DISCURSO INAUGURAL

DISCURSO INAUGURAL

QUE EN LA

SOLEMNE APERTURA DEL CURSO ACADÉMICO DE 1889 Á 1890

LEYÓ

ANTE EL CLAUSTRO

DE LA

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

EL DOCTOR

D. SANTIAGO MUNDI Y GIRÓ

CATEDRÁTICO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

BARCELONA

IMPRENTA DE JAIME JEPÚS

IMPRESOR DE LA UNIVERSIDAD

CALLE DEL NOTARIADO, 9 (ANTES PASAJE FORTUNY)

1889

Excmo. é Illmo. Sr.

Señores:

Día de gala y júbilo ha de ser hoy, ya que se abren de par en par las puertas de este templo de la Ciencia y volvemos á reunirnos con nuestros queridos alumnos, para dar comienzo á un nuevo curso. Todo es júbilo hoy en nuestra ilustre Universidad, menos para este humilde profesor que viene á cumplir un deber ineludible, á obedecer un mandato emanado de nuestro respetable jefe. No es fingimiento de modestia, sino convencimiento profundo el que tengo de mi inferioridad respecto á todos los compañeros que integran este sabio claustro. ¿Cuál no será, pues, mi temor al dirigiros la palabra en tan solemne acto? Además, cuando recibí el oficio en que se me concedía este inmerecido honor, no podía vislumbrar los trastornos y pérdidas que en mi familia debían sobrevenir. Y ciertamente, cuando el luto invade el corazón, por más que nos cubramos con traje de gala, la mente está inhábil para coordinar ideas. No obstante, me alienta la seguridad que tengo de vuestra benevolencia, comparable sólo á vuestro indiscutible mérito, y por esta razón no dudo ni un solo momento que me otorgaréis una indulgencia sin límites, pues la necesito bajo tantos conceptos.

Como los doctos varones que me han precedido en esta tribuna establecieron la conveniente costumbre de explicarnos la índole de la asignatura que tienen á su cargo, sus fundamentos, sus aplicaciones ó algún punto concreto con ella relacionado, no me he de separar del inveterado y útil derrotero por ellos abierto con tanta sagacidad é ilustración. Son dos las asignaturas que tengo la honra de explicar en esta Universidad: la Geometría analítica, que obtuve por rigurosa oposición, y la Geometría general, que el Gobierno de nuestra nación, en su afán de hacer economías en la enseñanza, se dignó encargar, sin retribución ninguna, al catedrático de analítica. Aunque sea declarando mi ineptitud, debo decir que jamás pude comprender lo que pretende significar la ley de Instrucción pública aplicando el epíteto general después de la palabra Geometría. ¿Quizás falta la generalidad á la analítica, que estudia las propiedades de las figuras valiéndose del poderoso y generalizador análisis algebraico? ¿Quizás no estudian la extensión con tanta generalidad como la analítica, la descriptiva, los cuaterniones, la proyectiva y todas las geometrías actuales, exceptuando la elemental, que aun conserva el sello característico de individualidad que le imprimió el gran Euclides? Convencido de que Geometría general no puede significar esta última, y que en cambio puede admitirse como tal cualquiera rama de la superior, decidíme á explicar la proyectiva, atendiendo á su evidente importancia, á su ausencia de la enseñanza oficial y no temiendo, por otra parte, que haya nadie que se atreva á poner en duda su manifiesta generalidad. De modo que á esta Geometría, que se la conoce con los nombres de proyectiva, superior, pura, sintética, moderna, de posición, de transversales, *der Lage* y no sé cuantos más, la conocen mis alumnos con otro nombre distinto aún, con el de Geometría general, denominación que no es menos propia que algunas de las anteriores ni que la adoptada por un compañero distinguidísimo de la Central, en sus brillantes explicaciones sobre Geometría descriptiva. Con vuestro permiso, excelentísimo señor, disertaré sobre los *Fundamentos é importancia de la Geometría proyectiva,* sintiendo que asunto de tanto interés deba ser tratado con este lenguaje sencillo y llano que acostumbro á emplear siempre, desposeído de dotes oratorias que desearía tener para poder corresponder dignamente á la elevación de vuestros conocimientos.

