

todos los radios son perpendiculares, mientras que en general un haz involutivo no tiene mas que un solo par de radios ortogonales.

Varias son las definiciones que se conocen de los focos de las cónicas; pero ninguna nos parece tan natural y propia como la de suponerlos centros de haces involutivos de radios conjugados y rectangulares. Fácilmente se deduce que deben encontrarse sobre un eje y en la región interna de la curva. Si trazamos una serie de rectas paralelas; luego otra formada por radios conjugados y perpendiculares á los de la anterior, y cortamos las dos series por un eje, resultará una involución cuyos puntos dobles son los focos. En la elipse y la hipérbola, están simétricamente colocados respecto al centro; en la circunferencia se confunden con este punto, y en la parábola uno de ellos está en el infinito y, por lo tanto, el otro divide por mitad los segmentos de la involución formada en el eje. Asombra la facilidad con que se demuestra en esta teoría la importante propiedad de ser la tangente y la normal bisectrices de los ángulos que hacen los radios vectores, así como la constancia de razón entre las distancias de los puntos de la cónica á un foco y á su polar, ó sea la directriz correspondiente.

Todos los elementos recíprocos en una cónica (puntos ó rectas) constituyen una involución; luego todos los diámetros conjugados forman un haz involutivo, en que las asíntotas son los radios dobles y los ejes el par ortogonal. Se pueden hallar los ejes cuando se nos hayan dado dos pares de diámetros conjugados, buscando los elementos unidos en dos haces involutivos superpuestos, determinado el uno por los datos y el otro formado por rectas perpendiculares. Siempre que tengamos dos involuciones superpuestas, se hallan elementos unidos, excepto cuando las dos son opuestas y los elementos dobles de la una están separados por los de la otra.

Del siguiente problema, que da en general cuatro solucio-

nes: «dado un haz involutivo de radios y un triángulo, circunscribir á éste una cónica en la cual los elementos del haz sean conjugados», y de su correlativo, se deducen los siguientes: construir una cónica, dados tres puntos y dos tangentes ó dadas tres tangentes y dos puntos; así como: trazar una curva de segundo orden, dados tres puntos y un foco ó dadas tres tangentes y una directriz.

VII

La idea de la proyectividad no es menos interesante en las formas de segunda especie que lo ha sido en las de primera. Como existen en ellas elementos de dos naturalezas distintas, al comparar dos sistemas planos, dos radiaciones ó sistema plano y radiación, podrán presentarse dos casos diferentes. Ó bien: á un elemento de una forma corresponde otro en la segunda, y á elemento más complejo (1) que pase por aquél, corresponde otro también más complejo pasando por éste, siendo entonces las formas *colineales*, según Möbius, y *homográficas*, según Chasles; ó por el contrario, á un elemento de una forma y á otro más complejo que pase por él, corresponde en la segunda otro elemento y un segundo menos complejo contenido en el primero, en cuyo caso las formas se llaman *recíprocas*. Tanto las formas colineales como las recíprocas son proyectivas, es decir, tienen sus razones anarmónicas comunes. Dos sistemas colineales se transforman en perspectivas después de un movimiento conveniente, y pueden considerarse asimismo como primero y último término de una serie de formas perspectivas.

En particular, dos sistemas planos serán colineales cuando

(1) Suponemos, para mayor inteligencia de este párrafo, el plano de naturaleza más compleja que la recta, y ésta más compleja que el punto.

á un punto del uno corresponde punto en el otro, y á recta que pase por el primero otra que pase por el segundo. Cuatro elementos determinan la homografía; así es que se obtendrán dos sistemas planos colineales haciendo corresponder dos cuadrángulos ó dos cuadriláteros completos. A una curva del primer sistema se refiere en el segundo otra curva que debe ser de igual orden y de la misma clase; pero que quizás difiera en el género, pues no se corresponden en general los elementos en el infinito. Así tenemos que dos cónicas cualesquiera siempre pueden relacionarse entre sí colinealmente, y cualquier propiedad descriptiva ó métrica, que no dependa mas que de razones anarmónicas, verdadera en una de las curvas, subsiste en su homográfica. La importancia de esta transformación es, pues, considerable desde el momento que nos da un medio de poder inducir con toda seguridad. Basta haber encontrado una propiedad en una curva cualquiera, para tener la convicción más absoluta de que existe la misma propiedad en todas las curvas del mismo orden y clase. Así, por ejemplo, con sólo hacer un estudio minucioso de las propiedades de la circunferencia, tenemos ya un conocimiento casi completo de los teoremas referentes á la elipse, hipérbola y parábola. No es ésta la única importancia de la colineación; nos da además una representación gráfica de los elementos en el infinito, por sus correlativos de la figura colineal, elementos cuya idea no podíamos adquirir, ni por nuestros sentidos, ni por la imaginación. Cuando dos sistemas planos colineales tienen una alineación común, si no son superpuestos, serán perspectivas, y si, por el contrario, están en un mismo plano, tendrán común también un haz de radios. Entonces los sistemas son homológicos, siguiendo á Poncelet, ó colineales con centro y eje de colineación, conforme á Magnus.

