones que establece la familia con el centro educativo.

La transformación de la sociedad del siglo XXI deja cada vez menos espacio para el cumplimiento de estas pautas. Problemas de pobreza en algunas familias o problemas culturales o simplemente trabas administrativas en casos de alumnos de procedencia extranjera que limita la permanencia o el vínculo del estudiante al centro educativo. Problemas en el seno mismo de las familias que impiden por ejemplo que los estudiantes aun disponiendo de una calidad de vida muy elevada no pueden tener los estímulos por parte de la familia, etc. El estudiante, en una perspectiva de relación exitosa en su vida académica, traslada al mundo educativo todos los conflictos personales, habidos en sus diferentes entornos de socialización.

Una de las primeras observaciones a realizar es que el Alumno con Éxito Académico es aquél que, utilizando de forma adecuada sus capacidades cognitivas , es capaz de minimizar la influencia de los factores negativos sobre su aprendizaje. Dicho de otro modo, el "Alumno de Alto Rendimiento Académico", el "Alumno con Éxito Académico" es el que se adapta a la estructura educativa de forma óptima y es capaz por lo tanto de optimizar los diferentes factores que influyen en su educación:

- Factores Ambientales
- Factores Personales
- Factores Culturales
- Factores Afectivos
- Factores Sociales
- Factores Cognitivos

El estudiante con "Éxito Académico" supera (aunque sea de forma aparente, quedando los conflictos a nivel interno) todos estos problemas para tener una vida académica exitosa. Lo que se ha observado es el hecho que se logra el éxito académico y se desarrolla el talento en los casos de estudiantes de familias con medios suficientes y que se mueven en un ambiente favorecido (Bloom, 1985 – Developing Talent in Young People).

3.5- El proceso Enseñanza-Aprendizaje de las matemáticas - Enfoques

No se puede separar el aprendizaje de las matemáticas del proceso de aprendizaje. Por eso, dentro del proceso educativo, las relaciones enseñante-enseñado (o bien maestro-discípulo, profesor-alumno), son fundamentales para alcanzar las metas fijadas. Sobre ello se articula todo el edificio educativo. Según Piaget, *la meta principal de la* *educación es crear hombres que sean capaces de hacer cosas nuevas no simplemente de repetir lo que otras generaciones han hecho; hombres que sean creativos, inventores y descubridores. La segunda meta de la educación es la de formar mentes que sean críticas, que puedan verificar y no aceptar todo lo que se les dijo o se les ofreció.* Para lograrlo, el aprendizaje, por ejemplo, no puede ser una simple reproducción de los contenidos enseñados sino que ha de implicar un complejo juego de construcción-reconstrucción de saberes, de procedimientos por parte del que aprende, y, en este proceso, las aportaciones del enseñado-aprendiz-alumno son decisivos. Eso es lo que posibilitara que el resultado del proceso educativo en el que tiene lugar la relación enseñanza-aprendizaje conduzca a una situación nueva que mejore la situación inicial.

Habiéndose superado la idea del aprendizaje como simple "adquisición de conocimientos", haciendo de la memorización y de la repetición los pilares de la adquisición de datos, hablaremos del aprendizaje como un "aspecto universal y necesario del proceso de desarrollo culturalmente organizado y específicamente humano de las funciones Psicológicas" (Vygotski, 1979). No todo el mundo aprende de la misma forma y el aprendizaje está condicionado por muchas variables individuales y/o externas. Según Sánchez Huete (1998), el aprendizaje es "un proceso de constrcucción del conocimiento mediante interacciones del medio externo con las ideas previas, los estilos cognitivos (modelos de actuación o características peculiares de la persona) y la propia capacidad de memoria a corto plazo (capacidad mental)". Entonces, no todo aprende de la misma forma y todos no deberían ser enseñados d ela misma forma. Cada uno tiene su estilo de aprendizaje y por eso, su rendimiento no se verá modificado que si es enseñado según su propio estilo de aprendizaje.

Abundan modelos y teorías del aprendizaje, de la enseñanza, en el campo del conocimiento en general. Permiten tener una idea clara sobre modelos de enseñanza, sobre estilos de aprendizaje, sobre las formas utilizadas por el individuo para aprender, conocer y recordar la información. Piaget, Bruner, Ausubel, Novak, Mayer Vigotsky, Dewey y más cerca de nosotros Norman, Linsay son algunos ejemplos. Los diferentes modelos teóricos sobre el aprendizaje han intentado explicar los diferentes procesos y mecanismos que tienen lugar durante el aprendizaje humano. Dichos procesos, que pueden proceder de fuentes diversas (personales, interpersonales, intrapersonales, tecnológicos, afectivos, sociales, culturales) pueden ser favorecedores del aprendizaje o pueden dificultarlo. Han sido muchas las teorías que han intentado describir, explicitar o simplemente explicar dichos fenómenos. Ya en el tema I de este trabajo, hablamos de la importancia de las interacciones en la educación, en el aprendizaje. Sin embargo, no insistimos sobre los elementos fundamentales que intervenían o sobre las teorías que soportaban el aprendizaje ni sobre la forma de estructurar la instrucción para que se produjers aprendizaje. Hablemos pues ahora de los enfoques modernos del aprendizaje y hagamos un recorrido rápido a través de los que pueden interesar en el marco de este trabajo.

En este sentido, podemos considerar los siguientes enfoques psicopedagógicos:

1- El enfoque conductista
2- El enfoque sociocultural
3- El enfoque cognitivo
4- El enfoque constructivista

Para establecer una tabla comparativa, podemos fijar como Elementos Definitorios para poder establecer una clasificación basada sobre el diseño de la instrucción:

1- Fines educativos perseguidos
2- Factores conceptuales que influyen sobre el aprendizaje
3- El papel reservado al docente
4- El trato reservado al individuo que aprende
5- Las pautas de enseñanza características
6- Los factores motivacionales
7- Los criterios de evaluación privilegiados
8- Representantes más conocidos

Hemos fijado estos elementos definitorios para poder establecer los matices o las grandes diferencias que se pueden dar en las "prescripciones instruccionales" de cada perspectiva teórica. Pretendemos, a través de estas tablas comparativas, determinar las diferencias que ciertos investigadores (Schunk, 1991) han establecido entorno a las cinco preguntas siguientes:

1- ¿ Cómo ocurre el aprendizaje ?
2- ¿ Qué factores influyen en el aprendizaje?
3- Qué papel juega la memoria en el aprendizaje?
4- ¿Cómo ocurre la transferencia?
5- ¿Cuáles son los tipos de aprendizaje que se explican mejor con la teoría descrita?

ENFOQUE CONDUCTISTA	
Elementos definitorios	**Descripción asociada**
Fines educativos perseguidos	- Obtener del estudiante una respuesta "esperada" frente a un estímulo ambiental - Controlar las respuestas conductuales del individuo debido a una programación instruccional adecuada. - Se iguala "Aprendizaje" y "Cambio de conducta observable". Se espera por lo tanto que el aprendizaje logre un cambio de conducta observable
Factores conceptuales que influyen sobre el aprendizaje	Factores a tener en cuenta: la memoria, las condiciones ambientales, los factores ambientales, la transferencia. Las condiciones ambientales juegan un papel fundamental en la instrucción. Los conductistas evalúan los estudiantes para determinar en qué punto comenzar la instrucción, así como para determinar cuáles refuerzos son más efectivos para un estudiante en particular. El factor más crítico, sin embargo, es el ordenamiento del estímulo y sus consecuencias dentro del medio ambiente. **Otros factores:** 1-La memoria es utilizada de forma indirecta. El uso de la práctica periódica o la revisión sirve para mantener al estudiante listo para responder. Por lo tanto, el olvido es la "falta de uso" de una respuesta al pasar el tiempo. 2- La transferencia es un resultado de la generalización. Las situaciones que presentan características similares o idénticas permiten que las conductas se transfieran a través de elementos comunes.
Papel reservado al docente y pautas de enseñanza características	- Dirige la instrucción, siguiendo las pautas prefijadas. El educador ha de: 1- Determinar como organizar las situaciones de práctica para provocar la respuesta instruccional adecuada. 2- Encontrar la secuencia de estímulos deseables para hallar las respuestas acertadas. 3- Organizar y evaluar tanto los factores ambientales como las condiciones ambientales para conseguir la instrucción. El aprendizaje se logra por "Imitación", por "Descubrimiento", por "Incitación".
Trato reservado al estudiante	- El estudiante es "instruido". Su papel es puramente de receptor, a veces pasivo, otras veces activo.
Factores Motivacionales	- Proviene de los mecanismos establecidos por el "Provocador del Aprendizaje". Es por lo tanto totalmente externo al individuo en situación de aprendizaje.
Criterios de evaluación privilegiados	- El aprendizaje se logra cuando se demuestra o se exhibe una respuesta adecuada frente a un estímulo ambiental específico. - Se privilegia por lo tanto la evaluación referida a criterios en vez de normas. La evaluación tiene como función la identificación de la problemática socioeducativa del alumno para programar luego la siguiente secuencia instruccional.
Representantes más conocidos	- Pavlov – Watson – Thorndike (Los precursores) - Tolman – Hull – Skinner - Bandura

Tabla 1 – T3

ENFOQUE SOCIOCULTURAL	
Elementos definitorios	**Descripción asociada**
Fines educativos perseguidos	- Promover el desarrollo sociocultural del alumno. El alumno evoluciona dentro de un contexto sociocultural, los procesos de desarrollo no ocurren de forma independiente de los procesos educacionales:" El desarrollo intelectual del estudiante no puede comprenderse sin una referencia al mundo social en el que el ser humano está inmerso. El desarrollo debe ser explicado no sólo como algo que tiene lugar apoyado socialmente, mediante la interacción con los otros, sino también como algo que implica el desarrollo de una capacidad que se relaciona con instrumentos que mediatizan la actividad intelectual"
Factores conceptuales que influyen sobre el aprendizaje	Vigotsky, el principal representante de este enfoque, considera el contexto sociocultural como aquello que llega a ser accesible para el individuo a través de la interacción social con otros miembros de la sociedad, que conocen mejor las destrezas e instrumentos intelectuales, y afirma que, la interacción del niño con miembros más competentes de su grupo social es una característica esencial del desarrollo cognitivo. Dos factores conceptuales influyen en el aprendizaje: - Las interacciones - La Zona de desarrollo Próximo.
Papel reservado al docente y pautas de enseñanza Características	- Es un experto que guía y ayuda a mediatizar los saberes. Su papel, importantísimo al principio, directivo, pasa a grados menos importantes posteriormente.
Trato reservado al estudiante	Las diferentes interacciones sociales, culturales, educativos hacen que el aprendizaje se logre mediante complejos fenómenos de internalización.
Factores Motivacionales	Se deja que las interacciones provoquen por si solas la motivación por aprender.
Criterios de evaluación privilegiados	Basados sobre la elaboración de buenos productos de competencia cognitiva. Uso de tests y de pruebas de rendimiento. Se eval.an procesos y productos.
Representantes más conocidos	- Vygotski – Luria – Leontiev – Bozhovich - Kharkov – Galperin – Zinchenko – Zaporozhetz - Rubinstein – Wallon - Luria - Doyle

Tabla 2 – T3

ENFOQUE COGNITIVO	
Elementos definitorios	**Descripción asociada**
Fines educativos perseguidos	Los fines perseguidos por la enseñanza, según este enfoque, consisten en: - Desarrollar y consolidar los procesos cognitivos de los estudiantes. - Aprender a aprender, - Autorregulación del conocimiento
Factores conceptuales que influyen sobre el aprendizaje	- Las condiciones ambientales juegan un papel importante en la facilitación del aprendizaje. -Se guía el aprendizaje con: explicaciones instruccionales, demostraciones, ejemplos demostrativos, selección de contraejemplos correspondientes. -Hay también retroalimentación correctiva. *"No todo el aprendizaje resulta de las estrategias instruccionales y de las condiciones ambientales. Elementos claves adicionales incluyen la manera como los estudiantes atienden a, codifican, transforman, ensayan, almacenan y localizan la información. Se considera que los pensamientos, las creencias, las actitudes y los valores también influyen en el proceso de aprendizaje"* (Winne, 1985).
Papel reservado al docente y pautas de enseñanza características	El aprendizaje tiene lugar cuando la información es almacenada en la memoria de forma organizada y significativa. La memoria juega por lo tanto, de forma indirecta, un papel importante en el proceso de aprendizaje. El docente es el responsable de que el estudiante realice la organización de la información de forma óptima. El docente es pues un mediador del aprendizaje según este enfoque.
Trato reservado al estudiante	El estudiante es un participante muy activo en su proceso de aprendizaje.
Factores Motivacionales	Se anima el estudiante a utilizar las estrategias instruccionales adecuadas. No hay ningún interés por los procesos socioafectivos.
Criterios de evaluación privilegiados	Basados sobre el logro de buenas habilidades de pensamiento y de razonamiento del estudiante.
Representantes más conocidos	Corriente ecléctica: Feuerstein . Stenberg – Gardner – Gagné – Mayer – Brown. Corriente cibernética: Turing – Newel – Simon – Anderson Coriente conexionista: Fodor – Rumelhart.

Tabla 3 – T3

ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA	
Elementos definitorios	**Descripción asociada**
Fines educativos perseguidos	- Desarrollar el espíritu crítico del estudiante y facilitar así la formación de mentes que tiendan a pasar toda información por el filtro del análisis antes de darla por válida. El nivel de rigor alcanzado en el análisis dependerá del tipo de alumno. - Potenciar el desarrollo mental del alumno y promover su autonomía. - Fomentar y consolidar en el alumno la “construcción significativa de conocimiento”. Construye su Conocimiento, no Adquiere el conocimiento.
Factores conceptuales que influyen sobre el aprendizaje	- La meta de la instrucción es describir las tareas con precisión y no es definir la estructura del aprendizaje requerido para lograr una tarea. - Lo que conocemos del mundo real nace de la interpretación de nuestras experiencias - Los humanos *crean* significados, no los *adquieren*. - Los estudiantes no transfieren el conocimiento del mundo externo hacia su memoria; más bien construyen interpretaciones personales del mundo basados en las experiencias e interacciones individuales. - Las interacciones entre los factores ambientales y el estudiante crean el conocimiento - La memoria juega un papel secundario
Papel reservado al docente y pautas de enseñanza características	-Guía el aprendizaje del estudiante. Le instruye sobre la forma de construir significados. - Acompaña el estudiante en el proceso de construcción de conocimiento. - No premia el esfuerzo o el éxito del estudiante ni tampoco castiga o penaliza los fracasos habidos en el camino recorrido por el individuo en su aprendizaje. - Facilita la elaboración de estrategias personales del estudiante en su aprendizaje. - Formarle e Informarle sobre como conducir, evaluar esas construcciones de forma efectiva y eficiente - Diseñar y ajustar experiencias para el estudiante de forma que la información contextualizada pueda experimentarse de forma auténtica y coherente.
Trato reservado al estudiante	- Participa activamente y se siente comprometido en la construcción de su propio conocimiento. - Aprende también a partir de sus equivocaciones. - Utiliza sus confusiones, sus errores para adquirir destrezas, procedimientos. - El estudiante elabora e interpreta la información suministrada (Duffy y Jonassen 1991). - El significado lo crea el estudiante: los objetivos de aprendizaje no están predeterminados, como tampoco la instrucción se prediseña
Factores Motivacionales	- Son factores elaborados por el propio estudiante. - Aprender ha de ser un proceso satisfactorio para el alumno. Ha de colmar sus anhelos. Las informaciones, los contenidos académicos han de encajar en su proyecto personal de formación. - A los estudiantes se les motiva a construir su propia comprensión y luego validar, a través de negociaciones sociales, las nuevas perspectivas surgidas.
Criterios de evaluación privilegiados	- Se interesa por los cambios originados tanto a nivel conceptual como a nivel socioafectivo. - El tradicional “examen” pierde peso en cuanto a método de evaluación del aprendizaje frente a otros sistemas de evaluación, mucho más cualitativos. - Importancia de los métodos de Autoevaluación, de análisis de errores, métodos introspectivos (pensar en voz alta, cuadernos de trabajo, etc).
Representantes más conocidos	- Piaget – Inhelder – Kohlberg - Nelly – Goodman – Ausubel – Bruner - Flavell – Lerner – Novak – Hanesian.

Tabla 4 – T3

Puede resultar a veces gratificante para el docente y provechoso para el alumno, apoyarse en nuevos artificios de enseñanza de las matemáticas, concretamente mediante la utilización de :

- Factores lúdicos
- Cuentos matemáticos
- Enunciados “afables”
- Enigmas.

Con el fin de conseguir que el contenido del aprendizaje se vuelva “significativo” y se acerque a la estructura cognoscitiva del alumno. Centrándonos en los autores citados, para darse y consolidarse el proceso de aprendizaje, se han de dar las condiciones siguientes:

1- El receptor ha de estar dispuesto a realizar un aprendizaje significativo.
2- La información ha de llegar al receptor de forma ordenada y lógica tanto si la recibe sin esfuerzo por su parte como si la ha de buscar por sí mismo.
3- El receptor ha de disponer de una base de conocimientos memorizados de forma comprensiva, con suficientes elementos ralacionables con la nueva información.
4- El receptor ha de modificar sus esquemas de conocimiento o construirse nuevos esquemas como resultado de la integración de nuevos contenidos y, los ha de memorizar de forma comprensiva para ser utilizados cuando la situación lo requiera.

Sin embargo, es imprescindible que existan, de forma consolidada, ciertos factores subjetivos en el sujeto aprendiz que son:

- La Motivación

- El Deseo de Saber

- El Deseo de Aprender

- El Deseo de Entender

- El Deseo de Conocer y de Dominar un tema nuevo o de acercarse a nuevos conocimientos o nuevas formas de enfocar un saber concreto (curiosidad).

La enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo principal el de facilitar, para un alumno, el paso de una situación de DESCONOCEDOR DE UN SABER a la de POSEEDOR DE DICHO SABER. Sin embargo, el problema y la ventaja a la vez, es que el que aprende, el alumno, no parte de una situación inicial de completo neófito. Parte generalmente de unos conocimientos previos que pueden haberse adquirido por métodos formales o, a veces, los procesos de aprendizaje previo se han consolidado o bien se han adquirido por métodos poco formales o completamente informales. La situación no corresponde pues en realidad en absoluto al símil del "Vaso Lleno – Vaso Vacío" que suelen utilizar algunos educadores y que consiste en una transmisión pura y simple de conocimientos. La situación corresponde al diagrama siguiente:

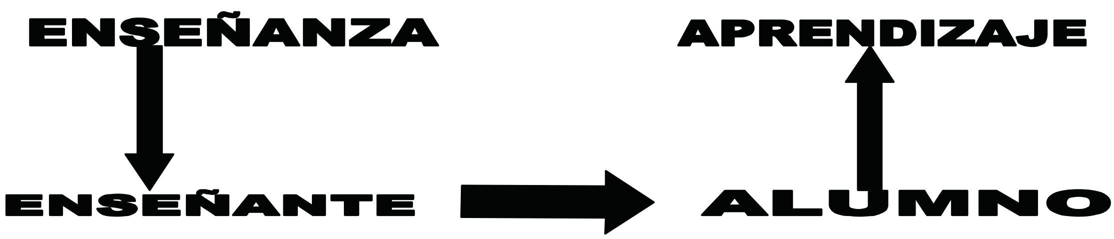


Figura 1 – T3

La situación no es tan evidente como lo indica la figura anterior ya que entre el enseñante y el alumno, se establece una serie de conexiones y se crea toda una red de relaciones que facilita o dificulta el acceso del alumno a la situación de POSEEDOR DEL SABER.

Partimos de un supuesto que no siempre se cumple:

El alumno reúne las condiciones personales y ambientales favorables al aprendizaje. Es decir, tiene los rasgos cognitivos adecuados, sus condiciones ambientales y afectivos son los adecuados. O sea, asumimos, sin analizarlo previamente, que el alumno quiere aprender y tiene las condiciones para ello.

Por lo tanto, entre la "Enseñanza" y el "Aprendizaje", intervienen, entre los diferentes actores toda una serie de "Acontecimientos", se dan toda una serie de "Hechos" que pueden Facilitar o Dificultar, Mermar o Potenciar, Fragilizar o Reforzar el proceso de aprendizaje del alumno.

La descripción completa del proceso "Eneñanza-Aprendizaje" de las matemáticas con las diferentes influencias que existen podría quedar ejemplificada de la forma explicada en el diagrama de la página siguiente.

Cuadro descriptivo de los diferentes procesos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje:

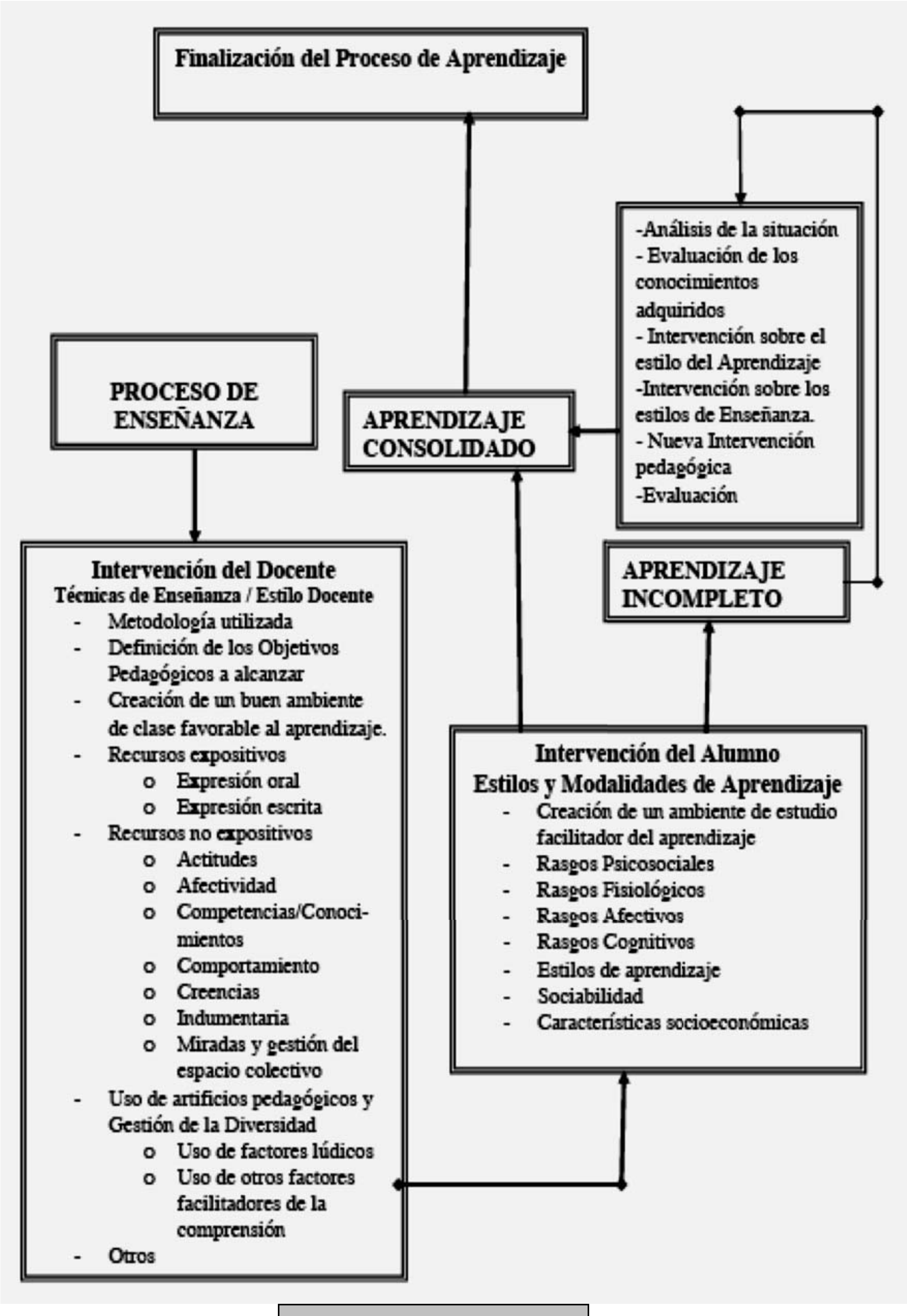

Finalización del Proceso de Aprendizaje
-Análisis de la situación
- Evaluación de los conocimientos adquiridos
- Intervención sobre el estilo del Aprendizaje
-Intervención sobre los estilos de Enseñanza.
- Nueva Intervención pedagógica
-Evaluación
PROCESO DE ENSEÑANZA
APRENDIZAJE CONSOLIDADO
APRENDIZAJE INCOMPLETO
Intervención del Docente
Técnicas de Enseñanza / Estilo Docente
- Metodología utilizada
- Definición de los Objetivos Pedagógicos a alcanzar
- Creación de un buen ambiente de clase favorable al aprendizaje.
- Recursos expositivos
o Expresión oral
o Expresión escrita
- Recursos no expositivos
o Actitudes
o Afectividad
o Competencias/Conocimientos
o Comportamiento
o Creencias
o Indumentaria
o Miradas y gestión del espacio colectivo
- Uso de artificios pedagógicos y Gestión de la Diversidad
o Uso de factores lúdicos
o Uso de otros factores facilitadores de la comprensión
- Otros
Intervención del Alumno
Estilos y Modalidades de Aprendizaje
- Creación de un ambiente de estudio facilitador del aprendizaje
- Rasgos Psicosociales
- Rasgos Fisiológicos
- Rasgos Afectivos
- Rasgos Cognitivos
- Estilos de aprendizaje
- Sociabilidad
- Características socioeconómicas

Figura 2 – T3

3.6- Fines de la enseñanza de las matemáticas (sociales, académicas)

Cada sociedad, en diferentes momentos de su historia, de su evolución histórica, se encuentra, para hacer frente a su supervivencia, ante la obligación de decidir sobre el tipo de formación que ofrecer a sus miembros y/o sobre la forma de ofrecer dicha formación. En cada uno de estos momentos entonces, procuran conciliar las necesidades formativas, culturales, cívicas, con las necesidades sociales concretas existentes. Las metas generales de la educación se encuentran sometidas a esta condición. Por eso, todo proceso de cambio en el sistema educativo o de adaptación de los diferentes procesos formativos, generan fricciones sociales ya que han de lograr armonizarse las necesidades globales de la sociedad con los fines generales perseguidos.

La educación matemática obedece también a la misma lógica, pero las condiciones restrictivas son más claras, a pesar de la multiplicidad de criterios clasificatorios que impiden encontrar una forma única de expresarlos. Todos o casi todos nos podemos poner de acuerdo en que los objetivos básicos a alcanzar por los estudiantes de matemáticas, además de manejar con soltura las destrezas Algorítmicas son:

- Saber argumentar,
- Pensar y razonar de forma adecuada,
- Desarrollar una buena capacidad de resolver problemas,
- Saber anticipar y planificar (Inducir, Deducir)

Podemos pues considerar que haber alcanzado eso es disponer de una base formativa suficiente y eso sólo lo proporcionan las matemáticas. Además, en un mundo en el que la capacidad de relacionarse, de informarse, de comunicarse implica saber manejar símbolos, gráficos, expresiones cada vez más elaborados, una formación matemática es imprescindible para ello. A eso, habrá que añadir la capacidad para reflexionar sobre el porque de las cosas lo que obliga a desarrollar una mente abierta a la reflexión y una actitud crítica. Sin una buena educación matemática, eso no es posible.

En este sentido se han pronunciado varios investigadores tales como Krulick (1975) o Niss (1995). Sin embargo, este último se acerca más a las posturas actuales de desarrollo competencial. Hemos pasado, estos últimos años, de una enseñanza de las matemáticas que transmitía "contenidos", "conocimientos" a pretender hacer de las matemáticas una asignatura que transmita, además de contenidos, actitudes , valores, normas, todo esto englobado en un concepto más amplio : las "capacidades competenciales" del individuo para hacer de él un ciudadano útil, responsable, formado, integrado plenamente en la sociedad. En dicho modelo, el profesor "enseña" y el "alumno" "adquiere competencias". Según la Administración, las "competencias" *mobilitzen coneixements, en bona part conceptuals, però també procedimentals i normatius: són més que coneixements, però no són res sense aquests. I una gran part dels coneixements estan vinculats a divisions del saber nascudes d'una determinada tradició històrica. I sembla que així continuarà essent, si més no mentre l'organització del saber continuï distingint disciplines, i cadascuna fentse càrrec d'un àmbit o parcel·la de la realitat.*[4]

[4] Jaume Graells, Director general de l'Educació Bàsica i el Batxillerat, Cinquena Jornada d'ensenyament de les matemàtiques organitzada per FEEMCAT, XEIX I SCM Barcelona, 20 de setembre de 2008

La enseñanza de las matemáticas se ha de adecuar a las finalidades más amplias de la educación. El Currículo de Educación Secundaria Obligatoria[5], fija como finalidad de la educación : *"... aconseguir que els nois i les noies adquireixin les eines necessàries per entendre el món en què estan creixent i que els guiïn en el seu actuar; posar les bases perquè esdevinguin persones capaces d'intervenir activament i crítica en la societat plural, diversa, i en continu canvi, que els ha tocat viure. A més de desenvolupar els coneixements, capacitats, habilitats i actituds (el saber, saber fer, saber ser i saber estar) necessaris, els nois i les noies han d'aprendre a mobilitzar tots aquests recursos personals (saber actuar) per assolir la realització personal i esdevenir així persones responsables, autònomes i integrades socialment, per exercir la ciutadania activa, incorporar-se a la vida adulta de manera satisfactòria i ser capaços d'adaptar-se a noves situacions i de desenvolupar un aprenentatge permanent al llarg de la vida."*

Estas definiciones, estos desarrollos, siguen la línea establecida por el proyecto DeSeCo (2005) de Definición y Selección de Competencias en el que se admite como definición de competencia "La capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz".

Dentro del "marco de competencias", figuran unas cuantas que deberían permitir orientar la enseñanza, identificando los saberes, los contenidos imprescindibles para la formación básica de un individuo. Se define entonces el "carácter clave de una competencia" o "carácter básico de una competencia" identificándola como

[5] Currículum educació secundària obligatòria – Decret 143/2007 DOGC núm. 4915

“competencia básica” cuando resulta imprescindible para “todo individuo”, independientemente de sus condiciones personales o históricas. De allí, la necesidad para la Unión Europea de definir, ya en el 2006, y de recomendar a sus miembros la adopción de la siguiente definición de competencia básica:

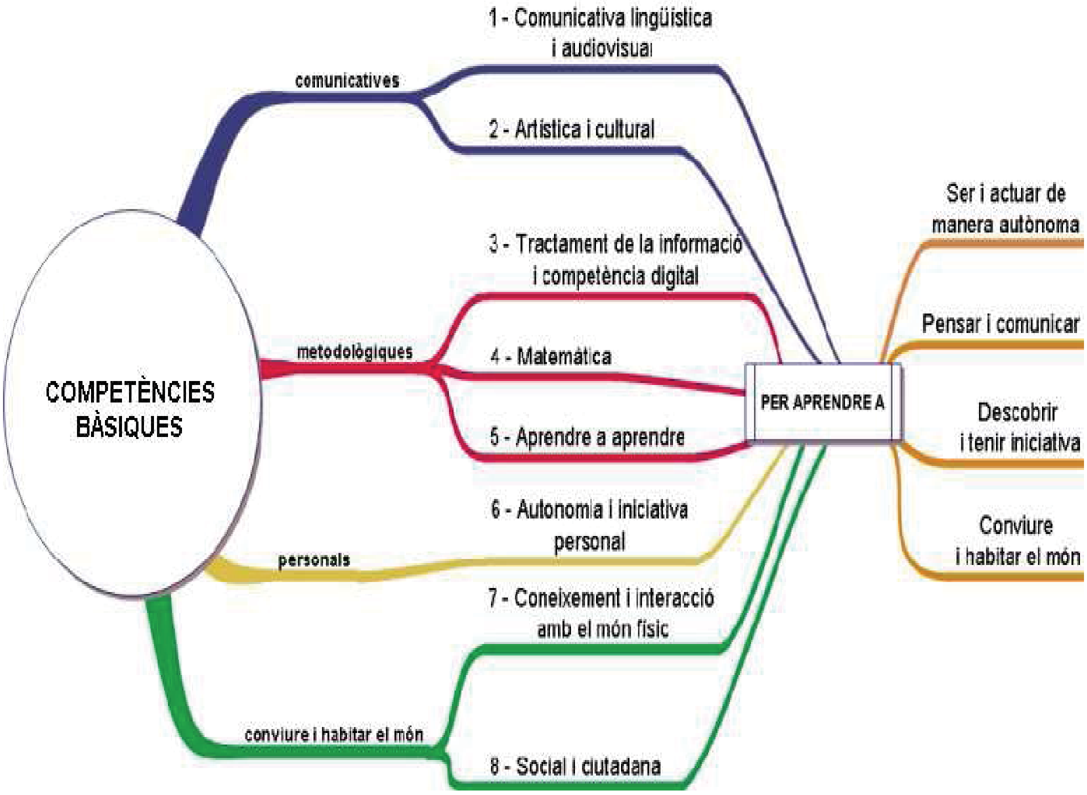
“Una competencia básica es una combinación de destrezas, conocimientos (de tipo conceptual) y actitudes adecuadas al contexto. Toda persona las precisa para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo. Éstas competencias clave deberían haber sido desarrolladas para el final de la enseñanza o formación obligatoria, en la medida necesaria, para la vida adulta y deberían seguir desarrollándose y actualizándose como parte de un aprendizaje a lo largo de la vida.”

Como características de las competencias básicas [6]se puede señalar:

1- Incluyen una combinación de saber, habilidades y actitudes
2- Pueden ser adquiridas en todo tipo de contextos
3- Son transferibles (aplicables en varias situaciones y contextos)
4- Son multifuncionales (pueden ser utilizadas para conseguir múltiples objetivos)
5- Deben proveer una respuesta adecuada a los requisitos de situaciones o trabajos específicos
6- Constituyen, para todos, el prerrequisito para un adecuado desempeño de su vida personal y laboral y la base de los aprendizajes posteriores.

[6] Megía Cuélliga, Compendio de Didáctica general, Editorial CCS, 2008

La inclusión de las competencias básicas tiene, entre otras finalidades, la de integrar los diferentes aprendizajes en las distintas áreas o materias del currículo obligatorio. La figura siguiente nos permite hacernos una idea de las competencias básicas:



Extraído del Currículum de educación secundaria obligatoria

Figura 3 – T3

El desarrollo competencial está basado sobre unas asignaturas que le dan el soporte adecuado, o mejor dicho, *las áreas y materias del currículo constituyen un marco de organización concebido para alcanzar los objetivos educativos y, consecuentemente, para que los alumnos adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas y el desarrollo de ciertas* *competencias básicas.*[7]

Allí es donde pretendemos sacar lo que se espera como finalidades de las matemáticas en el caso que nos interesa. La competencia matemática facilita la obtención de otros valores, otros resultados, otros fines que los descritos e implicados como metodológicos.

Podemos comparar la definición de las características de las competencias básicas propuesta por Megía Cuélliga con lo que ofrecen los textos oficiales como objetivos a alcanzar para una adquisición completa de la "competencia matemática".

Los objetivos a alcanzar se definen como:

- Desarrollar en el individuo la habilidad para comprender, utilizar y relacionar números, símbolos, signos, operaciones y formas de expresión y de razonamiento matemático tanto para producir tipos de informaciones diversas como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos, cualitativos, espaciales de la realidad, para entender y resolver problemas y situaciones relacionados con, la vida cotidiana, el conocimiento científico, el mundo laboral y social.
- Capacitarle para el conocimiento y el manejo de los elementos matemáticos básicos tanto en situaciones reales como en simulaciones de la vida cotidiana, planteando y resolviendo correctamente los problemas presentados.
- Desarrollar en él la capacidad para poder elaborar informes y/o informaciones nuevas utilizando entes matemáticos diversos.
- Desarrollar en él el uso correcto del razonamiento. Eso es la capacidad

[7] Megía Cuélliga, Compendio de Didáctica general, Editorial CCS, 2008

de razonar, de argumentar, de analizar las ideas, de usar las informaciones correctas y desechar las incorrectas, de poder elaborar los razonamientos adecuados que le conduzca a la resolución de los problemas que se presenten o a facilitarle la obtención de información diversa para su uso posterior, expresando los resultados alcanzados con claridad y precisión.

Alcanzar completamente esta competencia, significa para el individuo, según los criterios fijados:

Que los conocimientos, las habilidades y las actitudes matemáticas se aplican de forma espontánea a una ámplia variedad de situaciones procedentes de campos diversos del saber y /o de la vida cotidiana. Esta capacidad ha de facilitar el aprendizaje futuro del individuo y ha de favorecer su participación efectiva en la vida social.

La competencia matemática es importante puesto que facilita la incorporación plena del individuo en todas las facetas de la vida social, escolar, personal. Puesto que trabajamos sobre tres modelos educativos diferentes, pensaremos en el concepto establecido por el Programa PISA. El concepto de *competencia científica* que utiliza PISA incluye actitudes y valores, además de conocimientos y destrezas. Para el programa PISA, un individuo que tenga que emplear de forma satisfactoria la matematización dentro de una gran variedad de situaciones y contextos, intra y extramatemáticos, así como en el ámbito de las ideas clave, necesita utilizar con soltura una serie de "*procesos matemáticos"* los cuales, considerados en su conjunto, y dominados en mayor o menor grado, conforman el concepto superior de competencia matemática. Los ocho procesos matemáticos que se caracterizan en PISA, son una adaptación de lo que Niss sugirió para la reforma curricular danesa (Niss, 2002) como las ocho competencias matemáticas.

¿Cuáles son estos procesos matemáticos identificados como fundamentales? ¿Cuáles son estas competencias?

1- Pensar y razonar: Plantear y reconocer preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones matemáticas; entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
2- Argumentar: Saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamientos; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos.
3- Comunicar: Entender y hacerse entender en forma oral o escrita.
4- Construcción de modelos: Estudiar los procesos de modelización (identificar, reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus procesos).
5- Plantear y resolver problemas: Plantear, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos.
6- Representar: Traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre ellas; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.

7- Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas: Decodificar, interpretar y manipular el lenguaje formal y simbólico, entender su relación con el lenguaje natural, utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

8- Utilizar material, ayudas y herramientas de apoyo: Conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TIC's) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Este cuadro (Rico y Lupiáñez,2008) nos sintetiza, de forma clara, la estructura curricular de PISA muestra :

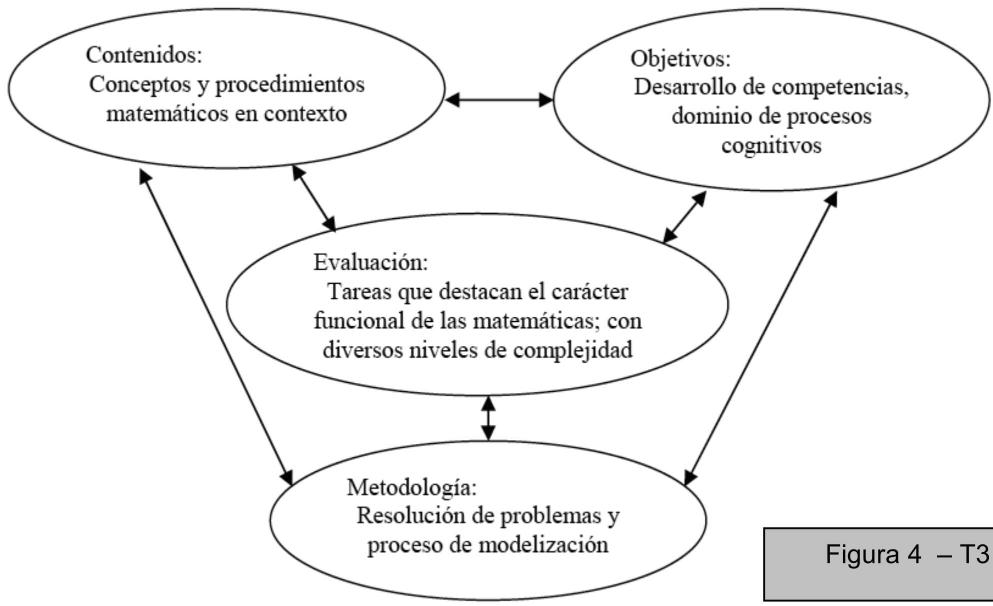


Figura 4 – T3

Así, esta competencia queda definida como: "la capacidad de emplear el conocimiento científico para identificar problemas, adquirir nuevos conocimientos, explicar fenómenos científicos y extraer conclusiones basadas en pruebas sobre cuestiones relacionadas con la ciencia. Además, comporta la comprensión de los rasgos característicos de la ciencia, entendida como un método del conocimiento y la investigación humanas, la percepción del modo en que la ciencia y la tecnología conforman nuestro entorno material, intelectual y cultural, y la disposición a implicarse en asuntos relacionados con la ciencia y con las ideas sobre la ciencia como un ciudadano reflexivo"[8] (OCDE, 2006).

El aprendizaje matemático faculta el individuo a utilizar las destrezas aprendidas, los conocimientos adquiridos. Las diferentes competencias alcanzadas le generan un potencial de conducta que ayuda a la consolidación del aprendizaje. La adquisición de competencias afecta el aprendizaje de todo estudiante. Sin embargo, el "desarrollo competencial" del alumno de alto rendimiento seguirá itinerarios totalmente diferentes tanto por su versatilidad como por su riqueza.

Para mostrar la situación, podemos utilizar este diagrama de las relaciones entre competencias, capacidades y tareas (Gómez,Lupiáñez,2007):

[8] PISA, acrónimo del *Programme for International Student Assessment* (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos), de la OCDE se inició a fines de los años 90 como un estudio comparativo, internacional y periódico del rendimiento educativo de los alumnos de 15 años, a partir de la evaluación de ciertas competencias consideradas clave, como son la competencia lectora, la matemática y la científica; estas competencias son evaluadas cada tres años. La primera convocatoria tuvo lugar en el año 2000.

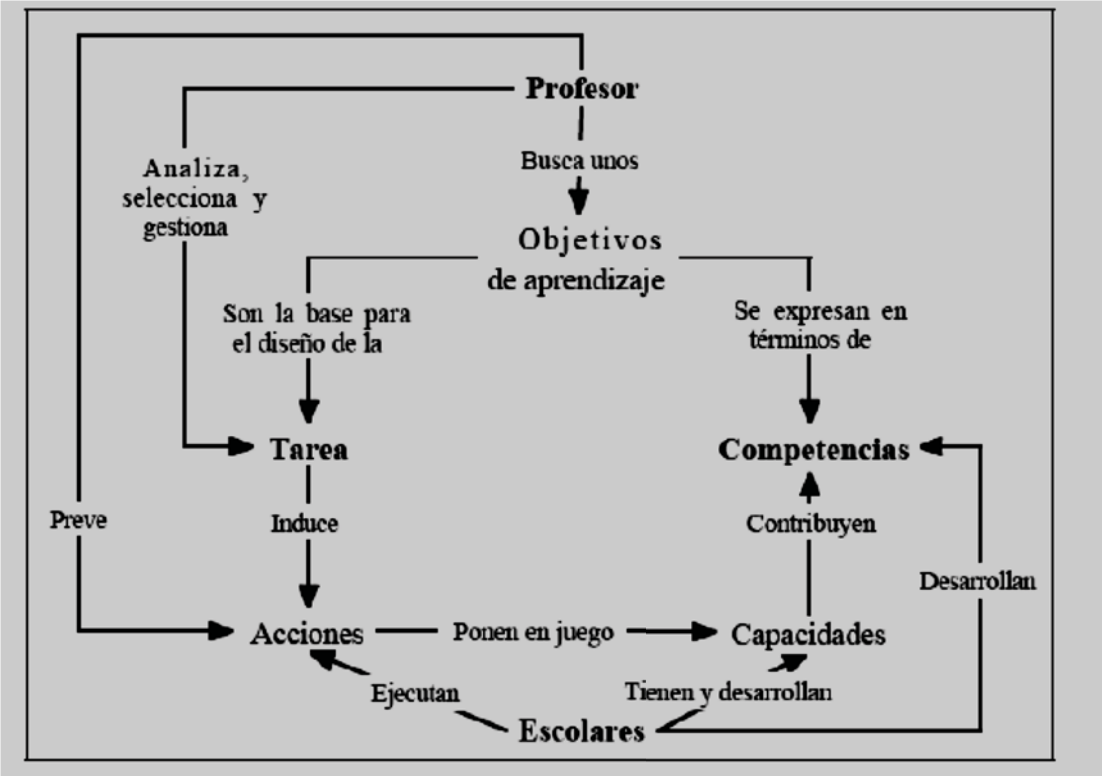


Figura 5 – T3

Estas competencias básicas de las cuales hemos hablado, sirven de base para los contenidos curriculares de los diferentes programa. Sobre ellas se elaboran los procesos de evaluación del tipo de alumno que nos interesa en este estudio y cuya calidad de razonamiento pretendemos evaluar en este trabajo.

3.7- Competencias clasificatorias de los alumnos de Alto Rendimiento.

Los resultados del informe PISA 2003 en el que se analizaba como competencia principal la "Competencia Matemática" de los alumnos de 14-15 años de los países de la OCDE, proporcionan unos resultados muy interesantes. Para lo que nos interesa en este trabajo de investigación, nos centraríamos en aquellos alumnos que trabajan en los niveles 4, 5 o 6. La descripción que hizo el Informe PISA, en 2003, recogía los puntos siguientes:

En el nivel 6 de competencias, se supone que el alumno puede conceptualizar, generalizar, utilizar la información que procede de sus propias investigaciones, y puede modelizar situaciones complejas. Es capaz de asociar informaciones de fuentes y de representaciones diversas y relacionarlas unas con otras. Puede hacer razonamientos matemáticos de nivel alto, muy elaborados y puede aplicarlos conjuntamente con operaciones matemáticas formales y simbólicas de nivel adelantado para desarrollar nuevas estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones sobre sus resultados, interpretaciones, argumentaciones, y pueden justificar porque se adecuan a las situaciones iniciales.

En el Nivel 5 el alumno puede desarrollar y trabajar con modelos adecuados a situaciones complejas, identificando limitaciones y especificando suposiciones. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas y aplicarlas a problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica utilizando habilidades de razonamiento y pensamiento amplias y complejas, representaciones asociadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales y pueden profundizar en estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus formulaciones y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

En el nivel 4 , el alumno puede trabajar de manera efectiva con modelos explícitos adecuados a situaciones concretas complejas que puedan implicar limitaciones o requieran hacer suposiciones. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluso simbólicas asociándolas directamente a aspectos de situaciones reales. Pueden utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar de manera flexible, con un cierto nivel de profundización en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

En el nivel 3 el alumno puede ejecutar procedimientos descritos de manera clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillas. Pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes d'información y hacer razonamientos de manera directa. Son capaces de desarrollar comunicaciones cortas que informan sobre sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

En el nivel 2, el alumno puede interpretar y reconocer situaciones en contextos que no requieran más que inferencia directa. Pueden conseguir información de una sola fuente y utilizar un solo tipo de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones de nivel básico. Pueden llevar a término razonamientos directas e interpretaciones literales de resultados.

En el nivel 1, el alumno puede responder preguntas que hacen referencia a contextos familiares la información relevante de los cuales está presentada de forma explícita y las preguntas están definidas de manera clara. Pueden identificar información y llevar a cabo procesos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a término acciones obvias y responder de manera inmediata a los estímulos recibidos.

Los alumnos con los cuales trabajamos se situan, tal como decíamos, en un nivel de competencias superior o igual al 4 de este modelo, pudiéndole corresponder un nivel inferior en el modelo de Van Hiele.

3.8- Importancia de los aspectos afectivos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje (aspectos motivacionales – aspectos emocionales).

Sobre el alumno de Alto Rendimiento, los factores afectivos ejercen muy poca influencia, a la larga, sobre el aprendizaje, sobre su rendimiento académico. Queda por ver los resultados de otras investigaciones al respecto, sobretodo en los casos en los cuales ciertas patologías pueden modificar el desarrollo normal del aprendizaje.

Los criterios de selección que hemos fijado no permiten discriminar comportamientos no adaptados. Es decir, en el estudio de casos, todos los que han participado han sido alumnos que no se ven afectados por los parámetros citados.

De todas formas, aunque no podamos decirlo de forma tajante por el hecho de no tener ninguna investigación en la que apoyarnos, el Alumno de Alto Rendimiento sufre muy pocas perturbaciones en su trabajo académico debido a los factores ambientales o debido a los factores externos en general.

3.9- Análisis somero de los contenidos curriculares de las matemáticas

Analicemos de forma somera los diferentes planteamientos curriculares en la asignatura de matemáticas para los tres sistemas implicados en el estudio, para la franja de edad que nos interesa, el alumnado del curso de “Troisième”, en el sistema francés, de “Tercero de Eso” en el sistema español y para alumnos del sistema italiano que han superado la "licenza media".

Hemos extraído del documento de presentación del los programas oficiales de la "*Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques* (CFEM)"[9] los contenidos curriculares delos 4 cursos de la etapa llamada "Collège" que corresponden a los 4 primeros cursos del ciclo secundario del sistema francés y que equivale a los cursos de: 5 de Primaria y los tres primeros curso de la ESO.

Para el sistema francés, tenemos las siguientes consideraciones: Las matemáticas se sitúan como una "disciplina de formación general", donde "la resolución de problemas, la modelización de situaciones y el aprendizaje progresivo de la demostración" permiten a los estudiantes "tomar conciencia, poco a poco, de lo que es la verdadera actividad matemática".

En el collège, las matemáticas deben aparecer a la vez como disciplina que ofrece herramientas útiles para la vida corriente o en otros dominios y como disciplina que tiene su propia autonomía. Sin embargo, la cuestión de las relaciones entre las matemáticas y otras disciplinas permanece abierta: la puesta en funcionamiento de Itinerarios de descubrimiento ha mostrado las dificultades de estas colaboraciones, aunque se han desarrollado algunas experiencias interesantes. La progresión necesaria de los aprendizajes matemáticos, la presión del tiempo y la cantidad de contenidos a enseñar pueden explicar, en parte, estas dificultades. La etapa del "Collège" que comprende los cursos de 5 de primaria, Primer, Segundo y Tercero de la ESO, está

[9] "Panorama de las matemáticas en la educación francesa, desde el parvulario hasta la Universidad", documento escrito bajo la supervisión de Jean-Luc Dorier, Presidente de la *Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques* (CFEM)

organizada en tres ciclos:

- Ciclo de Adaptación que corresponde al curso de “Sixième” (Quinto de Primaria)
- Ciclo Central que corresponde a los cursos de “Cinquième” y de “Quatrième” (equivalen a los cursos de Primero y Segundo de ESO)
- Ciclo de Orientación que corresponde al curso de “Troisième” (Tercer Curso de la ESO).

Durante los 4 años del “Collège”, los programas se dividen en 3 apartados:

- Trabajos geométricos
- Trabajos numéricos
- Organización y gestión de datos. Funciones

Nos fijamos solamente en el curso de orientación para esta exposición comparada de los contenidos curriculares. En este curso, “Troisième” (Tercero de ESO), se pretende una iniciación a la demostración, con los estudiantes “puestos en situación de elaborar y redactar algunas demostraciones”.

1. Trabajos geométricos

Este campo se utiliza sobretodo para desarrollar las capacidades de demostración de los estudiantes. El triángulo es de nuevo una figura que da lugar a varios nuevos conocimientos: se introducen y se ponen en relación otras relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, aparte del coseno ya estudiado en “Quatrième” (seno, tangente); la relación de Pitágoras permite determinar la distancia entre dos puntos cuyas coordenadas son conocidas; teorema de Tales (directo y recíproco).

El estudio de los vectores se limita a la suma de dos vectores (relacionado con la composición de dos traslaciones) y a las coordenadas de un vector en el plano provisto de una referencia.

El estudio de las transformaciones, que se extiende durante el conjunto del collège, se completa con las rotaciones y permite obtener algunas propiedades de los polígonos regulares.

El estudio de los sólidos continúa, sobre una base esencialmente experimental. Trata aquí de las secciones planas de los sólidos conocidos y de la esfera, así como del cálculo de su área y de su volumen.

*** Explicitación de Contenidos : Trabajos Geométricos**

Figuras planas

Estudio del Triángulo rectángulo y de las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

La Configuración de Talès

Transformaciones a escala (Ampliación – reducción)

Ángulo Inscrito

Polígonos regulares

Configuraciones en el espacio : Problemas de sección plana

La esfera y otras figuras

Cálculo de áreas y volúmenes

Efecto de una transformación sobre las áreas y los volúmenes

Cambio de unidades

2. Trabajos numéricos

La resolución de problemas constituye aún el objetivo fundamental de esta parte del programa. Se prolonga el trabajo sobre los números: introducción de la noción de raíz cuadrada, cálculos elementales con raíces cuadradas (producto y cociente), búsqueda de fracciones irreducibles, introducción de la noción de divisor común de dos enteros (en particular, el MCD).

El cálculo literal debe integrarse en los medios de expresión de los estudiantes. Deben, en casos simples, ser capaces de factorizar una expresión y de utilizar las identidades notables. Se les confronta a situaciones que pueden ser modelizadas por una ecuación, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o una inecuación con dos incógnitas (limitándose al primer grado).

*** Explicitación de contenidos: Numeración, Cálculo y ecuaciones**

Números enteros y racionales

- Operaciones con los números enteros y racionales
- Fracciones y operaciones combinadas
- Operaciones con radicales
- Ecuaciones e Inecuaciones de primer grado
- Productos notables

- Sistemas de primer grado
- Problemas cuya resolución conduce a una ecuación de primer grado

3. Organización y gestión de datos. Funciones

La proporcionalidad estudiada desde la escuela primaria se relaciona con la función lineal que, junto con la función afín, es objeto de un primer estudio (en particular a través de sus representaciones gráficas). Éste será utilizado para un trabajo sobre las magnitudes producto. También se explicita el efecto de la reducción o aumento por un factor k de las áreas y volúmenes. Se completa la iniciación a la estadística con la introducción de un nuevo indicador de posición (la mediana) y con una aproximación a la idea de dispersión (noción de amplitud). Se continúa con la iniciación al uso de una hoja de cálculo.

*** Explicitación de contenidos: Organización y gestión de datos. Funciones**

- Concepto de función
- La Función lineal y sus representación gráfica
- La función afín y su representación gráfica
- La proporcionalidad

Nociones básicas de Estadística

Conceptos básicos de Probabilidad

En cuanto al sistema español tenemos:

En el "Currículo de Educación Secundaria" de la Generalitat, publicado en el número 4915 del DOGC, decreto 143/2007, podemos leer las orientaciones pedagógicas referidas a la asignatura de matemáticas de la ESO. Los rasgos más relevantes que utilizamos para este análisis somero de los tres currículos, son los siguientes que pasamos a describir.

El currículo de matemáticas en la educación secundaria obligatoria pretende contribuir a la formación integral del alumnado. Las capacidades que potencia el currículum de matemáticas han de ayudar al alumno a:

- Establecer razonamientos cuantitativos sobre situaciones de vida real y sobre el mundo que nos rodea;
- Organizar el espacio y el plano a partir del establecimiento de relaciones precisas de comparación, de parecido o de equivalencia entre sus elementos, y su identificación en el mundo real;
- Modelizar situaciones de la vida real y vinculadas a otras áreas del conocimiento y traducirlas a modelos matemáticos, por tal de buscar soluciones con más facilidad y certeza;
- Apreciar estructuras y relaciones abstractas.

Uno de los objetivos es el desarrollo de la "Competencia matemática" en el alumno. La competencia matemática, una de las competencias básicas que han de lograr los alumnos en esta etapa, es necesaria en la vida personal, social y escolar. Numerosas situaciones cotidianas, y de las diversas materias, requieren el uso de las matemáticas por poder analizarlas, interpretarlas y valorarlas. Esta competencia tiene un carácter transversal con respecto a las demás materias, aunque es la materia de matemáticas la que se ocupa especialmente de ella.

Aunque los contenidos que se proponen son los necesarios para la adquisición de la competencia matemática, hace falta tener en cuenta que difícilmente se adquiere dicha competencia si no se orienta el aprendizaje de los contenidos de forma que se posibilite su utilización fuera de las clases de matemáticas, tanto en la vida diaria de los alumnos como en todas las otras materias.

Lograr y alcanzar plenamente la competencia matemática implica:

- Pensar matemáticamente.
- Construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones dónde tenga sentido, experimentar, intuir, formular, comprobar y modificar conjeturas, relacionar conceptos y realizar abstracciones.
- Razonar matemáticamente.
- Realizar inducciones y deducciones, particularizar y generalizar, reconocer conceptos matemáticos en situaciones concretas;
- Argumentar las decisiones presas, así como la elección de los procesos seguidos y de las técnicas utilizadas.
- Plantearse y resolver problemas.
- Leer y entender el enunciado, generar preguntas relacionadas con una situación-problema, plantear y resolver problemas análogos, planificar y desarrollar estrategias de resolución, verificar la validez de las soluciones, buscar otras resoluciones, cambiar las condiciones del problema, sintetizar los resultados y métodos empleados, y extender el problema, recogiendo los resultados que pueden ser útiles en situaciones posteriores.

- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Utilizar las técnicas matemáticas básicas (por contar, operar, mesurar, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) y los instrumentos (calculadoras y recursos TIC, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar (a través de palabras, gráficos, símbolos, números y materiales) expresiones, procesos y resultados matemáticos.
- Comunicar a los otras el trabajo y los descubrimientos realizados, tanto oralmente como por escrito, utilizando el lenguaje matemático.

La competencia matemática ha de adquirirse a partir de contextos que tengan sentido tanto para el alumno como para el conocimiento matemático que se pretende desarrollar. Aprender con significado es fundamental para capacitar el alumnado en el uso de todo el que aprende y para capacitarlo a continuar a aprender de forma autónoma, a lo largo de toda la vida. Por esto, hace falta proporcionar en todas las clases de matemáticas oportunidades de tal forma que el alumno aprenda a razonar matemáticamente, proponiendo actividades de aprendizaje dónde la resolución de problemas, entendida en un sentido amplio, sea la parte fundamental de la enseñanza.

Objetivos

La materia de matemáticas de la educación secundaria obligatoria tiene como objetivo el desarrollo de las capacidades siguientes:

1. Valorar las matemáticas como parte de la cultura, tanto desde el punto de vista de la historia como desde la diversidad cultural del mundo actual, y utilizar la competencia matemática por analizar todo tipo de fenómenos de nuestro mundo y por actuar de

manera reflexiva y crítica en los diferentes ámbitos de la vida.

2. Plantear y resolver problemas, abordables desde las matemáticas, que surjan en situaciones reales y del entorno, en otras disciplinas y en las propias matemáticas, aplicando y adaptando varias estrategias y justificando la elección realizada.

3. Reconocer el razonamiento, la argumentación y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas, así como el valor de actitudes como la perseverancia, la precisión y la revisión.

4. Organizar y consolidar el pensamiento matemático propio y comunicarlo a los compañeros/as, profesores/as y otras personas con coherencia y claridad, utilizando y creando representaciones matemáticas que posibiliten esta comunicación.

5. Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos, todo integrándolas en el conjunto de saberes que ha ido adquiriendo desde las diferentes materias así como desde la perspectiva de su papel a la sociedad actual.

6. Mostrar confianza en la propia capacidad por resolver problemas, afrontar la resolución con actitud positiva y lograr un nivel de autoestima que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos , estéticos y útiles de las matemáticas.

7. Comprender el significado de los diferentes tipos de números y de las operaciones. Calcular con fluidez, hacer estimaciones razonables y utilizar los medios tecnológicos por obtener, tratar y representar información, así como por calcular.

8. Utilizar diferentes lenguajes (verbal, numérico, gráfico y algebráico) y modelos matemáticos para identificar, representar y dotar de significado relaciones cuantitativas de dependencia entre variables.

9. Identificar las formas y relaciones espaciales presentes en el entorno, y utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para descubrir

y probar propiedades geométricas y para resolver problemas.

10. Reconocer la importancia de la medida tanto en la vida cotidiana como en el desarrollo de la ciencia y aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiadas para obtener medidas (de manera directa e indirecta) y hacer estimaciones razonables, en contextos diversos.

11. Identificar los elementos matemáticos presentes en todo tipos de informaciones por tal de analizarlas críticamente, y formular preguntas abordables con datos, utilizando los métodos estadísticos apropiados (recogida, organización, análisis y presentación de datos) por poder responderlas.

Contenidos para el tercer Curso

Numeración y Cálculo

- Comprender los números y las diferentes formas de representación

- Comprender el significado de las operaciones

- Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables

Cambio y relaciones

- Comprender patrones, relaciones y funciones

- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos

- Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas

- Analizar el cambio en contextos diversos

Espacio y Forma

Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos sobre relaciones geométricas.

Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.

Aplicar transformaciones y utilizar la simetría por analizar situaciones matemáticas.

Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas

Medida

Comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida.

Aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas y hacer estimaciones razonables

Estadística y Azar

Formular preguntas abordables con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes por responderlas.

Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos

Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones.

Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad

En el caso del sistema italiano, hemos tenido las programaciones de curso facilitadas por el centro, el "Liceo Scientifico Amaldi" de Barcelona.

Los contenidos son los siguientes:

- Repaso de los polinomios y de las operaciones con los polinomios
- Resolución de ecuaciones y de sistemas de primer grado
- Resolución de inecuaciones
- El plano cartesiano y estudio de la recta en el plano

- El sistema numérico y los números reales
- Cálculo con radicales.
- Ecuaciones irracionales
- Inecuaciones y sistemas de grados diferentes
- Repaso: Teorema del ángulo opuesto al vértice, Congruencia.
- Perpendicularidad, paralelismo, teorema del ángulo externo
- Estudio de los cuadriláteros
- Puntos notables de un triángulo
- Circunferencia y círculo
- Teorema de Tales
- Criterios de semejanza
- Teoremas de Pitágoras y de Euclides
- Aplicaciones del álgebra en la geometría

3.9-1. Analogías y diferencias en los contenidos curriculares oficiales enseñados a los alumnos de la muestra

Uno de los elementos que más preocupaba, a la hora de diseñar este trabajo, era la posibilidad de determinar las posibles influencias del sistema educativo en la reacción del alumno, ante las pruebas que tendría que resolver a lo largo de la investigación. Los contenidos curriculares, el currículo, es un "producto social" sometido a las influencias locales (el alumnado al que va dirigida la enseñanza, las demandas sociales, las condiciones en las que se imparten las enseñanzas) y expuesto también a las preocupaciones globales (logros científicos, conflictos sociales), o sea, a la influencia de la "época". Esta claro por lo tanto que si bien entre los tres sistemas implicados en el estudio las diferencias no serán muy grandes pero existen algunas diferencias. La que más preocupaba era la enseñanza de la geometría o la capacidad de los alumnos escolarizados en el sistema español de poder resolver con soltura un problema geométrico. La razón es que, mientras en el sistema francés la enseñanza de la geometría se considera fundamental en la etapa 12-15 años, en el sistema español, el tratamiento reservado a la enseñanza de la geometría es residual y se traslada casi todo su peso a la asignatura de Educación Visual y Plástica. Los alumnos escolarizados en el sistema francés viven el aprendizaje de la geometría de una forma más "rigurosa" en muchas de las etapas de la escolarización. Eso hace que estén dichos alumnos más acostumbrados al formalismo matemático que los otros alumnos escolarizados en otros sistemas. A pesar de que los contenidos curriculares puedan parecerse, la práctica docente muestra que, para un mismo problema geométrico, los métodos de resolución y las formas metodológicas utilizadas por un alumno escolarizado en el sistema educativo francés difiere de las utilizadas por otro alumno escolarizado en el sistema español.

Merece la pena comentar un caso que de hecho ha orientado el desarrollo de este trabajo de investigación. Para apoyar lo anteriormente dicho quisimos realizar una pequeña prueba para anotar los resultados obtenidos. Se propuso a una clase, en una clase normal, a un grupo de alumnos de "Troisième" (equivalente a Tercero de ESO) el ejercicio de geometría siguiente para iniciar un tema:

Ejercicio propuesto: *ABC es un triángulo cualquiera, demostrar que las tres mediatrices de dicho triángulo se cortan en un punto equidistante de los tres vértices*.

Llamó la atención la frecuencia de respuestas con una cierta pauta de reproducibilidad. Para simplificar el caso, y puesto que el interés es menor y nos sirve simplemente para confirmar una observación, hemos cogido la respuesta de *Sandrine*, alumna considerada muy buena. Las pautas de resolución seguidas por la alumna fueron las siguientes:

- Explicita el hecho de no disponer de ninguna medida. Realiza una figura correcta con los instrumentos Geométricos, un "croquis". Traza las mediatrices correctamente y deja ver los trazos de construcción. Halla el punto de intersección y traza la circunferencia que pasa por los tres vértices y lo nombra como circunferencia circunscrita al triángulo.
- Enuncia las propiedades de la mediatriz.
- Demuestra porque las mediatrices se cortan en un punto y porque el punto de intersección es centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices:
    - Llama T, T' y T'' las tres mediatrices
    - Explica que T, siendo mediatriz del lado [AB], pasa por el medio del segmento, y que todo punto de la mediatriz es equidistante de los extremos del segmento.
    - Explica que T', siendo mediatriz del lado [AC], pasa por el medio del segmento, y que todo punto de la mediatriz es equidistante de los extremos del segmento.
    - Comprueba que las dos rectas se cortan en un punto I que es común a las dos mediatrices y deduce que por lo tanto:
        - Por ser I un punto de T, mediatriz de [AB], IA=IB .
        - Por ser I un punto de T', mediatriz de [AC], IA=IC .
    - Deduce que si IA = IB y que IA = IC,

    entonces, IA= IB = IC

Concluye por lo tanto que I es entonces equidistante de los tres vértices, por lo tanto, será centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo dado. Este mismo ejercicio, propuesto a otros alumnos de otros Institutos no fue realizado de la misma forma. Las pautas cambiaron y el grado de formalismo fue radicalmente distinto. Encontramos en los demás ejercicios realizados por los alumnos escolarizados en el sistema español formas de resolución más intuitivas y enfocadas sobre la realización de figuras, con elaboraciones muy "logradas" de las construcciones geométricas. Este mismo ejercicio forma parte del trabajo de investigación.

Capítulo IV

Marco Teórico de la investigación

Es evidente que los seres humanos no siempre buscamos contraejemplos para nuestras inferencias y convicciones, y esto está en la base de muchos errores y tozudas creencias.

Generalmente, si tenemos una explicación para un determinado fenómeno nos encontraremos satisfechos con los datos que concuerdan con nuestra interpretación, y esto puede tener consecuencias graves en algunas situaciones.

Carlos Santamaría,

Introducción al razonamiento humano

4.1-Marco Teórico Conceptual para el estudio

Todo trabajo de investigación se apoya sobre trabajos de investigaciones anteriores y sobre conceptos teóricos validados. No podremos entonces evitar tomarlos en cuenta ni tampoco elaborar un marco que sustente la investigación que pretendemos realizar.

En este apartado, vamos a describir las diferentes componentes teóricas sobre las cuales asentaremos nuestra investigación. Por un lado, hablaremos de la resolución de problemas, por el otro, de las Bases del Razonamiento Matemático según el Modelo de Van Hiele y por último, de los alumnos de Alto Rendimiento. El Marco Teórico que sustenta este trabajo está fundamentado en tres pilares básicos:

1- La Resolución de Problemas como manifestación más clara del Razonamiento Matemático del Individuo.
2- El Modelo de Van Hiele
3- Los Alumnos de Alto Rendimiento

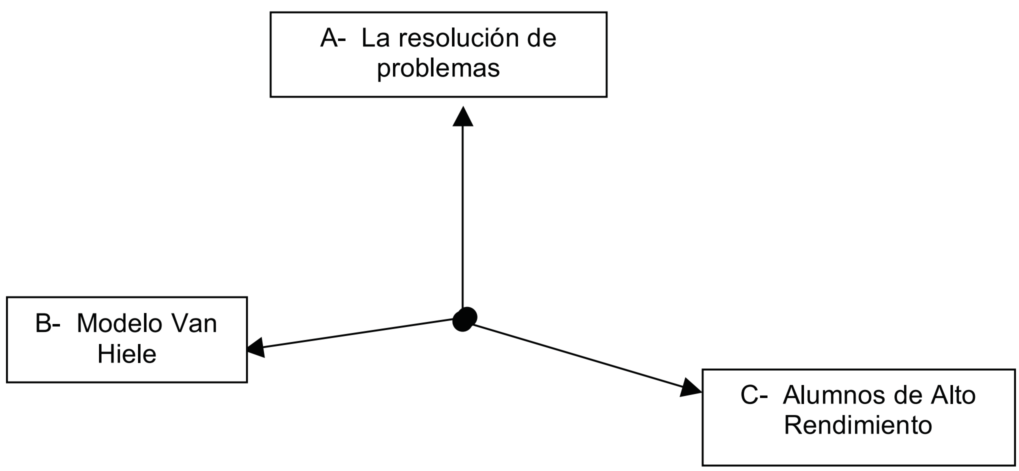


Figura 1 – T4

4.2. El concepto de problema y la resolución de problemas

A pesar de ser la "resolución de problemas" una de las actividades principales del aprendizaje o de la enseñanza de las matemáticas, es difícil encontrar una propuesta consensuada entre los profesores sobre la definición de "Problema". Las respuestas pueden ser tan diversas como los estilos docentes que se encuentran en el mundo de la enseñanza. A pesar de ello, se puede encontrar un cierto consenso a la hora de diferenciar entre lo que son "ejercicios de aplicación" y lo que son "problemas". El grado de dificultad que caracteriza uno y otro es lo que no se acaba de establecer.

Por ejemplo, un "ejercicio de aplicación" es un tipo de preguntas matemáticas que no busca en el alumno más que la utilización repetitiva de unas destrezas determinadas. Un "problema" en cambio, coloca al alumno ante una dificultad de la que no sabe de antemano si va a poder encontrar una solución. Para ir más lejos, en algunos casos, se trata de enfrentarle, para lograr que el aprendizaje del "estudiante" sea "significativo", a una situación (novedosa o no) a la que ha de encontrar una solución o simplemente una forma de proceder. No tiene que encontrar "la respuesta adecuada" sino, ha de saber, después de haberse enfrentado a la situación de dificultad que ha supuesto la resolución del problema:

- Como ha procedido,
- Que ha hecho,
- Si es capaz de reproducir lo hecho,
- Si le ha convencido lo hecho ,

- Si no ha infringido ninguna regla matemática
- Si lo hecho le ha parecido apropiado
- Si es evaluable el trabajo realizado

Por ejemplo, la resolución de ecuaciones y de inecuaciones, la proporcionalidad y el reparto, las propiedades mismas de las operaciones numéricas, pueden constituir una base de ejercicios matemáticos muy completa y ser a la vez fuentes de muy buenos problemas matemáticos, los cuales deben permitir:

1- Ofrecer al docente la "base evaluativa" necesaria para analizar el aprendizaje del estudiante

2- Reforzar los conocimientos aprendidos, dando calidad al contenido

3- Consolidar las destrezas,

4- Colocar al estudiante frente a una situación de "desasosiego" de forma que pueda ajustar de forma interna los diferentes conocimientos adquiridos.

4.2-1. Definición de Problema

A pesar de no conseguir la unanimidad cuando se trata de definir el concepto de "problema" o sobre el sentido profundo de la actividad de "resolución de problemas", está admitido, de forma tácita, que no se puede separar "aprendizaje matemático" y "resolución de problemas". Para Polya (1961), un problema es una situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para lograr un objetivo no alcanzable de forma inmediata. No es una mera resolución algorítmica. Un problema es pues *una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál, no se vislumbra un medio o un camino* *aparente y obvio que conduzca a la misma* (Krulik y Rudnik, 1980). También se puede hablar de problema *cuando desde la situación en que estamos queremos llegar a otra, que conocemos con más o menos claridad, pero desconocemos el camino* (Miguel De Guzmán). De la resolución algorítmica, pautada, a la actividad más exigente de resolución, con todo el rigor del planteamiento exhaustivo, la paleta de respuestas es muy rica.

4.2.2- El razonamiento matemático y la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Todo es perfectible. Todo es susceptible de cambio, de transformación, de mejora, de perfeccionamiento. La capacidad de razonar no puede escaparse a esta lógica. Nos ejercitamos, sin darnos cuenta, desde el momento en que nos despertamos hasta la hora de acostarnos. Y aún más allá, la actividad subconsciente acompaña el proceso de creación matemática y de resolución de problemas. A pesar de esta naturalidad, el desarrollo de las "funciones básicas del razonamiento", la "adquisición completa y observada" de las "competencias matemáticas generales" consistente en este "Sistema de Habilidades Matemáticas Generales" que el individuo tendrá que utilizar a lo largo de su vida, siguen sin ser la preocupación principal de la educación matemática. Nos encontramos por lo tanto que, a pesar de ocupar un lugar central en los contenidos curriculares, no forman parte realmente del planteamiento cotidiano de la enseñanza de las matemáticas, en el "currículo enseñado".

Esperamos de todo estudiante ciertas habilidades de razonamiento. Esperamos de él la adquisición completa de las competencias tales como: pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelizar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones. Esperamos que sepa: Identificar – Clasificar - Definir – Demostrar – Calcular – Interpretar – Codificar – Tabular – Realizar e Interpretar Gráficos – Plantear y Resolver Algoritmos – Comparar Describir – Explicar - Predecir – Deducir – Aproximar – Optimizar – Modelar.

La resolución de problemas es lo que permite un mayor grado de interrelación entre estas diferentes funciones del "razonamiento" y, por lo tanto, la mejor forma de desarrollar la capacidad de razonar, y, sobretodo, la calidad de nuestro razonamiento matemático.

4.2.3- Fases en la resolución de problemas

Uno de los grandes handicaps en la enseñanza de las matemáticas es la poca conexión que el estudiante suele encontrar con la vida real. Por mucho que se insista, para el alumno, el mundo del saber es diferente del mundo real. Sin embargo, la metodología utilizada en la vida real, frente a una dificultad es parecida a la que se suele utilizar en la resolución de un problema matemático. Hemos de establecer una diferencia entre los "ejercicios de aplicación" y la "resolución de problemas". Los ejercicios de aplicación vienen a ser una suerte de "aplicación de algoritmos" para responder a unas preguntas formuladas y corresponden a un tipo de "conducta mecánica", utilizando "reflejos" automáticos frente a "respuestas razonadas y particularizadas" que son los problemas. Frente a la misma situación dificultosa, dos individuos pueden responder de forma diferente hallando la misma solución o una solución adaptada a sus expectativas. Sin embargo, la forma de proceder, si se quiere llegar a una solución válida, será la misma:

- Analizar la situación

- Estudiar las opciones de las que uno dispone
- Evaluar “Elementos a Favor” y “Elementos en Contra”
- Buscar una solución útil
- Evaluar otras posibilidades
- Decidirse por una solución
- Comprobar la bondad de la solución encontrada.