I

Llamamos *forma geométrica* (1) la reunión bajo una ley cualquiera de una serie ilimitada de elementos simples, puntos, rectas ó planos. La forma será de primera, segunda ó tercera especie, según el número de elementos de naturaleza distinta que contenga. Es evidente que variando la ley característica se obtendrán otras tantas formas, de modo que el número de éstas ha de ser indefinido; mas entre ellas existen seis muy sencillas, que pueden considerarse como fundamentales en la Geometría de posición: son las de primera especie, alineación, haz de radios y haz de planos; de segunda, el sistema plano y la radiación, y de tercera, el espacio.

La *alineación,* infinidad de puntos en línea recta, tiene

---

(1) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin. 1832.

como elemento el punto y como lugar geométrico la recta; el *haz de radios*, reunión de todas las rectas (radios) que, estando en un mismo plano, pasan por un mismo punto (centro), supone elementos los radios, y lugar el plano y el centro; y en el *haz de planos*, constituído por todos los que pasan por una recta (eje), son elementos los planos y su lugar el eje. Suponemos entre los elementos de las tres formas una rigidez tal, que cualquier movimiento que se dé á la forma no altera las distancias entre sus puntos ó los ángulos entre sus rectas ó planos. El *sistema plano*, infinidad de puntos y de rectas de un plano, y la *radiación*, conjunto de todos los planos y rectas que pasan por un punto (centro), reconocen como elementos, además de los simples, las formas de primera especie. El *espacio*, como forma, es el espacio ilimitado de tres dimensiones, con todos los puntos, rectas y planos que contenga, siendo sus elementos, además de éstos, las formas de primera y segunda especie. Hay quien pretende (1) excluir el espacio entre las formas fundamentales, con el pretexto de que contiene en sí á todas las demás; pero entonces tampoco deberían incluirse las de segunda especie, pues también contienen á su vez la alineación y los dos haces. Á cada una de las seis formas fundamentales que acabamos de definir corresponde una geometría particular, mientras que el estudio de sus relaciones mutuas es el objeto principal de la Geometría de posición.

II

La teoría de las *proyecciones*, empleada ya por los astrónomos de la antigüedad, se aplica hoy á la investigación de

(1) Staudigl, *Lehrbuch der neuren Geometrie für höhere Unterrichts. Anstalten und zum Selbststudium*. Wien, 1871.

nuevas verdades. Débese al genio de Desargues la prioridad de esta aplicación, que en el siglo actual ha tomado un desarrollo considerable, debido á las investigaciones de Monge, Poncelet, Steiner y Staudt. En rigor, en toda proyección geométrica hay dos actos distintos: una verdadera proyección y una sección. Trazamos, por los puntos que deseamos proyectar, líneas ó superficies proyectantes, sujetas á una ley determinada, y cortamos después por una superficie ó por una línea, donde queda dibujada la proyección. Cuando las proyectantes sean rectas que partan de un centro fijo y la sección esté producida por un plano, tendremos la proyección cónica, polar, central ó perspectiva. Si en el centro colocamos un observador, dirigirá á cada punto un radio visual proyectado ó arrojado desde su pupila, radio que estará cortado por el cuadro ó plano de proyección en otro punto, imagen fiel del dado, desde el momento que ambos están en una visual común. En vez de proyectar desde un punto y cortar por un plano, podemos proyectar desde una recta y cortar por otra recta. Cada punto da origen entonces á un plano proyectante que, cortado por el eje de proyección, produce otro punto, imagen ó proyección del primero. Se comprende fácilmente cómo se puede pasar por proyección ó por sección de una forma fundamental á otra de la misma especie, correlación que es el objeto primordial de la proyectiva.

De momento nos permitirá decidirnos en la espinosa cuestión de si debemos considerar, como Desargues, la recta con un solo punto en el infinito, siendo en este caso cerrada, ó si, por el contrario, debe suponerse ésta abierta con dos puntos en el infinito, como en la Pangeometría de Gauss, ó sin ningún punto impropio, como pretende Riemann. La proyección de una alineación desde un punto exterior, constituyendo el haz de radios; la observación de que á cada elemento de éste corresponde un solo punto de la alineación, y la verdad tan conocida de que habrá un solo radio paralelo, nos obliga á admitir las siguientes conclusiones de Desargues (1): «una recta debe considerarse prolongada hasta el infinito en sus dos sentidos, reuniéndose sus dos extremos», «las rectas paralelas tienen sus puntos en el infinito comunes», tesis sublimes que causaron la admiración en el siglo XVII, que fueron aceptadas y defendidas con entusiasmo por Pascal, Descartes, Leibnitz y Newton, y más ó menos previstas por Galileo, que consideraba la recta como una circunferencia de radio infinito. Las consecuencias que de ellas se deducen son muchas y tienden á generalizar la Ciencia; citaremos como ejemplos: dos rectas situadas en un plano se cortan siempre, cada punto en el infinito determina una dirección; así es que el problema «trazar por un punto una paralela á una recta», es caso particular de otro más general: «trazar una recta que pase por dos puntos».