Entre dos radiaciones, la colineación significa que á recta y plano de la primera corresponde recta y plano en la segunda. La homografía entre radiaciones se determina por un cuatria-

rista ó un tetraedro completo, y generaliza las propiedades descriptivas y las métricas (de razones anarmónicas) para las superficies cónicas. Serán homológicas cuando tengan plano y eje de colineación. Por último, la homografía entre sistema plano y radiación supone la correlación de punto y recta, respectivamente, con recta y plano, y da origen á que las propiedades estudiadas en las curvas puedan aplicarse con toda generalidad á las superficies cónicas.

Dijimos que los elementos en el infinito no se correspondían generalmente en dos sistemas planos colineales; pues bien: en el caso particular de que exista esta correspondencia, los sistemas planos se llaman *colineales por afinidad ó aliados*. Es evidente que el paralelismo en una de las dos figuras afines, origina paralelismo también en su aliada, así como dos alineaciones correlativas tendrán que ser semejantes, pues los elementos en el infinito son homólogos. Los cuadriláteros completos que sirven para la transformación, se convertirán en triángulos, suponiendo que uno de los lados conocidos es la recta en el infinito. Las curvas aliadas, no sólo son del mismo orden y clase, sino que hay coincidencia en el género; así es que la circunferencia, por ejemplo, sólo puede ser afín á una elipse. Dos segmentos homólogos en dos sistemas planos afines tienen una relación constante entre sus áreas. Averiguando cuál sea esta relación, puede hallarse una de estas áreas conociendo la otra.

Casos particulares de la afinidad son la equivalencia y la semejanza. Advirtamos, no obstante, que la idea de equivalencia es mucho más restringida en la Geometría proyectiva que en la elemental, desde el momento que en aquella la equivalencia sólo se supone entre figuras afines. No sucede así con la semejanza, pues entendemos por tal la relación que existe entre dos figuras colineales que tienen sus ángulos homólogos iguales. Como el paralelismo significa ángulo cero, es claro que á dos paralelas de la primera figura se corres-

ponden otras dos paralelas en la segunda, y por lo tanto los puntos en el infinito son homólogos, y en la semejanza hay afinidad. De ahí se deduce que los segmentos correlativos están en una razón constante (razón de semejanza), en completa conformidad con la teoría elemental. Si por un movimiento de rotación auxiliar, un par de rectas homólogas llegan á ser paralelas, el paralelismo será común para todas las demás rectas; habrá, pues, un eje de colineación en el infinito, y por consiguiente obtendremos un caso particular de la homología, que se llama homotecia, y que no significa otra cosa que la reunión de semejanza y perspectiva. El centro de la colineación toma entonces el nombre de centro de homotecia ó de semejanza. Cuando la razón de semejanza es igual á uno ó á menos uno, las figuras son congruentes, de modo que la congruencia es un caso particular de la semejanza.

VIII

Dos sistemas planos son recíprocos cuando á punto y recta del primero corresponde recta y punto en el segundo; dos radiaciones, para ser recíprocas, deben relacionarse de modo que á recta y plano de la una se refiera plano y recta en la otra, y la reciprocidad entre sistema plano y radiación exige que sean homólogos punto y recta de aquél con plano y recta de ésta. Dos formas recíprocas á una tercera, son colineales entre sí.

En dos sistemas planos recíprocos, la alineación de puntos en el infinito de uno de ellos se corresponde, en general, con un haz de radios cuyo centro es un punto propio. Para construir dos sistemas planos recíprocos, basta relacionar un cuadrángulo y un cuadrilátero completos. Á una curva lugar de puntos corresponde en el sistema recíproco otra curva envol-

vente de rectas, siendo el orden de la una igual á la clase de la otra. En el caso particular de ser una cónica la primera, deberá serlo también la segunda, pues sabemos que las curvas de segundo orden son de segunda clase, y recíprocamente.

