

Métodos iterativos de reconstrucción tomográfica en SPECT

Carles Maria Falcon Falcon

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

Departament de Física Aplicada i Electrònica
Universitat de Barcelona

Programa de Micro y Optoelectrónica Física.
Bienio 1993-1995

***Métodos iterativos de reconstrucción
tomográfica en SPECT***

Carles Maria Falcon Falcon

Barcelona, septiembre de 1999.

Memoria presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas.

Realizada bajo la dirección de: Dr. Domènec Ros i Puig
Dr. Ignasi Juvells i Prades

Agradecimientos:

Quisiera expresar mi agradecimiento al doctor Domènec Ros, del *Laboratori de Biofísica i Bioenginyeria* de la *Facultat de Medicina* y al doctor Ignasi Juvells, del *Laboratori d'Òptica* de la *Facultat de Física*, directores de esta tesis, por su muy generosa ayuda en la realización, discusión y corrección de este trabajo.

También quisiera expresar mi agradecimiento al doctor Javier Pavía, por su constante colaboración en la parte experimental y en la discusión de los resultados, al doctor David Fuster, por su colaboración en la aplicación médica del capítulo 7 y al doctor Jorge Setoain Quinquer, jefe del *Servei de Medicina Nuclear* del *Hospital Clínic i Provincial de Barcelona* y al resto de personal de este servicio por las facilidades dadas en la utilización de sus instalaciones.

Así mismo, quisiera expresar mi agradecimiento a la doctora Mar Rotger por las numerosas horas dedicadas a la resolución de problemas informáticos y al resto de miembros del *Laboratori de Biofísica i Bioenginyeria*, el doctor Daniel Navajas, el doctor Ramón Farré, Deborah, Santi, Miguel Angel, Núria, los Jordis, Marina, Ester y Albert por las constantes muestras de apoyo recibidas.

Finalmente, quisiera expresar mi agradecimiento a mi familia y amigos. Sin su apoyo incondicional este trabajo no podría haberse llevado a cabo.

Esta tesis ha sido parcialmente financiada la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) mediante los proyectos SAL91/314, SAF96/0062 y SAF99/0137

Indice

1. Introducción	1
1.1. Reconstrucción tomográfica de imágenes en SPECT	1
1.2. Objetivos de la tesis	2
1.3. Estructura de la tesis	3
2. Planteamiento del problema	5
2.1. Descripción del proceso de obtención de las proyecciones	5
2.1.1. La emisión	5
2.1.2. La interacción de la radiación con el medio material	8
2.1.3. La detección	10
2.2. Planteamiento matemático de la reconstrucción tomográfica	14
2.2.1. Descripción analítica	16
2.2.2. Discretización	18
Discretización de la imagen	19
Discretización de las proyecciones	20
Discretización de las ecuaciones	22
2.2.3. Particularización al caso de SPECT	24
2.2.4. Interpretación estadística del proceso de formación de la proyección	27
2.2.5. Problemas matemáticos de la reconstrucción	28
2.2.6. Reconstrucción: métodos analíticos y métodos iterativos	30
3. Metodología	35
3.1. Adquisición de proyecciones experimentales	36
3.2. Simulación de un estudio	37
3.2.1. Cálculo de la matriz de transición	38
3.2.2. Tratamiento de la dispersión	38
3.2.3. Inclusión de la PSF	40
3.2.4. Inclusión de la atenuación	43
3.2.5. Empaquetamiento de la matriz de pesos	45
3.2.6. Simulación del ruido sobre las proyecciones	45
3.2.7. Cálculo de la matriz de pesos	46
3.2.8. Generación de las proyecciones	47
3.2.9. Estudios simulados	48
3.3. El proceso de reconstrucción	52
3.4. La evaluación de imágenes mediante funciones de mérito	53
3.4.1. Figuras de mérito globales	55
3.4.2. Figuras de méritos sobre regiones de interés	55
3.4.3. Figuras de mérito estadísticas	57