El lugar geométrico de puntos en el infinito, correspondientes á las varias direcciones de rectas situadas en planos de igual orientación, es rectilíneo (2), pues corta á cada recta en un solo punto. El plano es ilimitado en todos sentidos y está cerrado por la recta en el infinito, que debe conceptuarse como paralela á todas las del plano.

Asimismo, todos los puntos y rectas en el infinito están en una superficie, que no vacilamos en llamarla plana (3), ya que tiene de cada plano una recta y de cada recta un punto. Este plano en el infinito, que cierra el espacio inmenso, es paralelo á todos los planos y á todas las rectas.

No extrañamos que estos elementos infinitamente lejanos repugnen á aquellos filósofos que no aceptan otro ingreso para los conocimientos humanos que nuestros imperfectos sentidos; pues jamás lo transcendente pudo adquirirse sino

---

(1) Desargues, *Œuvres, reunies et publiées par Poudra*. Paris, 1864.

(2) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris, 1822.

(3) Idem, *Idem id.*

con el poderoso auxilio de la razón. También repugnan estos elementos á los que, militando en escuela filosófica antitética de la anterior, están poseídos del natural y lógico respeto hacia el infinito absoluto; pero exagerándolo de tal modo, que llegan hasta la negación de la inmensidad del espacio, de la eternidad del tiempo y de todos los infinitos relativos. No obstante, las dos escuelas filosóficas están de acuerdo en pedir la sustitución de la idea del infinito matemático por la de indefinido, noción vaga, indeterminada é impropia, pues no significa lo mismo, y esta conjunción corrobora el pensamiento de Desargues de que no hay diferencia entre el infinito positivo y el negativo, ó en términos vulgares, de que los extremos se tocan. La tolerancia que deben inspirar todas las opiniones, obliga á añadir que no hay inconveniente si para estos filósofos, en vez de ocupar los elementos en el infinito la categoría de seres reales, tienen una existencia hipotética, pues como tesis ó como hipótesis serán siempre necesarios y fundamentales para la Geometría de posición.

III

Después que los genios colosales de Arquímedes y Apolonio dieron al mundo científico sus obras inmortales, quedó la Geometría dividida en dos ramas bien separadas y distintas, correlativas á los dos maestros. El autor del método de exhaustión trata de longitudes, áreas, volúmenes y de sus razones; en particular se ocupa de la relación entre la circunferencia y el diámetro; considera siempre la cantidad de la extensión; sus propiedades son, pues, métricas, é instituye la *Geometría de la medida*. En cambio, Apolonio, estudiando las secciones cónicas, no considera en las propiedades generales de la extensión mas que la forma y posición; sus propiedades son descriptivas ó gráficas; es, pues, el fundador de la *Geometría del orden*. Las propiedades gráficas tienen una generalidad de que carecen las métricas, y son las que, siguiendo á Staudt, estudiamos en la asignatura de Geometría general. En ésta no se llama *polígono* á la porción de plano comprendida entre rectas que se cortan, sino á varios puntos (vértices) unidos entre sí por medio de rectas (lados), en un orden determinado (polígono simple) ó en todos los órdenes posibles (polígono completo). La ley de la dualidad dió á Steiner como figura correlativa en el mismo plano al *multilátero*, y como correlativas de estas dos, en la radiación, el *multiarista* y el *poliedro*. La idea particular del cuadrilátero completo se atribuye á Carnot (1), quien estudia las propiedades armónicas de sus diagonales.

