



UNIVERSITAT DE BARCELONA

CORRELADOR ÓPTICO
PARA EL RECONOCIMIENTO DE OBJETOS
BASADO EN LAS PROPIEDADES DE MODULACIÓN
DE LOS DISPOSITIVOS DE CRISTAL LÍQUIDO

Universitat de Barcelona
Departament de Física Aplicada i Òptica

Estela Martín Badosa
Barcelona, Mayo de 1998



III. APLICACIONES

CAPÍTULO 5:

CORRELADOR DE TRANSFORMADAS CONJUNTAS NO LINEAL

5.1 Introducción

Desde la descripción del filtro adaptado clásico de VanderLugt [Van64] se han propuesto múltiples filtros de correlación con diferentes objetivos, como aumentar la capacidad de discriminación, mejorar la eficiencia óptica, la resistencia al ruido, etc. [Kum92]. El diseño de filtros es un campo muy activo, ya que permite modificar las características, prestaciones y fiabilidad de un correlador de manera versátil. La mayoría de ellos se basan en la modificación de la amplitud o la fase del filtro adaptado original, por lo que operan como filtros no lineales. Además, suelen utilizarse en la arquitectura del correlador de VanderLugt aunque, mediante las técnicas adecuadas de cálculo y de codificación, se pueden usar como referencia en el correlador de transformadas conjuntas (JTC). En este contexto, se pueden denominar

filtros no lineales en el espacio objeto. En este trabajo se presentarán resultados para dos de ellos, el filtro sólo de fase[†] [Hor84] y el filtro inverso[‡] [Mu88].

Por otra parte, se ha demostrado también cómo la introducción de no-linealidades en el espectro de potencia conjunto (JPS) constituye un buen método para mejorar la capacidad de discriminación [Jav89c]. Aunque en el caso de tratarse de escenas multiobjeto la binarización del JPS con un umbral fijo puede inducir la presencia de picos de que den lugar a detecciones erróneas [Yu89, Car92], otros autores sugieren métodos más sofisticados que resuelven dicho problema [Wan94].

En este capítulo se compararán diferentes métodos de filtrado no lineal tanto en el espacio objeto como en el de Fourier [Val95]. En primer lugar se desarrollará una descripción teórica del problema y después se especificará la implementación experimental de los métodos y se darán resultados de detección obtenidos con el correlador óptico descrito en el capítulo anterior.

5.2 Descripción del JTC lineal

Es oportuno recuperar aquí la descripción del JTC desarrollada en el capítulo de introducción: dada una escena $s(x,y)$ centrada en el punto (x_0, y_0) y un motivo a detectar o referencia $r(x,y)$, el espectro de potencia conjunto era (ecuación (1.12)):

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \left| \mathfrak{F}\{r(x, y) + s(x - x_0, y - y_0)\} \right|^2 = \\ &= |R(u, v)|^2 + |S(u, v)|^2 + \\ &\quad + R(u, v)S^*(u, v)e^{i2\pi(x_0 u + y_0 v)} + R^*(u, v)S(u, v)e^{-i2\pi(x_0 u + y_0 v)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

que en función del módulo y de la fase de las transformadas puede reescribirse:

$$\begin{aligned} I(u, v) &= |R(u, v)|^2 + |S(u, v)|^2 + \\ &\quad + |R(u, v)||S(u, v)|e^{i\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_r(u, v) - \phi_s(u, v)\}} + \\ &\quad + |R(u, v)||S(u, v)|e^{-i\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_r(u, v) - \phi_s(u, v)\}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

[†] POF: *phase-only filter*

[‡] IF: *inverse filter*

y, finalmente:

$$I(u, v) = |R(u, v)|^2 + |S(u, v)|^2 + 2|R(u, v)||S(u, v)|\cos\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (5.3)$$

donde queda expresada de manera explícita cómo efectivamente el JPS es una distribución en intensidad, es decir, una función real.

La transformada de Fourier de (5.1) era (ecuación (1.13)):

$$c(x, y) \equiv U_3(x, y) = \mathfrak{F}\{I_2(u, v)\} = r(x, y) \otimes r(x, y) + s(x, y) \otimes s(x, y) + s(x, y) \otimes r(x, y) * \delta(x - x_0, y - y_0) + r(x, y) \otimes s(x, y) * \delta(x + x_0, y + y_0) \quad (5.4)$$

que incluía la correlación cruzada entre escena y referencia. Si el proceso se realiza de esta manera, es equivalente a la aplicación del filtro adaptado clásico explicado en el capítulo 1, cuya capacidad de discriminación es pequeña.

5.3 No-linealidades en el espacio objeto

El filtro sólo de fase y el filtro inverso se pueden considerar como transformaciones no lineales del filtro adaptado. Aunque normalmente se usan en el espacio de Fourier en la arquitectura del correlador de VanderLugt, pueden utilizarse también en el espacio objeto, con lo cual es posible introducirlos como referencia en un JTC. Para ello, es necesario calcular la transformada de Fourier inversa del filtro definido en el espacio de frecuencias, con lo que resulta una función que es real pero que puede tomar valores positivos y negativos. Esto implica de manera inmediata que sea preciso realizar una codificación de los valores negativos. Otro problema derivado de dicha implementación es la normalización del filtro, ya que éste suele tener una transmisión menor que la escena.

5.3.1 Filtro sólo de fase y filtro inverso en un JTC

El filtro adaptado clásico (MF) implementado en un JTC se expresa en el plano de Fourier como:

$$H_{MF}(u, v) = R^*(u, v) = |R(u, v)| e^{-i\phi_r(u, v)} \quad (5.5)$$

El filtro sólo de fase (POF), sugerido por Horner y Gianino en 1984 [Hor84], es un método de mejorar la calidad de la correlación basado en el hecho de que la fase de la transformada de Fourier de una imagen contiene la información más relevante de la misma [Opp81, Juv91]. Es un filtro que maximiza la eficiencia óptica del sistema ($\eta = 1$) y que da picos de correlación mucho más estrechos que el filtro adaptado (es decir, su PCE es mayor)[†]. Se define como:

$$H_{POF}(u, v) = \frac{R^*(u, v)}{|R(u, v)|} = e^{-i\phi_r(u, v)} \quad (5.6)$$

Por otra parte, la expresión del filtro inverso (IF) [Mu88] es:

$$H_{IF}(u, v) = \frac{R^*(u, v)}{|R(u, v)|^2} = \frac{e^{-i\phi_r(u, v)}}{|R(u, v)|} \quad (5.7)$$

de manera que si la escena contiene a la referencia a detectar, el producto

$$R(u, v)H_{IF}(u, v) = |R(u, v)| e^{i\phi_r(u, v)} \frac{e^{-i\phi_r(u, v)}}{|R(u, v)|} = 1$$

con el que se consiguen picos de correlación tipo δ^{\ddagger} , lo que maximiza el PCE (PCE = 1) y da una capacidad de discriminación mayor que en el caso del MF y del POF.

El problema que presenta son los ceros de la función $|R(u, v)|$, que se puede solventar definiendo un nuevo filtro según:

$$H_{AC}(u, v) = \begin{cases} \frac{e^{-i\phi_r(u, v)}}{|R(u, v)|} & |R(u, v)| \geq \epsilon_T \\ \epsilon_T^{-1} e^{-i\phi_r(u, v)} & |R(u, v)| < \epsilon_T \end{cases} \quad (5.8)$$

[†] ver anexo C

[‡] ver tabla A.1

que se suele denominar filtro inverso de amplitud compensada, en el cual, cuando $|R(u,v)|$ es menor a un determinado umbral ϵ_τ , se utiliza el filtro sólo de fase. Para cada valor del umbral se tendrá un filtro diferente: para $\epsilon_\tau = 0$, el filtro coincide con el filtro inverso puro, mientras que para $\epsilon_\tau = \text{máx}\{|R(u,v)|\}$ será el de fase. Un valor adecuado de ϵ_τ permite combinar una mejor discriminación (IF) con una mayor resistencia al ruido (POF) [Car93]. Por otra parte, existen otras soluciones al problema de los polos [Aww90, Kum90] que son variaciones de la anterior y dan resultados similares.

El filtro inverso, sin embargo, no suele utilizarse demasiado en las aplicaciones reales porque presenta serias limitaciones en lo que se refiere a su eficiencia óptica, que es muy pequeña (η puede tomar valores inferiores a 0.001, mientras que para el MF está comprendido entre 0.1 y 0.5).

5.3.2 Normalización de los filtros

En general, los filtros que se calculan para implementarlos en el plano objeto tienen una transmisión menor que la escena, con lo que la capacidad de detección puede verse seriamente afectada, en el caso de que la energía relativa entre la escena y la referencia esté muy descompensada. Para ello, es necesario normalizar los filtros antes de introducirlos junto con la escena en el modulador de entrada del correlador óptico.

Si se multiplica la función que describe a la referencia, $r(x,y)$, por un factor constante k , el espectro de potencia (5.3) queda:

$$I(u, v) = k^2 |R(u, v)|^2 + |S(u, v)|^2 + 2k |R(u, v)| |S(u, v)| \cos\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (5.9)$$

y en el plano de correlación se tiene:

$$c(x, y) = k^2 r(x, y) \otimes r(x, y) + s(x, y) \otimes s(x, y) + [ks(x, y) \otimes r(x, y)] * \delta(x - x_0, y - y_0) + [kr(x, y) \otimes s(x, y)] * \delta(x + x_0, y + y_0) \quad (5.10)$$

Un primer estudio para ver el efecto del factor k sobre la correlación consiste en analizar los casos extremos: para valores muy pequeños de k , el rango dinámico del filtro es insuficiente, es decir,

$$|S(u,v)| \gg k|R(u,v)| \Rightarrow I(u,v) \approx |S(u,v)|^2 \Rightarrow c(x,y) \approx s(x,y) \otimes s(x,y)$$

Para valores muy grandes de k :

$$k|R(u,v)| \gg |S(u,v)| \Rightarrow I(u,v) \approx k^2|R(u,v)|^2 \Rightarrow c(x,y) \approx k^2r(x,y) \otimes r(x,y)$$

En ambos casos, el término cosinusoidal correspondiente a las interferencias entre escena y referencia se pierde, por lo que en el plano final no aparecen términos de correlación cruzada.

Para establecer un criterio para elegir el valor de k óptimo, se tendrá en cuenta el parámetro E de eficiencia del JTC. Si se aplica la definición de su inverso, E^{-1} (C.5), al problema en cuestión, se tiene:

$$E^{-1} = \frac{|c_0|^2}{|c_d|^2} = \frac{|k^2r(x,y) \otimes r(x,y) + s(x,y) \otimes s(x,y)|_{(0,0)}^2}{|ks(x,y) \otimes r(x,y)|_{(0,0)}^2} \quad (5.11)$$

La solución óptima es la que hace E^{-1} mínimo, es decir:

$$\frac{\partial E^{-1}}{\partial k} = 0 \quad (5.12)$$

Imponiendo esta condición en la ecuación (5.11), se llega a:

$$k^2 = \frac{s(x,y) \otimes s(x,y)_{(0,0)}}{r(x,y) \otimes r(x,y)_{(0,0)}} \quad (5.13)$$

Teniendo en cuenta que el valor de la autocorrelación en el origen es el valor medio de la potencia al cuadrado de la función,

$$\begin{aligned} r(x,y) \otimes r(x,y)_{(0,0)} &= \langle |r(x,y)|^2 \rangle \\ s(x,y) \otimes s(x,y)_{(0,0)} &= \langle |s(x,y)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

la expresión (5.13) queda:

$$k_{E_m} = \left[\frac{\langle |s(x,y)|^2 \rangle}{\langle |r(x,y)|^2 \rangle} \right]^{1/2} \quad (5.15)$$

lo que se traduce en decir que la energía media de la escena y de la referencia coinciden.

5.3.3 Codificación de los filtros

Como ya se ha comentado, los filtros son reales pero pueden tomar valores positivos y negativos. En principio, si se utilizan dispositivos que modulan la amplitud y la fase de la luz, parece posible enviar los valores positivos al SLM con la transmitancia correspondiente y una cierta fase, igual para todos ellos, y los valores negativos con la transmitancia adecuada y una fase igual a la anterior $\pm(2n+1)\pi$ ($n = 0, 1, \dots$). Sin embargo, en la práctica es utópico disponer de una curva de modulación que cumpla estos requisitos. Por lo tanto, es necesario trabajar en configuraciones de amplitud, en las que los valores negativos se deben codificar mediante técnicas holográficas. Se ha escogido un método basado en la substracción óptica de imágenes [Pen70] y que coincide con la codificación de hologramas de Burckhardt [Bur70] en el caso de funciones reales [Juv94b].

Una función bidimensional real $f(x,y)$ puede expresarse como:

$$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y) \quad (5.16)$$

donde

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & f(x,y) > 0 \\ 0 & f(x,y) < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

$$f^-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y) & f(x,y) < 0 \\ 0 & f(x,y) > 0 \end{cases}$$

Tanto f^+ como f^- son funciones positivas y se denominan filtros bipolares.

Por otra parte, la transmisión de una red de Ronchi, que alterna los valores 0 y 1 a lo largo del eje x , puede ser descrita mediante su expansión en serie de Fourier:

$$\hat{r}^+(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \frac{2\pi n x}{p} \quad (5.18)$$

donde p es el período espacial y r_n es el coeficiente de Fourier de orden n . La red complementaria a la anterior, que se obtiene al desplazarla en $p/2$, es:

$$\hat{r}^-(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \frac{2\pi n x}{p} \quad (5.19)$$

La transformada de Fourier de la función

$$\begin{aligned} f_c(x, y) &= f^+(x, y)\hat{r}^+(x) + f^-(x, y)\hat{r}^-(x) \propto \\ &\propto [f^+(x, y) + f^-(x, y)] + [f^+(x, y) - f^-(x, y)] \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin \frac{2\pi n x}{p} \end{aligned} \quad (5.20)$$

viene dada por:

$$\begin{aligned} F_c(u, v) &= [F^+(u, v) + F^-(u, v)] + [F^+(u, v) - F^-(u, v)] \otimes \sum_n r_n \delta\left(u - \frac{n}{p}\right) = \\ &= [F^+(u, v) + F^-(u, v)] + F(u, v) \otimes \sum_n r_n \delta\left(u - \frac{n}{p}\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde se han omitido todos los factores constantes y n puede tomar valores positivos y negativos. El orden cero de difracción es $F^+(u, v) + F^-(u, v)$, que no aporta información útil. Cualquier otro orden que se considere ($n \neq 0$ en el término de convolución) permite recuperar $F(u, v)$ y, al hacer una nueva transformada de Fourier, $f(x, y)$.

Este procedimiento de codificación es una simplificación del método de Lee de generación de hologramas por ordenador [Lee70]. Lee descompone una función compleja en cuatro componentes reales y positivas. Burckhardt [Bur70] propone una primera simplificación en la que sólo se usan tres componentes. Como en este caso el filtro es real, sólo dos son necesarias, lo que reduce los requerimientos de resolución del dispositivo empleado para introducirlo en el banco óptico.

[†] en realidad, se puede expresar como $\hat{r}^+(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sw}(x)$, por lo que, teniendo en cuenta A.2.1.7, $r_n = 4/\pi$, para n impar

En la práctica, la codificación consiste en utilizar celdas de cuatro píxeles para representar cada valor. Los dos píxeles de la izquierda se activan (transmitancia alta) cuando el valor original es positivo, y los dos de la derecha cuando es negativo. En ambos casos, los otros dos píxeles quedan inactivos (transmitancia nula o lo más pequeña posible, según la respuesta del modulador).

5.3.4 Implementación y resultados experimentales

El método de codificación anterior plantea un primer problema a la hora de implementar los filtros en la pantalla de cristal líquido caracterizada en el capítulo 3: la correspondencia píxel a píxel entre la imagen digital y la imagen modulada, que debe ser exacta. Como se ha visto, este requisito no se cumple al utilizar el sistema optoelectrónico para enviar imágenes a la LCD trabajando con la entrada RGB analógica del videoprojector Epson. En cambio, mediante la conexión CGA (RGB digital), es posible controlar la pantalla píxel a píxel de manera precisa aunque con dos únicos niveles de gris. En el momento en el que se llevó a cabo este experimento se consideró oportuno probar esta última solución como alternativa a la RGB analógica que se ha empleado en la mayoría de los casos. Con el preciso conocimiento del funcionamiento de la pantalla adquirido a lo largo del desarrollo de la investigación, sería posible también realizar la codificación en el sentido de las filas y aplicar un *zoom* de factor 2, de manera que la correspondencia píxel a píxel en esta dirección sería también exacta. Sin embargo, se ha preferido presentar aquí los resultados obtenidos con la CGA, para demostrar que es una solución que también funciona.

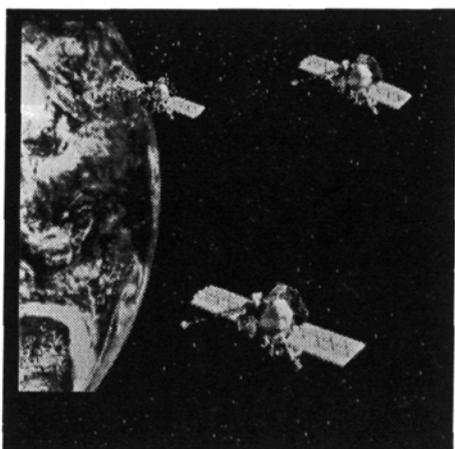


Figura 5.1: escena original. El motivo a detectar es el satélite inferior.

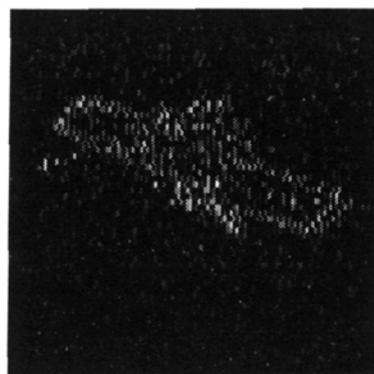


Figura 5.2: filtro de fase codificado del satélite inferior.

La escena que se ha escogido está formada por tres satélites con la Tierra de

fondo (figura 5.1), y se desea detectar el satélite situado en la parte inferior de la fotografía. La figura 5.3 muestra el resultado de aplicar el filtro adaptado clásico que, como se aprecia a simple vista, da una capacidad de discriminación muy pobre.

Filtro de fase

La figura 5.2 es una imagen ampliada del filtro de fase en el espacio objeto calculado a partir de dicho satélite y codificado, y que será lo que se utilizará como referencia. Aunque aquí se ha imprimido en niveles de gris para que se vea mejor el aspecto de un filtro de fase en comparación con la función original, al introducirlo en la pantalla se ve reducido a dos niveles de transmitancia diferenciables. Lo mismo ocurre con la escena que, a su vez, se codifica antes de enviarla al modulador, para conservar las proporciones entre ésta y la referencia. Además, se debe tener en cuenta que, según se ha explicado en el apartado 5.3.2, el filtro debería normalizarse con el fin de que su energía fuera igual a la de la escena. En este caso, debido a la limitación práctica que supone trabajar con imágenes binarias, ello se conseguiría a costa de disminuir la energía de la escena, lo que empeoraría la eficiencia óptica del correlador. Así pues, siempre y cuando las energías de la escena y de la referencia no estén muy descompensadas (sean del mismo orden de magnitud), es preferible no llevar a cabo dicha normalización.

La comparación de los resultados de la correlación experimental y simulada digitalmente por ordenador se muestra en la figura 5.4. Se debe recordar cómo en la simulación no se ha tenido en cuenta el efecto de tratar con imágenes binarias. En la tabla 5.1 al final del capítulo se dan datos referentes a la calidad de la correlación.

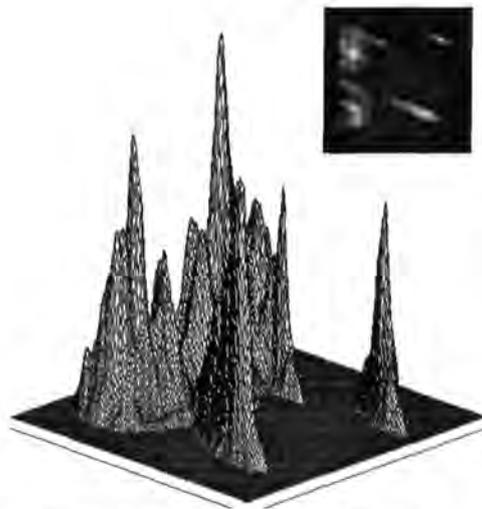


Figura 5.3: correlación simulada con el filtro adaptado.

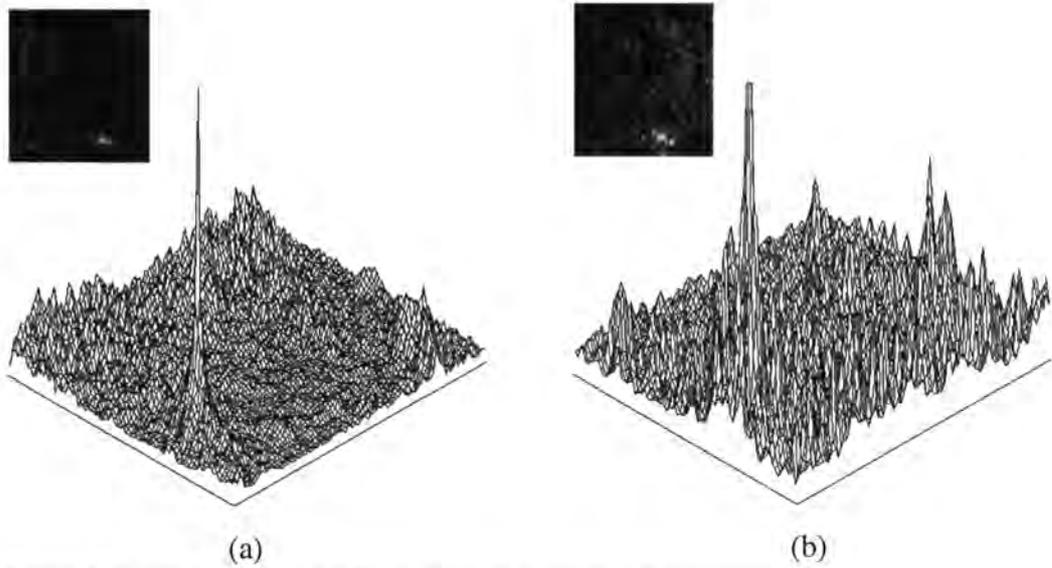


Figura 5.4: correlación con el filtro de fase (a) simulada y (b) experimental.