4. La retroproyección filtrada	59
4.1. Formulación matemática.	59
4.1.1. Filtros.	60
4.1.2. Teorema de la sección central	60
4.1.3. Reconstrucción tomográfica por retroproyección.	62
4.1.4. Compensación de las degradaciones.	63
Corrección del ruido mediante filtros paso-baja.	64
Corrección de la PSF. Filtro de Metz.....	67
Corrección de la atenuación. El método de Chang.	69
4.1.5. Implementación de la FBP.	72
4.1.6. El algoritmo IFBP.	74
4.1.7. Rango de validez de la FBP. Valoración de las aproximaciones realizadas	75
en su implementación.	75
4.2. Descripción de las pruebas realizadas	76
4.3. Resultados obtenidos.....	78
4.4. Discusión de los resultados	89
5. Métodos de reconstrucción algebraicos	91
5.1. Formulación matemática	91
5.1.1. Método de las proyecciones de Kaczmarz	92
5.1.2. Método de proyecciones sobre conjuntos convexos (POCS).....	95
5.1.3. Limitaciones del método ART. Parámetro de relajación.	100
5.1.4. El algoritmo utilizado.	103
5.2. Descripción de las pruebas realizadas	105
5.3. Resultados obtenidos.....	106
5.4. Discusión de los resultados	114
6. Métodos de reconstrucción estadísticos	117
6.1. Formulación matemática	117
6.1.1. Estimadores de máxima verosimilitud	117
6.1.2. Aplicación de los estimadores de máxima verosimilitud a la reconstrucción	119
tomográfica.....	119
6.1.3. Métodos de aceleración del proceso.....	123
Parámetro de aceleración	124
Subconjuntos Ordenados.....	127
6.1.4. Rango de validez de los métodos estadísticos.....	128
6.1.5. La validación cruzada como criterio de detención del proceso iterativo.	130
6.1.6. Algoritmo MLE.....	132
6.2. Estudio de la CVR.....	134
6.2.1. Pruebas realizadas	135
6.2.2. Resultados obtenidos.....	135

6.2.3. Discusión de los resultados.....	140
6.3. Estudio del parámetro de aceleración.....	141
6.3.1. Pruebas realizadas.....	141
6.3.2. Resultados obtenidos.....	142
6.3.3. Discusión de los resultados.....	150
6.4. Subconjuntos ordenados.....	151
6.4.1. Pruebas realizadas.....	151
6.4.2. Resultados obtenidos.....	152
6.4.3. Discusión de los resultados.....	160
7. Comparación de resultados.....	163
7.1. Comparación de los resultados de los capítulos 4, 5 y 6.....	164
7.1.1. Recopilación de resultados para el modelo de Jaszczak.....	164
7.1.2. Discusión de los resultados.....	167
7.2. Ejemplo de aplicación.....	170
7.2.1. Descripción de las pruebas realizadas.....	170
7.2.2. Resultados obtenidos.....	172
7.2.3. Discusión de los resultados.....	177
8. Conclusiones.....	179
8.1. Capítulo 3: Simulación de proyecciones.....	179
8.2. Capítulo 4: IFBP.....	179
8.3. Capítulo 5: ART.....	180
8.4. Capítulo 6: MLE.....	181
8.5. Capítulo 7: Comparación de métodos.....	184
8.6. Publicación de los resultados de esta tesis.....	185
8.7. Desarrollo futuro de las investigaciones.....	185
Apéndice A. Siglas, abreviaturas y nombres de variables.....	187
Bibliografía.	

1. Introducción

1.1. Reconstrucción tomográfica de imágenes en SPECT

La Medicina Nuclear es una especialidad médica incluida en el ámbito del diagnóstico por la imagen en que se evalúa el funcionamiento de un determinado órgano o tejido mediante el seguimiento exterior de un fármaco marcado con un isótopo radiactivo. La intensidad de emisión de los fotones gamma provenientes del radiofármaco es proporcional a su concentración y, por tanto, indica una mayor o menor actividad fisiológica. Asignando una escala de colores o grises al nivel de emisión en los diferentes puntos de un órgano o tejido se obtiene una imagen que refleja su estado. La información extraída mediante las técnicas de la Medicina Nuclear es un complemento cada vez más importante para obtener un diagnóstico médico preciso. Puede encontrarse un sumario de sus diferentes aplicaciones en [DOM-80], [MAI-83], [MET-86] o [GEL-87]. En [FRE-84] [PHY-87] puede encontrarse, además, una breve reseña histórica de las diversas técnicas y aplicaciones.