El sistema *armónico*, conocido desde los tiempos más remotos, pues se supone que Pitágoras lo aprendió de los babilonios, debe ser tratado en la Geometría proyectiva, siguiendo á La-Hire (2), por la propiedad característica en dos cuadrángulos completos y homológicos que permite determinar el cuarto armónico valiéndose sólo de la regla. La proporción armónica ha sido reemplazada en nuestros tiempos por otra idea mucho más general, por la *razón anarmónica* de Chasles (3) ó Doppelverhältniss de Möbius (4), que en el caso particular de ser igual á menos uno, da la proporción armónica. Á pesar de la contradicción que existe entre los dos vocablos, no debe extrañarnos que la armonía sea caso particular de la anarmonía, pues tres cuerdas vibrantes de igual naturaleza, grueso y tensión, pero de longitudes diferentes cualesquiera, no producen en general acorde, sino inarmonía; en cambio,

---

(1) Carnot, *De la corrélation des figures de Géometrie*. Paris, 1801.
(2) La-Hire, *Sectiones conicæ in novem libros distributæ*. Parisiis, 1685.
(3) Chasles, *Traité de Géometrie superieure*. París, 1852.
(4) Möbius, *Der barycentrische Calcul*. Leipzig, 1827.

obtenemos el acorde perfecto cuando las longitudes son las que enseña la Acústica, de acuerdo completo con las ideas pitagóricas.

Dos formas de primera especie son *proyectivas* en la Geometría del orden cuando, después de un movimiento conveniente, pueden convertirse en perspectivas, ó bien cuando pueden considerarse como primero y último término de una serie de formas perspectivas. En la Geometría de la medida, dos formas se llaman proyectivas cuando á cuatro elementos de la primera corresponden otros cuatro en la segunda, que tengan igual razón anarmónica. Los dos medios que hay para considerar la proyectividad vienen á ser iguales, pues esta razón anarmónica no varía, ni en la proyección, ni en la sección. Así como la identidad es caso particular de la semejanza, ésta es también caso particular de la proyectividad; pues obtendremos sistemas semejantes, siempre que las formas proyectivas tengan homólogos los elementos en el infinito. En la comparación de dos formas proyectivas no semejantes, los elementos en el infinito no se corresponden, tienen como homólogos otros á distancia finita, y la igualdad de razones anarmónicas sufre una simplificación notable en el caso de entrar en juego estos elementos. En dos alineaciones proyectivas, las distancias de dos puntos homólogos á estos puntos límites forman un rectángulo constante que se llama *potencia* de la relación proyectiva. La idea de potencia significa siempre, en Matemáticas, fuerza ó vigor de una evolución; no está, pues, mal aplicada en el caso actual.

Permítaseme decir, aunque sea desviándome algo de la cuestión, que la Ciencia debe á la intuición de Descartes la idea clara de la potencia algorítmica, considerando una progresión por cociente cuyo primer término es la unidad y la razón la base. De modo que de ahí se deduce que las varias potencias se forman de multiplicar la unidad por la base tantas veces como diga el exponente. No comprendemos por qué en los tiempos actuales se ha respetado con muy buen acierto la definición cartesiana de la multiplicación, y no se ha hecho lo propio con la de potencia, suprimiendo en ella la noción de la unidad sin ninguna ventaja, pues suprime la idea de evolución, y en cambio obliga al recurso ilógico de los convenios para explicar la potencia de exponente cero, negativo ó fraccionario.

Volviendo á nuestro objeto principal, diremos que dos formas proyectivas están *superpuestas* ó son *conjectivas* (1) cuando tienen el mismo lugar geométrico, y en este caso podrá haber elementos unidos, en que se confundan dos homólogos cuya determinación es de gran interés. El número de estos elementos no puede ser superior á dos, pues desde el momento que tienen tres elementos unidos, las dos formas son congruentes.

IV

De dos formas fundamentales de primera especie y proyectivas, nacen las de segundo orden: curva, haces de radios y de planos y superficies cónica y doblemente rectilínea. La *curva* ó alineación de segundo orden se engendra, por las intersecciones de los radios homólogos, en dos haces que tienen el plano común y diferente centro. Como forman parte de la curva los centros de los dos haces, todos los radios la cortan en dos puntos, que son coincidentes para las tangentes ó radios homólogos de la recta de unión de los dos centros. Recíprocamente, dada una curva de segundo orden, podemos unir dos puntos cualesquiera con todos los demás, y obtendremos dos haces de radios proyectivos. La recta en el

(1) Weissenborn, *Die Projection in der Ebene*, Berlin, 1862.

infinito puede ser, respecto á la curva: exterior, secante con dos puntos de intersección, ó tangente; de ahí se originan en la alineación de segundo orden los tres géneros: elipse, hipérbola y parábola. En el caso particular de que los dos haces generadores sean iguales, resulta la circunferencia, si son concordantes, y la hipérbola equilátera, si son opuestos.