Podemos obtener una transformación recíproca ó correlativa por la teoría de la polaridad. Basta trazar una cónica cualquiera (una circunferencia, para mayor sencillez) y hallar, según Poncelet, las polares y los polos de todos los puntos y rectas de la figura dada. Si ésta expresa la demostración de un teorema ó la solución de un problema, la correlativa expresará la demostración de otro teorema ó la solución de otro problema que difiere del dado en la permuta de sus elementos punto y recta. Puede decirse que toda relación gráfica tiene su correlativa, excepto cuando la relación propuesta es recíproca de sí misma, como sucede algunas veces. Como la polar recíproca de una circunferencia, puede ser elipse, hipérbola ó parábola, según la posición que tenga respecto el centro de la cónica auxiliar de la transformación; así es que toda propiedad descriptiva que demos en la circunferencia origina otra propiedad correlativa en todas las cónicas. Se comprende, pues, la utilidad é importancia de esta teoría como método de invención, así como se encuentra lógico el entusiasmo que ha despertado en todos los geómetras. No se contentaron éstos con la transformación de las propiedades gráficas; pretendieron aplicarla á las métricas, para lo cual demostraron los siguientes teoremas: El ángulo de dos rectas es igual al de los dos radios que van desde el centro del círculo transformador á los dos respectivos polos (1). La razón anarmónica de cuatro puntos es igual á la de las cuatro rectas correspondientes de la figura derivada. La relación de las distancias de dos pun-

(1) Para la transformación de las propiedades referentes á ángulos, debe recordarse además que uno de los focos de la cónica resultante es el centro de la circunferencia auxiliar, y la directriz correspondiente es la polar del centro del círculo que transformamos.

entre las doblemente rectilíneas, el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico, y entre las que tienen un solo sistema de generatrices rectilíneas, el cono y el cilindro.

La teoría de la polaridad se presenta algo más complicada en las superficies de segundo orden que en las curvas. Á cada punto ó polo corresponde un plano polar, que es lugar geométrico: de los puntos armónicamente separados del polo por la superficie; de las polares del punto dado en las varias cónicas cuyos planos pasan por el polo; de las intersecciones de planos tangentes á la superficie, en puntos alineados con el polo, y de los puntos de contacto de las rectas y planos tangentes trazados desde el punto dado. La intersección del plano polar con la superficie es la curva de contacto del cono circunscrito á la superficie, teniendo por vértice el polo, cono que resulta de segundo orden. Si trazamos por este vértice una recta, es evidente que podrán trazarse por ella dos planos tangentes al cono, y como todo plano tangente á éste lo es á la superficie propuesta en algún punto de la curva de contacto, resulta que toda superficie de segundo orden es de segunda clase. Cuando el vértice ó polo se aproxima á la superficie hasta confundirse con ella, el cono degenera en el plano polar, que será entonces lugar geométrico de las tangentes ó plano tangente. No es esta relación entre punto y plano la única que nos interesa en la teoría de la polaridad; hay además otra relación entre rectas, que son llamadas por Staudt polares, mientras que otros géometras la designan impropriamente con el nombre de conjugadas. Dos rectas son polares respecto de una superficie, cuando una es lugar de una serie de planos y la otra de sus respectivos polos. Si una de ellas es tangente á la superficie, la otra lo será también en el mismo punto de contacto. Es evidente que de esta teoría se deduce otro método de transformación de figuras, debido también á Poncelet, con sólo determinar, respecto á una superficie de segundo orden cualquiera (que para mayor sencillez puede ser una esfera), los elementos que

se corresponden por la polaridad. En este poderoso método de invención se corresponden los puntos á sus planos polares, los planos á sus polos y las rectas á sus polares, habiendo correlación también entre una superficie de orden m lugar de puntos con otra superficie de clase m envolvente de planos. Así, por ejemplo, basta estudiar la esfera para que podamos transformar todas sus propiedades descriptivas, y muchas métricas en otras correlativas, referentes á cualquiera superficie de segundo orden.