Las técnicas empleadas en Medicina Nuclear pueden clasificarse en dos grupos: planares y tomográficas (ECT: *Emission Computed Tomography*; Tomografía Computerizada de Emisión). En éstas últimas, se establece la distribución tridimensional del fármaco a partir de la detección de la radiación en diferentes direcciones por medio de técnicas de reconstrucción tomográfica¹. A su vez, dentro de ECT pueden distinguirse dos técnicas: SPECT o SPET (*Single Photon Emission [Computed] Tomography*- Tomografía [Computerizada] por Emisión de Fotón Único)

¹ La idea original de la reconstrucción tomográfica parte de un trabajo de 1917 del matemático austriaco J. Radon [RAD-86]. En éste, se demuestra que puede determinarse exactamente un objeto bidimensional (tridimensional) a partir de sus proyecciones unidimensionales (bidimensionales) en conjunto infinito de direcciones.

en el que el isótopo radiactivo posee un núcleo en estado excitado que al reducir su nivel de energía emite un fotón- γ y PET (*Positron Emission Tomography*- Tomografía por Emisión de Positrones), en la que el isótopo emite un positrón que se aniquila, de forma casi inmediata, con un electrón, resultando dos fotones- γ opuestos que son detectados simultáneamente [TER-80]. Aunque PET obtiene imágenes de mayor calidad, la instalación requerida en esta técnica es sensiblemente más compleja y cara que la utilizada en SPECT, por lo que su uso es mucho menos común.

Debido a la existencia de una gran cantidad de factores degradantes, que se pueden agrupar según su origen, en: físicos (la emisión radiactiva, la interacción de los fotones emitidos con el cuerpo del paciente, la detección), intrínsecos al planteamiento del problema (la digitalización de la imagen y las proyecciones) y inherentes a cada método de reconstrucción tomográfica empleado, la calidad de las imágenes en SPECT no es buena, obteniéndose imágenes de poca resolución y con una presencia importante de ruido.

1.2. Objetivos de la tesis

El creciente uso de ECT, ha llevado a un importante esfuerzo de investigación desde finales de los años 70 sobre técnicas de reconstrucción y corrección de degradaciones que permitan mejorar la calidad de las imágenes obtenidas. El aumento de las prestaciones de los equipos informáticos y las mejoras técnicas que han experimentado los equipos de gammagrafía han permitido desarrollar y potenciar el uso de nuevos métodos de reconstrucción más precisos. En este contexto y gracias a la colaboración entre el *Laboratori de Biofísica i*

Bioenginyeria del Departament de Fisiologia I de la Facultat de Medicina, el Laboratori d'Òptica de la Facultat de Física, ambos de la Universitat de Barcelona, y el Servei de Medicina Nuclear del Hospital Clínic i Provincial de Barcelona y enmarcada en los proyectos SAL91/0314 y SAF96/0062 de la CICYT (Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología), se ha abierto una línea de investigación sobre reconstrucción tomográfica de imágenes en SPECT. Esta tesis describe y presenta los trabajos realizados en este ámbito. Los objetivos son:

- Implementación de una simulación numérica de proyecciones.
- Implementación de los métodos de reconstrucción más básicos.
- Implementación de un método de evaluación objetiva de las reconstrucciones obtenidas.
- Estudio de la variación de la calidad de la imagen en función de los parámetros de los que depende cada método de reconstrucción a fin de determinar sus características intrínsecas y la idoneidad de su uso.
- Desarrollo de una metodología que permita determinar en cada caso concreto con qué método y en qué condiciones se obtienen mejores resultados.

Posteriormente, una vez introducidos los métodos de reconstrucción, se concretan más detalladamente los objetivos particulares de cada uno de los estudios realizados.