El *haz de radios de segundo orden* se origina uniendo los puntos homólogos de dos alineaciones proyectivas, situadas en un mismo plano sin ser superpuestas. Formando parte del haz los dos lugares geométricos, por cada punto de las alineaciones pasan dos radios, menos para los homólogos al punto común de dichas rectas, en cuyo caso los dos radios se confunden. Llámanse estos puntos especiales puntos de contacto. Y como dado el haz pueden formarse las alineaciones proyectivas sobre dos cualesquiera de sus elementos, resulta que todos los radios tienen su punto de contacto. Se comprende la relación que tienen entre sí las dos formas anteriores, sabiendo que todos estos puntos de contacto están en una curva de segundo orden, y que asimismo todas las tangentes á la curva forman el haz cuyos elementos son las involutas, siendo aquélla la envolvente. El haz de involutas correspondiente á una parábola tiene un elemento en el infinito; por lo tanto, las dos alineaciones generatrices deben ser semejantes. Si el haz está envuelto por una hipérbola, los dos radios correspondientes á los puntos en el infinito tiene á éstos como puntos de contacto y son, por lo tanto, las asíntotas. Cuando la envolvente es una elipse, el haz tiene todos sus radios y puntos de contacto propios.

Dos haces de planos proyectivos cuyos ejes se cortan, dan por sus intersecciones de elementos la *superficie cónica*. Dos haces de radios proyectivos y concéntricos, pero en distinto plano, engendran, uniendo los radios homólogos, un *haz de planos de segundo orden*. Estas dos formas son la proyección de la curva y del haz de radios de segundo orden desde un punto exterior á su plano. Puede también considerarse el cono como envolvente y los planos del haz de segundo orden como las respectivas involutas. En el caso particular de tener los dos haces de planos generadores sus ejes paralelos, el cono degenera en cilindro. Entre estas dos superficies hay una diferencia notable respecto á sus secciones; pues mientras el cono produce las tres curvas de segundo orden, el cilindro da todas las secciones de igual naturaleza, y por esto se divide en elíptico, hiperbólico y parabólico, clasificación que sería inadmisible para el cono.

Dos alineaciones proyectivas cuyos lugares no están en un plano, ó dos haces de planos cuyos ejes se crucen, dan origen, por la unión ó intersección de sus elementos, á una serie de rectas, cuyo conjunto produce una superficie alabeada llamada *doblemente rectilínea* para recordar su doble generación característica. El plano en el infinito puede ser respecto de esta superficie secante ó tangente: en el primer caso, resulta el hiperboloide de una hoja, y en el segundo, el paraboloide hiperbólico. Como el hiperboloide tiene una curva de segundo orden en el infinito, el plano de una sección cualquiera puede cortar á ésta en dos puntos, ó serle tangente, ó no tener ningún punto común; las secciones pueden ser, pues, hiperbólicas, parabólicas ó elípticas. El paraboloide tiene en el infinito un ángulo formado por una generatriz de cada sistema; un plano cualquiera cortará en general en dos puntos distintos los lados del ángulo, y la sección producida en la superficie será una hipérbola; cuando los dos puntos coinciden con el vértice, obtenemos una parábola. Las generatrices del hiperboloide son todas paralelas á un cono, y las del paraboloide, á dos planos. Cuando estos dos planos asintóticos ó directores son ortogonales, el paraboloide se llama equilátero.

V

El hexagramo místico que Pascal publicó en 1640, á la edad de dieciséis años (1), y del cual dedujo nada menos que cuatrocientos corolarios (propiedades generales de la curva de segundo orden que pasa por seis puntos), es una propiedad esencialmente gráfica, cuya demostración es facilísima en la Geometría proyectiva. En este siglo ha sido objeto de un profundo estudio, y se han encontrado de él aplicaciones interesantes por Steiner, Plucker, Hesse, Cayley, Grossmann, Kirkmann, Salmon, Baur y Veronese. En 1806, Brianchon (2) enriqueció la Geometría con otro teorema correlativo del anterior, y como él igualmente fecundo. Los dos teoremas, lo mismo pueden referirse á la curva, que al haz de radios de segundo orden, y originan por proyección otros dos teoremas análogos, aplicables á la superficie cónica y al haz de sus involutas planas.