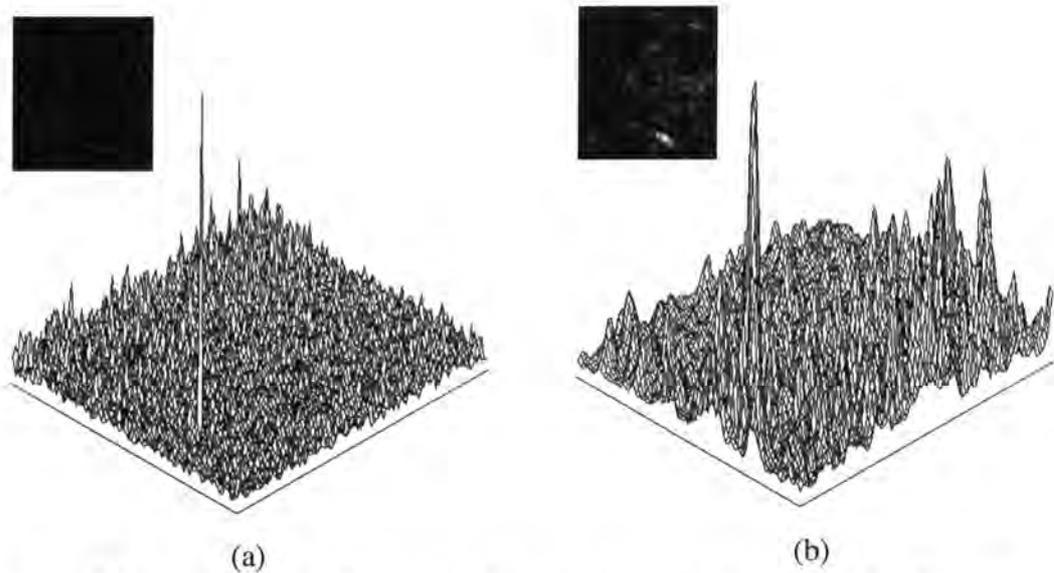


Figura 5.5: correlación con el filtro inverso de amplitud compensada (a) simulada y (b) experimental.

Filtro inverso

La definición del filtro inverso de amplitud compensada (ecuación (5.8)) depende del umbral ε_r . Se ha escogido un umbral igual a la mediana del histograma de la amplitud de la transformada de Fourier de la referencia. Esto constituye un criterio estadístico que proporciona igual número de píxeles por encima y por debajo del valor calculado. Se ha comprobado que para las imágenes utilizadas el criterio

anterior se corresponde con el que se utiliza en [Mu88], consistente en tomar un umbral igual al 4% del valor máximo de $|R(u,v)|$.

El aspecto del filtro inverso así obtenido es parecido al del filtro de fase anterior. En la simulación de la correlación que se obtiene (figura 5.5a) se ve cómo ésta es más ruidosa que con el POF, aunque al final los resultados experimentales son muy similares (figura 5.5b). Sin embargo, se debe tener en cuenta que el filtro inverso, como ya se había comentado, es más difícil de implementar porque absorbe mucha luz, razón por la cual en principio se preferirá el filtro de fase.

5.4 No-linealidades en el espacio de Fourier

En los últimos años se han publicado numerosos artículos en los que se analizan diferentes sistemas para aumentar la capacidad de discriminación del JTC. Un método usado de manera habitual y que aporta buenos resultados ha sido la binarización del espectro de potencia [Jav89c]. Se han estudiado diferentes funciones umbrales de binarización, basadas en las propiedades estadísticas del JPS [Jav91a] o en la eliminación de los términos de autocorrelación[†] [Jav91b, Che93], lo cual requiere un tiempo de conmutación no despreciable [Wan94]. Se ha propuesto también la eliminación en tiempo real de los términos centrales de correlación [Gry94].

5.4.1 Binarización del JPS

5.4.1.1 Binarización con umbral variable

Una posible no-linealidad que se puede aplicar a dicho espectro de potencia consiste en binarizarlo, es decir, reducirlo a dos únicos valores, +1 y -1. El JPS binario $I_b(u,v)$ se obtiene llevando a cabo la siguiente asignación:

$$I_b(u,v) = \begin{cases} +1 & \text{si } I(u,v) > I_r(u,v) \\ -1 & \text{si } I(u,v) < I_r(u,v) \end{cases} \quad (5.22)$$

[†] donde $I_r(u,v)$ es la función que define el umbral variable según:

$$I_r(u,v) = |R(u,v)|^2 + |S(u,v)|^2 \quad (5.23)$$

[†] $|R(u,v)|^2$ y $|S(u,v)|^2$, ver (5.3)

[†] para los puntos en que $I(u,v) = I_r(u,v)$ se puede escoger asignar +1 ó -1

Para llevar a cabo el análisis matemático, se considera una nueva distribución binaria que toma valores 0 o 1, que se estudiará en el apartado siguiente y que se define:

$$\tilde{I}_b(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } I(u, v) > I_T(u, v) \\ 0 & \text{si } I(u, v) < I_T(u, v) \end{cases} \quad (5.24)$$

Se puede relacionar de manera sencilla con la (5.22) según:

$$\tilde{I}_b(u, v) = \frac{1}{2} \{I_b(u, v) + 1\} \quad (5.25)$$

Esta función se puede expresar como una serie de Fourier [Jav89c, Goo68]:

$$\tilde{I}_b(u, v) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v[u, v; I_T(u, v)] \cos\{v[2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)]\} \quad (5.26)$$

con

$$A_v[u, v; I_T(u, v)] = \begin{cases} \frac{1}{\pi} L & v = 0 \\ \frac{2}{\pi v} \sin(vL) & v > 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

y

$$L = \cos^{-1} \left[\frac{|R(u, v)|^2 + |S(u, v)|^2 - I_T(u, v)}{2|R(u, v)||S(u, v)|} \right] \quad (5.28)$$

Si se binariza según el umbral variable (5.23), se consigue eliminar los términos responsables de las autocorrelaciones centrales, $|R(u, v)|^2$ y $|S(u, v)|^2$, $L = \pi/2$ y los coeficientes en amplitud de la serie quedan:

$$A_v[u, v; I_T(u, v)] = A_v = \begin{cases} \frac{1}{2} & v = 0 \\ 0 & v \neq 0 \text{ par} \\ \frac{2}{\pi v} (-1)^{\frac{v-1}{2}} & v \neq 0 \text{ impar} \end{cases} \quad (5.29)$$

con lo que el desarrollo del espectro binario resulta:

$$\tilde{I}_b(u, v) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cos\{(2\nu+1)[2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)]\} \quad (5.30)$$

Si, para simplificar la notación, se denomina $\varphi(u, v)$ a la fase

$$\varphi(u, v) \equiv 2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)$$

y se tiene en cuenta la relación (5.25), la distribución $I_b(u, v)$ se escribe, finalmente:

$$\begin{aligned} I_b(u, v) &= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \cos\{(2\nu+1)\varphi(u, v)\} = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\cos\{\varphi(u, v)\} - \frac{1}{3} \cos\{3\varphi(u, v)\} + \frac{1}{5} \cos\{5\varphi(u, v)\} - \dots \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

que no es más que el desarrollo en serie de Fourier de una función de onda cuadrada[†]. En el caso de que escena y referencia coincidan, es decir, si $\phi_S(u, v) = \phi_R(u, v)$, el término de primer orden da una correlación

$$c(x, y) \propto \Im\{\cos[2\pi(x_0u + y_0v)]\} = \frac{1}{2} \{\delta(x - x_0, y - y_0) + \delta(x + x_0, y + y_0)\} \quad (5.32)$$

[†] Sin embargo, los términos de orden superior pueden dar lugar a picos de autocorrelación redundantes en el plano de salida.

En [Tan93] se presenta un método para reducir dichos picos, basado en la codificación de una fase cuadrática diferente para cada término de correlación. Por otra parte, se han encontrado otros problemas que surgen al binarizar el JPS: en [Yu89] Yu *et. al.* explican cómo, para escenas con objetos distribuidos de manera geométrica, pueden aparecer falsas alarmas y, a su vez, desaparecer detecciones, debido a la existencia de los términos de intermodulación [Tur94].

5.4.1.2 Binarización con umbral fijo

Una simplificación al método anterior consiste en aplicar un umbral fijo \hat{I}_T , de valor igual a la mediana del histograma del JPS, es decir:

[†] ver anexo A, apartado A.2.1.7

[‡] ver tabla A.1

$$\hat{I}_T = \text{med}\{I(u, v)\} \quad (5.33)$$

Si se analiza la expresión (5.3), se ve cómo el término que incluye el coseno tiene mediana nula (si se considera que $R(u, v)$, $S(u, v)$, $\phi_R(u, v)$ y $\phi_S(u, v)$ varían lentamente en comparación con $\cos\{2\pi(x_0 u + y_0 v)\}$), por lo que la mediana del JPS coincide con la del umbral variable (5.23) y constituye una buena aproximación estadística de primer orden del mismo. El hecho de escoger la mediana radica en que en el espectro binarizado la mitad de los píxeles toman valor +1 y la otra mitad -1, lo que maximiza la eficiencia óptica del JPS y da una correlación en el origen nula, como se verá en el apartado siguiente.

Para saber cómo esta solución subóptima repercute en los resultados de la correlación, es necesario volver al análisis matemático y, en concreto, a la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (5.27), que dependen de L (5.28). En este caso los términos centrales no se eliminan completamente y los coeficientes ya no son constantes sino que dependen de las coordenadas espaciales (u, v) . Tampoco lo será el término de orden 1 ($\nu = 1$), que es el responsable de la correlación cruzada entre escena y referencia y que, aplicando la igualdad

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

se puede reescribir como:

$$A_1[u, v; I_T(u, v)] = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \left[\frac{|R(u, v)|^2 + |S(u, v)|^2 - I_T(u, v)}{2|R(u, v)||S(u, v)|} \right]^2} \quad (5.34)$$

La función $A_1(u, v)$ que resulta al hacer $I_T(u, v) = \hat{I}_T$ se traducirá, en el plano de correlación, en una función que convolucionará a la δ de Dirac y que por lo tanto dará picos de detección más anchos que en el caso del umbral variable.

5.4.1.3 Binarización entre 0 y 1

En la implementación de la distribución binaria $I_b(u, v)$ sobre un modulador, es necesario trabajar con una configuración en la que existan dos niveles de gris que den transmitancias iguales o lo más parecidas posibles y que estén desfasados π entre sí. En el caso de que esto no sea posible o de que se disponga de un modulador sólo de amplitud, se empleará la distribución binaria con valores positivos $\tilde{I}_b(u, v)$, definida en (5.24) y relacionada con la anterior según (5.25).

Es interesante estudiar cómo es el plano de correlación en este caso. Si se denomina

$$c(x,y) \equiv \mathfrak{S}\{I_b(u,v)\} \quad (5.35)$$

$$\tilde{c}(x,y) \equiv \mathfrak{S}\{\tilde{I}_b(u,v)\}$$

se tiene:

$$\tilde{c}(x,y) = 0.5c(x,y) + 0.5\delta(x,y) \quad (5.36)$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$, la intensidad de la correlación es:

$$|\tilde{c}(x,y)|^2 = 0.25|c(x,y)|^2 \quad (5.37)$$

es decir, ambas definiciones producen, excepto factores constantes, idénticos planos de correlación.

¿Y en el origen? De la definición (A.1) se extrae cómo la transformada de Fourier de una función $f(x,y)$ vale, en el origen:

$$F(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy \quad (5.38)$$

que es, básicamente, el valor medio de la función. En el caso de la distribución $I_b(u,v)$, si se escoge el umbral tal que haya el mismo número de píxeles con valor +1 y -1 (como es el caso de la mediana, (5.33)), se tiene:

$$|c(0,0)|^2 = 0 \quad (5.39)$$

por lo que al binarizar entre 0 y 1 con el mismo umbral el valor de la correlación en el origen deja de ser nulo.

5.4.2 Eliminación de la envolvente espacial (SER)[†]

Las soluciones que se han propuesto para evitar la presencia de términos redundantes del BJTC[‡] generalmente consisten en eliminar los términos de intermo-

[†] SER: *spatial envelope removal*

[‡] BJTC: *binary joint transform correlator*

dulación mediante la obtención de las funciones espacialmente variables

$$|R(u, v)|^2 \quad \text{y} \quad |S(u, v)|^2 \quad (5.40)$$

Esto puede realizarse de manera inmediata ópticamente, ya que consiste en registrar la intensidad de la transformada de Fourier de la referencia sola y de la escena sola. A continuación, se restan digitalmente dichas distribuciones del espectro de potencia (5.3), con lo que sólo queda eliminar el término $2 |R(u,v)||S(u,v)|$ que aparece multiplicando al coseno. Uno de los métodos propuestos consiste en calcular

$$\frac{2|R(u, v)||S(u, v)|}{\left[|R(u, v)|^2\right]^{1/2} + \left[|S(u, v)|^2\right]^{1/2}} \cos\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (5.41)$$

utilizando las distribuciones registradas ópticamente y guardadas en la memoria del ordenador [Cha92]. Este proceso puede resultar complicado debido a la presencia de polos matemáticos, a la limitación en el rango dinámico que impone la tarjeta digitalizadora y al número de operaciones involucradas.

En este apartado se explicará un procedimiento sencillo [Car95] para eliminar el producto $|R(u,v)||S(u,v)|$ que multiplica al coseno en la ecuación (5.3), de manera que es posible obtener únicamente el término

$$I_{\cos}(u, v) = \cos\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (5.42)$$

cuya transformada da correlaciones δ en (x_0, y_0) y $(-x_0, -y_0)$, en el caso de que se detecte el objeto de referencia (ver ecuación (5.32)).

Este método soluciona el problema de aparición de redundancias asociado a la binarización del JPS y presenta la ventaja respecto al de codificación de filtros en que el número de operaciones involucradas es menor. Sin embargo, para implementar el proceso ópticamente se necesitará un modulador con niveles de gris en vez de uno binario como en el apartado anterior.

El atractivo del método radica en que no es necesario evaluar previamente los términos $|R(u,v)|$ y $|S(u,v)|$. Como estas funciones, en general, varían mucho más lentamente que el coseno (5.42), pueden ser consideradas constantes en cada semi-período del mismo. Aplicando una tabla de salida (LUT) a cada período, que escale los valores entre -1 y +1, se recupera el coseno, como se representa en la figura 5.6.

En el caso de que sea necesario reducir el número de operaciones electrónicas y digitales, una simplificación del método consiste en eliminar los términos $|R(u,v)|$ y $|S(u,v)|$ a partir del espectro de potencia binario mediante el ajuste de una función coseno. La solución que se obtiene es subóptima pero constituye una alternativa a tener en cuenta.

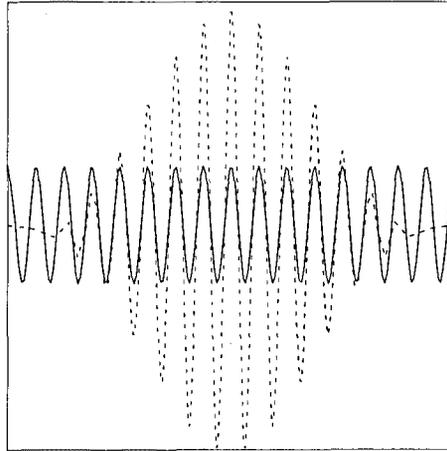


Figura 5.6: procedimiento SER: la línea a trazos es la función original y la continua es el coseno obtenido después de aplicar las LUTs locales.

5.4.3 Implementación experimental y resultados

Tanto en el método de la binarización con el umbral variable como en el de la eliminación de la envolvente espacial, es necesario obtener en primer lugar las distribuciones $|R(u,v)|^2$ y $|S(u,v)|^2$ y a continuación restarlas del JPS (5.3). Es decir, si renombra los términos del JPS según:

$$I = |R|^2 + |S|^2 + 2|R||S|\cos\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_r - \phi_s\} \equiv A + B + C \quad (5.43)$$

donde, para simplificar la notación, se ha omitido en todos los casos la dependencia con (u,v) , el objetivo consiste en determinar:

$$C = I - A - B \quad (5.44)$$

En la práctica, se debe capturar con la CCD tres registros de intensidades de transformadas de Fourier: la de la referencia sola, la de la escena sola y la de escena y

referencia introducidas a la vez en el plano de entrada. El valor en el origen de la transformada de Fourier de una imagen (5.38) es, en general, mucho mayor que el correspondiente a frecuencias más altas. Debido a la limitación en el rango dinámico de la CCD, si el registro se realiza de manera que la respuesta de la cámara sea lineal con la intensidad de la luz incidente, en el plano de Fourier prácticamente sólo aparece el pico central. De esta manera, se pierde la información de frecuencias superiores y por lo tanto el proceso de reconocimiento es imposible.

Una posible solución a este problema consiste en saturar la cámara. En este caso, las energías de las distribuciones A, B e I pueden quedar descompensadas respecto a las que tenían originalmente. Si se denomina e_A , e_B y e_I a las energías respectivas de dichas distribuciones, según el teorema de Parseval (A.8) deben ser iguales a las de las imágenes de las que provienen, es decir, a la de la escena, a la de la referencia y a la suma de ambas, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación (5.44) puede reescribirse como:

$$C = e_I i - e_A a - e_B b \quad (5.45)$$

donde a, b e i son las distribuciones de energía unidad. Se pueden expresar, a partir de las captaciones obtenidas experimentalmente, como:

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{\tilde{e}_A} \\ b &= \frac{B}{\tilde{e}_B} \\ i &= \frac{I}{\tilde{e}_I} \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde las energías \tilde{e}_A , \tilde{e}_B y \tilde{e}_I se calculan sumando los valores digitalizados elevados al cuadrado de cada uno de los píxeles que constituyen la imagen digitalizada correspondiente:

$$\tilde{e} = \sum_k g_k^2 \quad (g_k: \text{nivel de gris del píxel } k) \quad (5.47)$$

por lo que el cómputo de C se realiza según:

$$C = e_I \frac{I}{\tilde{e}_I} - e_A \frac{A}{\tilde{e}_A} - e_B \frac{B}{\tilde{e}_B} \quad (5.48)$$

Las energías teóricas e_A , e_B y e_I se calculan previamente a partir de las imágenes en el espacio objeto.

Una vez obtenida la distribución C mediante este método, se binarizará o bien se aplicará la técnica SER. En ambos casos, C toma valores positivos y negativos. Para el JTC binario se tienen dos únicos valores y la modulación en una única pantalla de cristal líquido sería posible. Sin embargo, en el método SER la distribución cosinusoidal que se recupera no se puede implementar con un solo modulador, ya que tiene múltiples valores distintos de amplitud y fase. Por esta razón se ha escogido la configuración de alto contraste de la LCD para llevar a cabo la última transformada de Fourier óptica, de manera que el procedimiento a seguir en estos dos casos es el siguiente: para el BJTC, a C se le asignan dos únicos niveles de gris de transmitancia muy diferente, es decir, cuyo contraste sea elevado, según sea positivo o negativo. Esto se corresponde con la binarización entre 0 y 1 que se comentaba antes, que básicamente implica que la correlación en el origen tenga un valor elevado. Para el método SER, los valores positivos y negativos se renormalizan entre 0 y 255 para tener una imagen con niveles de gris. Esto es equivalente a añadir una constante a la distribución, lo que de nuevo se refleja en la intensidad de la correlación en el origen.

Los resultados experimentales obtenidos se explican a continuación. La figura 5.7 es la imagen de la escena y referencia juntas tal y como se introduce en el plano de entrada. El hecho de que en ambos métodos los términos de autocorrelación centrales no aparezcan permite relajar la condición de separación (4.16) a la (4.18), lo que disminuye los requerimientos de ancho de banda espacial. La escena sola sería la Tierra y los tres satélites, mientras que el motivo aislado sería el satélite situado a la derecha.

Para ilustrar el proceso completo se muestran las distribuciones $I(u,v)$ (JPS, figura 5.8), $|S(u,v)|^2$ (figura 5.9) y $|R(u,v)|^2$ (figura 5.10). Las figuras 5.11 y 5.12 son las correspondientes distribuciones $I_b(u,v)$ (en realidad, $\tilde{I}_b(u,v)$) e $I_{\cos}(u,v)$ calculadas mediante la binarización del JPS y el método de eliminación de la envolvente espacial, respectivamente.

La comparación entre las correlaciones simuladas y las obtenidas experimentalmente se muestra en la figura 5.13 para el BJTC y en la figura 5.14 para el SER-JTC. La discriminación es en ambos casos muy buena (ver tabla 5.1) y los resultados son parecidos.

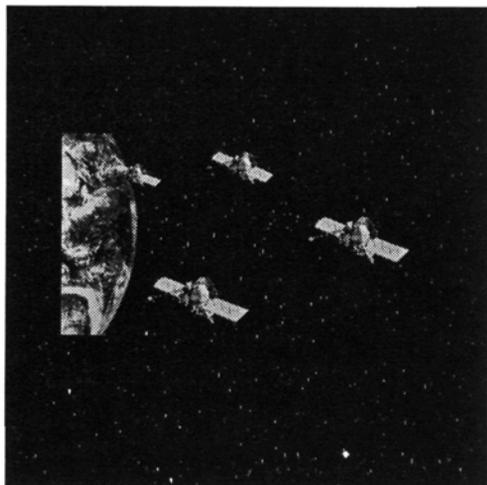


Figura 5.7: escena y referencia.

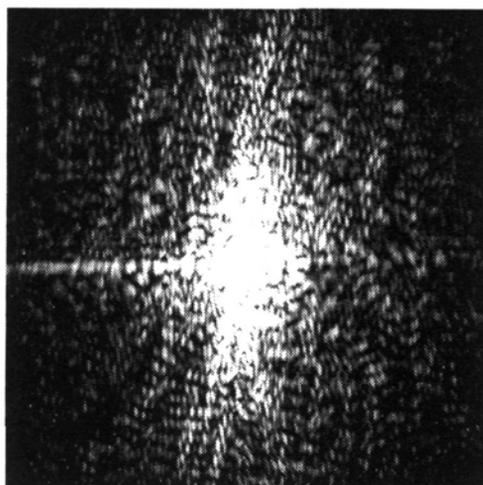


Figura 5.8: espectro de potencia conjunto, $I(u,v)$.