Dijimos que las rectas polares no deben llamarse conjugadas; pues mientras son determinados siempre los elementos llamados polares, son por el contrario constantemente indeterminados los que se denominan conjugados. Así, un punto es conjugado á todos los puntos y á todas las rectas que hay en su plano polar, mientras que un plano es conjugado á las rectas y planos que pasan por su polo; y por último, una recta es conjugada, no sólo de todos los puntos de su polar y de los planos que pasan por ésta, si que también de todas las rectas que la cortan.

Los elementos polares de otros que están en el infinito, toman en las superficies nombres especiales, como sucedía en las curvas. El plano diametral es el polar de un punto en el infinito; una recta impropia tiene como polar un diámetro, y el plano en el infinito tiene por polo el centro. Las observaciones de que cada diámetro tiene otro conjugado y perpendicular, y que un haz de diámetros corresponde á una superficie cónica de diámetros conjugados y ortogonales, son sumamente útiles para la determinación de los planos principales, ejes y vértices de las superficies de segundo orden.

IX

Los espacios, ó sean las formas fundamentales de tercera especie, pueden ser colineales ó recíprocos, y en ambos casos existe entre sus formas elementales integrantes la proyectividad, exactamente lo mismo como entre sistemas, planos y radiaciones. Con objeto de abreviar, diremos sólo que la colineación se determina por cinco puntos, de los que cuatro no están en un plano, ó por cinco planos, de los que cuatro no pasan por un punto. Para que dos espacios sean perspectivos, basta que tengan un sistema plano unido, en cuyo caso tienen unida también una radiación, y habrá por lo tanto centro y plano de colineación ó de homología. Nada diremos de los espacios aliados, equivalentes, semejantes y homotéticos, porque sería una repetición de lo que dijimos al tratar de las formas de segunda especie; haremos sólo notar que la equivalencia se refiere á volúmenes, y que cuando la razón de semejanza es igual á uno ó á menos uno, los dos sistemas serán congruentes ó bien simétricos.

La reciprocidad en el espacio supone la misma correlación que la polaridad aplicada á las superficies. Así, por ejemplo, á una curva alabeada corresponde en el sistema recíproco otra curva también alabeada, y á cada punto de la primera un plano osculador en la segunda.

De la consideración de dos sistemas planos ó dos radiaciones ó dos espacios recíprocos superpuestos y en involución, se deducen consecuencias importantísimas, que vienen á ser la generalización de la polaridad recíproca para las curvas, conos y superficies de segundo orden. El *sistema plano polar*, que resulta en la involución de dos sistemas planos recíprocos y superpuestos, contiene infinidad de alineaciones involutivas,

de haces de radios en involución y de triángulos autopolares. El caso particular de que exista directriz en el sistema, se confunde con la polaridad recíproca de Poncelet. Otro tanto puede decirse de la *radiación polar*, que puede tener directriz (superficie cónica de segundo orden) ó dejar de tenerla. Dos sistemas recíprocos del espacio están en involución ó constituyen un *espacio polar*, cuando los vértices de un tetraedro se corresponden con sus caras opuestas. Si el sistema polar tiene puntos que coincidan con sus planos polares, todos estos puntos constituyen una superficie de segundo orden, que debemos considerar como doble ó directriz, suficiente para determinar el sistema polar. El espacio polar contiene infinidad de sistemas planos, de radiaciones y de tetraedros polares.

Cuando dos espacios recíprocos están colocados de modo que cada plano del uno pasa por el punto que le corresponde en el otro (caso particular de la involución anterior), constituyen lo que Möbius y Staudt llaman un *sistema focal* (*Nullsysteme*). Las rectas que coinciden con sus homólogas, son las directrices ó radios directores; su conjunto forma el llamado *complejo lineal de radios*. Determinan un sistema focal, y por lo tanto un complejo lineal de radios: un pentágono alabeado simple, en que cada lado sea conjugado de sí mismo; tres rectas que se cruzan, una de ellas directriz y las otras dos conjugadas entre sí; cinco rectas directrices; un sistema reglado en involución; y el eje principal y una directriz que se cruce con él oblicuamente. Para comprender lo que es eje principal de un sistema polar, debe saberse que, lo mismo que en las superficies de segundo orden, se llaman diámetros las polares de las rectas en el infinito, lugares geométricos de los focos de un sistema de planos paralelos. Cuando este diámetro sea perpendicular al sistema de planos paralelos, toma el nombre de eje principal, que será evidentemente perpendicular á todas las directrices que le corten. Una rotación alrededor del eje principal no altera el sistema focal ni el com-