Innumerables son las aplicaciones de estos teoremas en la proyectiva; pero ninguna quizás tan interesante como la teoría de polo y polar. Estas denominaciones son debidas á Servois y Gergonne; la teoría está magistralmente tratada en las obras de Desargues y de La-Hire; pero el verdadero fundamento probablemente lo encontraríamos en Apolonio. La polar es un triple lugar geométrico, pues reune: los puntos armónicamente separados del polo por la curva, los vértices de los ángulos circunscritos, cuyas cuerdas de contacto pasan por el polo, y las intersecciones de dos pares de lados

---

(1) Este célebre teorema está contenido en un opúsculo de Pascal, titulado *Essai sur les coniques.*

(2) *Mémoire sur les surfaces courves du second degré (Journal de l'Ecole Polytechnique).*

opuestos de todos los cuadrángulos completos cuyo tercer par se reúna en dicho polo. Las curvas de segundo orden dividen al plano donde están trazadas en dos regiones: la interior, formada por puntos cuyos polares no cortan á la curva, y la exterior reúne todos los polos de rectas secantes. La curva, que es el tránsito entre una y otra región, está constituída por puntos cuyas polares son tangentes.

La teoría de la polaridad nos obliga á hablar de los elementos conjugados (1) ó recíprocos (2). Dos puntos se llaman conjugados cuando cada uno está en la polar del otro. Un punto es recíproco, pues, de todos los de su polar, y para que sea conjugado de sí mismo, ha dė estar situado en la curva. Asimismo dos rectas son conjugadas cuando el polo de una de ellas está en la otra, y para que una recta sea conjugada de sí misma, debe ser tangente á la curva. Si unimos tres puntos, recíprocos dos á dos, por medio de rectas, resulta un triángulo en que cada vértice es polo del lado opuesto, dos vértices son exteriores y el otro interior, y el triángulo es autopolar (*self-conjugate*, Salmon).

Si el polo es un punto en el infinito, su polar divide por mitad á un sistema de cuerdas paralelas y se llama *diámetro*. Las tangentes trazadas en sus extremos deben reunirse en el polo; luego son paralelas. Apoyándose en el importante teorema de que, mientras el polo recorra una recta, su polar gira alrededor de un punto que es polo de dicha recta, tendremos que todos los diámetros deben reunirse en el polo de la recta en el infinito, que toma el nombre de *centro*. La posición de la recta en el infinito nos dice cuál debe ser la situación del centro en cada una de las tres curvas. La elipse tiene dicha recta en el exterior, luego el centro está en la región interna, sus diámetros son todos secantes; la hipérbola está cortada

(1) HESSE. *De Curvis et Superficiebus secundi ordinis.*
(2) PONCELET. *Traité des propriétés projectives des figures.*

por la recta impropia en dos puntos, el centro está, pues, en la región externa y será el punto de concurso de las asíntotas que separan los diámetros secantes de los no transversos; la parábola, por ser tangente á la recta en el infinito, tiene por centro el punto de contacto donde concurren todos los diámetros; en otros términos, la parábola no tiene centro y sus diámetros son paralelos.

Las tres formas fundamentales de primera especie y las cinco de segundo orden que de ellas se deducen, son conocidas bajo la denominación de *elementales* y se han generalizado en todas ellas las ideas de perspectividad, proyectividad, armonía y superposición. La consideración de dos alineaciones proyectivas y superpuestas en una misma curva, probablemente se debe á Bellavitis (1). La investigación de sus elementos unidos nos permite hallar la intersección entre una recta y una cónica conocida por cinco puntos. Suponiendo la recta en el infinito, esta intersección nos determina *á priori* el género de la curva. De la unión ó intersección entre los elementos de dos formas elementales y proyectivas, una de primer orden y otra de segundo, nacen formas de tercer orden (2).