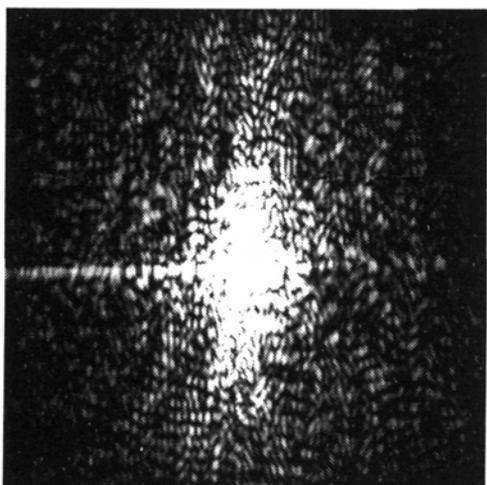


Figura 5.9: espectro de potencia de la escena, $|S(u,v)|^2$.

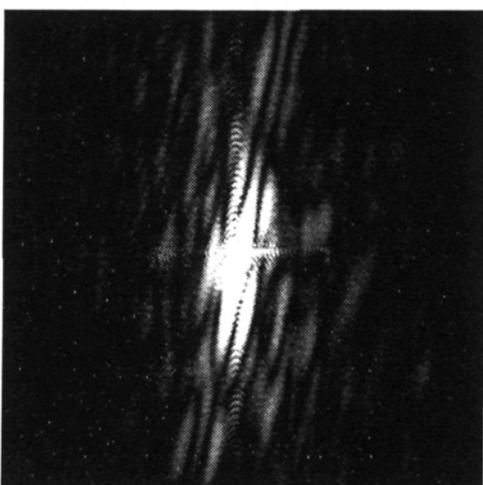


Figura 5.10: espectro de potencia de la referencia, $|R(u,v)|^2$.

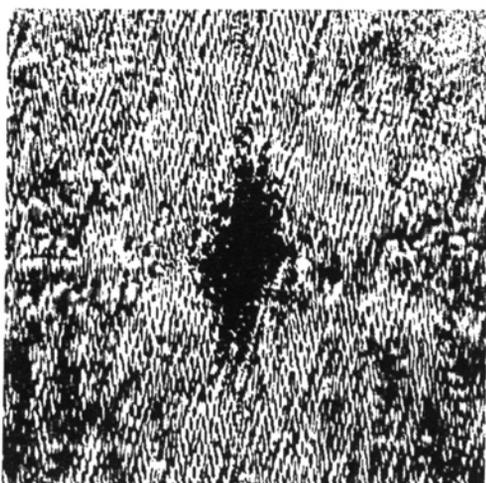


Figura 5.11: JPS binario, $I_b(u,v)$.

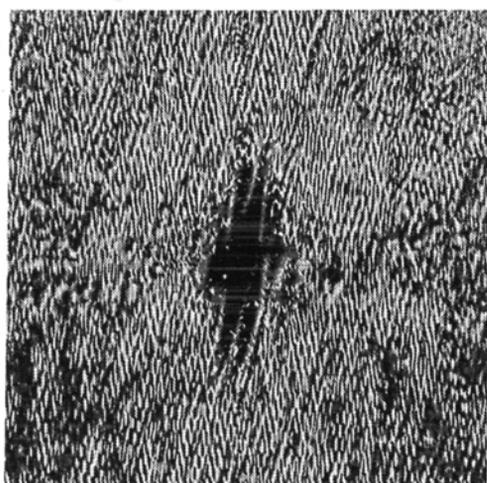


Figura 5.12: distribución coseno, $I_{\cos}(u,v)$.

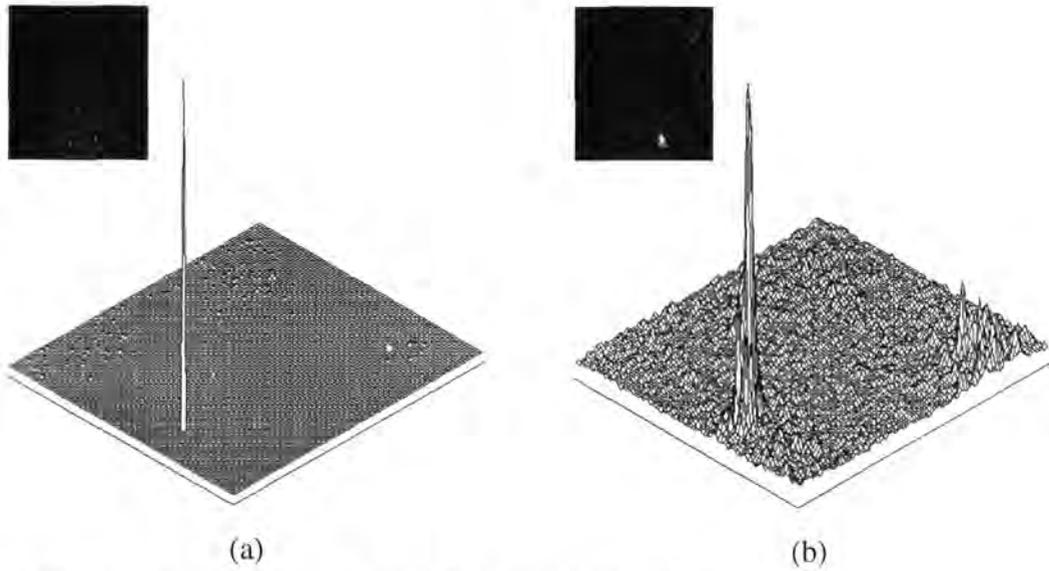


Figura 5.13: correlación binarizando el JPS (a) simulada y (b) experimental.

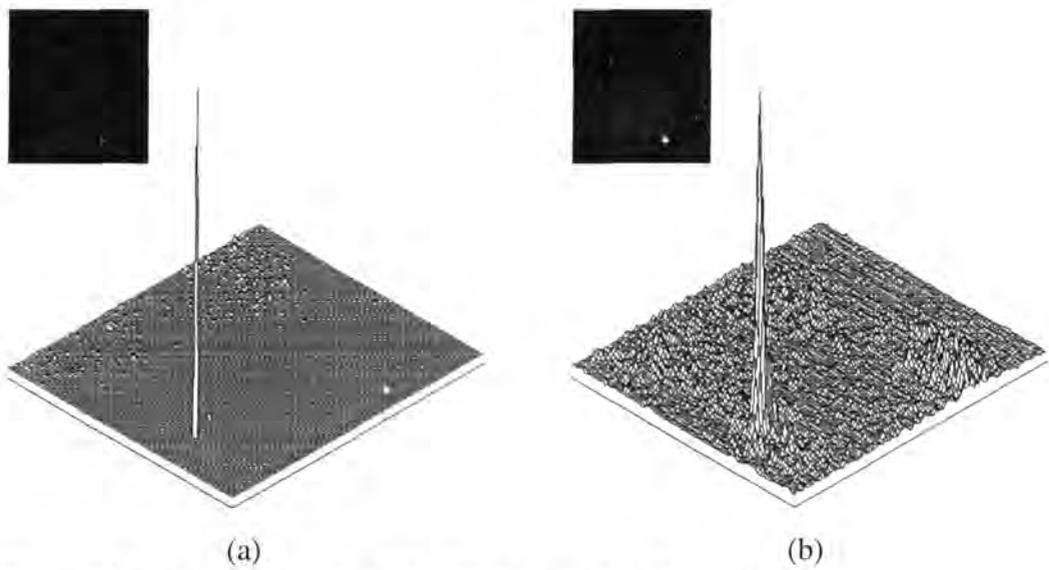


Figura 5.14: correlación con el método SER (a) simulada y (b) experimental.

Para mostrar las ventajas que presenta el SER-JTC respecto al BJTC se ha llevado a cabo un nuevo experimento de correlación donde la escena y la referencia coinciden y es un único satélite, el inferior de la figura 5.1. Si se analiza el plano de correlación en el caso del BJTC (figura 5.15a), se ve cómo aparece un pico central de orden cero debido a la transmitancia total neta del modulador, dos picos laterales correspondientes a las correlaciones cruzadas entre escena y referencia, que dan lugar a una detección satisfactoria, y unos segundos picos que no deberían aparecer y son consecuencia de los términos de orden superior derivados de la binarización del JPS.

En cambio, en la figura 5.15b, que muestra la correlación con el método SER, éstos han desaparecido, lo que evita cualquier tipo de falsa alarma o detección errónea.

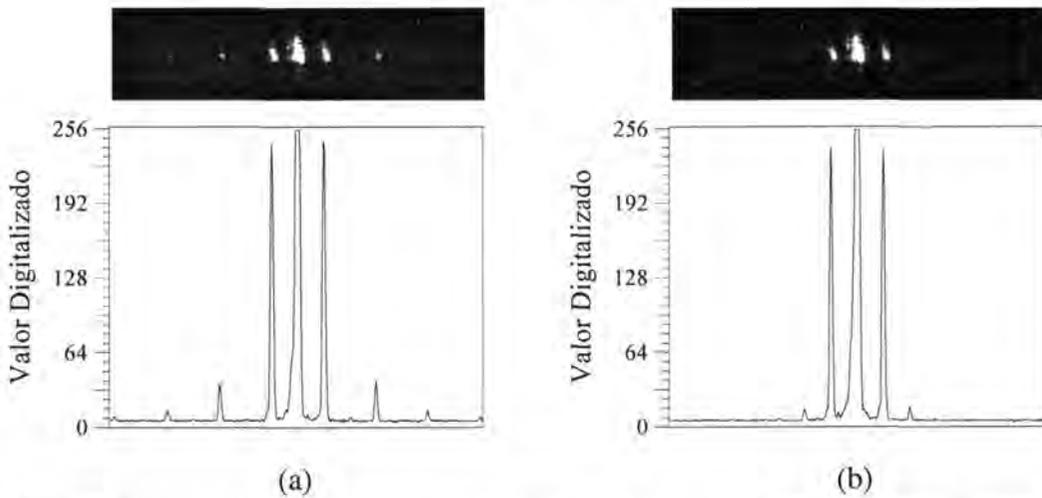


Figura 5.15: correlación experimental cuando escena y referencia son un único satélite, obtenida con el método (a) binarización del JPS con umbral variable y (b) eliminación de la envolvente espacial. Puede verse como los picos laterales en el último caso desaparecen.

Por último, se presenta el aspecto del plano de correlación en los siguientes casos: para el BJTC, se compara el resultado de aplicar un umbral fijo igual a la mediana del JPS (figura 5.16a) con el de aplicar el umbral variable utilizado hasta ahora (figura 5.16b); para el método SER, se analiza la solución subóptima consistente en obtener el término cosinusoidal a partir del JPS binario, con el umbral igual a la mediana (figura 5.17a), frente al método original completo (figura 5.17b). De las imágenes se extrae cómo, en general, la correlación en el origen es mucho más ruidosa para las soluciones simplificadas, debido a que no se eliminan completamente los términos de autocorrelación; asimismo, los picos de correlación son menos estrechos, aunque la detección es en todos los casos satisfactoria. Así pues, la principal ventaja que presenta la aplicación de los métodos originales radica es que la separación espacial entre la escena y la referencia necesaria para que no se superpongan los términos cruzados con la correlación en el origen puede ser más pequeña, lo que reduce los requerimientos en el ancho de banda espacial del modulador empleado.

5.5 Comparación entre los diferentes métodos

La tabla 5.1 muestra una comparación de los valores de la discriminación (C.1) y del PCE (C.2) de las correlaciones experimentales obtenidas con los diferen-

tes métodos expuestos en este capítulo.



Figura 5.16: plano de correlación para el BJTC con el umbral (a) fijo igual a la mediana y (b) variable.



Figura 5.17: plano de correlación para el JTC-SER (a) a partir del JPS binario con el umbral igual a la mediana y (b) proceso completo.

Tanto la discriminación como el PCE son máximos en el caso de la eliminación de la envolvente espacial, aunque todos los métodos darían lugar a una detección altamente satisfactoria. En principio, cualquiera de ellos sería válido. Sin embargo, hay otros factores por los que se prefiere el SER-JTC respecto a los demás. En lo que se refiere a los filtros en el espacio objeto, se ha pretendido demostrar cómo es posible, si se desea, aplicar el amplio conocimiento de diseño de filtros de diferentes características que existe en la literatura en un JTC. Sin embargo, es más lógico utilizar el correlador de VanderLugt para tal propósito, ya que el cálculo digital previo de los filtros es más sencillo y directo. En cuanto al BJTC, da resultados similares pero en determinados casos puede dar lugar a detecciones erróneas.

Parámetros	POF	IF	BJTC	SER-JTC
Discriminación (%)	63.5	48.5	74.4	84.3
PCE	0.005	0.007	0.014	0.032

Tabla 5.1: comparación de diferentes métodos de filtrado no lineal en un JTC.

CAPÍTULO 6:

CORRELADOR DE TRANSFORMADAS

CONJUNTAS PARA ESCENAS BORROSAS

6.1 Introducción

En el proceso de implementación de un sistema completo de reconocimiento de formas, el primer paso es la adquisición de la escena, en la que se quiere detectar la presencia de un motivo determinado. Es probable que en el proceso de captación la imagen resultante sufra algún tipo de degradación, como pueden ser distorsión, ruido, turbulencias atmosféricas, desenfoque o movimiento relativo entre la escena y el sistema de grabación de la misma. Estas degradaciones alteran el comportamiento de los métodos de reconocimiento, dando lugar a una menor capacidad de discriminación entre objetos similares. Algunas de ellas y los problemas que generan en los métodos de reconocimiento por correlación han sido estudiados en profundidad en los últimos años, con el fin de obtener correlaciones no degradadas. En particular, se han analizado las detecciones de patrones que han sufrido una rotación [Hsu82a, Hsu82b] o un cambio de escala [Cas76a, Cas76b], así como los problemas derivados

del ruido [Kum92, Juv94a]. Por otra parte, el problema de reconocimiento de imágenes desenfocadas se ha resuelto de diferentes maneras: restaurando la imagen degradada antes de llevar a cabo el proceso de reconocimiento [Jav90], calculando el filtro de correlación incluyendo un término de restauración [Cas92] o diseñando filtros invariantes mediante las funciones sintéticas discriminantes [Sal95]. En particular, también se ha analizado el funcionamiento de un JTC binario con escenas desenfocadas usando diferentes métodos de umbralización [Kar93].

En este capítulo se estudiarán los problemas relacionados con la utilización de imágenes desenfocadas o movidas (en su proceso de captación el sistema de adquisición se encuentra en movimiento relativo respecto a la escena que se graba). Esto puede surgir cuando se trabaja en condiciones de baja iluminación o al usar cámaras CCD comerciales, que operan a frecuencias de vídeo. En ambos casos, el tiempo de adquisición es largo (por ejemplo, de 1/25 s para las cámaras de vídeo).

Se analizarán los dos tipos de degradación, así como su efecto sobre la correlación. Se describirán métodos que permiten corregir los defectos introducidos y llevar a cabo un proceso de detección satisfactorio [Car96, Juv97]. Se presentan resultados simulados y experimentales [Val97].

6.2 Modelo de degradación

La intensidad de una escena captada mediante un sistema óptico lineal y espacialmente variable puede describirse como:

$$s(x, y) = s_1(x, y) * h(x, y) \quad (6.1)$$

donde $s(x, y)$ es la imagen registrada, $s_1(x, y)$ es la imagen ideal y $h(x, y)$ es la respuesta impulsional del sistema óptico[†], responsable de la degradación. La transformada de Fourier de la ecuación anterior es:

$$S(u, v) = S_1(u, v)H(u, v) \quad (6.2)$$

donde $S(u, v)$ y $S_1(u, v)$ son las transformadas de Fourier de $s(x, y)$ y $s_1(x, y)$, respectivamente, y $H(u, v)$ es la función de transferencia óptica[‡]. Para un sistema sin degradación, libre de aberraciones e ignorando los efectos de la difracción,

[†] PSF: *point spread function*

[‡] OTF: *optical transfer function*

$$h(x, y) = \delta(x, y)$$

Si se considera la expresión (6.2) para la escena, en un correlador de transformadas conjuntas, el JPS (5.3) se convierte en:

$$\begin{aligned} I(u, v) = & |R(u, v)|^2 + |S_1(u, v)H(u, v)|^2 + \\ & + 2\text{sign}[H(u, v)]|R(u, v)||S(u, v)|\cos\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde la función $\text{sign}(x)$ está definida en A.2.1.5.

Si el sistema sólo está afectado o bien de desenfoque o bien de movimiento relativo, su OTF es real. En este caso, si se binariza el JPS mediante el umbral variable (5.23), el término de mayor energía de la expansión (5.31) es:

$$I_b(u, v) \propto \text{sign}[H(u, v)]\cos\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (6.4)$$

por lo que la correlación queda, finalmente:

$$c(x, y) \propto \mathfrak{S}\{\text{sign}[H(u, v)]\} * \mathfrak{S}\{\cos[2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)]\} \quad (6.5)$$

Es decir, está degradada por el término $\mathfrak{S}\{\text{sign}[H(u, v)]\}$. Una de las maneras inmediatas de recuperar la correlación no degradada consistirá, por lo tanto, en eliminar dicho factor.

6.2.1 JTC para imágenes desenfocadas

Para tratar este problema, se crearán escenas desenfocadas convolucionando imágenes enfocadas con una PSF asociada a la degradación. En [Sto69] se desarrolla una aproximación analítica de una OTF especialmente adecuada para describir desenfoques moderados o grandes, que tiene la forma:

$$H(s) = \begin{cases} 2[1 - 0.69s + 0.0076s^2 + 0.043s^3] \frac{J_1(a - 0.5as)}{a - 0.5as} & 0 \leq |s| \leq 2 \\ 0 & |s| > 2 \end{cases} \quad (6.6)$$

donde

$$a = \frac{4\pi\omega s}{\lambda}$$

y s es la frecuencia espacial reducida,

$$s = \frac{\lambda}{\sin\alpha} f$$

f es la frecuencia espacial ordinaria y el ángulo α se indica en la figura 6.1. $s = 2$ corresponde a la frecuencia de corte del sistema óptico. El parámetro ω es la distancia entre el frente de ondas S' emergente del sistema óptico (que converge en el punto de enfoque I) y una esfera de referencia S'_p centrada en el eje en el punto de desenfoco P , medida a lo largo del rayo extremo de pupila l' (ver figura 6.1). La función (6.6) es fácil de calcular y, para $\omega > 1$, es bastante exacta, por lo que será la que se empleará para la simulación de diferentes desenfoces en situaciones realistas.

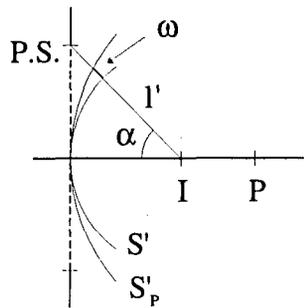


Figura 6.1: definición del parámetro ω de desenfoco.

La OTF (6.6) tiene simetría circular, es decir:

$$H(u, v) = H(\rho) \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (6.7)$$

De esta manera, es posible escribir la función $\text{sign}[H(\rho)]$ en términos de funciones $\text{circ}(\rho)^\dagger$ y de ceros de $H(\rho)$, cuyo número es finito debido a la existencia de la frecuencia de corte. Si

$$\tilde{R}_1 < \tilde{R}_2 < \tilde{R}_3 < \dots < \tilde{R}_k$$

[†] ver A.2.1.8

son los valores para los que $H(\rho) = 0$, $\text{sign}[H(\rho)]$ puede expresarse:

$$\text{sign}[H(\rho)] = 2\text{circ}\left(\frac{\rho}{\tilde{R}_1}\right) - 2\text{circ}\left(\frac{\rho}{\tilde{R}_2}\right) + 2\text{circ}\left(\frac{\rho}{\tilde{R}_3}\right) - \dots + (-1)^{k+1} \text{circ}\left(\frac{\rho}{\tilde{R}_k}\right) \quad (6.8)$$

cuya transformada de Fourier es[†]:

$$\mathfrak{F}\{\text{sign}[H(\rho)]\} = 2\pi\tilde{R}_1^2 \frac{J_1(2\pi\tilde{R}_1 r)}{2\pi\tilde{R}_1 r} - 2\pi\tilde{R}_2^2 \frac{J_1(2\pi\tilde{R}_2 r)}{2\pi\tilde{R}_2 r} + \dots + (-1)^{k+1} \pi\tilde{R}_k^2 \frac{J_1(2\pi\tilde{R}_k r)}{2\pi\tilde{R}_k r} \quad (6.9)$$

con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (6.5), (5.32) y (6.9) y, considerando que la constante de difracción es λf , en el plano de correlación se tiene:

$$I_c(x, y) = |c(x, y)|^2 \propto \frac{1}{r} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \tilde{R}_i J_1\left(\frac{2\pi\tilde{R}_i r}{\lambda f}\right) + \frac{(-1)^{k+1} \tilde{R}_k}{2} J_1\left(\frac{2\pi\tilde{R}_k r}{\lambda f}\right) \right\}^2 * [\delta(x - x_0, y - y_0) + \delta(x + x_0, y + y_0)] \quad (6.10)$$

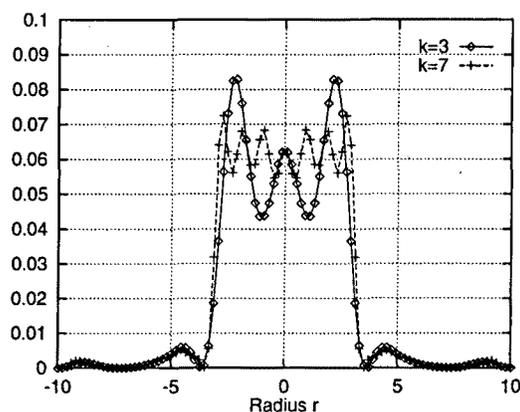


Figura 6.2: gráfica de una sección de la correlación degradada.

[†] ver tabla A.1

Para ilustrar cómo es la correlación descrita por la ecuación anterior, ésta se ha calculado para un caso particular, considerando $\tilde{R}_i = i$ y $\lambda f = 1$. Puesto que la ecuación (6.6) presenta ceros en posiciones casi periódicas, la suposición $\tilde{R}_i = i$ parece adecuada. La figura 6.2 muestra una gráfica de una sección del término que convoluciona a las deltas de la correlación (6.10). La línea continua y a trazos se corresponden con tomar $k=3$ y $k=7$, respectivamente. Si la imagen estuviera enfocada, aparecería un pico en $r=0$. En cambio, en los casos analizados, la correlación tiene tendencia a formar un anillo circular alrededor de dicho punto (al ir añadiendo más ceros se pasa de tener un círculo a quedarse sólo con la circunferencia exterior). En la práctica, como se verá más adelante, el número de ceros que se registra en el proceso de captación del JPS es pequeño. Esto es debido a que el rango dinámico de los detectores de intensidad actuales es del orden de dos o tres décadas, mientras que se necesitan, al menos, tres órdenes de magnitud para captar la intensidad de los primeros ceros de la OTF. Así pues, el área del JPS registrado es muy pequeña. En cualquier caso, sin embargo, la sección de la correlación está confinada alrededor del punto de detección.