Está claro que hay que añadir un factor adicional que dependerá de las “capacidades individuales para resolver problemas (cognitivas, afectivas)”. No siempre el individuo tiene la predisposición al análisis ni las ganas de enfrentarse a los problemas de la vida diaria (condiciones ambientales). En lo académico, podemos encontrar estudios sobre estrategias para ayudar en la resolución de problemas. Muchos investigadores han tratado de este tema y muchas teorías han sido elaborado, describiendo las diferentes fases en la resolución de problemas. Vamos a repasar algunos de ellos, empezando por hacer mención de Miguel de Guzmán, el cual me ha influenciado mucho provocando mi interés por el tema del razonamiento matemático. Describamos de forma simple algunas de estas teorías:

A- Fases en la resolución de un problema propuestas por Miguel de Guzmán

1. Familiarizarse con el problema.

Al comienzo, en la familiarización, debemos actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender.

2. Buscar y Evaluar las estrategias posibles.

Una vez que se ha entendido el problema pasamos a buscar estrategias que nos permiten resolverlo. Apuntamos las ideas que nos surgen relacionadas con el problema.

3. Llevar adelante la estrategia escogida.

Tras acumular varias estrategias llevamos a cabo la estrategia escogida, con confianza y sin prisas. Si no acertamos con el camino correcto volvemos a la fase anterior y reiniciamos el trabajo.

4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Al llegar a la solución queda la fase más importante, revisión del proceso y extraer consecuencias de él. Debemos reflexionar sobre el camino seguido, si podemos extender estas ideas a otras situaciones.

B- Fases en la resolución de un problema propuestas por Polya (1961)

1- Comprender el problema

- Fase de familiarización con el problema. Significa leerse todo el enunciado para tener una visión global de la situación.
- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es suficiente? ¿Hay redundancia? ¿Hay contradicción?

2- Concebir un plan

- ¿Ha habido alguna situación parecida?
- Determinar la relación entre los datos y la incógnita
- ¿Pueden existir alternativas?
- Elaboración de un plan de resolución

3- Ejecutar el Plan

- En la ejecución del plan, comprobar cada paso

- Presentar la solución de forma la exactitud y la corrección de cada paso no ofrezca ninguna duda.

4- Examinar la solución obtenida

- Verificar la solución obtenida .

- Analizar la solución desde varios puntos de vista y buscar los puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos.

- Examinar el método que ha "tenido éxito" es decir aquélla que le ha conducido al resultado adecuado.

C- Fases en la resolución de un problema propuestas por Mason, Burton y Stacey (1988)

1- Abordaje

- Comprender el problema

- Concebir un plan

2- Ataque

- Llevar a cabo el plan

3- Revisión

- Reflexión sobre el proceso seguido.

- Revisión del Plan

D- Fases en la resolución de un problema propuestas por Brandford y Stein (1986)

1- Identificación del problema

2- Definición y Representación del problema

3- Exploración de posibles estrategias

4- Actuación basada en una estrategia

5- Análisis de los Logros – Observación y evaluación de los efectos de las acciones realizadas.

4.2-3.a- Otros Modelos

Si bien con estos modelos expuestos podemos considerar haber hecho referencia a lo más importante, no podemos no mencionar dos propuestas fundamentales: la reflexión de Descartes en forma de "Reglas para la dirección del espíritu" y los trabajos de Schoenfeld (1995) sobre los factores que intervienen en la resolución de problemas. Resolver un problema es también evitar el error, tanto en los elementos conceptuales como en los procedimientos utilizados. En este sentido, uno de los primeros en elaborar una propedéutica ha sido Descartes, quien en su obra « Reglas para la dirección del espíritu » (Alianza editorial, Madrid 1989, pg. 79) define lo que él entiende como método para llegar a la verdad, lo siguiente: « *Así pues, entiendo por método reglas ciertas y fáciles, mediante las cuales el que las observe exactamente no tomará nunca nada falso por verdadero, y, no empleando inútilmente ningún esfuerzo de la mente, sino aumentando siempre gradualmente su ciencia, llegará al conocimiento verdadero de todo aquello de que es capaz.»* (« Regulae ad directionem ingenii », Regla IV)

1. Regla (Evidencia) : «No admitir jamás como verdadero cosa alguna sin conocer con evidencia que lo era: es decir, evitar con todo cuidado la precipitación y la prevención, y no comprender en mis juicios nada más que lo que se presentara tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviese ocasión alguna para ponerlo en duda»
2. Análisis : « Dividir cada una de las dificultades que examinase en tantas partes como fuera posible y como requiriese para resolverlas mejor»

Buscar la forma más simple de exponer las ideas fundamentales.

3. Síntesis : «El tercero, en conducir por orden mis pensamientos, comenzando por los objetos más simples y más fáciles de conocer para ascender poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más compuestos, suponiendo incluso un orden entre los que se preceden naturalmente unos a otros.»

Es un paso que complementa la etapa anterior.

3. Comprobación: « Realizar en todo unos recuentos tan completos y unas revisiones tan generales que haga sentirse seguro de no omitir nada. »

Se trata de evitar errores y de asegurarse que se ha llegado de forma certera a la conclusión esperada. Además de las fases de la resolución de problemas habría que considerar también un marco explicativo de las interrelaciones entre los diferentes factores que intervienen y condicionan las diferentes etapas de la resolución de un problema. En este sentido, Schoenfeld estableció un marco justificativo muy interesante. Considera cinco aspectos fundamentales que permiten generalizar los modelos establecidos antes. Son:

1.Los Recursos cognitivos básicos que constituyen el «Conocimiento de Base»

2.Las Heurísticas que son las estrategias de resolución utilizadas

3.Los aspectos metacognitivos o de control

4.Los aspectos Afectivos y los sistemas de creencias

5.La Comunidad de Práctica

A. Recursos cognitivos básicos del Individuo

Son los conocimientos previos que posee el individuo los cuales tendrá que movilizar para hacer frente al problema que tiene que resolver, a la dificultad que tiene que vencer, al obstáculo que tiene que superar.

B. Heurísticas

Según Schoenfeld, hay un gran desconocimiento sobre la forma correcta de utilizar las "heurísticas". Hay que conocerlas, saber cómo usarlas, y tener la habilidad para hacerlo. Por lo tanto no son suficientes por sí solas y su sola aplicación no es una garantía de éxito.

C. Los aspectos metacognitivos o de Control

Todo proceso de resolución de un problema supone realizar, durante ciertas etapas de la resolución, tareas de monitorización, de control de resultados parciales, de realimentación, de revisión, de avances y retrocesos, de probar vías de resolución alternativas en caso de fracaso, etc. Estas tareas, son, desde el punto de vista de la psicología cognitiva, los componentes de la metacognición.

D. Los aspectos Afectivos y los sistemas de creencias

" Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza; saber matemática y ser capaz de obtener la respuesta correcta rápidamente van juntas. Estos presupuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el docente; saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el docente hace una pregunta o propone una tarea; y la "verdad" matemática es determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de mirar, escuchar y practicar.” Lampert (1992) Esta reflexión nos muestra el tipo de presión que puede llegar a ejercer el aprendizaje de las matemáticas sobre el estudiante. En efecto, Rigor, Certeza, Seguridad, Creatividad, Formalismo, Intuición, Error, son algunos de los conceptos vinculados con la enseñanza de las matemáticas que hacen pensar sobre las vinculaciones del aprendizaje matemático o de su enseñanza con el universo de las creencias sociales (la presión social) o sobre el universo afectivo del estudiante. Se producen bloqueos afectivos, hay fobias y a veces nos encontramos con personas adultas, a veces con un ejercicio brillante de su profesión y que sin embargo manifiestan abiertamente que han pasado su vida “odiando las matemáticas” o bien que eran “nulos” en matemáticas. Las creencias sobre la matemática influyen de forma profunda sobre las interacciones entre la materia, los alumnos, los profesores.

E. Comunidad de Práctica

Hay otros dos factores que intervienen en cuanto a las influencias sobre el aprendizaje matemático y que proviene de los efectos causados por las “interacciones grupales” en las cuales participa tanto el estudiante como el propio docente. Así, los grupos de aprendizaje realizados dentro del aula, en forma de trabajo colaborativo o los grupos sociales localizados en el barrio, en la familia, provocan modificaciones en las relaciones con las matemáticas. La comunidad a la que uno pertenece modela el desarrollo del punto de vista de sus miembros. “Si se quiere comprender cómo se desarrolla la perspectiva matemática, se debe encarar la investigación en términos de las comunidades matemáticas en las cuales los estudiantes y los docentes conviven, y en las prácticas que se realizan en esas comunidades. El rol de la interacción con los otros será central en la comprensión del aprendizaje." Schoenfeld, 1992

4.2-3.b- La resolución de problemas y la actividad reflexiva

La resolución de problemas supone la realización de una actividad reflexiva por parte del “resolutor”. Las diferentes fases que hemos visto proponer como etapas en el proceso de resolución de un problema, se ajustan a las “Funciones esenciales de la actividad reflexiva”, elaboradas por Dewey (1989). La actividad reflexiva, según él, se sitúa dentro de un “marco problemático” que fija los límites dentro de los cuales se realiza el “acto reflexivo”. Se parte pues de una *situación desconcertante, problemática, confusa, al comienzo y una situación clara, unificada y resuelta al final. La primera de estas situaciones puede llamarse pre-reflexiva. Plantea el problema que hay que resolver; de ella emana la pregunta que la reflexión tiene que responder. En la situación final, la duda se ha disipado ; la situación es post-reflexiva, de ella deriva una experiencia directa de dominio, satisfacción y goce. Estos son pues los límites dentro de los cuales se sitúa la reflexión*. (Dewey, 1989)

Dewey describe estas cinco fases del pensamiento reflexivo de la forma siguiente:

1- Primera Fase: Sugerencia

Corresponde a una fase de desasosiego. Frente a la situación problemática, la mente busca alternativas, evalúa posibilidades, busca salidas posibles. Esta búsqueda inhibe la acción directa pero mantiene la reflexión en una búsqueda constante. Esta inhibición de la acción directa provoca *vacilación y postergación, esencial para el pensamiento.*

2- Segunda Fase: Intelectualización

La dificultad provoca y estimula el pensamiento. *Si supiéramos de antemano cuál es la* *dificultad y en dónde reside, el trabajo de reflexión sería mucho más fácil de lo que es*. El problema pasa a ser realmente un estímulo cuando se intelectualiza dejando de ser un "fastidio" para pasar a ser un "desafío", una problema al que hay que encontrar una solución. *Siempre que se produce actividad reflexiva hay un proceso de intelectualización de lo que en un comienzo no es más que una cualidad emocional de la situación completa.*

3- Tercera Fase: La idea conductora, hipótesis

La primera sugerencia que irrumpe en la mente, utilizada de forma adecuada, se transforma en suposición definida, en idea conductora, en una hipótesis directiva.

4- Cuarta Fase: Razonamiento (en sentido estricto)

Una vez realizada la formación de la hipótesis, la mente se encarga de transformarla hasta lograr una idea muy diferente de la original. *El desarrollo de una idea a través del razonamiento contribuye a proporcionar términos intermedios que unifiquen de modo consistente elementos que en un comienzo parecen entrar en conflicto, algunos de los cuales conducen la mente a una cierta deducción mientras que otros la llevan a una deducción opuesta.*

5- Quinta Fase: Comprobación de hipótesis por la acción

La fase final es la comprobación de la idea original. El razonamiento permite deducir si la idea original se adapta a las condiciones existentes o si hay que desecharla. Puede haber coincidencia o no. En caso de no coincidir con el resultado esperado, hay fracaso pero un fracaso instructivo. *La persona que realmente piensa, aprende casi tanto de los fracasos que de los éxitos.* El fracaso puede permitir modificar conductas, apreciaciones, hábitos para lograr éxitos posteriores.

4.2.4-La resolución de problemas y el Informe PISA

Una las herramientas que utilizaremos como instrumento de trabajo es el Informe PISA para las Competencias clasificatorias de los alumnos Altamente Capacitados (los resultados del informe PISA 2003 en el que se analizaba como competencia principal la "Competencia Matemática" de los alumnos de 14-15 años de los países de la OCDE, proporcionan unos resultados muy interesantes). Para lo que nos interesa en este trabajo de investigación, nos centraríamos en aquellos alumnos que trabajan en los niveles 4, 5 o 6. La descripción que hizo el Informe PISA, en 2003, recogía los puntos siguientes:

En el nivel 6 de competencias, se supone que el alumno puede conceptualizar, generalizar, utilizar la información que procede de sus propias investigaciones, y puede modelizar situaciones complejas. Es capaz de asociar informaciones de fuentes y de representaciones diversas y relacionarlas unas con otras. Puede hacer razonamientos matemáticos de nivel alto, muy elaborados y puede aplicarlos conjuntamente con operaciones matemáticas formales y simbólicas de nivel adelantado para desarrollar nuevas estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones sobre sus resultados, interpretaciones, argumentaciones, y pueden justificar porque se adecuan a las situaciones iniciales.

En el Nivel 5 el alumno puede desarrollar y trabajar con modelos adecuados a situaciones complejas, identificando limitaciones y especificando suposiciones. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas y aplicarlas a los problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica utilizando habilidades de razonamiento y pensamiento amplias y complejas, representaciones asociadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales y pueden profundizar en estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus formulaciones y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

En el nivel 4 , el alumno puede trabajar de manera efectiva con modelos explícitos adecuados a situaciones concretas complejas que puedan implicar limitaciones o requieran hacer suposiciones. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluso simbólicas asociándolas directamente a los aspectos de situaciones reales. Pueden utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar de manera flexible, con un cierto nivel de profundización en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

En el nivel 3 el alumno puede ejecutar procedimientos descritos de manera clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillas. Pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y hacer razonamientos de manera directa. Son capaces de desarrollar comunicaciones cortas que informan sobre sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

En el nivel 2, el alumno puede interpretar y reconocer situaciones en contextos que no requieran más que inferencia directa. Pueden conseguir información de una sola fuente y utilizar un solo tipo de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones de nivel básico. Pueden llevar a término razonamientos directas e interpretaciones literales de resultados.

En el nivel 1, el alumno puede responder preguntas que hacen referencia a contextos familiares la información relevante de los cuales está presentada de forma explícita y las preguntas están definidas de manera clara. Pueden identificar información y llevar a cabo procesos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a término acciones obvias y responder de manera inmediata a los estímulos recibidos.

Los alumnos con los cuales trabajaremos se situarán en un nivel de competencias superior o igual al 4.

4.3- El Modelo de Van Hiele

Según Goethe, *la razón no puede ser una cosa popular. Pueden serlo las pasiones y los sentimientos, pero la razón está reservada a las mentes privilegiadas.* Las interpretaciones posibles son varias. Pensemos entonces en una sociedad moderna en la que la educación es y debe seguir siendo un “bien fundamental” al que por lo tanto todo individuo tiene derecho. Siendo así, eso significa que toda persona tiene acceso a la educación y que, por lo tanto, el uso de la razón, expresado a través del “pensamiento reflexivo”, no le puede estar vetado, salvo quizás en casos de patologías cerebrales graves. Además, siendo el pensamiento el vehículo a través del cual se expresa el razonamiento, razonar no puede ser una exclusividad de la mente privilegiada. Sin embargo, y eso merece un matiz, la calidad del razonamiento y la forma de acceder a ello, puede diferir de una persona a otra. El no pensar en ello de esta forma, el creer, quizás de forma inconsciente, que el razonamiento matemático no se puede modificar conduce a planteamiento erróneos que perjudican gravemente la educación de muchas personas. Por ejemplo, afirmaciones como:

- Se es bueno en matemáticas.
- Uno no puede aprender a ser bueno en matemáticas.

Son creencias que modulan las relaciones con el razonamiento matemático y alteran la verdadera finalidad de la enseñanza de las matemáticas. Eso hace que a pesar de los cambios habidos en el mundo educativo estos 25 últimos años, poco se haya trabajado realmente para:

- Facilitar la toma de consciencia del alumno sobre sus propios métodos de razonamiento
- Proporcionar al docente las herramientas necesarias para detectar la mejor forma de ayudar a sus alumnos en su aprendizaje.
- Mantener la atención del alumno en su proceso de aprendizaje,
- Estimular la motivación del estudiante despertando en él el interés por sus mecanismos y sus estructuras de razonamiento
- Provocar en él el interés en trabajar, desarrollar y consolidar los buenos hábitos para construir y estar atentos a sus métodos de toma de decisiones.

En este sentido, las ideas expuestas en el método propuesto por los Van Hiele, conocido como modelo de Van Hiele ofrece unas opciones muy interesantes. Según este modelo, el pensamiento matemático sigue un modelo concreto que se sintetiza en dos partes:

- Una parte Descriptiva que identifica unos tipos de razonamiento llamados “Niveles de Razonamiento” a través de los cuales progresa el razonamiento matemático del estudiante, desde el inicio de su aprendizaje hasta llegar a su máximo grado de desarrollo intelectual en el campo estudiado.

- Una parte Instructiva o Prescriptiva que sugiere a los docentes unas directrices las cuales están pensadas para facilitar el aprendizaje del alumno, identificando el nivel de razonamiento en el que trabaja y ofreciendo al profesor las herramientas para ayudar al alumno a pasar al nivel superior de razonamiento. Son las "Fases de Aprendizaje".

De acuerdo con la teoría de Van Hiele, el alumno, ayudado por unas "experiencias instruccionales" adecuadas, diseñadas de acuerdo a las "fases de aprendizaje" sugeridas y definidas en el modelo, ira alcanzando gradualmente los diferentes niveles de razonamiento.

Las "Fases de Aprendizaje", constituyen las características de los niveles de Van Hiele, que permiten guiar la intervención del docente. Establecen que :

1- Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquéllas partes de las matemáticas que el profesor le haya presentado de forma adecuada a su nivel de razonamiento.
2- Se puede encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento matemático de los alumnos.
3- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
4- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero sí se le puede ayudar mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que

llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

5- No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el anterior.
6- A cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico.
7- Dos personas que razonan e interpretan los argumentos del otro en niveles diferentes, no podrán entenderse.
8- El paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual y durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un periodo de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y otro.
9- Lo que es intrínseco en un nivel precedente se vuelve extrínseco en el nivel actual.

Describamos ahora cada una de los niveles y detallemos las fases de aprendizaje para tener una idea más clara del modelo. Empecemos por los niveles de razonamiento:

Nivel 1 o Nivel de Reconocimiento

Es un nivel elemental de razonamiento basado en la visualización. Para un alumno que razone en este nivel, sólo se puede esperar de él una descripción del aspecto físico de los objetos que se le presente. Su razonamiento en este nivel carece por completo de sentido matemático.

Se trata de un "Nivel de Reconocimiento" en el que los alumnos perciben las figuras geométricas globalmente por su forma y no por sus propiedades.

Nivel 2 o Nivel de Análisis

En el nivel 2 de razonamiento, el alumno se da cuenta de que las figuras Geométricas pueden estar formadas por elementos y que son portadoras de ciertas propiedades. Otro avance con respecto al nivel 1 está en el desarrollo de la capacidad para reconocer que las figuras concretas que está manipulando son (o pueden ser) representantes de unas familias concretas. Sin embargo, tiene más peso para ellos la existencia de propiedades diferenciadores que la de las propiedades comunes (cuadrado y rectángulo son diferentes por ejemplo).

El razonamiento matemático del alumno que opera en el nivel 2 de razonamiento matemático podría estar basado en la idea de la generalización a partir de una o dos observaciones o de generalizar a partir de simples mediciones efectuadas sobre una figura. Por ejemplo, "Se ve" que tal propiedad se cumple por ejemplo, es una forma de demostración. La veracidad de una afirmación se basa sobre la verificación de un caso. Es un "Nivel de Análisis" en el que los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades Matemáticas.

Nivel 3 o Nivel de Clasificación

En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal del estudiante. Puede, en este nivel, lograr conectar diversas propiedades de una misma o de diferentes figuras. El alumno que opera en este nivel es capaz de hacer inclusiones de clase:

- Rombos – Cuadrados – Rectángulos
- Cuadrados – Rectángulos – Paralelogramos

En este nivel, la palabra “Demostración” tiene un sentido más cercano al verdadero. Sin embargo, no se acaba de entender la estructura y la necesidad de una demostración. Son capaces sin embargo de realizar razonamientos deductivos y entienden el significado de una definición. Es el nivel en el que empieza la capacidad de abstracción.

Nivel 4 o Nivel de Deducción Formal

Al alcanzar este nivel de razonamiento, se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y, al mismo tiempo, la capacidad para tener una visión globalizadota del área que se está estudiando. La palabra demostración alcanza la plenitud de su significado.

El nivel 4 corresponde al nivel de Deducción Formal. Los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación. Se podría añadir un quinto nivel en el que los alumnos no suelen operar. Generalmente se consideran los 4 primeros.

Podría suponerse también la existencia de un Nivel 5 que correspondería al nivel de “Rigor”. En este nivel, los alumnos son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos prescindiendo de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática. No vamos a considerarlo en este trabajo de investigación ya que el nivel 4 ya posibilita el trabajo matemático de alto nivel.

El modelo de Van Hiele establece, para el alumno de secundaria, 4 niveles de razonamiento, sin tener en cuenta realmente la influencia que pueda tener la edad cronológica del alumno.[10] De hecho, la edad no tiene ninguna influencia sobre la capacidad de aprendizaje del individuo. Hay por lo tanto una clara diferencia con la teoría piagetiana que admite que las estructuras internas de la inteligencia, del razonamiento y las formas en las que se manifiesta la inteligencia, difieren según la edad y se modifican por lo tanto con la edad.

Estas " Fases de Aprendizaje" permiten además apreciar lo siguiente, que son los aspectos que debería ser tomados en cuenta por el profesor:

1- Progresión Secuencial

No pasa de un nivel a otro sin que se logren las plenas competencias requeridas, características del "nivel de razonamiento" No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior. Esta forma de progresión no se puede alterar.

2- Especificidad del lenguaje

A cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático. Para facilitar el aprendizaje del alumno, habrá que situarse en el mismo nivel de comprensión del alumno.

3- Continuidad del aprendizaje

El paso de un nivel a otro se efectúa de forma continua y no brusca. es posible que el paso de uno de ellos a otro dure varios años, tal es el caso del nivel III y IV. Esto se debe a que la adquisición de los niveles no está influenciada por el aspecto biológico, pues la instrucción y la experiencia personal que haya tenido el alumno, influyen en gran

[10] Con respecto a esto, habría que tener en cuenta seguramente las vivencias extraescolares del alumno. No tener en cuenta la edad cronológica puede influir en los casos en los cuales la educación no formal tenga cierto peso en el aprendizaje formal del alumno.

medida. Puede ser que un estudiante no alcance jamás el nivel 4 de razonamiento.

4- Recursividad

El modelo es recursivo, es decir que cada nivel se construye sobre el anterior. Los elementos implícitos en el nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N+1.

5- Localidad

Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de una disciplina. Por ejemplo, puede estar razonando en el nivel III cuando se refiere a cuadriláteros y al mismo tiempo encontrarse en el nivel I, para el concepto de mediatriz. Esto se debe a que existen distintas experiencias previas para cada concepto.

Para ayudar al progreso del alumno y facilitar el paso de un nivel de razonamiento a otro superior, el modelo propone además las fases siguientes de aprendizaje:

- Fase I o Fase de Información

Al iniciar un tema determinado, el profesor informa sobre el campo de intervención que abarcará el nuevo estudio y explora los conocimientos previos y el nivel de razonamiento de los elementos del grupo. Se trata de una fase de toma de contacto, es decir, sirve para dirigir la atención de los estudiantes y permitirles conocer qué tipo de trabajo van a realizar.

- Fase II o Fase de Orientación Dirigida

Los estudiantes analizan el campo de intervención mediante actividades preliminares y dirigidas. En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. Puesto que los estudiantes por sí solos no podrían realizar un aprendizaje eficaz, es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

- Fase III o Fase de Explicitación

Se basa en el diálogo en el grupo, entre pares, con intervenciones del profesor cuado así lo requiera la situación, con el fin de conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos dentro del nivel de razonamiento en el que opera. Esta fase no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse. Una de las finalidades principales es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias dentro de un contexto de diálogo de grupo induciéndoles a justificar su opinión, lo cual hará que tengan que analizar con cuidado sus ideas (y las de sus compañeros), que ordenarlas y expresarlas con claridad y con el vocabulario adecuado.

Fase IV o Fase de Orientación libre

Los estudiantes aplican sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema estudiado, con resultados y enfoques variados. En esta fase los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero estos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento por parte del profesor de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.

Fase V o Fase de Integración

El profesor resume el campo explorado, con la finalidad de lograr que los estudiantes integren en su red de conocimientos las habilidades de razonamiento adquiridas. Los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante. Con esta fase, el alumno habrá adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

4.3.1-Trabajos de investigación basados sobre el modelo de Van Hiele

Uno de los modelos explicativos más importantes sobre el razonamiento geométrico es el modelo de Van Hiele. Pensado y elaborado para describir los mecanismos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría, el modelo ha sido utilizado en otras ramas de las matemáticas, habiéndose también aplicado a otros marcos científicos. Desde su origen, a partir de las disertaciones doctorales de Dina Van Hiele-Geldof y de su esposo Pierre Van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda en 1957, la teoría ha influido de forma significativa en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Veamos un poco lo más significativo al respecto.

4.3.1.1- La influencia del modelo de Van Hiele en las escuelas rusas.

Podemos colocar en la Unión Soviética de los años 60 el primer "territorio académico" en el que la teoría de Van Hiele encontró sus primeros seguidores. Tradicionalmente, la geometría ha ocupado un lugar importante en el currículo escolar de Rusia. Esto y ciertas dificultades de aprendizaje descubiertos en los escolares de 12-13 años en la Unión Soviética parecía explicar el interés despertado por el nuevo modelo. Así, el nuevo modelo proporcionaba las explicaciones al fracaso en el aprendizaje de la geometría y ofrecía la forma de superar las dificultades que se presentaban. Las dos fases en las cuales se subdividía el currículo de geometría en la enseñanza rusa y la ausencia de mecanismos de transición para pasar de la "Fase Intuitiva" de aprendizaje a la "Fase de Sistematización" (12-13 años) en el aprendizaje provocaba grandes fracasos. La aplicación de la teoría de Van Hiele permitió a Pyshkalo (1968) deducir por ejemplo que:

1- Sólo entre el 10 y el 15% de los alumnos alcanzaba el nivel 2 al finalizar la fase intuitiva.

2- Durante los primeros cinco años, los alumnos trabajan principalmente en actividades de nivel 1 y sin embargo, en el primer mes del grado 6 se les exigía el nivel 3 de comprensión.

3- Un número importante de alumnos de 7 a 12 años percibían las figuras geométricas de forma global.

4- Para llegar al mismo nivel de pensamiento en las figuras tridimensionales, tardaban aproximadamente dos años.

5- La familiarización con los sólidos desde los primeros años de escolarización (a partir de los 8 años), producía unos niveles más altos de pensamiento que en la enseñanza tradicional, con el currículo antiguo (incluso mejor que los del grado 11-12 del currículo antiguo).

A la luz de los resultados obtenidos en el sistema ruso, Pyshkalo (1968) concluyó que el modelo de Van Hiele favorecía enormemente el desarrollo de las capacidades geométricas en la enseñanza básica, mejor que lo que se obtenía en la enseñanza tradicional.

4.3.1.2- La influencia del modelo de Van Hiele en los Estados Unidos.

La introducción del modelo de Van Hiele en los Estados Unidos no se realizó hasta bien entrada la década de los 70. Un informe sobre el currículo de matemáticas en la enseñanza elemental de la Unión Soviética, presentado por I. Wirszup (1974) sirvió de puerta de entrada. En el año 1978, la "National Science Foundation" aceptó financiar un programa de tres años para la elaboración de propuestas y de materiales para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la secundaria.

Entre los años 1979 y 1982 se desarrollaron en los Estados Unidos de América, USA, tres proyectos de investigación que fueron bautizados con el nombre del estado americano en el que se desarrollaba dicho proyecto. Así, han sido:

1- El “Proyecto Brooklyn”, dirigido por el Profesor Geddes cuyo propósito era la determinación del efecto que tendría la utilización del modelo de van Hiele en el aprendizaje de la geometría en un contexto americano. El estudio se realizó solamente con alumnos de secundaria, sin incluir los de Bachillerato.
2- El “Proyecto Chicago” dirigido por el Profesor Usiskin, con el objetivo, por un lado, de analizar los resultados obtenidos por los alumnos de secundaria y bachillerato en una enseñanza de la geometría basada sobre las orientaciones del modelo de Van Hiele y, por otro lado, de detectar la posible influencia de dicha enseñanza sobre el nivel de pensamiento de los alumnos.
3- El “Proyecto Oregón” dirigido por el Profesor Burguer cuyo objetivo era investigar sobre cuál debería ser la extensión “aconsejable” del modelo de Van Hiele en la educación primaria con tal de conseguir el conocimiento geométrico básico necesario para seguir los estudios posteriores con la progresión adecuada.

Los resultados obtenidos en estas tres investigaciones permitían obtener, como resultado principal, un mejor conocimiento de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El “Proyecto Brooklyn” evaluando los libros de texto utilizados por los estudiantes, encontró que, en su gran mayoría, utilizaban material geométrico cualitativo correspondiente a un nivel “cero” de Van Hiele a pesar de utilizar un lenguaje correspondiente al nivel “Dos” y con pocos ejercicios de nivel “Uno”. Permitió detectar también que había muy pocas preguntas pensadas para favorecer el razonamiento del alumno sobre la figura, limitándose muchas veces a pedir el nombre de la figura. Estos hechos favorecen el hecho de que el alumno crea más lo que “ve” que lo que “lee” en el libro de texto.

En el caso del “Proyecto Oregón”, los resultados permitieron la elaboración de un prototipo que servía para determinar los niveles de estudios longitudinales de los alumnos.

Los proyectos Brooklyn y Oregón permitieron confirmar que los chicos tenían una visión de las palabras distinta de la que se pueden imaginar los adultos. El coordinador del proyecto, el Profesor Coxford consideraba por lo tanto que haría falta más pruebas en este sentido así como un tiempo de investigación mucho más largo para poder conseguir informaciones más precisas sobre el lenguaje utilizado por los alumnos.

El “Proyecto Chicago” permitió establecer que, alumnos que han respondido correctamente algunas preguntas de nivel 4 respondían de forma incorrecta otras y con un nivel de razonamiento 1. Las causas, según los investigadores, podían haberse debido a varios motivos:

- La pobreza de la pregunta, limitando la respuesta del alumno
- Una respuesta acertada por casualidad. El alumno contesta al azar.
- Una “reducción de nivel”.
    - El alumno da la apariencia de estar razonando en un nivel más alto del que le corresponde pero sólo usa el vocabulario y la forma de expresarse en el nivel.
    - El alumno puede también superar una dificultad correspondiente a una pregunta de nivel superior mediante una respuesta de nivel

inferior. Esto puede ser debido a que el alumno, gracias a la experiencia adquirida resolviendo problemas del mismo tipo, ha sabido memorizar demostraciones del mismo tipo.

Los proyectos de Brooklyn y de Chicago aportaron datos importantes sobre los conocimientos básicos de lenguaje geométrico de los alumnos de primaria y de secundaria.

Estos proyectos han sido los impulsores de la investigación sobre el modelo y han marcado las pautas de numerosas investigaciones posteriores. Estos tres grandes proyectos de investigación sobre el modelo de van Hiele que debían servir para ayudar a mejorar los conocimientos geométricos de los alumnos escolarizados en los Estados Unidos tanto en primaria como en la educación secundaria y Bachillerato, estaban coordinados por el Profesor Coxford.

4.3.1.3- La situación de las investigaciones sobre el modelo de Van Hiele en España.

En España la teoría de los Van Hiele comenzó a ser conocida a mediados de los 80, contándose en la actualidad con un núcleo de trabajo importante en la Universidad de Valencia (véase Gutiérrez y otros, 1991; Jaime, 1993), o Barcelona (Rosich, Tesis Doctoral, 1994).

4.3.1.4- La situación de las investigaciones actuales

Las investigaciones realizadas durante los últimos años pueden ser agrupadas de la siguiente forma:

1- Los niveles de Van Hiele y la descripción del pensamiento geométrico

Son investigaciones orientadas hacia la utilización de los niveles de Van Hiele para la descripción precisa del pensamiento geométrico del alumno. Parecen confirmar la utilidad del modelo para describir el pensamiento geométrico del estudiante. Se han realizado tanto pruebas escritas como entrevistas clínicas que parecen apuntar en el mismo sentido que la teoría (Burger-Shanghnessy, 1982; Fuys et al., 1988; Han, 1986; Hoffer, 1983;Mayberry,1983a; Usiskin,1982; Wirzup, 1976).

2.- La transición entre niveles en el modelo de Van Hiele

La pregunta formulada consiste en determinar, en las investigaciones, si la transición de un nivel de razonamiento a otro se opera de forma continua o de forma discreta. El modelo inicial de Van Hiele considera que el alumno realiza la transición de un nivel de razonamiento a otro se realiza de forma discreta. Sin embargo, en algunas investigaciones (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys y otros, 1988) se evidenció la existencia de alumnos que razonan en dos niveles consecutivos, lo que llevó a algunos investigadores a considerar períodos de transición en los niveles (Gutiérrez y otros, 1991; Clements, 1992; Jaime, 1993).

Los investigadores soviéticos parecen indicar una respuesta positiva (Hoffer, 1983; Wirzup, 1976). En conjunto, los resultados son mixtos. Diferentes investigadores han comunicado que los estudiantes en transición son difíciles de clasificar de una manera precisa (Fuys et al. 1988; Usiskin, 1982), especialmente para los niveles 2 y 3 (Burger y

Shaughnessy, 1986; Fuys et al. 1988), estudiando las capacidades de los estudiantes para progresar dentro y entre niveles, como resultado de la instrucción, determinaron a la vez un nivel de entrada y un nivel potencial (el nivel demostrado después de la instrucción). Mientras que unos estudiantes estaban razonando en un nivel fijo, otros estaban inestablemente sobre los niveles, oscilando entre ellos. Similares resultados fueron observados en un experimento de enseñanza sobre poliedros (Lunkenbein, 1983).

3.- Investigaciones sobre la transposición de los niveles en conceptos geométricos diferentes.

Diferentes investigaciones han revelado que alumnos pueden encontrarse en distintos niveles de razonamiento según el concepto geométrico objeto del estudio, lo que se denomina localidad (Mayberry, 1983a y b; Denis, 1987; Jaime, 1993), aunque este hecho no es compartido por algunos investigadores. Lo que sí parece ser de común acuerdo es que, el haber alcanzado un nivel de razonamiento para un concepto determinado, facilita en gran medida la adquisición de los niveles para otros conceptos (Fuys y otros, 1988), manteniendo la hipótesis de que existe un nivel "potencial" que facilita el aprendizaje de los restantes conceptos.

También se ha observado, en diferentes autores (Burger-Saughnessy, 1986; Denis, 1987; Gutiérrez y Jaime, 1988; Mason, 1989; Mayberry, 1983) que los estudiantes exhiben diferentes niveles en diferentes tareas. Algunos incluso oscilan en una misma tarea. Fuys et al. (1988) coinciden en que cuando estudian un concepto nuevo, los estudiantes frecuentemente caen al primer nivel de pensamiento. Mantienen, sin embargo, que rápidamente son capaces de elevarse al nivel de pensamiento más alto que alcanzan en conceptos previos. Estos investigadores defienden que esos resultados apoyan la opinión de que un nivel potencial de pensamiento permanece estable entre conceptos.

4.- Investigaciones sobre la jerarquía de los niveles.

La investigación más consistente indica que los niveles son jerárquicos, aunque también aquí hay excepciones (Mason, l989). Mayberry, (1983b) mediante el análisis con escalas acumulativas del tipo Guttman, mostró que las tareas realizadas en los distintos niveles por profesores en formación constituían una jerarquía.

4.3-2. El modelo de Van Hiele y el binomio Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas

El Modelo de Van Hiele nos ofrece una guía muy interesante no solamente para identificar las características del razonamiento de un individuo o de un grupo sino también para evaluar la "calidad" de dicho razonamiento. Lo hemos utilizado, en este caso, para un estudio de casos, en un tramo de edad determinado, dentro de unas realidades sociales determinadas y de unas condiciones educativas fijadas. Se puede utilizar en cualquier "conducta reflexiva" para evaluar los niveles de razonamiento o para facilitar el aprendizaje, para facilitar la enseñanza de las matemáticas.

El modelo nos proporciona pautas para analizar el modelo de razonamiento de un individuo desde el enfoque más simplista e intuitivo hasta el enfoque más formal y complejo, a la vez que facilita herramientas para corregir los modos de razonamiento inadecuados o para ayudar al individuo a mejorar su capacidad de razonamiento así como su calidad. O sea, no aplicamos el modelo de Van Hiele para el aprendizaje matemático sino que lo utilizamos para detectar el nivel de razonamiento así como la calidad del razonamiento matemático de unos alumnos que han sido catalogados como buenos alumnos.

4.3-3. El método de Van Hiele como método de Evaluación

La gran complicación que se presenta es la correcta evaluación de las respuestas producidas en la aplicación del método de van Hiele. ¿Cómo evaluar la respuestas de la forma más precisa posible?

Muchas veces la realización de una entrevista posterior puede resultar interesante para fijar claramente el nivel de razonamiento. Hay que tener en cuenta que:

1-El nivel de razonamiento de los alumnos depende del área de las Matemáticas que se trate.

2. Se debe evaluar cómo los alumnos contestan y el por qué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.

3. En las preguntas no está el nivel de los alumnos/as sino que está en sus respuestas.

4. En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en nivel distinto.

5. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

Estas son las dificultades reales a la hora de evaluar.

4.4- Alumnos Talentosos

Para esta investigación, pretendemos investigar "los niveles de razonamiento matemático en los que trabajan los alumnos considerados talentosos". No es una investigación sobre los procesos de "razonamiento" en general ni tampoco sobre los procesos que acompañan el "razonamiento matemático" en sí. Además, nos centraremos en la franja de edad 14-15 años. Hemos de aprovechar también para aclarar que se trata de alumnos clasificados según su "rendimiento académico", sin que haya mediado ninguna prueba específica de evaluación de las aptitudes. La muestra de trabajo estará pues formada no por alumnos con capacidades innatas demostradas (aunque se pueda incluir en el grupo de trabajo, a alumnos que reúnan dichas características), sino por alumnos catalogados por la Comunidad Educativa como "Buenos Alumnos". Sin embargo, el rendimiento académico ha de permitir su selección. Es decir, se requiere que los informes de la Comunidad Educativa sean favorables. Claramente favorables.

Nos centramos en el alumno con "éxito académico", es decir, en aquél alumno tal que la "Comunidad Educativa" ha ratificado las capacidades de adaptación al sistema educativo y que demuestra unas "habilidades pedagógicas" superiores a la media, muy por encima de la normal. En ningún momento hablamos en exclusiva de los alumnos "superdotados", aunque pueda quedar oculta dicha condición en alguno de los participantes.

Otro de los problemas con el que nos vamos a enfrentar va a ser él de la multiplicidad de apelaciones, de calificativos para referirse al tipo de alumno que estudiamos en este trabajo de investigación. Puede ser llamado a veces "Alumno con Éxito", otras veces "Alumno Talentoso", "Alumno Brillante" o a veces, escuetamente "Buen Alumno".

Nos referiremos a los alumnos que nos interesan como "Alumno con Éxito Académico" o "Alumno Catalogado como Altamente Capacitado" o "Alumno con Talento", entendiendo el "talento" como capacidades excepcionales en un ámbito específico del conocimiento.[11], o bien "Alumnos que muestran habilidades específicas en áreas muy concretas" según las indicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia (2000).

Hablar de "Alumno con Éxito Académico", en el contexto de nuestro trabajo de investigación, es bastante claro. Ocurre igual con los conceptos de "Buen Alumno" o bien de "Alumno Brillante". Sin embargo, la utilización de conceptos tales como "Alumno Talentoso", "Alumno con Altas Capacidades", "Alumno Dotado", "Alumno con Talento" o "Alumno Talentoso", puede provocar malas interpretaciones. Por lo tanto, conviene aclarar su utilización a lo largo del trabajo así como establecer los nexos de unión, las vinculaciones entre las diferentes nociones utilizadas, a veces como términos sinónimos.[12]

4.4-1. Descripción de la terminología usada en la investigación

Nos centramos en el alumno con "éxito académico", es decir, en aquél alumno tal que la "Comunidad Educativa" ha ratificado las capacidades de adaptación al sistema educativo y que demuestra unas "habilidades pedagógicas" superiores a la media, muy

[11] Educación y Diversidad, Gutiérrez, Maz

[12] Mönks y Mason (2000) tratan los siguientes términos como sinónimos: dotado (*gifted*), altamente capaz (*highly able*) y talentoso (*talented*)

por encima de la normal. En ningún momento hablamos en exclusiva de los alumnos "superdotados", aunque pueda quedar oculta dicha condición en alguno de los participantes.

Otro de los problemas con el que nos vamos a enfrentar va a ser él de la multiplicidad de apelaciones, de calificativos para referirse al tipo de alumno que estudiamos en este trabajo de investigación. Puede ser llamado a veces "Alumno con Éxito", otras veces "Alumno Talentoso", "Alumno Brillante" o a veces, escuetamente "Buen Alumno". Conviene por lo tanto aclarar el uso que vamos a hacer del concepto en este trabajo. Nos referiremos a los alumnos que nos interesan como "Alumno con Éxito Académico" o "Alumno Catalogado como Altamente Capacitado" o "Alumno con Talento", entendiendo el "talento" como capacidades excepcionales en un ámbito específico del conocimiento.[13]

Hablar de "Alumno con Éxito Académico", en el contexto de nuestro trabajo de investigación, es bastante claro. Ocurre igual con los conceptos de "Buen Alumno" o bien de "Alumno Brillante". Sin embargo, la utilización de conceptos tales como "Alumno Talentoso", "Alumno Altamente Capacitado", "Alumno Dotado", "Alumno con Talento" o "Alumno Talentoso", puede provocar malas interpretaciones. Por lo tanto, conviene aclarar su utilización a lo largo del trabajo así como establecer los nexos de unión, las vinculaciones entre las diferentes nociones utilizadas, a veces como términos sinónimos.[14]

[13] Educación y Diversidad, Gutiérrez, Maz

[14] Mönks y Mason (2000) tratan los siguientes términos como sinónimos: dotado (*gifted*), altamente capaz (*highly able*) y talentoso (*talented*)

Merece también la pena hacer constar la interpretación religiosa del Talento, en su expresión más conocida que es la descrita en la "Parábola de los Talentos" en el "Evangelio". El "Talento" es un "Don de Dios". Es susceptible de mejora y es obligación del Cristiano trabajar para ello. El talento sería un "Don" que colma al individuo y este último, para agradecer a su Creador, habrá de trabajarlo para hacerlo fructiferar.

Los estudios, investigaciones, publicaciones, son numerosas y no podremos pretender abarcarlas todas en el marco de este trabajo. Además, la multiplicidad de enfoques que contemplan además la influencia y las interacciones con otras manifestaciones de la inteligencia tales como la Superdotación, la Hiperdotación, los múltiples comportamientos Talentosos, harían de este trabajo una compilación ajena a los objetivos que nos hemos fijado. Consideraremos por lo tanto como definitorios los modelos expuestos.

Una de las mayores dificultades del trabajo es definir con precisión el tipo de alumno utilizado en la investigación. No definir con precisión el tipo de alumno puede impedir entender el trabajo presentado. Hemos evitado la utilización del concepto de "superdotación" ya que este trabajo no busca, en esencia, trabajar con este tipo de alumnos, pero sin embargo, hemos utilizado, hasta el momento, casi como sinónimos, los conceptos de "Alumno con Talento" , "Alumno con Altas Capacidades", "Alumno con Éxito", "Buenos Alumnos", "Alumnos con habilidades excepcionales".

Puesto que no vamos a utilizar ninguna de las herramientas para la detección del talento, y puesto que nuestro interés se centra en el alumno que demuestra altas capacidades y logra utilizarlas para tener éxito en el ámbito académico y en la totalidad de las asignaturas, el concepto que mejor definirá nuestra muestra es el de "Alumnos con Éxito Académico".

La no realización de tests o de pruebas obedece al hecho de que ninguno nos servía realmente para nuestros propósitos. Los propios veredictos de la Comunidad Educativa con respecto a los elementos de la muestra nos eran de mayor utilidad y nos proporcionaban la base necesaria para el diseño de las pruebas.

Contemplamos las opciones siguientes:

1- Realizar entrevistas personales tanto a profesores como a los propios alumnos:
    a. De forma sistemática, para toda la población objeto.
    b. Después de haber realizado una primera selección basada sobre los dictámenes de la Comunidad educativa.
2- Usar los veredictos de la Comunidad Educativa y centrarnos en los alumnos con éxito académico contrastado.
3- Recurrir a los Tests de Evaluación de Capacidades

Consideramos en un principio la utilización del test SCAT para la detección del talento y de las altas capacidades. Hubiera sido bastante interesante su utilización en el caso de tener que realizar una selección "más fina", dentro de un grupo numeroso y en ausencia de los demás parámetros que estaban en nuestro poder, o, en el supuesto de tener que decidir, sobre la utilización de los resultados para establecer parámetros formativos posteriores para dichos alumnos.

Pensamos también tanto en el test de Stanford-Binet como en la Escala Weschler de inteligencia. Ninguno se adaptaba realmente a lo que pretendíamos medir aunque el último hubiera podido ajustarse más a lo buscado en nuestro trabajo de investigación.
Optamos al final por la opción 2, la de usar los veredictos de la Comunidad Educativa y centrarnos en los alumnos con éxito académico contrastado. Esta opción ha sido pues la que pareció ser la más interesante y que permitía ceñirse mejor a las hipótesis de trabajo que nos habíamos fijado al principio.

4.4-2. Perfiles asociados a los alumnos talentosos

Hablar de alumnos talentosos significa hablar de individuos, que han logrado explotar de forma óptima sus diferentes competencias, haciendo que sus habilidades personales, las destrezas adquiridas, las capacidades personales, se sumen para facilitar su modo de funcionamiento en un entorno determinado: académico, laboral, u otro. Para establecer un perfil de este tipo de alumno sobre el cual realizamos este trabajo de investigación (situándolo en su entorno de funcionamiento: el educativo) hemos recorrido a las teorías de tres autores de la psicología cognitiva:

-* R. Stenberg con su concepto de "Inteligencia Exitosa", la cual, según él, lleva al éxito en la vida siendo la "combinación de las habilidades analíticas, creativas y prácticas de una persona. Capacita al individuo para adaptarse a un ambiente, seleccionar ambientes compatibles entre sí y crear el ambiente en que uno consigue estar mejor consigo mismo".

-* H. Gardner, con su concepto de "Inteligencias múltiples". Según él, las diferentes inteligencias proporcionan al individuo un alto potencial que puede ser activado o n en función del valor que se le otorgue en una cultura particular, de las oportunidades disponibles en dicha cultura y de las decisiones personales tomadas por el individuo, por sus familiares, por sus profesores, por su entorno o en función de su entorno.

-* D. Goleman, con su concepto de "Inteligencia Emocional" que es, según él, esta capacidad de reconocer nuestras propias emociones y las ajenas, de motivarnos y de manejar adecuadamente dichas emociones en nosotros mismos y en nuestras relaciones.

Esto último y lo anteriormente explicitado nos proporciona la base adecuada para intentar definir los perfiles asociados a los alumnos talentosos. La gran mayoría de autores parecen ponerse de acuerdo en aceptar que los alumnos talentosos reúnen una serie de características particulares que suelen llamar la atención y que generalmente, se puede decir que se encuentran los siguientes rasgos, de forma aislada o conjunta:

-* Sentido de la observación : Es capaz de apreciar los cambios más nimios a su alrededor.

-* Curiosidad : Es capaz de ser atraído por los más ligeros matices. Le llama la atención lo extraordinario, lo que se sale de lo común.

-* Espíritu crítico y enfoque profundo. Suele ir más allá de lo superficial y muestra una muy buena facilidad para la abstracción.

-* Sentido de la responsabilidad: Se evalúa con cierta severidad y procura cumplir en todas las tareas que le son encomendadas.

-* Autonomía en el trabajo, requiriendo una mínima dirección por parte del profesor.

-* Sentido lógico muy desarrollado : Detecta las relaciones entre los fenómenos que ocurren a su alrededor.

-* Capacidad de generar relaciones ocultas entre los hechos observados

-* Perspicacia : Capta lo esencial de los acontecimientos

-* Gran capacidad expresiva: Domina los matices lingüísticos

-* Capacidad de adaptación

-* Creatividad y originalidad

-* Empatía muy desarrollada y buena capacidad de comunicación

-* Gusto por el trabajo bien hecho

-* Sentido del rigor : Modos de utilización adecuada de los formalismos de representación y de los modelos de razonamiento.

Podemos agrupar estas características en grandes rasgos diferenciadores. Principalmente son:

A- Características Cognitivas

- a. Área de las Competencias Básicas
    - i. Dominio del lenguaje escrito
    - ii. Dominio del lenguaje matemático
    - iii. Buena comprensión
        1. Verbal
        2. Lectora
- b. Autonomía Académica

i. Elaboración de buenas técnicas de aprendizaje

ii. Buena capacidad de organización

c. Autoevaluación

i. Sabe cómo aprender

ii. Sabe qué aprender

iii. Sabe cómo gestionar su aprendizaje y mantiene una buena relación con el saber

d. Destrezas

i. Buena capacidad de abstracción y de síntesis

ii. Sabe cómo elaborar conocimientos diversos y como relacionar áreas de conocimiento diversos

B- Características Sociales

a. Desarrollo de Valores

i. De trabajo en equipo

ii. Solidaridad y Tolerancia

iii. Ayuda Mutua

C- Características Personales

a. Sentido de la responsabilidad

i. Trabaja de forma adecuada las diferentes ramas del saber

ii. Trabaja mucho

b. Aspectos Motivacionales

i. Sabe cómo, cuando y qué preguntar

ii. Sabe buscar y ordenar las informaciones necesarias

iii. Sabe escuchar y mostrar interés en el trabajo

c. Consecución de Logros

  i. Trabaja para conseguir sus metas

4.5. Otros Elementos Complementarios

Convendría ahora comentar de nuevo las preguntas que van a orientar nuestro trabajo de investigación, habiendo fijado, con este marco teórico, el contorno teórico dentro del cual nos moveremos.

Nos planteábamos las preguntas básicas siguientes:

¿Cómo resuelven los alumnos altamente cualificados los problemas algebraicos y geométricos?

¿Los procedimientos que utilizan estos alumnos son diferentes que el resto de los alumnos?

¿En qué medida el sistema educativo puede influir en estos alumnos?

¿Teniendo éxito académico, ha de resultarse una alta capacidad de razonamiento matemático?

No sólo para orientar nuestra investigación y para arrojar luces sobre ciertos fenómenos pedagógicos asociados al razonamiento matemático de los alumnos Altamente Capacitados. Deberemos por lo tanto estar Talentoso para responder a las preguntas tales como:

* Siendo un alumno catalogado como “Alumno con Éxito Académico”, o “Alumno Talentoso”, el sistema educativo en el que está escolarizado, tiene alguna influencia sobre su modo o su nivel de razonamiento matemático?

* Basándonos en el modelo de Van Hiele, ¿En qué nivel de razonamiento matemático operan los alumnos catalogados como “Talentosos? ¿Influye el sistema educativo?

* ¿ Existe una intervención voluntaria y reflexiva por parte del profesor para facilitar el proceso de aprendizaje del alumno Talentoso?

Este planteamiento nos obliga también a considerar ciertos parámetros diferenciadores en la enseñanza de las matemáticas en los entornos educativos implicados en este trabajo de investigación. Por eso conviene tener en cuenta (tal como comentábamos en la sección 3.9) los diferentes matices o mejor dicho, establecer una valoración de los elementos diferenciadores de los diferentes sistemas educativos y de los parámetros definitorios de los alumnos que forman parte de la muestra.

Capítulo V

Diseño y Metodología

de la Investigación

La solución de problemas es una escuela de la voluntad. Resolviendo problemas que parecen difíciles, el alumno aprende a perseverar pese a los fracasos, a apreciar el menor de los progresos, a lograr la idea esencial , a hacer un llamado a toda su fuerza de concentración. Si el alumno no encuentra en la escuela la oportunidad de familiarizarse con las diversas emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática ha fallado en su objeto más esencial.

G. Polya,

5.1- Descripción y Metodología de la Investigación

Formulamos, al principio de este trabajo de investigación, una serie de preguntas que deberían orientar este trabajo de investigación y, de hecho, debían constituir el elemento central entorno al cual desarrollar toda la investigación. Las preguntas básicas que nos formulábamos eran:

¿Cómo resuelven los alumnos de Alto Rendimiento los problemas algebraicos y geométricos?

¿Los procedimientos que utilizan estos alumnos son diferentes que el resto de los alumnos?

¿En qué medida el sistema educativo puede influir en estos alumnos?

¿Teniendo éxito académico, ha de resultarse una alta capacidad de razonamiento matemático?

Las respuestas a dichas preguntas deberían poder aportarnos propuestas novedosas, para reforzar nuestra práctica educativa arrojando luces sobre ciertos fenómenos pedagógicos asociados al razonamiento matemático de los alumnos altamente Talentosos. Así, tal como decíamos al principio, el trabajo de investigación, nos deberá capacitar para responder a las preguntas tales como:

1- Siendo un alumno catalogado como “Alumno con Talento”, o “Alumno Talentoso”, el sistema educativo en el que está escolarizado, tiene alguna influencia sobre su modo o su nivel de razonamiento matemático?
2- Basándonos en el modelo de Van Hiele, ¿En qué nivel de razonamiento matemático operan los alumnos catalogados como “Talentosos? ¿Influye el sistema educativo?
3- ¿ Existe una intervención voluntaria y reflexiva por parte del profesor para facilitar el proceso de aprendizaje del alumno Talentoso?

Para poder responder las preguntas que se formulan en este trabajo de investigación y debido al diseño utilizado la metodología más pertinente será de tipo cualitativo. Utilizaremos la técnica del estudio de casos y trabajaremos con los alumnos que forman parte de la muestra sin sacarlos del contexto de estudio e intentando no influir en la dinámica de funcionamiento de los centros elegidos.

5.2- Descripción de las Fases de la investigación

La investigación está dividida en cuatro grandes fases o etapas durante las cuales hemos elaborado el diseño general de la investigación que nos deberá permitir llegar a establecer las hipótesis de salida. El desarrollo de cada fase con la descripción de las actividades realizadas y de los instrumentos utilizados en cada una de las etapas ha sido el siguiente:

Fases de la Investigación	Objetivos Fijados para la fase indicada	Instrumentos Utilizados en cada una de las fases
FASE I	-Determinación del problema de la investigación. -Profundizar en el marco teórico (bibliografía) para enmarcar la tesis doctoral. -Delimitación de los diferentes aspectos a considerar. -Fundamentación del Marco teórico. -Análisis exploratorio de los elementos contextuales	-Revisión de la bibliografía. -Análisis de las diferentes posturas sobre los diferentes aspectos a analizar en el marco teórico: - Alumnos con Éxito - Resolución de Problemas - Método de van Hiele. -Análisis de los contenidos matemáticos de los programas de los diferente educativos tratados en el estudio.
FASE II	Establecimiento de la metodología	-Análisis y comprobación de las muestras elaboradas. -Gestión de la trabas administrativas y pedagógicas (hablar con los centros, hablar con los equipos de psicopedagogía asociadas a los centros, etc.)

Fases de la Investigación	Objetivos Fijados	Instrumentos Utilizados
FASE III	Realización del Estudio Experimental	-Establecimiento de los itinerarios de investigación. -Experimentación de la prueba. -Seguimiento de la resolución de las pruebas en los diferentes centros.
FASE IV	Elaboración de las conclusiones y nuevas perspectivas	-Análisis de los datos obtenidos. - Elaboración de las tablas de resultados. -Interpretación

Tabla 1 – T5

Los objetivos que nos fijamos en cada etapa se han establecido en función de los instrumentos que teníamos a nuestro alcance. Los instrumentos sobre los cuales nos hemos apoyado para la elaboración de este trabajo de investigación han sido:

1. Expedientes académicos de los alumnos (Informe psicopedagógico, Boletines de notas, Pruebas realizadas en los créditos de matemáticas)
2. Currículum matemático de cada uno de los sistemas educativos de los países de los alumnos que intervienen
3. Prueba inicial de evaluación de conocimientos matemáticos (problemas) y de reconocimiento de aptitudes.
4. Diseño de una prueba específica para evaluar los procedimientos que utilizan los alumnos altamente cualificados en su razonamiento matemático.
5. Diseño de las pautas de la entrevista a realizar a los alumnos del IES JULIÀ MINGUELL
6. Realización de una entrevista individual a los alumnos escolarizados en el sistema educativo español y considerados como "alumnos altamente cualificados" para analizar los tipos de respuestas que dan en las pruebas.

5.3 – Justificación del diseño de la Prueba

Uno de los problemas más serios ha sido el diseño de la prueba que iban a resolver los alumnos que formaban parte de la muestra. Se pretendía que dicha prueba permitiera medir de forma clara lo que nos habíamos fijado como objetivo. Consta de 5 preguntas, 2 preguntas de carácter numérico y 3 preguntas de carácter geométrico. Otra de las limitaciones impuestas por el diseño de la investigación es el hecho de que queríamos realizar la investigación sin modificar el entorno de experimentación, aprovechando la estructura de los centros educativos y dejando que sean las mismas estructuras existentes las que canalicen nuestra labor investigadora. Salvo en el caso del IES Julià Minguell en el que teníamos mayor acceso al diseño de las intervenciones sobre los alumnos de la muestra, en los demás casos nos ajustamos a las pautas fijadas por el centro.

Por otro lado, las preguntas están pensadas de forma que cualquier alumno, de cualquier nivel de razonamiento pueda contestar. La tipología del alumno que forma parte de la muestra indica que son alumnos que siempre serán capaces de dar una respuesta determinada a la pregunta formulada. Las diferencias se notarán en la "calidad de la respuesta" ofrecida. Lo determinante entonces será la forma y el estilo de resolución utilizados. Y, puesto que lo que nos proponemos es la evaluación de la calidad del razonamiento del alumno "enfrentado a un problema", con la obligación de encontrar una respuesta, hemos creído que este tipo de preguntas facilitaba dicha tarea, provocando una respuesta.

Podremos entonces, en cada uno de los casos, analizar por ejemplo:

- El grado de soltura en la manipulación de las expresiones matemáticas

- La capacidad del alumno de realizar conjeturas
- La influencia del currículo real enseñado en el centro educativo del alumno.
- El nivel de razonamiento utilizado en las respuestas.

Entonces:

1-Para las preguntas algebraicas entonces, se espera en todo momento una respuesta del alumno, independientemente de su capacidad de resolución.

2- Para las preguntas de carácter geométrico, se espera también que los alumnos respondan, a pesar de que, en apariencia, las preguntas Geométricas parezcan más difíciles. Nos basamos para ello en lo siguiente:

- Los alumnos escolarizados en el sistema español y que participaran en la investigación, a pesar de no haber seguido ningún curso específico sobre geometría, han realizado créditos de Educación visual y Plástica.

- Otro subgrupo ha seguido un crédito de resolución de problemas en el que se ha trabajado la resolución de problemas Geométricos. (Hemos de hacer notar que en ningún momento ha sido un crédito específicamente provocado por el trabajo o diseñado y orientado hacia la investigación. Simplemente, dentro del marco de funcionamiento del IES elegido y en la misma dinámica de reparto de alumnos en los diferentes créditos ofertados por el centro y siguiendo la misma "política" de diseño de créditos, se ha ofrecido un crédito de resolución de problemas.)

Se espera, que en el nivel formal, las respuestas, tanto algebraicas como geométricas, adopten la estructura siguiente:

- Exposición de los datos del “Problema” después de haber realizado una lectura completa.
- Análisis de de los datos
    - Descripción de las hipótesis
    - Planteamiento
    - Elaboración de un plan de resolución
        - Demostración
        - Resolución
- Enunciado de la solución final
    - Comprobación del resultado
- Conclusión y generalización.

Esperamos pues, una estructura de resolución de tipo “polyano”, es decir con las fases siguientes:

1- Comprensión del problema

- Fase de familiarización con el problema propuesto.
- Lectura completa del enunciado para tener una visión global de la situación.
- Analizar los Datos
- Delimitar la/las incógnita/s
- Fijar las condiciones y analizar su tipo (Suficiencia – Redundancia – Contradicción).

2- Concepción de un plan

- ¿Ha habido alguna situación parecida?
- Determinar la relación entre los datos y la incógnita
- ¿Pueden existir alternativas?

- Elaboración de un plan de resolución

3- Ejecución del Plan concebido

- En la ejecución del plan, comprobar cada paso

- Presentar la solución de forma la exactitud y la corrección de cada paso no ofrezca ninguna duda.

4- Examinar la solución obtenida

- Verificar la solución obtenida .

- Analizar la solución desde varios puntos de vista y buscar los puntos de contacto con los conocimientos previamente adquiridos.

Examinar el método que ha "tenido éxito" es decir aquélla que le ha conducido al resultado adecuado.

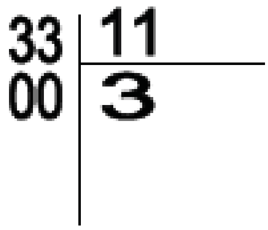
5.3.1. La propuesta de prueba

La prueba propuesta ha sido la siguiente:

Razona detalladamente tus respuestas a cada una de las preguntas . Da todas las informaciones que creas necesarias.

Ejercicio 1 – Para los números tales como el 33 o el 44, números que tienen las dos cifras iguales, al dividirlos por 11, obtenemos un resto nulo. ¿ Podemos decir entonces que todo número de dos cifras, con las dos cifras iguales , es divisible por 11?

Eso es:



Ejercicio 2- Tenemos dos números cualesquiera. La diferencia entre ellos es igual a 1 y su suma es un número comprendido entre 10 y 17. ¿ Cuáles son los valores posibles para estos dos números ?

Ejercicio 3-Tenemos tres puntos en el plano como los indicados en la figura . ¿ Qué estrategia se puede seguir para encontrar un punto equidistante de los tres (es decir , la distancia de dicho punto a cada uno de los puntos dados es la misma) . Algunos datos que pueden ser útiles :

1- La distancia del punto A al punto B es igual a 8 cm.

2- La distancia del punto A al punto C es igual a 6 cm.

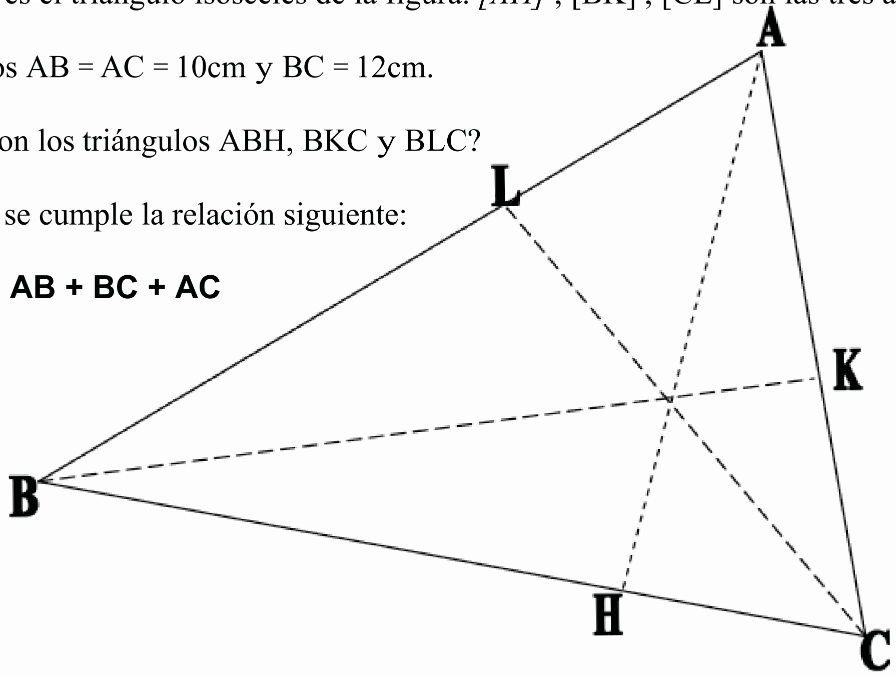
3- La distancia del punto C al punto B es igual a 10 cm.

Ejercicio 4- ABC es el triángulo isósceles de la figura. *[AH]* , [BK] , [CL] son las tres alturas y además, tenemos AB = AC = 10cm y BC = 12cm.

a) ¿ De qué tipo son los triángulos ABH, BKC y BLC?

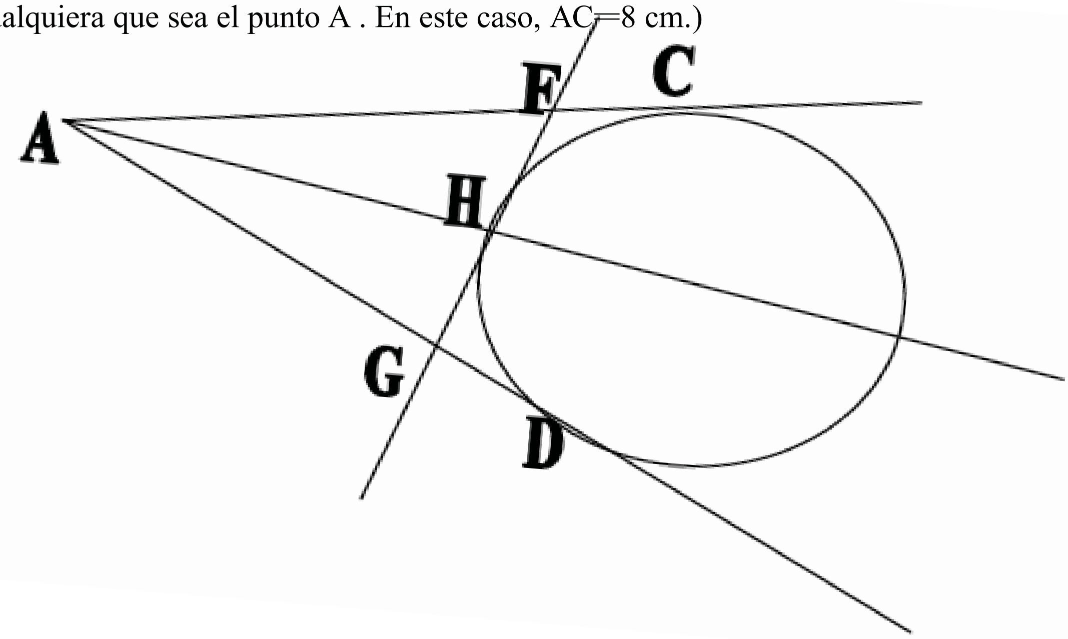
b) ¿ Es cierto que se cumple la relación siguiente:

AH + BK + CL < AB + BC + AC



Ejercicio 5-La situación es la indicada en la figura. Se necesita saber , con las informaciones dadas, **el perímetro del triángulo AFG.**

(Recordar que las dos tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia, tienen la misma longitud. En este caso, se ha indicado mediante AC = AD cualquiera que sea el punto A . En este caso, AC=8 cm.)



5.3.2- Bases para la corrección de la prueba

He aquí la corrección que hemos realizado de los ejercicios. Nos sirve también como baremo para determinar el nivel a asignar a cada ejercicio resuelto.

Ejercicio 1- Primera Opción de resolución

Si N es un número de dos cifras, con las dos cifras iguales, entonces N se escribe aa.

Tenemos entonces:

$$N = aa = 10a + a = 11a$$

Entonces, N es divisible por 11 para cualquier valor de a.

(Se supone no válido el valor 0).

$$\frac{N}{11} = \frac{aa}{11} = \frac{11a}{11} = a$$

Podemos por lo tanto concluir que todo número de 2 cifras con las dos cifras iguales, es divisible por 11.

Segunda opción de resolución – Por Ensayo-Error

Enumerando las diferentes posibilidades, tenemos como valores para N:

11 22 33 44 55 66 77 88 99

Todas estas cantidades son divisibles por 11. Y son las únicas.

Opción 3

Se puede considerar el criterio de divisibilidad por 11, a saber, la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la de la suma de los dígitos que ocupan lugares impares es o nula o un múltiplo de 11: $N = aa$ y $a - a = 0$

Ejercicio 2

La respuesta esperada era la siguiente:

Sean X e Y los dos números buscados, entonces:

$X – Y = 1$ o bien despejando, $X = 1 + Y$ o bien $Y = X - 1$

Su suma esta comprendida entre 10 y 17, eso es, suponiendo $S = X + Y$:

$10 < S < 17$ o también: $10 \leq S \leq 17$. Consideremos la segunda opción.

Puesto que $S = X + Y = (1 + Y) + Y = 1 + 2Y$

Tenemos : $10 \leq 1 + 2Y \leq 17$

Eso es: $1 + 2Y \leq 17$; $2Y \leq 17 – 1$; $2Y \leq 16$; $Y \leq 8$

Puesto que $Y = X – 1$, tenemos : $X - 1 \leq 8$; $X \leq 9$

De la misma forma, tenemos:

$$10 \leq 1 + 2Y \; ; \; 10 - 1 \leq 2Y \; ; \; 9 \leq 2Y \; ; \; 9/2 \leq Y$$

Puesto que $Y = X - 1$, tenemos : $9/2 \leq X - 1$; $9/2 + 1 \leq X$; $11/2 \leq X$

Por lo tanto:

$$9/2 \leq Y \leq 8 \quad \text{y para X tenemos :} \quad 11/2 \leq X \leq 9$$

Si suponemos que X e Y son números enteros, tendremos:

$$5 \leq Y \leq 8 \quad \text{y para X tenemos :} \quad 6 \leq X \leq 9$$

Ejercicio 3

Se esperaba simplemente que comentaran que las mediatrices de los segmentos [AB], [AC] y [BC] se cortarían en un punto equidistante de los tres puntos dados.

Sin embargo, observando que es un triángulo rectángulo, algunos podrían encontrar que es el punto medio de la hipotenusa. Para demostrar que es un triángulo rectángulo, se utilizaría el teorema de Pitágoras en su forma recíproca (Si en un triángulo, la suma de los cuadrados de dos de los lados es igual al cuadrado de la hipotenusa, entonces, dicho triángulo es un triángulo rectángulo siendo la hipotenusa el mayor de los tres lados, los otros dos formando los catetos de dicho triángulo.)

No se espera en ningún momento una demostración analítica teniendo en cuenta las diferentes distancias, es decir si I es el punto de intersección de las tres mediatrices:

$$d(I,A) = d(I,B) = d(IC)$$

A, B, C son puntos dados y hay que encontrar las coordenadas de I(x,y)

4- Es interesante comprobar la solución dada por el alumno Albert.

1)También se puede resolver de la siguiente forma:

a) [AH] es la altura correspondiente al lado (BC) en el triángulo ABC. Entonces, las rectas (AH) y (BC) son perpendiculares en H y los triángulos AHB y AHC son rectángulos en H.

b) De la misma forma, [BK] es la altura correspondiente al lado (AC) en el triángulo ABC. Entonces, las rectas (BK) y (AC) son perpendiculares en K y los triángulos BKC y BKA son rectángulos en H.

c) Razonando de la misma forma, [CL] es la altura correspondiente al lado (AB) en el triángulo ABC. Entonces, las rectas (AL) y (AB) son perpendiculares en L y los triángulos CLB y CLA son rectángulos en L.

Concluimos entonces que los triángulos ABH, BKC y BLC son triángulos rectángulos.

2) Veamos si se cumple la relación indicada, a saber:

$$AH + BK + CL < AB + BC + AC$$

a) ABH es un triángulo rectángulo cuyos catetos son [AH] et [BH]. Entonces puesto que la hipotenusa es el lado más largo en un triángulo rectángulo, tenemos:

AB >AH (1) y también AB >BH

b) BKC es un triángulo rectángulo cuyos catetos son [BK] et [KC]. Entonces puesto que la hipotenusa es el lado más largo en un triángulo rectángulo, tenemos:

BC > BK (2) y también BC > KC

b) ALC es un triángulo rectángulo cuyos catetos son [AL] et [AB]. Entonces puesto que la hipotenusa es el lado más largo en un triángulo rectángulo, tenemos:

AC > LC (3) y también AC > AL

Sumando las relaciones (1), (2), (3), tenemos:

$$AB + BC + AC > AH + BK + LC$$

Ejercicio 5

En este caso tenemos, utilizando la propiedad de la tangente (enunciada en el texto), tenemos:

AC = AD

FH = FC

GH = GD

Perímetro del triángulo AFG = AF + FG + AG = AF + FH + HG +AG =

= AF + FC + AG + GD = AC + AD

Verbalmente, se les recomendaba que tomaran como valor de AC, 8 cm. Podrían hacer uso si fuera menester. En este caso, el perímetro del triángulo sería de 16 cm. No era imprescindible hallar un valor numérico.

Se les recordaba además que las dos tangentes exteriores eran de igual longitud.

Para categorizar los resultados de los alumnos, utilizaremos los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele, basándonos en la tabla siguiente:

Nivel de pertenencia	Elementos característicos Explícitos correspondiente al nivel mostrado. El estudiante lo domina.	Elementos característicos Implícitos (No dominado por el estudiante en el nivel mostrado)
Nivel 1 El nivel 1 corresponde al nivel de Visualización o nivel de reconocimiento	- El estudiante percibe los objetos en su totalidad como una unidad. No logra diferenciar sus atributos o sus componentes. -Se limita a describir el objeto que se le presenta para su análisis basándose en su apariencia física. -Sus descripciones son meramente visuales y busca símiles familiares asemejando lo estudiado a elementos familiares del entorno. -No hay precisión en el lenguaje matemático básico para llamar a las figuras por su nombre correcto. *** En este nivel de percepción, la respuesta del alumno carece de significado**	En este nivel, no reconoce de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo

Nivel 2 El nivel 2 corresponde a un nivel de Análisis	- Partiendo tanto de la observación como de la experimentación, el estudiante puede percibir las componentes y propiedades de los objetos y figuras. - De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no son capaces de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en geometría se elaboran a partir de propiedades, no son capaces entonces de elaborar definiciones. - Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades. ***En este nivel, por ejemplo,el alumno comprueba que la afirmación es cierta en unos pocos casos, incluso en uno sólo, haciendo mediciones con alguna herramienta.**	-En este nivel, el estudiante no es capaz, de forma explícita, de realizar clasificaciones de objetos y de figuras a partir de sus propiedades. - No determina las implicaciones entre las propiedades de las figuras y los objetos reales. - Si bien los estudiantes empiezan a generalizar en este nivel, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes.