plejo lineal de radios. Todas las directrices son tangentes á una hélice coaxil con el sistema focal. Fué descubierto este sistema, en 1833, por Möbius, estudiando la reducción de un sistema de fuerzas dadas en el espacio á dos resultantes equivalentes. Cuatro años más tarde lo encontraba Chasles al estudiar la siguiente cuestión, también mecánica: si un sólido experimenta un movimiento helizoidal infinitamente pequeño, los planos normales á las trayectorias de sus diferentes puntos son conjugados á estos puntos en un sistema focal determinado por el mismo movimiento.

Las curvas alabeadas de tercer orden, ó lo que es lo mismo, que un plano no puede cortarlas en más de tres puntos, pueden ser engendradas por los siguientes medios: 1.º, por dos radiaciones colineales que no sean concéntricas, perspectivas ni homológicas; 2.º, por tres haces proyectivos de planos; 3.º, por la intersección de dos superficies doblemente rectilíneas que tengan un radio común; 4.º, por la de dos superficies cónicas que tengan también una generatriz común; 5.º, por la intersección de una superficie doblemente rectilínea con un cono en las mismas condiciones. Toda curva alabeada de tercer orden está proyectada desde uno de sus puntos sobre un plano cualquiera en una curva de segundo orden; por lo cual se las llama cónicas alabeadas, cúbicas ó de tercer orden. Las cónicas cúbicas quedan determinadas cuando se conocen seis de sus elementos, ya sean puntos tangentes, secantes ó planos osculadores. La clasificación de las cónicas de tercer orden radica, como en todo lo que llevamos dicho, en la situación del plano en el infinito: si éste corta á la curva en tres puntos, tendremos la hipérbola alabeada; si dos de estos puntos son coincidentes, obtenemos la hipérbola parabólica; si corta en un solo punto, la curva se llama elipse alabeada, y si el plano en el infinito es osculador á la curva, ésta se denomina parábola alabeada. El exágono inscrito en una cónica cúbica goza de la siguiente propiedad, que recuerda el teore-

ma de Pascal: este exágono está proyectado desde un punto de la curva por un exaedro cuyas caras diametralmente opuestas se cortan en rectas que están situadas en un mismo plano.

Dos sistemas planos colineales, que no son perspectivos, ni superpuestos, ni homológicos, engendran un *haz de planos de tercer orden*. Nos formaremos una idea clara de esta forma, sabiendo que todos los planos osculadores de una cónica cúbica constituyen dicho haz.

X

Desde los principios más elementales de la Geometría, y en el ligero bosquejo de propiedades proyectivas que acabamos de hacer, se manifiesta con toda lucidez, se ostenta con todo su esplendor, una continua dualidad, hecho notable y transcendental que asombra que no se haya ni vislumbrado hasta nuestros tiempos. Si no contara nuestro siglo con tantos y tantos descubrimientos que se van sucediendo con rapidez vertiginosa en todos los ramos del saber humano, y que serán sin ninguna duda causa de asombro y veneración para los siglos venideros, le bastara seguramente el haber formulado esta ley de la dualidad para que el siglo XIX ocupase un lugar muy preferente en la historia de la Ciencia. Existe dualidad en los sistemas planos, en las radiaciones y en el espacio. Cada teorema ó problema da origen á otro correlativo ó recíproco con sólo cambiar en el plano los elementos punto y recta; en la radiación, la recta con el plano, y en el espacio, punto y plano. Las dos mismas geometrías plana y de la radiación son correlativas entre sí: una propiedad de la primera conduce á otra recíproca en la segunda, aplicando la sustitución de elementos que constituye la dualidad en el espacio. Cualquiera propiedad gráfica que hoy se descubra en la extensión de tres dimensiones, da origen á que cualquiera

de nosotros, sin mérito ni trabajo alguno, pueda enunciar y demostrar otra propiedad, que será tan importante en la Ciencia y de tantas aplicaciones en la práctica como la primera. Asimismo, una propiedad descriptiva de una figura plana producirá con la misma facilidad otra recíproca en figura plana también; y de las dos propiedades nacerán inmediatamente otras dos, que serán sus correlativas en las radiaciones, de modo que la primera se habrá cuadruplicado.