6.2.2 JTC para imágenes movidas

En este caso, la escena registrada aparece borrosa debido a que el sistema de captación se encuentra en movimiento relativo respecto a la imagen. Se supondrá que se trata de un movimiento lineal uniforme [Gon93]. Si éste se describe mediante las funciones temporales $X(t)$ e $Y(t)$ en las direcciones x e y , respectivamente, y T es el tiempo de exposición, la imagen adquirida por el sistema de captación se puede expresar como:

$$s(x, y) = \int_{-T/2}^{T/2} s_i(x - X(t), y - Y(t)) dt \quad (6.11)$$

Su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \int_{-T/2}^{T/2} s_i(x - X(t), y - Y(t)) dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = \\ &= S_i(u, v) \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi(uX(t)+vY(t))} dt = S_i(u, v) H(u, v) \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde la última igualdad es consecuencia de (6.2). Al suponer que el movimiento es lineal y uniforme, durante el tiempo de exposición T la imagen de entrada recorre

una cierta distancia L , con lo que la función de transferencia $H(u,v)$ se puede escribir:

$$H(u, v) = T \text{sinc}(uL_x) \text{sinc}(vL_y) \quad (6.13)$$

donde

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$$

En este trabajo se simularán las escenas movidas generándolas digitalmente mediante la convolución entre imágenes enfocadas y la respuesta impulsional

$$h(x') = \text{rect}\left(\frac{x'}{L}\right) \quad (6.14)$$

donde x' es un eje en la dirección del movimiento. La función de transferencia del sistema es la transformada de Fourier de la ecuación anterior,

$$H(u') = L \text{sinc}(Lu') \quad (6.15)$$

donde u' es el eje en el espacio de Fourier perpendicular al x' .

Se trata ahora de analizar la expresión analítica que toma la correlación para escenas movidas y después de binarizar el JPS. En primer lugar, se reescribirá $\text{sign}[H(u')]$ en términos de ondas cuadradas[†] y de funciones escalón[‡]:

$$\text{sign}[H(u, v)] = \text{sign}[\text{sinc}(Lu')] = \text{sw}(Lu') \text{step}(u') + \text{sw}(-Lu') \text{step}(-u') \quad (6.16)$$

Las transformadas de Fourier de las funciones sw y step son:

$$\mathfrak{F}\{\text{sw}(Lu')\} = \frac{2}{\pi L} i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\delta\left(x' + (2n+1)\frac{L}{2}\right) - \delta\left(x' - (2n+1)\frac{L}{2}\right) \right] \quad (6.17)$$

$$\mathfrak{F}\{\text{step}(u')\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\pi x'} + \delta(x') \right] \quad (6.18)$$

Introduciendo estas dos fórmulas al realizar la transformada de Fourier de la ecuación (6.16), se obtiene:

[†] función sw , definida en A.2.1.7. Se considera que es impar

[‡] función step , definida en A.2.1.6

$$\Im\{\text{sign}[H(u,v)]\} \propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\delta\left(x'+(2n+1)\frac{L}{2}\right) - \delta\left(x'-(2n+1)\frac{L}{2}\right) \right] * \frac{1}{x'} \quad (6.19)$$

Despreciando los términos de orden superior tanto en la ecuación anterior como en la expansión del JPS binario (5.31), la intensidad de la correlación queda[†]:

$$I_c(x',y') \propto \left[\frac{1}{\left(x'+\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2} \right] * \left| \Im\left\{ \cos\left[2\pi(x_0u+y_0v) + \phi_R(u,v) - \phi_S(u,v)\right] \right\} \right|^2 \quad (6.20)$$

En el caso de que la referencia coincida con la escena, es decir, si $\phi_S(u,v) = \phi_R(u,v)$:

$$I_c(x',y') \propto \left[\frac{1}{\left(x'+\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2} \right] * \left\{ \delta(x-x_0, y-y_0) + \delta(x+x_0, y+y_0) \right\} \quad (6.21)$$

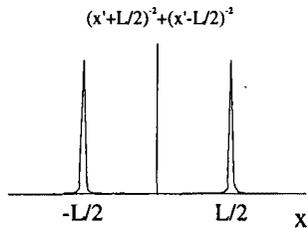


Figura 6.3: degradación de la correlación para escenas movidas.

Si se estudia el término que convoluciona a las funciones δ , que es el responsable de la degradación de la correlación (ver figura 6.3), se ve cómo tanto alrededor de (x_0, y_0) como de $(-x_0, -y_0)$ aparecen dos máximos estrechos a distancias $+L/2$ y $-L/2$ de dichas posiciones y según la orientación del eje x' . En otras palabras, se obtienen dos picos en los puntos

[†] en este caso, no se ha introducido el factor de escala λf porque durante el proceso se realizan dos transformadas de Fourier ópticas, al pasar de (6.14) a (6.15) y en este último paso

$$(x(-T/2), y(-T/2)) \quad \text{y} \quad (x(T/2), y(T/2))$$

que son las coordenadas del motivo al inicio y al final de la exposición, respectivamente. La presencia de dos picos representa un problema, ya que se puede confundir con una doble detección de la referencia.

6.3 Algoritmo de procesamiento del espectro de Fourier

En el apartado 6.2 se ha visto cómo el signo de $H(u,v)$ es el término responsable de la degradación del reconocimiento cuando se usa un JTC binario. En este apartado se presentará un método para determinar dicho factor a partir del espectro de Fourier de la imagen desenfocada,

$$|S(u,v)|^2 = |S_1(u,v)H(u,v)|^2 \quad (6.22)$$

El procedimiento se basa en detectar los ceros de $H(u,v)$ a partir de las frecuencias que anulan la distribución (6.22).

6.3.1 Escenas desenfocadas

La función de transferencia $H(u,v)$ de un sistema óptico presenta simetría circular, como indica la ecuación (6.7). Por lo tanto, analizando cualquier sección diametral del espectro de la imagen desenfocada (6.22), es posible detectar los ceros de $H(u,v)$. Sin embargo, en dicho proceso también se hallarán ceros de $S_1(u,v)$ en la dirección considerada. Con el fin de minimizar este efecto, se propone calcular la media angular de $|S(u,v)|^2$,

$$M(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} |S(\rho,\theta)|^2 d\theta = \frac{|H(\rho)|^2}{\pi\rho} \int_0^\pi |S_1(\rho,\theta)|^2 d\theta \quad (6.23)$$

donde

$$S(u,v) = S(\rho,\theta)$$

y (ρ,θ) son coordenadas polares. Debido a la falta de resolución en la digitalización de $|S(u,v)|^2$, $M(\rho)$ nunca se anula. De hecho, $M(\rho)$ tiene un mínimo cada vez que $H(\rho)$ cambia de signo y, por lo tanto, se puede presentar una ambigüedad entre valores de ρ para los cuales $M(\rho)$ es cero y mínimos locales reales de $M(\rho)$. Para solucionar este problema y determinar así correctamente los ceros de $H(\rho)$, se proce-

sarรก la distribuci3n de intensidad (6.22) con un filtro de aumento de contraste local [Nar81]:

$$M'(\rho) = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^\pi \left\{ |S(\rho, \theta)|^2 - |S'(\rho, \theta)|^2 \right\} d\theta = M(\rho) - \frac{1}{\pi\rho} \int_0^\pi |S'(\rho, \theta)|^2 d\theta \quad (6.24)$$

donde $|S'(\rho, \theta)|^2$ es la mediana de los valores de $|S(\rho, \theta)|^2$ vecinos de la frecuencia (ρ, θ) (filtro de mediana). Los m3nimos locales se pueden eliminar analizando el comportamiento de la derivada de $M'(\rho)$ alrededor del m3nimo: una discontinuidad en la derivada se corresponde con un cero real de $H(\rho)$, mientras que un m3nimo local presentar3a una variaci3n suave de la derivada. As3 pues, teniendo en cuenta que cada cero de $H(u, v)$ implica un cambio en su signo, se puede generar la mรกscara

$$\tilde{M}(u, v) = \text{sign}[H(u, v)] \quad (6.25)$$

Finalmente, se realiza el producto entre (6.25) y el BJPS (6.4):

$$\begin{aligned} I_b(u, v) &\propto \text{sign}^2[H(u, v)] \cos\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} = \\ &= \cos\{2\pi(x_0 u + y_0 v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \end{aligned} \quad (6.26)$$



Figura 6.4: satélite original (referencia).



Figura 6.5: satélite desenfocado ($\omega = 8\lambda$).

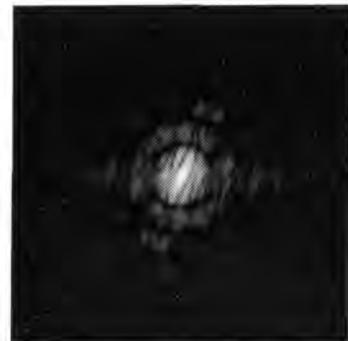


Figura 6.6: espectro de potencia del satélite desenfocado, $|S(u, v)|^2$.

Para ilustrar dicho algoritmo, se presenta un ejemplo simulado. La figura 6.4 muestra un satélite y la figura 6.5 una imagen desenfocada del mismo. El espectro de potencia de este 3ltimo se representa en la figura 6.6 en escala logar3tmica, con el fin de que se p3udan apreciar los mรกximos laterales. En la figura 6.7 se ve c3mo la media radial $M(\rho)$ tiene varios m3nimos (que se corresponden con los ceros de la

OTF), aunque no parece posible establecer un umbral fijo que permita hallarlos. Por esta razón es necesario calcular la nueva distribución $M'(\rho)$ (figura 6.8), cuyos mínimos tienen valores parecidos, con lo que es sencillo determinar su posición. La generación de $M'(\rho)$ será especialmente indispensable en escenas multiobjeto, en las que las interferencias entre los diferentes objetos tienden a enmascarar aun más los ceros.

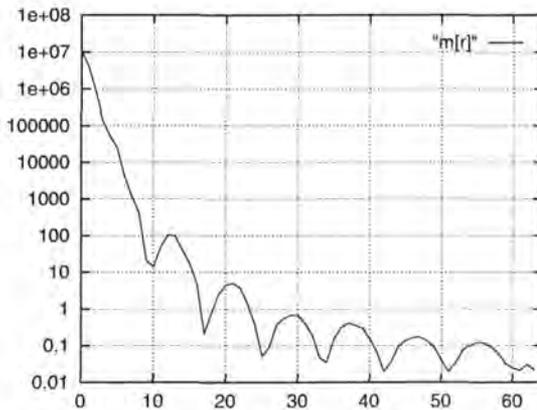


Figura 6.7: distribución $M(\rho)$.

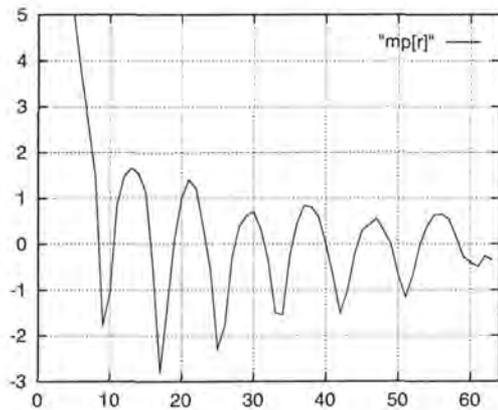


Figura 6.8: distribución $M'(\rho)$.

La figura 6.9 muestra la máscara $\tilde{M}(u,v)$ generada a partir de $M'(\rho)$ (los valores negativos se representan en negro). La obtención experimental de $M'(\rho)$ puede resultar complicada debido a que el rango dinámico de los detectores de intensidad actuales es reducido. En principio, este problema se podría solventar reforzando las altas frecuencias de $|S_i(\rho,\theta)|^2$, por ejemplo procesando la escena con algún filtro de refuerzo de bordes.



Figura 6.9: máscara de desenfoque.



Figura 6.10: autocorrelación del satélite enfocado.

Finalmente, se ha simulado la correlación usando un JTC binario con el umbral variable (5.23). La figura 6.10 es la autocorrelación del satélite enfocado, mientras que la figura 6.11 muestra la correlación cruzada entre el enfocado y el desenfocado. La detección es muy ruidosa y, con una escena multiobjeto, no sería posible reconocer el motivo. En cambio, después de aplicar el algoritmo desarrollado y procesar el BJPS con la máscara $\tilde{M}(u,v)$, la correlación resultante (figura 6.12) es muy parecida a la del caso enfocado.

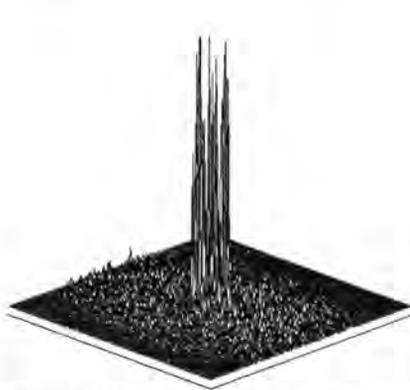


Figura 6.11: correlación entre el satélite enfocado y el desenfocado.



Figura 6.12: correlación procesada.

De esta manera, se puede decir que el método es útil para escenas cuyo espectro de potencia decrezca monótonicamente. Sin embargo, habría que mejorarlo para aquellas que contuvieran objetos con simetría circular, debido a que en su transformada de Fourier seguramente aparecerían ceros distribuidos radialmente, que podrían dar lugar a confusión.

Para probar el algoritmo en una escena real, se ha utilizado la de la figura 6.13, donde el motivo a reconocer es el satélite situado arriba y a la izquierda, cuya detección se ve dificultada debido a la presencia de la Tierra como fondo. Se ha obtenido una imagen desenfocada de la escena aplicando la OTF descrita en la ecuación (6.6) y utilizando parámetros realistas: el sistema que forma la imagen es un objetivo fotográfico estándar de focal $f = 50$ mm trabajando con una apertura $f/11$ y longitud de onda de la luz $\lambda = 600$ nm. La frecuencia de corte ($s = 2$) es de 300 ciclos/mm, aproximadamente. Se capta la escena con una cámara CCD comercial de 512×512 píxeles y 8×6 mm de tamaño. La resolución efectiva del dispositivo es de unos 30 mm^{-1} y el camino óptico es $\omega = 12\lambda$. La imagen resultante es la de la figura 6.14. Las figuras 6.15 y 6.16 muestran la correlación antes y después de procesar el JPS, respectivamente. El procedimiento da resultados plenamente satisfactorios.

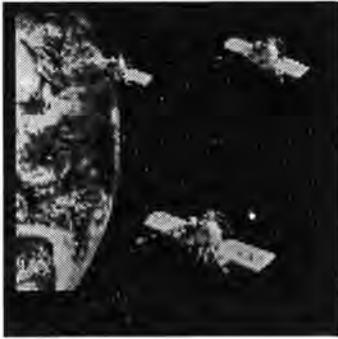


Figura 6.13: escena original.

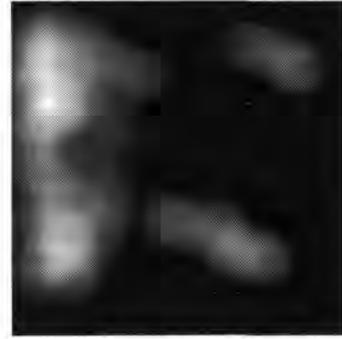


Figura 6.14: escena desenfocada ($\omega = 12\lambda$).

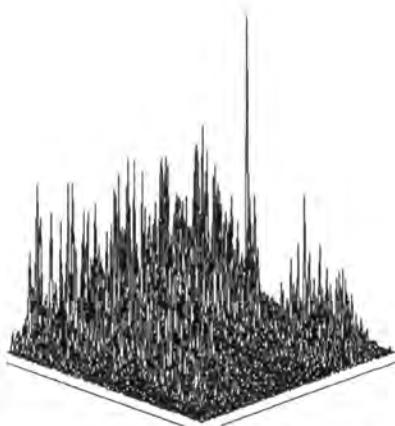


Figura 6.15: correlación degradada para la escena desenfocada.

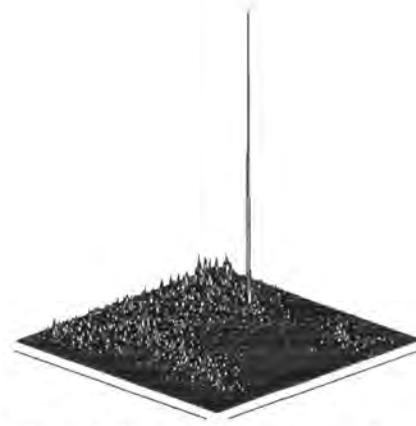


Figura 6.16: correlación procesada.

6.3.2 Escenas movidas

Se trata, de nuevo, de detectar los ceros de $H(u,v)$, con el fin de generar la máscara (6.25), lo que se puede conseguir a partir de las frecuencias que anulan (6.22). En este caso, sin embargo, es necesario determinar la dirección del movimiento. Para ello, se calcula el promedio angular de $|S(u,v)|^2$, que da una distribución de intensidad:

$$I(\theta) = \int_0^\infty |S(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho = \int_0^\infty |S_1(\rho, \theta)|^2 |H(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho \quad (6.27)$$

La dirección en la que $I(\theta)$ es máxima, es decir, $I'(\theta) = 0$, es ortogonal a la dirección del movimiento. Para simplificar las ecuaciones, se rotan los ejes de manera que las coordenadas (u,v) se convierten en unas nuevas coordenadas (u',v') , tal que:

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \theta_M + v \sin \theta_M \\ v' &= -u \sin \theta_M + v \cos \theta_M \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde θ_M es el ángulo entre los ejes x y x' .

El objetivo del método es la obtención de los ceros de la función $\text{sinc}(Lu')$, que está modulada por $S_1(u',v')$. Para minimizar dicho efecto, se calcula un promedio de $|S(u',v')|^2$ a lo largo de la coordenada v' :

$$M(u') = \int_0^{\infty} |S_1(u',v') \text{sinc}(Lu')|^2 dv' \quad (6.29)$$

La integral se calcula entre 0 e ∞ por simetría. A partir de $M(u')$ se puede generar la máscara

$$\tilde{M}(u,v) = \text{sign}[\text{sinc}(Lu')] \quad (6.30)$$

cambiando de manera alternativa el signo en cada mínimo de $M(u')$. Finalmente, se realiza el producto con (6.4), con lo que la degradación queda corregida y los picos de reconocimiento son funciones δ . En términos de la discusión del apartado 6.2.2, las detecciones se obtienen para $t = 0$.

Otra posibilidad para resolver el problema de reconocimiento para escenas movidas consiste en procesar la correlación. Según la ecuación (6.21), en cada una de las correlaciones cruzadas aparecen dos picos, centrados en $x' = \pm L/2$, lo que permite determinar la dirección del movimiento x' y la distancia L . La máscara (6.30) se genera a partir de la función rectángulo

$$\text{rect}\left(\frac{x'}{L}\right)$$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento. La figura 6.17 se corresponde con una imagen movida del satélite de la figura 6.4; en este caso, $h(x,y)$ es un segmento de 19 píxeles con una orientación $\theta_M = 45^\circ$ (la imagen completa tiene 128x128 píxeles). El espectro de potencia de la escena movida es el de la figura 6.18 y la máscara $\tilde{M}(u,v)$ generada a partir de $M(u')$ aparece en la figura 6.19. La correlación cruzada entre el satélite enfocado y el borroso se muestra en la figura 6.20 donde, como era de esperar, aparecen dos picos en forma de δ . Finalmente, la correlación

una vez procesado el JPS mediante la máscara es la de la figura 6.21, que es equivalente a la de la figura 6.10 y se corresponde con la detección del objeto para $t = 0$.



Figura 6.17: satélite movido ($L = 19$ píx., $\theta_M = 45^\circ$).



Figura 6.18: espectro de potencia del satélite movido.

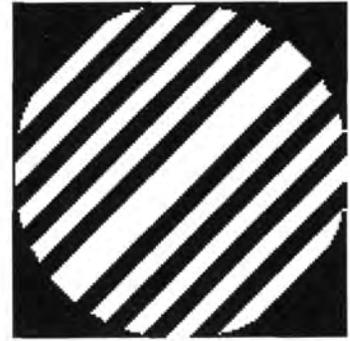


Figura 6.19: máscara de movimiento.



Figura 6.20: correlación degradada para la escena movida.



Figura 6.21: correlación procesada.



Figura 6.22: escena compleja movida ($L = 29$ p., $\theta_M = 120^\circ$).

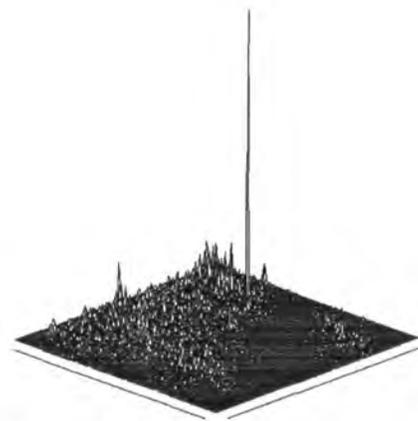


Figura 6.23: correlación procesada.

El proceso se ha repetido para la escena compleja 6.13. La figura 6.22 muestra el resultado de aplicar sobre dicha escena un movimiento equivalente a 29 píxeles y orientación $\theta_M = 120^\circ$. La figura 6.23 corresponde a la correlación obtenida después de aplicar el algoritmo explicado más arriba, que da lugar a un proceso de reconocimiento satisfactorio.

6.4 Post-procesado de la correlación

En el caso de tratarse de un JTC con escenas desenfocadas, se propone aquí un método alternativo para corregir la correlación degradada [Car97]. Puesto que la correlación cruzada entre la escena desenfocada y la referencia tiene simetría circular, es posible realizar una convolución entre el plano de correlación y un círculo de radio adecuado. Esta decisión se basa en la discusión que se ha hecho anteriormente en relación a la figura 6.2. Para determinar el radio del círculo relacionado con el desenfoque real del sistema se ha determinado el primer cero \tilde{R}_1 del JPS degradado y se ha considerado que éste se corresponde con el radio del disco de Airy[†]. La figura 6.25 muestra la correlación post-procesada mediante esta técnica. En este caso la magnitud del desenfoque de la escena ha sido $\omega = 6\lambda$ (figura 6.24). Los resultados no son tan buenos como con los métodos anteriores, aunque éste presenta la ventaja de que es mucho más sencillo y rápido.