Nivel 3 **Nivel de Ordenación y de Clasificación**	-El alumno describe las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. - Es capaz de realizar clasificaciones lógicas de manera formal. El nivel de su razonamiento matemático ya está formándose. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de	- Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico le permite seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.

	esas relaciones. *** En este nivel, se alcanza un tipo de razonamiento próximo al razonamiento matemático. El alumno usa argumentos de tipo informal, basados en la observación de ejemplos concretos**.	

Nivel 4 **Nivel de deducción formal**	-En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. -Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. -Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado. -Este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, facilita tener una visión globalizadora de las Matemáticas. ***El alumno ya usa el simbolismo adecuado y justifica sus respuestas de forma adecuada.**	Relación entre los teoremas (Sistemas axiomáticos)

Nivel 5 **Nivel de Rigor**	1- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías. 2- Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático. *** Nivel de rigor**	

Tabla 2 – T5

Así, basándonos en estas pautas, para corregir las pruebas y atribuir un nivel de razonamiento a la calidad de la resolución del problema, aplicaremos el baremo siguiente:

Diremos de la respuesta que corresponde a un Nivel 1 de Razonamiento, equivalente al “Nivel de Visualización del Modelo de Van Hiele”, si se presenta uno o varios de los supuestos siguientes:

1- La respuesta dada por el alumno se realiza sin ningún tipo de argumentación por su parte.

2- El alumno, en su respuesta, sólo utiliza los casos dados y responde a la pregunta sin ninguna comprobación adicional. Parece como si el alumno creyera que los datos del enunciado son suficientes para deducir una respuesta.

Se observa entonces que:

-El estudiante percibe los objetos en su totalidad como una unidad. No logra diferenciar los atributos o las componentes de los objetos presentados y se limita a describir el objeto que se le presenta para su análisis basándose en su apariencia física. No es capaz por ejemplo de reconocer de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo.

-Las descripciones que realiza, son meramente visuales y busca símiles familiares asemejando lo estudiado a elementos familiares del entorno. No hay ninguna precisión en el lenguaje matemático utilizado.

Diremos de la respuesta que corresponde a un Nivel 2 de Razonamiento, equivalente al "Nivel de Análisis en el Modelo de Van Hiele", si:

- El alumno sólo considera unos cuantos ejemplos o bien contenidos en el enunciado propuesto o bien otros adicionales, aportados por él, para deducir una respuesta.

- En el caso geométrico, el alumno mide los segmentos y responde a las preguntas formuladas.

Se observa entonces que el alumno:

- Partiendo tanto de la observación como de la experimentación, puede percibir las componentes y propiedades de los objetos y figuras.

- De una manera informal puede describir las figuras mediante sus propiedades o bien, experimentando con figuras, le es posible establecer nuevas propiedades pero no es capaz de relacionar unas propiedades con otras.

Por lo tanto, a pesar de poder realizar conjeturas, generalizar, en este nivel de razonamiento, o sea inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes.

Diremos de la respuesta que corresponde a un Nivel 3 de Razonamiento, equivalente al "Nivel de Ordenación y de Clasificación del Modelo de Van Hiele", si:

-El alumno se da cuenta de que no le basta con los ejemplos para responder correctamente y busca hallar una ley general.

-El alumno describe las figuras de manera formal, es decir, señala las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir.

- Es capaz de realizar clasificaciones lógicas de manera formal.

El nivel de su razonamiento matemático ya está formándose. Esto significa que, en este nivel, reconoce cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y deduce las consecuencias de esas relaciones.

El alumno, en este nivel, es capaz de seguir las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no logra captar la estructura de las demostraciones. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico le permite seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia impide al alumno captar la naturaleza axiomática de la Geometría

Diremos de la respuesta que corresponde a un Nivel 4 de Razonamiento, equivalente al "Nivel de Deducción Formal en el Modelo de Van Hiele", si:

- En su respuesta, el alumno, además de encontrar el caso general, es capaz de pensar en la existencia de particularidades. Es una elaboración más rigurosa. El gran problema con el que nos podremos encontrar para la valoración, será el paso de un nivel 3 a un nivel 4 sobretodo si el alumno, dándose cuenta de la inexistencia de casos particulares o de su poca o nula influencia en la respuesta, no lo verbaliza. La realización de entrevistas individuales posteriores debe poder permitir obviar esta dificultad.

En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas.

-Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado.

-Este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, facilita tener una visión globalizadora de las Matemáticas.

Diremos de la respuesta que corresponde a un Nivel 5 de Razonamiento equivalente al “Nivel de Rigor en el Modelo de Van Hiele”, si:

- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.

- Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

5.4. La Población

Hemos hablado antes del tipo de alumno con el que trabajamos. Nos centramos en el alumno con "éxito académico", es decir:

- Es un alumno para el cual la "Comunidad Educativa" ha ratificado las capacidades de adaptación al sistema educativo.

- Es un alumno que demuestra unas "habilidades pedagógicas" superiores a la media, muy por encima de la normal.

No queda descartado en ningún momento la posibilidad de que exista algún alumno superdotado en los alumnos que conforman la muestra. Sin embargo, el objeto del trabajo no es descubrir la "superdotación" en los alumnos de la muestra. Por lo tanto, en ningún momento nos fijaremos en dicha condición en los alumnos de la muestra aunque pueda quedar oculta dicha condición en alguno de los participantes.

5.5- Descripción de los entornos socioeconómico y cultural de los alumnos que forman parte del estudio

Los alumnos que forman parte del estudio de casos proceden de tres centros educativos y, globalmente de dos ambientes sociales bien diferenciados.

Ambiente 1

Ciudad Badalona

Situación sociocultural de renta media baja

Centro de procedencia de los alumnos de la muestra: Instituto Jùlia Minguell

Ambiente 2

Ciudad de Barcelona

Situación sociocultural de renta media alta

Centros de procedencia de los alumnos que forman parte de la muestra: Liceo Francés de Barcelona e Instituto Italiano de Barcelona

Los alumnos que proceden del ambiente 1 reúnen unas características sociales más precarias. El perfil de la población es el de un barrio obrero, económicamente vulnerable, con un alto índice de inmigración extracomunitaria de fecha reciente y con un alto índice de inmigración nacional. Por orden de importancia, tenemos: Andalucía, Extremadura, Castilla-La Mancha, Murcia, Castilla-León, Aragón, Galicia, País Valenciano.

5.6- Los Centros

En cuanto a los centros educativos de procedencia de los alumnos, trabajaremos con los centros escolares siguientes:

A) Un IES del Sistema Español

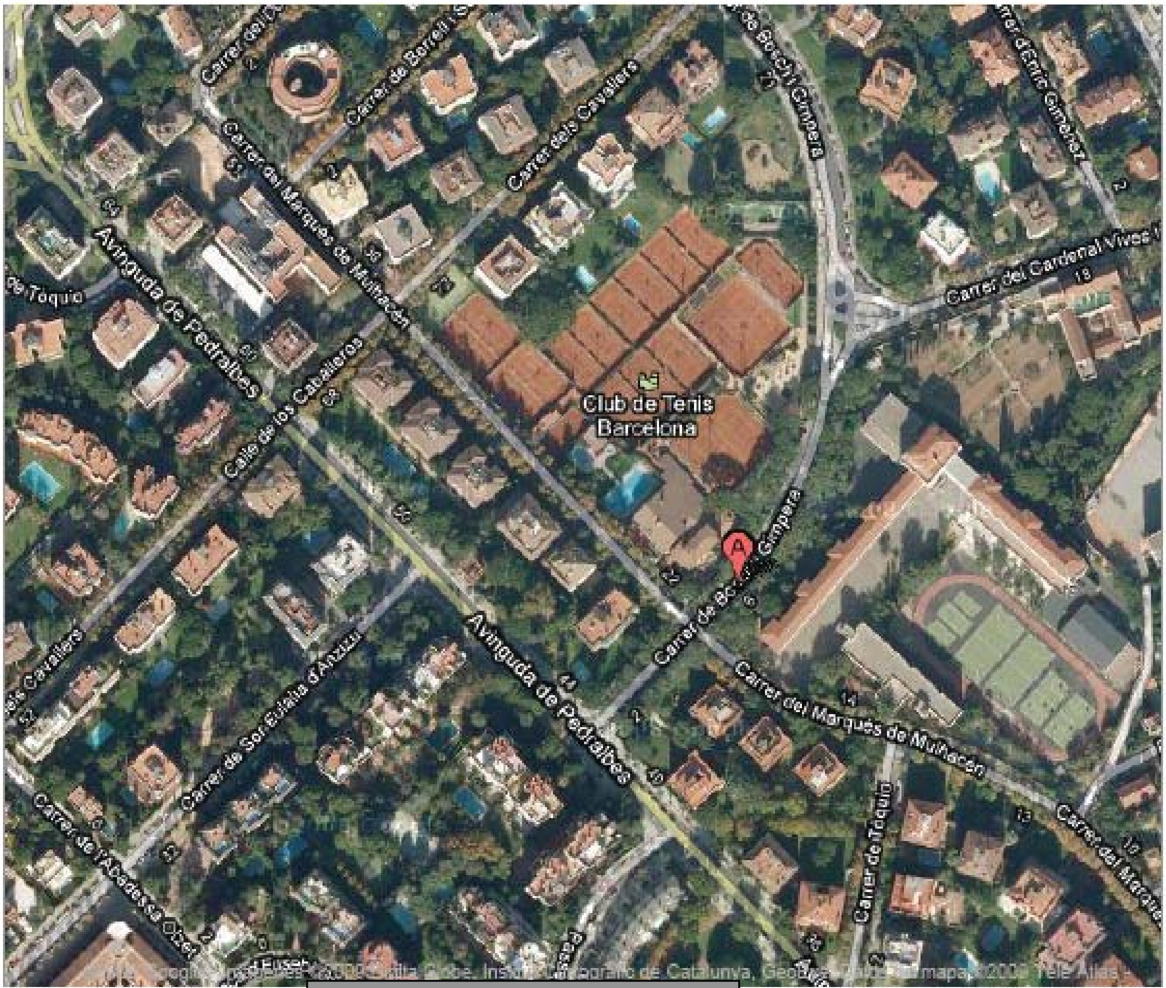
B) Un IES del Sistema Francés

C) Un IES del Sistema Italiano

Estos centros están situadas en la provincia de Barcelona, los tres en el Barcelonés, uno en el centro de Barcelona, en el Ensanche de Barcelona, el otro en el barrio de Pedralbes y el tercero en el cinturón de Barcelona, en Badalona. El objetivo es poder delimitar ciertas influencias socioeconómicas y/o culturales.

Se ha elegido el IES situado en Badalona de forma que se pueda estudiar la influencia de ciertos parámetros tales como la proximidad del centro educativo a la vivienda, los problemas sociales vinculados y vividos en el barrio, la inmigración, la influencia del barrio, etc. El centro elegido es el IES Julià Minguell de Badalona.

La elección de los otros dos centros se debe no solamente a la existencia de sistemas educativos diferentes sino que además cumplen otros requisitos que les hace atractivos. La población escolar es en su mayoría española pero el porcentaje de extranjeros afincados en Barcelona es grande y hay una cantidad enorme de “Binacionales”, ciudadanos franco españoles o ítalo españoles. Además, en el caso del Liceo francés, más del 95% de los alumnos escolarizados en el centro educativo, “no vive” en las proximidades del centro. El efecto “barrio” queda por lo tanto muy diluido. Hay que tener en cuenta además que la zona de Pedralbes es una zona residencial que tampoco ofrece una serie de servicios típicos de un barrio del Barcelonés. En el caso del Instituto Italiano, se puede dar un caso en el que la mayoría no vive cerca pero en un radio menor que en el caso del Liceo francés. Veamos algunos detalles más del entorno de los centros elegidos:



Fotografía 1 – T5

En la foto, podemos apreciar la ubicación del centro educativo “Lycée Français de Barcelone” en el barrio de Pedralbes de Barcelona. Se puede apreciar que las dos fachadas principales del centro dan a las calles Bosch i Gimperá (para la sección secundaria) y Marqués de Mulhacén (para la sección primaria).

La vista aérea obtenida de “Google Maps”, prermite apreciar una distribución de los edificios que ocupan de forma generosa el espacio. Pocos alumnos habitan las zonas próximas al centro.

Fotografía 2 – T5

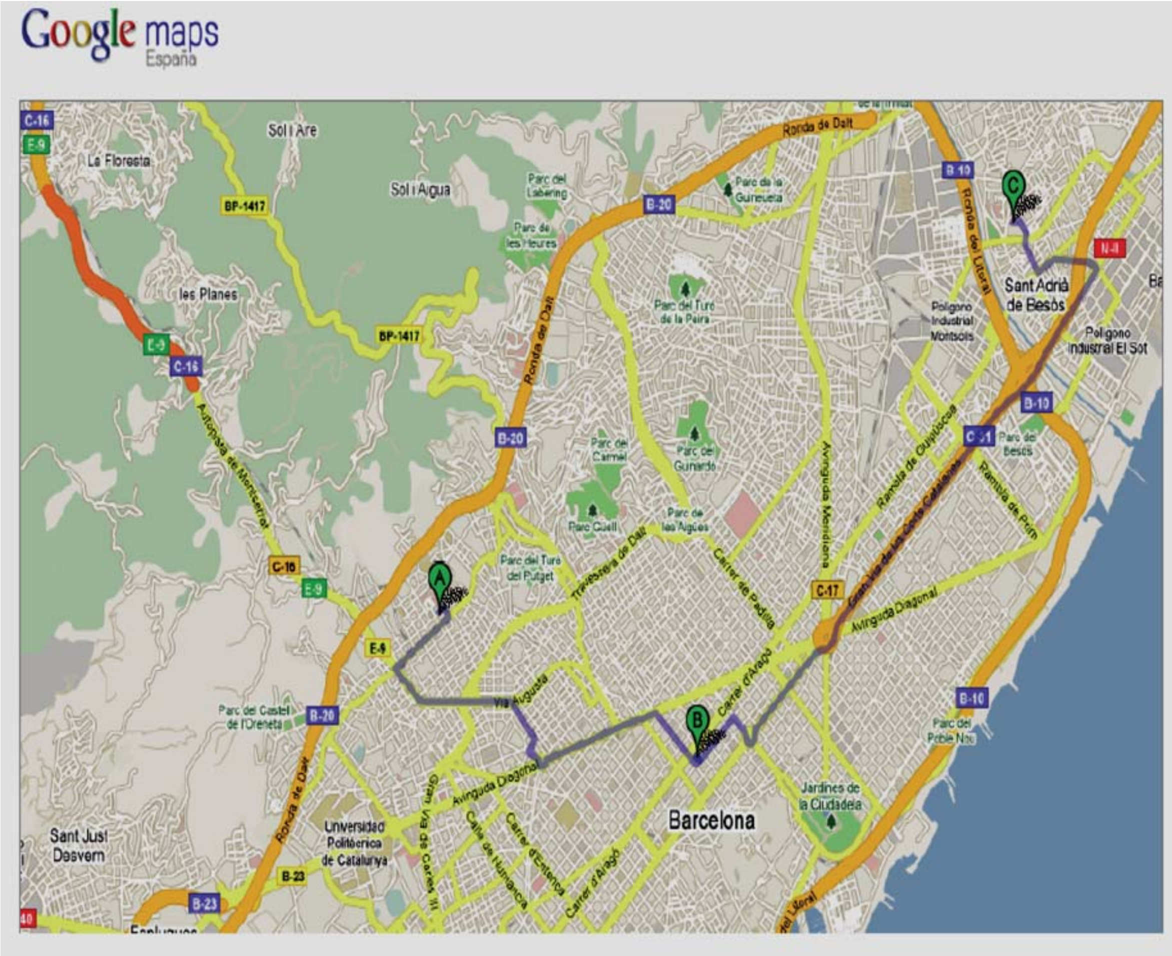
En el mapa de "Google Maps" se puede observar la ubicación del "Liceo Italiano E. AMALDI", en el corazón del Ensanche de Barcelona, en "Pasaje Méndez Vigo" . La vista aérea obtenida de "Google Maps", prermite apreciar una distribución de los edificios que ocupan el espacio.

La cantidad de alumnos habitando las zonas próximas al centro es superior a la del Liceo pero aún así la procedencia es diversa.

Fotografía 3 – T5

En la foto, podemos apreciar la ubicación del centro educativo “IES JULIA MINGUELL” en el barrio de “Esperit Sant” de Badalona. Se puede apreciar que la fachada principal del centro da a la calle Niza.

Todos los alumnos que acuden al centro viven en el mismo barrio.



Mapa 1 – T5

Se ha utilizado el "Google Maps" para trazar el recorrido de interconexión entre los tres centros con el objeto de marcar las distancias y los espacios urbanos ocupados por cada uno de ellos.

La distancia entre los centros es suficientemente grande y la población suficientemente reducida como para que no exista interconexión entre los diferentes elementos que forman parte del estudio. En el fondo, tampoco hubiera supuesto un problema. Para mostrar la ubicación de los centros así como la distribución del barrio, hemos creído interesante adjuntar unos planos de zona. El primero muestra las distancias entre los tres centros:

De cada uno de los centros elegidos se seleccionará un curso de tercero de ESO porque consideramos que los alumnos ya están bien integrados en la ESO antes iniciar el último curso lo cual posibilita seguir si es preciso con la investigación. Además hemos de tener en cuenta que en el Sistema Francés, el curso marca un final de etapa. A partir de la prueba inicial de conocimientos se ha seleccionado los alumnos que cumplen las características mencionadas. Tal como decíamos antes, se compensara algunos déficits de formación en los alumnos escolarizados en el sistema español con un refuerzo en la parte geométrica a través de la realización de un crédito de ampliación. Los itinerarios de intervención serán entonces los siguientes:

5.7- Itinerarios de intervención

Hemos establecido dos itinerarios de intervención debido a las características de la investigación:

Itinerario 1

Está diseñado para los alumnos que forman parte de la muestra y están escolarizados en el sistema educativo español, en el Instituto Julia Minguell de Badalona.

Comprende las etapas siguientes:

- Detectar los alumnos que formaran parte de la muestra a partir de los datos académicos previos .
- Intervención pedagógica sobre estos alumnos para equilibrar el aprendizaje en "Resolución de Problemas" manteniéndolos en el Grupo-Clase. La intervención tiene lugar en forma de Crédito de Ampliación. Uno de los motivos que explican esta intervención es debido al hecho de que una de las carencias del actual currículo español es el tratamiento de la geometría. Sin embargo, la reforma del sistema educativo ha intentado paliar un poco esta situación injusta con respecto a la

geometría. A pesar de esto creemos que sigue ofreciendo muchas dudas el nuevo enfoque, con un carácter más manipulativo que favorecedor de un aprendizaje que intente lograr las mayores destrezas en la manipulación mental de las nociones geométricas .

- Realización de las pruebas específicas
- Análisis de las pruebas e intervención complementaria en forma de entrevistas individuales.
- Valoración de las pruebas.

Podemos sintetizar este itinerario de la forma siguiente:

Gráfico 1 – T5

Hemos de insistir en estos hechos:

1- La totalidad de los alumnos de tercero ESO del IES Julià Minguell formaba parte de la investigación. El equipo de investigación eligió, a partir de las pruebas realizadas, un grupo de 5 alumnos que reunían los criterios fijados.

2- Las intervenciones se realizan todas de forma “Intracurricular”. En ningún momento se ha diseñado pruebas para hacer pasar a los alumnos de la muestra de forma aislada.

3- En el caso de los otros dos centros, el equipo de investigación no ha tenido acceso al diseño de la muestra. A criterio de la Dirección de los Centros, han puesto a disposición del equipo de investigación una selección de alumnos que reunía los criterios establecidos por el equipo de investigación. Puesto que sabían el objetivo de la investigación, creemos que la elección ha sido correcta.

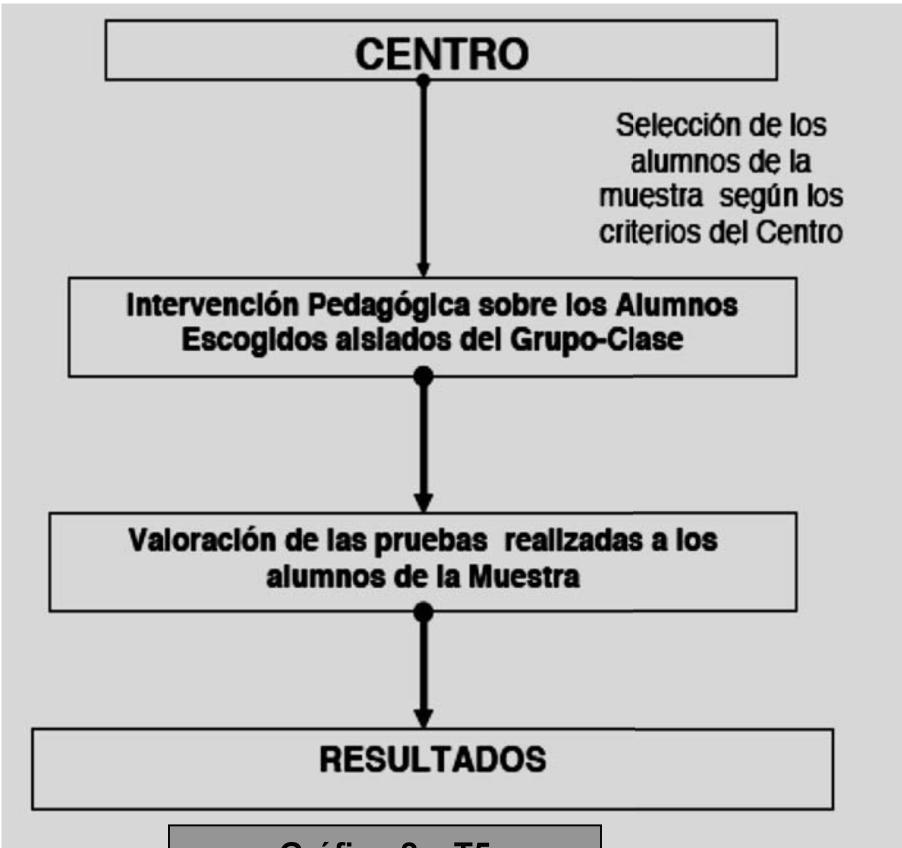


Gráfico 2 – T5

5.8- Descripción de la Muestra

Pretendemos, mediante un estudio de casos, determinar el nivel de razonamiento de alumnos catalogados como Talentosos por la Comunidad Educativa y escolarizados en el sistema educativo español . Sin embargo, y tal como se ha comentado antes, hay un grupo de alumnos que forma parte de la investigación y que procede de otros dos ámbitos educativos radicalmente distintos al definido como "ámbito base", es decir el IES ubicado en Badalona, con todo su entorno socioeconómico y cultural. Los elementos de la muestra que proceden de los dos centros "extranjeros" han sido elegido directamente por el centro, sin ninguna intervención directa de nuestra parte. Se ha solicitado un "perfil" de alumno para participar en un trabajo de investigación y se ha trabajado con los alumnos ofrecidos por el centro como "alumnos que se ajustan al perfil solicitado".

El caso del IES Julià Minguell ha sido distinto. Se ha trabajado con ellos en todo momento y disponiendo de la totalidad de los alumnos que configuran los 4 cursos de Tercero de ESO. Los alumnos elegidos para formar parte del estudio de caso han sido al final 5 : Manuel , Elisabeth, Sergio , Julio , Albert . Cursan todos el tercer curso de ESO en el IES Julia Minguell de Badalona . Manuel , Sergio , Julio pertenecen a un mismo grupo de tercero y Elisabeth y Albert a otro. La experiencia matemática de los cinco alumnos durante este curso escolar se puede estructurar de la siguiente forma :

1- El currículo común ha sido el mismo. Los cinco alumnos han tenido el mismo equipo pedagógico . Han seguido por lo tanto las mismas asignaturas comunes. En cuanto a la asignatura de matemáticas , mismo profesor , mismos controles y otros mecanismos de evaluación.

2- Sin embargo, entre ellos hay ciertos elementos diferenciadores Las particularidades son las siguientes:

i. Elisabeth y Albert han seguido durante todo el segundo trimestre un crédito variable sobre resolución de problemas. En el anexo se podrá ver la programación del trabajo que se realizó con ellos.

ii. Julio y Sergio, han seguido a su vez un crédito variable sobre "manipulación de números" . En dicho crédito, la parte correspondiente a los problemas sobre criterios de divisibilidad se realizó justo antes de efectuar la prueba de evaluación de nivel.

iii. El único alumno que no ha realizado, durante el curso actual, ningún crédito complementario de matemáticas ha sido Manuel.

iv. Todos los alumnos elegidos en este centro son además alumnos que proceden del mismo ambiente socioeconómico y cultural. Han nacido todos en el mismo año. La experiencia educativa anterior de los cinco alumnos es también parecida, a pesar de no haber sido escolarizados en el mismo centro. Dichos alumnos no han cursado ninguna asignatura de geometría . Han adquirido las nociones básicas y en su tercer curso de ESO, han cursado los créditos comunes de Educación Visual y Plástica.

Eso significa por lo tanto que son muy pocas las posibilidades de tener una visión global de la geometría más que a nivel de construcción . El estudio de las propiedades métricas (cálculo del área del triángulo - Teorema de Pitágoras) se reserva a las matemáticas y el nexo entre estas dos visiones se realiza (o se intenta en algunos casos) a través del teorema de Tales.

Esa situación conduce a grandes confusiones . Los alumnos confunden perímetro y área y en algunos casos no saben de que se les habla . Las nociones básicas de tangencia, bisectriz , mediatriz , paralelogramos, etc. son ignorados por una gran cantidad de alumnos, no obligatoriamente limitados intelectualmente . Parece que nuestros alumnos, en base al modelo de Van Hiele , no alcancen nunca el nivel 4 de razonamiento, prevaleciendo un tipo de razonamiento algorítmico que hace que para un alumno Talentoso, la importancia del formalismo, del rigor en la resolución de ciertos problemas sea una cosa secundaria.

Eso hace anticipar un tipo de comportamiento más acorde a su nivel real cuando se trata de verbalizar su razonamiento en un tipo de diálogo. Eso produce un empobrecimiento del razonamiento escrito.

Para comprobar esta última afirmación, realizaremos una entrevista individual, posterior a la realización de la prueba escrita, con cada uno de los 5 alumnos que han participado en la investigación.

Para completar la investigación, realizaremos la misma prueba a algunos alumnos escolarizados en sistemas educativos diferentes : el sistema educativo italiano y el francés.

5.9-Perfil académico de los alumnos que forman parte de la investigación

El centro en el que se realiza la investigación realiza una prueba inicial para valorar los conocimientos de los alumnos y detectar asimismo deficiencias en su formación . Sirve también para la conformación de los grupos y evitar el riesgo que pueda suponer un grupo totalmente homogéneo a nivel intelectual . La diversidad que se pretende introducir sería así suficientemente gestionable. Para paliar los efectos negativos que se podrían producir sobre el grupo debido a la existencia de casos no detectados al principio , de elementos altamente perjudiciales para el grupo, el centro establece instrumentos pedagógicos de apoyo y recuperación: Adecuación de currículum, créditos de refuerzo y ampliación , créditos manipulativos, por ejemplo.

Hemos comentado que los 5 alumnos que han participado en la prueba son alumnos clasificados como alumnos Talentosos por la Comunidad Educativa. Haremos un breve estudio de su experiencia académica a través de los parámetros que detallamos a continuación:

- Una prueba inicial (de ingreso) realizada por los alumnos y diseñada por el Equipo Psicopedagógico del centro.
- El Informe de traspaso de centro.

Aparte de la prueba inicial , el centro dispone del Informe de Evaluación Global del alumno que recoge los aspectos escolares y académicos básicos del alumno durante sus años anteriores de escolaridad. La información que contiene dicho informe es la siguiente:

1- Calificación global de la EGB- Obtención del graduado.

2- Caso de no haber obtenido el graduado, el último curso o ciclo aprobado.

3- Repetición de cursos.

4- Escolarización normal o tardía .

5- Expresión oral.

6- Expresión escrita.

7- Escritura .

8- Lectura.

9- Matemáticas

10- Asistencia .

11- Actitud ante el trabajo .

12- Necesidades educativas especiales

Analizando estos diferentes parámetros poderemos establecer las categorías para el análisis.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS Y DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

L'activité mathématique est une activité humaine. Certains de ses aspects, comme de toute activité humaine, peuvent être étudiés par la psychologie, d'autres par l'histoire. L'heuristique initialement ne s'intéresse pas à ces aspects, mais l'activité mathématique produit des mathématiques et les mathématiques, ce produit de l'activité humaine, « s'aliènent » l'activité humaine qui les a produites. Elles deviennent un organisme qui vit, qui se développe, qui « acquiert une certaine autonomie » par rapport à l'activité qui les a produites; elles développent leurs propres lois de croissance, leur propre dialectique. Le créateur mathématicien authentique n'est qu'une personnification, une incarnation de ces lois qui ne peuvent trouver une réalisation que dans l'activité humaine. Leur incarnation cependant est rarement parfaite. L'activité de l'homme mathématicien, telle qu'elle apparaît dans l'histoire, n'est qu'une réalisation maladroite de la merveilleuse dialectique des idées mathématiques. Mais tout mathématicien, s'il a du talent, du brillant, du génie est en communion avec cette dialectique d'idées, il sent son mouvement, suit ses règles.

Imre Lakatos

6.1. Descripción del tema

La investigación realizada nos ha permitido obtener una serie de resultados que pasamos a comentar. Aprovecharemos también para analizar posibles desviaciones con respecto a los valores esperables e intentaremos fijar nuevas perspectivas. Hemos de hacer notar que debido a ciertas facilidades estructurales hemos podido intervenir mucho más en el trabajo de los alumnos del IES JULIA MINGUELL que formaban parte de la muestra. En cambio, con respecto a los otros dos centros nos hemos limitado a los datos facilitados por la Dirección del Centro, sin apenas contacto con los alumnos salvo a la hora de pasar las pruebas. Hemos indicado anteriormente la forma de intervención que íbamos a realizar sobre los alumnos a través de los diferentes itinerarios de intervención que describían la forma de proceder. Con respecto a estos alumnos sobre los cuales hemos intervenido directamente hemos querido analizar tanto el informe de traspaso facilitado por el equipo psicopedagógico del centro como la prueba inicial realizada por dicho equipo. Vamos a describir los resultados a los cuales hemos llegado.

6.2- Categorías para el Análisis

Vamos a efectuar un análisis del informe de traspaso y de la prueba inicial , que han realizado los alumnos del IES Julia Minguell. Sin embargo, extraeremos simplemente los resultados correspondientes a los cinco casos que hemos elegido para la muestra.

6.2-1.Análisis del informe de traspaso

En el caso del informe de traspaso , de los aspectos académicos recogidos, tendremos en cuenta aquellos que se refieren a la lectura y comprensión de textos producidos en castellano y catalán, al nivel matemático, a la actitud ante el trabajo. En el caso de los alumnos de la muestra escolarizados en el Julià Minguell, tenemos:

Nombre	Curso	Sexo	Comprensión Textos y lectura	Nivel matemático	Actitud ante el Trabajo	Nivel de éxito escolar
Albert	3D	V	A	A	A	Excelente
Manuel	3B	V	A	A	A	Excelente
Elisabeth	3D	H	A	A	A	Excelente
Julio	3B	V	B	A	A	Notable
Sergio	3B	V	A	A	A	Notable

Tabla 1 – T6

Para comprender mejor los datos, elaboremos los gráficos estadísticos comparativos con el resto de los alumnos para los que disponemos del informe de traspaso:

Lectura y Comprensión de textos					
	Nivel A	Nivel B	Nivel C	Nivel D	Total
Chicos	14	11	8	2	35
Chicas	18	9	3	3	33
Total	32	20	11	5	68

Tabla 2 – T6

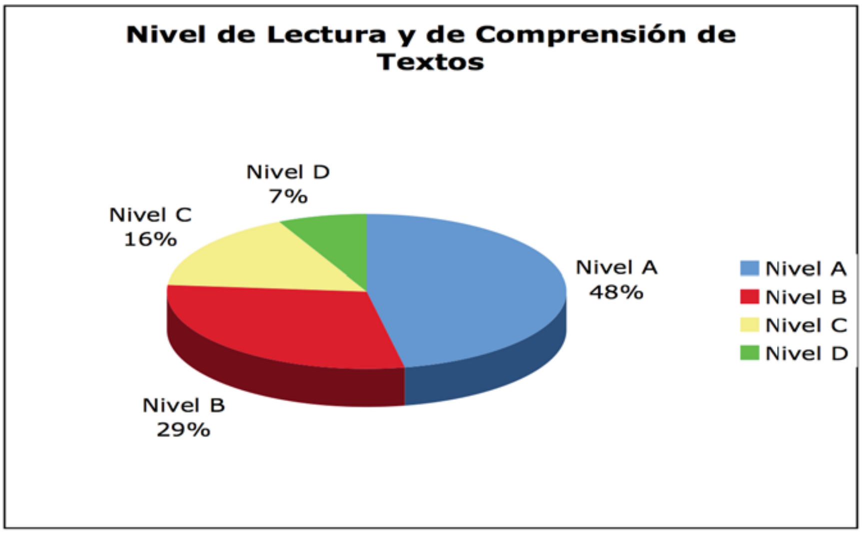


Gráfico 1 – T6

En la tabla y en los gráficos, indicamos el nivel de “Lectura y Comprensión de textos” demostrado por el alumno de la forma siguiente :

Nivel A : Lectura fluida , expresiva, bien estructurada. Comprende perfectamente lo que lee.

Nivel B : Lectura con alteraciones de ritmo , lenta pero con comprensión.

Nivel C: Lectura vacilante. Dificultad de comprensión.

Nivel D : Lectura dificultosa, silábica. Falta de comprensión.

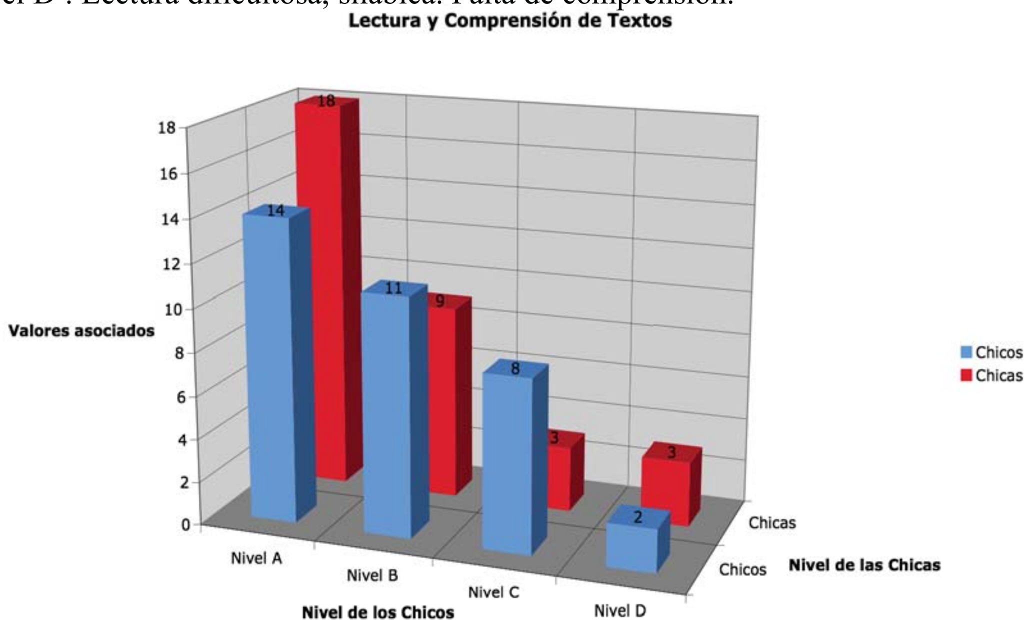


Gráfico 2 – T6

Con respecto al nivel matemático de los alumnos, tenemos la tabla siguiente :

Nivel Matemático					
	Nivel A	Nivel B	Nivel C	Nivel D	Total
Chicos	11	14	8	2	35
Chicas	12	12	7	2	33
Total	23	26	15	4	68

Tabla 3 - T6

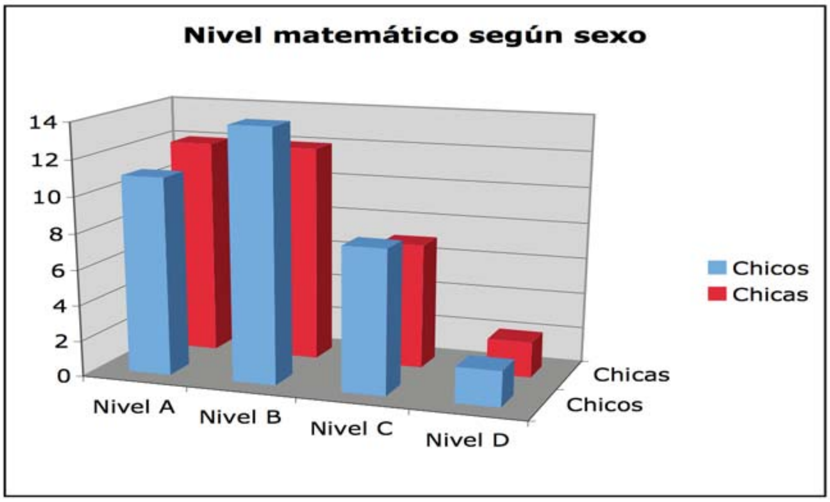


Gráfico 3 - T6

En la tabla, hemos codificado la información atribuyendo el Nivel A cuando el alumno es capaz de operar con magnitudes algebraicas. Trabaja bien con todo tipo de números y domina los algoritmos aritméticos. El alumno no demuestra tener dificultades.

Nivel B : Puede trabajar con operaciones no demasiado complejas que involucren enteros , decimales , quebrados , potencias . Utiliza adecuadamente las medidas de longitud y peso . Puede resolver problemas que impliquen dichos conocimientos.

Nivel C : Solamente es capaz de operar con las cuatro operaciones y sabe aplicar las para resolver problemas.

Nivel D : No ha automatizado los algoritmo s de las 4 operaciones . Calcula con cierta dificultad pero es capaz de resolver problemas con una sola pregunta , utilizando las operaciones que domina.

No se considera que el alumno, en este nivel académico, pueda presentar un nivel más bajo en matemáticas.

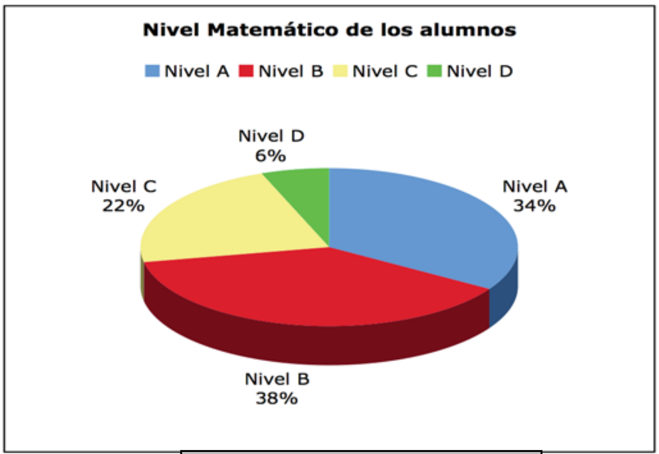


Gráfico 4 – T6

En cuanto a la actitud ante el trabajo, tenemos :

Actitud ante el trabajo					
	Nivel A	Nivel B	Nivel C	Nivel D	Total
Chicos	6	18	11	0	35
Chicas	17	16	0	0	33
Total	23	34	11	0	68

Tabla 4 – T6

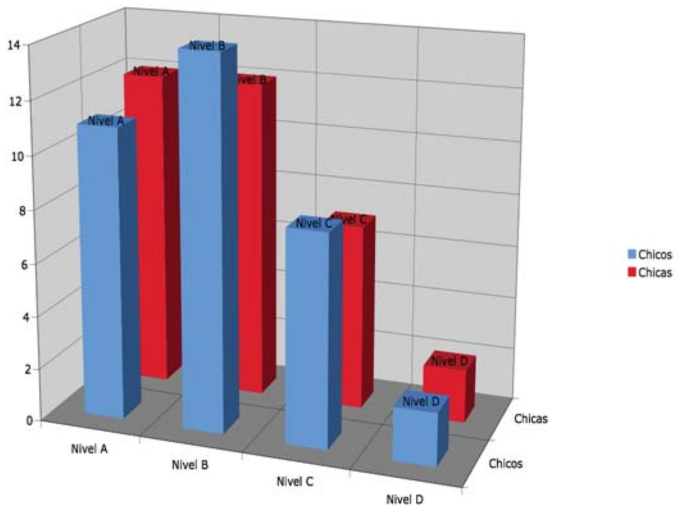


Gráfico 5 – T6

Nivel A: Se valora de esta forma una actitud positiva. El alumno demuestra: Interés constante - Orden y pulcritud - atención y concentración - creatividad en el trabajo -

diligencia y esfuerzo - planifica su tiempo - memoria - iniciativa - motivación.

Nivel B : Se valora de esta forma una actitud indiferente. El alumno demuestra interés de forma intermitente y se desmoraliza fácilmente

Nivel C: El alumno demuestra pasividad.

Nivel D : Se valora de esta forma una actitud totalmente negativa. El alumno demuestra: oposición - contrariedad y a veces agresividad.

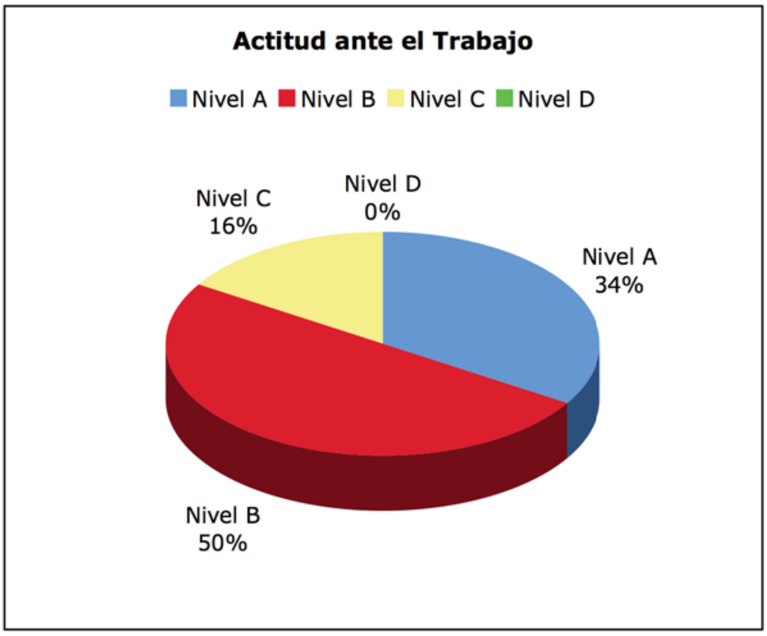


Gráfico 6 – T6

El estudio de estos factores nos indica una medida del "Nivel de Fracaso Escolar" en el Grupo-Clase.

6.2-2. Análisis de la prueba inicial.

Con respecto a la prueba inicial realizada por la casi totalidad de los alumnos matriculados en el tercer curso de ESO del centro , su estructura era la siguiente:

1- Resuelve :

a) 1590 + 102 + 5 =

b) 102 - 82 =

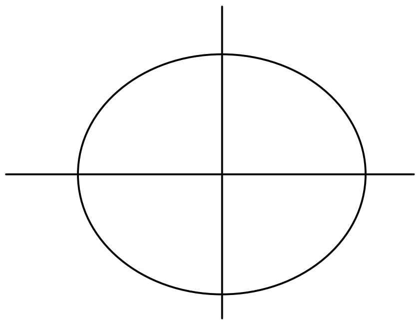
2- Resuelve :

194 x 200 =

3- Resuelve:

73425: 25

4- Escribe la fracción simplificada que representa la parte sombreada de la figura:



5- Resuelve el ejercicio siguiente . Realiza todas las operaciones :

a) $3/2 + 2/3 =$

b) $2/3 - ¼ : 4/7$

6- Completa:

a) 8,3 kg. =.................. g

b) 214 dm. = …….. m

c) 2 horas = ……. segundos

7- Efectúa las operaciones siguientes:

a) $17{,}45 + 236{,}24 + 49 =$

b) $127{,}64 - 94{,}763 =$

c) $48{,}05 \times 3{,}06 =$

d) $762 : 8{,}7$

8- Ordena estas cantidades de mayor a menor:

-7; 2,7 ; 0 ; 5/4 ; 2,7777….

9- Resuelve:

a) $(x + 3).2 + 5 = 3 + 3x$

b) $x + 3/5 = 8x/5 - 5$

10- Si pagas una factura de 15 Euros con un billete de 50, ¿Cuál ha de ser el cambio?

11- Un kilo de garbanzos cuesta 0,75 Euro ¿Cuántos kg. se podrá comprar con 345 Euros?

12- Un aprendiz cobra 37Euros al día. Le practican un descuento del 16% en concepto de pago de impuestos. Cuánto cobra cada día?

13- Completar las series siguientes:

a) 2 0 4 0 6 0 8 0 10 0 ……………..

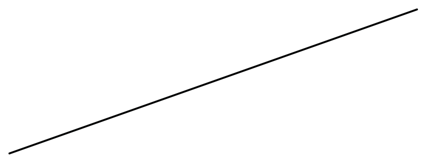
b) 3 6 9 12 15 18 21 24 ……………..

c) 2 3 6 7 14 15 30 ……………..

d) 95 1 90 1 85 1 80 1 …………..

e) 80 5 78 5 76 5 74 5 72 5 ……………..

14- Dibuja

a) Una recta paralela a la recta dibujada 

b) Un triángulo rectángulo

c) Dos rectas perpendiculares

En cuanto a la valoración de la prueba inicial , el Seminario de Psicopedagogía del Centro estableció una plantilla que recogía los aspectos de evaluación que indicamos a continuación. El alumno demuestra que sabe :

1- Utilizar correctamente los algoritmo s numéricos con números naturales:

- La suma con números enteros ,
- La resta de números enteros.
- La multiplicación de números enteros .
- La división de números enteros .

2- Fracciones: Comprensión - Operación - Jerarquía de las operaciones con fracciones.

3- Conversión de unidades

4- Algoritmos numéricos con decimales .

Con los mismos criterios establecidos en el punto 1.

5- Comparación de números

6- Resolución de ecuaciones :

- Con enteros .
- Con racionales.

7- Resolución de problemas – Planteamiento - Resolución

8- Series de números : completar .

9- Geometría:

- Perpendicularidad .
- Triángulos rectángulos.
- Paralelismo.

Los datos obtenidos, para los cinco alumnos , han sido consignados en esta tabla que presentamos con la siguiente codificación:

Correcto: Para indicar que la respuesta es correcta.

Incorrecto: Para indicar que es incorrecta.

Regular: Para indicar imprecisiones en la respuesta dada por el alumno.

Descripción de la actividad	**Manuel**	**Elisabeth**	**Julio**	**Albert**	**Sergio**
1.a- Realiza correctamente la suma de enteros	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
1.b- Efectúa correctamente la resta de números enteros	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
1.c-Realiza correctamente la multiplicación de números enteros	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
1.d- Realiza bien la división de números enteros	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
2.a- Sabe utilizar las fracciones	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
2.b- Aplica correctamente los algoritmos de cálculo	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
2.c- Utiliza adecuadamente la jerarquía de las operaciones	Regular	Incorrecto	Incorrecto	Correcto	Correcto
3- Realiza perfectamente la conversión de unidades	Regular	Incorrecto	Correcto	Correcto	Regular
4.a- Utiliza adecuadamente la suma con decimales	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
4.b- Efectúa correctamente la resta de números decimales	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto

4.c-Realiza correctamente la multiplicación de números decimales	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
4.d- Realiza bien la división de números decimales	Incorrecto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
5- Sabe comparar dos números	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
6.a- Sabe resolver una ecuación con números enteros	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
6.b- Sabe resolver una ecuación con números racionales.	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
7.a- Sabe plantear un problema sencillo	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
7.b- Sabe resolver correctamente un problema sencillo	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
8- Sabe completar una serie de números	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
9.a- Sabe reconocerán caso de perpendicularidad .	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto
9.b- Sabe reconocer un triángulo rectángulo	Incorrecto	Correcto	Correcto	Correcto	Incorrecto
9.c- Sabe reconocer un caso de paralelismo	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto	Correcto

Tabla 5 – T6

El análisis específico de las pruebas de estos alumnos permite observar que sus dificultades se centran pues en las nociones siguientes:

1- Aplicación de las prioridades cuando se tratan de números distintos de los enteros, tanto en su forma decimal como en su forma fraccionaria . Sobretodo cuando están dados en la forma fraccionaria.

Nos encontramos por ejemplo con que realizan la operación: a - b.c

como si fuera: (a - b). c

Es decir, toman por verdadera la igualdad siguiente : a - b. c $=$ a. c - b. c

Son los casos de Manuel, Elisabeth y Julio.

2- Ciertas dificultades se han encontrado también a nivel de conversión de las unidades. Son irrelevantes y más que fallos a nivel de razonamiento, parecen ser debidas a descuidos. Son los casos de Elisabeth y Sergio .

3- También a nivel de la reducción de fracciones al mismo denominador se ha detectado ciertos fallos. La suma de varias fracciones se realiza simplemente sumando los numeradores sin tener en cuenta la influencia del denominador . Se ha detectado este fallo en los alumnos Elisabeth y Albert .

4- Uno de los casos más extraños, por inesperado, corresponde al caso del trazado de un triángulo rectángulo. En efecto, dos alumnos : Manuel y Sergio, no lograron trazar correctamente un triángulo rectángulo. Sin embargo, tal como se explicará más adelante, dicha confusión proviene del hecho de que dichos alumnos no lograban establecer una diferencia clara entre un triángulo rectángulo y otro escaleno. A la hora de clasificar un triángulo con tres lados distintos (por ejemplo: 3, 4 y 5) y con la presencia de un ángulo recto, dicen que se trata de un triángulo escaleno, y, en el caso por ejemplo de un triángulo con dos lados iguales y un ángulo de 45 grados , dicen que simplemente es isósceles. Estos fallos, producidos en casos de alumnos académicamente Talentosos, permiten pensar en alguna disfunción del sistema de enseñanza de las matemáticas o de la existencia de alguna deficiencia del currículo matemático. La instrucción complementaria en forma de crédito de ampliación ha permitido resolver el problema. Vemos pues que, en el caso de “alumnos Talentosos”, puede haber “problemas de conocimientos” debido a la “inadecuación del currículo” o a “deficiencias curriculares” pero puesto que no existen deficiencias en el aprendizaje, los déficits quedan rápidamente cubiertos, si se detectan.

6.2-3. Análisis comparativo del Expediente Académico de los 5 alumnos del IES Julià Minguell

Los 5 alumnos que forman parte de la investigación, han sido catalogados, tal como hemos comentado antes , por la Comunidad Educativa, como alumnos Talentosos. Su expediente académico durante los 2 primeros trimestres del curso escolar , en el centro actual , la actitud ante el trabajo , el comportamiento, y otros parámetros de valoración académica, así lo han demostrado.

En cuanto a las notas obtenidas, tenemos:

PRIMER TRIMESTRE					
	MANUEL	**JULIO**	**SERGIO**	**ELISABETH**	**ALBERT**
Castellano	Excelente	Excelente	Notable	Excelente	Suficiente
Catalán	Notable	Bien	Notable	Notable	Suficiente
Inglés	Excelente	Notable	Bien	Notable	Excelente
Cienc. Naturaleza	Excelente	Excelente	Excelente	Excelente	Notable
Cienc. Sociales	Excelente	Excelente	Notable	Excelente	Excelente
Ed. Física	Excelente	Excelente	Notable	Suficiente	Excelente
Tecnología	Excelente	Notable	Excelente	Excelente	Notable
Ed. Visual	Excelente	Excelente	Notable	Notable	Excelente
Música	Excelente	Excelente	Excelente	Excelente	Excelente
Matemáticas	Notable	Notable	Notable	Excelente	Excelente

Tabla 6 – T6

Y, para el segundo trimestre :

SEGUNDO TRIMESTRE					
	MANUEL	JULIO	SERGIO	ELISABETH	ALBERT
Catalán	Notable	Bien	Bien	Notable	Notable
Castellano	Notable	Excelente	Bien	Notable	Notable
Inglés	Excelente	Notable	Notable	Excelente	Excelente
Cienc.	Excelente	Excelente	Notable	Excelente	Bien
Cienc.	Notable	Notable	Excelente	Excelente	Notable
Ed. Física	Excelente	Excelente	Notable	Suficiente	Excelente
Tecnología	Excelente	Notable	Excelente	Notable	Excelente
Ed. Visual	Excelente	Notable	Excelente	Excelente	Notable
Matemáticas	Excelente	Excelente	Notable	Notable	Excelente
Música	Excelente	Excelente	Excelente	Excelente	Excelente

Tabla 7 – T6

En cuanto a los 3 créditos variable, la media de Elisabeth, Albert y Julio ha sido de Excelente y de Notable Alto para Manuel y Sergio.

Para hacemos una idea de la situación académica de los grupos de tercero, nos ha parecido realizar la estadística de los resultados globales de los créditos comunes.

Para el grupo de tercero B , tenemos :

a) Primer Trimestre

PRIMER TRIMESTRE					
	Excelente	**Notable**	**Bien**	**Suficiente**	**Insuficiente**
Catalán	0	2	2	4	17
Castellano	2	3	2	6	12
Inglés	1	3	2	1	18
Cienc. Sociales	3	2	4	5	11
Ed. Física	2	3	2	4	14
Ed. Visual	3	2	2	3	15
Música	4	1	5	5	10
Matemáticas	3	0	1	4	17

Tabla 8 – T6

b) Segundo Trimestre

SEGUNDO TRIMESTRE					
	Excelente	**Notable**	**Bien**	**Suficiente**	**Insuficiente**
Castellano	2	3	1	8	10
Catalán	0	1	4	2	17
Inglés	1	4	1	2	16
Cienc. Naturaleza	2	2	2	4	14
Ed. Física	2	1	3	6	12
Tecnología	2	3	3	7	9
Ed. Visual	2	2	1	8	11
Matemáticas	2	1	1	5	15

Tabla 9 – T6

Para el Grupo de Tercero D, otro de los grupos con el cual trabajamos, tenemos:

c) Primer Trimestre

PRIMER TRIMESTRE					
	Excelente	Notable	Bien	Suficiente	Insuficiente
Castellano	0	4	5	5	10
Catalán	0	2	1	9	12
Inglés	3	4	2	1	14
Cienc. Naturaleza	1	3	0	4	16
Ed. Física	1	4	2	6	11
Tecnología	2	3	4	5	10
Ed. Visual	2	2	3	9	8
Matemáticas	2	2	4	2	14

Tabla 10 – T6

d) Segundo Trimestre

SEGUNDO TRIMESTRE					
	Excelente	Notable	Bien	Suficiente	Insuficiente
Catalán	0	2	1	7	13
Castellano	0	5	5	2	9
Cienc. Naturaleza	1	0	1	2	19
Cienc. Sociales	1	6	8	3	5
Ed. Física	1	1	2	8	11
Tecnología	1	1	4	5	12
Ed. Visual	1	2	5	7	8
Matemáticas	1	1	2	5	14

Tabla 11– T6

6.3. Análisis de las pruebas de los alumnos de la muestra

Hemos establecido antes los criterios según los cuales valoraríamos las pruebas de los alumnos que participan en el estudio, con el fin de determinar el nivel de razonamiento de cada uno de ellos, según el modelo de Van Hiele.

1- Dijimos que consideraríamos que un alumno razonaba en el Nivel 1: Si en su respuesta, sólo comprueba o utiliza los casos dados para luego responder a la pregunta. Como si creyera que los datos son suficientes para deducir las respuestas.

2- Consideraríamos que el alumno razona en el Nivel 2: Si sólo considera ejemplos, tanto los dados (caso de haberlos) como otros adicionales, aportados por él, deducidos a partir del contexto o implícitos en el enunciado, para lograr una respuesta. En el caso geométrico, el alumno mide los segmentos y responde a las preguntas formuladas.

3-Consideraríamos que el alumno razona en el Nivel 3: Si se da cuenta de que no le basta con los ejemplos para responder correctamente y busca entonces una ley general , el caso general.

4-Consideraríamos que el alumno razona en el Nivel 4: Si , además de encontrar el caso general, es capaz de pensar en la existencia de particularidades. Es una elaboración más rigurosa.

Además de analizar las "producciones escritas" de los alumnos que forman parte de la investigación, nuestra idea consiste en comparar la forma de abordar los ejercicios propuestos y detectar así la influencia de los diferentes métodos de enseñanza de los sistemas español, italiano, francés. Además, se ha procurado que existiera alguna diferencia en las edades para detectar la existencia de algún factor de madurez cronológica, para poder comprobar la posible influencia de un factor de madurez biológica.

6.4- Interpretación de los diferentes resultados

Empezamos este trabajo formulando una serie de preguntas que nos parecían importantes. Al finalizar el análisis de los diferentes elementos de informaciones recogidas a lo largo de la investigación estaremos capacitados para darles respuesta.

Retomemos estas preguntas :

1- Siendo un alumno catalogado como "Alumno con Éxito Académico", o "Alumno Talentoso", el sistema educativo en el que está escolarizado, tiene alguna influencia sobre su modo o su nivel de razonamiento matemático?
2- Basándonos en el modelo de Van Hiele, ¿En qué nivel de razonamiento matemático operan los alumnos catalogados como "Talentosos? ¿Influye el sistema educativo?
3- ¿ Existe una intervención voluntaria y reflexiva por parte del profesor para facilitar el proceso de aprendizaje del alumno Talentoso?

Además de estos puntos, fijamos en los capítulos anteriores, para el alumno Talentoso, una serie de características que incluían los puntos siguientes:

A- Características Cognitivas

    a. Área de las Competencias Básicas

i. Dominio del lenguaje escrito

ii. Dominio del lenguaje matemático

iii. Buena comprensión

1. Verbal

2. Lectora

b. Autonomía Académica

i. Elaboración de buenas técnicas de aprendizaje

ii. Buena capacidad de organización

c. Capacidad de Auto-evaluación

i. Sabe cómo aprender

ii. Sabe qué aprender

iii. Sabe cómo gestionar su aprendizaje y mantiene una buena relación con el saber

d. Destrezas

i. Buena capacidad de abstracción y de síntesis

ii. Sabe cómo elaborar conocimientos diversos y como relacionar áreas de conocimiento diversos

B- Características Sociales

a. Desarrollo de Valores

i. De trabajo en equipo

ii. Solidaridad y Tolerancia

iii. Ayuda Mutua

C- Características Personales

a. Sentido de la responsabilidad

    i. Trabaja de forma adecuada las diferentes ramas del saber

    ii. Trabaja mucho

b. Aspectos Motivacionales

    i. Sabe cómo, cuando y qué preguntar

    ii. Sabe buscar y ordenar las informaciones necesarias

    iii. Sabe escuchar y mostrar interés en el trabajo

c. Consecución de Logros

    i. Trabaja para conseguir sus metas

Estas características que definen el alumno "Talentoso" deberían poder explicar por sí solas los resultados obtenidos en el estudio, debido a la poca influencia que suele ejercer el entorno socioeconómico sobre los resultados académicos de dichos alumnos. Según se puede desprender del trabajo, el "Tipo de Alumno estudiado" es capaz, utilizando de forma adecuado sus capacidades cognitivas, minimizar la influencia de los factores negativos sobre su aprendizaje. Sabe, de la forma más correcta posible, adaptarse a los Factores Ambientales, Personales, Culturales, Afectivos, Sociales, Cognitivos.

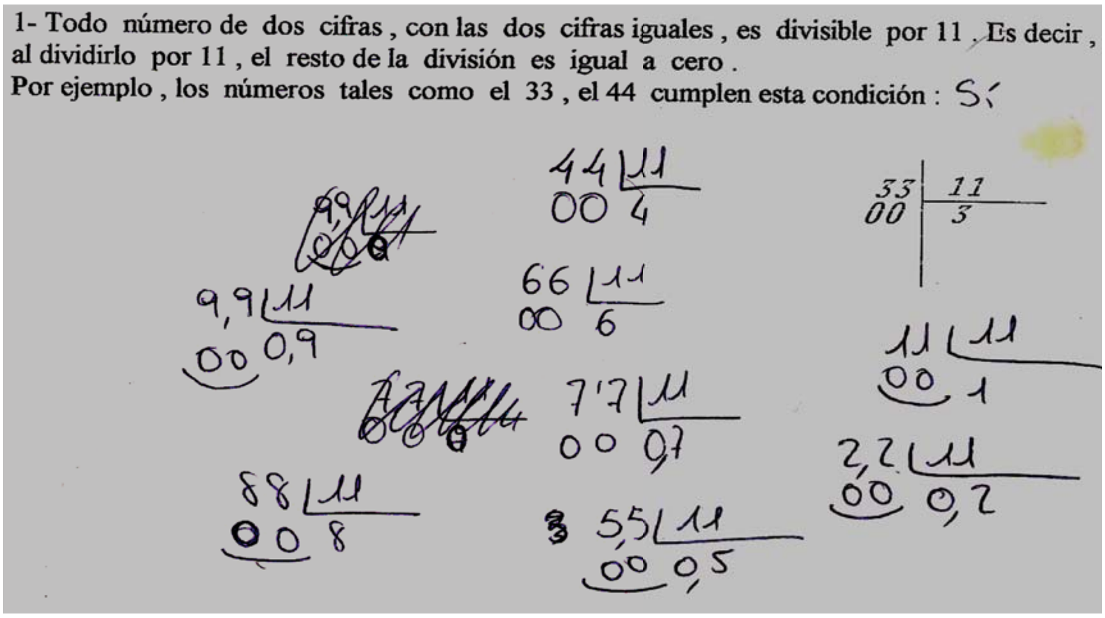
Los resultados obtenidos deberán proporcionarnos una base más fiable a tener en cuenta a la hora de diseñar estrategias de evaluación o de aprendizaje. La poca o nula influencia de la edad biológica o de los tipos de enseñanza facilitará una mayor comprensión para el profesional de la educación. Empecemos por lo tanto el análisis de las pruebas, corrección y atribución del nivel de razonamiento y valoración de las pruebas.

6.5-Valoración de las pruebas individuales.

Las pruebas realizadas a los diferentes alumnos que configuran la muestra estudiada han sido evaluadas según las pautas del modelo de Van Hiele.

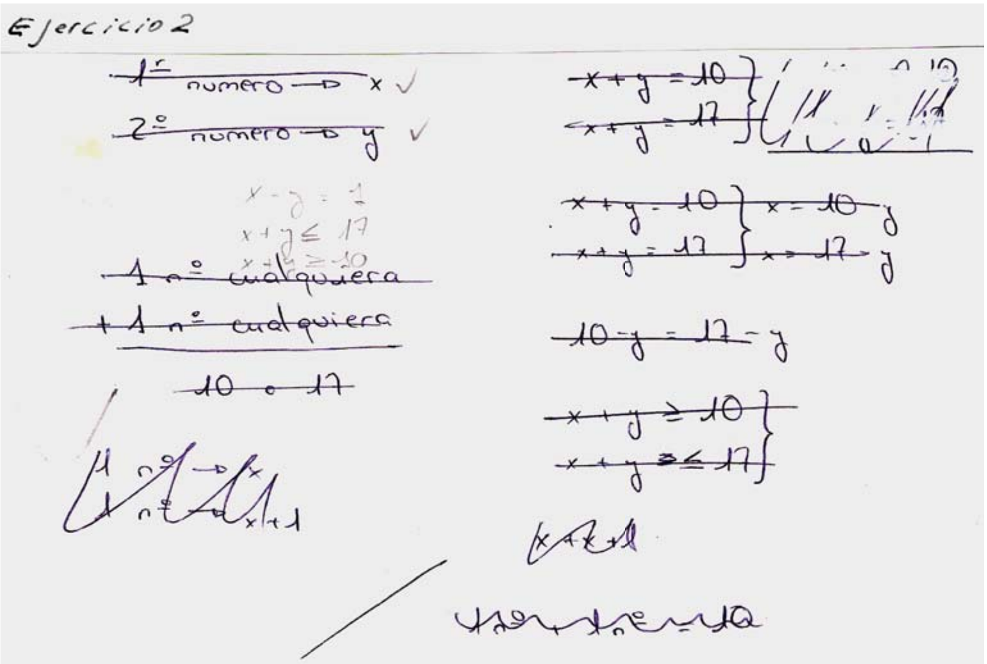
6.5-1. Análisis de la prueba del alumno Manuel, escolarizado en el IES Julià Minguell de Badalona.

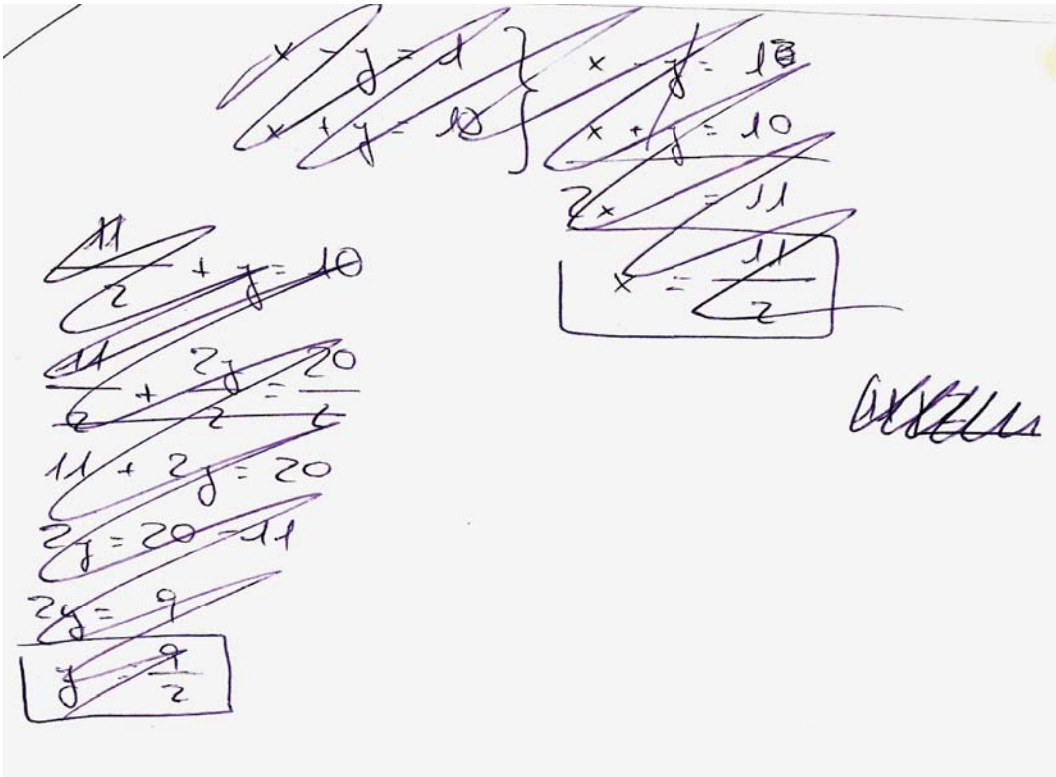
En el ejercicio 1, vemos que Manuel no busca el caso general. Enumera casos posibles y considera números tanto enteros como decimales. Ha contestado de forma afirmativa a la pregunta formulada. Sin embargo, no se ha podido determinar si su respuesta afirmativa a la pregunta formulada ha sido anterior o no al estudio de los casos.


1- Todo número de dos cifras, con las dos cifras iguales, es divisible por 11. Es decir, al dividirlo por 11, el resto de la división es igual a cero.
Por ejemplo, los números tales como el 33, el 44 cumplen esta condición: Sí

Sin embargo, en una conversación-entrevista posterior mantenida con él para poder encontrar las justificaciones a sus omisiones u errores, reconoció que contestó habiendo simplemente verificado el caso de la división de 44 por 11 tal como parecía indicar el enunciado. Los demás casos los añadió por si acaso no lograba convencer al profesor. Se ha atribuido un nivel 2 de razonamiento para este ejercicio.

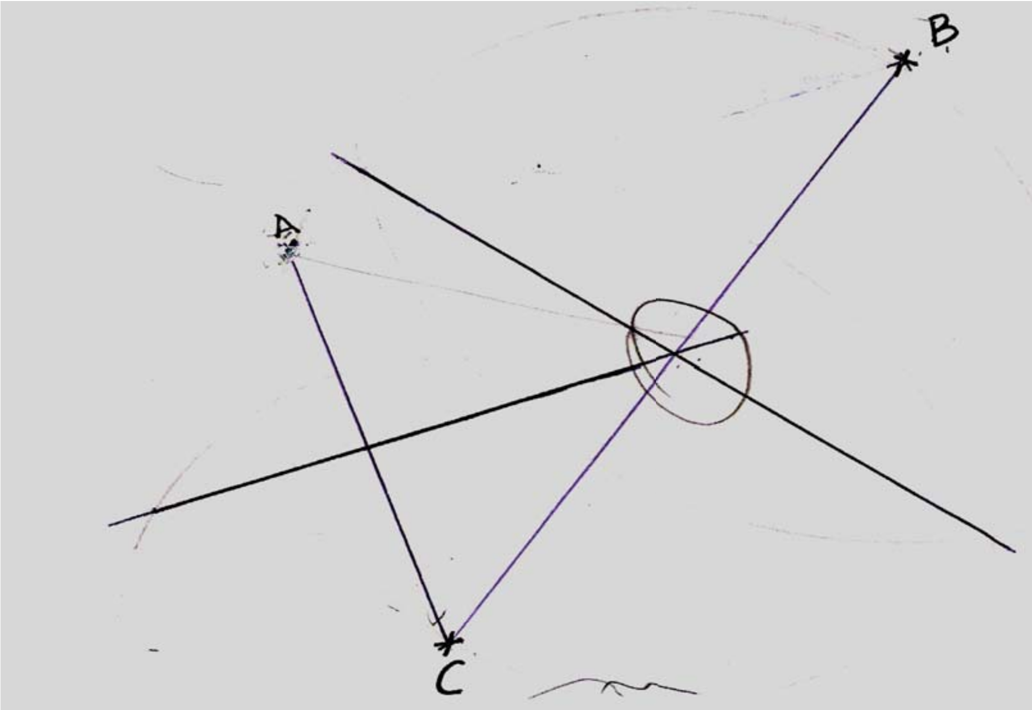
En el ejercicio 2, el alumno intenta plantear el problema pero tiene grandes dificultades debido al uso de "comprendido entre". Duda mucho y no da por válido el proceso por él seguido. Tampoco llega a la solución adecuada. En la entrevista posterior realizada con los alumnos participantes, logra sin embargo plantearlo correctamente. Se ha asignado un nivel 3 de razonamiento.





Prueba 3.

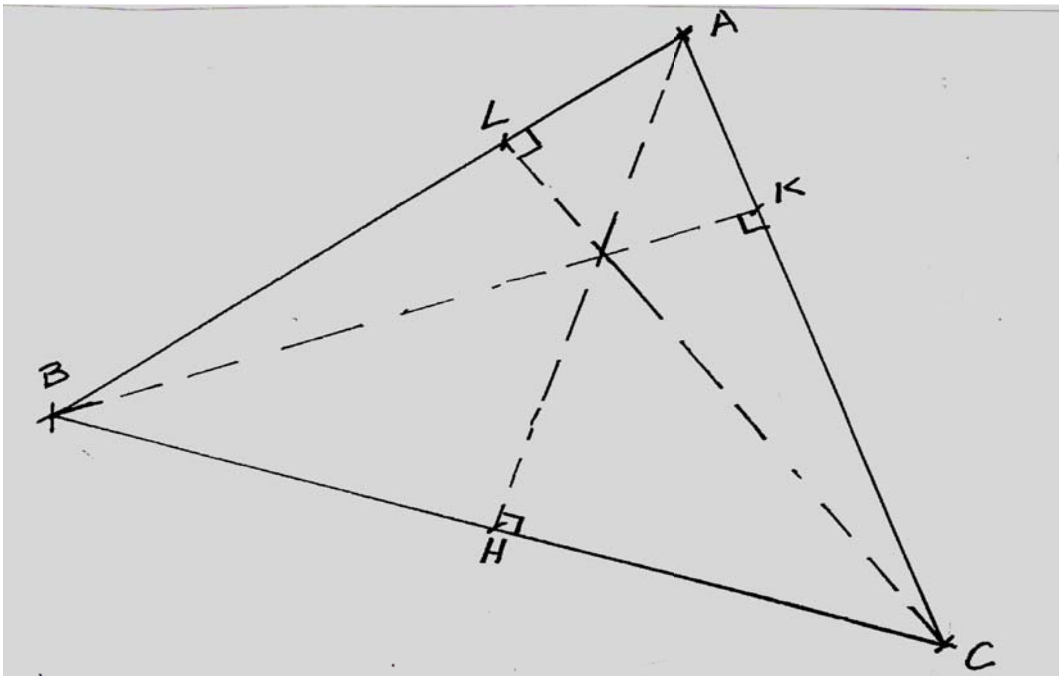
En el ejercicio 3, Manuel demuestra tener bastantes dudas. No sabe bien que hacer. Traza dos mediatrices que permiten situar el punto pedido pero sin embargo no explica   su razonamiento. Se le ha atribuido un nivel 2 de razonamiento.

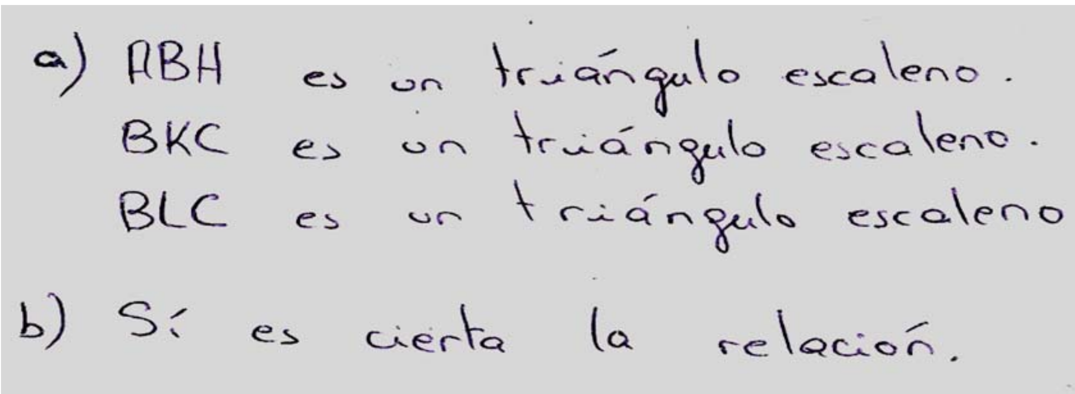


Ejercicio 4

Mide los segmentos para responder. Sabe que son triángulos rectángulos pero dice que son escalenos ya que los lados son diferentes. Dicha duda era mucho más profunda tal como quedó patente después. En efecto, Manuel , a la hora de clasificar un triángulo , se atiene primero a los lados , de forma que , independientemente de la relación existente entre los ángulos o de la presencia de un ángulo de 90 grados, la prioridad es acordada a la relación existente entre los tres lados. Eso significa por lo tanto que un triángulo con los lados desiguales será siempre un triángulo escaleno.