1.3. Estructura de la tesis

Esta tesis consta de 8 capítulos. Tras este primer capítulo de introducción, se prosigue en el capítulo 2 con una descripción detallada de la física que interviene en SPECT, así como del planteamiento matemático de la reconstrucción tomográfica. A continuación, en el capítulo 3 se expone la metodología de los estudios realizados, obtención de datos (experimentales y por simulación) y la evaluación de resultados. En los tres capítulos siguientes, capítulos 4, 5 y 6, se desarrollan y analizan tres métodos de reconstrucción tomográfica. En cada caso se describe la

formulación matemática y la implementación del método de reconstrucción y se realizan diversos estudios para establecer la relación entre las características de la imagen obtenida con los parámetros variables existentes. El capítulo 7, consta de dos partes. En la primera se establecen las semejanzas y diferencias entre los métodos desarrollados en los capítulos 4, 5 y 6 y se contrastan con los resultados existentes en la bibliografía. En la segunda, se evalúan los resultados obtenidos en un determinado estudio clínico, como muestra de aplicación de la metodología desarrollada. Finalmente, en el capítulo 8 se exponen las conclusiones de la tesis.

2. Planteamiento del problema

La reconstrucción de un objeto a partir de sus proyecciones es un problema general con muchos ámbitos de aplicación. En este capítulo se realiza una descripción del problema general de la reconstrucción tomográfica de imágenes y su particularización a imágenes de SPECT. En primer lugar, se estudia el proceso de formación de las proyecciones, tanto los fenómenos físicos que intervienen, como los factores degradantes que afectan su calidad. Posteriormente, se introduce el formalismo matemático asociado al problema general de la reconstrucción tomográfica y su aplicación a SPECT. También es introducida la notación y nomenclatura que serán utilizadas en adelante. El planteamiento matemático puede encontrarse expuesto en muchos trabajos, como por ejemplo [HER-80], [BAR-81], [KAK-84] o [VIE-88].

2.1. Descripción del proceso de obtención de las proyecciones

Para poder modelizar las proyecciones deben ser estudiados todos los mecanismos que intervienen en la formación de las mismas, desde la emisión hasta la detección con gammacámaras. Conocer el origen y efecto de las distintas degradaciones es básico para poder realizar su corrección. Un sumario detallado de todos estos efectos puede encontrarse, por ejemplo, en [JAS-80], [BAR-81], [TSU-94] o [ROS-95a]. A continuación, se describe el proceso de obtención de las proyecciones: emisión, transporte de fotones en el interior del cuerpo y detección, así como de las degradaciones que se producen en cada paso.

2.1.1. La emisión

La emisión radiactiva es un proceso estocástico. La variable que indica el número de emisiones producidas durante un intervalo predeterminado de tiempo, si dicho intervalo de tiempo es mucho menor que el periodo de

semidesintegración del isótopo, es una variable aleatoria con distribución de Poisson $P(\lambda, x)$, cuya expresión matemática es:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad (\text{ec 2-1})$$

donde el parámetro λ de la distribución es una constante positiva, propia del proceso, que corresponde al valor medio de desintegraciones emitidas si se hicieran infinitas observaciones [TUB-63]. Este parámetro depende del periodo de semidesintegración del isótopo radiactivo utilizado, de la concentración del mismo y de la duración de la adquisición, es decir, del intervalo de tiempo durante el cual se contabiliza la radiación. Esta distribución expresa la probabilidad de que se produzcan un determinado número x (variable entera) de emisiones radiactivas durante el tiempo fijado de adquisición.

La desviación típica de una distribución de Poisson $P(\lambda, x)$ es igual a $\sqrt{\lambda}$. Esto significa que aunque la dispersión crezca con el número medio de fotones emitido, el error relativo (desviación típica respecto el valor medio) es porcentualmente más importante cuanto menor sea el número de fotones emitidos en el intervalo predeterminado de tiempo. Para reducir la presencia de ruido, sería conveniente disponer de un número de emisiones grande. Esto, sin embargo, no es generalmente factible, pues implicaría aumentar la dosis suministrada de radiofármaco o prolongar el tiempo de adquisición. La primera solución está descartada de antemano por razones de protección radiológica del paciente. Alargar en exceso el tiempo de las exploraciones, ya de por sí largo, debe descartarse, también, por dos motivos principalmente. En primer lugar, por la relación exploraciones/día que se pueden realizar en cualquier centro de Medicina Nuclear. En segundo lugar, una adquisición muy prolongada aumenta considerablemente el riesgo de obtener unas proyecciones inutilizables en

la reconstrucción por movimiento involuntario del paciente. Consecuentemente, la presencia de ruido es uno de los factores más importantes de degradación de las imágenes.