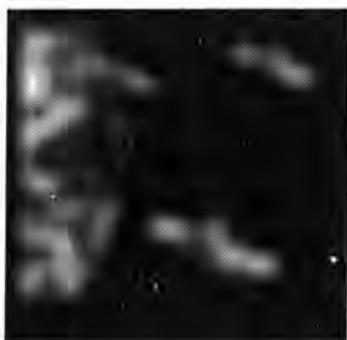


Figura 6.24: escena compleja desenfocada ($\omega = 6\lambda$).

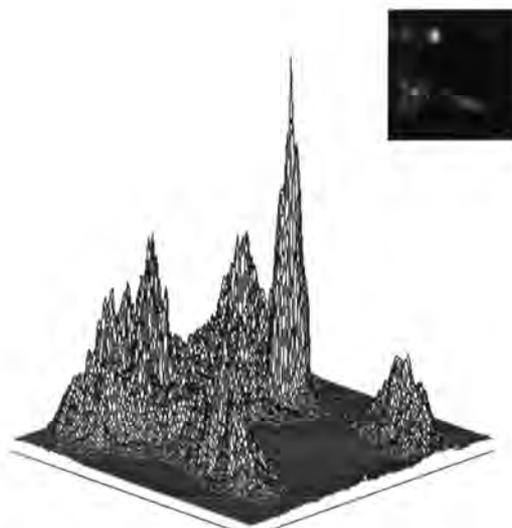


Figura 6.25: correlación post-procesada.

[†] ver anexo A, apartado A.2.1.9

6.5 Implementación experimental

Para probar los métodos que se han explicado en un montaje experimental, se utilizará el correlador óptico descrito en el capítulo 4 y se trabajará con un JTC binario con el umbral variable, tal y como se ha hecho en las simulaciones.

La filosofía para corregir las correlaciones degradadas en un caso práctico pasará, en principio, por la determinación del signo de la OTF de la función de degradación, sea un desenfoque o un movimiento relativo. Es decir, es necesario obtener el espectro de la escena borrosa $|S(u,v)|^2$ y detectar sus mínimos, mediante las técnicas explicadas.

6.5.1 Escenas desenfocadas

En el caso de que la degradación sea un desenfoque, la forma de la media angular de $|S(u,v)|^2$, $M(\rho)$ (figura 6.7), sugiere cómo la relación de intensidades entre el máximo central y el primer máximo lateral es de cinco órdenes de magnitud. Aunque la cámara CCD que se ha utilizado para el registro del espectro de la escena, la Pulnix TM-765 de que se dispone en el Laboratorio tiene, en comparación con otras cámaras comerciales, un rango dinámico elevado (67 dB), en el proceso de digitalización sólo se dispone de 8 bits, con lo que, en la práctica, aun saturando el centro, se capta el máximo central del espectro y poco más. Es decir, únicamente es posible detectar el primer mínimo de la distribución $M(\rho)$.

El segundo problema derivado de la adaptación de las técnicas explicadas en un sistema experimental es que se basan en la simetría circular de las diferentes imágenes involucradas. Por lo tanto, es imprescindible en este caso asegurar que dicha simetría se conserva a lo largo de todo el proceso de transformación de Fourier con el sistema optoelectrónico empleado y descrito en el capítulo 4. Las consideraciones que se van a describir inmediatamente son válidas tanto para la primera transformada como para la segunda y posterior obtención de la correlación: las imágenes de entrada se introducen en el modulador después de ampliarlas con un *zoom* de factores adecuados (4.10), de manera que la correspondencia entre filas y columnas en el ordenador y píxeles en la LCD sea exacta uno a uno; por otra parte, debido a que ni las dimensiones de los píxeles ni las de la cámara son iguales en la dirección horizontal y vertical, los espectros captados con la CCD sufren una compresión según x . Teniendo en cuenta las especificaciones esquematizadas en la página 85, el factor de compresión horizontal es:

$$\frac{d_x}{d_y} \cdot \frac{\bar{T}_x}{\bar{T}_y} = \frac{80\mu\text{m}}{75\mu\text{m}} \cdot \frac{7.72\text{mm}}{5.63\text{mm}} = 1.463$$

que se debe corregir mediante un ensanchamiento de igual magnitud.

Con estas premisas, se obtienen los diferentes espectros, el JPS binario y la correlación, que estará degradada por el desenfoque. Para corregirla, se ha escogido el método de procesado del JPS mediante la máscara (6.25).

Dada la dificultad que implica todo el proceso, la escena que se utiliza es un único satélite (figura 6.4), desenfocado digitalmente con $\omega = 10\lambda$. La figura 6.26 es una representación tridimensional del máximo de correlación degradado, que tiene tendencia a formar una circunferencia. El resultado de aplicar la técnica de post-procesado se muestra en la figura 6.27, donde se aprecia cómo el pico se concentra en el centro de dicha circunferencia, permitiendo la correcta detección de la posición de la referencia. Si la mejora no es tan evidente como preveía el modelo teórico, es debido a las limitaciones derivadas de la implementación experimental, especialmente en lo que se refiere al rango dinámico de la cámara y a la consecuente pérdida de altas frecuencias en el plano de Fourier. Se ha llevado a cabo una simulación más realista considerando dichas limitaciones, con la que se han obtenido resultados muy similares a los presentados. La conclusión que se puede extraer es que la aplicabilidad del método para escenas más complicadas pasa por la mejora de los dispositivos empleados.

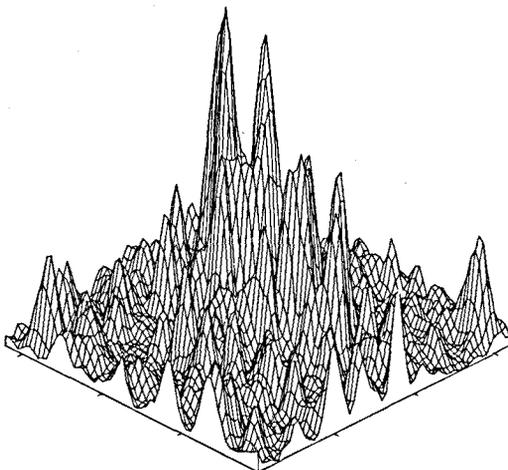


Figura 6.26: correlación experimental degradada para el satélite desenfocado.

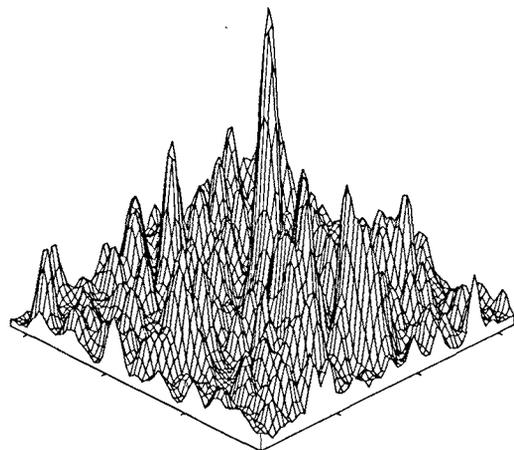


Figura 6.27: correlación experimental procesada para el satélite desenfocado.

6.5.2 Escenas movidas

El método para corregir la correlación en el caso de trabajar con escenas movidas consiste también en procesar el JPS, generando la máscara (6.30). La determinación del signo de la función sinc puede realizarse de dos maneras: o bien detectando los ceros del espectro de la escena movida, o bien analizando la separación entre los dos picos de correlación, que no es más que la longitud L del rectángulo de movimiento. Se utilizará esta última técnica, que en principio es más sencilla porque no plantea el problema de la detección de mínimos en el plano de Fourier. Además, con el fin de que en la correlación degradada el efecto del segmento de movimiento sea más evidente y facilitar de esta manera la determinación de L , la escena y la referencia se pueden pre-procesar con un filtro de detección de bordes (filtro Roberts [Gon93]). En la práctica, esta potenciación de las altas frecuencias resulta, en cambio, contraproducente en el caso de desenfoques, porque conlleva una pérdida de bajas frecuencias que, para dicha degradación, sí aportan información relevante.

Se ha utilizado la escena del satélite 6.4 de 128×128 píxeles convolucionada con un rectángulo de 21 píxeles y orientado horizontalmente, es decir, $\theta_M = 0^\circ$. En la correlación degradada (figura 6.28) es posible medir la distancia L , de manera que se puede generar la máscara

$$\text{sign} \left[\text{sinc} \left(\frac{u' L}{K_{\text{dif}}} \right) \right]$$

teniendo en cuenta que los mínimos de la función sinc se dan para

$$u'_m = m \frac{K_{\text{dif}}}{L} \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.31)$$

En este caso u' coincide con la dirección horizontal. Las magnitudes de la ecuación anterior pueden expresarse en las unidades que se desee, aunque lo más sencillo es que sea en términos del número píxeles sobre el ordenador. La constante de difracción tomará un valor u otro según si se ha aplicado a las imágenes algún tipo de *zoom* para conservar las proporciones, como se hacía en el apartado anterior, o no. Para este caso concreto, en el que no se espera ningún tipo de simetría en los espectros ni se deben medir ángulos, es posible introducir las imágenes directamente en la LCD sin ningún factor corrector, siempre y cuando se tenga en cuenta al aplicar (6.31).

El resultado de la correlación resultante del BJPS procesado es el de la figura 6.29, en la que únicamente aparece el pico de detección centrado en la posición de la referencia. Si la mejora para este tipo de degradación es superior que en el caso del desenfoque es debido a que la pérdida de altas frecuencias no es tan drástica, sobre todo si éstas se refuerzan (en realidad, la aplicación del filtro de Roberts sobre las imágenes iniciales es imprescindible si se quieren apreciar nítidamente los dos picos de la correlación degradada, pero no es necesario, una vez generada la máscara, para obtener la correlación corregida).

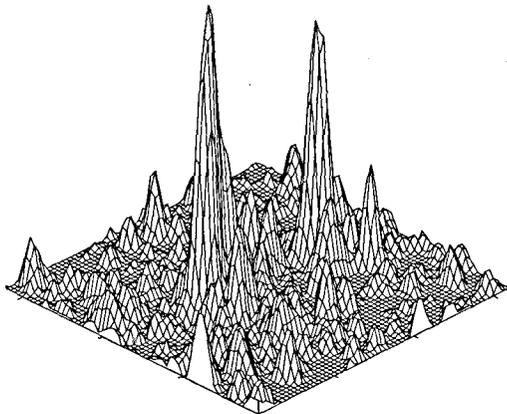


Figura 6.28: correlación experimental degradada para el satélite movido.

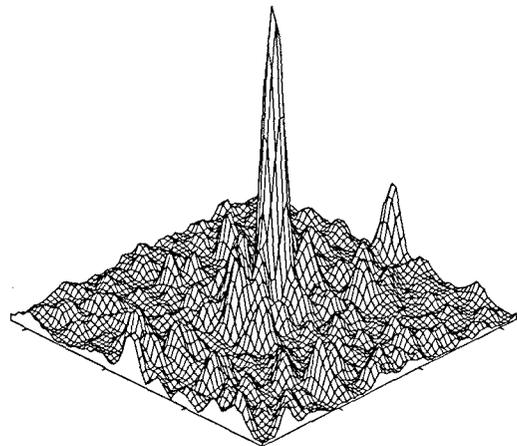


Figura 6.29: correlación experimental procesada para el satélite movido.

CAPÍTULO 7:

CORRELADOR DE TRANSFORMADAS CONJUNTAS SÓLO DE FASE

En el capítulo 5 se han explicado dos procedimientos generales para aumentar la capacidad de discriminación de un correlador de transformadas conjuntas lineal: la introducción de filtros en el espacio objeto o bien la aplicación de no-linealidades en el espacio de Fourier, es decir, sobre el espectro de potencia conjunto. En el segundo caso, se han visto y comparado dos métodos: la binarización del JPS y la eliminación de la envolvente espacial (SER). En este capítulo se pretende ir un poco más allá y se implementará un JTC denominado sólo de fase [Mar97], que mejora aún más las prestaciones de los anteriores métodos.

Como se verá al final del capítulo, esta técnica abre nuevas vías de investigación, en las que se trabaja actualmente.

7.1 Análisis teórico

El método de eliminación de la envolvente espacial desarrollado en el apartado 5.4.2 permitía encontrar el término cosinusoidal del JPS (5.42),

$$I_{\cos}(u, v) = \cos\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (7.1)$$

que daba dos correlaciones en forma de δ de Dirac en el caso de detectarse el motivo dentro de la escena., ya que:

$$\mathfrak{F}\{\cos[2\pi(x_0u + y_0v)]\} = \frac{1}{2}\{\delta(x - x_0, y - y_0) + \delta(x + x_0, y + y_0)\} \quad (7.2)$$

En este caso, se pretende calcular la distribución de fase

$$\varphi(u, v) = 2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v) \quad (7.3)$$

que se puede modular en la LCD utilizando la configuración sólo de fase como:

$$e^{i\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\}} \quad (7.4)$$

lo que da un único pico de correlación

$$\mathfrak{F}\{e^{i2\pi(x_0u + y_0v)}\} = \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (7.5)$$

y maximiza la eficiencia óptica del correlador.

Esto puede conseguirse de manera sencilla si se añade un factor de fase constante de $\pi/2$ o bien a la escena o bien a la referencia, con lo cual, aplicando el método SER, se obtiene, a partir del JPS, una distribución:

$$\begin{aligned} I_{\sin}(u, v) &= \cos\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \pi/2 - \phi_S(u, v)\} = \\ &= \sin\{2\pi(x_0u + y_0v) + \phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

de manera que:

$$\tan^{-1} \frac{I_{\sin}(u, v)}{I_{\cos}(u, v)} = \varphi(u, v) \quad (7.7)$$

7.2 Procedimiento experimental y resultados

Para la realización experimental del JTC sólo de fase se empleará el montaje explicado en el capítulo 4, con la LCD caracterizada en el capítulo 3. La implementación constará de dos partes diferenciadas, para las que se trabajará con configuraciones del modulador distintas:

a) obtención de $\varphi(u,v)$

Se trata, en primer lugar, de calcular las distribuciones (7.1) y (7.6). Para ello, es necesario trabajar en condiciones de alto contraste, para obtener el JPS, y además introducir un desfase constante de $\pi/2$. Es decir, se debe encontrar un conjunto de niveles de gris que den transmitancias diferentes y que estén desfasados $\pi/2$ respecto a otro conjunto de niveles a su vez contrastados entre sí. En la práctica, es imposible encontrar una respuesta del modulador que cumpla estos requerimientos. Sin embargo, sí es viable si las imágenes son binarias, es decir, tienen dos únicos niveles de gris. Así, la curva de alto contraste de la figura 7.1, caracterizada en el capítulo 3, proporciona un contraste elevado entre $g = 255$ y $g = 0$ (nivel de fondo) y un desfase entre $g = 255$ y $g = 37$ de $\pi/2$. El contraste en este último caso no es tan elevado pero suficiente (ver tabla 7.1).

b) modulación de $\exp\{i\varphi(u,v)\}$

Una vez obtenida la distribución de fase $\varphi(u,v)$, que tendrá diversos valores comprendidos entre 0 y 2π , ésta debe modularse en la LCD según la configuración casi de fase. Se utilizará la de la figura 3.25, que da variaciones de transmitancia del 28% del máximo, en intensidad, o del 15% en amplitud y proporciona fases entre 0 y 1.9π . Para determinar los niveles de gris de la imagen que se envía al modulador se deben ajustar los valores de fase a la curva operativa, según el método de mínima distancia euclídea explicado en el apartado 3.4.1.

7.2.1 Resultados

La escena y referencia que se utilizan, como ya se ha comentado, deben ser binarias. Se ha escogido la escena multiobjeto formada por 16 mariposas que se muestra en la figura 7.2, en la que el motivo a detectar (mariposa inferior) está repetido en cuatro ocasiones. Es una escena en principio complicada ya que contiene información de frecuencias espaciales muy diferentes (objetos muy cercanos y también bastante alejados), que no se deben perder en el proceso de registro de los espectros de potencia. Por otra parte, cada una de las mariposas se ha binarizado con

un umbral diferente, de manera que todas ellas tengan aproximadamente la misma energía.

En la página 149 se resume el método completo: para la obtención de la distribución $I_{\cos}(u,v)$ (7.1), se aplica la técnica SER con la escena y referencia enviadas al modulador en la configuración de alto contraste 7.1 con niveles de gris $g = 255$ y $g = 0$ (figura 7.2). El cálculo experimental se llevará a cabo tal y como se explicaba en el apartado 5.4.3, donde la corrección de las energías es en este caso importante debido a que la escena es del orden de 16 veces más energética que la referencia. Para determinar $I_{\sin}(u,v)$ (7.6), o bien la escena o bien la referencia deben representarse con $g = 37$, desfasado $\pi/2$ respecto a $g = 255$. Como la transmitancia para el primero de estos dos niveles de gris es menor que para el segundo (del 44% en amplitud, ver tabla 7.1), se le asigna a la escena, de forma que las energías entre ésta y la mariposa individual a detectar no queden muy descompensadas (figura 7.3). Es importante recordar aquí que lo óptimo es que la energía de la escena y de la referencia coincidan, como se ha discutido en el capítulo 5 (apartado 5.3.2).

Una vez determinada la distribución de fase $\varphi(u,v)$ según (7.7), ésta se ajusta a la curva operativa casi de fase de acuerdo con el mapa representado en la figura 7.4. La desviación sobre los valores originales que se comete en dicho ajuste es, en promedio, de 0.1. Es decir, a cada uno de los píxeles P de la imagen, de coordenadas complejas (Re_p, Im_p) , se le asocia un nivel de gris g cuyas coordenadas (Re_g, Im_g) se encuentran a una distancia euclídea de 0.1 respecto a P .

Con el modulador trabajando en la configuración casi de fase, se realiza la última transformada óptica. Cabe resaltar que en este paso la potencia de luz requerida es muy pequeña, ya que la absorción por parte de la LCD también lo es. El resultado final se muestra en la figura 7.5, donde se ve la aparición únicamente de uno de los términos de correlación cruzada,

$$(s \otimes r) * \delta(x - x_0, y - y_0)$$

La presencia del máximo central es debida a que la transmitancia compleja neta del modulador no es nula. Por otra parte, en la representación tridimensional de la correlación (figura 7.6) se aprecian los cuatro picos correspondientes a detecciones que destacan del resto.

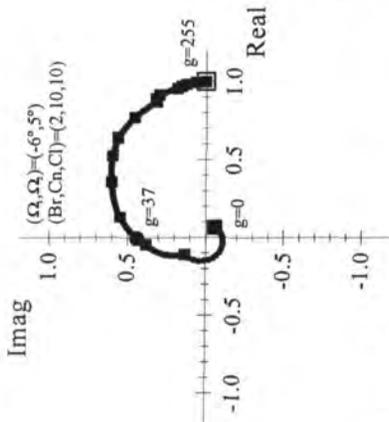


Figura 7.1: configuración de alto contraste y puntos notables.

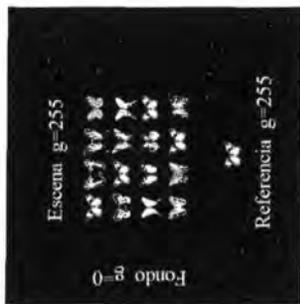


Figura 7.2: escena y referencia binarias.



Figura 7.3: escena y referencia desfasadas $\pi/2$.

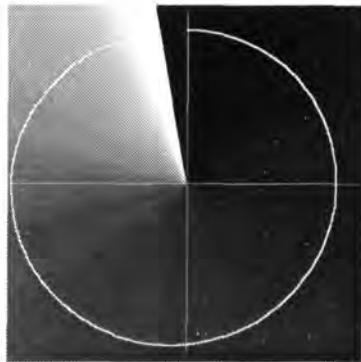
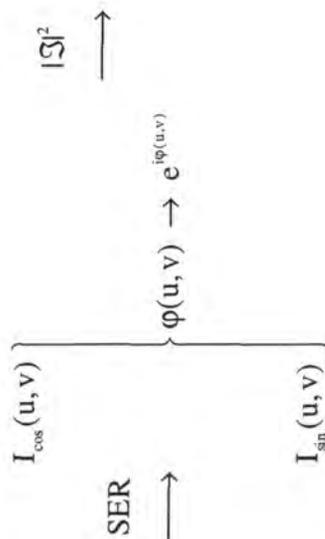


Figura 7.4: configuración casi de fase. Plano complejo y nivel de gris correspondiente.



Figura 7.5: plano de correlación.



$|S|^2$

SER

$\varphi(u, v) \rightarrow e^{i\varphi(u, v)}$

$I_{\sin}(u, v)$

$I_{\cos}(u, v)$

Figura 7.6: correlación. Imagen 3D.

	T (I)	T (A)	Fase
$g = 0$	0.0079	0.089	1.77π
$g = 37$	0.1918	0.438	0.50π
$g = 255$	1	1	0

Tabla 7.1: transmitancia (en intensidad y amplitud) y fase de los puntos notables de la curva de alto contraste.

La tabla 7.2 resume la altura de los diferentes picos en las posiciones de las 16 mariposas, donde el valor máximo se ha normalizado a 100 y la imagen captada con la CCD ha sido previamente corregida con la tabla de salida 4.2b. Aunque la altura de los máximos correspondientes a detecciones, indicados con el fondo negro, varía considerablemente (entre 100 y 44), la discriminación (C.1) calculada entre el pico menor de detección (44) y el mayor correspondiente a no detecciones (21) es del 52%, que es suficiente para separar las mariposas iguales a la referencia del resto. Si se considera el máximo más alto (100), la discriminación es del 79%.

44	14	10	17
11	57	10	18
15	15	14	74
15	21	100	14

Tabla 7.2: altura normalizada de los máximos de correlación. Los valores con el fondo negro se corresponden con las detecciones de la referencia.

Es interesante recuperar en este momento el análisis de las dimensiones de los diferentes elementos en el plano de entrada de un JTC no lineal, que se realizaba en el capítulo 4 y cuyos resultados se resumían en la tabla 4.3 (página 99), para aplicarlo a la escena utilizada aquí. En la figura 7.7 se indica las distancias implicadas en este caso, en términos de filas y columnas de la imagen en el ordenador. Con el fin de aprovechar al máximo el ancho de banda espacial disponible, se ha situado la referencia en disposición vertical, dado que el tamaño de los objetos en dicha dirección es menor que en la horizontal. Y la constante de difracción (4.11) será ahora

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dif}} = (350,512)$$

donde se ha considerado el criterio explicado en el capítulo 4 aplicado a la dirección y , que es la más crítica en lo que se refiere a la relación entre la separación máxima y mínima. Por lo tanto, los resultados de la tabla 4.3 se pueden utilizar aquí, aunque expresados en términos de número de filas. Puede verse cómo la distancia máxima, de 240 filas; está muy cerca del límite de resolución.