Comentamos en el diseño del experimento que, con los alumnos escolarizados en el IES Julià Minguell, se realizaba una entrevista individual para analizar distorsiones en las respuestas de dichos alumnos. Comentamos también que el formato de dichas entrevistas no está prefijado y que dependía de las respuestas del alumno en las pruebas escritas. En este caso, entrevistando a Manuel, se pudo comprobar el motivo de los fallos en la prueba. Para él, un triángulo con dos lados iguales es siempre isósceles y no piensa en la posibilidad de un triángulo que fuera a la vez isósceles y rectángulo aunque le era mucho fácil llegar a su existencia que admitir lo anterior, es decir la diferencia entre escaleno y rectángulo. Se le ha atribuido un nivel 2.



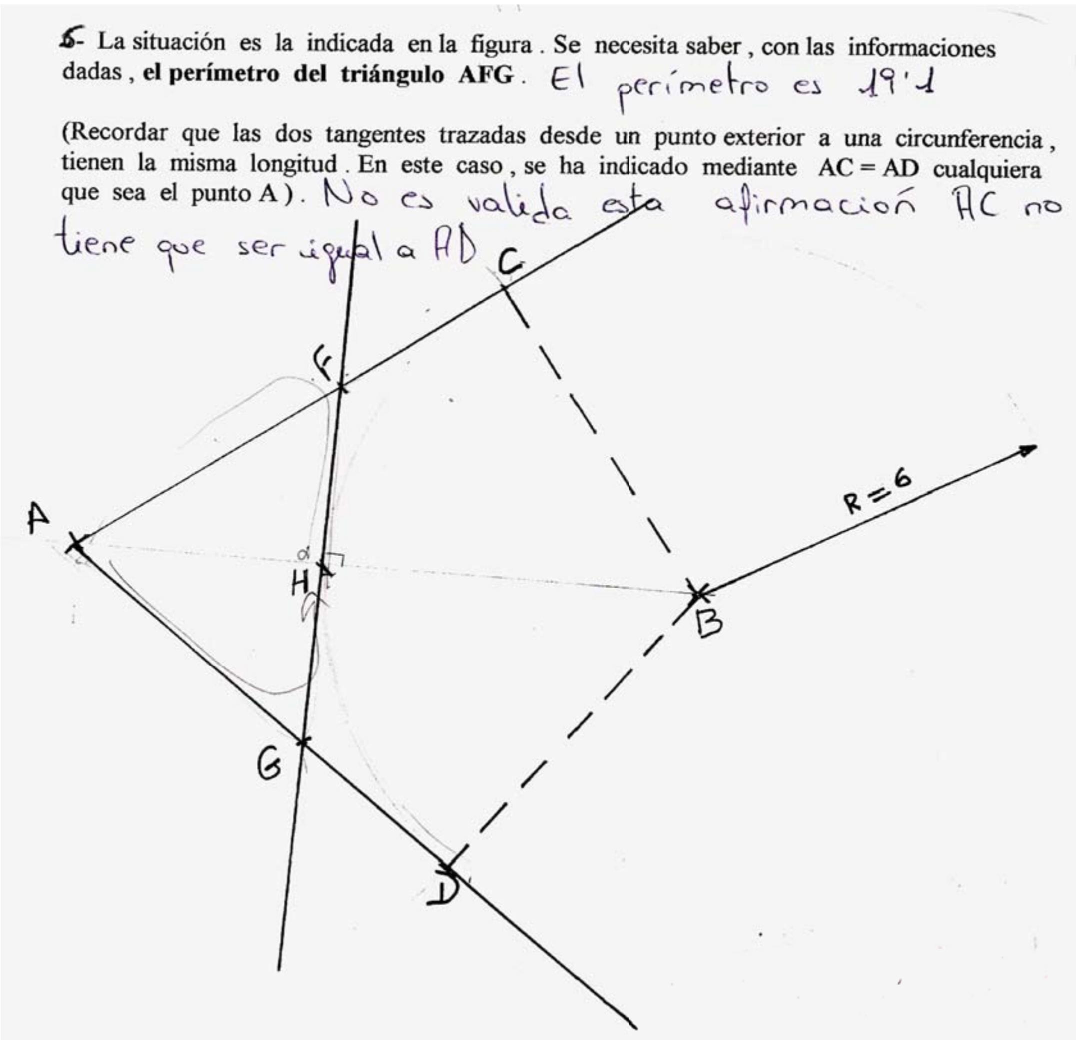

a) ABH es un triángulo escaleno.
BKC es un triángulo escaleno.
BLC es un triángulo escaleno

b) Sí es cierta la relación.

Ejercicio 5

En esta prueba, Manuel también mide los segmentos en este caso para llegar al perímetro.

Corresponde a un nivel 2

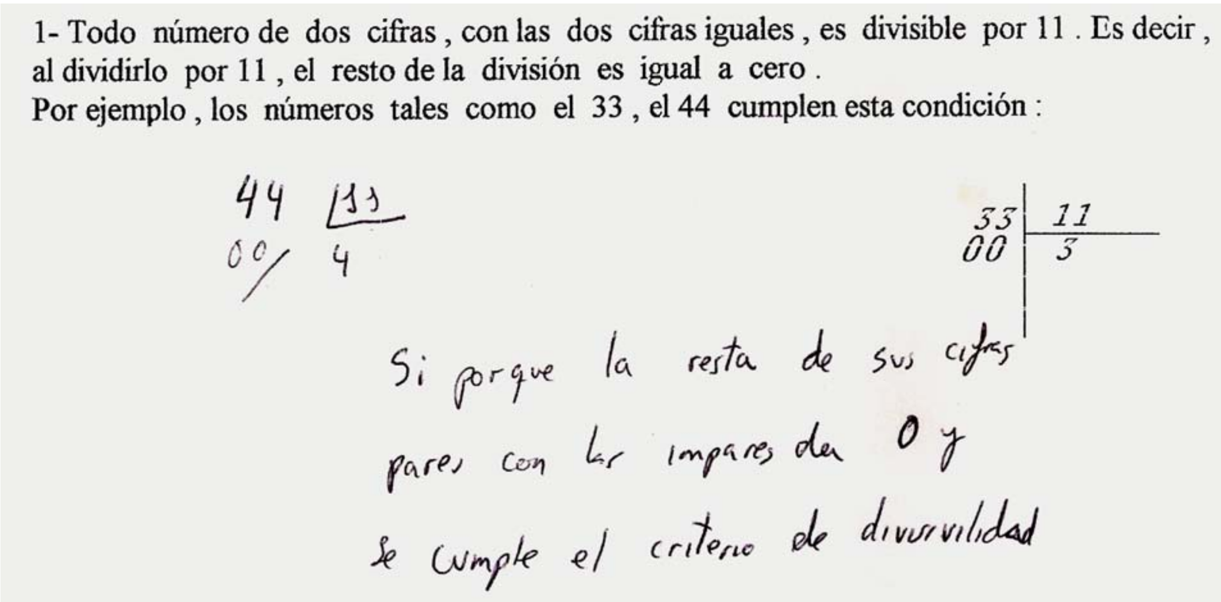

5- La situación es la indicada en la figura . Se necesita saber , con las informaciones dadas , **el perímetro del triángulo AFG** . El perímetro es 19'1

(Recordar que las dos tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia , tienen la misma longitud . En este caso , se ha indicado mediante AC = AD cualquiera que sea el punto A) . No es valida esta afirmación AC no tiene que ser igual a AD

6.5-2 **Análisis de la prueba del alumno Albert, escolarizado en el IES Julià Minguell de Badalona.**

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1



1- Todo número de dos cifras, con las dos cifras iguales, es divisible por 11. Es decir, al dividirlo por 11, el resto de la división es igual a cero.
Por ejemplo, los números tales como el 33, el 44 cumplen esta condición:

44 | 11
00 4

33 | 11
00 3

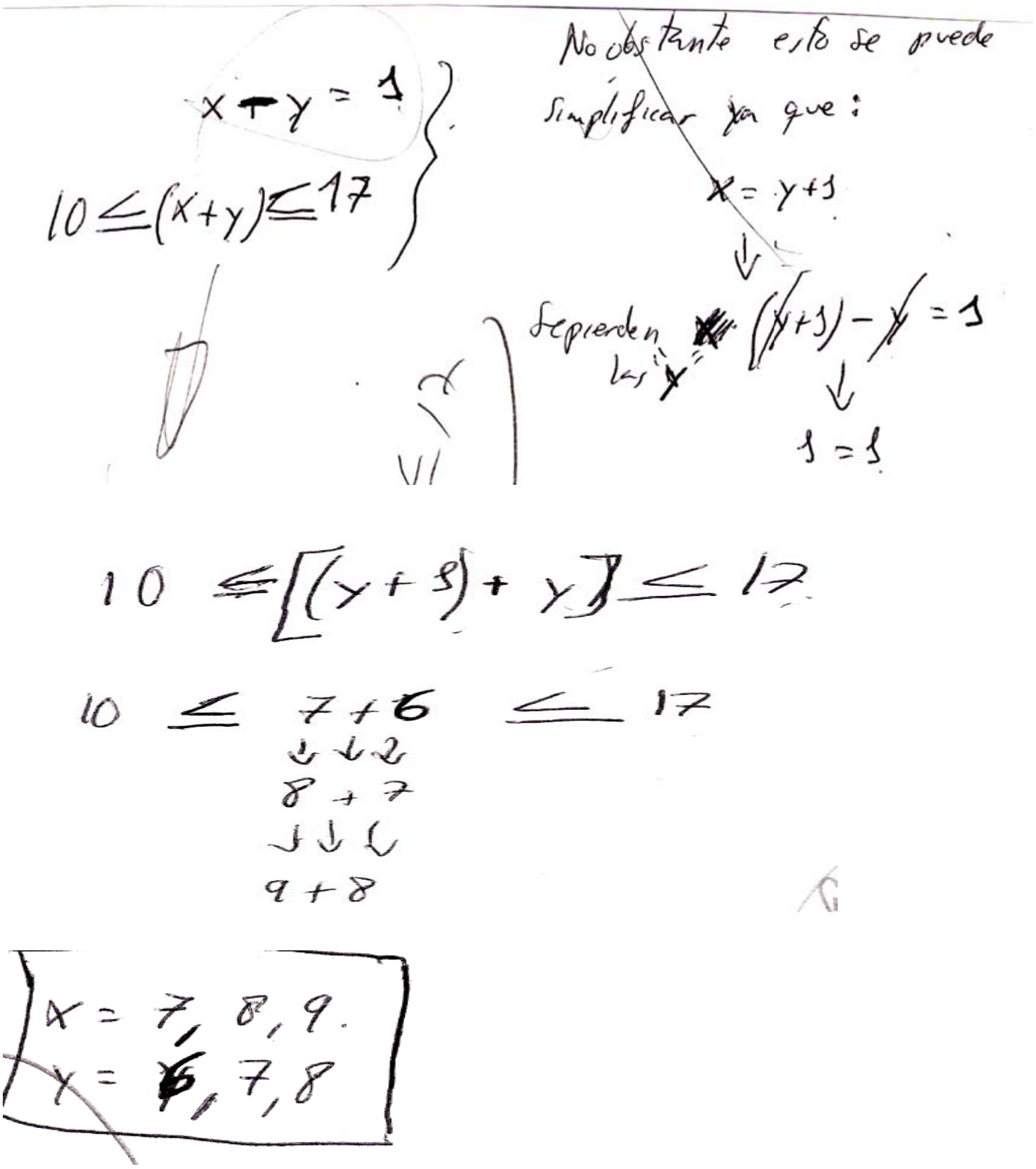
Si porque la resta de sus cifras pares con las impares da 0 y se cumple el criterio de divisibilidad

Sin dar de forma explícita la forma general de los números con las dos cifras iguales y sin decir tampoco de forma explícita que considera los enteros, Albert aplica el criterio de divisibilidad por 11, a saber: la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan lugares pares y de la de los que ocupan lugares impares es o nula o un múltiplo de 11. Sin embargo, no enuncia la propiedad utilizada. Concluye que se cumple la condición impuesta.

Corresponde a un nivel 3

Ejercicio 2

A pesar de no detallar los diferentes pasos de la demostración y no considerar los a desechar por no cumplir con la condición impuesta, se le asigna un nivel 4 por la coherencia en la forma de resolverlo.



No obstante esto se puede simplificar ya que:

$x - y = 1$

$10 \leq (x+y) \leq 17$

$x = y+1$

$\downarrow$

Se pierden las y: $(\cancel{y}+1) - \cancel{y} = 1$

$\downarrow$

$1 = 1$

$10 \leq [(y+1) + y] \leq 17$

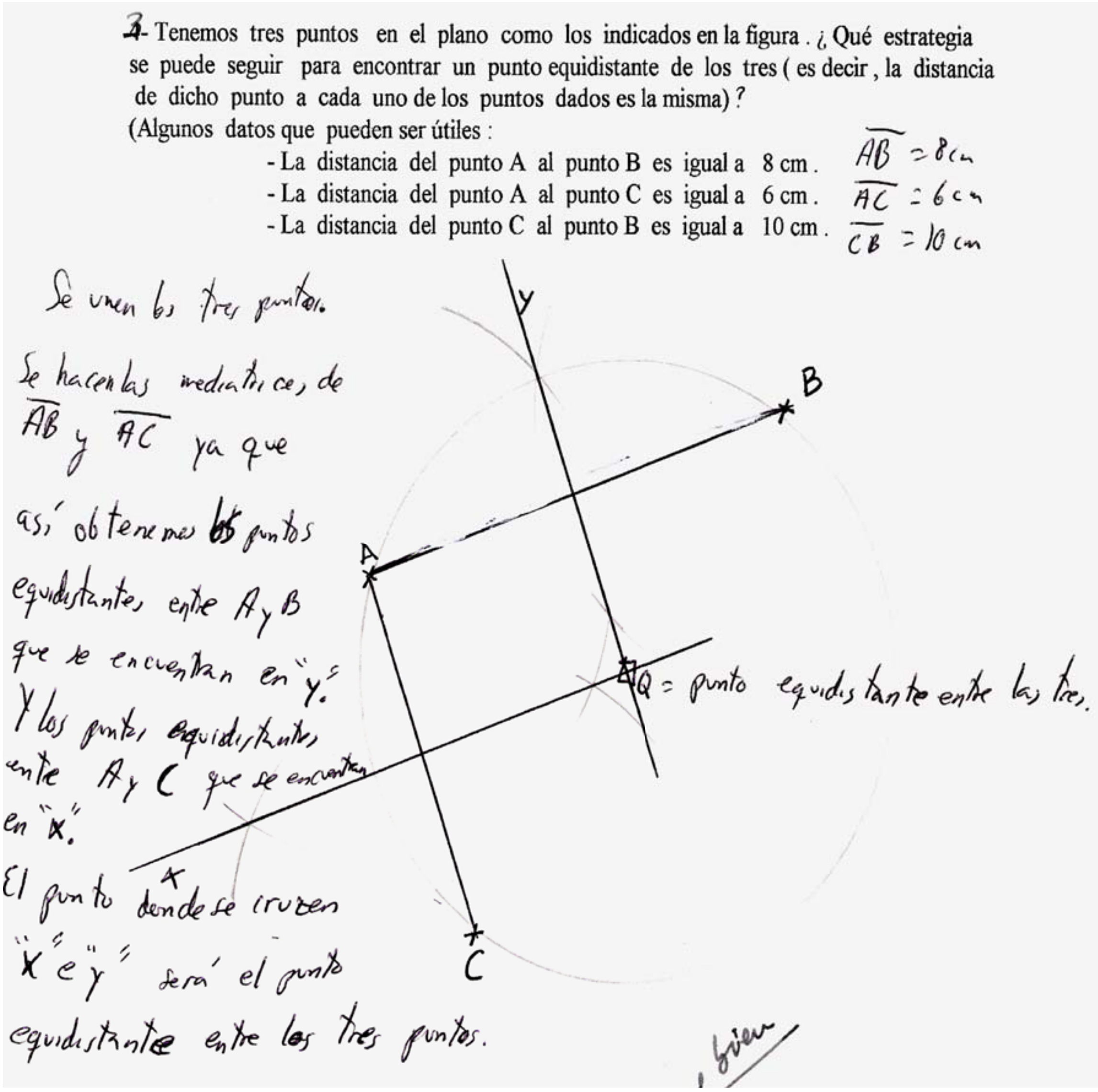
$10 \leq 7 + 6 \leq 17$

$8 + 7$

$9 + 8$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 7, 8, 9. \\ y = 6, 7, 8 \end{array}}$$

En el ejercicio 3 se le ha atribuido el nivel 4. El ejercicio está muy bien resuelto, encuentra un punto Q que cumple con las condiciones impuestas y explicita su razonamiento.



3- Tenemos tres puntos en el plano como los indicados en la figura. ¿Qué estrategia se puede seguir para encontrar un punto equidistante de los tres (es decir, la distancia de dicho punto a cada uno de los puntos dados es la misma)?
(Algunos datos que pueden ser útiles:
- La distancia del punto A al punto B es igual a 8 cm. $\overline{AB} = 8cm$
- La distancia del punto A al punto C es igual a 6 cm. $\overline{AC} = 6cm$
- La distancia del punto C al punto B es igual a 10 cm. $\overline{CB} = 10cm$

Se unen los tres puntos.
Se hacen las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ya que así obtenemos los puntos equidistantes entre A y B que se encuentran en "y". Y los puntos equidistantes entre A y C que se encuentran en "x".
El punto donde se crucen "x" e "y" será el punto equidistante entre los tres puntos.

En el ejercicio 4 se le asigna también el nivel 4 . Sin embargo, se le asigna el 3 en el último. A pesar de haber empezado bien, se le ve falto de recursos para acabar correctamente la resolución . Acaba midiendo.

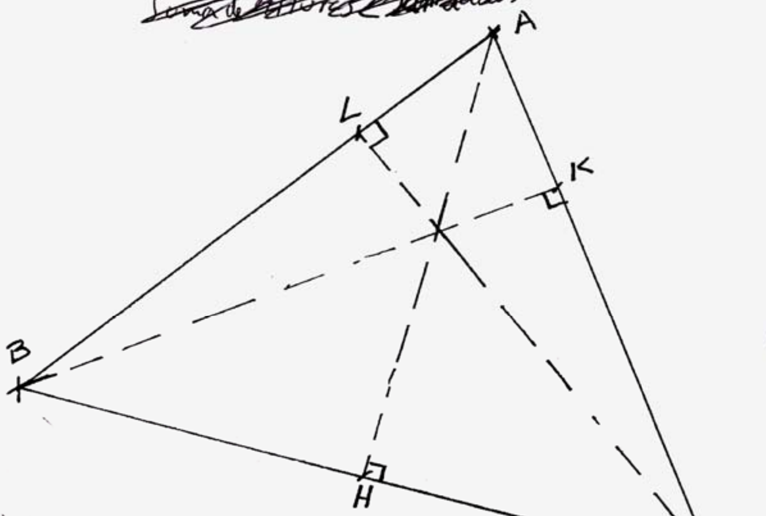
4- ABC es el triángulo isósceles de la figura . [AH] , [BK] , [CL] son las tres alturas y además , tenemos AB = AC = 10 cm y BC = 12 cm .

a) ¿ De qué tipo son los triángulos ABH , BKC y BLC ? Son triángulos rectángulos.

b) ¿ Es cierto que se cumple la relación siguiente :

AH + BK + CL < AB + BC + AC . → Suma de Alturas < Suma de lados.

~~Suma de Alturas < Suma de lados~~



muy bien

nivel 4

Claro que se cumple porque en los tres casos mencionados,

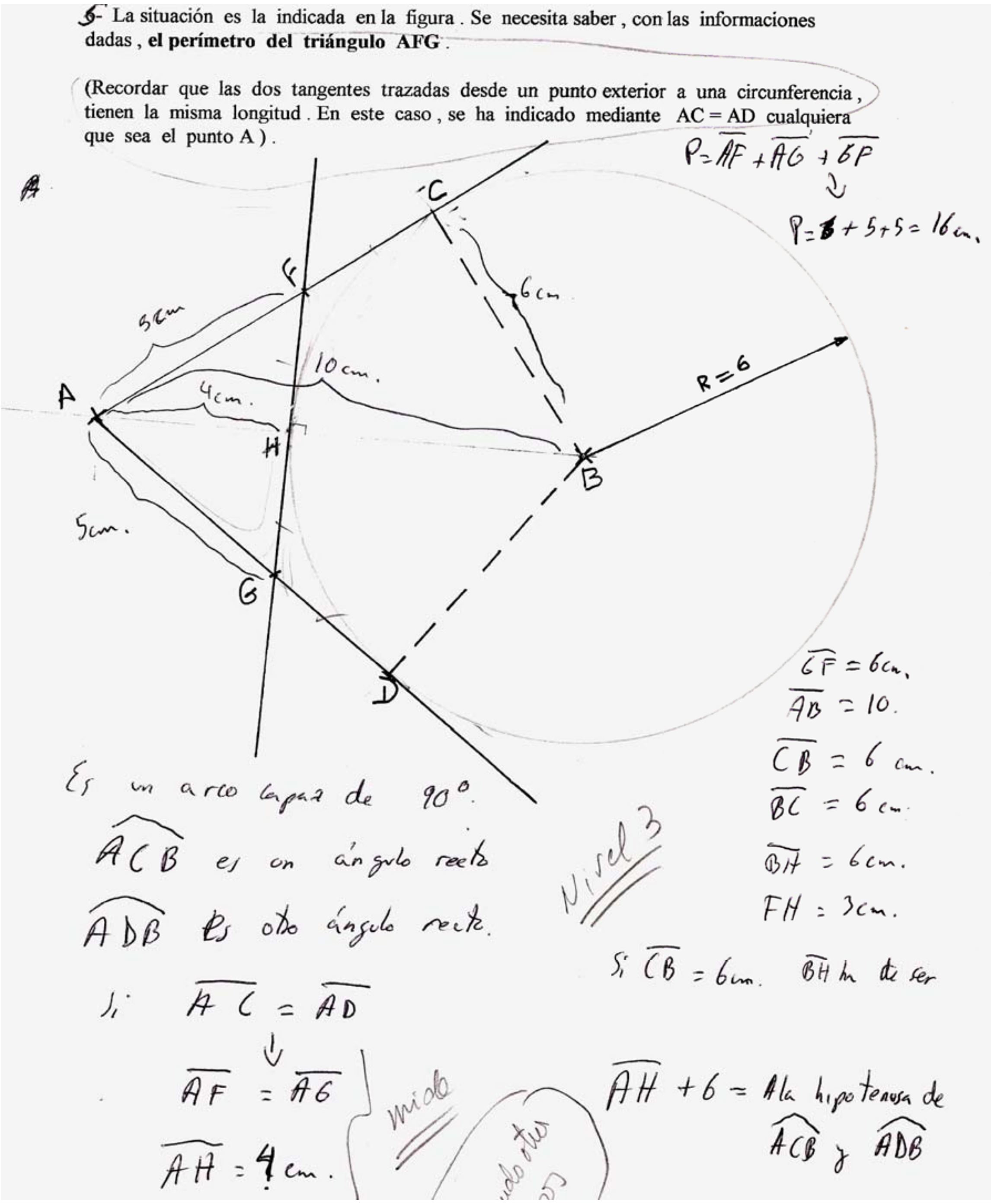
ABH → la hipotenusa es $\overline{BA}$

BKC → la hipotenusa es $\overline{BC}$

BLC → la hipotenusa es $\overline{AC}$

Mientras que AH, BK, CL son catetos. Y como la hipotenusa es siempre más grande que los catetos, se cumple que la suma de tres catetos no es mayor ni igual a la suma de sus tres hipotenusas.

En el ejercicio 5, Albert realiza correctamente las construcciones. Sin embargo, vuelve a medir los segmentos para hallar la respuesta. Se le atribuye un 3 de nivel.



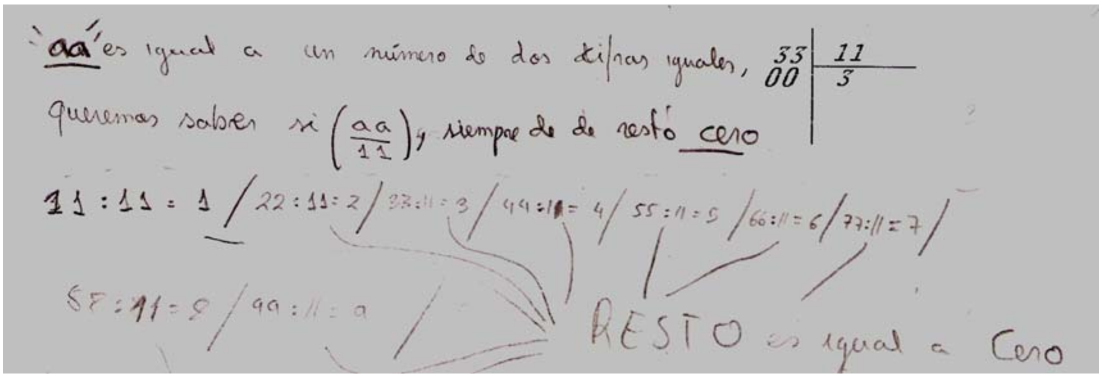
6.5-3 Análisis de la prueba de Julio, escolarizado en el IES Julià Minguell de Badalona.

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1: Parte del caso general y realiza la división de todos los números de dos cifras con las dos cifras iguales. No considera sin embargo el caso trivial 00. Menciona que esto ocurre también con los números decimales y realiza el caso de la división de 9,9 por 11 para comprobar que le da de resto cero también..

Hubiera podido corresponder a un nivel 4 si hubiera justificado el caso general, utilizando la descomposición polinómica de los números (noción teóricamente adquirida en este nivel) .

Se esperaba esta forma de resolución además , a la vista del principio de la resolución del ejercicio. Se le ha asignado el nivel 3 .


aa es igual a un número de dos cifras iguales, 33 | 11
00 | 3
queremos saber si $\left(\frac{aa}{11}\right)$, siempre da de restó cero
11 : 11 = 1 / 22 : 11 = 2 / 33 : 11 = 3 / 44 : 11 = 4 / 55 : 11 = 5 / 66 : 11 = 6 / 77 : 11 = 7 /
88 : 11 = 8 / 99 : 11 = 9
RESTO es igual a Cero

Justifica su respuesta diciendo que: *Podemos afirmar que cualquier número de dos cifras, con las dos cifras iguales, permite hallar un resto nulo al dividirlo por 11. En el caso de decimales, también da cero*. Para ilustrarlo, divide 9,9 por 11.

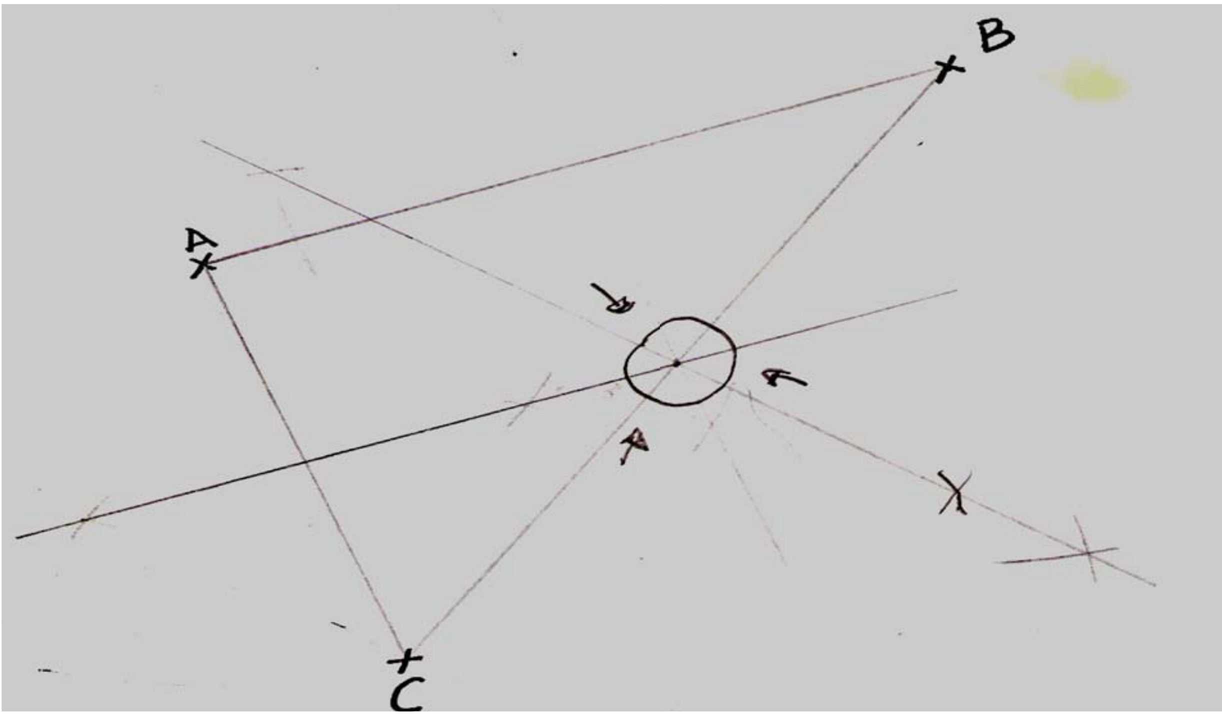
Ejercicio 2 : Encuentra algunos casos que cumplen con las condiciones impuestas. No sabe si están todas las opciones ni explica cómo ha obtenido dichos valores. Corresponde a un nivel 2.

3-Tenemos dos números cualesquiera. La diferencia entre ellos es igual a 1 y su suma es un número comprendido entre 10 y 17. (11, 12, 13, 14, 15, 16)
¿Cuáles son los valores posibles para estos dos números?

nº = 6 y 5
nº = 7 y 6
nº = 8 y 7

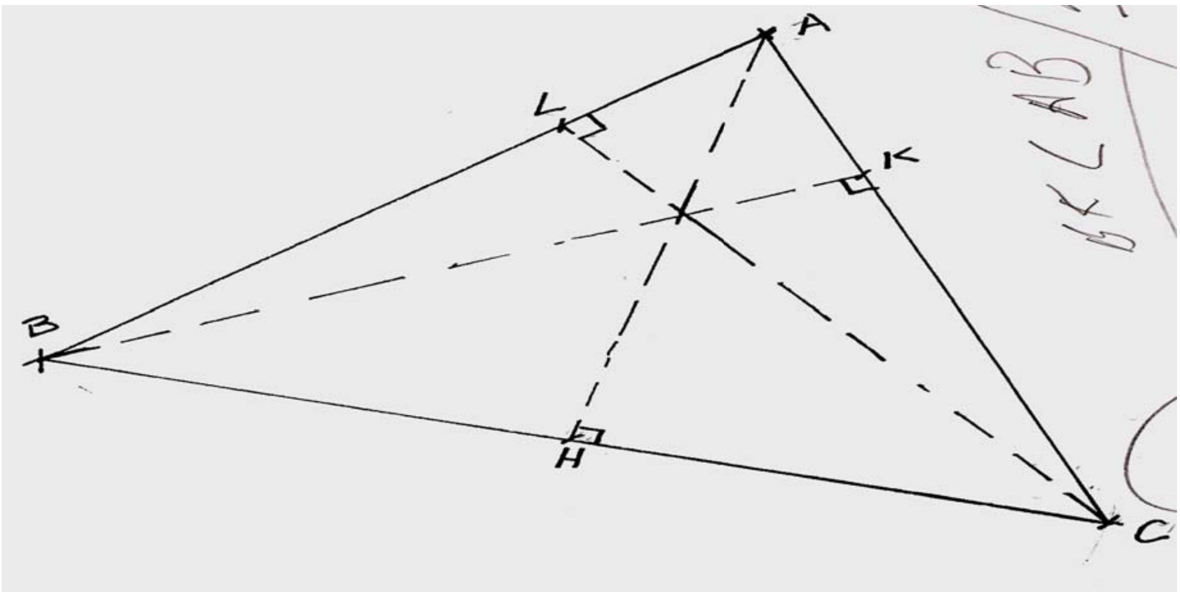
Interpreta que las desigualdades son estrictas y no considera así ni el caso del valor 10 ni el valor 17. Considera además que son números enteros sin que el enunciado haya hecho mención de ello. Para hallar los resultados, realiza la diferencia entre los dos extremos y añade 1 al valor encontrado. Utilizando el método de Ensayo-Error, consigue hallar parte de los resultados. No comprueba la existencia de soluciones ocultas ni comprueba si ha utilizado todos los datos en su poder.

Ejercicio 3: Corresponde a un nivel 3 . Se confirmó después con la entrevista individual. Se nota sobretodo en este ejercicio las bases adquiridas en la asignatura de plástica (Educación visual y plástica) .



Ejercicio 4

Corresponde a un nivel 2 de razonamiento. Da una explicación intuitiva que carece de elementos de peso como para justificar una demostración.



Afirma en su demostración que:

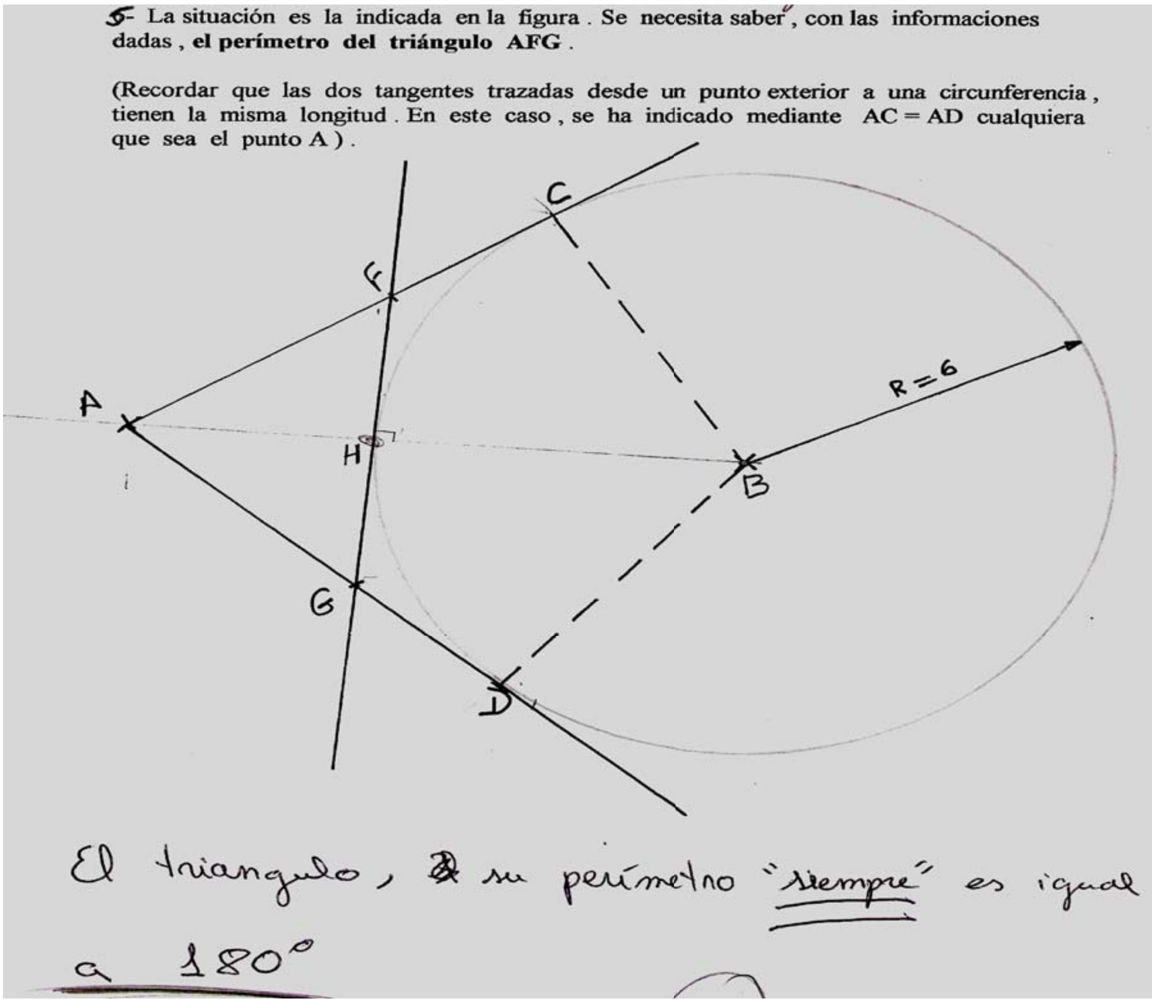
a-Los triángulos ABH, BKC, BLC son rectángulos porque tienen un ángulo recto.

No precisa porque los ángulos son rectos ni tampoco habla de qué tipo es el triángulo ABC ni de las propiedades de las alturas, etc.

b- En el apartado b, responde que en el supuesto de que no se cumpliese la condición, el triángulo no se podría cerrar.

Ejercicio 5

No se ha valorado ya que hay una gran confusión a nivel de conceptos. Corresponde a un nivel 1 .


5- La situación es la indicada en la figura . Se necesita saber, con las informaciones dadas , **el perímetro del triángulo AFG** .

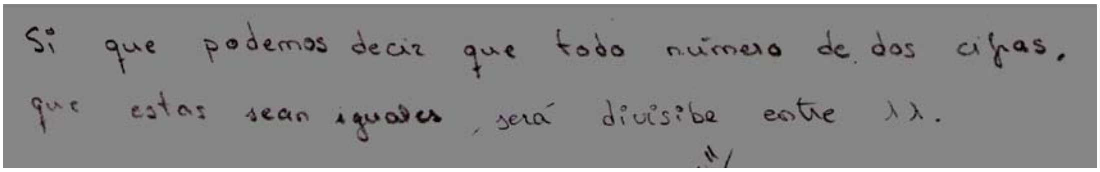
(Recordar que las dos tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia , tienen la misma longitud . En este caso , se ha indicado mediante AC = AD cualquiera que sea el punto A) .

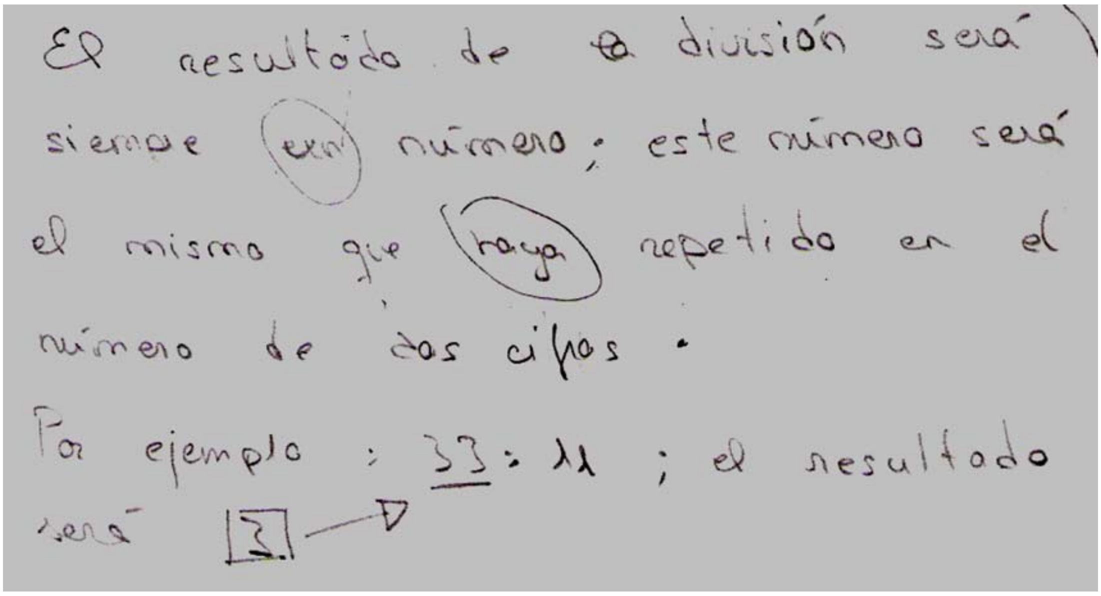
El triangulo, su perímetro "siempre" es igual a 180°

6.5-4 Análisis de la prueba de Sergio, escolarizado en el IES Julià Minguell de Badalona

Ejercicio 1

Enumera las distintas posibilidades, considerando los números enteros, y divide cada uno por 11. Sin explicitarlo, el razonamiento seguido es que todo número de dos cifras con las dos cifras iguales es de la forma ***aa*** y entonces al dividirlo por 11, se obtiene el valor ***a***. Sin embargo, no lo explicita.


Sí que podemos decir que todo número de dos cifras, que estas sean iguales, será divisibe entre 11.


El resultado de ~~la~~ división será siempre un número; este número será el mismo que haya repetido en el número de dos cifras.
Por ejemplo: 33 : 11; el resultado será $\boxed{3}$

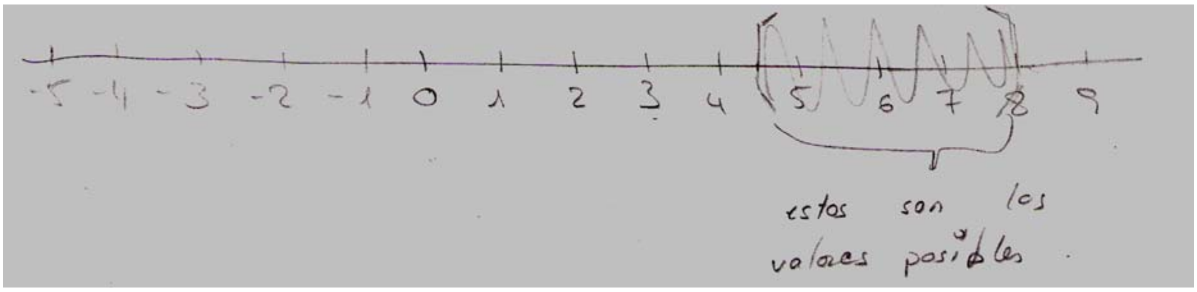
Se le puede atribuir un nivel 3 de razonamiento.

Ejercicio 2

Encuentra los números sin explicitar los que cumplen ambas condiciones impuestas. Tiene ciertos fallos de presentación debido a la inadecuada utilización de los símbolos relacionales . Corresponde a un nivel 3 .

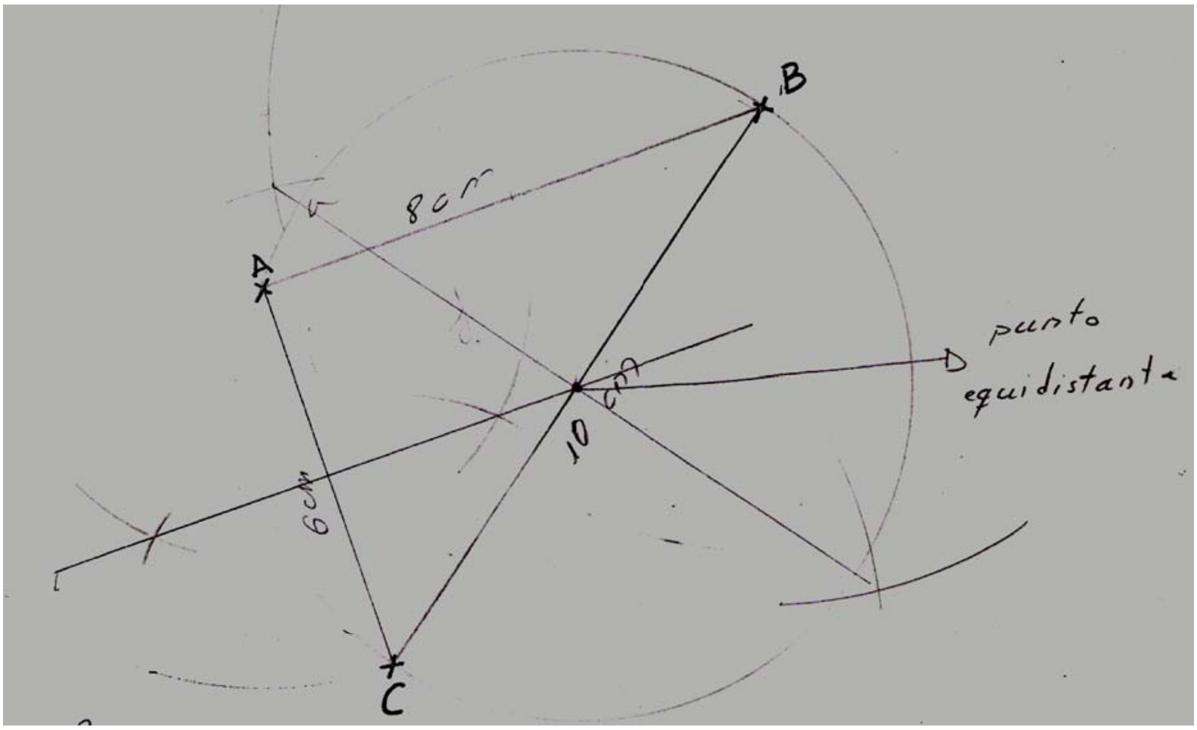
$$x - y = 1$$
$$x + y \geq 10 \leq 17$$

$$1 + 2y \geq 10 \leq 17$$
$$y \geq \frac{9 \leq 16}{2} \qquad y \geq 4'5 \leq 8$$



Ejercicio 3

Puede corresponde a un nivel 3 . Faltaría, para que correspondiera a un nivel 4, explicar el porqué el punto encontrado es equidistante de los otros tres dados. Se nota en este caso la influencia de las nociones explicadas en los créditos de Educación visual y plástica.



primero hacemos la mediatriz del segmento A-C. En segundo lugar hacemos la mediatriz del segmento B-C. Al hacer las mediatrices, estas se unen en un punto; este punto es el punto equidistante.

Ejercicio 4

Se equivoca en su clasificación de los triángulos. El error cometido es del mismo tipo que el de Manuel para el que dijimos que :

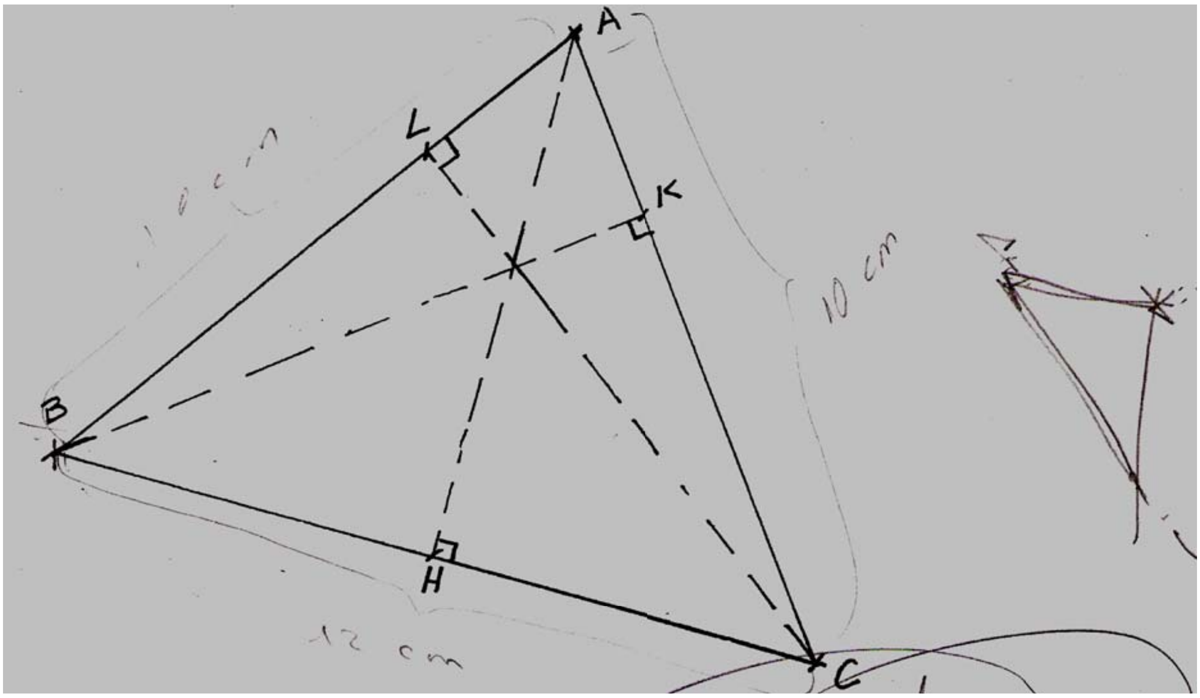
Sabe que son triángulos rectángulos pero dice que son escalenos ya que los lados son diferentes. Dicha duda era mucho más profunda tal como quedó patente después.

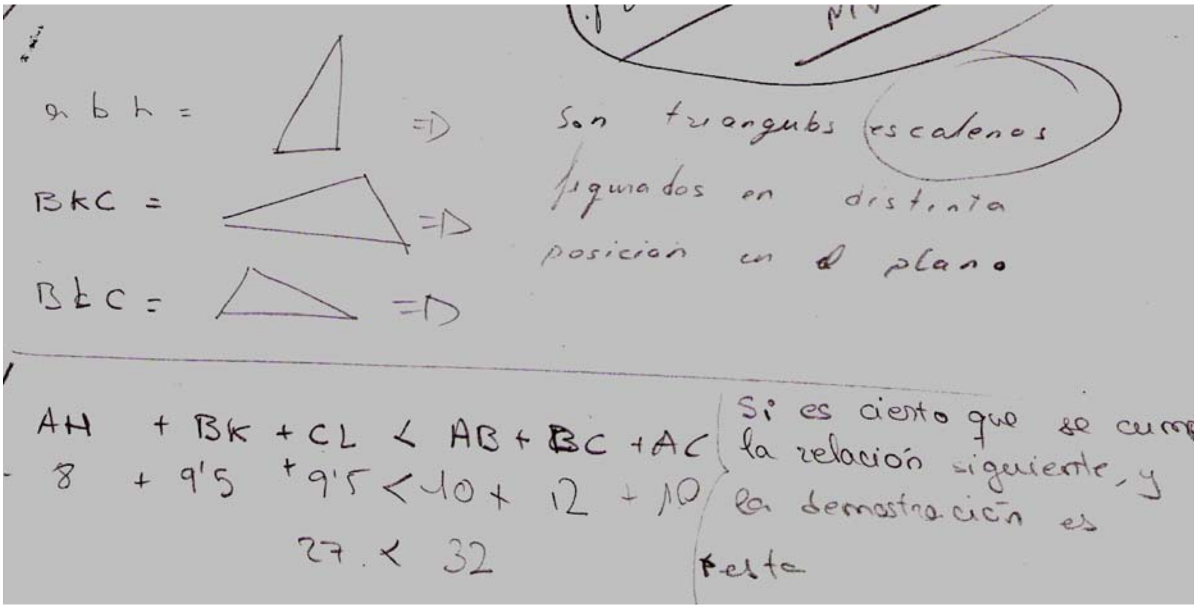
En efecto, Manuel , a la hora de clasificar un triángulo , se fija primero en los lados , de forma que , independientemente de la relación existente entre los ángulos o de la presencia de un ángulo de 90 grados , la prioridad es acordada a la relación existente entre los tres lados. Eso significa por lo tanto que un triángulo con los lados desiguales será siempre un triángulo escaleno. Tal como se pudo comprobar en la entrevista posterior, un triángulo con dos lados iguales es siempre isósceles y no pensaba tampoco en la posibilidad de un triángulo que fuera a la vez isósceles y rectángulo aunque le era mucho más fácil llegar a su existencia que admitir lo anterior, es decir la diferencia entre escaleno y rectángulo.

Habiendo estudiado ambos en el mismo centro y estando catalogado como alumnos Talentosos por el mismo equipo pedagógico y además, habiendo tenido el mismo equipo de profesores, nos atrevemos a pensar que el fallo puede venir de un fallo en el aprendizaje debido a una mala interpretación.

Se le asigna el nivel 2 para esta pregunta.

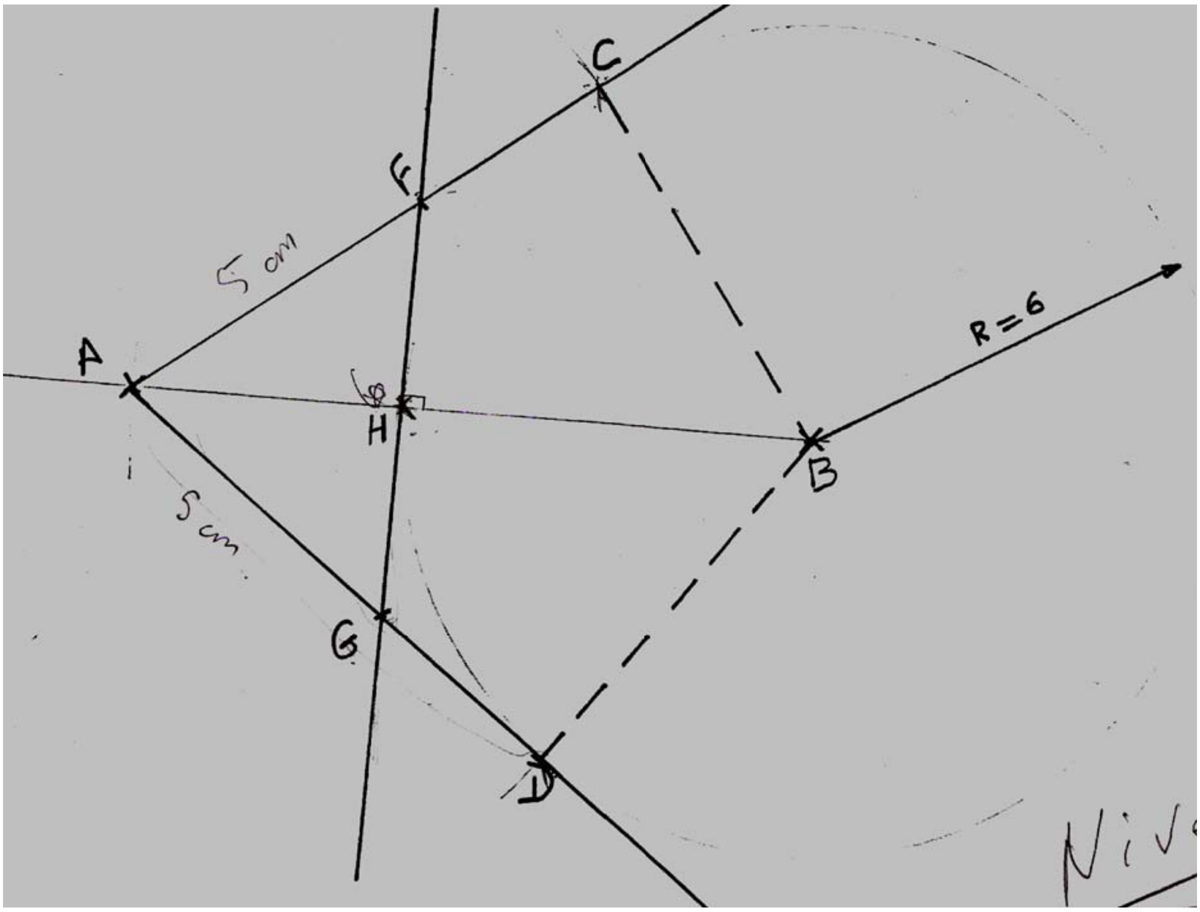
Las construcciones geométricas realizadas sobre la figura han permitido apreciar que realiza mediciones de los segmentos para poder contestar.





Ejercicio 5

También mide los segmentos en este caso para llegar al perímetro. Corresponde a un nivel 2.



Para saber el perimetro hay que sumar los lados del triangulo.
este caso la suma de 16. 16 es el perimetro del triángulo A

6.5-5 Análisis de la prueba de la alumna Elisabeth, escolarizada en el IES Julià Minguell de Badalona. Sistema educativo de escolarización : Español

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1. Parte del hecho de que , para obtener un número de dos cifras , ha de ser multiplicado por 11 . Eso es: N = xx = 10x + x = 11x

A pesar de no haber considerado los casos particulares, se le asigna el nivel 4.

iguales , es divisible por 11.

-Si podemos decir esto, efectivamente todo número de dos cifras, ...tas iguales, es divisible por 11.

- Se puede decir que 11 es divisible por todo número de dos cifras que estas sean iguales.

Puesto que 11 multiplicato por todos los números del 1 al 9, dan esos números de dos cifras, las cuales son iguales.

$11 \cdot X = XX \cdot$ / sea $X = \boxed{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}$

Ejercicio 2

Corresponde a un nivel 4 por ciertas consideraciones que demuestran un razonamiento suficientemente elaborado a pesar de la existencia de ciertos fallos.

Un número cualquiera puede ser = x

Otro número cualquiera puede ser = y

La diferencia entre ellos es igual a 1

$x - y = 1$

Y su suma es un número comprendido entre 10 y 17

$10 < x+y > 17$.

$10 < x+y < 17$

Sabiendo lo de la diferencia sabemos que si su resta da uno, es que son dos números consecutivos.

Además si su suma está entre 10 y 17, debemos buscar dos números consecutivos entre 10 y 17

También sabemos que si son consecutivos uno es par y el otro impar.

Y que un impar más un par da un impar, sabemos que su suma da un número impar.

$x+y=$ nº impar.

Los números pueden ser:

que de $11 = 5+6$ -> Pueden ser el $\boxed{5}$ y el $\boxed{6.}$

que de $13 = 6+7$ -> Pueden ser el $\boxed{6}$ y el $\boxed{7.}$

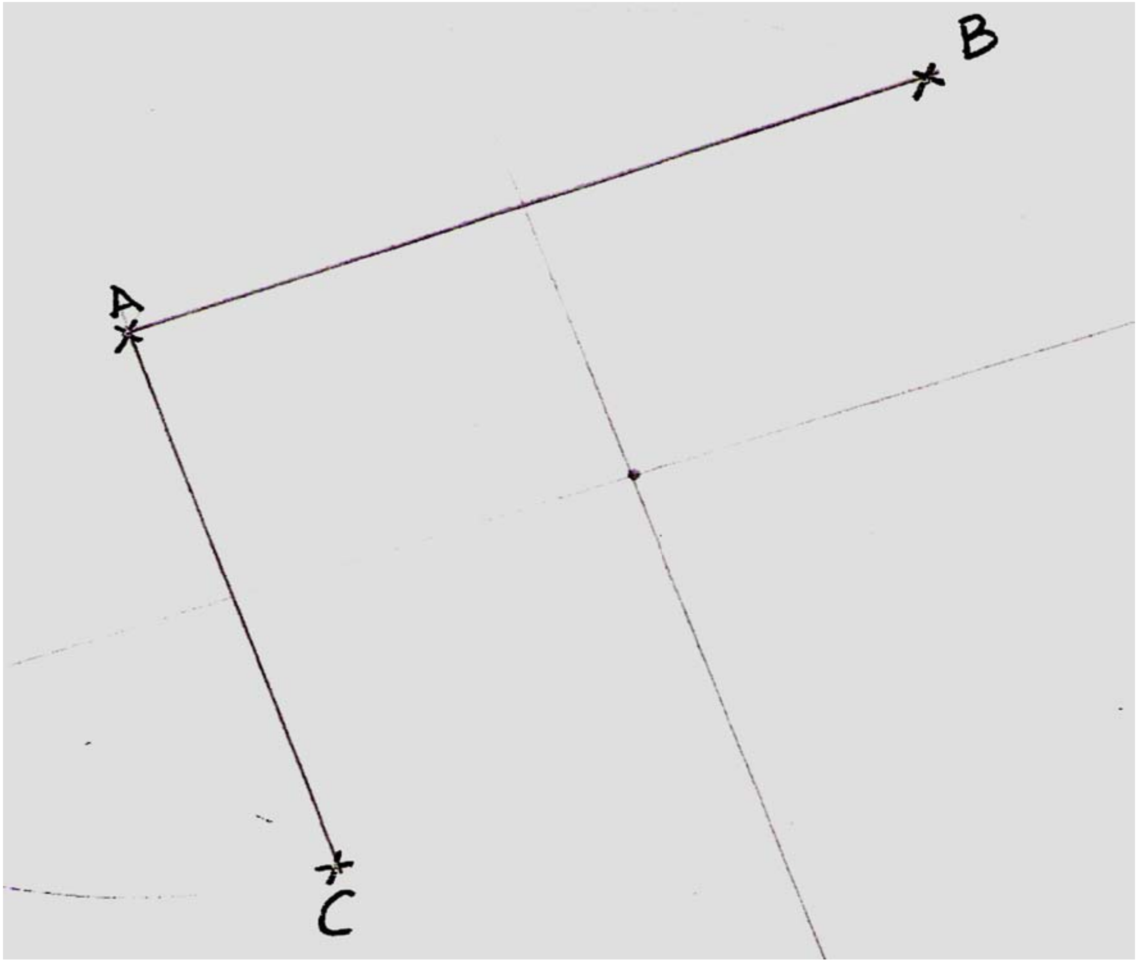
que de $15 = 7+8$ -> Pueden ser el $\boxed{7}$ y el $\boxed{8}$

* También vemos que hay más possibilidades de que de: el 6 y el 7 (Pero es solo un puede ser)

Nivel

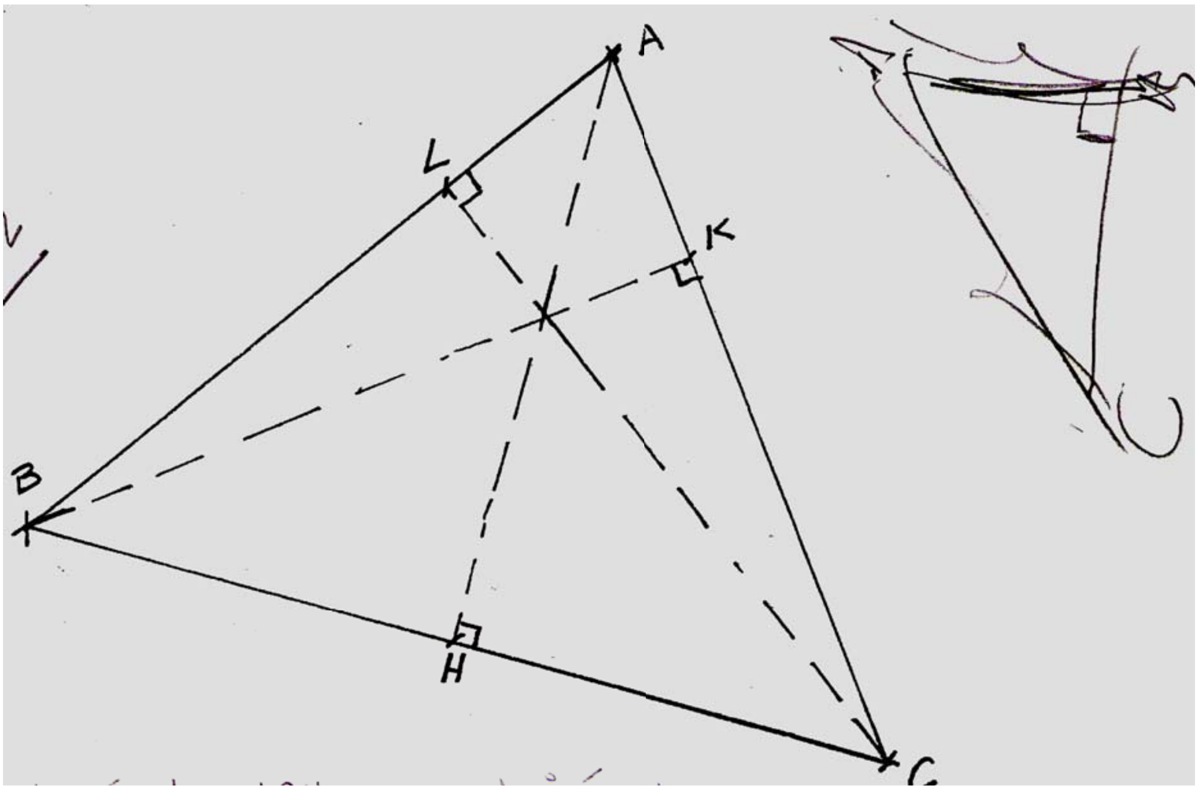
Ejercicio 3

En sus consideraciones, justifica el uso de la mediatriz como conjunto de puntos equidistantes de otros dos cualesquiera del plano . Se le asigna el nivel 4



- Para encontrar un punto equidistante de los tres puntos: A-B
Hemos de hacer una circunferencia y para hacerla, hemos
de trazar una línea del punto A al B, y otra del A al
C (Estas dos líneas se pueden trazar, uniendo cualquier pun
da lo mismo si hubieramos cogido C a B y B a A)
Después haremos la mediatriz de las dos rectas que nos ha
dado, habrá un lugar donde se junten las dos rectas de
la mediatriz y allí es donde está el punto equidistante
a los tres puntos → A - B - C

Ejercicio 4 : Se le asigna el nivel 3. Ciertas consideraciones sobre el triángulo rectángulo le eran desconocidas. Podría también haber utilizado la noción de desigualdad triangular (no se nombra apenas en el sistema educativo español).



El triángulo ABH es un triángulo rectángulo.
El triángulo BKC también es un triángulo rectángulo.
El triángulo BLC también es un triángulo rectángulo

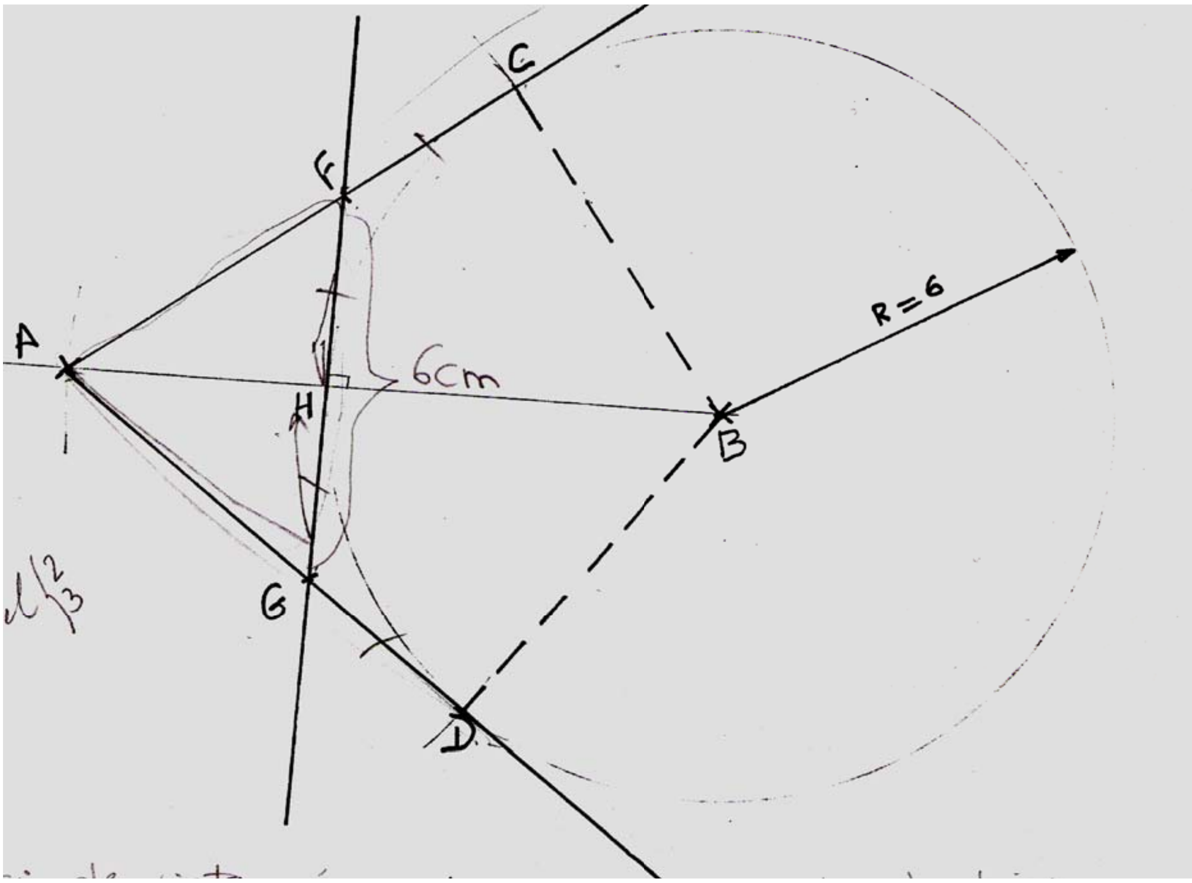
$AH + BK + CL < AB + BC + AC$

$8 + 9{,}5 + 9{,}7 < 12 + 10 + 10$

$27{,}2 < 32$

Es cierto, con esto sacamos que la suma de las tres altur
es más pequeña que la suma de los tres lados.

Ejercicio 5. Se le ha asignado el nivel 1



A simple vista sé que HB que es el radio de la circunfe-
rencia mide 6 cm, estas 6cm también lo mide CB y BD
(puesto que tombién son radios de la circunferencia.
Ahora también sé que FG mide 6cm.
La superficie de la circunferencia es:

$S = \pi \cdot r^2 \mid S = 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$

6.6- Entrevistas Individuales

Se trata de valorar, con cada uno de los 5 alumnos del LES Julia Minguell que han participado en el estudio de casos, las respuestas dadas en cada una de las actividades. Dichas entrevistas aportaron pocos datos adicionales pero sin embargo, sirvieron para reforzar las ideas que nos habíamos hecho durante la corrección de las pruebas .

En el caso de Manuel, se pudo comprobar que su grado de comprensión es altísima, cosa que ya se sabía por su expediente y el contacto diario de clase . En algunos casos reconoce que no ve la necesidad de explicar ciertas cosas que le parecían obvias . Ve los fallos cometidos con mucha rapidez salvo el caso que ya se ha comentado con anterioridad con respecto a los triángulos rectángulos .

En el caso de Elisabeth, cree que su gran problema radica en la distribución del tiempo cuando se enfrenta a una prueba escrita. Cree que le faltan herramientas para enfrentarse a los problemas geométricos. Y que en el caso de los numéricos, el haber cursado un crédito de resolución de problemas ha influido mucho en su forma de resolverlos .

En el caso de Albert, la entrevista no aportó ningún detalle adicional. Merece la pena recalcar su comentario de que podría haber intentado resolver los ejercicios con más elegancia.

En lo que respeta a Sergio, llama bastante la atención el hecho de que , con respecto a la primera pregunta , contestará que respondía y luego ejemplificaba. Su respuesta a la pregunta fue anterior a la demostración de la veracidad de la afirmación. Para la última pregunta, no sabía como enfocarlo. Al explicarlo , lo vio mucho más claro.

Con lo que respeta a Julio, hay que recalcar ciertos hechos por él comentados. Por ejemplo, para él , lo básico no tienen porque ser explicado. Va, dice él, al grano y obvia lo evidente en sus explicaciones.

Para resolver el primer problema, se sirvió de algunos ejemplos hechos en un crédito de "Manipulación numérica", cuyo contenido se puede consultar en anexo. Sino, no se le hubiera ocurrido hacerlo de esta forma. Cree que el hecho de no haber acabado de explicar las inecuaciones en el crédito común fue lo que le impidió resolver adecuadamente el problema.

6.7- Análisis Comparativo

Las pruebas de los 5 alumnos que forman parte del estudio, se han comparado con las realizadas por otros alumnos. Dos de estos alumnos están escolarizados en un sistema italiano y los otros en un sistema francés, tal como se ha explicado en el diseño metodológico.

Nuestra idea consiste en comparar la forma de abordar los ejercicios propuestos y detectar así la influencia de los diferentes métodos de enseñanza de los sistemas español, italiano, francés. Además , se ha procurado que las edades fueran distintas para poder comprobar la posible influencia de un factor de madurez biológica.

Analicemos estas pruebas para luego hacer una valoración comparativa.

6.8- Valoración de las otras pruebas

Tal como aparece en el diseño del experimento, los alumnos que forman parte de la muestra proceden de tres ámbitos educativos diferentes:

1- Un IES ubicado en Badalona con una población perteneciente al mismo barrio, en el mismo municipio.

2- Otros dos Centros educativos con características diferentes:

   a. El Instituto Italiano

   b. El Liceo Francés

Pasamos ahora a analizar las pruebas de los alumnos del Instituto Italiano y del Liceo Francés.

6.9-Análisis de las pruebas de los alumnos del Instituto Italiano

Consideremos los casos de los alumnos escolarizados en el sistema italiano : Eva y Luca .

6.9.1- Análisis de la prueba del alumno Luca, escolarizado en el Instituto Italiano de Barcelona. Sistema educativo de escolarización : Italiano

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1

Su respuesta no contempla ninguna explicación, ninguna justificación.

Corresponde a un nivel 1

Sí porque todos los numeros de dos cifras iguales són multiplos de 11.