Otros aspecto a tener en cuenta es que la probabilidad de emisión no se mantiene constante en el tiempo. En consecuencia, si no se corrige este efecto sobre las proyecciones, el número de cuentas obtenido en diferentes ángulos de proyección no será equiparable y se generan artefactos en la imagen reconstruida. Hay dos circunstancias que alteran el ritmo promedio de emisión de fotones. En primer lugar, está el decaimiento de la actividad radiactiva con el tiempo (*decay*). Si la adquisición es prolongada (más de 30 minutos) y el periodo de semidesintegración del radiofármaco es corta (para el isótopo más habitual, el ^{99m}Tc , es de 6 horas), la reconstrucción queda sensiblemente afectada. La corrección de este efecto es muy sencilla. Basta multiplicar la proyección en cada ángulo por un factor de normalización que tenga en cuenta el decaimiento de la actividad. En segundo lugar, ha de considerarse la cinética de evolución del radiofármaco en el interior del órgano en estudio [LIN-91]. Si el tiempo de adquisición es prolongado, la concentración de radiofármaco puede modificarse por razones metabólicas. La corrección de este efecto es difícil, pues supone conocer de antemano la biocinética del fármaco. No obstante, la variación de la emisión en los estudios usuales es despreciable y raramente es tenida en cuenta.

El último efecto degradante a tener en cuenta en la emisión es la variación de la posición de los puntos emisores por movimiento involuntario del paciente [COO-92] [BOT-93]. Si esto ocurre, los datos obtenidos en las proyecciones antes del movimiento del paciente no son compatibles con los posteriores. Dependiendo de la naturaleza del movimiento, aparecen artefactos de mayor o menor importancia en la imagen reconstruida.

2.1.2. La interacción de la radiación con el medio material

El transporte de los fotones por el interior del cuerpo, desde el punto emisor hasta el exterior, queda afectada por la presencia de materia. Un porcentaje de la radiación emitida interacciona con los átomos que componen los tejidos. Está estimado [ROS-95a] que para los fotones de 140 KeV (energía con que emite el isótopo ^{99m}Tc , de uso muy generalizado en Medicina Nuclear, con el que se han realizado las diferentes adquisiciones experimentales para este trabajo) la interacción más común con la materia es el efecto Compton. También se produce la absorción fotoeléctrica, y, en menor medida, dispersión elástica. Esta interacción radiación-materia tiene dos efectos sobre las proyecciones:

- Parte de los fotones emitidos en una zona determinada del tejido, que debieran llegar a un punto determinado del detector, no lo hacen porque son absorbidos o desviados. Este fenómeno es denominado atenuación del medio [DUT-80]. La atenuación produce una disminución del número de fotones detectados en relación a los emitidos. Esta disminución depende de la distancia que recorre el fotón dentro del cuerpo y de la naturaleza de los diferentes tejidos que atraviesa. Cuanto mayor sea el grosor de tejido atravesado por un fotón, más probable es su interacción con los átomos que componen el tejido y, consecuentemente, su atenuación. A su vez, el tejido óseo tiene un coeficiente de atenuación mayor que los tejidos blandos. Por tanto, la atenuación es no isótropa. A modo de ejemplo, para poder estimar la importancia de este efecto, en un estudio cerebral con fotones de 140 KeV, se calcula que entre el 20 y el 25% de los fotones emitidos son atenuados [TSU-94]. Para el mismo tipo de radiación, se necesita unos 5 cm de grosor de un tejido blando, con índice de atenuación similar al del agua, para atenuar la mitad de fotones que lo atraviesan [JAS-80]. La no corrección de la atenuación hace que las imágenes tomográficas reconstruidas presenten una distribución

incorrecta de la actividad, siendo mayor en la periferia de la misma y menor en el centro [GEL-88].