Por otra parte, no hay que olvidar que, debido al tamaño finito de los píxeles de la LCD, el plano de correlación venía modulado por una función sinc^2 . En concreto, para la constante de difracción escogida, cualquier valor en dicho plano está multiplicado por la función

$$\text{sinc}^2\left(\frac{\text{scol}}{350}\right)\text{sinc}^2\left(\frac{\text{sfil}}{512}\right)$$

donde scol y sfil es la separación entre la escena y cada uno de los objetos de la referencia en la dirección horizontal y vertical, respectivamente. En la tabla 7.3 aparece el efecto de la función anterior para las distancias involucradas en la imagen escogida, donde el valor máximo se ha normalizado a 100. Si se consideran las posiciones donde se encuentra la mariposa a detectar, se ve cómo este efecto justifica por sí sólo la disparidad de las alturas de los máximos de detección. En este caso se está trabajando en condiciones límite; para una escena más sencilla, las distancias involucradas serían menores y el efecto no sería tan evidente.

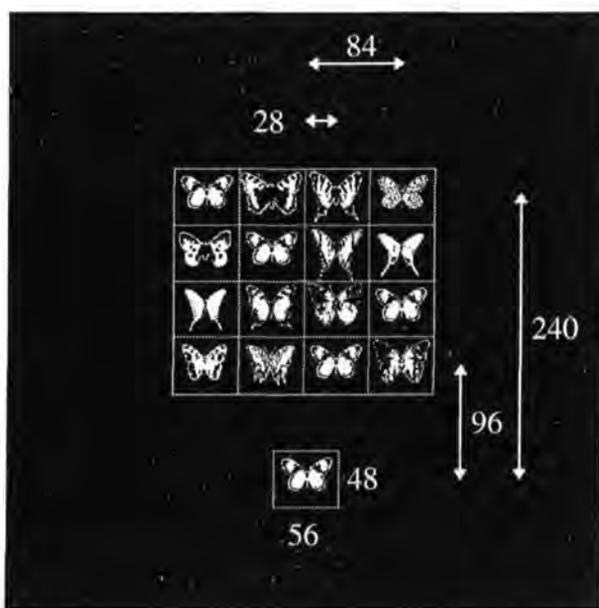


Figura 7.7: escena y referencia. Distancias relativas.

43	51	51	43
58	69	69	58
72	86	86	72
84	100	100	84

Tabla 7.3: efecto de la modulación del sinc^2 sobre la altura de los picos en las posiciones de las mariposas.

7.3 Introducción al JTC en línea

A lo largo de este trabajo se ha expuesto una evolución y mejora del correlador de transformadas conjuntas lineal descrito en el capítulo 1. Se ha visto cómo la

introducción de no-linealidades mejora la capacidad de discriminación, tanto si se trabaja con filtros en el espacio objeto como si se opera sobre el espectro de potencia conjunto. En el primer caso, se puede aprovechar el gran desarrollo en el diseño de filtros específicos que se ha llevado a cabo en los últimos años y que se implementan normalmente mediante la arquitectura del correlador de VanderLugt. La única desventaja que presenta entonces el JTC respecto a este último es el ancho de banda espacial necesario, ya que la escena y referencia deben estar suficientemente separadas para que no exista solapamiento de términos en el plano de correlación. El método SER elimina los órdenes centrales y por lo tanto relaja los requerimientos. Aun más, en el JTC de fase descrito en este capítulo desaparece uno de los términos de correlación cruzada, que aporta información repetida, y la eficiencia óptica del montaje mejora ostensiblemente. Sin embargo, la correlación final aparece centrada en el punto en que lo está la escena.

El siguiente paso sería plantearse qué ocurre si escena y referencia están centradas respecto al mismo punto, es decir, si inicialmente se tiene

$$r(x, y) + s(x, y)$$

En la práctica, esto puede realizarse introduciendo la escena y la referencia en dos moduladores diferentes, cada uno de los cuales se encuentra adosado a una de las dos caras perpendiculares de un cubo divisor de haz, de manera que a la salida del mismo se produce la suma entre las dos distribuciones moduladas.

El espectro de potencia conjunto tomará en este caso la expresión

$$I_L(u, v) = |R|^2 + |S|^2 + 2|R||S|\cos\{\phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\} \quad (7.8)$$

de manera que si se modula

$$e^{i\{\phi_R(u, v) - \phi_S(u, v)\}} \quad (7.9)$$

donde no aparece la fase lineal responsable de la separación entre los términos,

$$e^{i2\pi(x, u + y, v)} \quad (7.10)$$

la correlación cruzada aparece centrada y el ancho de banda espacial requerido es el mismo que en el correlador de VanderLugt.

El procedimiento práctico podría ser el mismo que para el JTC sólo de fase descrito anteriormente. Si, además, quiere optimizarse la eficiencia óptica del montaje, es posible trabajar con la configuración casi de fase también en el plano de entrada [Lu96]. Dado el conocimiento que se tiene de las características de modulación de la pantalla de cristal líquido, la implementación experimental no conlleva mayores dificultades. Es imprescindible asegurar, sin embargo, que el valor final de la correlación en el origen sea nula, ya que podría confundirse con los picos de detección.

En el Laboratorio de Óptica se está trabajando actualmente en esta línea. Ya se han obtenido los primeros resultados, muy satisfactorios y prometedores. La capacidad que se tiene actualmente de modular las propiedades de la luz de manera precisa augura un futuro con muchas posibilidades de desarrollo y mejora en el procesado de imágenes, acompañado de la continua evolución de los moduladores espaciales de luz.

IV. CONCLUSIONES.

BIBLIOGRAFÍA

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha diseñado un sistema de reconocimiento óptico de formas, basado en un correlador de transformadas conjuntas que opera con una pantalla de cristal líquido extraída de un videoprojector Epson y que consta de un único brazo difractor. Se ha estudiado la mejora de la capacidad de discriminación del sistema mediante la introducción de efectos no lineales, así como la optimización de la eficiencia óptica mediante el uso de la información de la fase únicamente. Se ha adaptado el correlador en situaciones más reales en las que la escena sufra dos tipos de degradación, un desenfoque o un movimiento. En todos los casos, se presentan resultados experimentales obtenidos con el sistema diseñado.

Las conclusiones que se pueden extraer de la realización del trabajo son las siguientes:

- ◆ Se ha determinado el funcionamiento del sistema optoelectrónico para visualizar de manera dinámica las imágenes sobre la LCD. Se ha estudiado las características de los diferentes elementos: tarjeta digitalizadora, electrónica de control del videoprojector, operando en modo VGA y CGA, y pantalla de cristal líquido. Todo ello permite establecer la correspondencia que existe entre las filas y columnas de la imagen de entrada y los píxeles sobre la pantalla.

- ◆ Para relacionar el nivel de gris de la imagen con las variaciones que la LCD introduce sobre la amplitud y la fase de la luz que la atraviesa, es necesario obtener las curvas de modulación compleja de la pantalla. Para ello, se ha desarrollado un nuevo método de medida de la modulación de la fase, basado en el análisis de las franjas de interferencia obtenidas con un interferómetro de Mach-Zehnder.
- ◆ Se han determinado tres configuraciones del modulador que son útiles para aplicaciones prácticas: de alto contraste, casi de amplitud y casi de fase. En el primer caso, se consigue un contraste de 126:1, en la de casi de amplitud el desfase máximo es de 0.14π y el contraste de 15:1 y en la de casi de fase la variación de amplitud es inferior al 15% del máximo, mientras que se obtienen desfases de hasta 1.89π .
- ◆ Utilizando un modelo teórico para pantallas de cristal líquido de tipo *twisted nematic*, basado en el cálculo de matrices de Jones, se ha determinado la disposición de las moléculas de cristal líquido en las caras de entrada y de salida de la celda, así como el ángulo de giro.
- ◆ Con estos parámetros, es posible comparar la modulación que predice el modelo teórico con la obtenida experimentalmente, siempre y cuando se establezca una correspondencia de los niveles de gris de las imágenes con el voltaje de la señal de control de la pantalla. Se ha realizado un ajuste para las curvas de alto contraste, casi de amplitud y casi de fase. De los resultados se concluye que dicho modelo puede servir para prever, de manera flexible, el tipo de respuesta de la pantalla para diferentes configuraciones.
- ◆ Se ha llevado a cabo un análisis de las dimensiones de los diferentes elementos que constituyen el correlador de transformadas conjuntas que se empleará en las aplicaciones prácticas.
- ◆ El correlador se basa en el uso de un único difractor convergente. Se ha determinado la constante de difracción del mismo, así como las alteraciones que sufren las imágenes a lo largo de todo el proceso.
- ◆ Se ha analizado los requisitos que deben cumplir las imágenes de entrada al correlador con el fin de optimizar el ancho de banda espacial y la resolución de los diferentes dispositivos optoelectrónicos involucrados. En concreto, se ha establecido el tamaño máximo de la escena y de la referencia, así como la

separación mínima entre ambas, tanto para un JTC lineal como no lineal, que es menos restrictivo.

- ◆ Con el fin de mejorar la capacidad de discriminación del correlador, se ha estudiado la introducción de no linealidades. Una posibilidad es utilizar el diseño de filtros de correlación en el plano objeto, lo que requiere codificar funciones reales (positivas y negativas). Se presentan resultados experimentales obtenidos mediante la conexión CGA binaria del videoprojector, para el filtro sólo de fase y el filtro inverso.
- ◆ En el espacio de Fourier, se ha estudiado la binarización del espectro de potencia, con umbral fijo o variable. Se propone un nuevo método (eliminación de la envolvente espacial), que soluciona la posible aparición de redundancias en el plano de correlación en el caso de JTC binario.
- ◆ La limitación del rango dinámico de la CCD utilizada para registrar el espectro de potencia conjunto ha requerido que las propuestas anteriores se hayan modificado adecuadamente para su correcta implementación experimental.
- ◆ Se ha adaptado el correlador a casos reales en los que la escena pueda sufrir dos tipos de degradación: un desenfoque o un movimiento relativo. Se trata, básicamente, de procesar el espectro de potencia conjunto a base de corregir la información que introduce la degradación. Se ha desarrollado la teoría y mostrado resultados simulados y experimentales. La implementación práctica es delicada debido a las limitaciones de los dispositivos de los que se dispone, especialmente en lo que se refiere al rango dinámico de los detectores de intensidad.
- ◆ Se ha diseñado un correlador de transformadas conjuntas sólo de fase, con el que se obtiene la información únicamente del término de fase del espectro de potencia, lo que mejora la eficiencia óptica del montaje. Para ello, se requiere un conocimiento preciso de la modulación de la pantalla. Se presentan resultados para una escena que aprovecha al máximo el ancho de banda espacial y la resolución de los dispositivos optoelectrónicos disponibles.
- ◆ Como introducción a una futura línea de investigación, se ha propuesto la implementación de un JTC en línea, en el que no existe separación entre la escena y la referencia. Esto disminuye el ancho de banda espacial necesario y lo equipara al del correlador de VanderLugt. Además, trabajando en la configuración sólo de

fase tanto en el espacio de entrada como en el de Fourier se optimiza la eficiencia óptica.

Como conclusión final, puede decirse que en el trabajo se ha adquirido experiencia y conocimiento en el uso de moduladores espaciales de luz, en particular los de cristal líquido. Se ha establecido una metodología para su caracterización que ya se ha empleado para otros moduladores y continuará utilizándose de ahora en adelante. Por otra parte, el futuro diseño de montajes basados en el correlador de transformadas conjuntas (o también en el de VanderLugt) y la mejora de sus características, como las dimensiones, la velocidad y su capacidad de discriminación depende de los dispositivos optoelectrónicos de que se disponga, de prestaciones cada vez mejores.

BIBLIOGRAFÍA

- [Abb73] E. Abbe, "Beiträge zur theorie des mikroskops und der mikroskopischen wahrnehmung", *Archiv fur Mikroskopische Anatomie* **9**, 413-463 (1873).
- [Alt92] P.M. Alt, C.G. Powell, B.L. Owens Jr. and H. Ifill, "A gray-scale addressing technique for thin-film transistor liquid crystal displays", *IBM J. Res. Develop.* **36**, 11-22 (1992).
- [Aww90] A.A.S. Awwal, M.A. Karim and S.R. Jahan, "Improved correlation discrimination using an amplitude modulated phase-only filter", *Appl. Opt.* **29**, 233-236 (1990).
- [Bar89] T.H. Barnes, T. Eiju, K. Matsuda and N. Ooyama, "Phase-only modulation using a twisted nematic liquid crystal television", *Appl. Opt.* **28**, 4845-4852 (1989).
- [Ble78] W.P. Bleha, L. T. Lipton, E. Wiener-Avneer, J. Grinberg, P.G. Reif, D. Casasent, H.B. Brown and B.V. Markevitch, "Application of the liquid crystal light valve to real-time optical data processing", *Opt. Eng.* **17**, 371-384 (1978).
- [Bor80] M. Born and E. Wolf, Principles of optics, Pergamon Press, Oxford (1980).
- [Bos92] S. Bosch, S. Vallmitjana, I. Juvells and J.R. de F. Moneo, "Scale-tunable diffractometer for spatial light modulators. A design procedure", *Proc. SPIE* **1780**, 592-601 (1992).
- [Bri88] E.O. Brigham, The fast Fourier transform and its applications, Prentice Hall, New Jersey (1988).
- [Bur70] C.B. Burckhardt, "A simplification of Lee's method of generating holograms by computer", *Appl. Opt.* **9**, 1949-1949 (1970).

- [Car92] A. Carnicer, I. Juvells and S. Vallmitjana, "Effects of thresholding level variation in fringe binarization of multiobject joint transform correlation", *Appl. Opt.* **31**, 1012-1014 (1992).
- [Car93] A. Carnicer, *Reconocimiento óptico de formas en tiempo real mediante un correlador de transformadas conjuntas. Análisis de fenómenos no lineales*, Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona (1993).
- [Car95] A. Carnicer, E. Martín-Badosa, I. Juvells and S. Vallmitjana, "Spatial envelop-free nonlinear joint transform correlator", *Opt. Commun.* **114**, 336-343 (1995).
- [Car96] A. Carnicer, S. Vallmitjana, J.R. de F. Moneo and I. Juvells, "Implementation of an algorithm for detecting patterns in defocused scenes using binary joint transform correlation", *Opt. Commun.* **130**, 327-336 (1996).
- [Car97] A. Carnicer, S. Vallmitjana and I. Juvells, "Correlation postprocessing-based method for the detection of defocused images", *Appl. Opt.* **36**, 4807-4811 (1997).
- [Cas76a] D. Casasent and D. Psaltis, "Position, rotation and scale invariant optical correlation", *Appl. Opt.* **15**, 1795-1799 (1976).
- [Cas76b] D. Casasent and D. Psaltis, "Scale-invariant optical correlators using Mellin transforms", *Opt. Commun.* **17**, 59-63 (1976).
- [Cas85a] D. Casasent, "Coherent optical pattern recognition: a review", *Opt. Eng.* **25**, 26-32 (1985).
- [Cas85b] D. Casasent, "Computer generated holograms in pattern recognition: a review", *Opt. Eng.* **25**, 724-730 (1985).
- [Cas86] D. Casasent and S.-F. Xia, "Phase correction of light modulators", *Opt. Lett.* **11**, 398-400 (1986).
- [Cas92] D. Casasent and R. Ravichandran, "Advanced distortion-invariant minimum average correlation energy (MACE) filters", *Appl. Opt.* **31**, 1109-1116 (1992).
- [Cas94] D. Casasent, "General-purpose optical pattern recognition image processors", *Proc. IEEE* **82**, 1724-1734 (1994).
- [Coy96] J.A. Coy, M. Zalzarriaga, D.F. Grosz and O.E. Martínez, "Characterization of a liquid crystal television as a programmable spatial light modulator", *Opt. Eng.* **35**, 15-19 (1996).
- [Cha92] K. Chalasinska-Macukow and C. Gorecki, "Optoelectronic implementation of the quasi-phase correlator", *Opt. Commun.* **93**, 11-18 (1992).
- [Che93] F. Cheng, P. Andrés and F.T.S. Yu, "Removal of intra-class associations in joint transform power spectrum", *Opt. Commun.* **99**, 7-12 (1993).
- [Dav89] J.A. Davis, M.A. Waring, G.W. Bach, R.A. Lilly and D.M. Cottrell, "Compact optical correlator design", *Appl. Opt.* **28**, 10-11 (1989).
- [Duf95] J.N. Duffey, B.K. Jones, J.A. Loudin and J. Booth, "Optical characterization of the InFocus TVT-6000 LCTV using custom drive electronics", *Proc. SPIE* **2490**, 432-440 (1995).

-
- [Efr95] U. Efron (ed.), Spatial light modulator technology: materials, devices and applications, Marcel Dekker, New York (1995).
- [Gab49] D. Gabor, "Microscopy by reconstructed wavefronts", Proc. Roy. Soc. A **197**, 454-487 (1949).
- [Gar77] A.D. Gara, "Real-time optical correlation of 3-D scenes", Appl. Opt. **16**, 149-153 (1977).
- [Gas78] J.D. Gaskill, Linear systems, Fourier transforms and optics, J. Wiley & Sons, New York (1978).
- [Gen93] P.G. de Gennes and J. Prost, The physics of liquid crystals, Clarendon Press, Oxford (1993).
- [Gon93] R.C. Gonzalez and R.E. Woods, Digital image processing, Addison-Wesley, Reading (1993).
- [Goo68] J.W. Goodman, Introduction to Fourier optics, McGraw-Hill, New York (1968).
- [Gre86] D.A. Gregory, "Real-time pattern recognition using a modified liquid crystal television in a coherent optical correlator", Appl. Opt. **25**, 467-469 (1986).
- [Gre91] D.A. Gregory, J.A. Loudin, J.C. Kirsch, E.C. Tam and F.T.S. Yu, "Using the hybrid modulating properties of liquid crystal television", Appl. Opt. **30**, 1374-1378 (1991).
- [Gry94] T.J. Grycewicz, "Applying time modulation to the joint transform correlator", Opt. Eng. **33**, 1813-1820 (1994).
- [Han78] E.W. Hansen and J.W. Goodman, "Optical reconstruction from projections via circular harmonic expansion", Opt. Commun. **24**, 268-272 (1978).
- [Hor82] J.L. Horner, "Light utilization in optical correlators", Appl. Opt. **21**, 4511-4514 (1982).
- [Hor84] J.L. Horner and P.D. Gianino, "Phase-only matched filtering", Appl. Opt. **23**, 812-816 (1984).
- [Hor87] J.L. Horner (ed.), Optical signal processing, Academic Press, San Diego (1987).
- [Hor92] J.L. Horner, "Metrics for assessing pattern-recognition performance", Appl. Opt. **31**, 165-166 (1992).
- [Hsu82a] Y.N. Hsu and H.H. Arsenault, "Rotation-invariant digital pattern recognition using the circular harmonic expansion", Appl. Opt. **21**, 4012-4016 (1982).
- [Hsu82b] Y.N. Hsu and H.H. Arsenault, "Optical pattern recognition using the circular harmonic expansion", Appl. Opt. **21**, 4016-4019 (1982).
- [Jav89a] B. Javidi, D.A. Gregory and J.L. Horner, "Single modulator joint transform correlator architectures", Appl. Opt. **28**, 411-413 (1989).
- [Jav89b] B. Javidi and J.L. Horner, "Single spatial light modulator joint transform correlator", Appl. Opt. **28**, 1027-1032 (1989).

- [Jav89c] B. Javidi, "Nonlinear joint power spectrum based optical correlation", *Appl. Opt.* **28**, 2358-2367 (1989).
- [Jav90] B. Javidi, "Image deconvolution by nonlinear techniques in the Fourier domain", *Proc. SPIE* **1297**, 168-175 (1990).
- [Jav91a] B. Javidi and J. Wang, "Binary nonlinear joint transform correlation with median and subset median thresholding", *Appl. Opt.* **30**, 967-976 (1991).
- [Jav91b] B. Javidi, J. Wang and Q. Tang, "Multiple-object binary joint transform correlation using multiple-level threshold crossing", *Appl. Opt.* **30**, 4234-4244 (1991).
- [Joh87] K.M. Johnson, M.A. Handschy and L.A. Pagano-Stauffer, "Optical computing and image processing with ferroelectric liquid crystals", *Opt. Eng.* **26**, 385-391 (1987).
- [Jud93] R.D. Juday, "Optimal realizable filters and the minimum Euclidean distance principle", *Appl. Opt.* **32**, 5100-5111 (1993).
- [Juv91] I. Juvells, S. Vallmitjana, A. Carnicer and J. Campos, "The role of amplitude and phase of the Fourier transform in the digital image processing", *Am. J. Phys.* **59**, 744-748 (1991).
- [Juv92] I. Juvells, S. Vallmitjana and S. Bosch, "Analysis of a scale tunable telephoto lens diffractometer and its use in optical correlation", *J. Mod. Opt.* **39**, 1107-1115 (1992).
- [Juv94a] I. Juvells, S. Vallmitjana and A. Carnicer, "A comparative study of the effect of noise and background clutter on optical image-recognition methods", *J. Mod. Opt.* **41**, 1717-1737 (1994).
- [Juv94b] I. Juvells, A. Carnicer, S. Vallmitjana and J. Campos, "Implementation of real filters in a joint transform correlator using a positive-only display", *J. Optics* **25**, 33-40 (1994).
- [Juv97] I. Juvells, S. Vallmitjana, E. Martín-Badosa and A. Carnicer, "Optical pattern recognition in motion acquired scenes using a binary joint transform correlator", *J. Mod. Opt.* **44**, 313-325 (1997).
- [Kan87] E. Kaneko, *Liquid crystals TV displays*, KTK, Tokyo (1987).
- [Kar93] B.K. Karch, M.A. Karim and D.L. Flannery, "Binary joint transform correlator of defocused images", *Opt. Eng.* **32**, 2709-2719 (1993).
- [Kar97] J.P. Karins, S.A. Mills, J.R. Ryan, R.B. Dydyk and J. Lucas, "Performance of a second-generation miniature ruggedized optical correlator module", *Opt. Eng.* **36**, 2747-2753 (1997).
- [Kir92] J.C. Kirsch, D.A. Gregory, M.W. Thie and B.K. Jones, "Modulation characteristics of the Epson liquid crystal television", *Opt. Eng.* **31**, 963-970 (1992).
- [Kon88] N. Konforti, E. Marom and S.-T. Wu, "Phase-only modulation with twisted nematic liquid-crystal spatial light modulators", *Opt. Lett.* **13**, 251-253 (1988).