Ejercicio 2

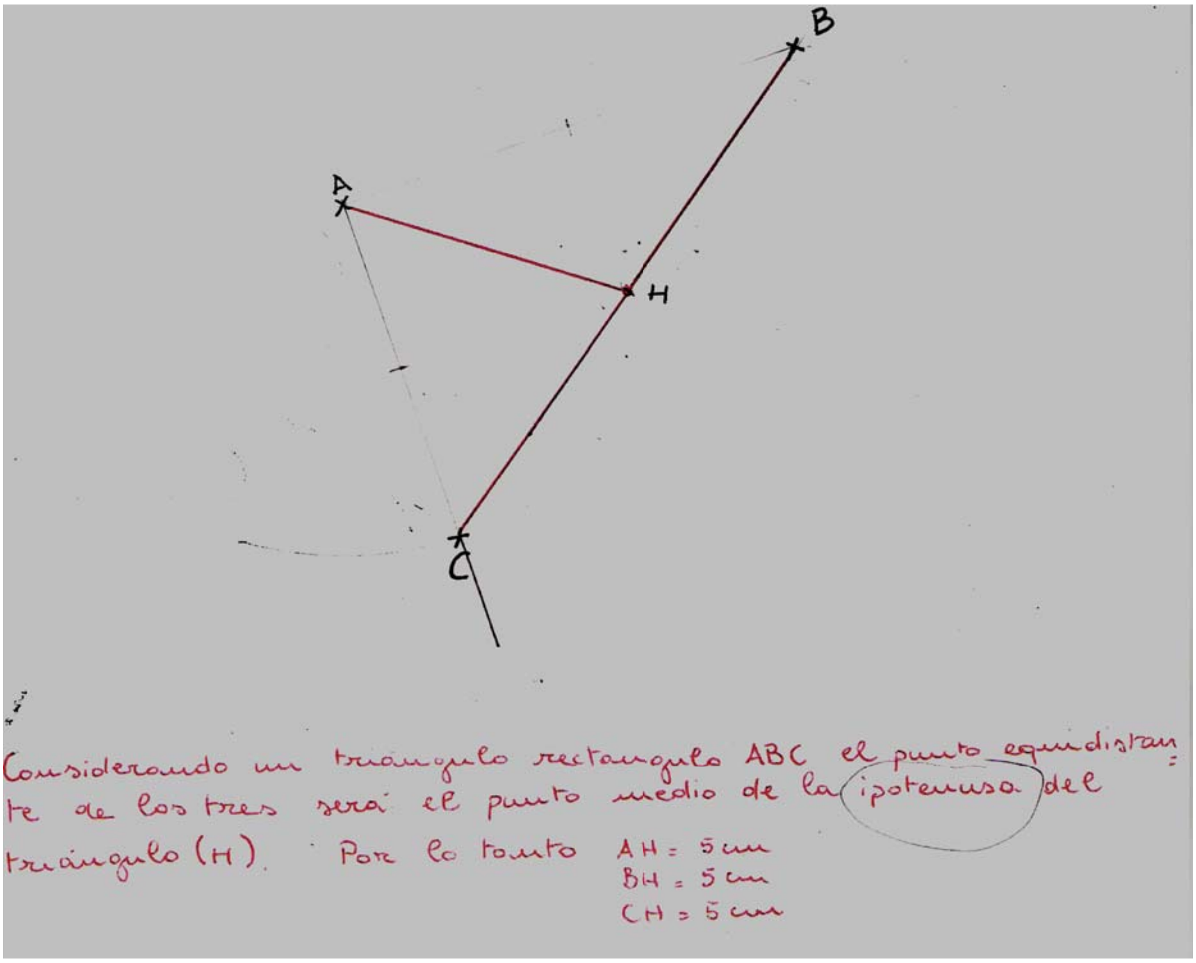
Buena codificación. Sin embargo la resolución es parcial. No fija ninguna condición previa y presupone muchas condiciones no obvias: No son obligatoriamente enteros, Las desigualdades no son estrictas forzosamente, etc… Al final, enumera las posibilidades en vez de buscar un método formal de resolución.

Se le asigna un nivel 2 de razonamiento.

Los valores posibles para los dos números son:

9; 8; 7; 6; 5 porque: 9 - 8 diferencia = 1 ; suma (9+8) = 17
8 - 7 " = 1 ; " (8+7) = 15
7 - 6 " = 1 ; " (7+6) = 13
6 - 5 " = 1 ; " (6+5) = 11

Ejercicio 3 : Halla por construcción la posición del punto H. Luego, utiliza sus conocimientos teóricos para situar el punto H como punto medio de la hipotenusa. Sin embargo no justifica porque. Se le ha atribuido el nivel 4.



S le asigna un nivel 3 para este ejercicio.

Ejercicio 4

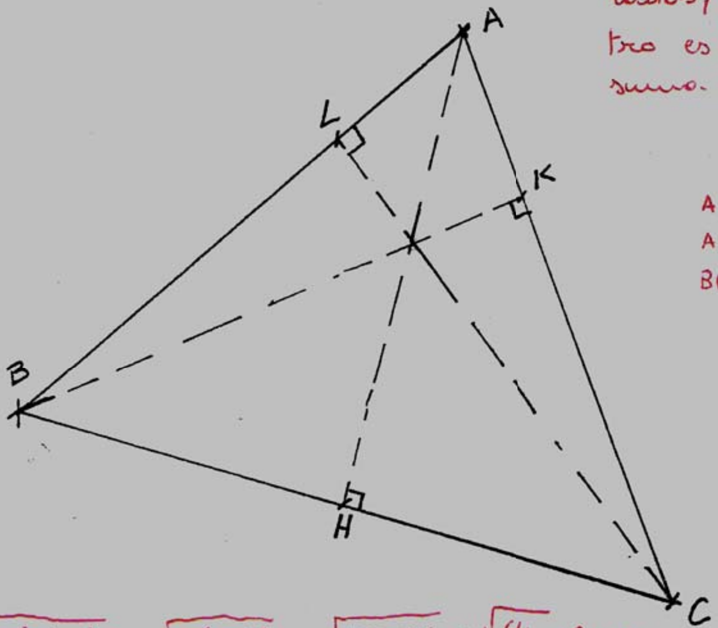
Utiliza correctamente los datos del problema para establecer la comparación. Se le asigna el nivel 4.

4 ABC es el triángulo isósceles de la figura. [AH], [BK], [CL] son las tres alturas y además, tenemos AB = AC = 10 cm y BC = 12 cm.

a) ¿ De qué tipo son los triángulos ABH, BKC y BLC ? Son rectangulos

b) ¿ Es cierto que se cumple la relación siguiente :
AH + BK + CL < AB + BC + AC .

Sí porque las tres alturas son menores de los lados y por tanto el perímetro es mayor que la suma de las alturas.



AL = 3 cm
AK = AL
BK = CL

$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ cm.

$CL = \sqrt{AC^2 - AL^2} = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91} = 9, \ldots$

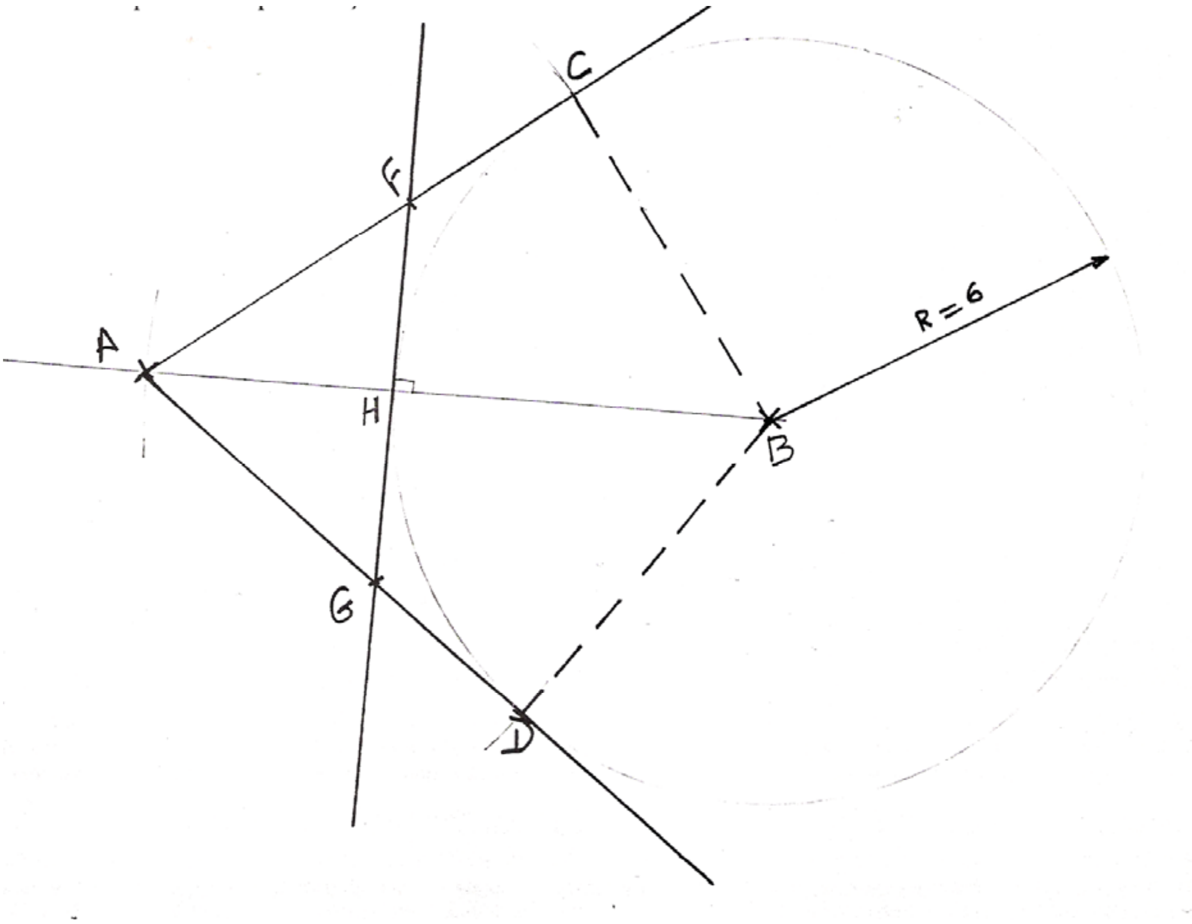
$AH + BK + CL = 8 + 9, \ldots + 9, \ldots = 26, \ldots$ cm

$P = 10 + 10 + 12 = 32$ cm

$32 > 26, \ldots$ cm

Ejercicio 5

Se le asigna el nivel 1.



6.9-2- Análisis de la prueba de la alumna Eva, escolarizada en el Instituto Italiano de Barcelona. Sistema educativo de escolarización : Italiano

Valoración del Ejercicio 1

Su respuesta no contempla ninguna explicación, ninguna justificación. Corresponde a un nivel 1

Sí, porque todo número de dos cifras con las dos cifras iguales es un múltiple de 11.

Ejercicio 2: Su respuesta no contempla ninguna explicación “literal”. Buena técnica operatoria. Ausencia de evaluación final. Corresponde a un nivel 4.

$$a+b=c$$

$$10<c<17$$

$$a-b=1$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=c \\ a-b=1 \\ 10<c<17 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1+b \\ 1+b+b=c \\ 10<c<17 \end{array}\right. \rightarrow 2b+1>10 \text{ y } 2b+1<17$$

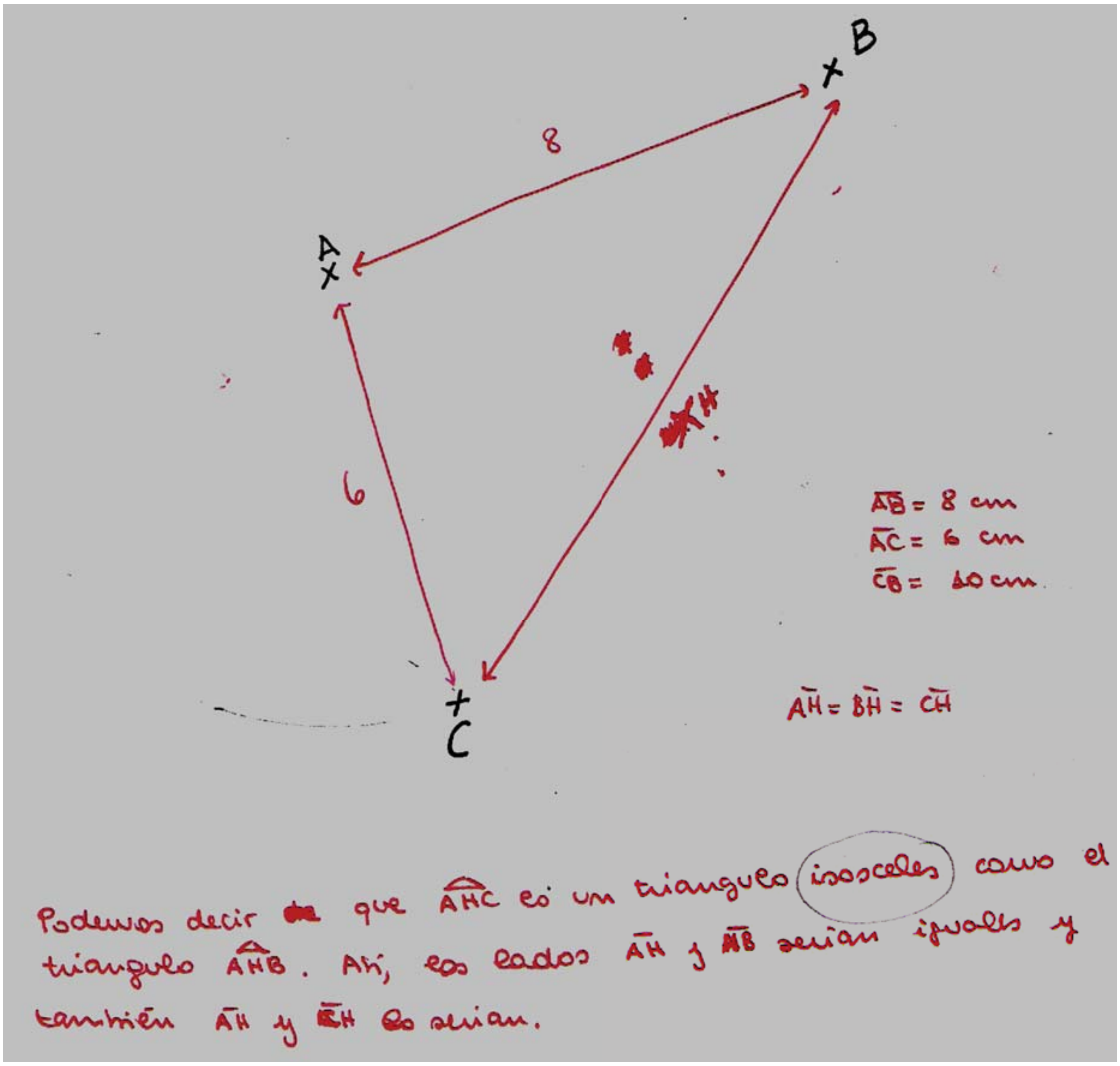
$$2b+1=10 \rightarrow 2b+1-10=0 \rightarrow 2b-9=0 \rightarrow b>\frac{9}{2}$$

$$2b+1<17 \rightarrow 2b+1=17 \rightarrow 2b+1-17=0 \rightarrow 2b-16=0 \rightarrow b<8$$

$$b>\frac{9}{2} \text{ y } b<8$$

$$a=1+b \;\begin{cases} a>\frac{11}{2} \\ a<9 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{11}{2}<a<9 \\ \frac{9}{2}<b<8 \end{array}}$$

Ejercicio 3



Es uno de los casos de resolución más extraño. Parece corresponder al caso de un alumno con conocimientos geométricos muy escasos pero con muy alto dominio de los conocimientos analíticos y buen dominio de los mecanismos de cálculo. Parte de la idea de la existencia del punto H sin saber ubicarlo en el plano. De existir este punto H , equidistante de los otros tres dados: A , B, C, los triángulos AHB y AHC serían isósceles.

Sin embargo , no profundiza en su razonamiento que, de llegar al final hubiera sido muy original.

Nivel atribuido: 4

Parece estar utilizando nociones explicadas en la asignatura de Educación Visual y Plástica. Utiliza varias reglas sin explicitarlas, como por ejemplo :

1- La hipotenusa es centro de la circunferencia circunscrita.

2- La mediana relativa a la hipotenusa tiene como longitud la mitad de la hipotenusa lo que significa que los tres segmentos; [HA], [HB] , [HC] son iguales en longitud. Lo que significa que H es equidistante de los tres.

Valoración del ejercicio 4

Contesta al apartado a sin ninguna justificación. No explica la respuesta.

En el apartado b usa las nociones numéricas en vez de buscar las relaciones existentes entre los lados.

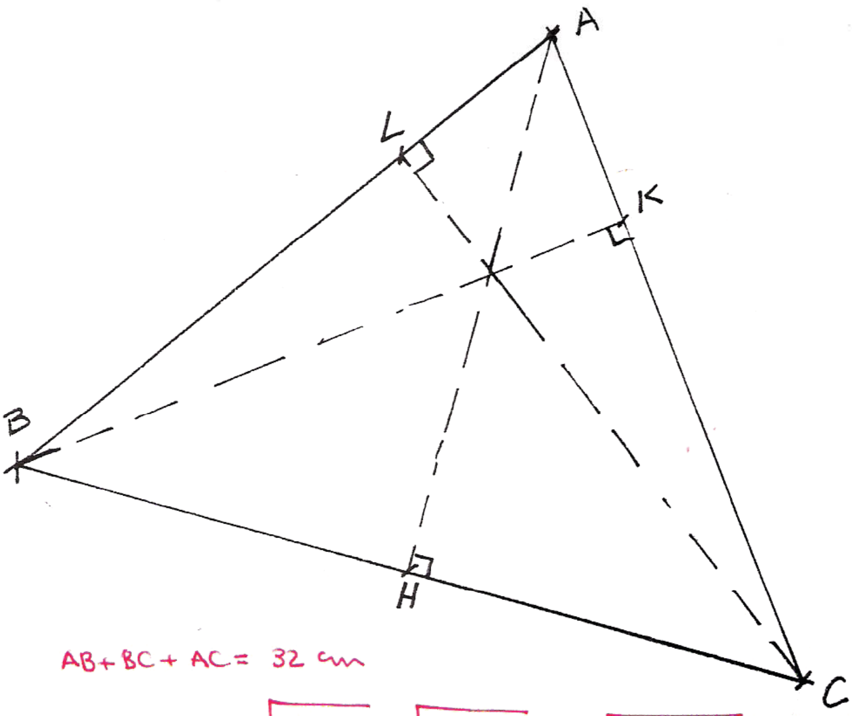
Nivel atribuido: 4

5- ABC es el triángulo isósceles de la figura . [AH] , [BK] , [CL] son las tres alturas y además , tenemos AB = AC = 10 cm y BC = 12 cm .

a) ¿ De qué tipo son los triángulos ABH , BKC y BLC ? Son rectángulos

b) ¿ Es cierto que se cumple la relación siguiente :

$$\mathbf{AH + BK + CL \ < \ AB + BC + AC} .$$



$AB + BC + AC = 32$ cm

$\overline{AH} =$ cateto $= \sqrt{I^2 - C^2} = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ cm

$CH = \frac{BC}{2} = 6$

$AK = 3$ cm $\rightarrow$ $BK = \sqrt{BA^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{100-9} = \sqrt{91} = 9{,}5$ (aprox)

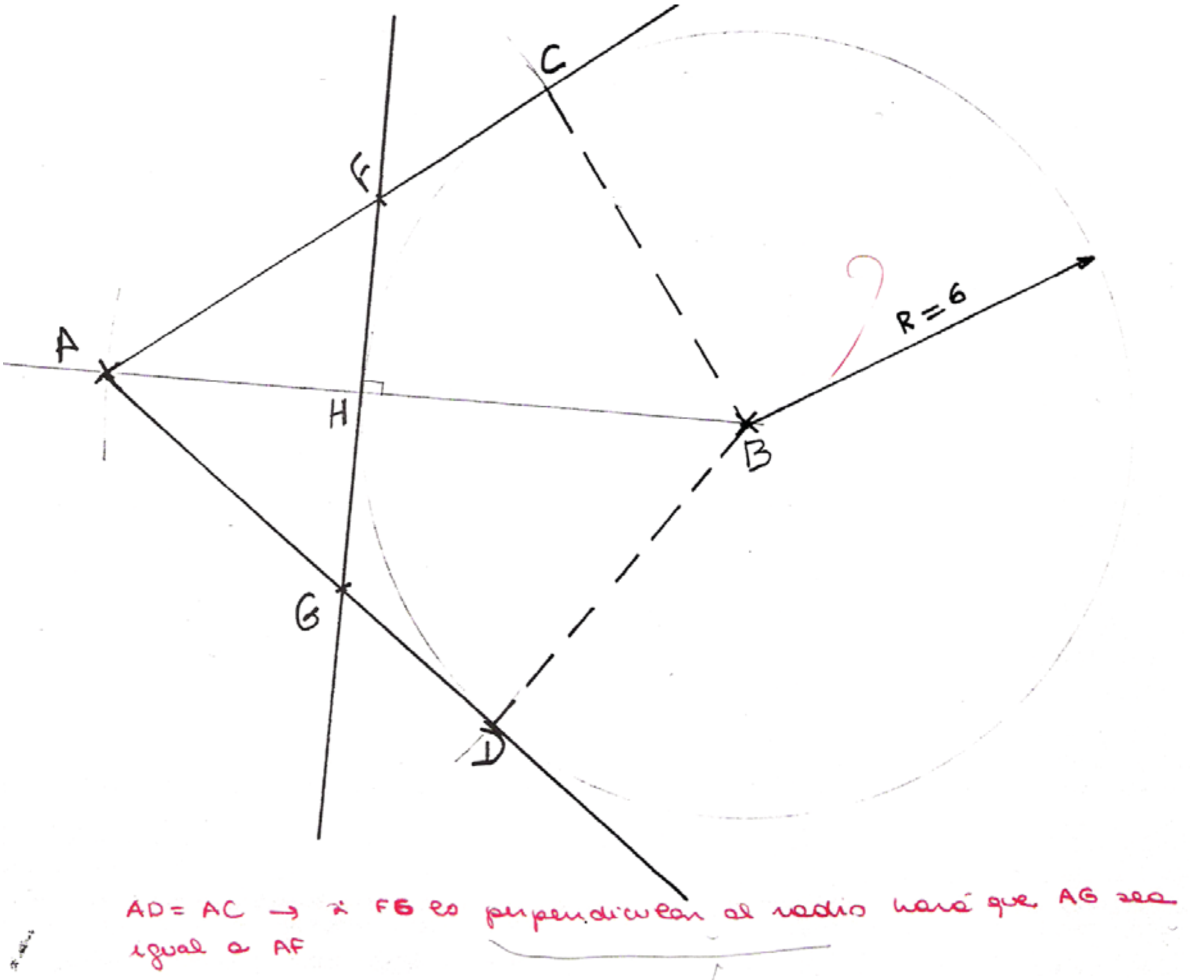
$BK = CL \rightarrow CL = 9{,}5$ cm (aprox)

$BK + CL + AH = 8 + 9{,}5 + 9{,}5 = 27 \rightarrow 27 < 32$

$\downarrow$

$BK + CL + AH < AB + BC + AC$.

Valoración del ejercicio 5



Se le atribuye un nivel 1.

6.10-Análisis de las pruebas de los alumnos del Liceo Francés

Consideremos los casos de los alumnos escolarizados en el sistema francés.

6.10.1- Análisis de la prueba del alumno Daniel, escolarizado en el Liceo Francés de Barcelona . Sistema educativo de escolarización : Francés

Ejercicio 1 : Enumera las diferentes posibilidades sin preocuparse de casos particulares. No busca generalizar ni ningún tipo de contraejemplos. Corresponde a un nivel 2

Ejercicio 2 : No intenta encontrar ninguna justificación a su respuesta. No explica porque sus resultados son los que aparecen. Resolución, al parecer, totalmente intuitiva. Corresponde a un nivel 1

Ejercicio 3 : Domina perfectamente las técnicas de resolución Se le asigna un nivel 4.

Ejercicio 4 : Demuestra también unos muy buenos conocimientos del tema. Se le asigna el nivel 4.

Ejercicio 5 : Se deja engañar por la figura y considera que la posición del punto A, de intersección de las dos tangentes es un punto fijo. Deduce por lo tanto que los triángulos AHF y AHG son triángulos rectángulos siempre. No tiene en cuenta el dato del problema según el cual dos tangentes con un mismo origen tienen la misma longitud. Y, en este caso, se precisaba: AC = AD = 8. Este dato se les dio por escrito y no se hizo ninguna consideración adicional, verbalizada. En los demás casos (Instituto y Liceo Italiano), se les llamó la atención sobre ello. Esa consideración le hace errar el resultado. Corresponde a un nivel 3

Prénom Daniel Établissement LFB

Lieu de naissance Barcelone

Date de naissance [illegible] Date d'admission [illegible]

Exercice 1: Les nombres tels que le 33 ou le 44 ont les deux chiffres égaux. Si on les divise par 11, la division tombe juste :

$$\begin{array}{r|l} 33 & 11 \\ \hline 00 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & 11 \\ \hline 00 & 4 \end{array}$$

Peut-on dire que tout nombre à deux chiffres, tels que les deux chiffres sont égaux, est divisible par 11 ? Oui:

$$\frac{11}{11} = 1 \qquad \frac{-11}{11} = -1$$

$$\frac{22}{11} = 2 \qquad \frac{-22}{11} = -2$$

$$\frac{33}{11} = 3 \qquad \frac{-33}{11} = -3$$

$$\frac{44}{11} = 4 \qquad \frac{-44}{11} = -4$$

$$\frac{55}{11} = 5 \qquad \frac{-55}{11} = -5$$

$$\frac{66}{11} = 6 \qquad \frac{-66}{11} = -6$$

$$\frac{77}{11} = 7 \qquad \frac{-77}{11} = -7$$

$$\frac{88}{11} = 8 \qquad \frac{-88}{11} = -8$$

$$\frac{99}{11} = 9 \qquad \frac{-99}{11} = -9$$

Exercice 2 : La différence entre deux nombres donnés est égale à 1 et leur somme est un nombre compris entre 10 et 17.

Quelles sont les valeurs possibles pour ces deux nombres ?

Les valeurs possibles pour ces deux nombres sont : 5 et 6.

6 et 7

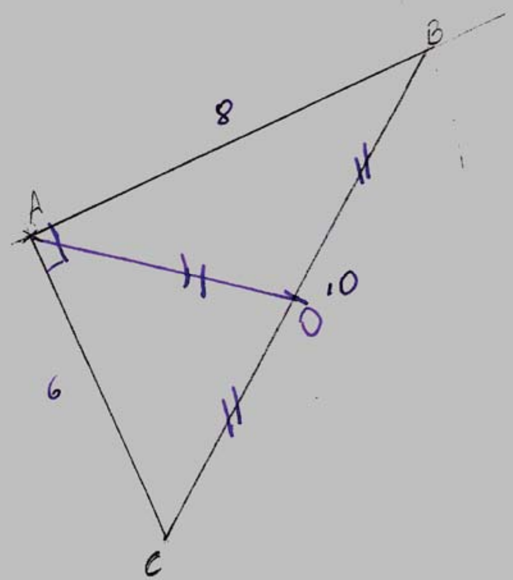
7 et 8

(Il n'y a pas de valeurs négatives possibles).

Exercice 3 : A, B, C sont trois points du plan (voir figure). Que peut-on faire pour trouver un point équidistant des trois points donnés ? Il faut trouver le centre du cercle circonscrit.

Des données peuvent être utiles :

- La distance entre les points A et B est égale à 8 cm.
- La distance entre les points A et C est égale à 6 cm
- La distance entre les points C et B est égale à 10 cm.



Je calcule $CB^2 = 10^2 = 100$
$AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ } les valeurs sont égales.

En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, on a ABC rectangle en A.

Or le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est au milieu de l'hypothénuse.

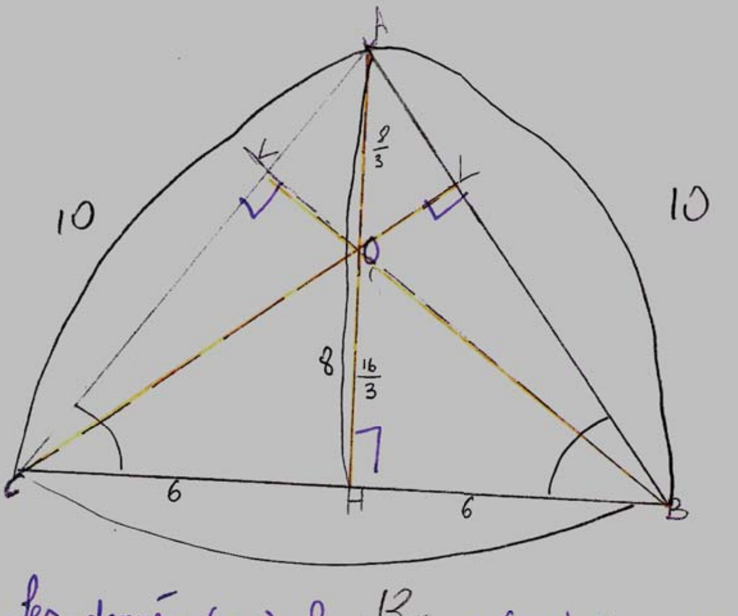
J'appelle ce point O.

Donc $OA = OB = OC$.

Exercice 4 : ABC est le triangle isocèle de la figure. [AH], [BK] et [CL] sont les trois hauteurs du triangle. En plus, on a : AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm

a) Quelle est la nature des triangles ABH, BKC et BLC ?

b) A-t-on : AH + BK + CL < AB + BC +AC ?



D'après les données, (AH) hauteur de (CB) dans ACB.
Donc par définition de la hauteur, ABH est rectangle en H.

De même pour BKC rectangle en K

De même pour BLC rectangle en L. AB+BC+AC = 32cm

D'après les données, ABC isocèle en A.

Donc (AH) est hauteur, la médiatrice et la médiane de [CB].

Donc HB = $\frac{12}{2}$ = 6

Dans AHB, d'après le théorème de Pythagore:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$,

$10^2 = AH^2 + 6^2$

(voir derrière)

Deduce entonces : $AH^2 = 100\text{-}36$
De donde saca:

$AH^2 = 64$

$AH = 8$ cm

Je nomme O l'orthocentre de ABC.

Donc $AO = \frac{8}{3}$ cm et $OH = \frac{16}{3}$ cm

Comme ABC isocèle en A, $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$.

Dans ACH rect. en H

$\cos \widehat{C} = \frac{6}{10}$

$\cos \widehat{C} = 0,6$

$\widehat{B} = \widehat{C} \simeq 53,13°$

Dans CLB rect. en L

$\cos \widehat{B} = \frac{LB}{CB}$

$0,6 = \frac{LB}{12}$

$LB = 12 \times 0,6 = 7,2$

Dans BKC rect. en K

$\cos \widehat{C} = \frac{BK}{12}$

$BK = 12 \times 0,6 = 7,2$

$LB + BK + AH = 7,2 + 7,2 + 8 = 22,4$

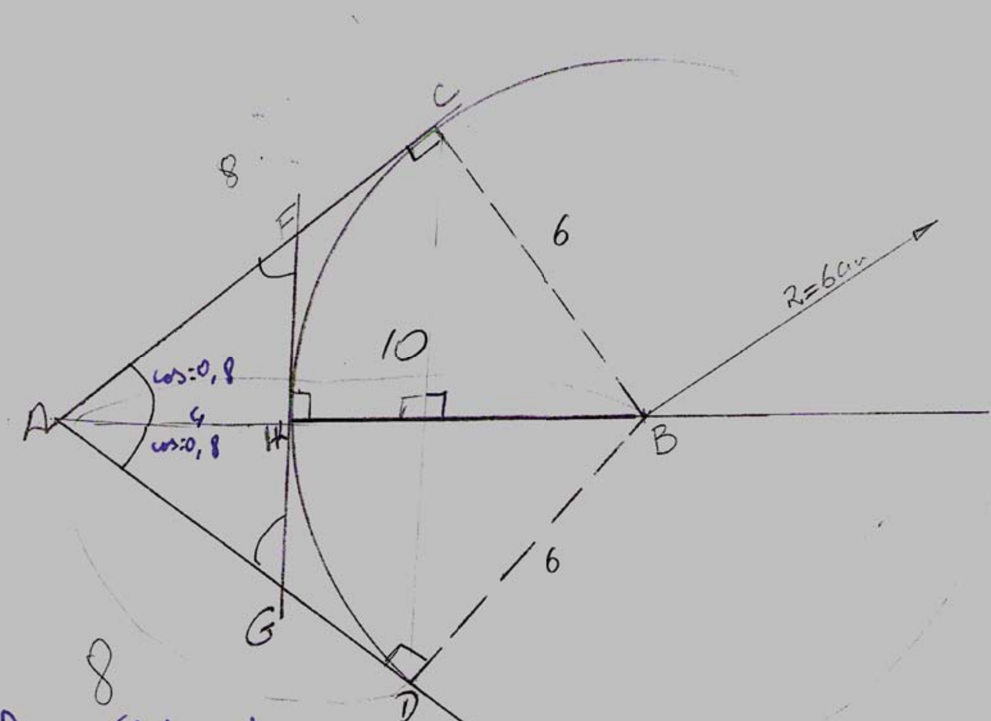
$AB + BC + AC = 32$

Oui, on a $LB + BK + AH < AB + BC + AC$

Exercice 5 : Il s'agit de trouver le périmètre du triangle AFG en utilisant les données de la figure.

Rappel

Deux tangentes à un cercle, issues d'un même point, ont même longueur : AC = AD = 8



Dans CBA rect. en C ; d'après le théorème de Pythagore

$BA^2 = AC^2 + CB^2$

$BA^2 = 6^2 + 8^2$

$BA = 10$

$\cos C\hat{A}B = \frac{8}{10} = 0,8$

$\cos D\hat{A}B = \frac{8}{10} = 0,8$ $\quad D\hat{A}B \simeq 36,87°$

Dans FHA rect. en H.

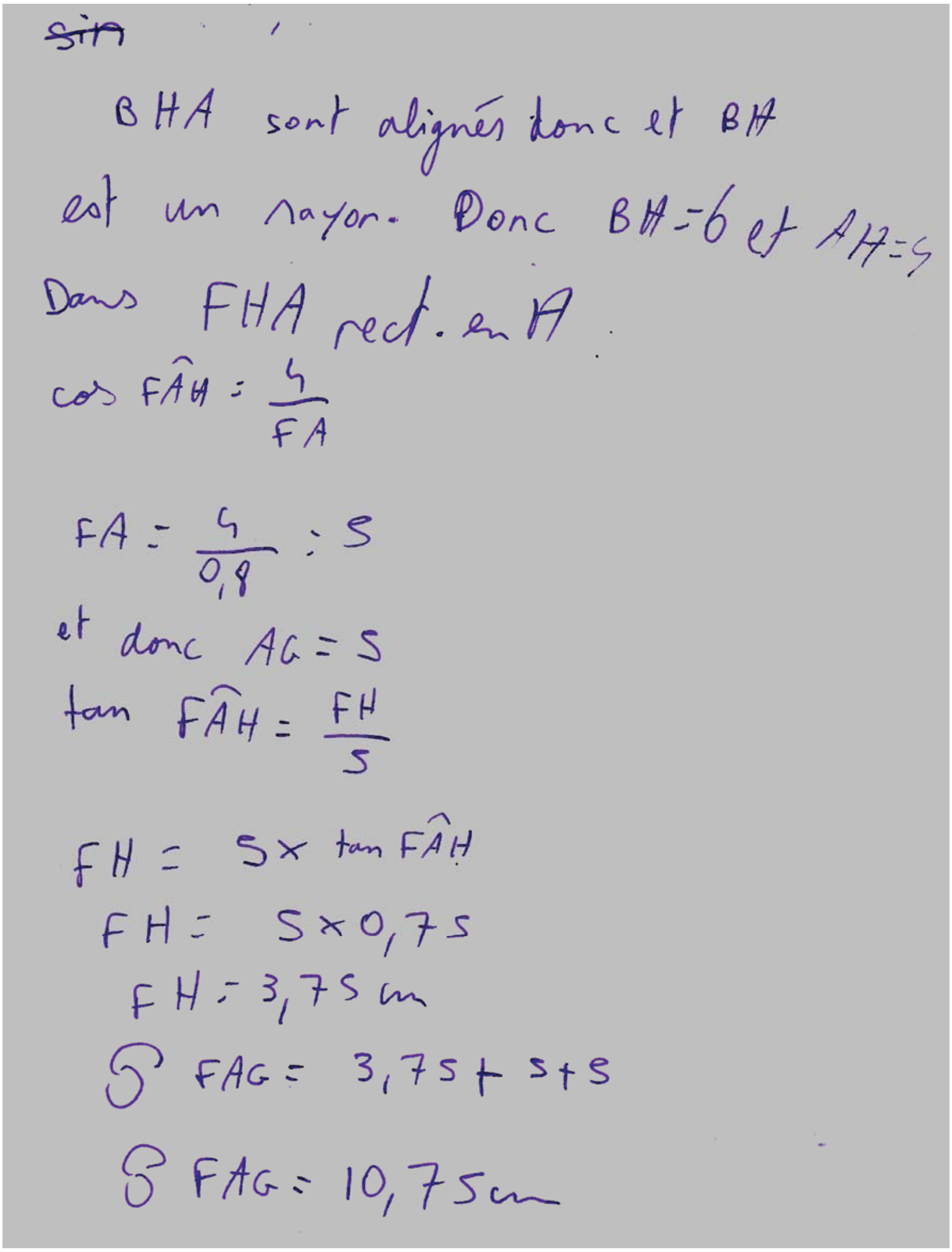
$A\hat{F}H = 90 - F\hat{A}H$

$A\hat{F}H \simeq 90 - 36,87$

$A\hat{F}H \simeq 53,13°$

donc comme $A\hat{F}H = A\hat{G}H$, $A\hat{G}H \simeq 53,13°$

~~derrière~~. voir derrière



~~sin~~

BHA sont alignés donc et BH est un rayon. Donc BH = 6 et AH = 4

Dans FHA rect. en H.

$\cos \widehat{FAH} = \frac{4}{FA}$

$FA = \frac{4}{0,8} = 5$

et donc AG = 5

$\tan \widehat{FAH} = \frac{FH}{5}$

$FH = 5 \times \tan \widehat{FAH}$

$FH = 5 \times 0,75$

FH = 3,75 cm

$\mathcal{P}$ FAG = 3,75 + 5 + 5

$\mathcal{P}$ FAG = 10,75 cm

Se equivoca en el cálculo de la medida de FH.

6.10.2- Análisis de la prueba del alumno Carles, escolarizado en el Liceo Francés de Barcelona . Sistema educativo de escolarización : Francés

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1

La respuesta es incompleta. Se ve que utiliza el razonamiento siguiente:

X.ll=XX

Entonces al dividir XX por 11, se obtiene Siempre un resto nulo.

Es una respuesta parcial . Se le asigna el nivel 3 .

Ejercicio 2

La resolución es incompleta. No encuentra los valores de y.

Se le asigna el nivel 3 .

Ejercicio 3 - 4 y 5

En los tres restantes ejercicios, se le asigna un nivel 4, encontrando muy elegante la resolución del último.

1- Les nombres tels que le 33 ou le 44 ont les deux chiffres égaux. Si on les divise par 11, la division tombe juste.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 11 \\ 00 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & 11 \\ \hline 00 & 4 \end{array}$$

Peut-on toujours dire que tout nombre à deux chiffres tels que les deux chiffres sont égaux, est divisible par 11 ?

oui, car 11 multiplié par un chiffre x fera un ~~chiff~~ ~~aut~~ nombre de 2 chiffres x.

2- La différence entre deux nombres est égale à 1 et leur somme est un nombre compris entre 10 et 17.

Quelles sont les valeurs possibles pour ces deux nombres ?

$y - x = 1$

$10 < y + x < 17$

$10 < x + x + 1 < 17$

$10 < 2x + 1 < 17$

$10 < 2x < 16$

$5 < x < 8 \Rightarrow x$ doit être compris entre 5 et 8 si x est strictement compris entre 10 et 17

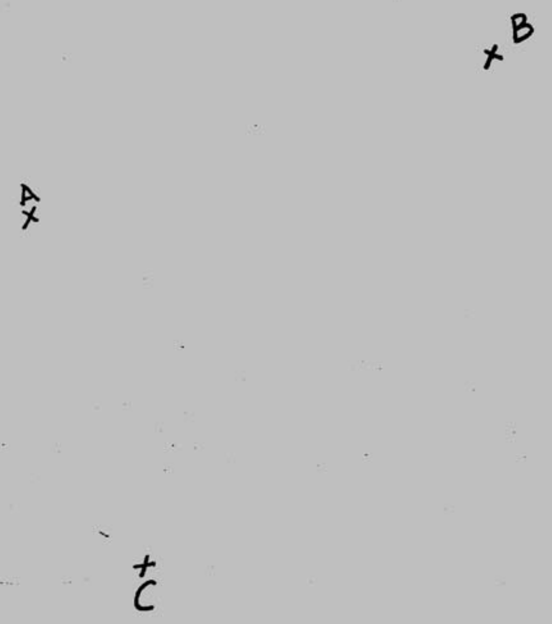
$10 \leq 2x + 1 \leq 17$

$9 \leq 2x \leq 17$

$4{,}5 \leq x \leq 8{,}5 \Rightarrow x$ doit être compris entre 4,5 et 8,5 si x est plus grand ou égal que 10 et plus pétit ou égal que 17.

3- A , B , C sont trois points du plan (voir figure) . Que peut-on faire pour trouver un point équidistant des trois points donnés ?

(Quelques données qui peuvent être utiles :
- La distance entre les points A et B est égale à 8 cm
- La distance entre les points A et C est égale à 6 cm
- La distance entre les points C et B est égale à 10 cm

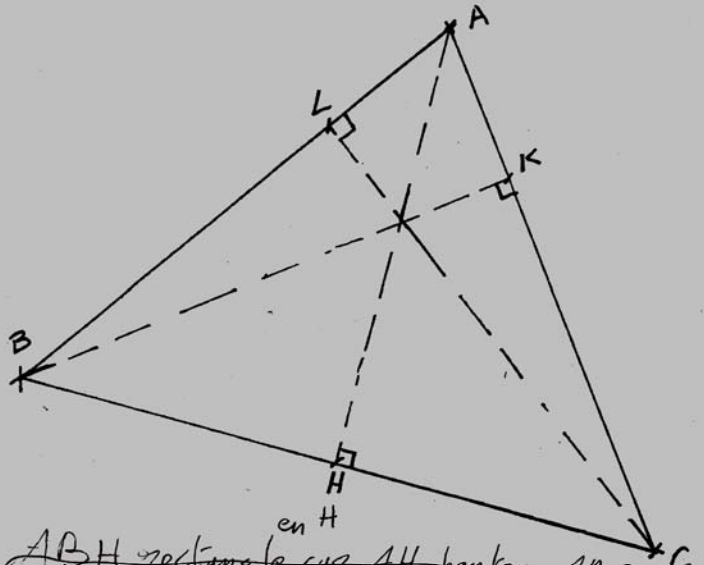


On peut chercher le point d'intersection des médiatrices du triangle $\widehat{ABC}$ car il est le ~~point~~ centre du cercle circonscrit au triangle et donc il est équidistant des trois sommets

4 ABC est le triangle isocèle de la figure . [AH] , [BK] , [CL] sont les trois hauteurs du triangle et en plus on a : AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm .

a) Quelle est la nature des triangles ABH , BKC et BLC ?

b) A-t-on : **AH + BK + CL < AB + BC + AC** .



~~ABH rectangle car AH hauteur ABC => $\widehat{BAH}$ = 90°~~ (en H)

$\widehat{ABH}$ est rectangle en H car AH est la hauteur de $\widehat{ACB}$ car $\widehat{AHC}$ = 90 et AH passe par le sommet A.

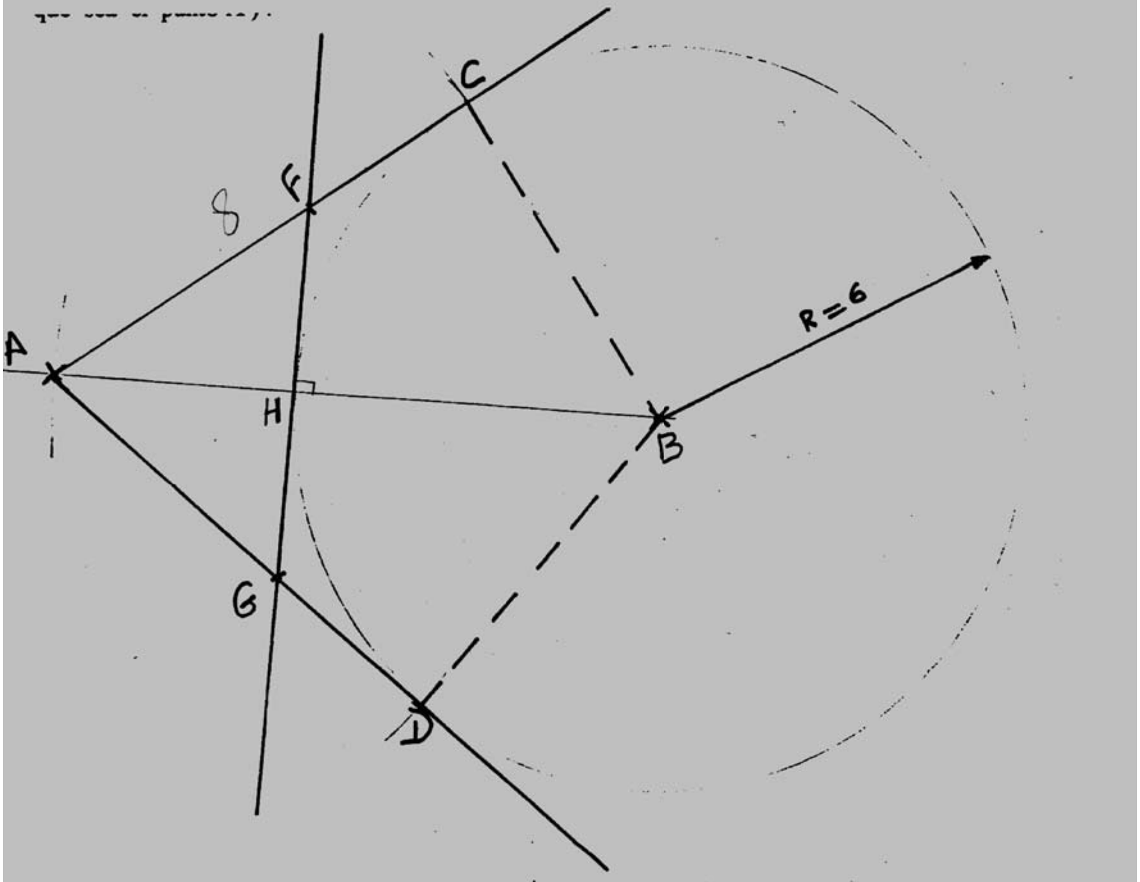
$\widehat{BKC}$ est rectangle en K car BK est hauteur de $\widehat{ACB}$ car $\widehat{BKC}$ = 90° et BK passe par le sommet B.

$\widehat{BLC}$ est rectangle en L car CL est la hauteur de $\widehat{ACB}$ car $\widehat{BKC}$ = 90° et BK passe par le sommet B.

Oui, car on a AH, BK, CL sont ⊥ a BC, AC et AB => AH, BK et CL sont les distances les plus petites de A à BC, B à AC et C à AB =>
CL + BK + AH < AC + CB + AB

5- Il s'agit de trouver le **périmètre du triangle AFG** en utilisant les données de la figures .

(Rappel : Deux tangentes issues d'un même point ont même longueur : AC = AD)



GH=GD car GH et GD tangentes au cercle => AG+GH=AD

FH=FC car FH et FC tangentes au cercle => AF+FH=AC

AF+FH+GH+AG= périmètre du triangle AFG = AC+AD =

8+8= 16

6.10.3- Análisis de la prueba de la alumna Eva, escolarizada en el Liceo Francés de Barcelona . Sistema educativo de escolarización : Francés

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1 : Intenta encontrar un caso general pero sin lograr una explicación buena.

Corresponde a un nivel 1

Ejercicio 2 : Muy buena resolución. Corresponde a un nivel 4

Ejercicio 3 : Domina perfectamente las técnicas de resolución

Se le asigna un nivel 4

Ejercicio 4 : Demuestra también unos muy buenos conocimientos del tema.

No encuentra una conclusión correcta.

Se le asigna el nivel 3

Ejercicio 5 : Se deja engañar por la figura y considera que la posición del punto A, de intersección de las dos tangentes es un punto fijo. Deduce por lo tanto que los triángulos AHF y AHG son triángulos rectángulos siempre. No tiene en cuenta el dato del problema según el cual dos tangentes con un mismo origen tienen la misma longitud. Y, en este caso, se precisaba: AC = AD = 8. Este dato se les dio por escrito y no se hizo ninguna consideración adicional, verbalizada. En los demás casos (Instituto y Liceo Italiano), se les llamó la atención sobre ello. Esa consideración le hace errar el resultado.

Corresponde a un nivel 3

Prénom Eva Établissement LFB

Lieu de naissance Genève (Suisse)

Date de naissance ______ Date d'admission ______

Exercice 1: Les nombres tels que le 33 ou le 44 ont les deux chiffres égaux. Si on les divise par 11, la division tombe juste :

$$\begin{array}{r|l} 33 & 11 \\ \hline 00 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & 11 \\ \hline 00 & 4 \end{array}$$

Peut-on dire que tout nombre à deux chiffres, tels que les deux chiffres sont égaux, est divisible par 11 ?

Oui, si le chiffre n'a qu' un chiffre d'unité et un autre de disene.

$$\frac{88}{11} = 8$$

$$\frac{66}{11} = 6$$

Exercice 2 : La différence entre deux nombres donnés est égale à 1 et leur somme est un nombre compris entre 10 et 17.

Quelles sont les valeurs possibles pour ces deux nombres ?

$x-y=1$ donc $x=1+y$

$10<x+y<17$

$x+y<17$ | $x+y>10$
$1+y+y<17$ | $2y+1>10$
$2y+1<17$ | $2y>9$
$2y<16$ | $y>\frac{9}{2}$
$y<\frac{16}{2}$ | $y>4{,}5$

$y<8$

• La valeur de y doit être compris entre 8 et 4,5.

$x-8=1$ / $x-4{,}5=1$

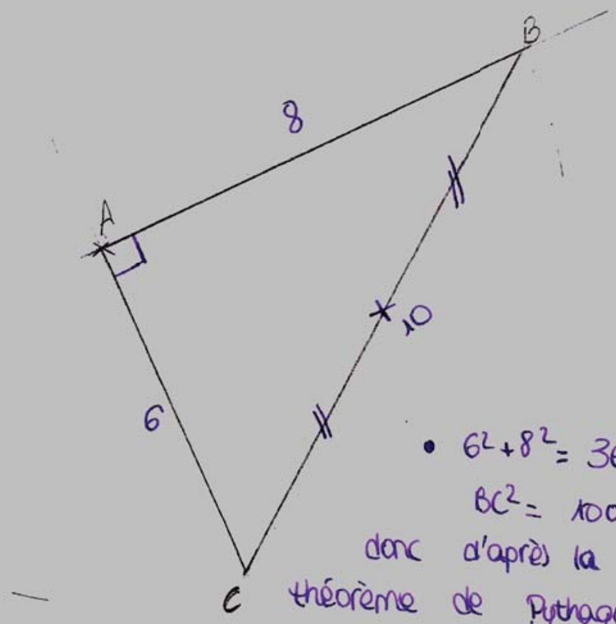
$x=9$ $x=5{,}5$

• La valeur de x doit être compris entre 5,5 et 9.

Exercice 3 : A, B, C sont trois points du plan (voir figure). Que peut-on faire pour trouver un point équidistant des trois points donnés ?

Des données peuvent être utiles :

- La distance entre les points A et B est égale à 8 cm.
- La distance entre les points A et C est égale à 6 cm
- La distance entre les points C et B est égale à 10 cm.



- $6^2+8^2 = 36+64 = 100$

  $BC^2 = 100$

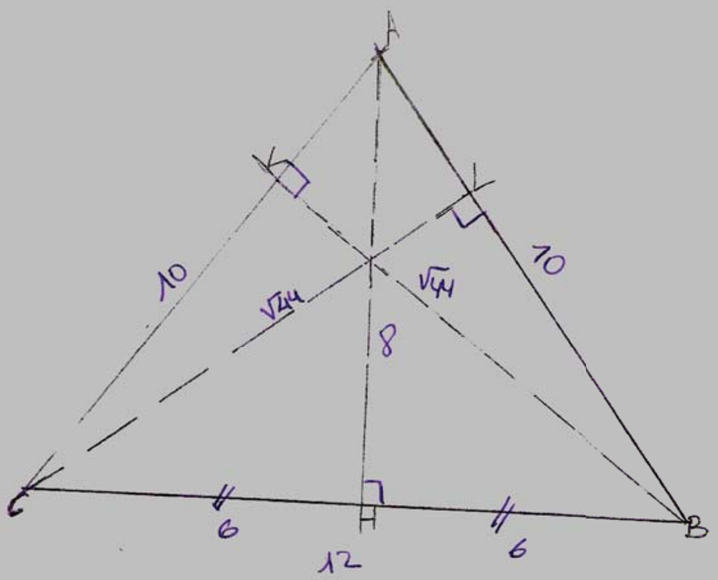
  donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en A.

- Donc le point équidistant aux trois sommets est le milieu de l'hypoténuse, c'est à dire le milieu de [BC].

Exercice 4 : ABC est le triangle isocèle de la figure. [AH], [BK] et [CL] sont les trois hauteurs du triangle. En plus, on a : AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm

a) Quelle est la nature des triangles ABH, BKC et BLC ?

b) A-t-on : AH + BK + CL < AB + BC +AC ?



a) comme [AH], [BK] et [CL] sont les hauteurs du triangle alors ABH, BKC et BLC sont trois triangles rectangle en H, K et L respectivement.

b) • Dans BLC Rectangle en L: D'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = LB^2 + CL^2$

$12^2 = 10^2 + CL^2$

$144 = 100 + CL^2$

$CL^2 = 144 - 100$

$CL^2 = 44$

$CL = \sqrt{44}$

Dans BKC rectangle en K: D'après le th. de Pythagore:

$BC^2 = BK^2 + CK^2$

$12^2 = BK^2 + 10^2$

$144 = BK^2 + 100$

$BK^2 = 144 - 100$

$BK = \sqrt{44}$

• Comme ACB est un triangle isocèle alors la hauteur issu de A est confondu avec la médiatrice donc H milieu de [BC].

• Dans AHB rectangle en H.

D'après le th. de Pythagore:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$

$10^2 = AH^2 + 6^2$

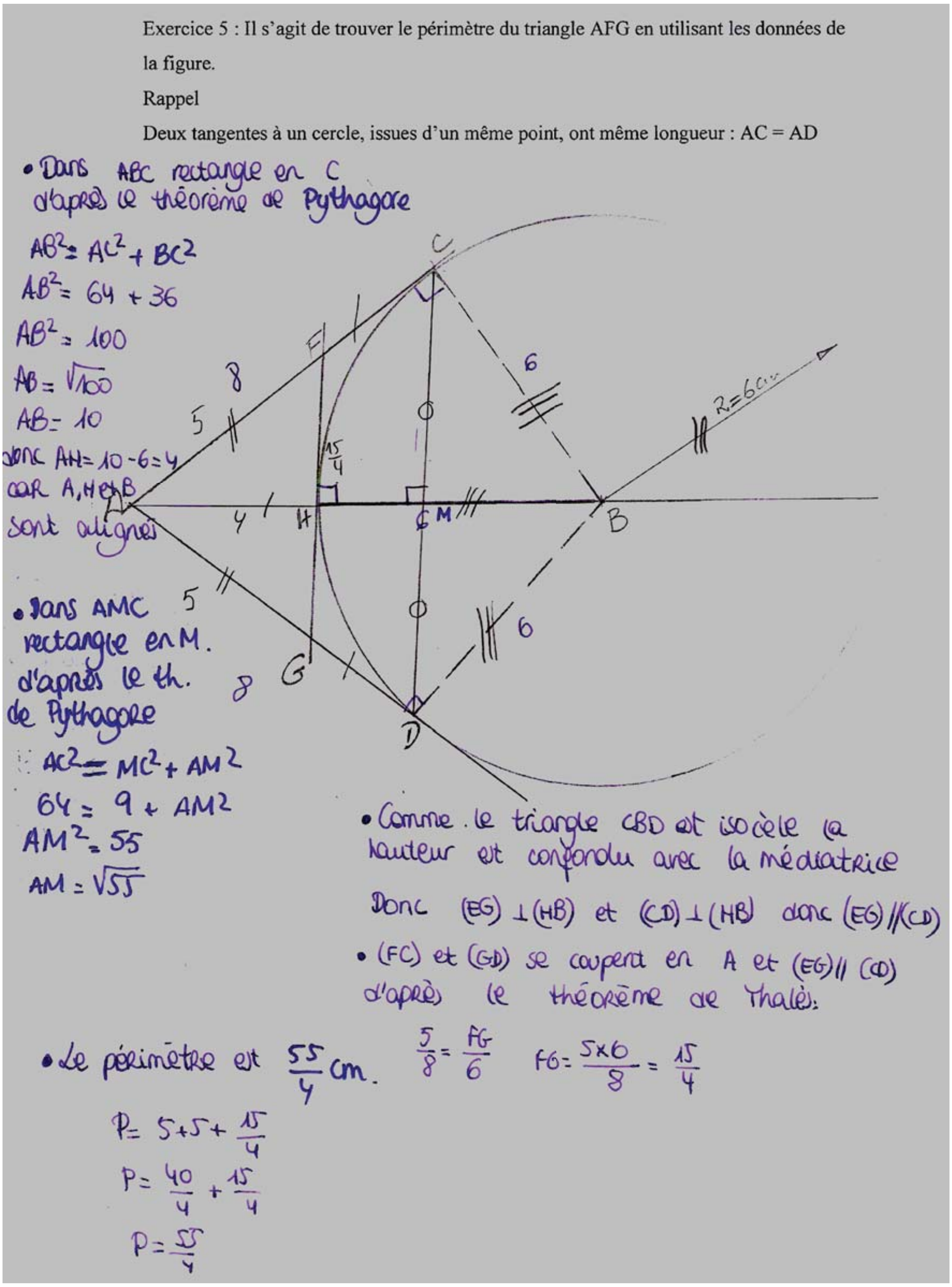
$AH^2 = 100 - 36$

$AH^2 = 64 \quad AH = \sqrt{64} = 8$

$$AH + BK + CL = 2\sqrt{44} + 8 = 2 \times 2\sqrt{11} + 8$$
$$= 4\sqrt{11} + 8$$

$$AB + BC + AC = 2 \times 10 + 12$$
$$= 32$$

Error al tomar el valor de AB como valor de LB.



Exercice 5 : Il s'agit de trouver le périmètre du triangle AFG en utilisant les données de la figure.

Rappel

Deux tangentes à un cercle, issues d'un même point, ont même longueur : AC = AD

• Dans ABC rectangle en C
d'après le théorème de Pythagore

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 64 + 36$

$AB^2 = 100$

$AB = \sqrt{100}$

$AB = 10$

donc $AH = 10 - 6 = 4$
car A, H et B sont alignés

• Dans AMC rectangle en M. d'après le th. de Pythagore

$AC^2 = MC^2 + AM^2$

$64 = 9 + AM^2$

$AM^2 = 55$

$AM = \sqrt{55}$

• Comme le triangle CBD est isocèle la hauteur est confondu avec la médiatrice

Donc (EG) ⊥ (HB) et (CD) ⊥ (HB) donc (EG) // (CD)

• (FC) et (GD) se coupent en A et (EG) // (CD) d'après le théorème de Thalès.

$\frac{5}{8} = \frac{FG}{6}$ $FG = \frac{5 \times 6}{8} = \frac{15}{4}$

• Le périmètre est $\frac{55}{4}$ cm.

$P = 5 + 5 + \frac{15}{4}$

$P = \frac{40}{4} + \frac{15}{4}$

$P = \frac{55}{4}$

Mal resuelto. La propiedad de la mediatriz no permite hallar ni BM ni AM

6.10.4-Análisis de la prueba del alumno Carlos, escolarizado en el Liceo Francés de Barcelona . Sistema educativo de escolarización : Francés

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1 : Responde sin ningún tipo de argumentación.

Corresponde a un nivel 1

Ejercicio 2 : Muy buena estrategia de resolución.

Corresponde a un nivel 4

Ejercicio 3 : Domina perfectamente las técnicas de resolución

Se le asigna un nivel 4

Ejercicio 4 : Demuestra también unos muy buenos conocimientos del tema.

Se le asigna el nivel 4.

Ejercicio 5 : Se deja engañar por la figura y considera que la posición del punto A, de intersección de las dos tangentes es un punto fijo. Deduce por lo tanto que los triángulos AHF y AHG son triángulos rectángulos siempre. No tiene en cuenta el dato del problema según el cual dos tangentes con un mismo origen tienen la misma longitud. Y, en este caso, se precisaba: AC = AD = 8. Este dato se les dio por escrito y no se hizo ninguna consideración adicional, verbalizada. En los demás casos (Instituto y Liceo Italiano), se les llamó la atención sobre ello. Esa consideración le hace errar el resultado.

Corresponde a un nivel 3

Prénom Carlos Établissement LFB

Lieu de naissance Barcelone

Date de naissance [illegible] Date d'admission [illegible]

Exercice 1: Les nombres tels que le 33 ou le 44 ont les deux chiffres égaux. Si on les divise par 11, la division tombe juste :

$$\begin{array}{r|l} 33 & \underline{11} \\ 00 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & \underline{11} \\ 00 & 4 \end{array}$$

Peut-on dire que tout nombre à deux chiffres, tels que les deux chiffres sont égaux, est divisible par 11 ? oui .

Exercice 2 : La différence entre deux nombres donnés est égale à 1 et leur somme est un nombre compris entre 10 et 17.

Quelles sont les valeurs possibles pour ces deux nombres ?

$$\begin{cases} x - y = 1 & (1) \\ 10 \leq x + y \leq 17 & (2) \end{cases}$$

(1) $x = y + 1$

(2) $10 \leq y + 1 + y \leq 17 \Leftrightarrow 9 \leq 2y \leq 16$

$\Leftrightarrow 4{,}5 \leq y \leq 8$

(1) $y = -1 + x$

(2) $10 \leq x - 1 + x \leq 17 \Leftrightarrow 11 \leq 2x \leq 18$

$\Leftrightarrow 5{,}5 \leq x \leq 9$

D'où $y \in [4{,}5 ; 8]$

$x \in [5{,}5 ; 9]$

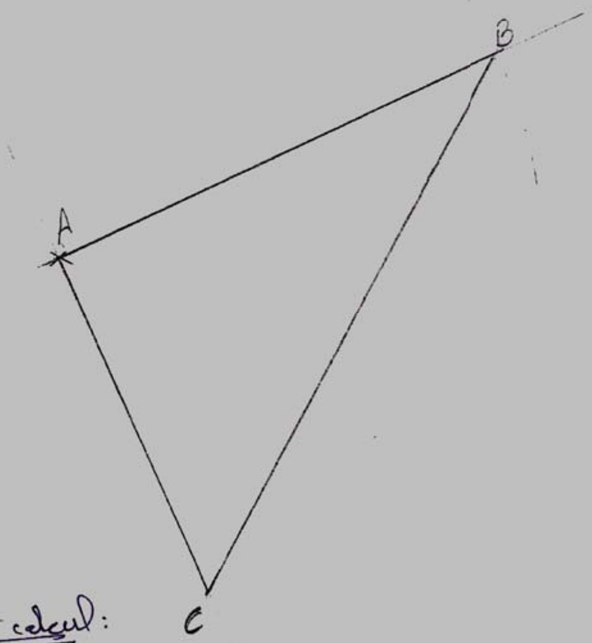
Mais dans un même système y doit toujours être inferieur en 1 de x.

Exercice 3 : A, B, C sont trois points du plan (voir figure). Que peut-on faire pour trouver un point équidistant des trois points donnés ?

Des données peuvent être utiles :

- La distance entre les points A et B est égale à 8 cm.
- La distance entre les points A et C est égale à 6 cm
- La distance entre les points C et B est égale à 10 cm.

Par le tracé :
tracer les médiatrices des côtés.
Leur point d'intersection sera équidistant des 3 points donnés.



Par le calcul :

$BC^2 = 100$ cm

$AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$ cm

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle ABC est rectangle.

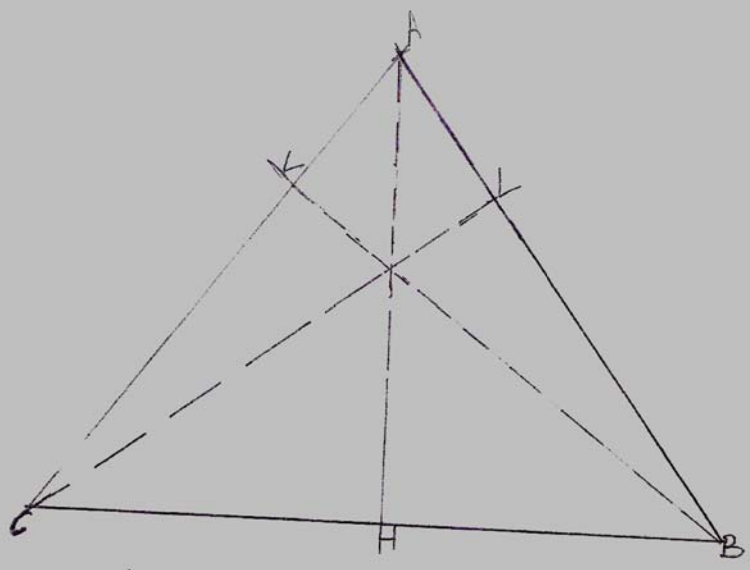
Or on sait que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Donc le milieu de [BC] est équidistant des 3 points donnés.

Exercice 4 : ABC est le triangle isocèle de la figure. [AH], [BK] et [CL] sont les trois hauteurs du triangle. En plus, on a : AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm

a) Quelle est la nature des triangles ABH, BKC et BLC ?

b) A-t-on : AH + BK + CL < AB + BC +AC ?



a) Les hauteurs sont des droites issues des sommet d'un triangle et perpendiculaires au côté opposé.

~~Donc~~ D'où $(AH) \perp (H.B)$

$(CL) \perp (AB)$

$(BK) \perp (AC)$

Donc AHB ; BKC et BLC sont des triangles rectangles

b) Oui car l' hypothénuse d'un triangle rectangle est toujours plus grande que les autres côtés.

Or ~~les~~ côtés du triangle sont les hypoténuses des triangles rectangles qui ont pour côté [AH] ; [BK] ou [CL]

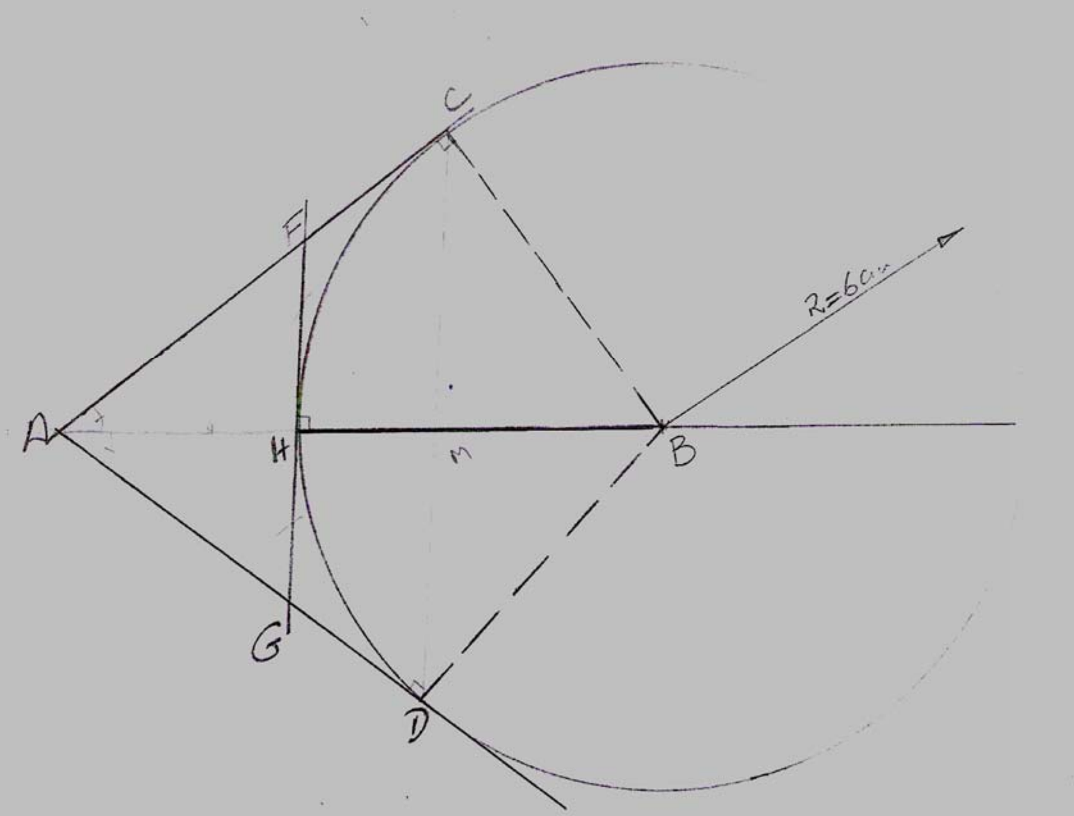
D'où $KB < AB$; $AH < CA$ et $CL < CB$

Donc $AH + BK + CL < AB + BC + AC$

Exercice 5 : Il s'agit de trouver le périmètre du triangle AFG en utilisant les données de la figure.

Rappel

Deux tangentes à un cercle, issues d'un même point, ont même longueur : AC = AD = 8 cm



(AC) Tangeante au cercle en C

d'où (AC) $\perp$ (CB)

Dans le triangle rectangle ABC,

D'après le théorème de Pythagore $AC^2 + CD^2 = AB^2$

$AB^2 = 100$

$AB = 10$ cm

$AH = AB - HB = 4$ cm

Soit M le ~~point~~ de (AD) et de (MH) et perpendiculaire en (AD) passant par H et

* D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AM}{AD}$$

$$AM = \frac{AH \times AD}{AB} = \frac{32}{10} = 3,2 \text{ cm}$$

* Dans le triangle rectangle AHM,

D'après le théorème de Pythagore

$$AM^2 + MH^2 = AH^2 \Leftrightarrow MH^2 = 16 + 10,24$$

$$MH^2 = 26,24 \text{ cm}^2$$

~~* MG = AD - AM~~

6.10.5- Análisis de la prueba de la alumna Corine, escolarizada en el Liceo Francés de Barcelona . Sistema educativo de escolarización : Francés

Valoración de la prueba realizada

Ejercicio 1 : Enumera las diferentes posibilidades sin preocuparse de casos particulares.

No busca generalizar ni ningún tipo de contraejemplos. Sin embargo enuncia una propiedad general a partir de los casos particulares que comprueba.

Corresponde a un nivel 2

Ejercicio 2 : Muy buena estrategia de resolución.

Corresponde a un nivel 4

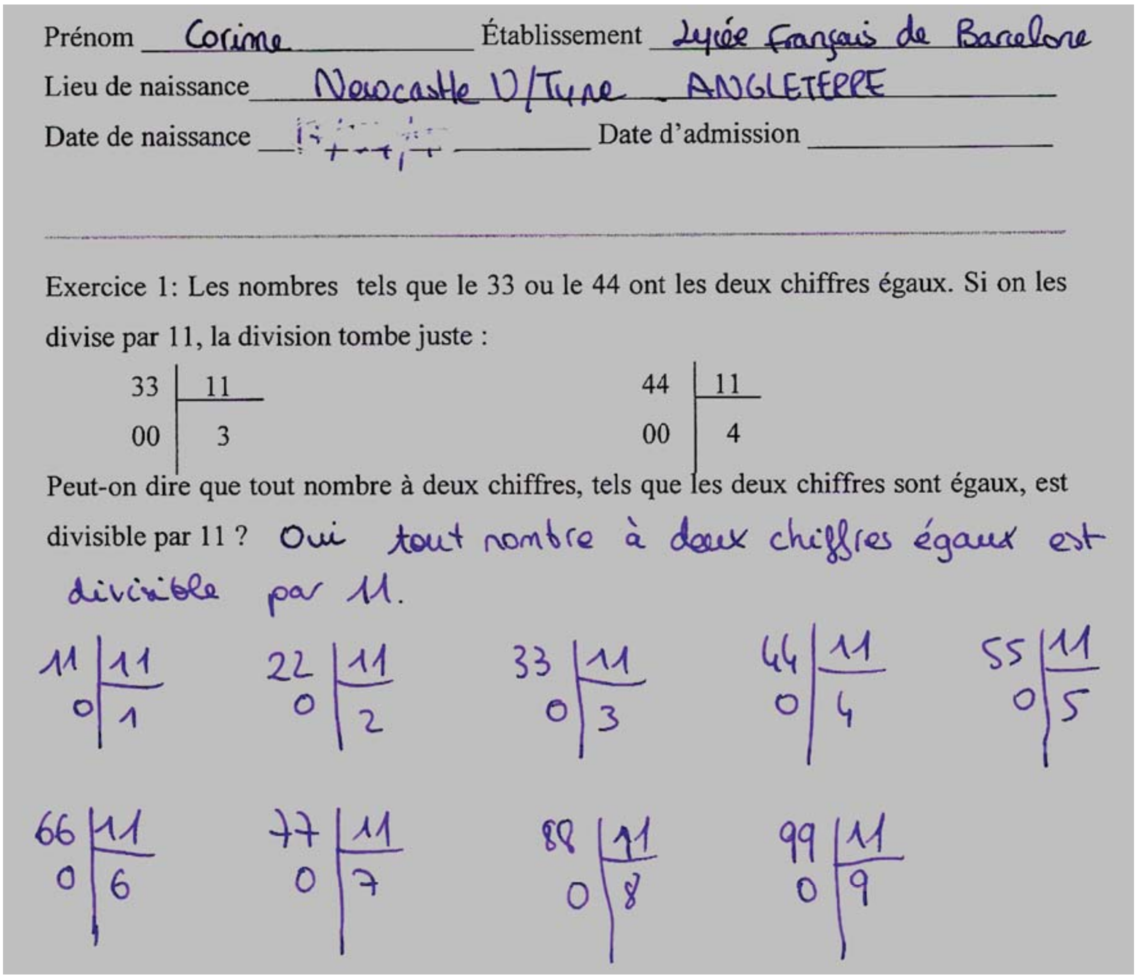
Ejercicio 3 : Buena resolución. Sin embargo, no deduce la respuesta a pesar de haber elegido el camino correcto. No se formula preguntas.

Se le asigna un nivel 3

Ejercicio 4 : Demuestra también unos muy buenos conocimientos del tema.

Se le asigna el nivel 4.

Ejercicio 5 : Se deja engañar por la figura y considera que la posición del punto A, de intersección de las dos tangentes es un punto fijo. Deduce por lo tanto que los triángulos AHF y AHG son triángulos rectángulos siempre. No tiene en cuenta el dato del problema según el cual dos tangentes con un mismo origen tienen la misma longitud. Y, en este caso, se precisaba: AC = AD = 8. Este dato se les dio por escrito y no se hizo ninguna consideración adicional, verbalizada. En los demás casos (Instituto y Liceo Italiano), se les llamó la atención sobre ello. Esa consideración le hace errar el resultado. Corresponde a un nivel 3.



Prénom Corinne Établissement Lycée Français de Barcelone

Lieu de naissance Newcastle U/Tyne ANGLETERRE

Date de naissance [illegible] Date d'admission

Exercice 1: Les nombres tels que le 33 ou le 44 ont les deux chiffres égaux. Si on les divise par 11, la division tombe juste :

33	11
00	3

44	11
00	4

Peut-on dire que tout nombre à deux chiffres, tels que les deux chiffres sont égaux, est divisible par 11 ? Oui tout nombre à deux chiffres égaux est divisible par 11.