Si Desargues y Poncelet no hubiesen formulado sus importantísimas tesis sobre los elementos en el infinito, es posible que no se hubiese podido enunciar jamás esta célebre ley de la dualidad, ó á lo menos no se hubiese verificado con la generalidad que se le da actualmente. La transformación de cualquiera propiedad, por sencilla que fuese, obligaría frecuentemente á limitar la extensión de su correlativa. Así, por ejemplo, de la propiedad elemental «dos puntos determinan una recta», deducimos en la actualidad que «dos planos se cortan en una recta»; mientras que si los elementos en el infinito no hubiesen sido adoptados en Geometría, diríamos que «dos planos se cortan en una recta, excepto cuando son paralelos».

Dispútanse la prioridad de la enunciación de la ley de la dualidad dos grandes geómetras: Poncelet y Gergonne. Esta controversia notable, como la de Newton y Leibnitz, como la de Galvani y Volta, ha sido fallada en la actualidad con la mayor lucidez é imparcialidad. Todos los geómetras contemporáneos reconocen que la ley ha sido enunciada por Gergonne; pero que había sido inspirada en la fecunda teoría de las polares recíprocas del fundador de los métodos de transformación. Así como Poncelet necesitaba de una curva ó de una superficie como instrumento de transformación, Gergonne se eleva á una mayor abstracción, prescinde de la cuádrica transformatriz y viene á convertir la dualidad en una especie de axioma filosófico.

En Geometría analítica se hace patente la ley de la dualidad por las coordenadas tangenciales de Plucker. Así como se llaman coordenadas de un punto los valores que lo determinan, asimismo llamaremos coordenadas de una recta ó de un plano los parámetros que hay en su ecuación, pues fijan su posición en el espacio. Una ecuación de primer grado en coordenadas de puntos representa una recta ó un plano, y, por el contrario, en coordenadas de rectas ó de planos significa un punto. Ahora bien; un teorema cualquiera, demostrado en analítica, empleando coordenadas cartesianas ó bobilerianas, da origen á su correlativo, con sólo sustituir aquellas coordenadas por las pluckerianas, dejando subsistente el mismo cálculo y razonamiento.

Esta dualidad no es exclusiva de la Geometría: puede aplicarse asimismo en Mecánica. Los únicos movimientos que puede tener un sólido invariable son, en efecto, dos: la traslación y la rotación, pues el helizoidal es la simultaneidad de los dos movimientos. Entre dos puntos materiales existen siempre dos fuerzas: la acción y la reacción, que á su vez se descomponen en otras dos: tangencial y normal. Sobre todo, si hacemos, como en Geometría, la substitución de punto por plano, obtendremos, como observa Augusto Comte en su curso de Filosofía positiva, otra Mecánica racional correlativa de la usual, y en que el principio de velocidades virtuales se transforma en otro principio llamado de las rotaciones virtuales.

XI

No son éstas las únicas ventajas que tiene la Geometría moderna respecto de las obras inmortales de los grandes geómetras griegos. Sentimos profunda veneración por los

elementos de Euclides, que serán siempre un modelo en el método, en la exactitud de las demostraciones y en la claridad de la exposición; por los datos, especie de análisis determinada, y más aún por la obra enigmática de sus célebres porismas, no descifrados desde época tan remota hasta el siglo actual por el poderoso genio y paciente laboriosidad de Chasles. Igual veneración nos causan las obras de Arquímedes, Apolonio, Arísteo, Eratóstenes, Hiparco, Ptolomeo y Pappus. Pero aunque reconozcamos que muchas de las verdades de la Geometría actual tienen cimientos muy sólidos en nuestros verdaderos maestros, especialmente en Euclides, Apolonio y Pappus, no obstante, en las tesis de los modernos brilla una abstracción y una generalidad, que inútilmente buscaríamos en sus inspiradores. Éstos, por el contrario, demostraron una preferencia evidente por las soluciones particulares, de tal modo, que consideraban como problemas distintos los varios casos de una misma cuestión, que sólo se diferenciaban entre sí por la posición de los datos. Esto hacía que su método, aunque muy riguroso, debía ser pesado, y lo atestigua el siguiente hecho referido por Plutarco. El hijo de Lagus, Ptolomeo, quiso ser discípulo de Euclides; pero fatigado y asustado por las dificultades del estudio, el príncipe preguntó si existía una vía más expedita para estudiar la Geometría; lo que motivó aquella célebre respuesta del gran geómetra: *μη εἶσι βασιλικὴν ἄρραπου πρὸς Γεωμετρίαν* (no; la Geometría no tiene una ruta especial para uso de los reyes). Á esta réplica ha añadido Hankel, como comentario, que la Geometría moderna es precisamente la ruta que pedía el hijo de Lagus.