- [Kum90] B.V.K.V. Kumar and L. Hassebrook, "Performance measures for correlation filters", *Appl. Opt.* **29**, 2997-3006 (1990).
- [Kum92] B.V.K.V. Kumar, "Tutorial survey of composite filter designs for optical correlators", *Appl. Opt.* **31**, 4773-4801 (1992).
- [Lee70] W.H. Lee, "Sampled Fourier transform holograms generated by computer", *Appl. Opt.* **9**, 639-643 (1970).
- [Liu85] H.K. Liu, J.A. Davis and R.A. Lilly, "Optical-data-processing properties of a liquid crystal television spatial light modulator", *Opt. Lett.* **10**, 635-637 (1985).
- [Lu90a] X.J. Lu, F.T.S. Yu and D.A. Gregory, "Comparison of Vander Lugt and joint transform correlators", *Appl. Phys. B* **51**, 153-164 (1990).
- [Lu90b] K. Lu and B.E.A. Saleh, "Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator", *Opt. Eng.* **29**, 240-246 (1990).
- [Lu96] G. Lu and F.T.S. Yu, "Performance of a phase-transformed input joint transform correlator", *Appl. Opt.* **35**, 304-313 (1996).
- [Mar94] E. Martín-Badosa, *Estudio y caracterización de un sistema de reconocimiento óptico de formas en tiempo real*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Barcelona (1994).
- [Mar97] E. Martín-Badosa, A. Carnicer, I. Juvells and S. Vallmitjana, "Complex modulation characterization of liquid crystal devices by interferometric data correlation", *Meas. Sci. Technol.* **8**, 764-772 (1997).
- [Mat90] S. Matsumoto (ed.), *Electronic display devices*, J. Wiley & Sons, New York (1990).
- [McC96] J.L. McClain, P.S. Erbach, D.A. Gregory and F.T.S. Yu, "Spatial light modulator phase depth determination from optical diffraction information", *Opt. Eng.* **35**, 951-954 (1996).
- [McE85] J.A. McEwan, A.D. Fisher, P.B. Rolsma and J.N. Lee, "Optical-processing characteristics of a low cost liquid crystal display device", *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, - (1985).
- [Mu88] G.-G. Mu, X.-M. Wang and Z.-Q. Wang, "Amplitude compensated matched filtering", *Appl. Opt.* **27**, 3461-3463 (1988).
- [Nar81] P.M. Narendra and R.C. Fitch, "Real-time adaptive contrast enhancement", *IEEE Trans. Pattern. Anal. Mach. Intell.* **PAMI-3**, 655-661 (1981).
- [Nef90] J.A. Neff, R.A. Athale and S.H. Lee, "Two-dimensional spatial light modulators: a tutorial", *Proc. IEEE* **78**, 826-855 (1990).
- [Ohk93] K. Ohkubo and J. Ohtsubo, "Evaluation of LCTV as a spatial light modulator.", *Opt. Commun.* **102**, 116-124 (1993).
- [Opp81] A.V. Oppenheim and J.S. Lim, "The importance of phase in signals", *Proc. IEEE* **69**, 529-541 (1981).
- [Pap62] A. Papoulis, *The Fourier integral and its applications*, McGraw-Hill, New York (1962).

- [Pen70] K.S. Pennington, P.M. Will and G.L. Shelton, "Grid coding: a technique for extraction of differences from scenes", *Opt. Commun.* **2**, 113-119 (1970).
- [Pre92] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, Numerical recipes in C, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [Psa84] D. Psaltis, E.G. Paek and S.S. Venkatesh, "Optical image correlation with a binary spatial light modulator", *Opt. Eng.* **23**, 698-704 (1984).
- [Pu97] A. Pu, R. Denkwalter and D. Psaltis, "Real-time vehicle navigation using a holographic memory", *Opt. Eng.* **36**, 2737-2746 (1997).
- [Rei94] F. Reichel, E. Gärtner, S. Breiffelder, K.-H. Schweikert, R. Bürkle and E. Lüder, "Real-time pattern recognition by means of incoherent optical space frequency analysis", *Proc. SPIE* **2297**, 180-193 (1994).
- [Sal91] B.E.A. Saleh and M.C. Teich, Fundamentals of photonics, J. Wiley & Sons, New York (1991).
- [Sal95] J. Sallent, J. Campos, M. Montes-Usategui and S. Bosch, "A filter design to improve the recognition of defocused images", *Int. Phys. Conf. Ser* **139**, 349-352 (1995).
- [Sou94a] C. Soutar, S.E. Monroe and J. Knopp, "Measurement of the complex transmittance of the Epson liquid crystal television", *Opt. Eng.* **33**, 1061-1068 (1994).
- [Sou94b] C. Soutar and K. Lu, "Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell", *Opt. Eng.* **33**, 2704-2712 (1994).
- [Sta82] H. Stark, Applications of optical Fourier transforms, Academic Press, Orlando (1982).
- [Sto69] A. Stockseth, "Properties of a defocused optical system", *J. Opt. Soc. Am.* **59**, 1314-1321 (1969).
- [Tak82] M. Takeda, H. Ina and S. Kobayashi, "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry", *J. Opt. Soc. Am. A* **72**, 156-160 (1982).
- [Tan93] Q. Tang and B. Javidi, "Technique for reducing the redundant and self-correlation terms in joint transform correlators", *Appl. Opt.* **32**, 1911-1918 (1993).
- [Tri87] G. Tricoles, "Computer generated holograms: an historical review", *Appl. Opt.* **26**, 4351-4360 (1987).
- [Tur94] F. Turon, E. Ahouzi, J. Campos, K. Chalasinska-Macukow and M.J. Yzuel, "Nonlinearity effects in the pure phase correlation method in multiobject scenes", *Appl. Opt.* **33**, 2188-2191 (1994).
- [Val95] S. Vallmitjana, A. Carnicer, E. Martín-Badosa and I. Juvells, "Nonlinear filtering in object and Fourier space in a joint transform optical correlator: comparison and experimental realization", *Appl. Opt.* **34**, 3942-3949 (1995).

-
- [Val97] S. Vallmitjana, A. Carnicer, E. Martín-Badosa, S. Bosch and I. Juvells, "Building correlation strategies for object detection in blurred scenes", in Optoelectronic information processing, B. Javidi and P. Réfrégier ed., SPIE Press PM-54, 85-103 (1997).
- [Van64] A.B. VanderLugt, "Signal detection by complex spatial filtering", IEEE Trans. Inform. Theory **IT-10**, 139-145 (1964).
- [Wan94] J. Wang and B. Javidi, "Multiobject detection using the binary joint transform correlator with different types of thresholding methods", Opt. Eng. **33**, 1793-1805 (1994).
- [Wea66] C.S. Weaver and J.W. Goodman, "A technique for optically convolving two functions", Appl. Opt. **5**, 1248-1249 (1966).
- [Yar84] A. Yariv and P. Yeh, Optical waves in crystals, J. Wiley & Sons, New York (1984).
- [Yu84] F.T.S. Yu and X.J. Lu, "A real-time programmable joint transform correlator", Opt. Commun. **52**, 10-16 (1984).
- [Yu87] F.T.S. Yu, S. Jutamulia, T.W. Lin and D. A. Gregory, "Adaptative real-time pattern recognition using a liquid crystal TV based transform correlator", Appl. Opt. **26**, 1370-1372 (1987).
- [Yu89] F.T.S. Yu, F. Cheng, T. Nagata and D.A. Gregory, "Effects of fringe binarization of multiobject joint transform correlation", Appl. Opt. **28**, 2988-2990 (1989).
- [Yu90] F.T.S. Yu, Q.W.S. Song, T. Nagata and D.A. Gregory, "Comparison of detection for VanderLugt and joint transform correlator", Appl. Opt. **29**, 225-232 (1990).
- [Zha94] Z. Zhang, G. Lu and F. T. S. Yu, "Simple method for measuring phase modulation in liquid crystal televisions", Opt. Eng. **33**, 3018-3022 (1994).

V. ANEXOS

ANEXO A:

TRANSFORMADA DE FOURIER, FUNCIONES ESPECIALES Y DIFRACTÓMETROS

A.1 Transformada de Fourier: propiedades

La transformada de Fourier de una función bidimensional $f(x,y)$ se define como [Goo68]:

$$F(u, v) = \mathfrak{F}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{A.1})$$

que se puede expresar en forma polar, en función de su amplitud y su fase:

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{i\phi_r(u, v)} \quad (\text{A.2})$$

De manera análoga, la transformada de Fourier inversa de la función $F(u,v)$ es:

$$f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(xu+yv)} dudv \quad (\text{A.3})$$

De las definiciones se extraen de manera inmediata alguna de sus propiedades [Goo68, Gas78]:

(i) teorema de linealidad

$$\mathfrak{F}\{\tilde{a}f(x, y) + \tilde{b}g(x, y)\} = \tilde{a}F(u, v) + \tilde{b}G(u, v) \quad (\text{A.4})$$

donde $G(u, v) = \mathfrak{F}\{g(x, y)\}$ y \tilde{a} y \tilde{b} son constantes arbitrarias complejas.

(ii) teorema de similitud

$$\mathfrak{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (\text{A.5})$$

con a y b constantes reales no nulas.

(iii) teorema de traslación

$$\mathfrak{F}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = F(u, v) e^{-i2\pi(x_0u + y_0v)} \quad (\text{A.6})$$

donde x_0 e y_0 son constantes reales. Esto expresa cómo la traslación de una función en el espacio objeto introduce una fase lineal en el espacio de frecuencias o de Fourier. Recíprocamente, se tiene que:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y) e^{i2\pi(u_0x + v_0y)}\} = F(u - u_0, v - v_0) \quad (\text{A.7})$$

(iv) teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 dudv \quad (\text{A.8})$$

Representa la conservación de energía entre el plano objeto y el de Fourier.

(v) teoremas de reciprocidad

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}\{f(x, y)\}\} = f(x, y) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f(x, y)\}\} = f(-x, -y)$$

(vi) teorema de convolución

Si se define el producto de convolución entre dos funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ como:

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{A.10})$$

se tiene que:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y) * g(x, y)\} = F(u, v) G(u, v) \quad (\text{A.11})$$

o también:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)g(x, y)\} = F(u, v) * G(u, v) \quad (\text{A.12})$$

(vii) teorema de correlación

Si se define el producto de correlación entre dos funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ como:

$$(f \otimes g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) g^*(\alpha - x, \beta - y) d\alpha d\beta \quad (\text{A.13})$$

donde g^* es la función compleja conjugada de g , se tiene que:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y) \otimes g(x, y)\} = F(u, v) G^*(u, v) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)g^*(x, y)\} = F(u, v) \otimes G(u, v)$$

En concreto, para dos funciones iguales:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y) \otimes f(x, y)\} = |F(u, v)|^2 \quad (\text{A.15})$$

$$\mathfrak{F}\{|f(x, y)|^2\} = F(u, v) \otimes F(u, v)$$

lo que constituye el teorema de autocorrelación o de Wiener-Khinchin, que dice que la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia son una la transformada de la otra.

(viii) propiedades de simetría

Si la función $f(x,y)$ es real, es decir: $f^*(x,y) = f(x,y)$, se cumple además:

$$F^*(-u, -v) = F(u, v) \tag{A.17}$$

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

A.2 Transformadas de Fourier de algunas funciones**A.2.1 Definición de funciones**

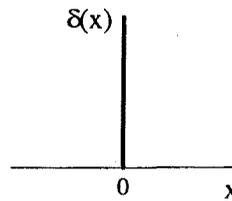
A continuación se presenta una lista de funciones que se emplean de manera habitual en el procesado de Fourier.

A.2.1.1 Función delta de Dirac

Una de sus posibles definiciones es:

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 e^{-N^2 \pi x^2}$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 e^{-N^2 \pi (x^2 + y^2)}$$



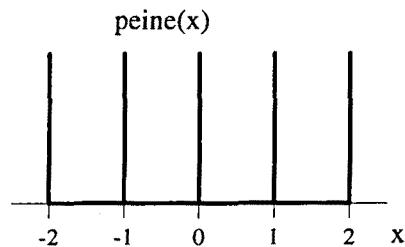
donde se cumple:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty & x = y = 0 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

A.2.1.2 Función peine

$$\text{peine}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

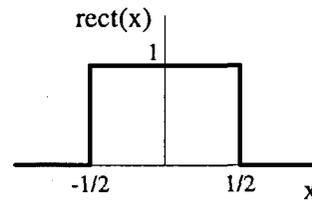
$$\text{peine}(x, y) = \text{peine}(x) \text{peine}(y)$$



A.2.1.3 Función rect

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

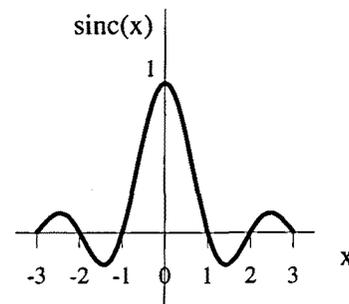
$$\text{rect}(x, y) = \text{rect}(x) \text{rect}(y)$$



A.2.1.4 Función sinc

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

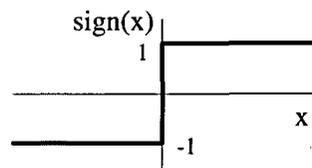
$$\text{sinc}(x, y) = \text{sinc}(x) \text{sinc}(y)$$



A.2.1.5 Función sign

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

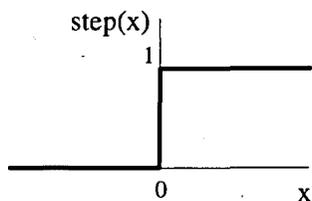
$$\text{sign}(x, y) = \text{sign}(x) \text{sign}(y)$$



A.2.1.6 Función step

$$\text{step}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{step}(x, y) = \text{step}(x) \text{step}(y)$$



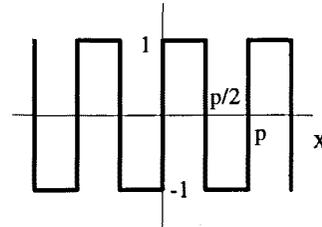
Se puede expresar en términos de la función $\text{sign}(x)$ según:

$$\text{step}(x) = \frac{1}{2} [\text{sign}(x) + 1] \quad (\text{A.18})$$

A.2.1.7 Función onda cuadrada (sw)

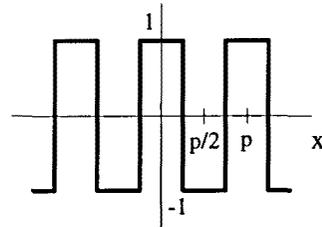
Está definida por su desarrollo en serie de Fourier. Según si se trata de una función impar o par, se tiene:

$$sw(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left\{(2n+1)\frac{2\pi x}{p}\right\}$$



o

$$\overline{sw}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left\{(2n+1)\frac{2\pi x}{p}\right\}$$



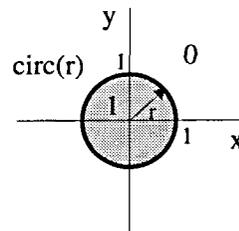
donde p es el período.

A.2.1.8 Función circ

$$circ(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



A.2.1.9 Función S{circ}

La transformada de Fourier de la función circ(r) es (ver tabla A.1):

$$S\{circ(r)\} = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$$

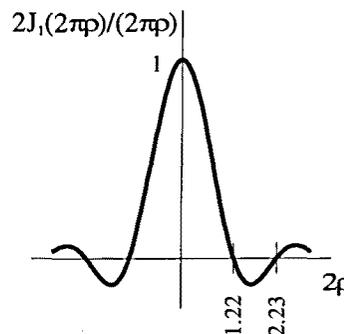
con

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

y J_1 es la función de Bessel de orden 1. El disco central de la función

$$\left(2 \frac{J_1(2\pi\rho)}{2\pi\rho}\right)^2$$

se conoce con el nombre de disco de Airy.



A.2.2 Transformadas de Fourier

Función		Transformada
$\text{rect}(x)$	\leftrightarrow	$\text{sinc}(u)$
$\delta(x)$	\leftrightarrow	1
$\delta(x \pm x_0)$		$e^{\pm i2\pi x_0 u}$
$e^{\pm i2\pi u_0 x}$		$\delta(u \mp u_0)$
$\cos(2\pi u_0 x)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{2}[\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$
$\sin(2\pi u_0 x)$		$\frac{i}{2}[\delta(u + u_0) - \delta(u - u_0)]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$	\leftrightarrow	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - n)$
$\text{sign}(x)$		$\frac{1}{i\pi u}$
$\text{step}(x)$		$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\pi u} + \delta(u) \right]$
$\text{circ}(r)$		$2\pi \frac{J_1(2\pi\rho)}{2\pi\rho}$
$\text{circ}\left(\frac{r}{R}\right)$		$\pi R^2 2 \frac{J_1(2\pi R\rho)}{2\pi R\rho}$

Tabla A.1: funciones y transformadas de Fourier. La doble flecha indica que es válida la relación en el sentido inverso.

La tabla A.1 resume algunas funciones y sus transformadas. Se indican en una dimensión para simplificar la notación. Para funciones de dos variables separables, es decir:

$$f(x, y) = f_x(x) f_y(y) \quad (\text{A.19})$$

la transformada de Fourier bidimensional puede expresarse como el producto de las transformadas de Fourier unidimensionales:

$$F(u, v) = F_x(u)F_y(v) \quad (\text{A.20})$$

con

$$F_x(u) = \mathfrak{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx \quad (\text{A.21})$$

$$F_y(v) = \mathfrak{F}\{f(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i2\pi vy} dy$$

A.3 Difractómetros

Un difractómetro es un sistema óptico mediante el cual es posible obtener la transformada de Fourier de una función $f(x,y)$. Existen diversas configuraciones posibles, que se resumen a continuación. La notación que se empleará es:

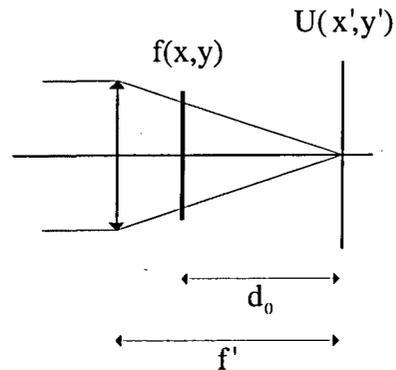
$$\Psi(x, y; Z) = e^{i\frac{2\pi(x^2+y^2)}{\lambda - 2z}}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz empleada y (x,y,z) son coordenadas espaciales.

(i) objeto detrás de la lente

$$U(x', y') \propto F\left(\frac{x'}{\lambda d_0}, \frac{y'}{\lambda d_0}\right) \Psi(x', y'; D_0)$$

Se omiten factores de proporcionalidad.



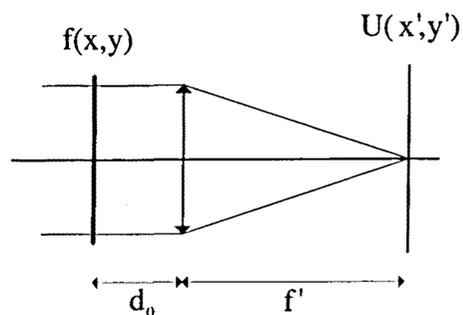
(ii) objeto delante de la lente

$$U(x', y') \propto F\left(\frac{x'}{\lambda f'}, \frac{y'}{\lambda f'}\right) \Psi(x', y'; A)$$

donde f es la focal de la lente y

$$A = \frac{1 - \frac{d_0}{f'}}{f'}$$

Para



$$d_0 = f \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x', y'; 0) = 1$$

desaparecen los términos de fase.

Constante de difracción

En general, la función transformada de Fourier F está afectada por un factor de escala, denominado constante de difracción y que se puede expresar como el producto de la longitud de onda de la luz por una cierta distancia según el eje z :

$$K_{\text{dif}} = \lambda z \quad (\text{A.22})$$

Ello conlleva que la relación inversa que existe entre el período de una función en el espacio real y la correspondiente frecuencia en el plano de Fourier también venga multiplicada por dicho factor. Para demostrar esto de forma sencilla, considérese una función peine de período p , es decir:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - np) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{p} - n\right)$$

Su transformada de Fourier óptica, obtenida con una constante de difracción K_{dif} , es:

$$F\left(\frac{x'}{K_{\text{dif}}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x' p}{K_{\text{dif}}} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x' - n \frac{K_{\text{dif}}}{p}\right)$$

cuyo período p' es, por lo tanto (figura A.1):

$$p' = \frac{K_{\text{dif}}}{p} \quad \Rightarrow \quad pp' = K_{\text{dif}} \quad (\text{A.23})$$

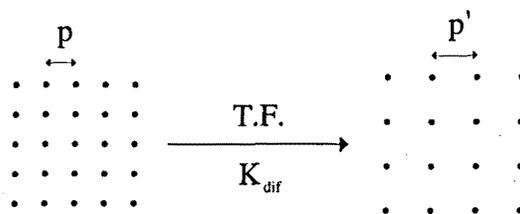


Figura A.1: constante de difracción y períodos.

A.3.1 Teledifractómetros

En general, para conseguir escalas de la transformada de Fourier razonables, las distancias según el eje z o las focales f' de las lentes deben ser muy grandes. Por ejemplo, para conseguir $K_{\text{dif}} = 1 \text{ mm}^2$, empleando un láser de He-Ne ($\lambda = 633 \text{ nm}$), se requiere:

$$z = \frac{K_{\text{dif}}}{\lambda} = \frac{1 \text{ mm}^2}{633 \cdot 10^{-6} \text{ mm}} = 1.6 \text{ m}$$

Una solución a este problema es utilizar el “efecto teleobjetivo” [Juv92], que consiste en añadir una lente divergente detrás de la difractora, de modo que el plano principal H' resultante se adelanta y se incrementa la focal del conjunto de lentes [Bor80] (figura A.2):

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2'} \quad (\text{A.24})$$

donde f_1' y f_2' son las focales de la lente convergente y divergente, respectivamente, y e es la separación entre ambas.