11	11
0	1

22	11
0	2

33	11
0	3

44	11
0	4

55	11
0	5

66	11
0	6

77	11
0	7

88	11
0	8

99	11
0	9

Exercice 2 : La différence entre deux nombres donnés est égale à 1 et leur somme est un nombre compris entre 10 et 17.

Quelles sont les valeurs possibles pour ces deux nombres ?

Soit a et b les deux nombres donnés

$a - b = 1$

$10 < a + b < 17$

Or $a = 1 + b$

Donc $10 < 1 + b + b$

$\Leftrightarrow 10 < 1 + 2b$

$\Leftrightarrow 10 - 1 < 2b$

$\Leftrightarrow 9 < 2b$

$\Leftrightarrow \frac{9}{2} < b$

$\Leftrightarrow 4{,}5 < b$

ou $\Leftrightarrow 1 + 2b < 17$

$\Leftrightarrow 2b < 17 - 1$

$\Leftrightarrow b < \frac{16}{2}$

$\Leftrightarrow b < 8$

Donc b sera compris entre 4,5 et 8.

$a - b = 1 \Leftrightarrow a - 4{,}5 = 1$

$\Leftrightarrow a = 1 + 4{,}5$

$\Leftrightarrow a = 5{,}5$

ou

$a - b = 1 \Leftrightarrow a - 8 = 1$

$\Leftrightarrow a = 1 + 8$

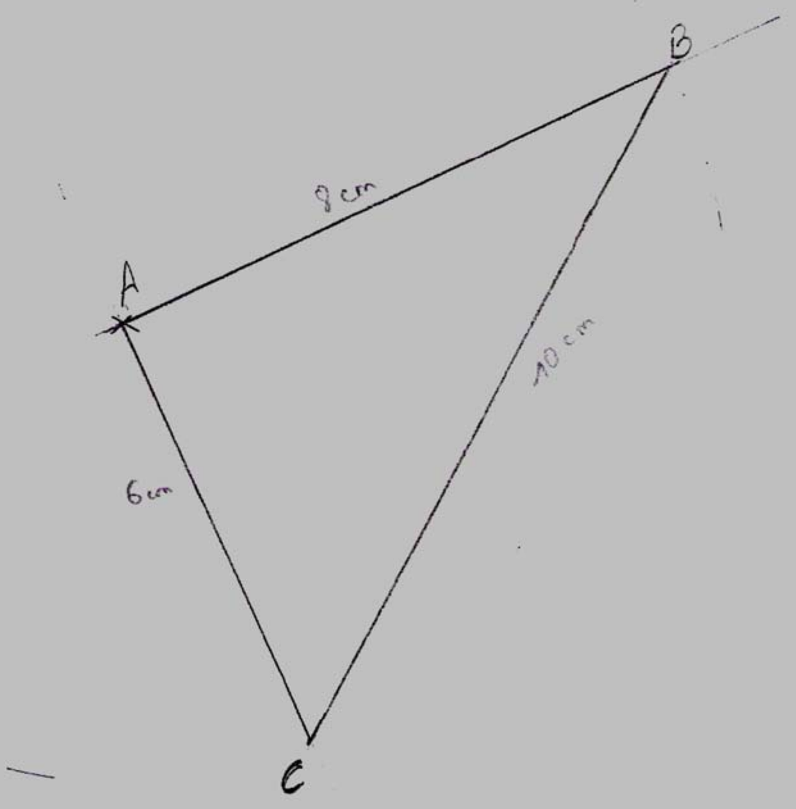
$\Leftrightarrow a = 9$

Donc a sera compris entre 5,5 et 9.

Exercice 3 : A, B, C sont trois points du plan (voir figure). Que peut-on faire pour trouver un point équidistant des trois points donnés ?

Des données peuvent être utiles :

- La distance entre les points A et B est égale à 8 cm.
- La distance entre les points A et C est égale à 6 cm
- La distance entre les points C et B est égale à 10 cm.



$BC^2 = 10^2 = 100$

$AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

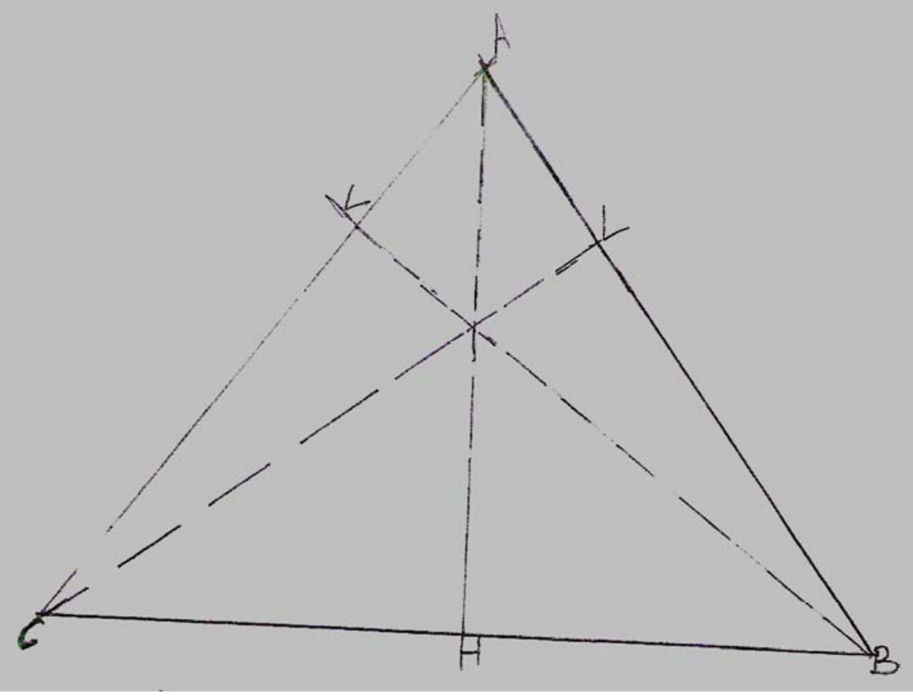
- D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC rectangle en A.

On trace les 3 droites qui passent par le milieu de chaque côté. Le point où elles se croisent est le point équisdants à chacun des points A, B et C (car ABC rectangle en A)

Exercice 4 : ABC est le triangle isocèle de la figure. [AH], [BK] et [CL] sont les trois hauteurs du triangle. En plus, on a : AB = AC = 10 cm et BC = 12 cm

a) Quelle est la nature des triangles ABH, BKC et BLC ?

b) A-t-on : AH + BK + CL < AB + BC +AC ?



[AH] ; [BK] et [CL] sont les trois hauteurs du triangles

D'où [AH] ⊥ [CB]

[BK] ⊥ [AC]

[CL] ⊥ [AB]

Donc ABH rectangle en H, BKC rectangle en K et BLC rectangle en L.

Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est la droite opposé à l'angle droit et c'est la plus grande droite du triangle.

Donc dans AHB rectangle en H, l'hypothénuse est [AB] d'où AH < AB

Dans BKC rectangle en k, l'hypoténuse est est [BC] d'où BK<BC

Dans ACL rectangle en L, l'hypotHénuse est [AC] d'où CL < AC

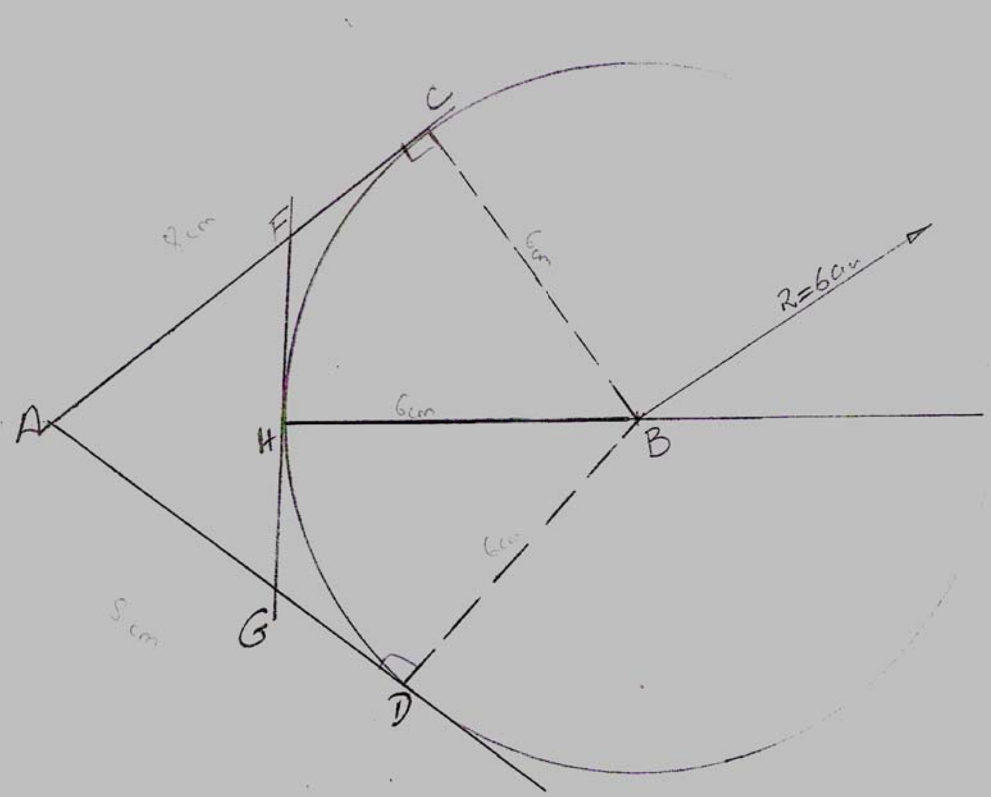
Si AH < AB et Bk < BC et CL < AC

Alors AH + Bk + CL < AB + BC + AC

Exercice 5 : Il s'agit de trouver le périmètre du triangle AFG en utilisant les données de la figure.

Rappel

Deux tangentes à un cercle, issues d'un même point, ont même longueur : AC = AD = 8cm



$\mathcal{P}_{AFG} = AF + FG + GA$

Or $AF = AC - FC = 8 - FC$

$GA = AD - GD = 8 - GD$

Donc $\mathcal{P}_{AFG} = (8 - FC) + FG + (8 - GD)$

$= 8 - FC + FG + 8 - GD$

$= 16 - FC + FG - GD$

ABC rectangle en C

D'après le théorème de Pythagore

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$AB = 10$ cm D'où $AH = 4$ cm

Or $AH \perp FG$ et passe par le sommet

donc AH est l' hauteur issu de A du triangle AFG.

Or $AF = AG$ (car AC et AD tangentes issus du même point)

AH est l' hauteur

Donc $AH = \frac{1}{2} FG$ (car $AF = AG$)

Donc $FG = 8$ cm

D'où $P_{AFG} = 16 - FC + 8 - GD$

$= 24 - FC - GD$

$H\cancel{B} \cancel{= HB + BD + GD + HG}$

$\cancel{= 6 + 6 + GD + 4}$ ~~(car HB et BD tang...~~

$\cancel{= 14 + GD}$

De haber utilizado la propiedad de la tangente, de la que se ha hecho mención en el enunciado (Dos tangentes a una circunferencia desde un mismo punto, determinan segmentos de la misma longitud), hubiera podido determinar la relación FH = FC al ver que (FC) y (FH) son las dos rectas tangentes.

Por la misma razón, GD = GH

Para acabar determinando el valor del perímetro: P = 24 – (FC + GD) = 24 – 8 = 16

6.11- Tablas y gráficos Comparativos

El recorrido efectuado hasta ahora a través de las diferentes fases de la investigación, ha sido suficientemente rico como para permitirnos pasar a la fase comparativa sin ningún tipo de preocupación. Sin embargo, creemos que se puede añadir un elemento de información más si realizamos una evaluación de las pruebas teniendo en cuenta dos criterios :

1- Evaluación de los resultados en base al modelo de evaluación del razonamiento de Van Hiele
2- Evaluación de los resultados teniendo en cuenta los criterios tradicionales de corrección.

6.11.1- Análisis Comparativo de los resultados según el modelo de Van Hiele

Para disponer de una mayor cantidad de información a la hora de valorar el nivel atribuido a la resolución de los problemas, hemos optado por consignar las informaciones en una tabla más completa. La información adicional nos servirá para confirmar o no la asignación de nivel realizado anteriormente y en la que nos basábamos en los criterios tradicionales establecidos anteriormente.

Hemos optado por añadir en las tablas comparativas una caracterización de las competencias matemáticas utilizadas en la resolución de los ejercicios basándonos en los siguientes ítems:

1- Manipulación de las expresiones matemáticas:
- Utiliza correctamente las expresiones matemáticas utilizadas

2- Resolución de problemas:

- Entiende el enunciado y sabe plantear correctamente el problema, utilizando las estrategias adecuadas para poder llegar a la buena solución.
- Razona la respuesta encontrada

3- Razonamiento y Argumentación:

- Formula las conjeturas adecuadas
- Sabe o Parece Saber qué tipo de razonamiento le permitirá llegar a la solución correcta.

4- Tipología de la demostración utilizada y nivel atribuido al razonamiento realizado:

- Sólo utiliza referencias visuales para justificar su respuesta
- Realiza una simple verificación a través de algunos ejemplos o mide las figuras.
- Los argumentos utilizados son informales.
- Utiliza argumentos formales para apoyar su respuesta.

5- Añadiremos el nivel asignado a cada prueba, basándonos en el modelo de Van Hiele.

En la evaluación anterior del proceso de demostración mediante Van Hiele, decíamos que el alumno razona en un nivel determinado cuando:

1- Si la respuesta se basa en referencias visuales, sin ningún tipo de artificio matemático adicional, asignaremos el nivel 1.

2- Si en su demostración, se basa en la simple verificación de ejemplos, atribuiremos el nivel 2

3- Si en la demostración se basa en respuestas informales para responder, asignaremos el nivel 3.

4- Si la demostración está basada en respuestas y argumentos formales, asignaremos el nivel 4.

La distribución de niveles nos permitía obtener los resultados siguientes:

Nombre	**Sexo**	**Sistema Educativo**	**Nivel de Razonamiento alcanzado en cada Prueba**				
			Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4	ejercicio 5
Manuel	Varón	Sistema Español	2	3	3	2	2
Sergio	Varón		3	3	3	2	2
Elisabeth	Mujer		4	4	4	3	1
Julio	Varón		3	2	3	2	1
Albert	Varón		3	4	4	4	3
Eva	Mujer	Sistema Italiano	1	4	4	4	1
Luca	Varón		1	2	3	4	1
Carles	Varón	Sistema Francés	3	3	4	4	4
Daniel	Varón		2	1	4	4	3
Eva	Mujer		1	4	4	3	3
Carlos	Varón		1	4	4	4	3
Corine	Mujer		2	4	4	4	3

Tabla 12 – T6

Pasemos a valorar las pruebas una a una, incluyendo los nuevos parámetros.

Para la valoración de la prueba 1, nos queda lo siguiente:

PARÁMETROS DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA 1										
	Tipología de la demostración realizada por el amlumno y Nivel atribuido al razonamiento realizado					Razonamiento y Argumentación		Resolución de Problemas		Manipulación
	Sólo utiliza Referencias visuales	Simple Verificación de ejemplos	Utiliza solamente argumentos Informales	Utiliza Respuestas y Argumentos Formales	Nivel atribuido	Formula las conjeturas adecuadas	Sabe qué tipo de razonamiento utilizar	Entiende y Plantea el problema	Razona la respuesta hallada	Utiliza correctamente las expresiones matemáticas
Manuel		**SI**			**2**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
Sergio			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Elisabeth				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Julio			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Albert			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	////
Eva	**SI**				**1**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
Luca	**SI**				**1**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
Carles			**SI**		**3**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	////
Daniel		**SI**			**2**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva	**SI**				**1**	////	////	////	////	////
Carlos	**SI**				**1**	////	////	////	////	////
Corine		**SI**			**2**	**NO**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**

Tabla 13 – T6

Nota: Anotamos el símbolo //// en la casilla cuando en la prueba no logramos identificar los elementos de juicio que esperábamos encontrar para la calificación definitiva.

Nos queda entonces lo siguiente para valorar la prueba 2:

PARÁMETROS DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA 2										
	Tipología de la demostración realizada por el amlumno y Nivel atribuido al razonamiento realizado					Razonamiento y Argumentación		Resolución de Problemas		Manipulación
	Sólo utiliza Referencias visuales	Simple Verificación de ejemplos	Utiliza solamente argumentos Informales	Utiliza Respuestas y Argumentos Formales	Nivel atribuido	Formula las conjeturas adecuadas	Sabe qué tipo de razonamiento utilizar	Entiende y Plantea el problema	Razona la respuesta hallada	Utiliza correctamente las expresiones matemáticas
Manuel				**SI**	**3**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
Sergio				**SI**	**3**	////	**SI**	**SI**	**NO**	**NO**
Elisabeth				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Julio			**SI**		**2**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Albert				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva					**4**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**
Luca					**2**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Carles			**SI**		**3**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Daniel	**SI**				**1**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
Eva				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Carlos				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Corine				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**

Tabla 14 – T6

Nota: Anotamos el símbolo //// en la casilla cuando en la prueba no logramos identificar los elementos de juicio que esperábamos encontrar para la calificación definitiva.

Nos queda entonces lo siguiente para valorar la prueba 3:

PARÁMETROS DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA 3										
	Tipología de la demostración realizada por el amlumno y Nivel atribuido al razonamiento realizado					Razonamiento y Argumentación		Resolución de Problemas		Manipulación
	Sólo utiliza Referencias visuales	Simple Verificación de ejemplos	Utiliza solamente argumentos Informales	Utiliza Respuestas y Argumentos Formales	Nivel atribuido	Formula las conjeturas adecuadas	Sabe qué tipo de razonamiento utilizar	Entiende y Plantea el problema	Razona la respuesta hallada	Utiliza correctamente las expresiones matemáticas
Manuel		**SI**			**3**	///	**SI**	**NO**	////	**SI**
Sergio			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Elisabeth			**SI**		**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Julio			**SI**		**3**	**SI**	////	**SI**	////	**SI**
Albert				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva			**SI**		**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Luca			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**
Carles				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Daniel				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Carlos				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Corine			**SI**		**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**

Tabla 15 – T6

Nota: Anotamos el símbolo //// en la casilla cuando en la prueba no logramos identificar los elementos de juicio que esperábamos encontrar para la calificación definitiva.

Nos queda entonces lo siguiente para valorar la prueba 4:

PARÁMETROS DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA 4										
	Tipología de la demostración realizada por el amlumno y Nivel atribuido al razonamiento realizado					Razonamiento y Argumentación		Resolución de Problemas		Manipulación
	Sólo utiliza Referencias visuales	Simple Verificación de ejemplos	Utiliza solamente argumentos Informales	Utiliza Respuestas y Argumentos Formales	Nivel atribuido	Formula las conjeturas adecuadas	Sabe qué tipo de razonamiento utilizar	Entiende y Plantea el problema	Razona la respuesta hallada	Utiliza correctamente las expresiones matemáticas
Manuel		**SI**			**2**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	////
Sergio		**SI**			**2**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	////
Elisabeth		**SI**			**3**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Julio		**SI**			**2**	**NO**	**NO**	///	**SI//**	**NO**
Albert				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Luca			**SI**		**4**	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**
Carles				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Daniel				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Carlos				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Corine				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**

Tabla 16 – T6

Nota: Anotamos el símbolo //// en la casilla cuando en la prueba no logramos identificar los elementos de juicio que esperábamos encontrar para la calificación definitiva.

Nos queda entonces lo siguiente para valorar la prueba 5:

PARÁMETROS DE CORRECCIÓN DE LA PRUEBA 5										
	Tipología de la demostración realizada por el amlumno y Nivel atribuido al razonamiento realizado					Razonamiento y Argumentación		Resolución de Problemas		Manipulación
	Sólo utiliza Referencias visuales	Simple Verificación de ejemplos	Utiliza solamente argumentos Informales	Utiliza Respuestas y Argumentos Formales	Nivel atribuido	Formula las conjeturas adecuadas	Sabe qué tipo de razonamiento utilizar	Entiende y Plantea el problema	Razona la respuesta hallada	Utiliza correctamente las expresiones matemáticas
Manuel		**SI**			**2**	**NO**	////	////	**NO**	////
Sergio		**SI**			**2**	**NO**	////	////	**SI**	////
Elisabeth		**SI**			**1**	**NO**	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
Julio	**SI**				**1**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**
Albert			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva			**SI**		**1**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Luca	**SI**				**1**	**NO**	**NO**	**NO**	**NO**	**SI**
Carles				**SI**	**4**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Daniel			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Eva			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Carlos			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**
Corine			**SI**		**3**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**

Tabla 17 – T6

Nota: Anotamos el símbolo //// en la casilla cuando en la prueba no logramos identificar los elementos de juicio que esperábamos encontrar para la calificación definitiva.

Tabla y Gráfico correspondientes a la distribución de los niveles de razonamiento de los alumnos de la muestra en la prueba 1:

Nombre	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 1	**2**	**3**	**4**	**3**	**3**	**1**	**1**	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**

Tabla 18 – T6

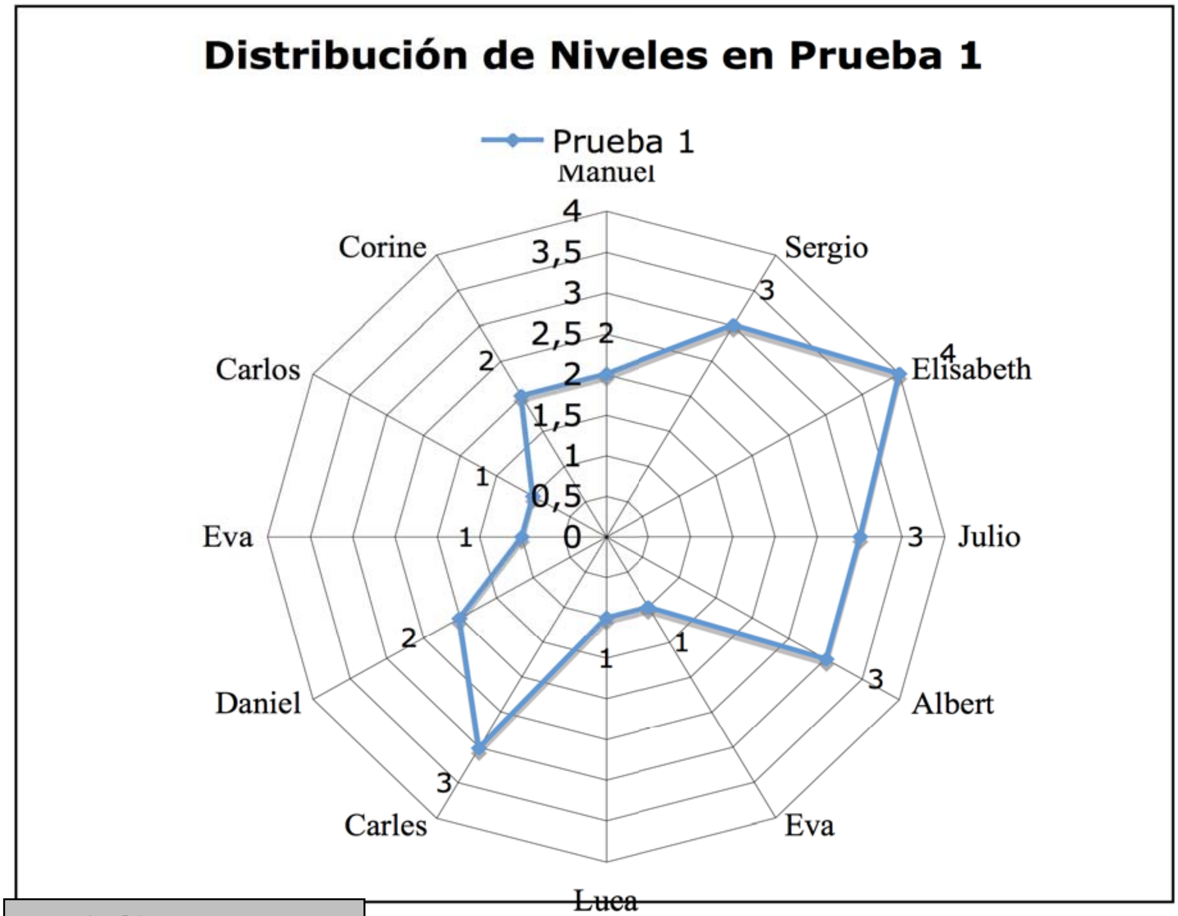


Gráfico 7 – T6

Notamos un desfase muy acusado entre los niveles atribuidos. Esta disparidad en los niveles atribuidos a los alumnos de la muestra puede deberse al hecho tan frecuente de respuesta sin justificación si no hay una clara referencia a ella. El alumno tiene tendencia a contestar sin pensar en justificaciones ni en verificaciones posteriores.

Tabla y Gráfico correspondientes a la distribución de los niveles de razonamiento de los alumnos de la muestra en la prueba 2:

Nombre	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 2	**3**	**3**	**4**	**2**	**4**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	**4**	**4**

Tabla 19 – T6

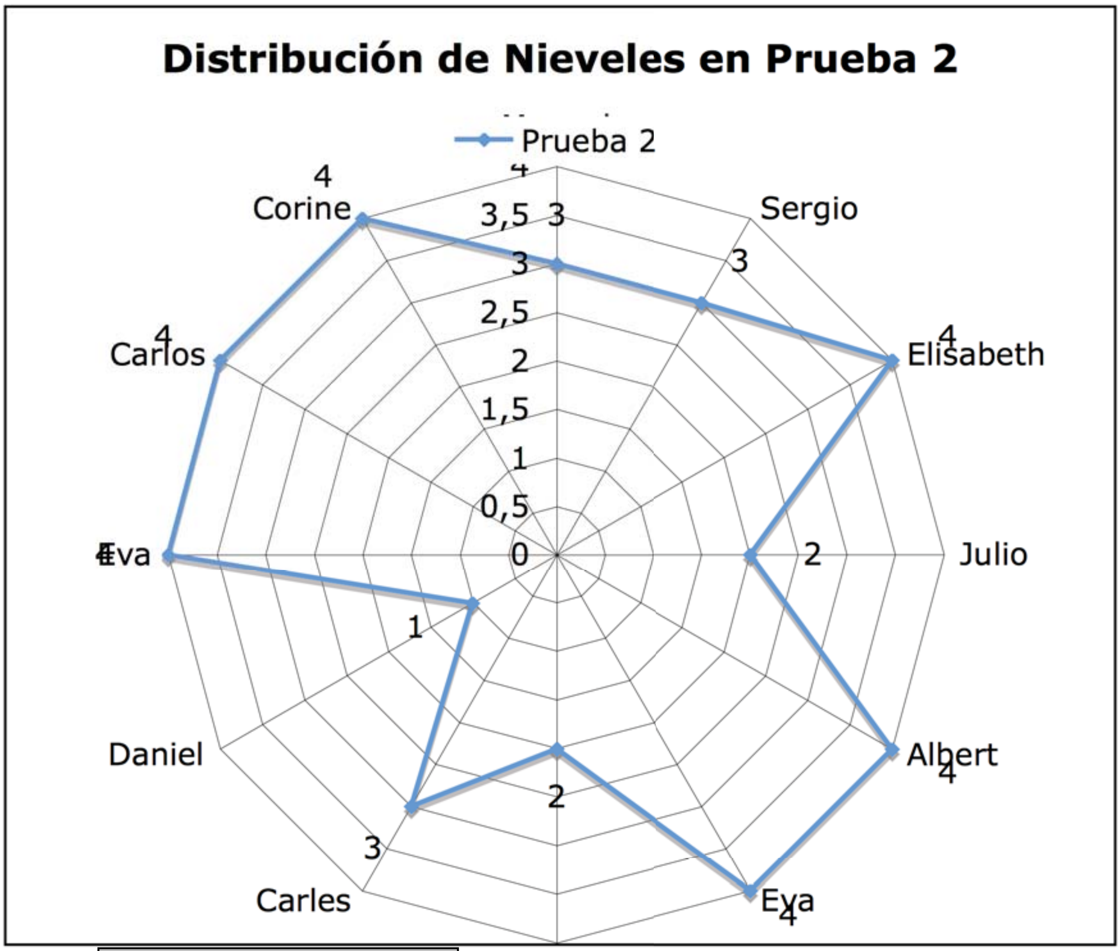


Gráfico 8 – T6

En este caso se nota muy poca diferencia entre los diferentes niveles.

Tabla y Gráfico correspondientes a la distribución de los niveles de razonamiento de los alumnos de la muestra en la prueba 3:

	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 3	3	3	4	3	4	4	3	4	4	4	4	4

Tabla 20 – T6

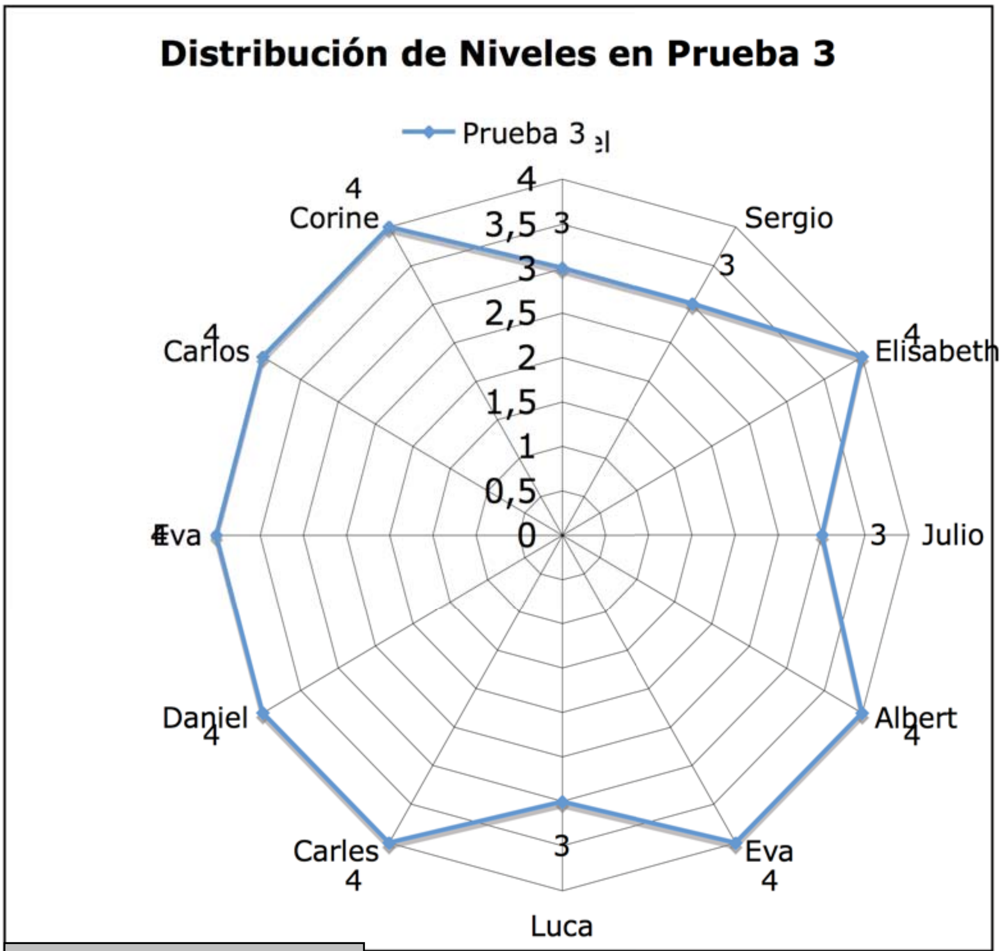


Gráfico 9 – T6

Al tratarse de una pregunta con poco nivel de formalismos, los niveles atribuidos son mucho más parecidos.

Tabla y Gráfico correspondientes a la distribución de los niveles de razonamiento de los alumnos de la muestra en la prueba 4:

	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 4	**2**	**2**	**3**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**4**	**4**

Tabla 21 – T6

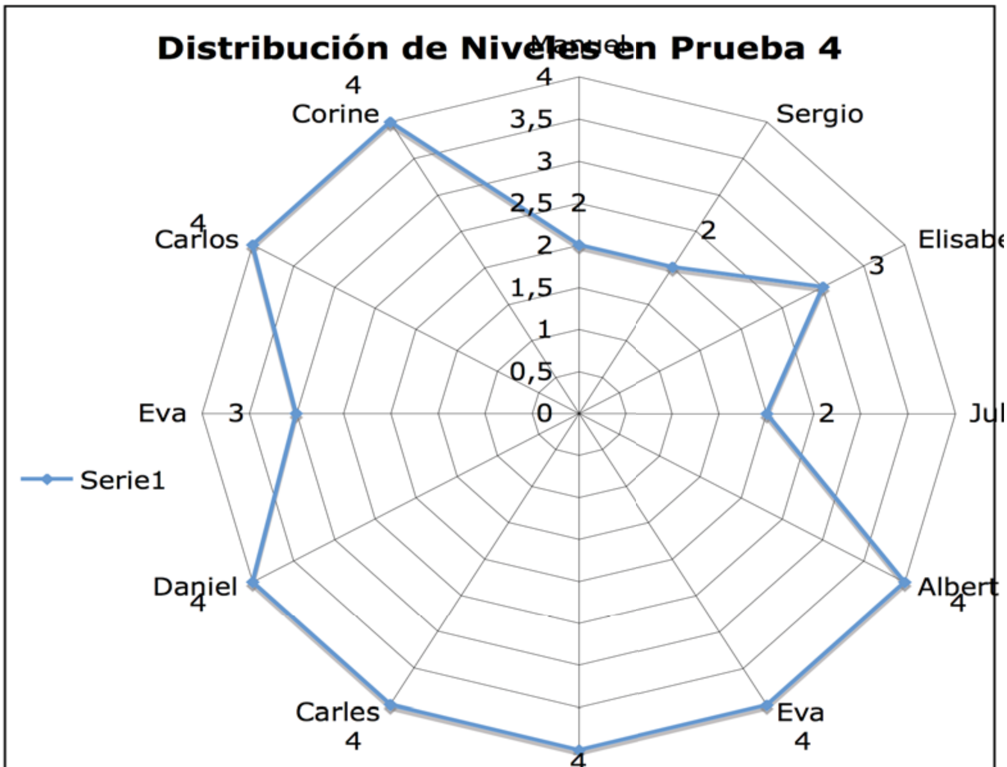


Gráfico 10 – T6

Obtenemos un nivel de respuesta muy uniforme en este caso.

Tabla y Gráfico correspondientes a la distribución de los niveles de razonamiento de los alumnos de la muestra en la prueba 5:

Tabla 22 – T6

	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 5	**2**	**2**	**1**	**1**	**3**	**1**	**1**	**4**	**3**	**3**	**3**	**3**

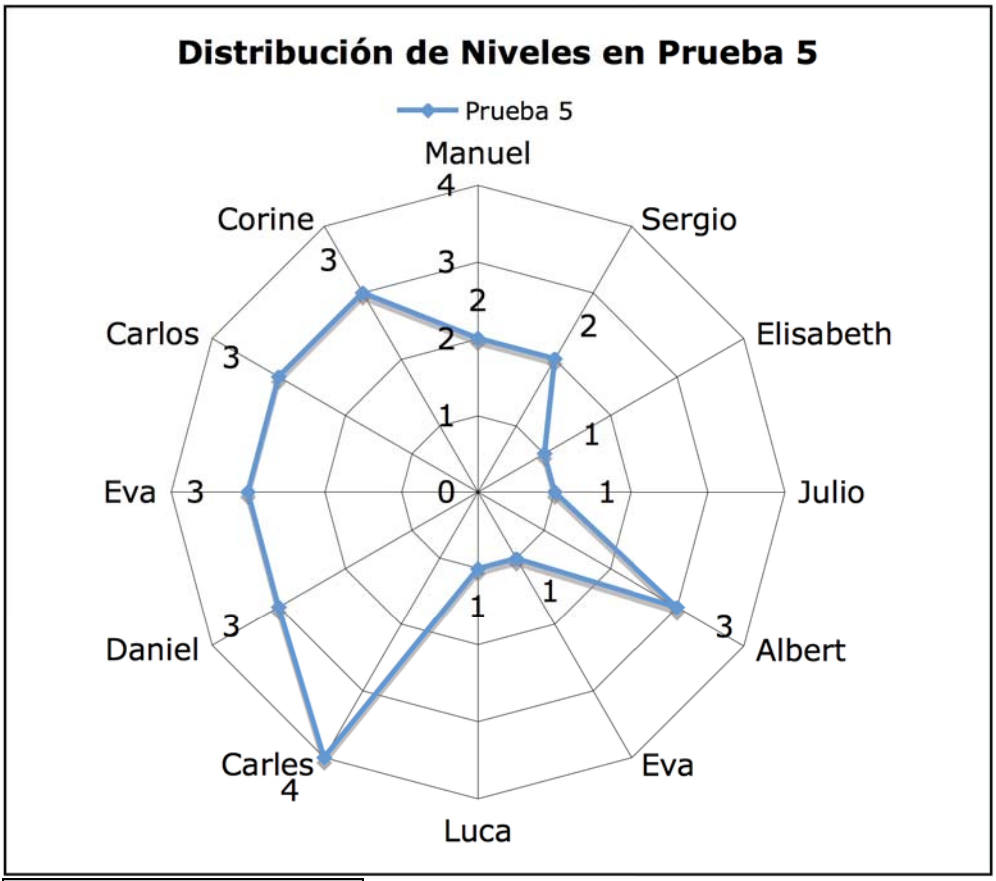


Gráfico 11 – T6

La diferencia con los alumnos del Liceo Francés es muy acusada en este caso.

Tabla y Gráfico correspondientes a la distribución de los niveles de razonamiento de los alumnos de la muestra en el conjunto de las pruebas:

	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 1	**2**	**3**	**4**	**3**	**3**	**1**	**1**	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**
Prueba 2	**3**	**3**	**4**	**2**	**4**	**4**	**2**	**3**	**1**	**4**	**4**	**4**
Prueba 3	**3**	**3**	**4**	**2**	**4**	**4**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
Prueba 4	**2**	**2**	**3**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**3**	**4**	**4**
Prueba 5	**2**	**2**	**2**	**1**	**3**	**1**	**1**	**4**	**3**	**3**	**3**	**3**

Tabla 23 – T6

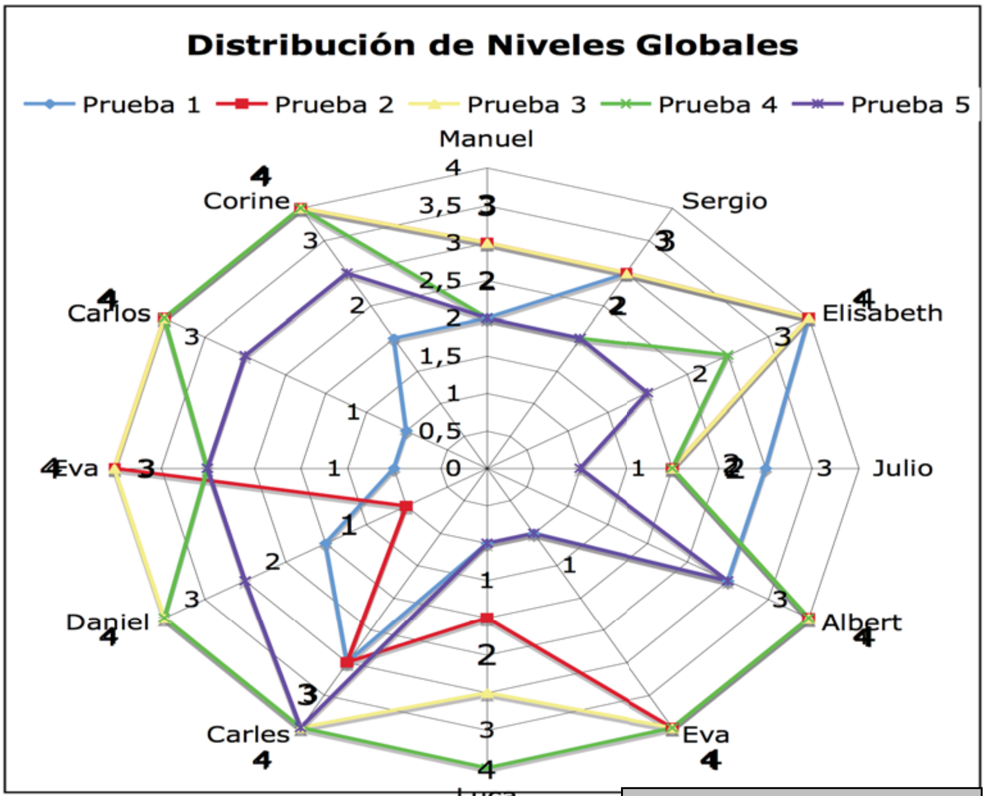


Gráfico 12 – T6

Una visión de conjunto nos ofrece este aspecto.

6.11.2- Análisis Comparativo de los resultados según el modelo tradicional de evaluación

Una vez finalizado el análisis de las pruebas según el modelo de Van Hiele, nos preguntamos sobre los resultados que se podía haber obtenido si, en vez de utilizar la atribución de niveles, se hubiera optado por un baremo tradicional para la corrección de las pruebas. Para delimitar claramente los aspectos a valorar, modificamos ligeramente el enunciado, sin que este hecho haya formado parte de la investigación con los alumnos. Este hecho nos hizo pensar que una investigación sobre "el enunciado como fuente de sesgo en el razonamiento de los alumnos talentosos" o bien sobre "el enunciado como fuente de errores en la resolución de problemas" podría conducir a resultados interesantes. En nuestro caso, el enunciado alternativo utilizado contenía ligeras apreciaciones con el fin de apreciar las pautas de atribución de la "evaluación numérica". El redactado final quedó de la forma siguiente:

Prueba 1: Demostrar que todo número de dos cifras, con las dos cifras iguales, es divisible por 11.

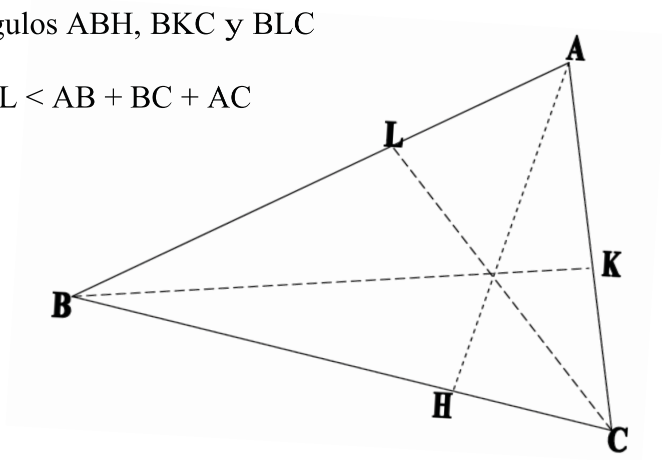
Prueba 2- Hallar dos números sabiendo que la diferencia entre ellos es igual a 1 y que su suma es un valor comprendido entre 10 y 17.

Prueba 3- Dados tres puntos A, B y C del plano. Hallar la posición de un punto M equidistante de los tres dados, sabiendo que AB = 8 cm., BC = 10 cm, AC = 6 cm.

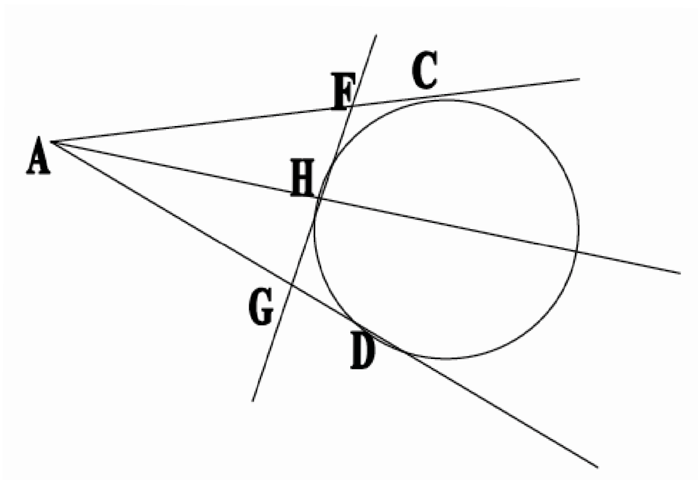
Prueba 4- Dado ABC un triángulo isósceles tal que AB = AC = 10cm y BC = 12cm. Sean *[AH]*, [BK], [CL] las tres alturas, tal como se indica en la figura. Se pide:

a) Determinar de qué tipo son los triángulos ABH, BKC y BLC

b) Comprobar la relación AH + BK + CL < AB + BC + AC



Prueba 5- Dada la figura siguiente en la que (AC) y (AD) son dos tangentes a la circunferencia trazadas desde el punto A. Sabemos que las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia, tienen la misma longitud y que además AC = 8, hallar el perímetro del triángulo AFG.



En este caso, mantenemos el mismo criterio de corrección establecidos en el apartado 5.3.2 (Bases para la corrección de la prueba). Sin embargo, lo que cambia es el baremo para la corrección. Se ha fijado un total de 2 puntos por cada problema y con los siguientes criterios de corrección detallados a continuación:

Corrección de la Prueba 1

a- No da ninguna respuesta 0

b- Respuesta afirmativa 0,25

c- Contesta negativamente 0

d- Enumera los casos 0,5

e-Contesta afirmativamente y enumera los casos 0,75

f- Considera además los casos particulares 0,25

g- Utiliza métodos formales y responde correctamente 2

Esto nos proporciona el cuadro de notas siguiente: 0 ; 025; 0,5;0,75; 1; 2

Corrección de la Prueba 2

a- No da ninguna respuesta 0

b- Enumera los casos 0,50

c-Contesta afirmativamente y enumera los casos 0,75

d- Planteamiento formal y uso correcto de símbolos 1,50

d.1- Además halla la respuesta correcta 0,25

d.2- Respuesta incorrecta 0

e- Verifica y comenta los resultados obtenidos 0,25

Esto nos proporciona el cuadro de notas siguiente: 0 ; 0,5; 0,75;1,50; 1,75; 2

Corrección de la Prueba 3

a-No da ninguna respuesta 0

b- Halla la posición del punto buscado 1

c- Responde que es el centro del círculo circunscrito 1 d- Demuestra cómo obtener dicho punto 1

Esto nos proporciona el cuadro de notas siguiente: 0 ; 1; 2

Corrección de la Prueba 4

a- No da ninguna respuesta 0

b- Responde a la pregunta 1 pero no justifica nada 0,1

b.1- Responde a la pregunta 1 y justifica su respuesta 1

b.2-Obtiene la respuesta midiendo los segmentos 0,25

c- Responde a la pregunta 2 pero no justifica nada 0,1

c.1- Responde a la pregunta 2 y justifica su respuesta 1

c.2-Obtiene la respuesta midiendo los segmentos 0,25

Esto nos proporciona el cuadro de notas siguiente: 0 ; 0,1; 1; 0,25;

0,2; 1,1; 0,26; 0,50; 1,25; 2

Corrección de la Prueba 5

a- No contesta bien 0

b- Responde bien pero mide para contestar 0,50

b- Responde y usa métodos formales en la respuesta dada 2

En este último caso, se ha considerado el caso del alumno que no ha contestado del todo bien, atribuyendo un 1 o un 1,5 en vez de un cero.

Esto nos proporciona el cuadro de notas siguiente: 0 ; 0,5; 1; 1,5; 2

Así, basándonos en estas pautas, para corregir las pruebas hemos obtenido la siguiente tabla de corrección siguiente :

Prueba	Descripción de la respuesta dada por el alumno en la corrección de la Prueba	Puntuacióm Obtenida	Manuel	Sergio	Elisabeth	Julio	Albert	Eva	Luca	Carles	Daniel	Eva	Carlos	Corine
Prueba 1	a- No da ninguna respuesta	0												
	b- Respuesta afirmativa	0,25	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
	c- Contesta negativamente	0												
	d- Enumera los casos	0,5	X	X		X	X			X		X		X
	e- Considera además los casos particulares	0,25				X								
	f- Utiliza métodos formales y responde correctamente	2			X									
Prueba 2	a- No da ninguna respuesta	0												
	b- Enumera los casos	0,50				X		X		X	X			
	c- Planteamiento formal y uso correcto de símbolos	1,50	X	X	X		X	X	X			X	X	X
	c.1- Además halla la respuesta correcta	0,25		X	X		X		X			X	X	X
	c.2- Respuesta incorrecta	0												
	d- Verifica y comenta los resultados obtenidos	0,25		X	X		X		X	X		X	X	X
Prueba 3	a-No contesta bien	0												
	b- Halla la posición del punto buscado	1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	c- Lo define como centro de la circunferencia circunscrita	1								X	X			
	d- Demuestra cómo obtener dicho punto	1		X	X	X	X	X	X			X	X	X
Prueba 4	a- No da ninguna respuesta	0												
	b- Responde a la pregunta 1 pero no justifica nada	0,1			X	X			X					
	b.1- Responde a la pregunta 1 y justifica su respuesta	1					X	X		X	X	X	X	X
	b.2-Obtiene la respuesta midiendo los segmentos	0,25			X									
	c- Responde a la pregunta 2 pero no justifica nada	0,1							X	X			X	X
	c.1- Responde a la pregunta 2 y justifica su respuesta	1					X	X	X	X			X	X
	c.2-Obtiene la respuesta midiendo los segmentos	0,25	X	X	X									
Prueba 5	a- No contesta bien				X	X		X	X		X	X	X	X
	b- Responde bien pero mide para contestar	0,5	X	X										
	b- Responde y usa métodos formales en la respuesta dada	2					± 1	± 1		X 2	± 1.5	± 1	± 1	± 1
	NOTA FINAL RESULTANTE		4	5.5	6.6	3.6	7.75	7.25	3.85	8.75	5.5	7.75	7.25	7.75

Tabla 24 – T6

Comparemos ahora estos resultados con los obtenidos utilizando el modelo de Van Hiele para analizar las posibles desviaciones.

Nivel alcanzado en cada prueba y nota atribuida										
	Prueba 1		Prueba 2		Prueba 3		Prueba 4		Prueba 5	
	Nivel	Nota	Nivel	Nota	Nivel	Nota	Nivel	Nota	Nivel	Nota
Manuel	2	0.75	3	1.5	3	1	2	0.25	2	0.5
Sergio	3	0.75	3	2	3	2	2	0.25	2	0.5
Elisabeth	4	2	4	2	4	2	***3***	***0.26***	1	0
Julio	3	1	2	0.5	3	2	2	0.1	1	0
Albert	3	0.75	4	2	4	2	4	1.1	3	1
Eva	1	0.25	4	2	4	2	4	2	1	0
Luca	1	0.25	2	0.5	3	2	4	1	1	1
Carles	3	0.75	3	2	4	2	4	1	4	2
Daniel	2	0,5	1	0.5	4	2	4	1	3	1.5
Eva	1	0.75	4	2	4	2	3	2	3	1
Carlos	1	0.25	4	2	4	2	4	2	3	1
Corine	2	0.75	4	2	4	2	4	2	3	1

Tabla 24 – T6

Vamos a comparar los datos obtenidos para cada prueba. Lo que mejor nos puede servir será la comparación de los perfiles de resultados correspondientes a las notas obtenidas de forma numérica y a la atribución de niveles según los criterios del método de Van Hiele. Viendo que hay un caso en el que se nota una disparidad entre el nivel atribuido y la nota obtenida, intentemos analizar los motivos que han provocado dicha disparidad antes de analizar los perfiles obtenidos para cada caso. Se trata del caso de la Prueba 4 de Elisabeth (del IES Julia Minguell) en el que hay errores de cálculo en la resolución. Si bien los conceptos que aparecen en la prueba y que la alumna necesita para razonar son correctos, los resultados están mal. Podemos pasar a analizar los perfiles.

En el caso de la prueba 1, tenemos la siguiente distribución:

Tabla 25 – T6

	Nivel de Razonamiento atribuido al alumno en la Prueba 1	Nota Obtenida por el alumno en la Prueba 1
Manuel	2	0,75
Sergio	3	0,75
Elisabeth	4	2
Julio	3	1
Albert	3	0,75
Eva	1	0,25
Luca	1	0,25
Carles	3	0,75
Daniel	2	0,5
Eva	1	0,75
Carlos	1	0,25
Corine	2	0,75

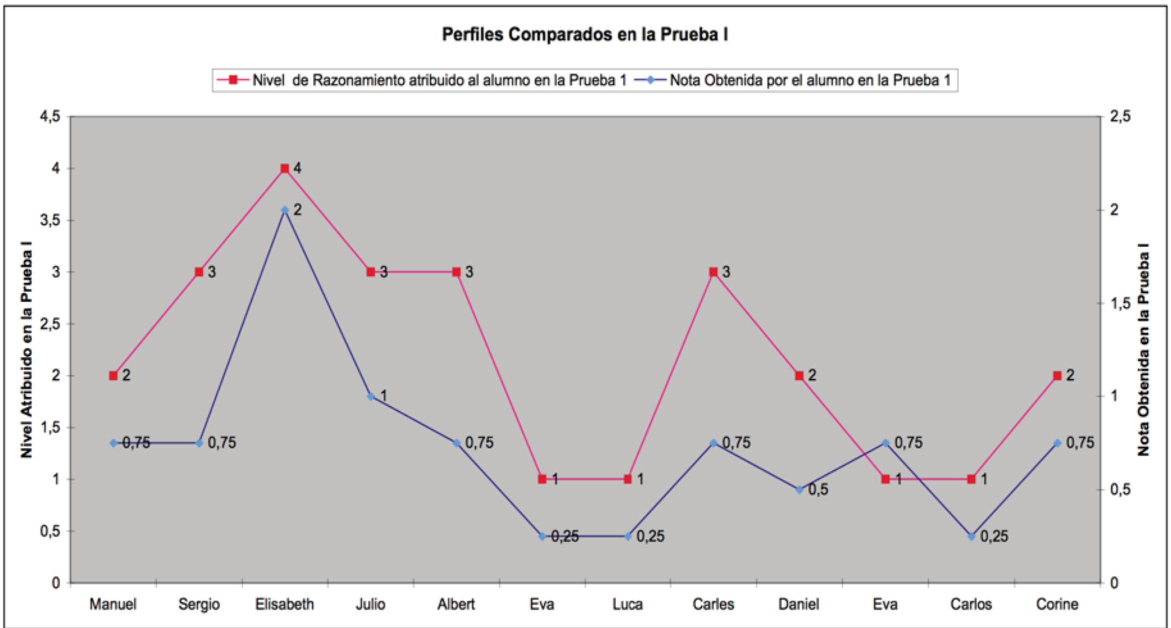


Gráfico 13 – T6

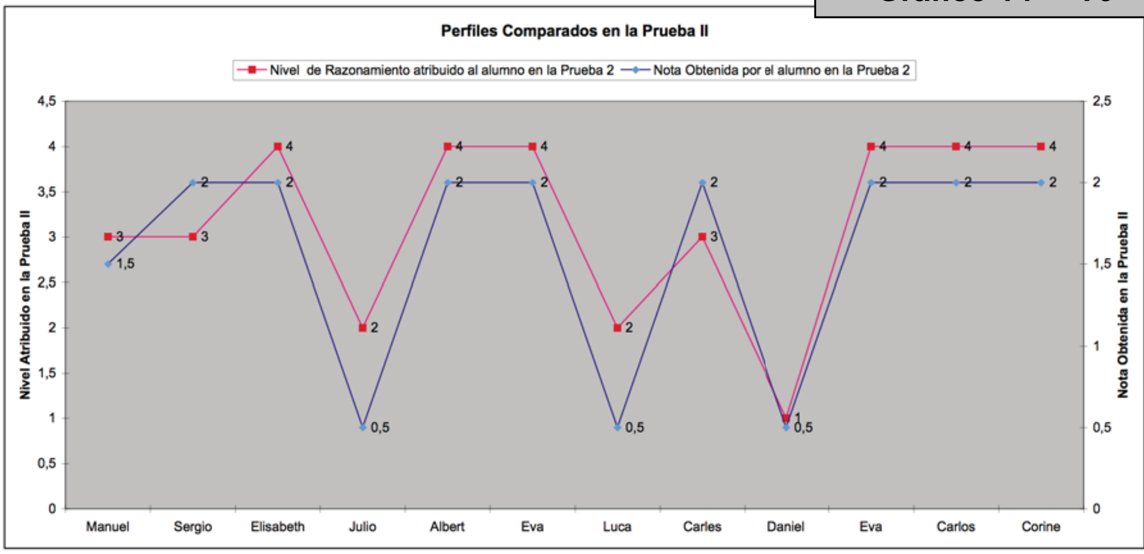
En la gráfica, podemos observar los perfiles correspondientes al nivel atribuido a los alumnos en la prueba 1 así como las notas obtenidas. Puesto que no podemos comparar los valores obtenidos a nivel numérico, hemos optado por la comparación de los perfiles, viendo dónde existía diferencia entre la apreciación cualitativa de "Nivel de Razonamiento" y apreciación numérica sobre "capacidad de resolución de un problema". Los casos más claros son, como se puede apreciar en el gráfico, los de Sergio y de Carles. Razonar en un nivel 3 debe generalmente indicar una capacidad de resolución más alta. Sin embargo, los criterios de atribución de la calificación numérica pueden jugar también un papel negativo al respecto.

Veamos los demás casos. En la prueba II, tenemos la siguiente distribución:

	Nivel de Razonamiento atribuido al alumno en la Prueba 2	**Nota Obtenida por el alumno en la Prueba 2**
Manuel	3	1,5
Sergio	3	2
Elisabeth	4	2
Julio	2	0,5
Albert	4	2
Eva	4	2
Luca	2	0,5
Carles	3	2
Daniel	1	0,5
Eva	4	2
Carlos	4	2
Corine	4	2

Tabla 26 – T6

Gráfico 14 – T6



No hay casos inesperados. No hay grandes diferencias con respecto a lo que se esperaba, a partir de los niveles atribuidos. Sin embargo, la información obtenida con respecto al aprendizaje del alumno es mayor, a partir de la atribución de niveles que con respecto a las notas numéricas.

Veamos el caso de la Prueba III

	Nivel de Razonamiento atribuido al alumno en la Prueba 3	**Nota Obtenida por el alumno en la Prueba 3**
Manuel	3	1
Sergio	3	2
Elisabeth	4	2
Julio	3	2
Albert	4	2
Eva	4	2
Luca	3	2
Carles	4	2
Daniel	4	2
Eva	4	2
Carlos	4	2
Corine	4	2

Tabla 27 – T6

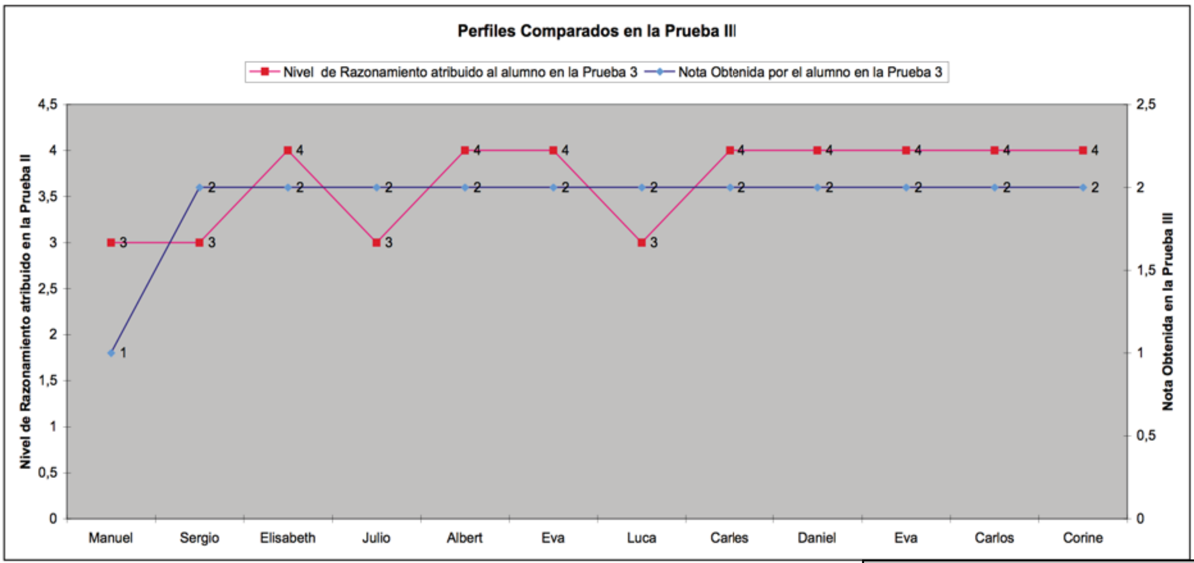


Gráfico 15 – T6

Resultados en consonancia con los valores anteriores.

Para la Prueba IV, tenemos:

	Nivel de Razonamiento atribuido al alumno en la Prueba 4	Nota Obtenida por el alumno en la Prueba 4
Manuel	2	0,25
Sergio	2	0,25
Elisabeth	*3*	*0,26*
Julio	2	0,1
Albert	4	1,1
Eva	4	2
Luca	4	1
Carles	4	1
Daniel	4	1
Eva	3	2
Carlos	4	2
Corine	4	2

Tabla 28 – T6

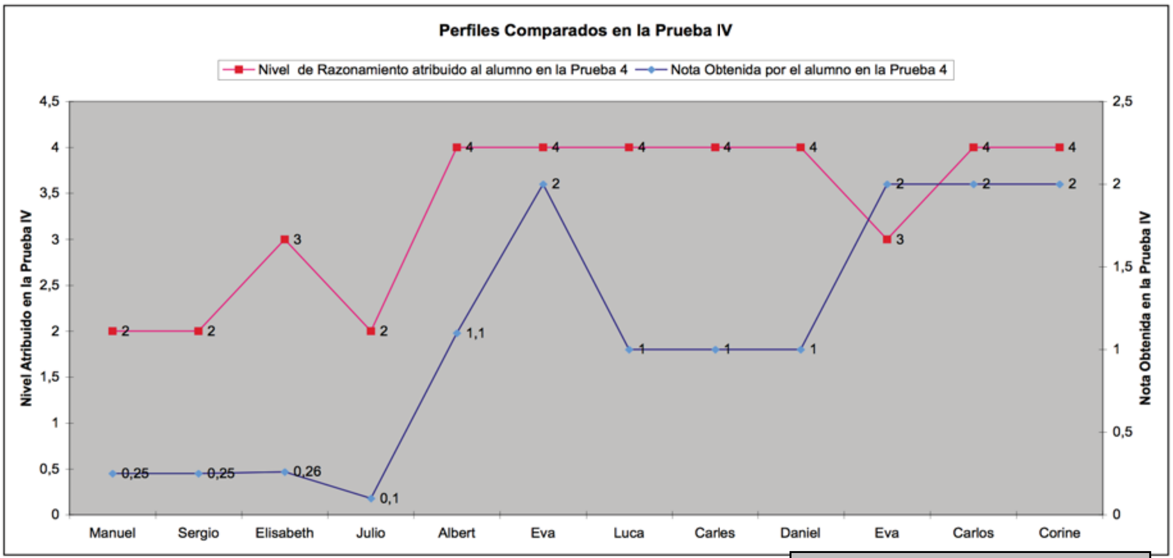


Gráfico 16 – T6

Nos encontramos aquí con un caso inesperado, el de Elisabeth. Está claro que la "corrección" a partir de la atribución de niveles obliga a planteamientos diferentes que pueden provocar este tipo de diferencias. En este caso, los errores de cálculo han sido la causa. Y en la Prueba V, la distribución de niveles indica lo siguiente:

	Nivel de Razonamiento atribuido al alumno en la Prueba 5	**Nota Obtenida por el alumno en la Prueba 5**
Manuel	2	0,5
Sergio	2	0,5
Elisabeth	1	0
Julio	1	0
Albert	3	1
Eva	1	0
Luca	1	1
Carles	4	2
Daniel	3	1,5
Eva	3	1
Carlos	3	1
Corine	3	1

Tabla 29 – T6

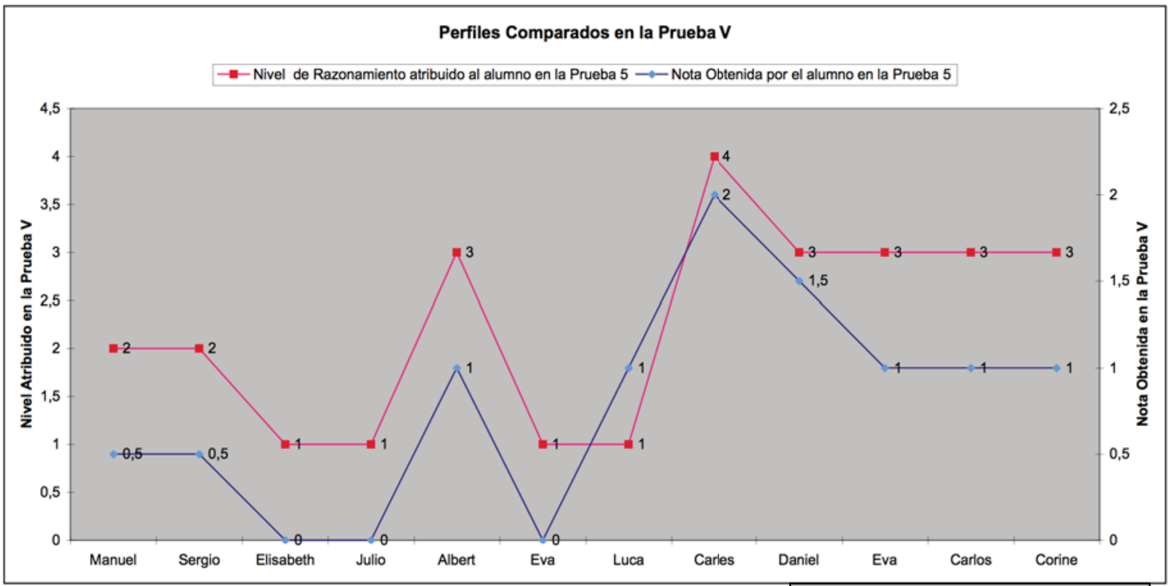


Gráfico 17 – T6

En este caso, los alumnos escolarizados en el sistema francés se han visto claramente favorecidos. Una muestra más de la diferencia de tratamiento que se le otorga a la geometría en el sistema educativo francés con respecto a los otros.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES
Y
NUEVAS PERSPECTIVAS

Ce que l’on conçoit bien s’énonce clairement,

Et les mots pour le dire arrivent aisément.

Boileau

7.1. Conclusiones y perspectivas

En el mundo de la docencia, dentro del marco de las relaciones «Profesor-Alumno-Centro», en el caso de resultados académicos pobres, se suele recurrir a una gama de explicaciones a veces muy poco matizadas. Desde el punto de vista del docente, siempre y cuando no se profundice en el análisis del caso, se suele aludir:

- A la ausencia de motivación del alumno
- A un interés insuficiente (caso de detectar en el alumno un mínimo de capacidades).
- A la falta de capacidades suficientes para responder con éxito a las exigencias del curso.
- A la no realización del obligado esfuerzo personal.
- A la falta del sentido de responsabilidad

En cambio, las apreciaciones de los alumnos suelen ser diferentes:

- Asignatura aburrida o demasiado difícil,
- Pocas cualidades pedagógicas o ausencia de ellas en el profesor,
- Despreocupación del profesor por los que no acaban de entender los conceptos por él explicados,
- Poca utilidad de la formación matemática en las perspectivas de futuro (comportamiento muy frecuente en gran parte de los alumnos de las etapas anteriores al bachillerato sobretodo).

Así, nos introducimos en un círculo vicioso que conduce al desánimo en ambas partes.

Los problemas de enseñanza-aprendizaje así como las particularidades del “entorno académico”: la gestión del aula, el entorno afectivo, los ambientes de socialización del alumno, … crean un “mundo paralelo” que parece funcionar a veces con reglas particulares. En este mundo paralelo, el alumno interesado, el más adaptado, el más académico sigue trabajando, y sigue instalándose en el “éxito”, a la vez que los otros siguen en un “mundo aparte” que a veces conduce al “fracaso “, al fracaso de la escolarización del alumno. Una primera explicación de las dificultades a los que nos enfrentamos, en la enseñanza de las matemáticas, nos la proporciona Skempl (1980): "En matemáticas, no sólo los conceptos son más abstractos que los de la vida diaria, sino que la dirección del aprendizaje va en su mayor parte en la de una abstracción todavía mayor. La comunicación de los conceptos matemáticos es , por lo tanto, mucho más difícil, tanto para el que comunica como para el que recibe la comunicación."

Una enseñanza de las matemáticas que no tenga esto en cuenta , solamente favorecerá a un tipo de alumnado determinado. Esto introduce pues un primer elemento diferenciador entre la enseñanza de las matemáticas y la de otras asignaturas: el objeto matemático, alejado muchas veces de la cotidianeidad, no es a veces fácil de aprehender y la elaboración o la comprensión de un razonamiento, manipulando dichos objetos, puede no ser muy evidente.

Es por lo tanto necesario un aprendizaje que tenga en cuenta estas peculiaridades del objeto matemático , del discurso elaborado con ellos, del razonamiento matemático. La enseñanza de las matemáticas ha de incorporar pues estas consideraciones, teniendo en cuenta ciertas pautas que faciliten o democraticen el aprendizaje de las matemáticas , rompiendo este halo elitista que lo ha rodeado siempre. Una de las grandes ventajas que puede ofrecer la teoría de Van Hiele. Según Llinares y Sánchez (1990), el currículo español de matemáticas en la Enseñanza Media presenta unas graves carencias , que se traducen en una mala formación de buena parte de los estudiantes. Según estos autores , un análisis de la situación, efectuado desde las propuestas de Van Hiele permitiría comprobar que si bien los alumnos pueden construirse un buen bagaje de conocimientos, la aplicación de dichos conocimientos a la elaboración de ciertas habilidades de razonamiento no se realiza. Desgraciadamente, hemos podido comprobar, a través de este estudio de casos, este extremo vaticinado por los ante citados autores. Alumnos considerados como muy buenos por la Comunidad Educativa, en nuestro sistema educativo, no logran explicitar sus conocimientos y aplicar sus supuestas destrezas cognitivas a la resolución de problemas. El estudio ha podido comprobar que son alumnos que corresponden a un nivel de aprendizaje muy alto , en el sentido de una muy buena adaptación académica.

Los resultados obtenidos permiten también hacer una lectura optimista. Una enseñanza adecuada permite lograr muy buenos resultados instruccionales en los alumnos. Por ejemplo, los casos de Albert y de Elisabeth, dos de los alumnos estudiados, que han tenido una experiencia pedagógica idéntica a la de sus otros tres compañeros con la única particularidad de haber participado en un crédito de resolución de problemas cuyo contenido figura en anexo, muestran unos resultados muy diferentes con respecto a los demás. Tal como reconocían en las entrevistas individuales realizadas a posteriori , la influencia de dicho crédito sobre su forma de abordar los problemas propuestos ha sido notable. La entrevista con Julio también permitió ver que son alumnos con muchas facilidades de aprendizaje y que necesitan de modelos de razonamiento los cuales sólo se aprenden en el centro educativo.

Es interesante hacer notar que una buena gestión pedagógica, puede permitir tratar ciertos aspectos formativos tanto en el caso de alumnos con éxito académico como en alumnos considerados normales. Hay que pensar en un aprendizaje y una enseñanza basados en otros criterios, menos discriminadores, que favorezcan más la "inclusión". En efecto , créditos de mejora de la capacidad de razonamiento de los alumnos, son elementos que habría que tener en cuenta con más frecuencia. Se ha de romper la idea de los contenidos mínimos, uniformizador de mentes que transforma la enseñanza de las matemáticas en elaboración de recetas, en una enseñanza algoritmizada que mata todo atisbo de creatividad . Enseñar matemáticas es algo más. Decía J. Allen Paulos (1996) : *Es hora de revelar el secreto: la función principal de las matemáticas no es organizar cifras en fórmulas y hacer cálculos endiablados. Es una forma de pensar y de hacer preguntas que sin duda es extraña a muchos ciudadanos, pero que está abierta a casi todos.*

Y realmente , es así y no podría o no debería ser de otra forma. Si nosotros los docentes implicados, lo asumimos, eso nos empujará a adoptar modelos de enseñanza, estilos pedagógicos (intuitivos o científicos) que permitirán mejorar las habilidades de razonamiento de nuestros alumnos.

7.2- Interpretación de los diferentes resultados

Nuestra investigación, a pesar de haberse centrado en el alumno con "Éxito Académico", ofrece unos resultados que se pueden extrapolar a un conjunto más amplio de alumnos. De hecho, problemas personales o del ámbito familiar (entorno próximo) pueden afectar la escolaridad del alumno e influir en su nivel de rendimiento, en su nivel de éxito: absentismo puntual o prolongado por motivos diversos (étnico-culturales, religiosos, económicos, administrativos), violencias de tipología diversa (doméstica, bullying, otros), u otros motivos. Estas situaciones que se hacen cada vez más frecuentes, provocan situaciones de estrés emocional que modifica las pautas de comportamiento del alumno e incide en su nivel de éxito académico.

Sin embargo, al iniciar este trabajo, precisábamos que prescindiríamos de estos casos extremos y nos centrábamos en los casos de "éxito manifiesto". El alumno, en el supuesto de que existieran estas situaciones personales, logra sublimarlas y mantener un nivel de éxito sin baches, ajustándose así a los parámetros académicos normales.