El tránsito de lo particular á lo general, de lo concreto á lo abstracto, no se verificó hasta el siglo xv, cuando Vieta fundó su notación literal ó algebraica para representación de los números, dando á la Ciencia una generalidad desconocida hasta aquellos tiempos. Debe ser considerado como el verdadero continuador del método analítico de Platón; pues su

logistique specieuse no hace otra cosa que aplicar dicho método á la ciencia de los números é interpretar geoméricamente los resultados algebraicos. Esta interpretación fué el primer paso dado para realizar el pensamiento sublime y profético de Pascal: «dos números imitan al espacio, á pesar de ser su naturaleza tan diferente». Realización más completa de este pensamiento que la obtenida por Descartes con su *aplicación del Álgebra á la teoría de las curvas*, es imposible que jamás se haya verificado en la historia de la Ciencia.

La Geometría cartesiana se llamó analítica, por haber tomado como medio de investigación el análisis algebraico, y se ha designado muchas veces la Geometría pura ó sin mezcla de cálculo con el calificativo de sintética, denominaciones que serían impropias si se atendiera solamente al método filosófico empleado, pues éste es un análisis casi siempre, y en cambio existen síntesis preciosas en la analítica. Adquirió la Geometría, como era natural, la misma generalidad y seguridad que el instrumento algebraico que usaba; pues por una sola fórmula se manifestaban propiedades generales de familias enteras de curvas, mientras que hasta entonces no se habían estudiado sino propiedades particulares de algunas curvas, consideradas de un modo individual, sin enlace ni relación entre una curva y otra. Sin perder nada del rigorismo que siempre tuvo el método geométrico, adquirió la Ciencia, con la aplicación del Álgebra á la teoría de las curvas, y más tarde á la de las superficies, una facilidad grande en los procedimientos, que es quizás el principal timbre de gloria de la obra cartesiana.

Arrastrados los geómetras contemporáneos de Descartes por el entusiasmo más completo hacia su método, abandonaron casi en absoluto la Geometría pura, y este abandono aun fué mayor después de conocer el cálculo infinitesimal, invención sublime y simultánea de dos grandes genios: Leibnitz y Newton. No obstante, la analítica tiene un grave defecto, que

no tenemos ningún inconveniente en declarar, cual es que la prolijidad de sus cálculos distrae muchas veces al geómetra del objeto principal de sus especulaciones. Mucho se ha obviado este grave defecto en la analítica moderna, por el uso de las anotaciones abreviadas, de las determinantes, del método de las identidades y de las formas ó ecuaciones homogéneas, á las que sirven de poderoso auxiliar las coordenadas trilineales y tetraédricas de Bobillier.

Si es cierto que fueron ingratos los entusiastas de Descartes abandonando la Geometría de Euclides, nuestro siglo ha protestado de tamaña ingratitud, con tal fuerza, que la Geometría pura renació de sus cenizas, ó mejor dicho, despertó de su letargo; mas tan modernizada, cubierta con un ropaje tan vistoso, que reúne la facilidad, generalidad y casi todas las ventajas de su compañera la analítica; pero como hace exclusión completa de todo cálculo, el geómetra no pierde nunca de vista la cuestión que está estudiando.

Después que los materiales que sirvieron de cimiento á la Geometría moderna fueron preparados por Carnot, Poncelet y Monge, se han construído tres obras colosales, que son las geometrías de Chasles, Steiner y Staudt, tres verdaderos monumentos del siglo actual, con carácter marcadamente propio. La geometría de Staudt se diferencia de la de Chasles y de la de Steiner en que no atiende mas que á las propiedades gráficas, y el prescindir por completo de las métricas, le comunica un sello tal de generalidad, que por esta causa fué la que elegimos para explicar á nuestros alumnos, como consta en el extracto que hemos hecho.