(i) teledifractómetro paralelo

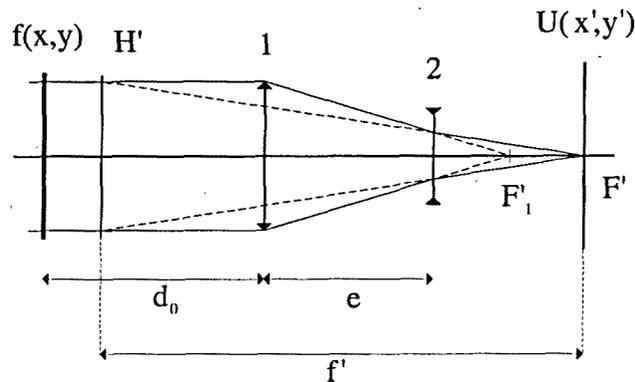


Figura A.2: teledifractómetro paralelo.

$$U(x', y') \propto F\left(\frac{x'}{\lambda f'}, \frac{y'}{\lambda f'}\right) \Psi(x', y'; A)$$

con

$$A = -\frac{e - f_2'}{f' f_2'} - \frac{d_0}{f_2'}$$

Para que se anule el término de fase, es necesario que

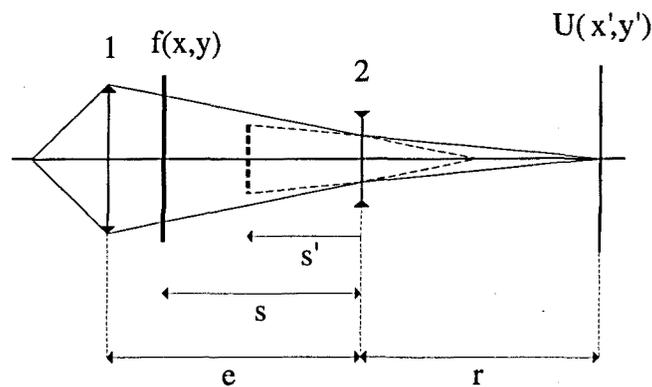
$$d_0 = -\frac{(e - f_2')f'}{f_2'}$$

que corresponde a situar la función $f(x,y)$ en el plano focal objeto del teledifractómetro, con lo que el montaje puede resultar excesivamente largo. De todas maneras, siempre que en el plano de Fourier se registre la intensidad,

$$|U(x',y')|^2$$

desaparece dicho factor.

(ii) teledifractómetro convergente



La constante de difracción es [Bos92]:

$$\frac{K_{\text{dif}}}{\lambda} = (-s' + r) \frac{s}{-s'} = s - \frac{r(s - f_2')}{f_2'}$$

donde $s > 0$, $s' < 0$, $r > 0$, $f_2' < 0$.

ANEXO B:

MEDIOS ANISÓTROPAS

B.1 Medios isótropos. Polarización de la luz

Las ecuaciones de Maxwell para medios isótropos en ausencia de cargas, corrientes y materiales magnéticos son:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}$$

de las que se obtiene la ecuación de onda para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \nabla^2 \Psi \quad (\Psi: \mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (\text{B.2})$$

que corresponde a una onda electromagnética viajando a la velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{n} \quad \text{con } n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (\text{B.3})$$

Una posible solución a la ecuación (B.2) es una onda plana cuyos frentes de onda (planos de igual fase) son planos perpendiculares a la dirección de propagación que viajan a la velocidad de fase dada por (B.3). Para un determinado instante de tiempo t y un punto fijo del espacio \mathbf{r} la onda plana puede escribirse como:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (\text{B.4})$$

siendo \mathbf{k} el vector de onda en la dirección de propagación \mathbf{s} ,

$$\mathbf{k} = k \mathbf{s} \quad (\text{B.5})$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} n \quad (\omega: \text{velocidad angular, } \lambda: \text{longitud de onda en el vacío})$$

\mathbf{A} es el vector amplitud de campo.

Se define el vector de Poynting \mathbf{S} como el producto vectorial del campo eléctrico y el magnético:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{B.6})$$

cuya dirección y sentido coinciden con los de propagación de la energía (rayos de luz de la óptica geométrica). Para medios isótropos, \mathbf{k} y \mathbf{S} son paralelos entre sí y perpendiculares a \mathbf{E} y \mathbf{H} .

La polarización de la luz se especifica mediante el vector campo eléctrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Así, para una onda monocromática plana que se propaga según el eje z , \mathbf{E} está contenido en el plano x - y y puede describirse como:

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[\mathbf{A} e^{i(\omega t - k z)} \right] \quad (\text{B.7})$$

de componentes:

$$E_x = \operatorname{Re}[A_x e^{i(\omega t - kz + \delta_x)}] = A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (\text{B.8})$$

$$E_y = \operatorname{Re}[A_y e^{i(\omega t - kz + \delta_y)}] = A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y)$$

siendo \mathbf{A} el vector complejo:

$$\mathbf{A} = A_x e^{i\delta_x} \mathbf{i} + A_y e^{i\delta_y} \mathbf{j} \quad (A_x, A_y \geq 0) \quad (\text{B.9})$$

El extremo del vector \mathbf{E} describe, al transcurrir el tiempo, una elipse de expresión:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2 \frac{\cos \delta}{A_x A_y} E_x E_y = \sin^2 \delta \quad (\text{B.10})$$

$$\delta = \delta_y - \delta_x \quad (-\pi < \delta \leq \pi)$$

lo que se corresponde con una polarización elíptica de la luz. En la notación habitual de los libros de Óptica se denomina polarización elíptica dextrógira a aquella en la que la elipse gira en sentido horario cuando se considera la luz que viene hacia el observador, para desfases $\delta > 0$, y polarización elíptica levógira para $\delta < 0$ (sentido de giro antihorario). La polarización lineal ($\delta = m\pi$, $m = 0, 1$) y la polarización circular ($A_x = A_y$, $\delta = \pm\pi/2$) constituyen casos particulares de la polarización elíptica general.

Vector de Jones

El vector de Jones define de manera unívoca una onda plana:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La intensidad I de la onda vendría dada por:

$$I = \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J} = |J_x|^2 + |J_y|^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (\text{B.12})$$

donde \mathbf{J}^\dagger es el vector transpuesto conjugado de \mathbf{J} .

Para especificar únicamente el estado de polarización de la luz, se utiliza el vector de Jones normalizado (intensidad de la onda igual a uno):

$$\mathbf{J}(\Psi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \Psi \\ e^{i\delta} \sin \Psi \end{pmatrix} \quad \text{con } \Psi = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right) \quad (0 \leq \Psi \leq \pi/2) \quad (\text{B.13})$$

Ejemplos:

Polarización lineal: $\begin{pmatrix} \cos \Psi \\ \sin \Psi \end{pmatrix}$ Ψ : ángulo respecto el eje x

lineal eje x : $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineal eje y : $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pol. circ. dextr.: $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ Pol. circ. dextr.: $\mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

B.2 Medios anisótropos

Las ecuaciones de Maxwell que rigen son las mismas que para el caso tratado anteriormente (B.1), pero la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} no es a través de un escalar sino a través del tensor dieléctrico ϵ :

$$D_i = \sum_j \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j \quad (\text{B.14})$$

con $\epsilon_{ij} = \epsilon_0 (1 + \chi_{ij})$ χ : tensor susceptibilidad

por lo que \mathbf{E} y \mathbf{D} forman, en general, un ángulo $\beta \neq 0$.

Si se supone la existencia y propagación de ondas planas, \mathbf{k} es el vector de onda perpendicular a los frentes de onda, cuya dirección no coincide con la de \mathbf{S} , formando ambos vectores un ángulo β . La figura B.1 resume las direcciones de los diferentes vectores implicados en la propagación de una onda plana en un medio no anisótropo.

Para un medio anisótropo, la velocidad de fase depende tanto de la dirección de propagación como del estado de polarización. De esta manera, una onda plana que se propaga en el medio puede variar su estado de polarización. Los **modos normales de propagación** son aquellas soluciones con una dirección de polarización fija, para las que la velocidad de fase (o el índice de refracción) no varía al propagarse la onda. Esto equivale a decir que una onda polarizada en una de esas dos posibles direcciones no varía su estado de polarización al propagarse a través del medio.

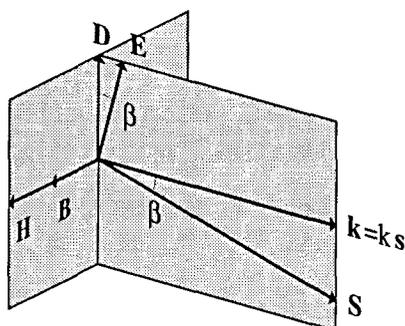


Figura B.1: vectores asociados a una onda plana en un medio anisótropo.

Existen diversas construcciones geométricas (derivadas de la resolución de las ecuaciones de Maxwell) a partir de las cuales es posible buscar esas dos soluciones de manera sencilla y gráfica. Una de ellas es el elipsoide de índices o indicatriz óptica. Expresado en el sistema de coordenadas para el que el tensor ϵ es diagonal, de elementos no nulos $\epsilon_x = \epsilon_{11}$, $\epsilon_y = \epsilon_{22}$, $\epsilon_z = \epsilon_{33}$, el elipsoide viene definido por:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (\text{B.15})$$

donde los ejes x , y y z son los denominados ejes principales, direcciones en las que \mathbf{D} y \mathbf{E} son paralelos, y

$$n_x = \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\epsilon_0}} \quad n_y = \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\epsilon_0}} \quad n_z = \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_0}} \quad (\text{B.16})$$

son los índices de refracción principales.

Para cristales con cierta simetría, dos de estos índices pueden ser iguales, por ejemplo $n_x = n_y \equiv n_o$, $n_z \equiv n_e$. Son los denominados **cristales uniáxicos**, para los que el

elipsoide es de revolución alrededor del eje z , que es el eje de simetría del cristal. Los medios anisótropos con los tres índices diferentes se denominan biáxicos y no serán tratados aquí.

La indicatriz óptica se utiliza para encontrar geoméricamente los índices de refracción n_1 y n_2 y los correspondientes \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 asociados a las dos posibles ondas planas que se pueden propagar para cada dirección de propagación de la fase s en el medio. El método se resume en la figura B.2, que representa un cristal uniáxico positivo ($n_e > n_o$): el plano perpendicular a s que pasa por el centro del elipsoide es el plano de onda, que contiene a \mathbf{D} . La intersección de dicho plano con el elipsoide determina una elipse (elipse de índices), cuyos ejes definen las direcciones de los vectores \mathbf{D}_1 y \mathbf{D}_2 , (ortogonales entre sí), correspondientes a los modos normales. La longitud de los semiejes es el valor de los índices de refracción, n_1 y n_2 . La normal al elipsoide en el extremo de cada \mathbf{D} da la dirección del campo \mathbf{E} .

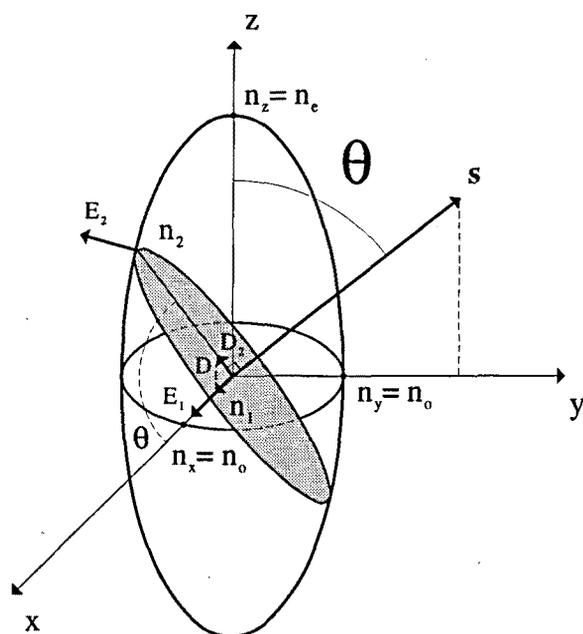


Figura B.2: elipsoide de índices de un medio anisótropo uniáxico. Determinación de los modos normales de propagación.

En el caso de que el plano de onda corte al elipsoide en una circunferencia, el índice es el mismo para las dos polarizaciones y los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} son paralelos: se trata del plano de onda correspondiente al eje óptico (en este caso, el eje z).

En la figura B.2 se supone que la dirección de propagación está contenida en el plano y - z y que forma un ángulo θ con el eje óptico. Esto no resta generalidad, ya

que el elipsoide es de revolución alrededor del eje z . La elipse de índices es perpendicular a s y contiene al eje x ; su semieje menor tiene longitud $n_1 = n_o$ y el mayor es $n_2 \equiv n_e(\theta)$, que varía desde n_o para $\theta = 0^\circ$ hasta n_e para $\theta = 90^\circ$, tal y como se indica en la elipse representada en la figura B.3. De ésta se deduce que:

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (\text{B.17})$$

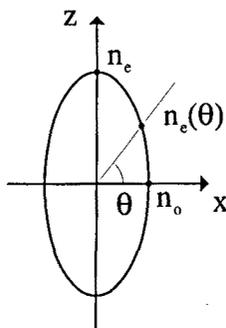


Figura B.3: dependencia $n_e(\theta)$.

Así pues, el primer modo, denominado onda ordinaria, tiene índice n_o , independientemente de θ . Los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} correspondientes son paralelos entre sí y perpendiculares al plano definido por el eje óptico y la dirección de propagación s (figura B.4a). Esta onda se comporta como una onda plana normal y por eso se denomina onda ordinaria. El segundo modo, denominado onda extraordinaria, tiene índice $n_e(\theta)$ dependiente de la dirección de propagación. El vector \mathbf{D} asociado está contenido en el plano s - z y es perpendicular a s , no siendo \mathbf{E} y \mathbf{D} paralelos (figura B.4b).

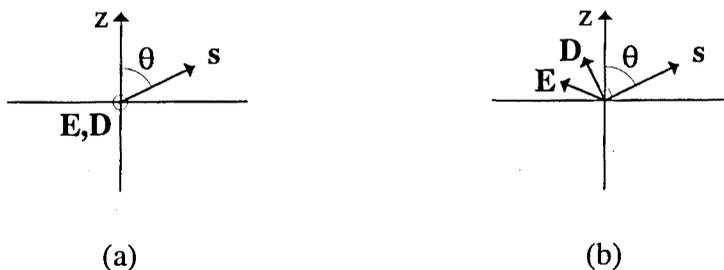


Figura B.4: direcciones de los vectores para (a) la onda ordinaria y (b) la extraordinaria.

Matriz de Jones

Si consideramos la transmisión de una onda plana de polarización arbitraria (definida por el vector de Jones) a través de un sistema óptico que mantiene la naturaleza de onda plana de la misma pero que altera su estado de polarización, dichas modificaciones pueden describirse mediante una matriz 2x2, la denominada matriz de Jones.

Así, si se supone que las ondas de entrada y de salida vienen especificadas por los vectores de Jones \mathbf{J}_1 y \mathbf{J}_2 , respectivamente, éstas se relacionan mediante la fórmula matricial:

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{T}\mathbf{J}_1 \quad (\text{B.18})$$

donde \mathbf{T} es la matriz de Jones del sistema, que especifica el efecto que éste produce en el estado de polarización así como en la intensidad de la onda incidente. Las matrices de Jones normalizadas se asocian a sistemas no absorbentes.

Ejemplos:

Polarizador lineal eje x:
$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Transforma una onda de componentes (J_x, J_y) en una de componentes $(J_x, 0)$, onda efectivamente polarizada linealmente según el eje x .

Retardador de onda:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

El vector de Jones de la onda emergente del retardador de onda sería $(J_x, e^{-i\Gamma}J_y)$, por lo que la componente y queda retardada respecto la x . Los ejes x e y se denominan eje rápido y eje lento del retardador, respectivamente. Casos particulares pueden ser:

- $\Gamma = \pi/2$ (lámina $\lambda/4$, o cuarto de onda): convierte luz polarizada linealmente, $\mathbf{J}_1 = 1/\sqrt{2}(1,1)$, en luz polarizada circular levógira, $\mathbf{J}_2 = 1/\sqrt{2}(1,-i)$, o bien luz circular dextrógira, $\mathbf{J}_1 = 1/\sqrt{2}(1,i)$, en luz polarizada lineal, $\mathbf{J}_2 = 1/\sqrt{2}(1,1)$.
- $\Gamma = \pi$ (lámina $\lambda/2$, o de media onda): convierte luz polarizada linealmente, $\mathbf{J}_1 = 1/\sqrt{2}(1,1)$ ($\Psi = 45^\circ$), en luz polarizada lineal, $\mathbf{J}_2 = 1/\sqrt{2}(1,-1)$ ($\Psi = -45^\circ$),

es decir, rota 90° el plano de polarización. También convierte luz circular dextrógira, $\mathbf{J}_1 = 1/\sqrt{2}(1, i)$, en luz circular levógira, $\mathbf{J}_2 = 1/\sqrt{2}(1, -i)$.

$$\text{Rotor de la polarización:} \quad \begin{pmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Rota un ángulo Ψ el plano de polarización de luz polarizada lineal. Es decir, si $\mathbf{J}_1 = (\cos\Psi_1, \sin\Psi_1)$, $\mathbf{J}_2 = (\cos\Psi_2, \sin\Psi_2)$, con $\Psi_2 = \Psi_1 + \Psi$.

Transformación de coordenadas

Los vectores y las matrices de Jones dependen del sistema de coordenadas escogido. Para pasar de un sistema de coordenadas x - y a otro x' - y' (donde x y x' forman un ángulo θ , figura B.5) es necesario operar con la matriz de rotación $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

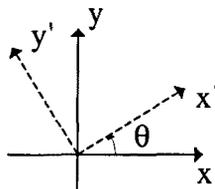


Figura B.5: transformación de coordenadas.

Un vector de Jones \mathbf{J} en el sistema de coordenadas x - y se transforma en el vector \mathbf{J}' en el sistema x' - y' mediante la relación:

$$\mathbf{J}' = R(\theta)\mathbf{J} \quad (\text{B.23})$$

Una matriz de Jones T se transforma en la correspondiente T' en el nuevo sistema de coordenadas según:

$$T' = R(\theta)TR(-\theta) \quad (\text{B.24})$$

ANEXO C:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE CALIDAD DE LA CORRELACIÓN

Existen diferentes parámetros que sirven para caracterizar la calidad de los filtros y de la correlación (ver, por ejemplo, [Kum90] o [Hor92]).

Un primer parámetro, la **discriminación**, da idea de las alturas relativas que pueden tomar los diferentes máximos de correlación entre sí. Existen diferentes definiciones, según qué picos de detección se consideren. Si se comparan las intensidades del primer y del segundo máximo, $|c_d|^2$ y $|c_s|^2$, respectivamente, se tiene:

$$D = \frac{|c_d|^2 - |c_s|^2}{|c_d|^2} \quad (\text{C.1})$$

El **PCE**[†] es un parámetro que caracteriza la relación señal-ruido de la correlación y la agudeza de los picos, y se define como el cociente entre la intensidad del máximo de detección y la intensidad del plano de correlación, es decir:

[†] PCE: *peak-to-correlation energy*

$$\text{PCE} = \frac{|c_d|^2}{\text{energía correlación}} \quad (\text{C.2})$$

Para tener idea de la luz que absorbe un filtro, se define su **eficiencia óptica** η [Hor82] como la relación entre la energía en el plano de salida y el de entrada, es decir, de la correlación y de la escena:

$$\eta = \frac{\text{energía correlación}}{\text{energía escena}} \quad (\text{C.3})$$

Si $s(x,y)$ es la escena y $h_r(x,y)$ es el filtro adaptado a la referencia, la expresión formal se puede escribir:

$$\eta = \frac{\int_{\mathcal{R}^2} |s(x,y) * h_r(x,y)|^2 dx dy}{\int_{\mathcal{R}^2} |s(x,y)|^2 dx dy} = \frac{\int_{\mathcal{R}^2} |S(u,v)|^2 |H_r(u,v)|^2 du dv}{\int_{\mathcal{R}^2} |S(u,v)|^2 du dv} \quad (\text{C.4})$$

donde en el paso al plano de Fourier se ha aplicado el teorema de Parseval (A.8). De la ecuación anterior es inmediato demostrar que la eficiencia óptica teórica de un filtro de módulo unidad (filtro de fase) es máxima, $\eta = 1$. Es decir, toda la luz incidente se transmite al plano de correlación. En cualquier otro caso, $\eta < 1$, debido a la absorción de luz producida por el término de amplitud.

La función inversa de la eficiencia en un correlador de transformadas conjuntas se define como la relación:

$$E^{-1} = \frac{|c_0|^2}{|c_d|^2} \quad (\text{C.5})$$

donde c_0 es el valor de la autocorrelación en el origen. Da una idea de la dificultad que presenta observar el máximo de detección $|c_d|^2$, como consecuencia de la energía que concentra $|c_0|^2$, de la misma manera que η indica la dificultad de observar la correlación a causa de la absorción del filtro. La eficiencia en un JTC será máxima cuando $|c_0|^2$ sea nula.

ABREVIATURAS

AM-TFT	<i>active matrix thin film transistor</i>
BJTC	<i>binary joint transform correlator</i>
BS	<i>beamsplitter</i>
CCD	<i>charge-coupled device</i>
CRT	<i>cathode ray tube</i>
FFT	<i>fast Fourier transform</i>
FLC	<i>ferroelectric liquid crystal</i>
IF	<i>inverse filter</i>
ITO	<i>indium tin oxide</i>
JPS	<i>joint power spectrum</i>
JTC	<i>joint transform correlator</i>
LC	<i>liquid crystal</i>
LCD	<i>liquid crystal display</i>
LCLV	<i>liquid crystal light valve</i>
LCTV	<i>liquid crystal television</i>
LUT	<i>look-up-table</i>
MF	<i>matched filter</i>
MOD	<i>magneto-optic device</i>
OTF	<i>optical transfer function</i>
PCE	<i>peak-to-correlation energy</i>
POF	<i>phase-only filter</i>
PSF	<i>point spread function</i>

SBWP	<i>space bandwidth product</i>
SER	<i>spatial envelope removal</i>
SLM	<i>spatial light modulator</i>
TNLC	<i>twisted nematic liquid crystal</i>

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leida esta Memoria el dia 25 de
junio de 1998 on la Facultad de
 Física, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

Jordi del Moral

VOCAL

M. J. Guàrdia

Jordi Guàrdia

J. Sureda

Jordi Guàrdia

fué calificada de excel·lent cum laude
 per unanimitat

 UNIVERSITAT DE BARCELONA

Biblioteca de Física i Química