Situándonos entonces en un marco normal de funcionamiento, no podemos obviar la influencia, sobre el nivel de razonamiento del alumno del tipo de aprendizaje del centro y, por lo tanto, del sistema educativo en el que está escolarizado. Podemos sintetizar esto a través de este cuadro de interrelaciones que modifica ligeramente el del principio. Se trata de lo siguiente:

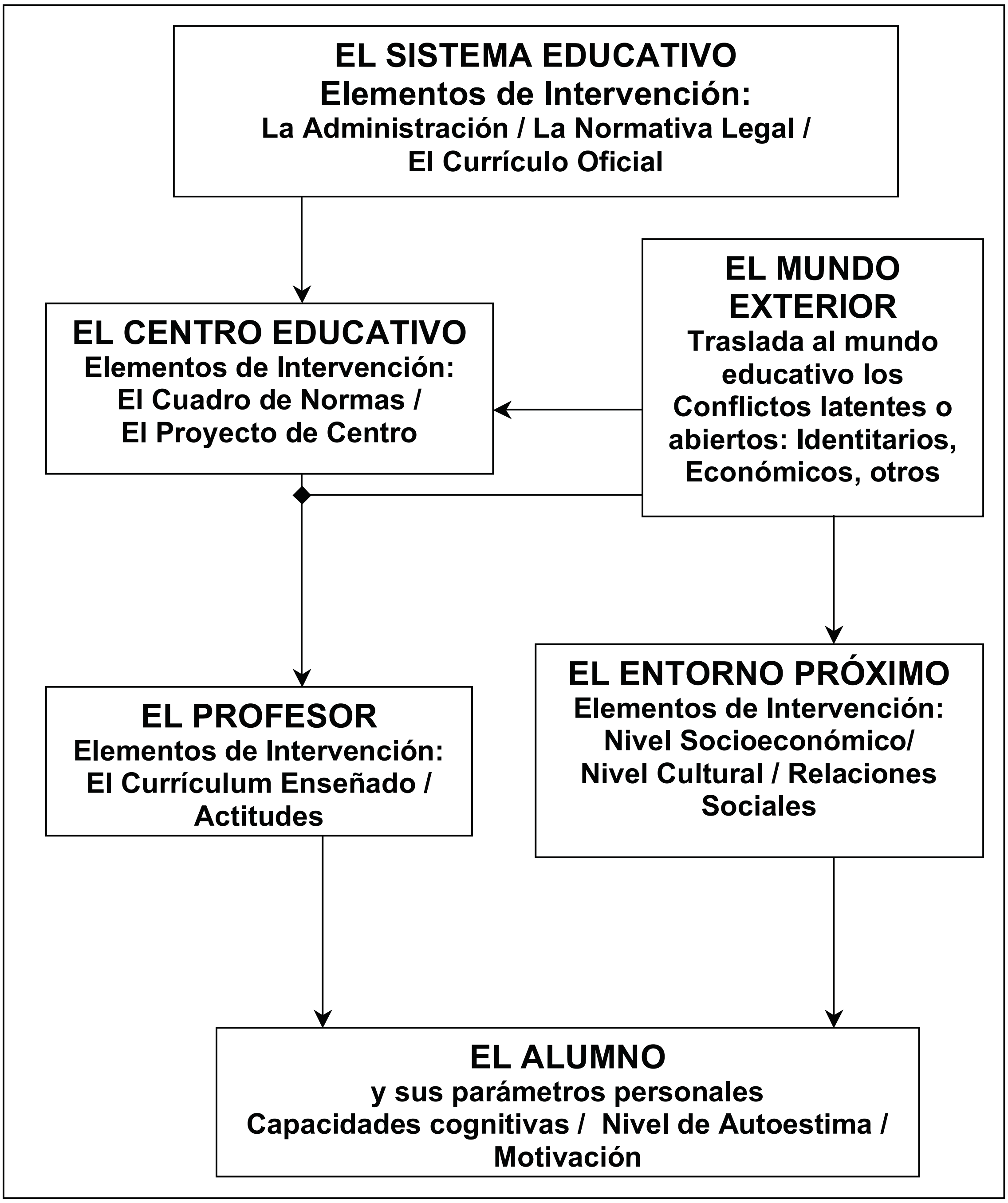


Diagrama 1 – T7

Observamos así que:

- El Sistema Educativo, a través del Marco Curricular, obliga a unos planteamientos pedagógicos concretos, fijando objetivos, contenidos,, procedimientos y modulando así tanto la enseñanza como el aprendizaje, a través de los conceptos fijados, de los valores vehiculados, de las normas establecidas y de los procedimientos recomendados.

- El Centro Educativo y el Profesor influyen sobre el grado de percepción del alumno y su forma de abordar las dificultades académicas. Si pensamos en la acción conjunta del Sistema educativo, del Centro y del Profesor, observamos que el tipo de razonamiento del alumno se ve influenciado. Un ejemplo de ello puede ser los ejercicios 3, 4 y 5 de la prueba y la forma de resolución aportada por cada uno de los "Tres Grupos" de alumnos que componen la muestra final para el estudio de casos. Los ejercicios 4 y 5 muestran claramente la influencia de un tipo de instrucción diferenciada con respecto a los otros. En cambio, el ejercicio 3 no presenta ningún tipo de diferencia.

Para analizar la influencia del mundo exterior y del entorno próximo del alumno, hemos de hacer notar por ejemplo que, en el caso de los alumnos del centro público, a la hora de configurar la muestra final, para elegir los 5 alumnos, bastantes alumnos, con capacidades sobresalientes para poder formar parte de la investigación, o sea con unos resultados que demuestran buenas capacidades personales, al no poder tener una escolaridad normal, debido a un cuadro de absentismo grave (requiriendo la intervención de la asistencia social) se han tenido que desechar ya que no se ajustaban al perfil buscado.

Para finalizar, volvamos a las preguntas que nos formulamos al empezar este trabajo ya que a lo largo de la investigación, hemos acumulado suficientes informaciones como para contestar de forma adecuada. Hemos podido ver que efectivamente se cumplen que:

1- Los alumnos considerados como Alumnos con Éxito Académico por ciertos Sistemas Educativos, siguen el modelo de Van Hiele en su Razonamiento Matemático. Los niveles de razonamiento aparecen claramente en su forma de razonar, en la forma de "expresar" este razonamiento, en sus procesos de argumentación.

2- La calidad del Razonamiento Matemático de dichos alumnos, si bien no es función del Sistema Educativo en el cual estudian (España, Francia, Italia) o del estilo educativo o idioma (francés, catalán, castellano, italiano/ IES, Liceo Francés, Liceo Italiano). Sin embargo, dicha calidad se ve matizada por el sistema en el cual el alumno se encuentra escolarizado. No es un problema de razonamiento sino de contenido curricular y de "modelos instruccionales utilizados".

Hemos podido apreciar que el alumno escolarizado en el sistema francés se encuentra mucho más cómodo en la forma de razonar sobre un problema geométrico que un alumno escolarizado en un sistema español.

3- Los criterios del modelo de Van Hiele, se pueden aplicar también al conocimiento algebraico, por lo tanto los parámetros de razonamiento matemático no dependen del tipo de actividad matemática.

El análisis de las diferentes pruebas así nos ha podido permitir apreciarlo. Numerosos trabajos sobre el modelo de Van Hiele se han limitado al trabajo geométrico y el tipo de razonamiento visual geométrico para el razonamiento del alumno. Hemos visto en este trabajo que el alumno razona de forma idéntica y sigue las mismas pautas tanto en el razonamiento geométrico que en el caso algebraico.

Estos resultados nos facilitan las respuestas a las preguntas que formulábamos como hipótesis de trabajo a la vez que nos orientan y proporcionan nuevas herramientas a nosotros los docentes para, por ejemplo:

1- Establecer con más criterio las diferencias, si las hay, entre un alumno académicamente bueno y un "alumno brillante" o un "alumno con talento".
2- Incidir en la calidad del razonamiento del alumno.
3- Establecer circuitos o itinerarios de aprendizaje en el alumno de forma a reforzar:
    a. El grado de autonomía
    b. El sentido de la responsabilidad
    c. El interés ante el saber
    d. La forma de formular las preguntas
    e. Las técnicas de búsqueda de informaciones
    f. El papel de los diferentes circuitos motivacionales, Individuales y Grupales.

g. El nivel de atención necesario
h. L grado de competitividad
i. El sentido de la cooperación con los compañeros.
j. La capacidad de síntesis
k. El rendimiento

O también, nos capacita para:

4- Detectar un alumno con talento
5- Detectar la influencia del sistema educativo en la formación matemática de los alumnos en general y de los alumnos “Altamente Talentosos” en particular.
6- Minimizar el posible impacto negativo que pudiera ejercer el sistema educativo sobre la formación académica de un alumno con talento.
7- Detectar la influencia del sistema educativo sobre el modo de razonar de los alumnos en general y de los alumnos “Altamente Talentoso” en particular.
8- Minimizar el posible impacto negativo que pudiera ejercer el sistema educativo sobre el modo de razonar de un alumno con talento.

Elementos de mejora en general de la “Tarea Educativa” de los docentes. El otro gran problema que se presenta es el de evaluación. La gran complicación que se presenta es la correcta evaluación de las respuestas producidas en la aplicación del método de van Hiele. ¿Cómo evaluar la respuestas de la forma más precisa posible?

Muchas veces la realización de una entrevista posterior puede resultar interesante para fijar claramente el nivel de razonamiento. Hay que tener en cuenta que:

1-El nivel de razonamiento de los alumnos depende del área de las Matemáticas que se trate.

2. Se debe evaluar cómo los alumnos contestan y el por qué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.

3. En las preguntas no está el nivel de los alumnos/as sino que está en sus respuestas.

4. En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en nivel distinto.

5. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

Estas son las dificultades reales a la hora de evaluar. Pero, no impiden que sea utilizado el modelo de forma eficiente.

7.3-Aportaciones e implicaciones de esta investigación.

Esta investigación pretende facilitar un conocimiento más profundo de las competencias clasificatorias de los alumnos de Alto Rendimiento así como de las diferentes influencias que pueden ejercerse sobre su aprendizaje. Hemos elegido el Modelo de Van Hiele para poder realizar la investigación ya que nos parecía la fórmula más adecuada a las preocupaciones que originaron el trabajo y lo que mejor se adaptaba al marco definitorio. Hemos podido comprobar que las preocupaciones apuntan también en el mismo sentido. Los resultados del informe PISA 2003 en el que se analizaba como competencia principal la “Competencia Matemática” de los alumnos de 14-15 años de los países de la OCDE, proporcionan unos resultados muy interesantes que incitan a buscar una cierta “excelencia” en la calidad de razonamiento de nuestros alumnos, modificando las estrategias de enseñanza, influenciando las fases de aprendizaje de nuestros alumnos, velando por una “calidad de enseñanza” mejor enfocando así los esfuerzos de mejora de la calidad de razonamiento de los alumnos de secundaria en general. La descripción que hizo el Informe PISA, en 2003, recogía los puntos siguientes:

En el nivel 6 de competencias, se supone que el alumno puede conceptualizar, generalizar, utilizar la información que procede de sus propias investigaciones, y puede modelizar situaciones complejas. Es capaz de asociar informaciones de fuentes y de representaciones diversas y relacionarlas unas con otras. Puede hacer razonamientos matemáticos de nivel alto, muy elaborados y puede aplicarlos, conjuntamente con operaciones matemáticas formales y simbólicas de nivel adelantado, para desarrollar nuevas estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con precisión sus acciones y reflexiones sobre sus resultados, interpretaciones, argumentaciones, y pueden justificar porque se adecuan a las situaciones iniciales.

En el Nivel 5 el alumno puede desarrollar y trabajar con modelos adecuados a situaciones complejas, identificando limitaciones y especificando suposiciones. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas y aplicarlas a problemas complejos relacionados con estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica utilizando habilidades de razonamiento y pensamiento amplias y complejas, representaciones asociadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales y pueden profundizar en estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus formulaciones y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

En el nivel 4 , el alumno puede trabajar de manera efectiva con modelos explícitos adecuados a situaciones concretas complejas que puedan implicar limitaciones o requieran hacer suposiciones. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluso simbólicas asociándolas directamente a aspectos de situaciones reales. Pueden utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar de manera flexible, con un cierto nivel de profundización en estos contextos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

En el nivel 3 el alumno puede ejecutar procedimientos descritos de manera clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillas. Pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y hacer razonamientos de manera directa. Son capaces de desarrollar comunicaciones cortas que informan sobre sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

En el nivel 2, el alumno puede interpretar y reconocer situaciones en contextos que no requieran más que inferencia directa. Pueden conseguir información de una sola fuente y utilizar un solo tipo de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones de nivel básico. Pueden llevar a término razonamientos directas e interpretaciones literales de resultados.

En el nivel 1, el alumno puede responder preguntas que hacen referencia a contextos familiares la información relevante de los cuales está presentada de forma explícita y las preguntas están definidas de manera clara. Pueden identificar información y llevar a cabo procesos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a término acciones obvias y responder de manera inmediata a los estímulos recibidos.

El informe constataba la existencia de unos resultados y puede permitir reforzar nuestra investigación en el sentido de buscar una cierta "excelencia" en la calidad de razonamiento de nuestros alumnos, modificando las estrategias de enseñanza, influenciando las fases de aprendizaje de nuestros alumnos, velando por una "calidad de enseñanza" mejor. Este planteamiento ha de poder tener una influencia para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, a corto y a largo plazo.

7.3-1. Orientaciones Metodológicas

Este trabajo de investigación, enfocado hacia el estudio de la calidad del Razonamiento Matemático de Alumnos de Alto Rendimiento Académico, puede ofrecer a los profesionales de la docencia, a los docentes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria sobretodo, unas nuevas orientaciones metodológicas para tratar de mejorar el aprendizaje matemático de sus alumnos con "intervenciones pedagógicas intracurriculares". Está claro además que ha de facilitar la mejora de los parámetros instruccionales, e, interviniendo también en el binomio Enseñanza-Aprendizaje" de las matemáticas, ha de suponer también una mejora en el rendimiento global del proceso evaluativo. Asimismo, esta investigación, a pesar de estar orientada hacia la investigación de los procesos de razonamiento matemático del alumno de la educación secundaria con un alto nivel de éxito académico, no tiene porque no poderse generalizar a los demás casos de alumnos con rendimiento menos o con dificultades de aprendizaje.

Los resultados obtenidos permiten también pensar que, utilizando el modelo de Van Hiele en la enseñanza de las matemáticas, se puede establecer una forma de tratamiento diferenciado, dentro de un funcionamiento grupal, para alumnos con capacidades diversas.

Queda abierto todo un campo de investigación, en el aula, sobre el tipo de razonamiento matemático y sobre el nivel de razonamiento en el que operan los alumnos.

7.4- Adecuación de los resultados

Los resultados obtenidos se adecuan a los esperados. Nos proporcionan una base más fiable a tener en cuenta a la hora de diseñar estrategias de evaluación o de aprendizaje. La poca o nula influencia de la edad biológica o de los tipos de enseñanza le confieren además una "generalizabilidad" muy interesante para el profesional de la educación.

Los resultados que hemos obtenido se ajustan a los resultados esperables y cuadran con lo previsto. Ha valido la pena realizar este trabajo por lo ha permitido y por el campo que abre y que incita a explorar, el del razonamiento matemático de los alumnos de alto nivel de éxito académico.

CAPÍTULO VIII

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Si l'on désire, comme le besoin s'en fait de plus en plus sentir, former des individus capables d'invention et de faire progresser la société de demain, il est clair qu'une éducation de la découverte du vrai est supérieure à une éducation ne consistant qu'à dresser les sujets à vouloir para volontés toutes faites et à savoir par vérités simplement acceptées.
Piaget

Referencias Bibliográficas

- AA.VV, (1984). *Pensar la matemática*. Tusquets editores, Barcelona
- AAVV, (1993). *Annales de didactique et de sciences cognitives* , Vol.5 IREM de Strasbourg
- Adler, L.R. (1990). *A comparative analysis of mathematics and science instruction* (Mathematics Instruction). Boston University Edition, Boston.
- Albert. R.S. & Runco, M.A. (1986). *The achievement of eminence: a model based on a longitudinal study of exceptionally gifted boys and their families,* pp. 332-357; en R.J. Sternberg & J.E. Davidson (Eds.) *Conceptions of giftedness*. Cambridge University Press. Cambridge, MA.
- Allen Paulos , J. (1990). *El hombre anumérico* . Tusquets Editores, Barcelona.
- Allen Paulos , J. (1996). *Un matemático lee el periódico*. Editorial Tusquets. Barcelona.
- Alonso Tapia, J. (1991). *Motivación y aprendizaje en el aula.* Santillana, Madrid
- Alonso Tapia, J. et al. (1987). *Enseñar a pensar: Perspectivas para la educación compensatoria*. Ediciones Cide, Madrid
- Alonso, C.M. et al. (1994).*Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora.* Ediciones Mensajero, Bilbao.
- Andrés Pueyo, A. (1993). *La inteligencia como fenómeno natural*. Ed. Promolibro.Valencia.
- Andrés Pueyo, A. (1996). *Inteligencia y cognición*. Ed. Paidós. Barcelona.
- Arbid, M. (1976). *Cerebros, máquinas y matemáticas*. Ed. Alianza Universidad. Madrid.
- Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Ed. Trillas. México.
- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva.* Ed. Paidós. Barcelona.
- Balbuena, L.; De la Coba, D. (1992). *La matemática recreativa vista por los alumnos*. Ed. Proyecto Sur. Granada.
- Bandura, A. (1987). *Pensamiento y acción.* Ed. Martínez Roca, Barcelona.
- Beltrán, J. (1993). *Intervención psicopedagógica.* Ed. Pirámide, Madrid.

- Beltrán, J. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje.* Ed. Síntesis, Madrid.
- Benito, Y. (Coord.) *Desarrollo y educación de los niños superdotados*. Amarú Editores. Salamanca
- Betancourt,M.J. (2005). *Atmósferas creativas: rompiendo candados mentales.* Ed. Manual Moderno, Mexico.
- Bloom B. (1985). *Developing Talent in Young People* . Ballantine Books, New York.
- Bobango, J. C. (1987). *Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing*. The effect of phase-based instruction. The Pennsylvania State University.
- Boden, M. (1994). *La mente creativa*. Mitos y mecanismos. Ed. Gedisa. Barcelona
- Borel E , (1952) *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Paris,
- Borkowski, J.G. y Peck, V.A. (1986). *Causes and consequences of metamemory in gifted children*. En Sternberg, R. y Davidson, J.E. (Eds.). Conceptions of giftedness. Cambridge: Cambridge University Press.
- Boutot A, (1993) *L'Invention des formes*, Paris, Odile Jacob,
- Brandsford, J.D., Stein, B.S. (1986). *Solución IDEAL de problemas.* Barcelona Labor.
- Brousseau,G. (1986) : *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2, 33-115.
- Bruner, J.S. (1978). *El proceso mental en el aprendizaje.* Ed. Nancea, Madrid.
- Bruter, C. P. (1973) *Sur la nature des mathématiques*, Paris,
- Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986). *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry*, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17, pp. 3 1-48.
- Burón, J. (1993). *Enseñar a aprender. Introducción a la metacognición*. Editorial Mensajero, Bilbao.
- Calero, D. (1995). *Modificación de la inteligencia.* Ed. Pirámide, Madrid.
- Campione, J.C. et Gauthier-Villars, (1987). *Retraso mental e inteligencia*. En R. Sternberg Inteligencia humana II. Cognición, personalidad e inteligencia. Ed Paidós. Barcelona
- Carey, S. (1985b). *Conceptual change in childhood.* MIT Press. Cambridge

- Carey, S. (1990). *Cognitive development*. En D.N. Osherson y E.E. Smith (Eds.). Thinking (Vol. 3). Cambridge: The MIT Press.
- Carroll L. (1982) *El juego de la lógica* . Ed Alianza . Madrid.
- Carroll, J.B. (1987). *La medición de la inteligencia*. En R. Sternberg Inteligencia humana I, Ed. Paidós. Barcelona
- Carroll, J.B. (1993). *Human cognitive abilities*. Cambridge University Press.
- Carroll, J.B. (1997). *Psychometrics, intelligence, and public perception. Intelligence*, 24, 1, 25-52.
- Case, R. (1974). *Structures: some functional limitations on the course of cognitive growth*. Cognitive Psychology, 5, 544-573.
- Case, R. (1989). *El desarrollo intelectual*. Ed Paidós. Barcelona.
- Castanedo, C. (1997). *Alumnos superdotados. En C. Castanedo (Ed.). Bases psicopedagógicas de la educación Especial*. CCS, Madrid.
- Castelló, A; Gotzens, C. y Monereo, C. (1989). *L`alumne superdotat*. Generalitat de Catalunya. Barcelona
- Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje,* Paidós, Barcelona
- Chevallard, Y. (1982). *« Sur l'ingénierie didactique ». Texte préparé pour la deuxième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. Orleáns, Juillet 1982.
- Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné, La pensée Sauvage: Grenoble.
- Chevallard, Y. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/2, 221-266.
- Chevallard, Y. (2002) *Organiser l'étude. 3. Ecologie & regulation, Actes de la XIème* École d'Été de Didactique des Mathématiques. Août 2001 (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas*. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori. Barcelona
- Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992) *Geometry and spatialreasoning*, en D.A. Grouws (1992) *Handbook of research on mathematics teaching* (N.C.T.M.: Reston, USA), pp. 420-464.
- Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1988). *Curriculum and teacher development: psychological and anthropological perspective*. En Fennema, E.; Carpenter, T.;

Lamon, S. Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics, pp. 92-130. Madison. Wisconsin Center for Educational Research.

- Cohen, R. (1983). *En defensa del aprendizaje precoz.* Nueva Paideia, Barcelona.
- Cohn, J. (1994) *Histoire de l'infini dans la pensée occidentale jusqu'à Kant,* Editions du Cerf, París.
- Coll, C. & Onrubia J. (1994). *Temporal dimension and interactive processes in teaching/learning activities: a theoretical and methodological challenge. En Mercer N. & Coll C. Explorations in socio-cultural studies, v. 3. Teaching learning and interaction.* Fundación Infancia y Aprendizaje, Madrid.
- Coll, C. (2000) *La teoría genética y los procesos de construcción del conocimiento en el aula,* En S. Aznar y E. Serrat (Corrd.), Piaget y Vigotski ante el siglo XXI: Referentes de actualidad, pp. 43-68, Ed. Horsori : Barcelona.
- Coll, C. (2001). *Constructivismo y Educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje.* En Coll, C., Palacios, I., Marchesi, A. Desarrollo psicológico y educación, vol. 2. Psicología de la educación escolar. Madrid: Alianza.
- Coll, C. y Onrubia J. (1993). *El análisis del discurso y la construcción de significados compartidos en el aula.* Revista Latina de Pensamiento y Lenguaje 1(2): 241-259.
- Collette, J.P. (1973-79) *Histoire des mathématiques*, 2 vol., Paris-Monréal, Vuibert-ERPI.
- Collis, K.F., Romberg, T.A. Jurdak, M.E. (1986) *A technique for assessing mathematical problem-solving ability, Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 no 3, pp. 206-221.
- Colomina, R., Mayordomo, R. y Onrubia, J. (2001). *El análisis de la actividad discursiva en la interacción educativa. Algunas opciones teóricas y metodológicas*. Infancia y aprendizaje, 93: 67-80.
- Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera M. (2001). *Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula.* En Coll, C., Palacios I. y Marchesi, A. Desarrollo psicológico y educación, vol. 2. Psicología de la educación escolar. Alianza, Madrid.
- Cooney, T y Jones, D. (Eds), *Perspectives on Researsch on Effective Mathematics Teaching*. Reston, VA. NCTM.

- Corberán, R. Et al. (1994): *Diseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele* (C.I.D.E., MEC, Madrid).
- Corberán, R. Y otros. *Traducción de trabajo al español de la tesis doctoral realizada para el proyecto de investigación "Diseño y evaluación de una propuesta cumcular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media"* basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele",
- Coriat Aarón, R. (1990) *Los niños superdotados*. Herder. Barcelona
- Corral, A., Gutiérrez, F. y Herranz, Mª.P. (1997). *Psicología Evolutiva* I. Ed. Uned. Madrid.
- Cox, M. C. (1957). *Niños superdotados*. En Carmichael. Manual de psicología infantil. El Ateneo. Buenos Aires.
- Crowley, M.L. (1987) *The van Hiele model of the development of geometric thought,* en N.C.T.M. (1987) *Learning and teaching geometry,* K-12 (1987 Yearbook) (N.C.T.M.: Reston, USA), pp. 1-16.
- Csikszentmihalyi, M & Robinson, R.e., (1986). *Culture, time and the development of talent,* pp. 264-284; en R.J. Sternberg & J.E. Davidson (Eds.) *Conceptions of giftedness*. Cambridge University Press, Cambridge, MA.
- *Currículum oficial ESO*. Generalitat de Catalunya. Decret 143/2007.
- Damm ,R. et M.-A. Egret (avril 93)- *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte, in :* Activités mathématiques "n° 20
- Damm, W. - C. Dupuis et F. Pluvinage (déc 1991) *Le choix de la donnée de référence dans un énoncé de problèmes* - in : Activités mathématiques n° 13.
- Detterman, D.K. (1992). *La inteligencia humana es un sistema complejo de procesos distintos*. En R. Sternberg y D.K. Detterman (Coords.) ¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición. Pirámide, Madrid.
- Dewey, J. (1989): *Cómo pensamos.* Paidós, Barcelona.
- Dhombres, J. (1987) *Mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars,
- Dou , A. (1974) *Fundamentos de la matemática* .Editorial Labor . Barcelona
- Dugac, P., Dedekind, R. (1976) *Et les fondements des mathématiques*. Vrin, Paris.
- Edwards D. y Mercer N. (1987). *El conocimiento compartido.* Paidós, Barcelona.

- Elosua. M.R. y García, E. (1993). *Estrategias para enseñar a aprender y a pensar*. Narcea de Ediciones, Madrid.
- Erikson, E. (1968). *Identity: youth and crisis*. W. W. Norton, New Yok.
- Erikson, E. (1982). *The life cycle completed*. W. W. Norton, Nueva York.
- Ernest, P. (1992*). The Nature of Mathematicas: Towards a Social Constructivist Account. Science and Education.* Klawer Academic Publishers. Neatherlands.
- Ertmer, P. and Newby, T. (1993). *Conductismo, cognitivismo y constructivismo*: Una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. Performance Improvement Quarterly, 6(4), 50-72.
- Feldhusen, J.F. (1992). *Talent identification and development in education* (TIDE). Center for Creative Learning. Sarasota, FL.
- Feuerstein, R. (1988). *PEI Instrumentos.* Editorial Bruño, Madrid.
- Feuerstein, R. (1989). *Programa de enriquecimiento instrumental.* Bruño, Madrid
- Feuerstein, R.; Rand, Y.; Hoffman, M.B.; y Miller, R. (1980). *Instrumental Enrichment*. University Park Press. Baltimore.
- Feuerstein. R. (1993). *Evaluación dinámica del potencial de aprendizaje.* Bruño, Madrid.
- Feuerstein. R. (1993). *La teoría de la modificabilidad estructural cognitiva: un modelo evaluación y entrenamiento de los procesos de la inteligencia*. En Beltrán y otros Intervención psicopedagógica. Pirámide. 39-48. Madrid.
- Fey, J.T. (1980). *Mathematics education research on curriculum and instruction.* En: R.J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. N.C.T.M. Reston, VA.
- Fischer , J.- P. (1993) *La résolution des problèmes arithmétiques verbaux* : Propositions pour un enseignement pro-actif . Annales de didactique et de sciences cognitives , Vol.5 , IREM de Strasbourg .
- Fletcher, T.J. (1974) *Didáctica de la matemática moderna en la enseñanza media* . Editorial Teide Barcelona
- Fortes, Mª.C. y Latorre, A. (2000). *El desarrollo de los niños superdotados*.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational* Task. Dordrecht. Reidel.

- Friedelmeyer , J. P. : *Recherche inconnue désespérement*, in : Histoire de problèmes, histoire de mathématiques, publ. Commission inter-IREM "Epistémologie et histoire des mathématiques", éd. Ellipses, pp. 299-327
- Fuys, D. (1985). *Van Hiele levels of thinking Geometry*. Education and Urban Society; 17 (4), pp. 447-462.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Reston, VA.
- Fuys, D., Geddes, D., Tischler, R. (1984). *An investigation of the Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Final report of the investigation of The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents Project. New York. Brooklyn College, School of Education.
- Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988) *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monog-rap.h no 3). (N.C.T.M.: Reston, USA).
- Fuys, D.;Geddes, D.; Tischler, R. (1984) *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (School of Education, Brooklyn College, City Univ. of N. York: Brooklyn, N. York, EE.UU.).
- Gagné, F. (1991). *Toward a differentiated model of giftedness and talent*. En N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.) Handbook of gifted education. Boston: Allyn and Bacon
- Gagné, F. (1993). *Construct and models pertaning to exceptional human abilities*. En K. A. Heller, F. Mönks y A.H. Passow (Eds.) International handbook of research and development of giftedness and talent. Pergamon Press.
- García Hoz, V. *Sacar lo mejor de cada uno*: la excelencia personal.
- García Yagüe, J. y otros (1986). *El niño bien dotado y sus problemas*. Perspectivas de una investigación española en el primer ciclo de E.G.B. Madrid: Cepe.
- García, E. (1994). *Enseñar y aprender a pensar.* Editorial La Torre , Madrid.
- Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples*. La teoría en la práctica. Ed. Paidós. Barcelona.
- Glaeser G. *Aspects gestaltistes de la résolution des problèmes* - in : colloque international sur l'enseignement de la géométrie - Mons 31 août - 2 sept. 1982, p. 241-254

- Glaeser, G. (1980) *L'importance de l'oeuvre de Piaget* . Bulletin de L'APMEP (n° 326,
- Goleman, D. (1996): "*La Inteligencia Emocional.* Por qué es más importante que el Cociente Intelectual". Ed. Javier Vergara; Buenos Aires.
- Goleman, D. (1997) *"La práctica de la Inteligencia Emocional"*. Ed. Kairós, Barcelona.
- Gómez Chacón , I. (1992) *Los juegos de estrategia en el curriculum de matemáticas*. Narcea . Madrid
- Gomez, P.; Lupiáñez J.L. (2007), *Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria,* PNA, 1, (2), 79-98.
- Goutard , M. (1963) *Les mathématiques et les enfants* . Editions Delachaux & Niestlé . Neuchâtel
- Grows, D. *Metacognition and sense making in mathematics*. Ed. Handbook of research
- Guillén (1996, 1997) *Elaboración de unidades para la enseñanza de poliedros.*
- Gutiérrez, A,; Jaime, A. (1987) *Estudio de las caractensticas de los niveles de van Hiele,* en *Proceedings of the 11th InternationalConference of the RM.E.* vol. 3, pp. 131-137.
- Gutiérrez, A,; Jaime. A,; Fortuny, J.M. (1991) *An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 no 3, pp. 237-25- 1.
- Guzmán (De) M. (1976) *Mirar y ver* . Editorial Alhambra
- Guzmán (De), M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona. Labor.
- Guzman, M. (1983). *Sobre la educación matemática*. Revista de Occidente, 26, pp. 37-48.
- Henández, P. Y García, L.A. (1997). *Enseñar apensar. Un reto para profesores.* Tafor ediciones, Santa Cruz de Tenerife.
- HersNcowitz, R. (1990) *Psychological aspects of learning geometry*, en P. Nesher; J. Kilpatrick (1990) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Cambridge U.P.: Cambridge,G.B.), pp. 70-95.
- Huerta, M.P. (1997). *Los niveles de Van Hiele en relación con la taxonomía.* SOLO y los mapas conceptuales. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

- Hume, M. (2000). *Los alumnos intelectualmente bien dotados*. Ed. Edebé. Barcelona
- Hume, M. y Sánchez, Mª.T. (2004). *Adolescentes intelectualmente bien dotados*. Una investigación en la provincia de Toledo. Docencia e Investigación: Publicaciones de la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universidad de Castilla – La Mancha, 111-166.
- Inhelder, B. et al. (1975). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento.* Ed. Morata, Madrid.
- JAEM, (1984) *Informes de las IV jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas.* Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas . Tenerife.
- Jaime y Gutiérrez (1996) *Conjunto de unidades para la enseñanza de isometrías (*desde primaria hasta la Universidad, hasta el nivel 4)
- Jaime, A, Gutiérrez, A. (1990) *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría:* El modelo de Van Hiele, en Diseño y Evaluación de una propuesta curricular
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele.* La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Universidad de Valencia.
- Jaime, A. (1994). *La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele,* UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, Vol. 1, pp. 85-94
- Jaime, A., Gutierrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría.* El Modelo de van Hiele. En Llinares, S.; Sánchez, M. V. Teoría y Práctica de educación matemática, pp. 295- 384. Sevilla. Alfar.
- Jensen, A.R. (1998). *The g Factor*. Praeger Publishers, Nueva York..
- Jung, C.G. (1968). *Man and his symbols*. Doubleday Press, Nueva York.
- Kamin, L. (1983). *Ciencia y política del cociente intelectual*. Ed. Siglo XXI. Madrid
- Keating D.P.(editor) (1976), *Intellectual Talent: Research and Development* (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.
- Kilpatrick, J. (1987). *What constructivism might be in mathematics education*. en Bergeron, J.C., Herscovics, N. Y Kieran, C. (Eds.). Proceeding of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1. (pp. 3-27). Montreal: Université de Montréal.

- Kline , M. (1981) *El fracaso de la matemática moderna* . Siglo XXI de España Editores . Madrid
- Kolb, D.A. (1984) *Experiential Learning*. Prentice-Hall.
- Krulik, S. y Rudnick, K. (1980). *Problem solving in school mathematics.* National council of teachers of mathematics. Year Book. Virginia: Reston.
- Kuntzmann, J. (1976) *Evolution et étude critique des enseignements de mathématique*. Editions CEDIC . Paris.
- Lakatos , I. (1984) *Preuves et réfutations* . Hermann Editeurs. Paris
- Land, J. (1991), *Appropriateness of the Van Hiele model for describing student's cognitive processes on algebra tasks as typified by collage student'slearning of functions.* Tesis doctoral, University of Boston.
- Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar de ciencia.* Paidós, Barcelona.
- Llinares,S., Sánchez, M.V. (1990) *Teoría y práctica en educación matemática* Ediciones Alfar. Sevilla.
- Llorens, J.L., Pérez Carreras, P. (1997) *An extensión of Van Hiel's model to the study of Local Aproximation,* Intl. J. Math. Educ. Sci. Technol. 28, Nº 5, 713-726.
- Lombardo Radice , L.(1983) *La matemática de Pitágoras a Newton* . Editorial Laia . Barcelona.
- Lovett, J. (1983) *An interpretative description of the van Hiele model of thinking in geometry* (paper presented at the Psychology of Mathematics Education Workshop). (Shell Centre & Chelsea College: Londres, G.B.).
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008), *Análisis didáctico y formación inicial de profesores*: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. PNA, 3(1), 35-48.
- Lupiáñez, J. L.; Rico, L. (2006), *Análisis didáctico y formación inicial de profesores*: organización de competencias y capacidades de los escolares en el caso de los números decimales, Indivisa: Boletín de estudios e investigación,4, pp. 47-58.
- Marchesi y otros. (1994) *Desarrollo psicológico y educación*, III. Ad. Alianza. Madrid.
- Marina. J.A. (1993). *Teoría de la inteligencia creadora*. Ed. Anagrama. Barcelona
- Maslow, A. (1994). *La personalidad creadora*. Ed. Kairós. 5ª ed. Barcelona

- Maslow, A. (1995). *El hombre autorrealizado*. Hacia una psicología del ser. Ed. Kairós. 11ª ed. Barcelona
- Mason , J., Burton , L., Stacey, K.,. (1988) *Pensar matemáticamente* . Ed. Labor, Barcelona.
- Mason, J. y otros. (1989). *Pensar matemáticamente.* Madrid. Labor-MEC.
- Mataix, M. (1981) *El discreto encanto de las matemáticas* . Ed. Marcombo Barcelona.
- Mayberry, J. (1983) T*he van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre-service teachers, Journal for Research in Mathematics Education* vol. 14, pp. 58-69.
- Mayberry, J. W. (1983). *The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers*. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58-69.
- Mayberry, JW. (1981). *An investigation in the Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate*
- Mayer , R. (1986) *Pensamiento , resolución de problemas y cognición* . Edi.Paidós . Barcelona
- Mayor, J. (1989) *Manual de Educación especial*. Ed. Anaya. Madrid
- Mercer, N. (1995). *La construcción guiada del conocimiento*. Paidós, Barcelona.
- Mercer, N., *Palabras y mentes, Paidós*, Madrid, 2001.
- Mercer, N., La construcción guiada del conocimiento, Paidós, Madrid, 1997.
- Mialaret , G. (1986) *Las matemáticas : cómo se aprenden , cómo se enseñan*. Ed.Visor . Madrid.
- Ministerio de Educación y Cultura (2000). Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC.
- Mönks, F. y Ferguson, T.J. Gifted (1983) *An análisis of their psychosocial development.* Journal of Youth and Adolescence, 12, 1-18.
- Monks, F. , Mason, E.. (2000). *Developmental Psychology and giftedness: Theories and research.* En Heller, K.A., Monks, F.J., Stemberg, R.J., Subotnik, R. F. *International handbook of giftedness and talent.* Pergamon, Nueva York.
- Mönks, F. y Van Boxtel, H.W. (1988). *Los adolescentes superdotados*: una perspectiva evolutiva. En J. Freeman (Dir.) Los niños superdotados. Aspectos psicológicos y pedagógicos. Ed. Santillana. Madrid.

- National Council of Teachaers of Mathematics (NTCM) (1970). *Sugerencias para resolver problemas* . Ed. Trillas . México
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Navarro, M. (2002) *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educaivo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia,
- Nelson, J. B. & Cleland, D. L. (1981). *The Role of the Teacher of Gifted and Creative Children*. In W.B. Barbe & J. S. Renzulli (Eds.), *Psychology and Education of the Gifted.* Chicago: Irvington Press.
- Nickerson, R., Perkins, D. , Smith , E. (1987*) Enseñar a pensar* . Ed. Paidós - M.E.C.. Barcelona.
- Niss, M. (1999), *Competencies and Subject Description*, Uddanneise, 9, pp. 21-29.
- Niss, M. (2002), *Mathematical competencies and the learning of mathematics*: The danish kom project (Proyecto KOM. The national academies: The nacional academies).
- Novak, J. D. (1988). *Teoría y práctica de la educación*. Ed. Alianza Universidad.
- Pérez, L. (1993). (Dir.) *10 palabras clave en superdotados*. Estella: Verbo Divino.
- Pérez, L., Domínguez, P, y Díaz, O. (1998). *El desarrollo de los más capaces*: Guía para educadores. Ministerio de Educación y Cultura. Madrid
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1978). *Psicología del niño.* Ed. Morata, Madrid.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of numbe*r. New York. Norton.
- Piaget, J. (1969). *Psychologie et pédagogie.* Denoël. Paris
- PIAGET, J. (1970). *La epistemología genética.* Redondo, Barcelona.
- Piaget, J. (1972). *Intellectual evolution from adolescence to adulthood*. Human Development, 15, pp. 1-12.
- Piaget, J. (1981): *La formación del símbolo en el niño.* Ed. Morata, Madrid.

- PISA 200, 2003, 2006
  - PISA 2000: Conocimientos y Aptitudes para la vida
  - PISA 2003: Aprender para el mundo de mañana
  - PISA 2006: Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura
- Pluvinage , F. (1972) *Exercices de mathématiques* . Bulletin de L'APMEP (n° 284)
- Pluvinage, F. (1974) *Acquisitions des structures numériques en fin de 3e* - in : E.S.M., vol. 5
- Pluvinage, F. (1975) *Notion de variable* - in : Bulletin Inter-IREM publié par l'IREM de Lyon.
- Pluvinage, F. (1980) *Données et codages* - in : Analyse des données, Tome 1 - Publication de l'APMEP n° 28
- Pluvinage, F. (1986) *Cahier des charges de situations problèmes* - in : Math. et pédagogie n° 59 p. 63-73
- Pluvinage, F. (1993) *Didactique de la résolution de problèmes*, in : Petit x n° 32 pp. 5-24
- Polya, G., (1966), *Matemáticas y razonamiento plausible.* 2 vol. Tecnos: Madrid.
- Polya, G., (1965), *Cómo plantear y resolver problemas.* Ed. Trillas, México.
- Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Ed. Morata. Madrid.
- Prieto, M.D. y Sterberg, R.J. (1991). *Teoría triárquica de la inteligencia: un modelo que ayuda a entender la naturaleza del retraso mental*. Revista Interuniversitaria de Formación de Profesorado. 11; 77- 93.
- Prieto, Mª D. (1988) *Manual de evaluación dinámica del potencial de aprendizaje*. Universidad de Murcia: ICE.
- Puig, L. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid. Síntesis.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada. Comares.
- Rayo Lombardo, J. (1997) *Necesidades educativas del superdotado*. Ed. EOS Madrid.
- Renzulli, J. (1978). *What makes giftedness?* Re-examining a definition. Phi Delta Kappan, 60, 180-184, 261.

- Renzulli, J. S. (1994). *El concepto de los tres anillos de la superdotación: un modelo de desarrollo para una productividad creativa*. En Y. Benito (Coord.). *Intervención e investigación psicoeducativas en alumnos superdotados* (pp.41−78). Salamanca: Amarú.
- Renzulli, J., Reis, S. y Smith, L. (1981). *The revolving door identification model.* Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.
- Reyero, M. y Tourón, J. (2003). (Coords.). *El desarrollo del talento. La aceleración como estrategia educativa*. Ed. Netbiblo. La Coruña
- Rogoff, B. (1993). *Aprendices del pensamiento: El desarrollo cognitivo en el contexto social* . Editorial Paidós-MEC, Barcelona.
- Rosich, N. (1995). *Los niveles de pensamiento geométrico y la resolución de problemas con alumnos sordos y oyentes: implicaciones pedagógicas. Tesis Doctoral.* Universidad de Barcelona. Barcelona
- Ruiz, C. (1989). *Investigación y evaluación en el área de la modificabilidad cognitiva.* Revista de Investigación y Posgrado, 4 (3), 42-46.
- Ruiz, C. y Otaiza, A. (1987). *Efectos del programa de Enriquecimiento Instrumental sobre la inteligencia no verbal en sujetos de diferentes etapas de desarrollo cognitivo*. Revista de Investigación Educacional. Instituto Universitario Pedagógico de Caracas, 14, 67-83.
- Sánchez Prieto, Mª D. (1997) *Indentificación, Evaluación y atención a la diversidad del superdotado.* Ed. Aljibe. Málaga
- Santos Trigos, L. M. (1997). *La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada*, en Estudios en Didáctica. Grupo Editorial Iberoamericano, México. P. 281-288.
- Scarr, S. (1992). *Inteligencia: una revisión.* En R. Sternberg y D. K. Detterman (Coords.) ¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición. Ed. Pirámide. Madrid
- Scheifele, M. (1964). *El niño sobredotado en la escuela común*. Ed. Paidós. Buenos Aires
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992) *Learning to think mathematically*: Problem Solving,
- Schoenfeld, A., H. (1998). *Reflections on a course in mathematical problem solving.* Research in Collegiate Mathematics Education III., pp. 81-113.

- Schoenfeld, A.H. (1985) *Mathematical Problem Solving,* Academic Press: New York.
- Scott, P. (1989) *Introducción a la investigación y evaluación educativa.* (U.A.C.P. y P.C.C.U.; Univ. Nacional Autónoma: México).
- Secadas, F. (1994) *Revista de Altas Capacidades* nº 1 FAISCA. Superdotación y creatividad.
- Segarra , L.(1987) *Encercle el cercle* . Editorial Graó . Barcelona
- Silverman, L. (1992). *El desarrollo emocional de los superdotados a través del ciclo vital.* En Benito, Y. (Coord.) Desarrollo y educación de los niños superdotados. Salamanca: Amarú, 165-173.
- Skemp , R. (1980) *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* .Ediciones Morata . Madrid
- Stanley, J.C y Brandt, R.S. (1981). *On mathematically talented youth:* A conversation with Julian Stanley. Educational Leadership, 39, 101-106.
- Stanley, J.C, Keating, D.P., Fox, L.H, (1974) *Mathematical Talent. Discovery, description and development* (The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore and London,
- Sternberg y Detterman (Coords.) *¿Qué es la inteligencia?* Enfoque actual de su naturaleza y definición. Ed. Pirámide. Madrid
- Sternberg, R,J. (1993). *La inteligencia práctica en las escuelas: teoría, programa y evaluación.* En Beltrán y otros (Eds). Intervención psicopedagógica. Madrid: Ediciones Pirámide 433-446
- Sternberg, R. (1990). *Más allá del cociente intelectual*. Ed. Desclée de Brouwer, Bilbao.
- Sternberg, R. (1994). *La sabiduría. Su naturaleza, orígenes y desarrollo*. Ed. Desclée de Brouwer, Bilbao
- Sternberg, R. y Berg, C. (1992). *Integración cuantitativa. Definiciones de inteligencia*: una comparación de los simposios de 1921 y de 1986. En R. Sternberg y D.K. Detterman (Coords.). ¿Qué es la inteligencia? Enfoque actual de su naturaleza y definición. Madrid: Pirámide.
- Sternberg, R. y Davidson, J. (1985). *Cognitive development in the gifted and talented.* En F. D. Horowitz y M. O`Brien (Eds.) The gifted and talented. Washington: APA.

- Sternberg, R. y Lubart (1997). *La creatividad en una cultura conformista*: un desafío a las masas. Barcelona: Paidós
- Sternberg, R. y Salter, W. (1987).. En R. Sternberg. Inteligencia humana I. *La naturaleza de la inteligencia y su medición*. Ed. Paidós. Barcelona.
- Sternberg, R.J. (1986). *Las capacidades humanas.* Labor, Barcelona.
- Sternberg, R.J. (1988): Inteligencia humana I, II, III, IV. Paidós, Barcelona.
- Sternberg, R.J. (1997) . *Inteligencia Exitosa.* Ed. Paidos. Barcelona.
- Sternberg, R.J. y Spear-Swerling, L. (1999) *Enseñar a pensar.* Santillana, Madrid.
- Tannembaum, A.J. (1986a). *The Enrichment Matrix Model*. En J.S. Renzulli Systems and Models for Developing Programs for the Gifted and Talented. Mansfield: Creative Learning Press.
- Tannembaum, A.J. (1986b). Giftedness: *A psychosocial approach*. En Sternberg, R. y Davidson, J.E. (Eds.) Conceptions of giftedness. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tannembaum, A.J. (1997). *The meaning and making of giftedness.* En N. Colangelo y A. Davis (Eds.) Handbook of Gifted Education. Boston: Allyn and Bacon.
- Tannenbaum, A.J. (1983). *Gifted children: Psychological and Educational Perspectives*. New York: Macmillan.
- Taylor, C.W. y Getzels, J.W. (1975). *Perspectives in creativity*. Chicago: Aldine.
- Terman, L. M y Oden, M.H. (1925). *Genetics Studies of Genius*. Vol. I. Mental and Physical Traits of a Thousand Gifted Children. Stanford: Stanford University Press.
- Thio de Pol, S. (1976) *Primos o algunos dislates sobre números* . Ed. Alhambra.
- Thurstone, L. y Thurstone, T.G. (1947). *Test de Habilidades Mentales Primarias*. Ed. Pedagógicas Latinoamericanas. Columbia.
- Tierno Jiménez , B. (1997) *Del fracaso al éxito escolar* . Plaza & Janes . Barcelona
- Torrance, E.P. y Myers, R.E. (1976). *La enseñanza creativa*. Ed. Santillana. Madrid

- Torre, J.C. (1994*). Aprender a pensar y pensar para aprender*. Narcea. Valdivieso, Madrid.
- Tourón, J., Peralta, F. y Repáraz, Ch. (1997). *La superdotación intelectual:* modelos, identificación y estrategias educativas. Ed. Eunsa. Pamplona
- Trebeschi , A. (1977) *Manual de historia del pensamiento científico* . Ed. Avance . Barcelona
- Trianes, Mª V., y Fernández, C. (2001). *Aprender a ser persona,y a convivir: un programa para Secundaria.* Bilbao: Desclée Boruwer.
- Usiskin, Z. (1982) *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (ERIC: Columbus, USA).
- Usiskin, Z. (1982). *Los niveles de Van Hiele y los logros en la geometría de la escuela secundaria (Informe del desarrollo cognitivo y el rendimiento en la escuela secundaria proyecto Igeometry)*. Departamento de educación. Chicago University of Chicago.
- Usiskin, Z. P. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education. (ERIC Reproduction Service No. ED 220 288).
- Van Hiele, P.M. (1957) *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometria)* (tesis doctoral). (Universidad de Utrecht: Utrecht,
- Van Hiele, P.M. (1986) *Structure and insight.* Academic Press:N. York, USA
- Vergnaud. G. (1990). *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10 (23): 133-170.
- Vygotski, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje.* La Pléyade. Buenos Aires
- Vygotski, L.S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Ed. Crítica. Barcelona
- Warusfel , A. (1961) *Les nombres et leurs mystères* . Ed. du Seuil . Paris
- Weber, J., Kubler (1984) *Une étude sur la transmission orale d'informations en mathématiques* - in : Petit x n° 6
- Wirszup, 1. (1976) *Breakthroughs in the psychology of learningand teaching geometry,* en J.L. Martin, D.A. Bradbard (1976) *Space and geometty* (ERIC: Columbus, USA), pp. 75-97.
- Wood, L.E.. (1988). *Estrategias de pensamiento.* Barcelona. Labor.

- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). *Sociomathematical norms, argumentations and autonomy in mathematics.* Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458-477.
- Yanes, J. (1998). *La formación del profesorado de secundaria*: *un espacio desolado*. Revista de Educación, 317, 65-80.
- Yoder, V. A. (1988*). Exploration of the interaction of the Van Hiele levels of thinking with Logo and Geometry understandings in preservice elementary teachers.* The Pennsylvania State University.
- Yuste, C. (1994): *Los programas de mejora de la inteligencia.* Cepe, Madrid.
- Zimmermann, B., (1987) *Mathematically gifted students. How to find them and foster them en Articles on Mathematics Education* (Erkki Pehkonen, editor) (Research Report 55, Department of Teacher Education-University of Helsinki, Helsinki.

ANEXOS

CONTENIDOS CURRICULARES PARA EL TERCER CURSO DE ESO EN CATALUÑA

Matemáticas: Contenidos Curriculares para el Tercer Curso de ESO

Currículum educació secundària obligatòria – Decret 143/2007

DOGC núm. 4915

Les matemàtiques són un instrument de coneixement i anàlisi de la realitat i al mateix temps constitueixen un conjunt de sabers d'un gran valor cultural, el coneixement dels quals ha d'ajudar a totes les persones a raonar, de manera crítica, sobre les diferents realitats i problemàtiques del món actual. Per això l'educació matemàtica en les etapes obligatòries ha de contribuir a formar ciutadans i ciutadanes que coneguin el món en què viuen i que siguin capaços de fonamentar els seus criteris i les seves decisions, així com adaptar-se als canvis, en els diferents àmbits de la seva vida. Així mateix, les matemàtiques possibiliten la creació de models simplificats del món real que permeten una interpretació acotada d'aquest i alhora generen problemes adequats al moment educatiu de l'alumne tot facilitant el seu esperit crític i despertant la seva creativitat.

D'acord amb l'anterior, el currículum de matemàtiques a l'educació secundària obligatòria pretén contribuir a la formació integral de l'alumnat. Les capacitats que potencia el currículum de matemàtiques han d'ajudar l'alumnat a: establir raonaments quantitatius sobre situacions de vida real i sobre el món que ens envolta; organitzar l'espai i el pla a base d'anomenar i establir relacions precises de comparació, semblança o equivalència entre els seus elements, i la seva identificació en el món real; modelitzar situacions de la vida real i vinculades a d'altres àrees del coneixement i traduir-les a models matemàtics, per tal de cercar solucions amb més facilitat i certesa; apreciar estructures i relacions abstractes.

Competència matemàtica

La competència matemàtica, una de les competències bàsiques que han d'assolir els alumnes en aquesta etapa, és necessària en la vida personal, social i escolar. Nombroses situacions quotidianes, i de les diverses matèries, requereixen l'ús de les matemàtiques per poder analitzar-les, interpretar-les i valorar-les. Aquesta competència té un caràcter transversal a totes les matèries, encara que és la matèria de matemàtiques la que s'ocupa especialment d'ella. Encara que els continguts que es proposen són els necessaris per a l'adquisició de la competència matemàtica, cal tenir en compte que aquesta difícilment s'adquireix si no s'orienta l'aprenentatge dels continguts de manera que es possibiliti la seva utilització fora de les classes de matemàtiques, tant en la vida diària dels alumnes com en totes les altres matèries.

Assolir la competència matemàtica implica:

1. Pensar matemàticament.
   a. Construir coneixements matemàtics a partir de situacions on tingui sentit, experimentar, intuir, formular, comprovar i modificar conjectures, relacionar conceptes i realitzar abstraccions
2. Raonar matemàticament.
   a. Realitzar inducions i deduccions, particularitzar i generalitzar, reconèixer conceptes matemàtics en situacions concretes; argumentar les decisions preses, així com l'elecció dels processos seguits i de les tècniques utilitzades.
3. Plantejar-se i resoldre problemes.
   a. Llegir i entendre l'enunciat, generar preguntes relacionades amb una situació-problema, plantejar i resoldre problemes anàlegs, planificar i desenvolupar estratègies de resolució,verificar la validesa de les solucions, cercar altres resolucions, canviar les condicions del problema, sintetitzar els resultats i mètodes emprats, i estendre el problema, recollint els resultats que poden ser útils en situacions posteriors.
4. Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic.
   a. - Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques (per comptar, operar, mesurar, situar-se a l'espai i organitzar i analitzar dades) i els instruments (calculadores i recursos TIC, de dibuix i de mesura) per a fer matemàtiques.
   b. - Interpretar i representar (a través de paraules, gràfics, símbols, nombres i materials) expressions, processos i resultats matemàtics.
   c. Comunicar als altres el treball i els descobriments realitzats, tant oralment com per escrit, utilitzant el llenguatge matemàtic.

La competència matemàtica s'ha d'adquirir a partir de contextos que tinguin sentit tant per a l'alumnat com per al coneixement matemàtic que és pretén desenvolupar. Aprendre amb significat és fonamental per capacitar l'alumnat en l'ús de tot el que aprèn i per capacitar-lo a continuar aprenent, de forma autònoma, al llarg de tota la vida. Per això, cal proporcionar en totes les classes de matemàtiques oportunitats per tal que l'alumnat aprengui a raonar matemàticament, proposant activitats d'aprenentatge on la resolució de problemes, entesa en un sentit ampli, esdevingui el nucli de l'ensenyament.

Contribució a l'adquisició de les competències bàsiques

Per tal de contribuir a l'assoliment de les diferents competències bàsiques l'ensenyament de les matemàtiques ha d'aconseguir que l'alumnat integri i utilitzi de manera funcional tots els aprenentatges que va adquirint, a partir dels seus coneixements previs, de l'experimentació, de la representació i comunicació i del contrast amb els altres.

La formació en matemàtiques, a més d'incidir en la competència matemàtica, contribueix a l'assoliment de totes les altres competències bàsiques de la manera que es detalla a continuació:

Competència en el *coneixement i interacció amb el món físic*. Les matemàtiques són un instrument d'anàlisi de la realitat, en particular del món físic; de fet, el raonament matemàtic promou una actitud davant del món. El desenvolupament de determinats àmbits com la mesura i la visualització, la interpretació i construcció de gràfics, així com de processos com el raonament matemàtic, l'argumentació i la resolució de problemes relacionats amb el món físic, contribueixen de manera directa a l'adquisició d'aquesta competència.

Competència en el *tractament de la informació i competència digital*. Molta de la informació que rebem conté elements matemàtics, nombres, formes, mesures i funcions, expressats de manera diversa, el coneixement dels quals és necessari. També els continguts del bloc estadística i atzar, així com la utilització d'ordinadors i calculadores, estan relacionats amb l'adquisició d'aquesta competència.

Competència en *autonomia i iniciativa personal*. Plantejar i resoldre questions i problemes matemàtics, i tots el processos associats a aquesta activitat (planificació, recerca d'estratègies, validació de solucions i contrast amb les dels altres) implica, entre altres coses, una presa constant de decisions, la pràctica de les quals incideix en la progressiva adquisició d'autonomia de l'alumnat i de confiança en les pròpies capacitats.

Competència per *aprendre a aprendre*. Per aprendre matemàtiques cal desenvolupar, entre d'altres, capacitats relacionades amb la presa de decisions i el sentit crític, la creativitat i la sistematització, l'esforç i la constància, la síntesi i la generalització. També la capacitat per relacionar fets i conceptes per tal de generar-ne de nous. Totes elles, juntament amb la reflexió sobre el propi treball i la capacitat per comunicar-lo, formen part d'aquesta competència bàsica per a l'aprenentatge al llarg de tota la vida.

Competència en *comunicació linguística*. Les matemàtiques contribueixen a aquesta competència aportant el coneixement d'un llenguatge específic, necessari en el desenvolupament de les ciències (i en general del coneixement) i en la resolució de molts problemes quotidians. També, en el treball matemàtic, l'ús de la llengua, tant oral com escrita, és fonamental per descriure conceptes i processos, expressar raonaments, argumentacions i proves, i en general, per a comunicar, discutir, comparar i validar el treball realitzat.

Competència en *expressió cultural i artística*. Les matemàtiques, més enllà de les seves aplicacions, constitueixen una creació humana d'un gran valor cultural que cal conèixer, valorar i relacionar amb la realitat actual. A més, al ser una ciència i un llenguatge construït històricament per les diferents cultures, atorga valor a la construcció de la identitat, tant de les cultures com de les persones. D'altra banda, i a un nivell més concret, hi ha una relació entre continguts de tipus geomètric i artístic, la connexió dels quals contribueix a aquesta competència.

Competència *social i ciutadana*. Cada persona és diferent i per això l'alumnat ha d'aprendre a reconèixer i controlar les conseqü .ncies de la seva pròpia actuació, així com respectar el procés d'aquelles amb les que comparteix el treball. El treball en grup, entès com un treball de cooperació, i l'acceptació de les idees dels companys i de les diferents estratègies emprades en la realització d'un càlcul, d'una mesura o en el procés de resolució d'un problema, són aspectes del procés d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques que contribueixen al desenvolupament d'aquesta competència.

Estructuració dels continguts

Els continguts de l'àrea de matemàtiques, que integren l'ús de les TIC i dels mitjans tecnològics, expressen els aspectes fonamentals pel que fa als conceptes i als processos matemàtics que s'han d'anar desenvolupant a mesura que es va progressant en l'aprenentatge i ús de la competència matemàtica. Així mateix cal desenvolupar en l'alumnat actituds positives envers el coneixement matemàtic, tenint en compte la seva dilatada història i la seva contribució a la cultura.

Coherentment amb aquests supòsits, el currículum de matemàtiques per a l'ESO s'ha desenvolupat en estreta relació amb el currículum de matemàtiques de l'educació primària. Els cincs blocs de continguts en què s'ha estructurat tenen continuïtat amb els establerts per a l'educació primària: numeració i càlcul, canvi i relacions, espai i forma, mesura, i estadística i atzar.

Ensenyar i aprendre numeració i càlcul ha de significar potenciar la comprensió dels nombres, dels seus usos diversos, de les seves formes de representació i del sistema de numeració en el qual s'expressen; també la comprensió dels significats de les operacions i de les relacions que hi ha entre unes i altres, i la comprensió de la funcionalitat del càlcul i de l'estimació.

Ensenyar i aprendre relacions i canvis significa desenvolupar la comprensió i anàlisi dels patrons i l'ús de models i expressions matemàtiques per representar les relacions, i el treball al voltant del concepte de funció. També de dotar de significat a les variables que intervenen en una situació de canvi i d'identificar les relacions de dependència entre variables.

Pel que fa a l'espai i forma, cal desenvolupar l'anàlisi de les característiques i propietats de les figures de dues i tres dimensions; localitzar i descriure relacions espacials; identificar i aplicar transformacions geomètriques, i utilitzar la visualització i models geomètrics per resoldre problemes.

Quant a la mesura, és molt important desenvolupar la comprensió de les magnituds mesurables, de la necessitat de l'establiment d'unitats i del procés de mesurar, i de l'aplicació de tècniques i instruments adequats per mesurar de forma directa i indirecta. Cal tenir en compte que, en aquesta etapa, la mesura constitueix un nucli que permet desenvolupar gran part dels continguts no només d'aquest bloc sinó també d'altres com el de nombres i el de geometria.

La mesura també intervé en la identificació de patrons.

En relació amb estadística i l'atzar, cal potenciar l'elaboració de preguntes que es puguin respondre amb dades (recollida, organització i representació de dades); la selecció i ús de mètodes estadístics per analitzar dades, treure conclusions i fer prediccions basades en dades; i la comprensió i aplicació dels conceptes bàsics d'atzar.

Atenent als tres vessants de les matemàtiques (formatives per elles mateixes, aplicables en contextos reals i instrumentals per a altres àrees) s'ha optat per encapçalar els continguts de cada curs amb els processos matemàtics que han de desenvolupar els alumnes mentre treballen uns continguts concrets. Es tracta de capacitar l'alumnat perquè pugui fer, realment, matemàtiques a l'aula, més que de transmetre-li determinats continguts; aquest fer matemàtiques inclou una sèrie de processos que es desenvolupen al treballar els continguts de tots els blocs, i en tots els cursos:
- La *resolució de problemes*, com a nucli del treball de matemàtiques, ja que facilita la construcció de nous coneixements, la transferència de conceptes, el desenvolupament d'estratègies de resolució i l'anàlisi del procés de resolució.
Cal tenir en compte que els problemes, a més d'aplicar el coneixement adquirit en altres contextos, han de possibilitar la construcció del coneixement matemàtic i mostrar-ne la seva utilitat.

- El *raonament i la prova*, com a formes de desenvolupar coneixements, fer-se preguntes i tractar de respondre-les, formular conjectures i argumentar la seva validesa o refutar-la, donar raons a les respostes, i reconèixer l'existència de diferents camins per arribar a un resultat determinat.

- La *comunicació i la representació* de la informació, de les idees i dels processos seguits, que suposa l'organització i estructuració del coneixement per tal de donar-li ordre i coherència i afavorir el contrast amb altres formes de fer dels companys i companyes de classe. Cal potenciar l'ús de diferents formes de representació per comunicar allò que es vol expressar, a partir de la verbalització fins arribar, de manera progressiva, al llenguatge simbòlic. Aquest procés afavoreix la incorporació gradual del llenguatge específic de les matemàtiques i esdevé una eina per a resoldre problemes.

- La *connexió* entre els diferents continguts de les matemàtiques, així com entre aquests i els continguts d'altres matèries, ja que serveix per mostrar la relació entre conceptes de diferents disciplines, la qual cosa eixampla la comprensió de les matemàtiques. Encara que els continguts es presentin organitzats en cinc blocs, en el procés d'ensenyament i aprenentatge és convenient establir relacions entre ells sempre que sigui possible. Per exemple, el bloc de mesura contempla en el seu desenvolupament molts continguts dels blocs de nombres i de geometria, i permet donar sentit a molts d'ells (fraccions i decimals i les seves operacions, igualtat de figures, els nombres reals, etc.), fins al punt que pot arribar a esdevenir, especialment en els dos primers cursos, el nucli des del qual desenvolupar una part molt important dels continguts de les matemàtiques. També la proporcionalitat és un concepte clau que apareix en els diferents blocs i caldrà establir relacions entre la visió numèrica, geomètrica, de mesura i funcional d'aquest concepte. També el llenguatge algèbric, important en els dos darrers cursos d'aquesta etapa, s'ha de relacionar amb aspectes numèrics, geomètrics, de mesura i funcionals. El bloc d'estadística i atzar també ofereix oportunitats per relacionar aspectes numèrics i gràfics. Al mateix temps, els blocs de mesura i d'estadística són aquells que ofereixen un major nombre de contextos reals i de connexions amb les altres disciplines.

D'altra banda, molts dels continguts de matemàtiques es relacionen amb continguts d'altres àrees; establir connexions entre diferents continguts matemàtics i no matemàtics és important per donar sentit a aquells, mostrar el seu origen concret i la seva aplicació. En tant que són continguts per a desenvolupar-se adequadament en l'entorn, en la vida diària i, de manera especial, en els diferents àmbits curriculars de l'etapa, al final dels continguts de cada curs es concreten les connexions que es poden establir amb d'altres matèries; la proposta que es fa té un caràcter orientatiu i en cap és exhaustiva, i ha de servir per treballar continguts de manera conjunta sempre que sigui possible.

Per tal de facilitar la relació entre els processos i els continguts s'ha optat per escriure en cursiva els diferents termes associats a cada procés. En aquest sentit es trobarà tant en la descripció dels continguts com en el quadre de processos que encapçala cada curs.

D'altra banda, en el desenvolupament de tots els continguts cal tenir en compte l'organització del pensament matemàtic propi i la seva comunicació (mitjançant explicacions orals, gràfiques i escrites) a companys/es i professors/es i el contrast amb el dels altres. També és important potenciar en l'alumnat, al llarg de tota l'etapa, dues actituds bàsiques per al desenvolupament de la competència matemàtica: la confiança en la capacitat pròpia i la perseverança en la cerca de solucions.

En els cinc blocs de continguts, la relació de continguts està ordenada a partir de les competències que li són pròpies i que, amb diferent intensitat, són les mateixes al llarg dels quatre cursos. Aquestes competències s'inicien ja a l'educació Infantil, continuen a l'educació primària, i són recurrents en l'ordenació del currículum de matemàtiques de les etapes educatives que constitueixen l'ensenyament obligatori.

També al final dels continguts de cada curs, es suggereixen a tall d'exemple, aproximacions de caràcter històric a determinats continguts. Amb elles es pretén d'una banda mostrar el desenvolupament històric de les matemàtiques com a ciència en evolució i sotmesa a canvis, i de l'altra evidenciar contextos on aquests continguts adquiriren el seu significat.

Consideracions per al desenvolupament del currículum

El procés d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques ha de tenir en compte els següents aspectes:

- Rellevància dels contextos. Cal que els continguts curriculars es treballin en contextos significatius i rics que mostrin l'origen concret dels conceptes matemàtics, la relació entre ells i la seva aplicació a problemàtiques diverses. Les situacions quotidianes, les culturalment significatives, les principals temàtiques de les diverses disciplines, però també els jocs i les pròpies matemàtiques, i en particular la seva història, han de ser les fonts que ens proporcionin els contextos més rellevants per aprendre matemàtiques.

- Equilibri, connexió entre els continguts i treball interdisciplinari. L'ordenació dels blocs de continguts no implica una jerarquització dels mateixos. Cal trobar un equilibri entre el desenvolupament dels diferents blocs i tenir en compte que hi ha diverses seqü enciacions possibles dels continguts: hi ha continguts que es poden treballar de manera transversal, altres que es poden treballar juntament amb continguts d'un bloc diferent, i també en el marc d'un projecte interdisciplinari, la qual cosa possibilita el desenvolupament de la competència matemàtica.
- Valoració d'actituds relacionades amb les matemàtiques. Per fer matemàtiques, i aconseguir actituds positives envers elles, cal desenvolupar la curiositat, la creativitat, la imaginació, l'interès per fer-se preguntes, per trobar respostes i per resoldre problemes; també és molt important que l'alumnat participi a tots els nivells, adquireixi confiança en les pròpies possibilitats i trobi el gust per realitzar un descobriment i per resoldre un repte. Actituds com la tenacitat, la precisió i el gust pel treball ben fet són molt importants quan es fan matemàtiques.
- Diversitat en les formes de treball. Cal combinar el treball en gran grup, en petit grup i el treball individual, tot respectant els estils de cadascú. Plantejar-se preguntes, resoldre problemes, realitzar petites investigacions, practicar les tècniques apreses, exposar les idees pròpies i discutir sobre elles. També és important emprar la manipulació d'objectes i de materials didàctics, per no perdre de vista l'origen concret de les matemàtiques, així com la visualització per a realitzar i fonamentar raonaments matemàtics i desenvolupar els propis sistemes de representació.

En definitiva, les classes de matemàtiques haurien de proporcionar a tot l'alumnat possibilitats de pensar matemàticament.

Cal introduir una manera de fer a l'aula que es pot resumir dient que l'alumne ha d'aprendre a fer (i fer-se) preguntes i el professor l'ha de guiar perquè se les faci: Què estic fent? Per què ho faig? Amb quina finalitat ho faig? Si ho aconsegueixo, com ho faré servir després? Hi ha també altres factors que interfereixen en la presa correcta de decisions en la realització d'activitats i en la resolució de problemes: inflexibilitat a l'hora de considerar alternatives, rigidesa en l'execució de procediments, manca de previsió de les consequëncies d'una certa acció, manca d'avaluació del que s'està fent, etc.

Cal tenir en compte que les TIC faciliten la interacció de l'alumnat amb objectes matemàtics i les seves relacions, la construcció de figures geomètriques, ajuden a la resolució de problemes, a aprendre dels errors per mitjà d'una retroalimentació immediata i efectiva, a treballar amb càlculs i entorns que amb altres mitjans poden ser feixucs i complexos, i afavoreixen la presentació, la col·laboració i la comunicació de les experiències.

Finalment, cal considerar la importància de l'avaluació com a part del procés d'ensenyament - aprenentatge, que inclou la reflexió sobre el què s'aprendrà, s'està aprenent o ja s'ha après. Cal tenir present la diversitat d'instruments per a realitzar l'avaluació: discussions en gran i petit grup, preguntes i respostes orals, treballs individuals i en petit grup, exposició a l'aula dels treballs, problemes o investigacions realitzades, i realització de proves. Tots ells es complementen i proporcionen informació, tant al professorat com a l'alumnat, sobre els avenços en l'aprenentatge. Els criteris d'avaluació que s'inclouen al final de cada curs pretenen explicitar els objectius generals de les matemàtiques per aquesta etapa, i es refereixen tant als processos matemàtics com a la comprensió i capacitat d'aplicar els diferents continguts apresos.

OBJECTIUS

La matèria de matemàtiques de l'educació secundària obligatòria té com a objectiu el desenvolupament de les capacitats següents:

1. Valorar les matemàtiques com a part de la cultura, tant des del punt de vista de la història com des de la diversitat cultural del món actual, i utilitzar la competència matemàtica per analitzar tot tipus de fenòmens del nostre món i per actuar de manera reflexiva i crítica en els diferents àmbits de la vida.

2. Plantejar i resoldre problemes, abordables des de les matemàtiques, que sorgeixin en situacions de l'entorn, en altres disciplines i en les pròpies matemàtiques, aplicant i adaptant diverses estratègies i justificant-ne l'elecció.

3. Reconèixer el raonament, l'argumentació i la prova com aspectes fonamentals de les matemàtiques, així com el valor d'actituds com la perseverança, la precisió i la revisió.

4. Organitzar i consolidar el pensament matemàtic propi i comunicar-lo als companys/es, professors/es i altres persones amb coherència i claredat, utilitzant i creant representacions matemàtiques que possibilitin aquesta comunicació.

5. Reconèixer i aplicar les matemàtiques en contextos no matemàtics, tot integrant-les en el conjunt de sabers que ha anat adquirint des de les diferents matèries així com des de la perspectiva del seu paper a la societat actual.

6. Mostrar confiança en la pròpia capacitat per resoldre problemes, afrontar-ne la resolució amb actitud positiva i assolir un nivell d'autoestima que li permeti gaudir dels aspectes creatius, manipulatius, estètics i útils de les matemàtiques.

7. Comprendre el significat dels diferents tipus de nombres i de les operacions. Calcular amb fluïdesa, fer estimacions raonables i utilitzar els mitjans tecnològics per obtenir, tractar i representar informació, així com per calcular.

8. Utilitzar diferents llenguatges (verbal, numèric, gràfic i algèbric) i models matemàtics per a identificar, representar i dotar de significat relacions quantitatives de dependència entre variables.

9. Identificar les formes i relacions espacials presents en l'entorn, i utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a descobrir i provar propietats geomètriques i per a resoldre problemes.

10. Reconèixer la importància de la mesura tant en la vida quotidiana com en el desenvolupament de la ciència i aplicar tècniques, instruments i fórmules apropiades per a obtenir mesures (de manera directa i indirecta) i fer estimacions raonables, en contextos diversos.

11. Identificar els elements matemàtics presents en tot tipus d'informacions per tal d'analitzar-les críticament, i formular preguntes abordables amb dades, utilitzant els mètodes estadístics apropiats (recollida, organització, anàlisi i presentació de dades) per poder respondre-les.

CONTINGUTS

Processos i actituds que cal desenvolupar de manera general en tots els cursos

· Organització del pensament matemàtic propi.

· Confiança en les capacitats pròpies per afrontar situacions problemàtiques, copsant les relacions matemàtiques i utilitzant-les per a prendre decisions.

· Perseverança i flexibilitat en la cerca de solucions als problemes i en la millora de les proposades.

· Comunicació del pensament matemàtic propi a companys i professors i contrast amb el dels altres.

· Connexions entre els diferents blocs de matemàtiques i amb altres matèries.

TERCER CURS

Processos que es desenvolupen durant el curs a través dels diferents continguts

· Resolució de problemes *(identificació, distinció, simulació, desenvolupament d'estratègies, elaboració de conclusions)*

· Raonament i prova *(ús/utilització, anàlisi, comparació, selecció, efecte, decisió, formulació de conjectures, resolució, càlcul, aproximació històrica)*

· Comunicació i representació *(argumentació, expressió, construcció, representació, generació, utilització del vocabulari)*

· Connexions *(relació, transformació, interpretació, determinació, exploració)*

NUMERACIÓ I CÀLCUL

Comprendre els nombres i les diferents formes de representació

· Nombres racionals. *Relació i transformació* entre fracció i decimal, aproximació per excés i per defecte, representació sobre la recta.

· *Utilització* de nombres grans i nombres molt petits en la *resolució de problemes* en diferents contextos.

· *Expressió* de nombres grans i nombres molt petits: llenguatge verbal, representació gràfica i notació científica.

Comprendre el significat de les operacions

· *Efecte* produït per la multiplicació, la divisió i el càlcul amb potències d'exponent enters en l'ordre de magnitud de les quantitats.

· Propietats de les operacions amb potències d'exponent enter i relació amb el càlcul en la *resolució d'equacions* i en la *resolució de problemes.*

Calcular amb fluïdesa i fer estimacions raonables

· *Ús* de la notació científica per a grans nombres i nombres molt petits.

· *Ús* de les TIC per a calcular amb nombres racionals (decimals i fraccions) grans nombres i nombres molt petits.

· *Selecció i ús* de l'eina més adequada per a calcular amb nombres racionals (decimals i fraccions), grans nombres i nombres molt petits (càlcul mental, estimació, recursos TIC, paper i llapis). *Argumentació* de la selecció.

· *Desenvolupament d'estratègies* de càlcul mental i d'estimació de càlculs amb nombres racionals (decimals i fraccions), grans nombres i nombres molt petits i *comparació* amb els resultats obtinguts a través de càlculs exactes.

CANVI I RELACIONS

Comprendre patrons, relacions i funcions

· *Anàlisi* de funcions d'una variable: domini de definició, creixement/decreixement i punts de tall amb els eixos, incloent-hi les funcions lineals i de proporcionalitat inversa.

· Utilització de les TICs en la *generació* de gràfics i en l'*expressió* simbòlica de les funcions.

· *Construcció* d'una gràfica d'una expressió simbòlica, a partir d'una gràfica més simple.

Representar i analitzar situacions i estructures matemàtiques utilitzant símbols algebraics

· *Relació* entre expressions simbòliques i gràfiques lineals, posant especial atenció en el significat de l'ordenada a l'origen i del pendent.