VI

Una de las teorías más importantes de la Geometría moderna, y que más aplicaciones ha alcanzado, es sin ninguna

---

(1) Bellavitis. *Saggio di Geometria derivata.* Padova, 1838.

(2) Las formas de tercer orden que resultan son las siguientes:

Haz de radios engendrado por alineación y curva en un mismo plano.

Curva plana engendrada por dos haces de radios, uno de primero y otro de segundo orden.

Curva alabeada engendrada por haz de planos y las generatrices de una superficie cónica ó doblemente rectilínea.

Haz de planos engendrado por una alineación y un haz de radios de segundo orden ó un sistema de generatrices.

duda la de la *involución*. Aunque algunos casos particulares de ella eran ya conocidos de los geómetras griegos (1); mas el desarrollo tan completo que tiene en la actualidad se debe á Desargues, por lo que es justamente considerado como su verdadero autor. La proposición 130 de la obra de Pappus trata de la propiedad que resulta cortando por una transversal los seis lados de un cuadrángulo completo, involución entre seis puntos, que define por un equiproducto muy parecido al teorema de Menelao. No es ésta la única propiedad métrica característica de la involución entre seis puntos: hay infinidad de relaciones numéricas sumamente interesantes; una de las más notables, tomada como definición por muchos geómetras, consiste en la igualdad de dos razones cuyos términos son productos de las distancias de un punto á dos homólogos. Chasles adopta la razón anarmónica para definir la involución. Todas estas definiciones hacen referencia á seis elementos; no así la siguiente, que se encuentra en la Geometría de Staudt: involución es la superposición de dos formas elementales y proyectivas, con doble correspondencia entre sus elementos homólogos.

En una curva involutiva, las rectas que unen dos puntos homólogos concurren en un punto (centro), y los puntos de intersección de dos tangentes correspondientes están en una recta (eje) polar del centro. Como todas las formas elementales pueden relacionarse perspectivamente con la curva de segundo orden, en todas ellas podremos hallar, apoyándonos en la propiedad del centro ó del eje, los elementos de una involución, dados dos pares de elementos homólogos.

El teorema más importante en la involución es sin duda ninguna el de Desargues (del cual es caso particular el teorema de Pappus), pues sirvió al gran geómetra del siglo XVII de fundamento para su teoría de las cónicas. Esta involución

(1) PAPPUS. *Mathematicæ collectriones* (Συναγωγὴ μαθηματικὴ). Alejandria, siglo IV

formada en una secante que corta á una curva de segundo orden y á un cuadrilátero inscrito, y su proposición correlativa, dan origen á otras dos involuciones, obtenida la primera por intersección con todas las cónicas que pasan por cuatro puntos, y la segunda por las tangentes trazadas desde un punto á las infinitas cónicas que son tangentes á cuatro rectas. Así como los teoremas de Pascal y de Brianchon nos permiten dibujar una cónica, dados cinco puntos ó cinco tangentes, el de Desargues y su correlativo nos permiten el trazado cuando se nos da cuatro puntos y una tangente ó cuatro tangentes y un punto.

Si suponemos dos móviles que vayan recorriendo el lugar de la involución, colocados siempre en puntos que se correspondan doblemente, podrán marchar en igual sentido ó en sentido opuesto; de ahí resulta que la involución se divida en concordante y opuesta. Mientras la concordante no tiene puntos en que se confundan dos homólogos, la opuesta tiene siempre dos puntos dobles. La determinación de estos puntos juega un papel notable en las importantes teorías del eje radical, de los focos y directrices y de las asíntotas, que pueden considerarse como aplicaciones de la involución.

Las circunferencias descritas, tomando como diámetros los segmentos comprendidos entre puntos homólogos de una alineación involutiva, tienen el eje radical (1) ó línea de igual potencia común (2), y son cortadas ortogonalmente por toda circunferencia que pase por los puntos dobles, y cuyo centro está evidentemente en el eje radical. Cuando la involución no tiene puntos dobles, todas estas circunferencias pasan por dos puntos fijos, cuya unión es también la línea de igual potencia. Si desde los extremos de esta cuerda común proyectamos los elementos de la alineación, resulta un haz involutivo en que

---

(1) Gaultier, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 16e cahier, ann. 1813.
(2) Steiner, *Journal de Crelle*, tom 1er.—*Annales de Gergonne*, tom XVII, pag 295