Nos quejábamos antes de la injusticia de los entusiastas del análisis cartesiano; mas debemos añadir, asimismo, que son injustos también los que ahora suponen que la Geometría moderna hace innecesaria la analítica y hasta el mismo cálculo infinitesimal. En el estudio de la ciencia abstracta de las leyes del espacio y del tiempo, se manifiestan, por más que

parezca raro, ingratitudes y apasionamientos impropios del carácter severo é imparcial que siempre debe ostentar el matemático. Los dos métodos que existen para el estudio de la extensión, no deben ser considerados como antitéticos; por el contrario, se auxilian mutuamente, el uno complementa al otro.

XII

Para terminar, fáltanos decir dos palabras respecto á la influencia que la Geometría proyectiva ha tenido sobre las demás ramas de la ciencia matemática. Lo mismo que la analítica, ha recibido una transformación trascendental la Geometría descriptiva. Compárense, en efecto, las obras de Fiedler, de Schlesinger, de Bellavitis y de Cremona, con la clásica de Monge, y se verá la gran diferencia, el colosal progreso que la influencia de la Geometría moderna ha realizado en la descriptiva.

No obstante, la transformación quizás más notable la ha sufrido la Mecánica, desde que Culmann, en 1860, explicó por primera vez, en la Escuela Politécnica de Zurich, su Estática gráfica, que ha asombrado al mundo científico, tanto por la sencillez de su teoría, como por la importancia de sus aplicaciones. Á pesar del poco tiempo de su invención, hay cátedras establecidas de Grafostática, á más de la de Suiza, en Austria (1), en Alemania (2), en Italia (3), en la Politécnica de Riga y en las Universidades de Copenhague y Cincinatti. Pues bien; la nueva ciencia de Culmann, desconocida, á lo

(1) En Viena, Praga, Gratz y Brunn.

(2) En Berlín, Munich, Dresde, Hannover, Stuttgard, Aix-la-Chapelle, Carlsruhe y Darmstadt.

(3) En Milán, Padua, Roma, Nápoles, Turín, Bolonia, Palermo, Pavia y Pisa.

menos oficialmente, en España, puede ciertamente apoyarse en el cálculo de las equipolencias de Bellavitis, en el de las cantidades extensivas de Grassmann, en la misma Geometría analítica y hasta en procedimientos elementales (1); pero se presenta absolutamente lógica, natural y mucho más sencilla cuando se la hace preceder, como hizo su ilustre inventor, por el cálculo gráfico y la Geometría proyectiva.

He terminado, excelentísimo señor, la tarea que me impusisteis; perdonadme si quizás no he complacido á tan ilustrado auditorio, como ardientemente deseaba; pero antes de dejar esta tribuna, permitidme, excelentísimo señor, que dirija algunas pocas palabras á nuestros queridos alumnos. Así como Fausto, al rayar el alba, se lamentaba de que naciera otro día más, que, debido á la inmutabilidad de las leyes naturales, debía ser idéntico á sus antecesores, nosotros en este momento sentamos la idea radicalmente opuesta del alquimista imaginario: anhelamos la venida del nuevo curso, pues vemos claramente, no sólo la evolución progresiva de la idea, en su rica é inmensa variedad de manifestaciones, sino el progreso correlativo en la juventud estudiosa, que es hoy mejor que ayer y será mañana mejor que hoy. Sí, mis buenos amigos; si bien es verdad que llegaréis á saber más que vuestros maestros, también es cierto que os aventajarán vuestros alumnos. No existe, no, ley tan fija, tan constante, tan tenaz como la ley del progreso.

No os arredre el pensar que el campo donde debéis cultivar vuestra inteligencia va agrandándose cada día más y más;

(1) Como Reuleaux, Ott y Bauschinger.

pues en cambio los útiles de esta sublime labranza, es decir, los métodos que os han dado vuestros maestros, van también perfeccionándose sin cesar, y por lo tanto con menos cansancio podéis recoger mejores y más sazonados frutos. Lo que debéis procurar es que estos frutos que recogéis no estén averiados, y para lograrlo, debéis huir de toda clase de exageraciones y apasionamientos: vuestra inteligencia debe actuar siempre con libertad y completa independencia, no debe conocer otras trabas que las de la rigurosa lógica. La Ciencia debéis amarla por lo que ella vale, no porque favorezca ó perjudique ningún prejuicio que *à priori* hubieseis formado. Desarrollando vuestros conocimientos, y sin presumirlo siquiera, perfeccionáis todas las facultades de vuestro espíritu; pues cuando el hombre es más sabio, es también más sensible y más bueno.

HE DICHO.