· *Resolució d'equacions* de 1r i 2n grau i sistemes d'equacions lineals amb fluïdesa. Interpretació gràfica.

· Utilització de les TICs com a suport en la *resolució* d'equacions i sistemes d'equacions i *anàlisi del significat* i la raonabilitat dels resultats.

· *Pràctica del càlcul menta*l en la resolució d'equacions, en la manipulació d'expressions algebraiques i en l'acceptació dels resultats obtinguts amb mitjans tecnològics.

· Utilització de l'àlgebra simbòlica en la *representació* de situacions i en la *resolució de problemes*, particularment els que presenten relacions lineals.

Utilitzar models matemàtics per a representar i comprendre relacions quantitatives

· *Identificació* de relacions quantitatives en una situació i *determinació* del tipus de funció que la modelitza, amb especial referència a les funcions lineals.

· *Ús* d'expressions simbòliques, particularment lineals, per a representar relacions que provenen de diferents contextos.

· *Elaboració de conclusions* raonables d'una situació, un cop modelitzada, particularment en situacions lineals.

Analitzar el canvi en contextos diversos

· *Utilització de gràfiques* o taules de valors per analitzar la naturalesa dels canvis quantitatius en relacions lineals.

· *Utilització de models* lineals per estudiar situacions que provenen de contextos diversos.

ESPAI I FORMA

Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments sobre relacions geomètriques

· *Relació* entre perímetres, àrees i volums de figures semblants de tres dimensions.

· *Ús* de la proporcionalitat geomètrica i de la semblança.

Localitzar i descriure relacions espacials mitjançant coordenades geomètriques i altres sistemes de representació

· *Ús* de coordenades cartesianes per analitzar situacions geomètriques.

Aplicar transformacions i utilitzar la simetria per analitzar situacions matemàtiques

· *Relació* entre semblança, ampliacions i reduccions. Factor d'escala.

· *Exploració* de les característiques de reflexions, girs i translacions mitjançant objectes físics, dibuixos, miralls, programes de geometria dinàmica...

· *Ús* de les transformacions geomètriques per establir propietats de figures geomètriques.

Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes

· *Utilització* de conceptes i propietats geomètrics per a *resoldre problemes* d'altres disciplines, com per exemple el dibuix i les ciències de la naturalesa.

MESURA

Comprendre els atributs mesurables dels objectes, i les unitats, sistemes i processos de mesura

· *Presa de decisió* sobre unitats i escales apropiats en la *resolució de problemes* que impliquin mesures.

· *Utilització* del nombres decimals per expressar una mesura i relació entre el nombre de decimals i el grau de precisió de la mesura.

· *Utilització* de la proporcionalitat geomètrica i la semblança per obtenir mesures indirectes.

Aplicar tècniques, instruments i fórmules apropiats per a obtenir mesures i fer estimacions raonables

· *Utilització* d'instruments per a mesurar angles i longituds a la realitat i *aplicació* a la *resolució de problemes* per obtenir mesures indirectes, fent estimacions prèvies de les mateixes.

ESTADÍSTICA I ATZAR

Formular preguntes abordables amb dades i recollir, organitzar i presentar dades rellevants per respondre-les

· *Utilització* de mostres en els estudis estadístics: necessitat, conveniència i representativitat.

· *Distinció* entre variables discretes i contínues.

· *Agrupació* en classes o intervals. Histogrames i polígons de freqüencies.

· *Identificació del gràfic* més adequat d'acord amb les dades que cal presentar.

· Ús del full de càlcul i de les TIC en general per a la *organització* de dades, realització de *càlculs* i *generació* dels gràfics més adequats.

Seleccionar i utilitzar mètodes estadístics apropiats per analitzar dades

· *Càlcul i interpretació* de la mitjana, moda, quartils i mediana.

· *Anàlisi* de la dispersió: rang i desviació típica.

· *Interpretació* conjunta de la mitjana i la desviació típica per a *realitzar comparacions* i valoracions.

· *Anàlisi* crítica de taules i gràfiques estadístiques en els mitjans de comunicació; *interpretació* de la informació i detecció d'errors i fal·làcies.

Desenvolupar i avaluar inferències i prediccions basades en dades

· *Utilització d'observacions* relatives a les diferències entre dues mostres per a la *formulació de conjectures* sobre les poblacions d'on han estat extretes.

· *Formulació de conjectures* sobre possibles relacions entre dues característiques d'una mostra.

Comprendre i aplicar conceptes bàsics de probabilitat

· *Interpretació* d'experiments aleatoris. Successos i espai mostral.

· *Utilització del vocabulari* adequat per a descriure i quantificar situacions relacionades amb l'atzar.

· *Càlcul* de probabilitats de successos compostos, en casos senzills, utilitzant taules de contingència i diagrames d'arbre.

· Utilització de les TIC com a suport dels *càlculs* i *simulacions*.

Connexions amb altres matèries

Ciències de la naturalesa

- L'àtom i les reaccions químiques (nombres grans i molt petits; expressió de nombres en forma de potència; equacions lineals pel càlcul de masses en les reaccions químiques)
- Nutrició i càlcul de dietes (%, operacions combinades, canvis d'unitats, gràfics)

Ciències socials

- Elements bàsics d'economia. Identificació dels components econòmics.
- Tant per cent, tant per mil, tant per u.
- Impostos directes i indirectes. IVA, IRPF, IPC
- Activitats econòmiques: condicionaments físics i humans

Educació visual i plàstica

- Experimentació i utilització de recursos informàtics i noves tecnologies per a la recerca i creació d'imatges.

Educació física

- Control de la freqü .ncia cardíaca. Coneixement de la freqüencia cardíaca màxima, de repòs i càlcul de la zona d'activitats.
- Alimentació i activitat física

Música

- Lectura i escriptura de notació musical al servei de l'audició, la interpretació, la creació i la comprensió de la música

Tecnologia

- El cost dels serveis bàsics
- Disseny d'un habitatge
- Estratègies d'estalvi energètic i d'aigua dels habitatges
- Procés industrial: producció i comercialització

Contextos històrics

Com en el cas de les connexions, es presenta una llista no exhaustiva, i per tant ampliable, de possibles aproximacions històriques relacionada amb els continguts del curs:

- Els orígens de l'àlgebra simbòlica (Món àrab, Renaixement)
- Relació entre geometria i àlgebra i introducció de les coordenades cartesianes

- La resolució geomètrica d'equacions (Grècia, Índia, Món àrab)
- L'ús de la geometria per a mesurar la distància Terra - Sol i Terra - Lluna (Grècia)
- El naixement de la teoria de probabilitats

CRITERIS D'AVALUACIÓ

· Resoldre problemes de la vida quotidiana, d'altres matèries i de les pròpies matemàtiques utilitzant símbols i mètodes algebraics, i avaluar altres mètodes de resolució possibles com per exemple l'assaig-error o bé el càlcul numèric amb mitjans tecnològics.

· Expressar verbalment amb precisió, raonaments, relacions quantitatives i informacions que incorporin elements matemàtics, valorant la utilitat i simplicitat del llenguatge matemàtic i la seva evolució al llarg de la història.

· Analitzar i avaluar les estratègies i el pensament matemàtic dels altres, a través del treball per parelles o en grup o bé la posada en comú amb tota la classe.

· Expressar per escrit amb precisió raonaments, conjectures, relacions quantitatives observades i informacions que incorporin elements matemàtics, simbòlics o gràfics i contrastar-los amb els dels companys.

· Reconèixer models lineals o models de proporcionalitat geomètrica en contextos no matemàtics o en d'altres matèries i utilitzar les seves característiques i propietats per a resoldre situacions que apareixen en treballs per projectes realitzats des de la pròpia àrea o de manera interdisciplinària.

· Utilitzar els nombres racionals, nombres molt grans i molt petits, les seves operacions i les seves propietats per a recollir, transformar i intercanviar informació i resoldre problemes relacionats amb la vida diària.

· Utilitzar models lineals per estudiar diferents situacions reals expressades mitjançant un enunciat, una taula, una gràfica o una expressió algebraica.

· Reconèixer les transformacions que permeten passar d'una figura geomètrica a una altra mitjançant els moviments del pla i utilitzar aquests moviments per a crear les pròpies composicions i analitzar, des d'un punt de vista geomètric, dissenys quotidians, obres d'art i configuracions presents a la natura.

· Utilitzar la proporcionalitat geomètrica i la semblança per obtenir mesures indirectes en la resolució de problemes de la vida quotidiana com per exemple en l'art i l'arquitectura.

· Elaborar i interpretar informacions estadístiques tenint en compte l'adequació de les taules i gràfiques utilitzades i analitzar si els paràmetres són més o menys significatius.
· Fer prediccions sobre les possibilitats d'un esdeveniment a partir d'una informació empírica prèvia o bé com a resultat del recompte de possibilitats, en casos senzills.

Crédito Variable
de
Resolución de Problemas

Crédito Variable 3º ESO

Resolviendo Problemas

Metodología de trabajo en el crédito

El alumno recibe en cada sesión una (o dos) ficha de trabajo conteniendo algunos ejercicios problemas para resolver. El trabajo es individual y se realiza en el aula. Después del tiempo dedicado a la resolución por los alumnos , en la clase siguiente, se realiza la puesta en común en la que se comentan las soluciones más originales. Las soluciones aportadas por los alumnos son comentadas para toda la clase en los casos en los que se llega de forma exitosa hasta el final, por el método que sea, siempre. Los errores que no han permitido llegar hasta el final se comentan también. Caso de no haber podido llegar hasta el final, por el motivo que sea, se realiza un trabajo individual previo con el alumno para evaluar las dificultades encontradas. La solución "tradicional " se comenta siempre y el alumno ha de anotarla en su libreta. Por lo tanto, la situación-problema se resuelve en clase, para todo el grupo, siguiendo el esquema siguiente :

1- Análisis de la situación descrita en el enunciado.

- Identificación de los elementos básicos.
- Identificación de las relaciones básicas que existen entre los diferentes elementos .

2- Codificación : Traducción al lenguaje algebraico .

3- Resolución .

4- Comprobación de los resultados y comentario final.

Todas las situaciones seleccionadas se pueden resolver sin utilizar recursos algebraicos formales. En cada caso, resolveremos la situación de esta forma antes de hacerlo utilizando las técnicas matemáticas tradicionales. El trabajo se realiza en el espacio de un crédito variable durante un trimestre entero con una frecuencia de 3 horas a la semana (oferta de crédito variable). Por lo tanto , los alumnos no se seleccionan. Tampoco se realiza ninguna prueba para detectar las capacidades cognitivas de los alumnos. Nos guiaremos entonces por el veredicto de la Comunidad Educativa, eso es, basándonos en el expediente académico personal del alumno.

La distribución de los contenidos es la siguiente:
- Contar y Ordenar : Los números Naturales .
- Definición y construcción - Números consecutivos .
- Operaciones posibles en el conjunto de los Naturales .
- Medir una temperatura - Graduar una recta : Los Enteros .
-Definición . Necesidad de este conjunto.
- Avanzar y retroceder - Números consecutivos - Números opuestos .
- Valor absoluto - Operaciones posibles en este conjunto .
- Jerarquía de las operaciones - Modificación de la jerarquía mediante la utilización de paréntesis , corchetes ...
- Comparación . Uso de los símbolos relacionales .
- Criterios de divisibilidad -Divisores y múltiplos de un número - Números primos .
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo : Su cálculo mediante la descomposición en factores primos y mediante la lista de los múltiplos y la de los divisores de los números dados .
- Fracción de una unidad - Fracciones equivalentes .
- El número racional : Definición .
- Colocar una fracción entre dos dadas . ¿ Cuántas se puede colocar ?
- ¿ Tiene sentido hablar de números consecutivos en el caso de los racionales ?
-Expresiones decimales y números racionales .
- La fracción generatriz.
- Operaciones con fracciones .
-Números decimales que no se pueden expresar en forma de fracción: Los irracionales.
- Expresión de un número irracional .
- Los números reales .
- Cuadro sinóptico de los diferentes conjuntos de números .
- La recta real - ¿ Tiene sentido hablar de números consecutivos en el caso de los reales?

2- Aproximación
- Aproximaciones decimales : Truncar y redondear .
- Aproximaciones por exceso y por defecto .

- Cifras significativas .

- Estimación .

3-Potencias

-Potencia de exponente natural - Potencia de exponente entero. -Producto y cociente de potencias .

- Potencia de un producto y de un cociente .

- Potencia de una potencia .

- La notación científica .

- Potencias de exponente racional : Radicales .

- Raíz cuadrada - Raíz cúbica - Radicales de índice cualquiera - Raíz cuadrada de un producto , de un cociente , de una raíz .

-Racionalización de denominadores con una sola raíz en el denominador : Tipo

- Disquisición sobre las operaciones aritméticas : Sumar - Restar -Multiplicar - Dividir - Elevar a una potencia - Extraer una raíz - Diferencia entre la operación restar y el signo negativo de un número.

- Suma numérica y suma algebraica .

4- Ecuaciones

- Traducción de enunciados verbales al lenguaje algebraico y viceversa .

- Definición de igualdad y desigualdad .

- La igualdad entre números y entre expresiones algebraicas

- Definición de identidad , ecuación , inecuación .

- Conjunto solución de una ecuación - Conjunto solución de una inecuación .

- Clasificación de las ecuaciones :

    - Según el grado de la incógnita

    -Con respecto a la existencia de soluciones .

- Resolución de una ecuación de primer grado .

- Resolución de una inecuación de primer grado con una incógnita .

- Resolución de problemas con narración .

5- La proporcionalidad

- Magnitudes proporcionales .

- La proporcionalidad como igualdad de razones - La proporcionalidad como ecuación
- La tabla de proporcionalidad - Completar una tabla de proporcionalidad .
- Repartos proporcionales .
- Porcentajes y proporcionalidad .

6- Sistemas lineales de ecuaciones .
- Métodos algebraicos de resolución de sistemas lineales

7- Resolución de problemas con narración .

El trabajo realizado con los alumno ha sido el siguiente:

Ficha de Trabajo en Clase

1-El número 38, ¿es divisor de 1.596? Y el número 2.124, ¿es , múltiplo de 27? Explica qué has hecho en cada caso.

2-Escribe todos los múltiples de 42 comprendidos entre 200 y 450.

3-En el número 3al7, ¿por qué números se podría sustituir la a para que sea múltiplo de 3?

¿Y para que sea múltiplo de 9?

¿Y para ser múltiplo de 11 ?

¿Puede ser este número múltiplo de 2 ? Justificar todas las respuestas.

4-Un estudiante de Informática cree que le faltan diskettes de los que utiliza para su ordenador. No recuerda el número que tenía, pero sí sabe que contados de 2 en 2 le sobraba uno; que contados de 3 en 3 le sobraba uno; que contados de 5 en 5 le sobraba uno, y además está seguro que tenía entre 30 y 40 disquetes.

5- Calcular , detallando los pasos :
a) M.C.D. (125,230,475) b) M.C.D. (12 , 48 , 120)
c) m.c.m. (125,230, 475) d) m.c.m. (12 , 48 , 120)

6- Un taller maderero recibe el encargo de construir planchas de madera para enlosar un salón de 10,5 m de largo por 8,25 m de ancho. La única condición que se les impone es que las planchas sean cuadradas, todas iguales y de las mayores dimensiones posibles. ¿Qué longitud debe tener el lado de cada plancha?

Ficha de Trabajo en Clase

1-Una empresa que trabaja en informática fabrica dos tipos de microprocesadores. Disponen en el almacén de 2.025 unidades de una clase y 3.465 de la otra. Quieren distribuirse, por separado, en cajas que contengan el mismo número de unidades y, además, que este número sea el mayor posible. ¿Cuántos microprocesadores debe contener cada caja?

2- Los mecánicos de una empresa automovilística están estudiando tres dispositivos para aumentar la velocidad de sus coches. Para ver cuál da mejor resultado, hacen salir desde la meta del circuito de pruebas tres coches, cada uno con un dispositivo. El más rápido tarda 54 segundos en dar una vuelta; el siguiente emplea 57 segundos y el más lento, un minuto y tres segundos. ¿Al cabo de cuántas vueltas pasarán los tres juntos por meta?

3- En un taller de peluquería se han creado dos tipos de champú: para cabello seco y para cabello normal. Disponen de 1.500 centímetros cúbicos (c.c.) de la primera clase y 2.500 cc de la segunda . Si lo quieren envasar en frascos de la mayor capacidad posible y todos de igual capacidad, ¿cuál debería ser la capacidad de cada frasco?

Ficha de aula número :

1-Dividimos un pastel en cinco partes iguales y nos comemos tres de estas partes . ¿ Qué fracción del pastel nos hemos comido ?

2- Juan se ha quedado con las cinco novenas partes de las 18.000 euros y Pedro se ha quedado con el resto . ¿ Sabrías decir con qué fracción de dicha cantidad se ha quedado Pedro ? ¿ Qué cantidad les ha tocado a cada uno ?

3- Escribe 5 fracciones menores que la unidad y comprendidas entre 0,5 y 0,7. Nómbralas.

4- a) Estela se ha comido la mitad de un pastel y después la mitad del resto . Haz un dibujo que exprese esta situación .

b) ¿ Sabrías decir qué fracción del pastel ha dejado Estela ? Explicar .

5- Calcular :
a) La mitad de 1.000

b) La tercera parte de 12.000 .

c) Las dos terceras partes de 3.600 .

d) Las cuatro quintas partes de 12.000 .

e) Las cinco novenas partes de 4.500

Ficha de clase

1- Para cada uno de los números siguientes , hallar su opuesto , su inverso , y , si es posible , simplificar su expresión :

2- Escribir un número comprendido entre estos dos dados :

3- Calcular y simplificar el resultado obtenido :

4-a) Expresar en forma fraccionaria , los números siguientes :

a) 0,15 b) 1,54 c) 3,22222222.......

5) Transformar en fracción las expresiones siguientes :

a) 2,6 : 0,3 b) 1,5 : 0,15 c) 2,7 : 6,30

6- a) Juan tiene 12.000 euros . Se gasta las tres quintas partes . ¿Cuánto se ha gastado ?

b) Utilizó la mitad de la suma gastada para comprarse unos pantalones . ¿ Cuánto le han costado los pantalones ?

c) ¿ Qué fracción de la suma inicial representa el precio de los pantalones ? .

Ficha de clase

1- Desarrollar y reducir las expresiones siguientes :

A= (x - 1) - 2.(x - 3) + 3x =

B = (x + 1).(2x - 3) - 2x.(x + 3) =

C = x.(x -1).(x + 2) + 2x - x.(x2 - 3) =

D = (x + 2).(x -1) - 3.(2x - 1/3) =

2- Si sustituimos la x por 2 en cada una de las expresiones anteriores , ¿ qué valores encontraríamos ?

3-Escribir en forma de un producto de factores las expresiones siguientes :

E = (x + 4).(2x + 3) - 5.(2x + 3) =

G = (x +3).(x - 1) - (x +3)2 =

H = (2x - 5).(x + 2) - (x + 2) =

M = (2x - 3) - (3x + 1).(2x - 3) =

Ficha de clase

1- Pretendemos ampliar una fotografía de 24x36mm proyectándola sobre un muro de 5mm de largo por 4 de alto . ¿ Qué escala estaremos utilizando? Explicar .

2- ¿ Qué porcentaje de los 800 alumnos de un centro , representan:

a) Los 320 que utilizan los comedores .

b) Los 140 que cursan el segundo curso de ESO.

(Utilizar una tabla de proporcionalidad y explicar los cálculos .)

3- Un muro de 48 m se representa por un segmento de 12cm . ¿ Cuál es la escala utilizada ?

4- Se puede leer sobre una bolsa de tostadas :

- Proteínas : 12% - Glúcidos :70% - Lípidos : 9,5% .

Expresar , en gramos , la cantidad de cada uno de ellos en un paquete de tostadas de 500 gramos .

5- Un grupo de 20 personas ha pagado 45 Eur. para entrar en un museo. Sin calcular el precio de una entrada individual , calcular lo que pagaría:

a) Un grupo de 10 personas. b) Un grupo de 5 personas .

c) Un grupo de 35 personas ? d) 2 personas

Ficha de clase

1-a)Representar gráficamente , sobre una recta , los valores de x que cumplen la condición dada : a) $x > 7$ b) $x > -3$ c) $-5 < x < 12$

2- Pretendemos alquilar un coche para recorrer España, visitando , durante 20 días , las ciudades siguientes : Sevilla - Madrid - Santiago de Compostela - La Coruña - León - Zaragoza para volver luego a Barcelona .

Hacemos el recorrido siguiente : Barcelona - Sevilla - Madrid - Santiago de Compostela - La Coruña - León - Zaragoza - Barcelona , de la forma siguiente :

Barcelona - Sevilla	===>	1046 Km
Sevilla - Madrid	===>	538 Km
Madrid - Santiago de Compostela	===>	619 Km
Santiago de Compostela - La Coruña	===>	17 Km
La Coruña - León	===>	334 Km
León - Zaragoza	===>	488 Km
Zaragoza - Barcelona	===>	296 Km
Recorrido turístico por los diferentes sitios	==>	700 Km .

Para ello , alquilamos un coche . La empresa de alquiler nos cobra en función de los kilómetros recorridos.

a) Si la tarifa es de 2 euros el Km , hallar una relación que permite encontrar el precio a pagar en función de los kilómetros recorridos .

b)El coche alquilado gasta 10 litros de gasolina cada 100 Km recorridos .

Encontrar una relación que permita encontrar el número de litros de gasolina gastada en función de la distancia recorrida .

c) Hallar una relación que permita encontrar el gasto total en función de los kilómetros recorridos (alquiler del coche + gasolina) , si el precio del litro de gasolina es de 0,95 euros .

d)Hallar la distancia total recorrida así como el gasto total .

Ficha de trabajo

1- He pagado 376 euros por 16 panecillos

a) Hallar el precio de un panecillo .

b) Hallar el precio de 12 panecillos .

2- Un grupo de 8 personas paga 18 euros para entrar en un museo . Sin calcular el precio de una entrada , hallar el precio a pagar por :

a) un grupo de 4 personas b) un grupo de 16 personas c) un grupo de 18 personas

3- El 20% de la población de un país , tiene menos de 10 años , el 30% entre 10 y 19 años , el 25% entre 19 y 40 años , el 10% entre 40 y 60 años , el 10% entre 60 y 75 años .

a) Representar gráficamente esta situación , utilizando la circunferencia adjunta. (Explicar).

b) Si la población de dicho país es de 12 millones de personas , ¿cuántas personas tienen más de 70 años ? . ¿ Cuántas personas tienen una edad superior o igual a los 60 años ? .

c) El 60% de los mayores de 19 años , tienen estudios superiores y el 20% solamente estudios primarios . ¿ Qué cantidad corresponde a cada categoría ? .

Ficha de trabajo

1- La suma de 3 enteros consecutivos es un valor comprendido entre 39 y 45.
¿ Cuáles pueden ser estos números ?

2- Encontrar los valores de x que cumplen las condiciones siguientes :

a) $3x = -1$ b) $2x - 3 = 5x + 4$

c) $x + 5 > 3x + 2$ d) $3x - 8$ £ $5x + 4$

3- En un corral , hay animales de 2 patas y animales de 4 patas . Contando las cabezas , encontramos 51 y contando las patas , encontramos 162. Hallar el número de animales de cada tipo . (Se supone que no se incluye la cabeza de la persona que cuenta ni sus ... patas).

4- Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes :

a) $3x - 2y = 13$
$x + y = 0$

b) $5x + 4y = 7$
$2x + 3y = 0$

c) $3x + y = 5$
$x + y = 5$

Ficha de trabajo

1- Encontramos un mismo artículo en dos tiendas diferentes. La primera tienda lo vende por 50 euros mientras que la segunda ofrece un descuento del 20% sobre un precio de venta al público (PVP) de 55 Euros ¿Por cuál de las dos nos habremos de decidir ? Explicar .

2- De los 134.700 habitantes de Badalona , el 25% realiza sus vacaciones durante el verano , el 30% las reparte a lo largo del año y el resto , apenas puede disfrutar de vacaciones (aunque por diferentes motivos) .

a) Hallar la cantidad de personas que realizan sus vacaciones a lo largo del año .

b) Del total de personas que se va de vacaciones durante el verano , un 40% elige la playa (Costas Catalanas) , un 35% el Pirineo y el resto se dirige hacia distintos puntos de la geografía española .

c-Calcular el porcentaje de habitantes de Badalona que se va de vacaciones a la playa .

d- Calcular la cantidad de personas que corresponde a cada tipo .

e) De los que eligen el Pirineo , el 45% se va al hotel , el 35% al camping , el 17% va a su segunda residencia y el resto utiliza otras modalidades sin clasificar .

1- Calcular el porcentaje , con respecto al total , de cada grupo .

2- Calcular la cantidad que corresponde a cada tipo .

3- Hacer un cuadro resumen de las distintas categorías y comprobar que la suma de los distintos grupos da la cantidad inicial de personas .

Ficha de trabajo

1- Juan , Miriam y Pepe acuden los tres a un mismo gimnasio cercano a su casa. Juan acude cada dos días , Miriam cada tres días y Pepe cada cinco días.

a)Si los tres han coincidido hoy en el gimnasio, ¿ dentro de cuántos días volverán a coincidir ?

b)Juan y Miriam quieren encontrarse sin que se entere Pepe , ¿ será posible que ocurra tal cosa ?

c) Pepe , quiere encontrarse un día de gimnasio con Miriam sin que lo sepa Juan , ¿ podrá conseguirlo ?

d) ¿ Ocurrirá alguna vez que se encuentren Pepe y Juan sin que Miriam esté ?

2) Hallar las dos quintas partes de 230

3) Hallar las dos terceras partes de las cinco séptimas partes de 2.100

4)¿Qué fracción de 120 representa la mitad de sus tres quintas partes ?

5)a) Juan se ha gastado las tres quintas partes de las 24.000 euros que tenía ahorradas. ¿ Cuánto dinero se ha gastado ?

b)Sabemos que se ha gastado las dos terceras partes de dicha cantidad en comprar ropa :

¿ cuánto se ha gastado en ropa ?

c) ¿Qué fracción del dinero total ahorrado se ha gastado en ropa ?.

Ficha de trabajo

1- a) Dados estos asteriscos , ¿ cuántos grupos de 2 hay ?

* * * * ** * * * ** * * * ** * * * ** * * * ** * * * **

b) ¿ Qué pasaría si los contáramos de 3 en tres ?

* * * * ** * * * ** * * * ** * * * ** * * * ** * * * **

c) ¿ Qué pasaría ahora si los contáramos de 5 en 5 ?

* * * * ** * * * ** * * * ** * * * ** * * * ** * * * **

d) Podrías utilizar lo anterior para resolver el problema siguiente :

Un estudiante de Informática cree que le faltan diskettes de los que utiliza para su ordenador. No recuerda el número que tenía, pero sí sabe que contados de 2 en 2 le sobraba uno; que contados de 3 en 3 le sobraba uno; que contados de 5 en 5 le sobraba uno, y además está seguro que tenía entre 30 y 40 diskettes.

e) ¿ Sabrías decir el número de diskettes que tiene el estudiante de informática ? Explicar .

2- Escribir :

a) Lista de los múltiplos de 2 , inferiores a 40 :

b) Lista de los múltiplos de 3 , inferiores a 40 :

c) Lista de los múltiplos de 5 , inferiores a 40 :

d) Lista de los múltiplos de 6 , inferiores a 40 :

e) Escribe los números , de esta lista , que sean múltiplos de 2 y de 3 a la vez :

f) Escribe los números , de esta lista , que sean múltiplos de 2 y de 5 a la vez :

g) Escribe los números , de esta lista , que sean múltiplos de 2 y de 6 a la vez :

h) Escribe los números , de esta lista , que sean múltiplos de 2 , 3 y 6 a la vez :

i) Escribe los números , de esta lista , que sean múltiplos de 2 , 5 y 6 a la vez :

j) Escribe los números , de esta lista , que sean múltiplos de 2, 3 , 5 y 6 a la vez :

k) ¿ Qué nombre recibe este número que acabas de encontrar ?

l) Escribe los números , de esta lista , que sean divisores de 2 y de 3 a la vez :

m) Escribe los números , de esta lista , que sean divisores de 2 y de 5 a la vez :

n) ¿ Cómo son entre sí estos dos números ?

o) Escribe los números , de esta lista , que sean divisores de 2 y de 6 a la vez :

p) Escribe los números , de esta lista , que sean divisores de 2 , 3 y 6 a la vez :

q) ¿ Qué nombre recibe este número que acabas de encontrar ?

Ficha de trabajo

1- a) ¿ Qué harías para repartir 2.520 euros entre 3 personas sin que sobre o falte ni una peseta ?

b) ¿ Serías capaz de repartir la suma anterior entre 5 personas , con la condición de que no sobre ni una peseta ? ¿ Cómo lo harías ?

c) El número 2.520 , ¿ es múltiplo de 5? Explica .

d) El número 3, ¿es divisor de 2.520 ? Explica la respuesta .

2-Escribe todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 50 y 91.

3- Un alumno ha encontrado esta hoja en la que figuran unos números a los cuales les falta una cifra .

a) 235.... El número obtenido ha de ser divisible por 2. ¿ Cuál es la cifra que falta ?

b) 427.... El número obtenido ha de ser divisible por 3. ¿ Cuál es la cifra que falta ?

c) 316.... El número obtenido ha de ser divisible por 5 . ¿ Cuál es la cifra que falta ?

d) 123.... El número obtenido ha de ser divisible por 11. ¿ Cuál es la cifra que falta ?

e) 769.... El número obtenido ha de ser divisible por 10. ¿ Cuál es la cifra que falta ?

f) 316.... El número obtenido ha de ser divisible por 6 . ¿ Cuál es la cifra que falta ?

4- Calcula :

a) M.C.D. (12,30) b) M.C.D. (26 , 13)

b) m.c.m. (12,30) d) m.c.m. (26 , 13)

5- a) Juan pretende meter las 495 canicas que tiene en bolsitas que pueden contener 10 canicas cada una . ¿Cuántas bolsas podrá llenar ?

b) Si cada bolsita tuviera una capacidad de 5 canicas , ¿ las llegaría a llenar todas ?

c) Si cada bolsita tuviera una capacidad de 3 canicas , ¿ las llegaría a llenar todas ?

d) Si cada bolsita tuviera una capacidad de 9 canicas , ¿ las llegaría a llenar todas ?

e) Si cada bolsita tuviera una capacidad de 11 canicas , ¿ las llegaría a llenar todas ?

f) ¿ Sabrías explicar los resultados que has encontrado ?

6- En un taller de peluquería se han creado dos tipos de champú : Normal y Especial. Disponen de 200 c.c de la primera clase y 300c.c de la segunda . Si lo quieren envasar en frascos de la mayor capacidad posible y todos de igual capacidad, ¿cuál debería ser la capacidad de cada frasco?

Situación-Problema 1

Dos equipos A y B juegan a estirar una cuerda . Después de un buen rato haciendo pruebas , se dan cuenta que :

- Cuatro jugadores del equipo A tiran tan fuerte como cinco jugadores del equipo B .
- Dos jugadores del equipo B y uno del equipo A , tiran tan fuerte como un caballo .

Se enfrentan ahora , después de las pruebas , tres jugadores del equipo B ayudados de un caballo , a cinco jugadores del equipo A .

¿ Cuál de los dos grupos crees que ganará ?

Situación-Problema 2

Si Tomás va a doblarle la edad a Gustavo cuando Jaime tenga la misma edad que Tomás tiene ahora , ¿ sabrías decir quién es el mayor , quién es el segundo , quién es el más joven ?

Situación-Problema 3

Si tres platos y dos tazas tienen el mismo peso que dos botellas ; dos jarras pesan igual que tres botellas ; y tres platos pesan lo mismo que dos tazas , ¿ cuántas tazas pesaran lo mismo que una jarra ? .

Situación-Problema 4

Tres hermanos , Juan , Luis y Sebastián tienen que cargar nueve paquetes que pesan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kg respectivemente . Cada uno de los hermanos ha de recibir el mismo número de paquetes y el mismo peso que los otros dos . Además , Juan ha de cargar el paquete de 1 kg , Luis , el paquete de 2 kg, y Sebastián , el paquete de 3 kg .

¿ Cómo crees que se puede hacer para repartir los paquetes entre los tres hermanos ?

Situación-Problema 5

Jaime es el nuevo responsable del material de laboratorio durante todo el primer trimestre . Siguiendo el encargo del profesor de química , el Sr. Mestre , llena los seis frascos del estante de líquidos con alcol , agua oxigenada y agua desionizada . Media hora más tarde , se da cuenta de que se ha olvidado colocar las etiquetas identificativas y que no tiene ningún método fiable para determinar el contenido de cada frasco .

Se queda pensativo y al cabo de 10 minutos de estrujarse el cerebro , coge papel y lápiz y a los cinco minutos exclamó ¡ Eureka ! y coloco las etiquetas en cada frasco .

Sabiendo que las capacidades de los frascos eran 16ml , 18ml , 22ml , 23ml , 24ml y 34ml y que :

- Sólo uno de los frascos contiene alcol .
- Echó el doble de agua oxigenada que de agua desionizada .

¿ Sabrías decir cómo procedió Jaime para identificar el contenido de los frascos ?

Situación-Problema 6

Miguel , el domingo por la noche , se da cuenta de los inconvenientes que supone el no mirar con suficiente antelación la previsión de deberes ya que tiene que entregar al día siguiente unos deberes de matemáticas . Llama a su gran amigo Jaime y le pide que le mande por fax los deberes hechos .

Por un fallo en la transmisión , todos los paréntesis y corchetes se han borrado así como algunos signos y Miguel recibe lo siguiente :

a) 4 + 3 x 2 - 5 + 7 x 2 = 19

b) 4 + 3 x 2 - 5 + 7 x 2 = -10

c) 4 + 3 x 2 - 5 + 7 x 2 = 32

d) 4 + 3 x 2 - 5 + 7 x 2 = - 28

e) 3 3 3 3 3 = 31

f) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

g) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = -100

h) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 200

i) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 362.880

¿Podrías ayudar a Miguel a rectificar lo incorrecto?

Situación-Problema 7

Si Tomás va a doblarle la edad a Gustavo cuando Jaime tenga la misma edad que Tomás tiene ahora , ¿ sabrías decir quién es el mayor , quién es el segundo , quién es el más joven ?

b) Si dentro de 10 años Jaime cumple 23 años , ¿ sabrías decir la edad actual de cada uno de ellos ?

Situación-Problema 8

Enrique suele realizar sus compras de material deportivo en la tienda de su amigo Jordi . El descuento que se le aplica normalmente , por ser considerado cliente de categoría A , es del 20% . Sin embargo , el importe que figura en la factura se ha de incrementar con un impuesto que suele ser del 7 o del 16% según los artículos comprados (del 7% si son artículos fabricados en España o en otros países de la U.E. y del 16% para artículos que procedan de países extracomunitarios)

Enrique cree que el precio final a pagar varía según si se aplica antes el impuesto o el descuento mientras que Jordi mantiene que no varía .

¿ A cuál de los dos podrías convencer de su error ?

Situación-Problema 9

Juan le pide a Luis de pensar un número cualquiera de tres cifras con las tres cifras iguales (salvo el cero) . Luego le pide que lo divida por 3 y luego de dividir el resultado por el valor de la cifra .

Le entrega entonces un papel en el que tenía anotado : Si lo has hecho bien , habrás de obtener 37 .

¡ Acertó ! ¿ Sabrías explicar cómo lo hizo ? .

Situación-Problema 10

Susana , María , Carolina y Angeles estaban divirtiéndose mucho jugando a tirar de la cuerda. Aunque le costaba mucho , María conseguía tirar a Susana y a Carolina a la vez . María y Susana , juntas , conseguían hacer frente a Angeles y a Carolina , y ninguna de estas dos parejas podía con la otra .

Sin embargo , cuando Carolina y Susana se intercambiaban el puesto , Angeles y Susana ganaban con bastante facilidad .

De estas cuatro niñas , ¿ sabrías decir , con los datos proporcionados , quién era más fuerte , quién la siguiente , y así sucesivamente .?

Situación-Problema 11

Luis , alumno con fama de ser un alumno brillante en matemáticas , intenta impresionar a su compañera de clase Mercedes , escribiendo con cuatro 4 (los cuatro cuatros se utilizan simultáneamente y se pueden agrupar para formar por ejemplo el 44 o el 444 o el 4.444) y los signos matemáticos de las operaciones elementales así como la raíz cuadrada , los 11 primeros enteros , de la forma siguiente :

0 = 44 - 44 1 = 44/44 2 = 4x4/(4+4) 3 =(4+4+4)/4

Después de esta demostración de ingenio , le pregunta a Mercedes si se ve capaz de escribir los siguientes números : 19 - 47 - 100 - 140- 200.

Le permite a Mercedes utilizar , además de los signos matemáticos indicando las operaciones elementales : Suma - Resta - Producto - Cociente , la raíz cuadrada , la potenciación de exponente cuatro o combinación de cuatros Le permite también recurrir al signo de factorial (!) si le hace falta . Recordar que por ejemplo factorial de 4 se escribe como 4! y se cumple que 4! = 4x3x2x1 = 24

En la expresión , no puede figurar - aparte de los cuatro 4 - ninguna cifra o letra o símbolo algebraico que suponga letras , tal como log , lim , etc. ... .

Mercedes , que es muy tenaz , no sólo consiguió escribir los números propuestos sino que además volvió a escribir los de Luis de una forma distinta , más bonita , utilizando solamente las cuatro operaciones fundamentales : + , - , x , : .

¿Serías capaz de repetir la hazaña de Mercedes?

Situación-Problema 12

A los números como el 5665 , que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha , se les llama capicúas . Mi amigo Pedro asegura que todos los números capicúas de cuatro cifras son divisibles por 11 .

¿ Qué opinas ?

Situación-Problema 13

La máquina de golosinas que acaban de instalar en el instituto no acaba de funcionar correctamente. Cuando se le agota el cambio , no tiene ningún piloto que lo indique . Juan lo ignoraba y , a la hora del patio , echa su única moneda de 200 pesetas para sacar una bolsa de patatas fritas . La máquina entrega la bolsa de patatas fritas pero se niega a devolver el cambio. Después de 10 minutos de infructuosos intentos , Juan decide realizar una compra por el importe restante .

Sabiendo que la máquina solamente ofrece :

Patatas : 50 pesetas Pipas : 15 pesetas

¿ Qué puede hacer Juan para no perder ni una sola peseta ?

Situación-Problema 14

Alberto , Ricardo , Jaime y Tomás han estado contando los resultados de un día de pesca :

1)Tomás ha cogido más que Jaime.

2)Alberto y Ricardo han pescado , entre los dos , lo mismo que Jaime y Tomás.

3)Alberto y Tomás no han cogido tantos como como Ricardo y Jaime .

¿ Sabrías decir , con estos datos , quién ha pescado más y quién menos ?.

Situación-Problema 15

Una mujer iba al mercado , y al preguntársele cuántos huevos llevaba , contestó que tomados en grupos de 11 , sobraban 5 y tomados en grupos de 23 , sobraban 3 .

¿ Cuál crees que puede ser el menor número de huevos que podía llevar ?

Situación-Problema 16

Elija un número cualquiera de tres cifras . Forme otro añadiendo las mismas cifras a las iniciales (Por ejemplo , si se ha pensado en 234 , habrá que formar el número 234234) . Divida el número nuevo así obtenido , por 7 . Ya estoy en condiciones de adivinar el resto de la división . Ahora , divida el cociente obtenido por 11. También aquí puedo adivinar el resto de la división . Divida ahora el nuevo cociente por 13 . También ahora puedo decir el resto que se obtiene . Por último , reste al último cociente el número inicial . Ahora , lo que puedo dar es el resultado .

¿ Es posible ? ¿ Qué se obtiene ?

Situación-Problema 17

Francisco se ha pasado parte de la mañana recogiendo las manzanas que se han ido cayendo de los manzanos del huerto al suelo Ha logrado llenar casi tres sacos que pueden contener alrededor de 50 manzanas cada una .

Para contar luego las manzanas recogidas , hace primero lotes de dos , luego lotes de tres y después lotes de cuatro , de cinco y por último lotes de seis . Cada vez le queda una manzana desaparejada , o sea le sobra una .

Sin embargo , descubre que al hacer lotes de once , no sobra ninguna . ¿ Sabrías decir cuántas manzanas recogió del huerto ?

Situación-Problema 18

Rosa colecciona lagartos , escarabajos y gusanos . Tiene más gusanos que lagartos y escarabajos juntos . En total , tiene en la colección doce cabezas y veintiséis patas.

Sabemos que un escarabajo tienen 6 patas , que un lagarto tiene 4 y que los gusanos carecen de patas .

¿Es posible encontrar el número de animales de cada tipo que tiene Rosa ? ¿ Cómo ?

Situación-Problema 19

Pep , amigo de Rosa , colecciona a su vez lagartos , escarabajos y arañas . Tiene más lagartos que arañas y escarabajos juntos . En total , tiene en la colección 12 cabezas y 66 patas .

Sabemos que un escarabajo tienen 6 patas , que un lagarto tiene 4 y que las arañas tienen 8 patas .

¿Es posible encontrar el número de animales de cada tipo que tiene Pep ? ¿ Cómo ?

Situación-Problema 20

Dispongo de peces y peceras . Si coloco un pez en cada pecera , me sobra un pez . Si meto dos animales en cada pecera , veo que me sobra una .

¿ Cuántos peces y cuántas peceras tengo . ?

Situación-Problema 21

Ana , Beatriz, Carmen y Damián se fueron a buscar setas . Volvieron con sus cestas llenas y procedieron a contar lo que había cogido cada uno :

- Damián tenía más que Carmen pero Ana tenía menos que ella (Carmen). Ana y Beatriz tenían juntas , tanto como Carmen y Damián juntos .

¿ Sabrías encontrar quién tenía más y quién menos ? .

Situación-Problema 22

Si tomamos por ejemplo el número 24 y sacamos el dígito de las unidades , obtenemos el número 2 que es un divisor del número inicial : 24 .

Todo número tal que , al suprimir su dígito de las unidades, el número resultante es un divisor del número inicial , es llamado número "troncadivisible". ¿ Sabrías decir cuántos de ellos son inferiores a 99 ?

Situación-Problema 23

Cuatro muchachos se encontraron un enorme tesoro de monedas de oro . De primera intención los cuatro muchachos cargaron con pesos iguales , pero los tres mayores vieron que podían cargar con más , y aumentaron su carga con la mitad de lo que habían tomado . Todavía los dos mayores se vieron capaces de aumentar su carga con un tercio de la que ya llevaban y así lo hicieron . Pero , al cargarlo de nuevo , el mayor se atrevió aún a añadir una quinta parte más de lo que llevaba . En total se llevaron entre los cuatro 138 Kg de oro. ¿ Cuánto cargó cada uno ?

Situación-Problema 24

Llegó un campesino al mercado y trajo una cesta de huevos . Los comerciantes le preguntaron : " Tienes muchos huevos en esa cesta? " . El campesino les contestó así: " Yo no recuerdo cuántos huevos hay en la cesta . Sé que mis 20 gallinas ponen al día como máximo 5 huevos cada una y llevo en la cesta todos los que pusieron ayer . Además recuerdo lo siguiente : coloque esos huevos en la cesta de dos en dos y me sobró uno ; entonces los puse en la cesta de tres en tres y seguía sobrando uno . Así sucesivamente me ha ido pasando lo mismo con grupos de cuatro , de cinco y de seis. Sin embargo , al hacer lotes de siete , no sobró ninguno . "

¿ Es posible , con estos datos , ayudar al campesino a decir el número de huevos que lleva en su cesta ?

Situación-Problema 25

Las personas que cumplieron 22 años en 1984 , tienen edad precisamente igual a la suma de las cifras del año , por cuanto 1984 = 1+9+8+4 = 22

Nacieron estas personas en 1962 (1984 - 1962 = 22) y , desde 1980 , año en el que cumplieron 18 años , hasta 1989 , cuando cumplieron 27 , su edad presenta esta particularidad.

¿ Podrías determinar la edad de las personas nacidas en el siglo actual y cuyo número de años , en 1997 , es igual a la suma de los valores de las cifras del año de su nacimiento ?

Situación-Problema 26

Tres muchachos tienen cada uno una cierta cantidad de manzanas . El primero les da a los otros tantas manzanas cuantas tiene cada uno . Después, el segundo muchacho les da a los otros tantas manzanas cuantas tiene ahora cada uno de ellos; a su vez, el tercer muchacho también les da a los otros tantas manzanas cuantas tiene cada uno de ellos en este momento. Después de esto, resulta que cada muchacho tienen 8 manzanas.

¿Cuántas manzanas tenía al principio cada uno de los muchachos ?

CONTENIDOS CURRICULARES DEL SISTEMA EDUCATIVO FRANCÉS

Le B.O.
N°10
15 OCT.
1998
HORS-SÉRIE

PROGRAMMES

MATHÉMATIQUES

I - PRÉSENTATION

Les objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques décrits pour les classes antérieures demeurent tout naturellement valables pour la classe de troisième : apprendre à relier des observations à des représentations, à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.
A la fin de cette classe terminale du collège, les élèves ont
- acquis des savoirs en calcul numérique (nombres décimaux et fractionnaires, relatifs ou non, outil proportionnel) et en calcul littéral ;
- acquis des éléments de base en statistiques, en vue d'une première maîtrise des informations chiffrées ;
- appris à reconnaître, dans leur environnement, des configurations du plan et de l'espace et des transformations géométriques usuelles.
Ils disposent aussi de connaissances et d'outils sur lesquels se construira l'enseignement au lycée.
Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.
On poursuivra les études expérimentales (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) en vue d'émettre des conjectures et de donner du sens aux définitions et aux théorèmes. On veillera, comme par le passé, à ce que les élèves ne confondent pas conjecture et théorème ; ils seront le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer et de rédiger des démonstrations.
On privilégiera l'activité de l'élève, sans négliger les temps de synthèse qui rythment les acquisitions communes.
L'ensemble des activités proposées dans cette classe permet de faire fonctionner les acquis antérieurs et de les enrichir. Les activités de formation, qui ne peuvent se réduire à la mise en oeuvre des compétences exigibles, seront aussi riches et diversifiées que possible.
Le programme de la classe de troisième a pour objectif de permettre
- en géométrie :
. de compléter d'une part, la connaissance de propriétés et de relations métriques dans le plan et dans l'espace, d'autre part, l'approche des transformations par celle de la rotation,
. de préparer l'outil calcul vectoriel, qui sera exploité au lycée ;
- dans le domaine numérique :
. d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels,
. d'amorcer les calculs sur les radicaux,
. de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et une mise en valeur de processus algorithmiques,
. de compléter les bases du calcul littéral et d'approcher le concept de fonction ;
- dans la partie " organisation et gestion de données " :
. de poursuivre l'étude des paramètres de position d'une série statistique,
. d'aborder l'étude de paramètres de dispersion en vue d'initier les élèves à la lecture critique d'informations chiffrées.
La rédaction de ce programme tend à :
- souligner la continuité et la cohérence des apprentissages, débutés en sixième,
- dégager clairement les points forts.
Il est tenu compte, dans la rédaction de ce programme, des rééquilibrages intervenus au cycle central et des informations recueillies lors de diverses évaluations des acquis mathématiques des élèves de troisième.
Le vocabulaire et les notations nouvelles (sin, tan, $\mapsto$, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$) seront introduits, comme dans les classes antérieures, au fur et à mesure de leur utilité ; la notation f(x) sera introduite avec prudence, en distinguant bien le rôle joué ici par les parenthèses, de celui qu'elles ont ordinairement dans le calcul littéral. Les symboles $\neq$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, ont été introduits au cycle central ; leur signification sera confirmée.
Le travail personnel des élèves, en classe et en dehors de la classe, est essentiel à leur formation, comme dans les classes antérieures. Les devoirs de contrôle sont d'abord destinés à vérifier l'acquisition des compétences exigibles. Les autres travaux peuvent avoir des objectifs beaucoup plus larges et revêtir des formes diverses, permettant éventuellement la prise en compte de la diversité des projets des élèves. La régularité d'un travail extérieur à la classe est importante pour les apprentissages. En particulier, les travaux individuels de rédaction concourent efficacement à la mémorisation des savoirs et savoir-faire, au développement des capacités de raisonnement et à la maîtrise de la langue ; la correction individuelle du travail d'un élève est une façon de reconnaître la qualité de celui-ci et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser.

II - EXPLICITATION DES CONTENUS DE LA CLASSE DE TROISIÈME

Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés par le programme.

A - Travaux géométriques

Les objectifs des travaux géométriques demeurent ceux des classes antérieures du collège : représentation d'objets usuels du plan et de l'espace ainsi que leur caractérisation, calcul de grandeurs attachées à ces objets, poursuite du développement des capacités de découverte et de démonstration, mises en oeuvre en particulier dans des situations non calculatoires. Les configurations usuelles déjà étudiées sont complétées par les polygones réguliers pour le plan, et par la sphère pour l'espace ; de même les transformations du plan sont complétées par la rotation. Les travaux sur les configurations et les solides permettent de mobiliser largement les résultats des classes antérieures ; ceux-ci sont enrichis en particulier de la réciproque du théorème de Thalès et de l'étude de l'angle inscrit. On favorise ainsi le développement des capacités d'initiative des élèves sans exigence prématurée d'autonomie lors des évaluations. L'introduction de la notation vectorielle et de l'addition des vecteurs, qui constitue une initiation au cacul vectoriel, est l'un des aboutissements du travail effectué au cycle central sur le parallélogramme et la translation.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
1 - Géométrie dans l'espace Sphère	Savoir que la section d'une sphère par un plan est un cercle. Savoir placer le centre de ce cercle et calculer son rayon connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère. Représenter une sphère et certains de ses grands cercles.	On mettra en évidence les grand cercles de la sphère, les couples de points diamétralement opposés. On examinera le cas particulier où le plan est tangent à la sphère. On fera le rapprochement avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour les questions relatives aux méridiens et parallèles.
Problèmes de sections planes de solides	Connaître la nature des sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arête. Connaître la nature des sections du cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à son axe. Représenter et déterminer les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.	Des manipulations préalables (sections de solides en polystyrène par exemple) permettent de conjecturer ou d'illustrer la nature des sections planes étudiées. Ce sera une occasion de faire des calculs de longueur et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autres rubriques ou les années antérieures. À propos de pyramides, les activités se limiteront à celles dont la hauteur est une arête latérale et aux pyramides régulières qui permettent de retrouver les polygones étudiés par ailleurs.
2 - Triangle rectangle : relations trigonométriques, distance de deux points dans un repère orthonormé du plan	Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux côtés du triangle. Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées : - du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné, - de l'angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, calculer la distance de deux points dont on donne les coordonnées.	La définition du cosinus a été vue en quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront introduits comme rapports de longueurs ou à l'aide du quart de cercle trigonométrique. On établira les formules $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On n'utilisera pas d'autre unité que le degré décimal. Le calcul de la distance de deux points se fera en référence au théorème de Pythagore, de façon à visualiser ce que représentent différence des abscisses et différence des ordonnées.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
3 - Propriété de Thalès	Connaître et utiliser dans une situation donnée les deux théorèmes suivants : - Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ - Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A,B,M et les points A,C,N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.	Il s'agit d'un prolongement de l'étude faite en classe de quatrième. L'étude de la propriété de Thalès est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique du plan et de l'espace. La réciproque est formulée en tenant compte de l'ordre relatif des points sur chaque droite. L'utilisation d'un logiciel de construction géométrique peut permettre de créer des situations reliées au théorème de Thalès, notamment lors des activités d'approche de la propriété par la mise en évidence de la conservation des rapports. Le travail de construction de points définis par des rapports de longueurs permet de mettre en évidence l'importance de la position relative de ces points sur la droite. On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.
4 - Vecteurs et translations Égalité vectorielle	Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D. Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme ABDC éventuellement aplati.	Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A,A'), (B,B'), (C,C')... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \ldots$ L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur. On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide de milieux de [AD] et [BC] : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu. Si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
Composition de deux translations ; somme de deux vecteurs	Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la relier à la composée de deux translations. Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme.	Des activités de construction conduiront à l'idée que la composée de deux translations est une translation. À partir de ce résultat, à établir ou admettre, on définira la somme de deux vecteurs. On introduira le vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ ainsi que l'opposé d'un vecteur. Aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Coordonnées d'un vecteur dans le plan muni d'un repère	Lire sur un graphique les coordonnées d'un vecteur Représenter, dans le plan muni d'un repère, un vecteur dont on donne les coordonnées.	Les coordonnées d'un vecteur seront introduites à partir de la composition de deux translations selon les axes.
	Calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités de l'un quelconque de ses représentants.	
	Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	
Composition de deux symétries centrales	Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation.	Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle.
	Connaître le vecteur de la translation composée de deux symétries centrales.	On pourra utiliser, pour sa commodité, la notation $2\,\overrightarrow{AB}$ pour désigner $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$. Tout commentaire sur le produit d'un vecteur par un entier est hors programme, ainsi que la notation «o» pour désigner la composée.
5. Rotation, angles, polygones réguliers		
Images de figures par une rotation	Construire l'image par une rotation donnée d'un point, d'un cercle, d'une droite, d'un segment et d'une demi-droite.	Les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles seront dégagées des propriétés d'une rotation (conservation des longueurs, des alignements, des angles, des aires). Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices simples de construction. Dans des pavages, on rencontrera des figures invariantes par rotation. Les configurations rencontrées permettent d'utiliser les connaissances sur les cercles, les tangentes, le calcul trigonométrique...
Polygones réguliers	Construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier connaissant son centre et un sommet.	Les activités sur les polygones réguliers, notamment leur tracé à partir d'un côté, porteront sur le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone et éventuellement l'octogone. Certaines d'entre elles pourront conduire à utiliser la propriété de l'angle inscrit. Les activités de recherche de transformations laissant invariant un triangle équilatéral ou un carré sont l'occasion de revenir sur les transformations étudiées au collège.
Angle inscrit	Comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc.	On généralise le résultat relatif à l'angle droit, établi en classe de quatrième. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné, autre qu'un angle droit, est hors programme.

B - Travaux numériques

Comme dans les classes antérieures, la résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue un objectif de cette partie du programme ; elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. S'y ajoutent certains problèmes numériques purs, qui jouent un rôle dans l'appropriation de concepts importants, tels que ceux de racine carrée ou de fraction irréductible. Ce sont ces études qu'il convient de privilégier et non pas la technicité.
La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures :
- maîtrise des règles opératoires de base,
- acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres,
- réflexion et initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre selon la situation.

Pour le calcul littéral, un des objectifs à viser est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral reste simple à effectuer et où il présente du sens, que le professeur permettra au plus grand nombre de recourir spontanément à l'écriture algébrique lorsque celle-ci est pertinente.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
1 - Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$; $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$. Connaître les égalités : $(a+b)(a-b) = a^2- b^2$; $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2 = (100+1)^2 = 100^2+200+1$, $(x+5)^2-4 = (x+5)^2-2^2 = (x+5+2)(x+5-2)$.	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : - utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; - utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.
2 - Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées) Racine carrée d'un nombre positif	Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a. Sur des exemples numériques où a est un nombre positif, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$. Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a désigne un nombre positif.	La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, qui a déjà été utilisée en classe de quatrième, fournit une valeur approchée d'une racine carrée. Le travail mentionné sur les identités remarquables permet d'écrire des égalités comme $(\sqrt{2} - 1).(\sqrt{2} + 1) = 1$, $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.
Produit et quotient de deux radicaux	Sur des exemples numériques, où a et b sont deux nombres positifs, utiliser les égalités : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}$, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$.	Ces résultats, que l'on peut facilement démontrer à partir de la définition de la racine carrée d'un nombre positif, permettent d'écrire des égalités telles que $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt{4/3} = 2/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$. On habituera ainsi les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
3 - Équations et inéquations du premier degré		
Ordre et multiplication	Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.	On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment celles de tests par substitution de valeurs numériques à des lettres.
Inéquation du premier degré à une inconnue	Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.	
Système de deux équations à deux inconnues	Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.	Pour l'interprétation graphique, on utilisera la représentation des fonctions affines.
Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant	Résoudre une équation mise sous la forme $A.B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.	L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est, elle, hors programme. Les problèmes sont issus des différentes parties du programme. Comme en classe de quatrième, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.
4 - Nombres entiers et rationnels		Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.
Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

C - Organisation et gestion de données - Fonctions

L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples très simples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre un nombre à un autre nombre. Les exemples mettant en jeu des fonctions peuvent être issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. L'utilisation des expressions "est fonction de" ou "varie en fonction de", déjà amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et sera associée à l'introduction prudente de la notation $f(x)$, où x a une valeur numérique donnée. L'équation générale d'une droite sous la forme $ax+by+c=0$ n'est pas au programme du collège.
Pour les séries statistiques, le programme conduit à poursuivre l'étude des paramètres de position et à aborder l'étude de la dispersion. L'éducation mathématique rejoint ici l'éducation du citoyen : prendre l'habitude de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique et donc sur la perte d'information, sur les possibilités de généralisation, sur les risques d'erreurs d'interprétation et sur leurs conséquences possibles.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
1 - Fonction linéaire et fonction affine		
Fonction linéaire	Connaître la notation $x \mapsto ax$, pour une valeur numérique de a fixée.	La définition d'une fonction linéaire, de coefficient a, s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est "je multiplie par a". Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5% c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5% c'est multiplier par 0,95.
	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.	L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation $x \mapsto ax$ pour la fonction. À propos de la notation des images $f(2)$, $f(-0,25)$..., on remarquera que les parenthèses y ont un autre statut qu'en calcul algébrique.
	Représenter graphiquement une fonction linéaire. Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme $y = ax$. On interprétera graphiquement le nombre a, coefficient directeur de la droite. C'est une occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).
Fonction affine. Fonction affine et fonction linéaire associée	Connaître la notation $x \mapsto ax + b$ pour des valeurs numériques de a et b fixées. Déterminer une fonction affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.	Pour des valeurs de a et b numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme "je multiplie par a, puis j'ajoute b". La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite, qui a une équation de la forme $y = ax + b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de x et de y.
	Représenter graphiquement une fonction affine. Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.	Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, on entraînera les élèves à travailler à partir de deux points pris sur la droite et à exploiter la représentation graphique. On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine. Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance spécifique n'est exigible sur ce sujet.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
2 -Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs		
Applications de la proportionnalité	Dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre, - représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative, - lire et interpréter une telle représentation.	En classe de troisième il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité commencée de fait dès l'école. De nombreuses occasions sont données de conjecturer ou de reconnaître, puis d'utiliser la proportionnalité de valeurs ou d'accroissements dans les différents domaines et sections du programme. Les situations mettant en jeu des grandeurs restent privilégiées pour mettre en place et organiser des calculs faisant intervenir la proportionnalité, en particulier les pourcentages. Par exemple, au delà des compétences exigibles, on pourra étudier des problèmes de mélange.
Grandeurs composées Changement d'unités		Les grandeurs produits sont, après les grandeurs quotients déjà rencontrées en classe de quatrième, les grandeurs composées les plus simples. On pourra remarquer que les aires et les volumes sont des grandeurs produits. D'autres grandeurs produits et grandeurs dérivées pourront être utilisées : passagersxkilomètres, kWh, francs/kWh laissant progressivement la place à euros/kWh,... En liaison avec les autres disciplines (physique, chimie, éducation civique...), on attachera de l'importance à l'écriture correcte des symboles et à la signification des résultats numériques obtenus.
Calculs d'aires et de volumes	Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. Calculer le volume d'une boule de rayon donné.	Le travail avec un formulaire, qui n'exclut pas la mémorisation, permettra le réinvestissement et l'entretien d'acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes des solides étudiés dans ces classes.
Effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes	Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, - l'aire d'une surface est multipliée par k^2, - le volume d'un solide est multiplié par k^3.	Des activités de comparaison d'aires, d'une part, et de volumes, d'autre part, seront autant d'occasions de manipulation de formules et de transformation d'expressions algébriques. Ce travail prend appui sur celui fait en géométrie dans l'espace.
3 - Statistique		Il s'agit essentiellement d'une part, de faire acquérir aux élèves les premiers outils de comparaison de séries statistiques, d'autre part de les habituer à avoir une attitude de lecteurs responsables face aux informations de nature statistique.
Caractéristiques de position d'une série statistique	Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau, ou par une représentation graphique), proposer une valeur médiane de cette série et en donner la signification.	On repère, en utilisant effectifs ou fréquences cumulés, à partir de quelle valeur du caractère on peut être assuré que la moitié de l'effectif est englobée. Les exemples ne devront soulever aucune difficulté au sujet de la détermination de la valeur de la médiane.
Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique	Une série statistique étant donnée, déterminer son étendue ou celle d'une partie donnée de cette série.	L'étude de séries statistiques ayant même moyenne permettra l'approche de la notion de dispersion avant toute introduction d'indice de dispersion. On introduira l'étendue de la série ou de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes. On pourra ainsi aborder la comparaison de deux séries en calculant quelques caractéristiques de position et de dispersion, ou en interprétant des représentations graphiques données.
Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique		Les tableurs que l'on peut utiliser sur tous les types d'ordinateurs permettent, notamment en liaison avec l'enseignement de la technologie, d'appliquer de manière rapide à des données statistiques les traitements étudiés.

MATHÉMATIQUES : TABLEAU SYNOPTIQUE POUR LE COLLÈGE

	Classe de Sixième	Classe de Cinquième	Classe de Quatrième	Classe de Troisième
Configurations, constructions et transformations.	Cercle. Triangles, triangles particuliers. Rectangle, losange. Transformation de figures par symétrie axiale. Parallélépipède rectangle.	Parallélogramme. Construction de triangles (instruments et/ou logiciel géométrique). Concours des médiatrices d'un triangle. Transformation de figures par symétrie centrale. Prismes droits, cylindres de révolution.	Triangle : théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés. Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : proportionnalité de longueurs. Droites remarquables d'un triangle, leur concours. Triangle rectangle et son cercle circonscrit. Transformation de figures par translation. Pyramides, cône de révolution.	Polygones réguliers. Théorème de Thalès et réciproque. Transformation de figures par rotation; composition de symétries centrales ou de translations. Vecteurs, somme de deux vecteurs. Sphère. Problèmes de sections planes de solides.
Repérage, distances et angles.	Abscisses positives sur une droite graduée. Repérage par les entiers relatifs, sur une droite graduée (abscisse) et dans le plan (coordonnées).	Repérage sur une droite graduée, distance de deux points. Repérage dans le plan (coordonnées). Inégalité triangulaire.	Relation de proportionnalité : représentation graphique. Théorème de Pythagore et sa réciproque. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. Cosinus d'un angle aigu.	Représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine. Coordonnées du milieu d'un segment. Coordonnées d'un vecteur. Distance de deux points. Trigonométrie dans le triangle rectangle.
Grandeurs et mesures.	Périmètre et aire d'un rectangle, aire d'un triangle rectangle. Longueur d'un cercle. Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage.	Somme des angles d'un triangle. Aire du parallélogramme, du triangle, du disque. Mesure du temps. Aire latérale et volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.	Grandeurs quotients courantes. Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.	Grandeurs composées. Aire de la sphère, volume de la boule.
Nombres et calcul numérique.	Ecriture décimale et opérations +, -, ×. Division par un entier : quotient et reste dans la division euclidienne, division approchée. Troncature et arrondi. Ecriture fractionnaire du quotient de deux entiers, simplifications.	Successions de calculs, priorités opératoires. Produit de fractions. Comparaison, somme et différence de fractions de dénominateurs égaux ou multiples. Comparaison, somme et différence de nombres relatifs en écriture décimale.	Opérations (+, -, ×, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée). Puissances d'exposant entier relatif. Notation scientifique des nombres. Touches $\sqrt{\ }$ et cos d'une calculatrice ; inverses.	Calculs comportant des radicaux. Fractions irréductibles. Exemples simples d'algorithmes et applications numériques sur ordinateur.
Calcul littéral.	Substitution de valeurs numériques à des lettres dans une formule.	Egalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$. Test d'une égalité ou d'une inégalité par substitution de valeurs numériques à une ou plusieurs variables.	Développement d'expressions. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Equations du premier degré à une inconnue.	Factorisation (identités). Problèmes se ramenant au premier degré. Inéquations. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.
Fonctions numériques.	Application d'un taux de pourcentage. Changements d'unités de longueur, d'aire. Etude d'exemples relevant ou non de la proportionnalité.	Mouvement uniforme. Calcul d'un pourcentage, d'une fréquence. Changements d'unités de temps et de volume. Coefficient de proportionnalité.	Vitesse moyenne. Calculs faisant intervenir des pourcentages. Changements d'unités pour des grandeurs quotients courantes. Applications de la proportionnalité.	Etude générale de l'effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des aires, des volumes. Problèmes de changements d'unités pour des grandeurs composées. Fonctions linéaires et affines.
Représentation et organisation de données.	Exemples conduisant à lire, à établir des tableaux, des graphiques.	Classes, effectifs d'une distribution statistique. Fréquences. Diagrammes à barres, diagrammes circulaires.	Effectifs cumulés. Fréquences cumulées. Moyennes. Initiation à l'usage de tableurs-grapheurs.	Approche de la comparaison de séries statistiques.

L. SCIENTIFICO "AMALDI" - ISTITUTO COMPRENSIVO DI BARCELLONA
PIANO DI LAVORO ANNUALE DI MATEMATICA

Classe 1° sez.A Anno scolastico 2009/2010

(Prof. Castro Giovanni)

La classe 1°A è costituita da 24 alunni complessivamente in possesso di buone capacità e di una sufficiente preparazione di base. Sono presenti tre alunni ripetenti già integratisi nella classe. Risulta invece carente l'aspetto disciplinare, gli alunni infatti mancano spesso di capacità di autocontrollo e faticano ad assumere un comportamento adeguato e maturo soprattutto nei momenti in cui l'attività didattica prevede interventi individualizzati.
La valutazione della situazione di partenza è stata effettuata attraverso la somministrazione di un test d'ingresso e attraverso verifiche orali.

Per favorire il superamento di incertezze e di lacune si svolgeranno delle attività di sostegno e di recupero, inizialmente durante le ore di lezione, in seguito, se necessario,fuori dell'orario di insegnamento.
Vengono fissati i seguenti obiettivi: utilizzare una corretta terminologia; sviluppare capacità di analisi e di sintesi; esaminare criticamente testi; sviluppare capacità di tipo induttivo- deduttivo.
Gli obiettivi minimi in termini di conoscenze e capacità sono i seguenti: conoscenza dei contenuti essenziali in un linguaggio semplice ma appropriato; correttezza dei procedimenti logici.
Le metodologie utilizzate saranno: lezione frontale e partecipata.
Ci si avvarrà dei seguenti mezzi didattici: libri di testo e sussidi audiovisivi.
Il livello di preparazione della classe sarà verificato attraverso prove scritte, orali, quesiti a scelta multipla e/o a risposta aperta.
La valutazione sarà di tipo formativo al termine di ogni modulo didattico, sommativa al termine di ogni quadrimestre. Si valuterà il grado di apprendimento e di acquisizione, nonché la partecipazione, il comportamento e l'interesse.
Per quanto concerne i contenuti disciplinari, ci si propone di trattare i seguenti argomenti:
Geometria: segmenti, angoli, operazioni con i segmenti e con gli angoli, angoli opposti al vertice, criteri di congruenza dei triangoli, proprietà del triangolo isoscele, relazioni fra i lati di un triangolo, rette parallele e perpendicolari, rette tagliate da una trasversale,criterio di parallelismo, teorema

dell'angolo esterno, somma degli angoli interni di un triangolo e di un poligono, quadrilateri notevoli.

Algebra: numeri relativi e operazioni con i numeri relativi, monomi e operazioni relative, polinomi e operazioni relative, prodotti notevoli, divisioni tra polinomi, divisioni con la regola di Ruffini, scomposizione di polinomi in fattori, M.C.D. e m.c. m. di polinomi, frazioni algebriche, semplificazioni di una frazione algebrica, operazioni con le frazioni algebriche, equazioni di 1° grado intere e fratte, disequazioni di 1° grado, problemi di 1° grado.

Gli insiemi, le rappresentazioni di un insieme, i sottoinsiemi, le operazioni con gli insiemi, l'insieme delle parti e la partizione di un insieme, relazioni e funzioni e loro proprietà.

Barcellona 20/ 10/ 2009 Il docente

ANNO SCOLASTICO: 2009-2010
LICEO SCIENTIFICO "AMALDI" DI BARCELLONA
CLASSE: SECONDA LICEO
SEZIONE: A
MATERIA DI INSEGNAMENTO: **MATEMATICA** (5 ore settimanali)
INSEGNANTE: LUDOVICA SERGIACOMO

PIANO DI LAVORO PREVENTIVO

SITUAZIONE DELLA CLASSE

La classe e' composta da 21 alunni di cui 18 provenienti dalla prima liceo di codesto istituto e due studenti che hanno frequentato uno la seconda classe di liceo scientifico, l'altro ripetente, la terza liceo, e una studentessa ripetente che ha frequentato la la seconda liceo scientifico provenienti da tre diverse citta italiane.
Dalle prime ricognizioni scritte e orali la classe appare disomogenea per attitudini ed interessi; l'abitudine allo studio autonomo è ancora variegata sia per qualità, sia per quantità.
La valutazione della situazione di partenza della classe è stata condotta tramite continue esercitazioni basate su argomenti svolti nel corso della prima liceo. Si è rilevato che la classe e' abbastanza ricettiva, con alcuni alunni, dotati di buone capacità rielaborative ed applicative, ma nel contempo si sono riscontrate ancora notevoli difficoltà da parte di altri alunni, che evidenziano lacune di base e incertezze nell'organizzare un approccio razionale ai problemi proposti.

FINALITÀ

promuovere le facoltà sia intuitive che logiche;

- educarere ai procedimenti euristici, ma anche ai processi
- di astrazione e di formazione dei concetti;
- esercitare a ragionare induttivamente e deduttivamente,
- sviluppare le attitudini sia analitiche che sintetiche
- conducendo così all'uso di linguaggio preciso e alla
- coerenza argomentativa.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO

- individuare proprietà invarianti per trasformazioni semplici
- dimostrare proprietà di figure geometriche
- utilizzare consapevolmente le tecniche e le procedure di calcolo studiate
- riconoscere e costruire semplici relazioni e funzioni
- comprendere il senso dei formalismi matematici introdotti;
- cogliere analogie strutturali
- matematizzare semplici situazioni problematiche in vari ambiti disciplinari

- riconoscere le regole della logica e del corretto ragionare
- adoperare i metodi, i linguaggi e gli strumenti informativi introdotti
- inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico

CONTENUTI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

- Ripasso: prodotti notevoli, scomposizione polinomi, divisione, frazioni
- algebriche; equazioni, problemi e sistemi di I grado. Congruenza triangoli e
- similitudine.
- Disequazioni di I grado, intere fratte e sistemi.
- Piano cartesiano e problemi con la retta.
- Insiemi numerici, numeri reali.
- Calcolo con radicali, razionalizzazioni.
- Equazioni, sistemi e problemi di II grado.
- Disequazioni di II grado.
- Equazioni irrazionali.
- Disequazioni fratte e sistemi di vario grado.
- Ripasso: teorema angoli opposti al vertice, criteri di congruenza triangoli,
- perpendicolarita', parallelismo (criteri), teorema angolo esterno e somma
- angoli triangolo, quadrilateri importanti.
- Punti notevoli di un triangolo.
- Circonferenza e cerchio.
- Equivalenza dei poligoni.
- Teorema di Talete.
- Similitudine.
- Teoremi di Pitagora e di Euclide.
- Applicazioni dell'algebra alla geometria.

METODOLOGIE: VALUTAZIONI E VERIFICHE.

Il lavoro sarà suddiviso in sotto-unità didattiche brevi per facilitare lo svolgimento di percorsi differenziati.
Si privilegerà la lezione frontale che sara' quanto più possibile interattiva: dopo la presentazione del problema verranno sollecitate ipotesi di soluzione. Dopo averle analizzate in dettaglio si passerà alla trattazione più teorica con relativi esempi.

L'esercitazione scritta sarà attuata attraverso la risoluzione di numerosi esercizi e quesiti strutturati secondo diverse tipologie, con graduazione del livello di difficoltà.
Verrà, inoltre, stimolato un costante uso del libro di testo per fornire un concreto punto di riferimento ed abituare gli alunni ad uno studio più sistematico, ordinato e motivato e favorire l'acquisizione di una mentalità scientifica.
Si faranno svolgere, in alcuni momenti, delle esercitazioni riepilogative scritte. Gli alunni, divisi sia in gruppi non omogenei, sia omogenei per abituarli alla ricerca, alla scoperta, al confronto e alla collaborazione. Tali attività saranno anche finalizzate al recupero in itinere e contemporaneamente al potenziamento-approfondimento.
La verifica formativa sarà intesa soprattutto come dialogo non solo con il singolo, ma anche con tutta la classe, in relazione alle lezioni svolte. A queste interrogazioni guidate verranno talvolta abbinati tests a risposta multipla per il controllo dell'apprendimento e si cercherà di vagliare il lavoro svolto a casa ed osservare il modo in cui gli alunni sono in grado di prendere appunti e rielaborarli..
Per la verifica sommativa, l'interrogazione orale non guidata e le prove scritte di diverso taglio tipologico saranno atti a valutare l'acquisizione delle conoscenze, delle competenze, lo sviluppo delle capacità di analisi.
Si effettueranno oltre alle interrogazioni orali anche verifiche sritte per la discilplina della fisica.
Si utilizzeranno, inoltre tutte quelle strategie di supporto e di recupero che verranno evidenziate dal Collegio dei docenti.

Barcellona, 15 ottobre 2009

L'insegnante Ludovica Sergiacomo

Sergiacomo

CONTENUTI DI FISICA

Il moto rettilineo. Velocità media ed istantanea. Legge oraria. Il moto rettilineo uniforme. Accelerazione. Il moto uniformemente accelerato.

Le grandezze scalari e vettoriali. Il moto in 2 dimensioni: spostamento; velocità ed accelerazione come grandezze vettoriali. Le operazioni tra vettori. Il moto circolare uniforme, il moto parabolico, il moto armonico.

Le forze e la loro misura. Le forze fondamentali in natura. L'equilibrio di un corpo. La caduta dei gravi. Momento di una forza. Equilibrio di un punto materiale. Le forze d'attrito. I principi della dinamica. Massa e peso. Il piano inclinato. Le forze ed i moti, la forza peso, la forza elastica, la forza centripeta, il pendolo semplice. Lavoro ed energia. Energia cinetica e potenziale. Conservazione dell'energia meccanica. Le forze conservative. Impulso di una forza. La quantità di moto. I sistemi isolati e la conservazione della quantità di moto. Gli urti elastici e non elastici. Le leggi di Keplero. La legge di gravitazione universale. Il concetto di campo, il campo gravitazionale.

La meccanica dei fluidi (cenni).