- Un porcentaje de los fotones que no deberían llegar a un determinado punto del detector lo hacen porque son desviados por el choque con un átomo o electrón (dispersión o *scattering* Compton) (Figura 2-1). Los fotones dispersados, al llegar al detector con una dirección diferente de la correspondiente a su punto emisor, aportan información falsa sobre la localización del radiofármaco. Los fotones que han sufrido algún tipo de dispersión puede ser entre el 20 y el 40% de los fotones detectados [ROS-95a]. Así, los fotones detectados son la suma de los que no han sufrido dispersión alguna (fotones primarios) y de los que han sido dispersados. Analizando el espectro de energía de los fotones que inciden en el detector, los fotones primarios pueden ser distinguidos de los dispersados inelásticamente, pues estos últimos tienen una energía menor. Por ejemplo, un fotón de 140 KeV dispersado un ángulo de 52° sale con una energía de 126 KeV [ROS-95a]. A tal efecto, las gammacámaras poseen un mecanismo que permite calcular la energía de la radiación incidente, aunque su resolución es baja. Por ejemplo, la resolución (FWHM)¹ en la medición de la energía en un cristal de centelleo de yoduro sódico (NaI) para radiación de 140 KeV es del orden del 13.2% [LJU-90a]. Esto implica que, para captar una cantidad significativa de los fotones primarios, la gammacámara ha de contar todos los fotones que llegan con una energía dentro de un intervalo (ventana de energía) con centro en la energía de emisión del isótopo y un margen de desviación de $\pm 13.2\%$ de ese valor. Los fotones que han sufrido una dispersión inelástica con pérdida de energía superior al 13.2% pueden distinguirse de los primarios y no son tenidos en cuenta en la detección. En cambio, los

¹ FWHM: *Full Width at Half Maximum*. Intervalo de las x alrededor del máximo en el cual la función toma un valor mayor o igual que la mitad del valor máximo.

fotones dispersados que han mantenido su longitud de onda, o la han variado mínimamente, pero han cambiado su dirección de propagación son indistinguibles de los primarios. Reducir el intervalo de energía, significa eliminar parte del efecto de la dispersión pero a costa de reducir el número de fotones primarios detectados con el consiguiente aumento de ruido. La dispersión también depende de la profundidad y de la naturaleza del tejido [ROS-90], así como de la geometría del cuerpo [FRE-91]. La no corrección de la dispersión produce reconstrucciones borrosas [TSU-94].

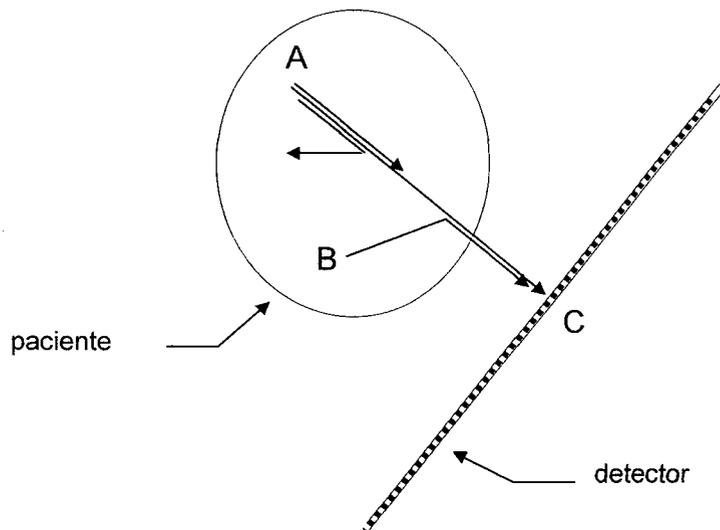


Figura 2-1. Parte de los fotones emitidos desde A que deberían llegar a C no lo hacen por ser absorbidos por el medio o desviados de su trayectoria (atenuación). Por otra parte, fotones emitidos en B pueden llegar a C si son desviados por un choque con un átomo (dispersión).

2.1.3. La detección

Para considerar la degradación que se produce en la detección hay que tener en cuenta la estructura y funcionamiento de una gammacámara. Una descripción detallada puede encontrarse en [DUT-80], [JAS-80], [BAR-81], [ZAR-92] o [CRO-95]. La gammacámara, o cámara de Anger, está compuesta por un cabezal giratorio en el que están los detectores de radiación y un ordenador que procesa los datos obtenidos. El mecanismo

de detección está compuesto por un cristal de centelleo, generalmente NaI con impurezas de Talio. El fotón incidente en el cristal va cediendo parte de su energía a los electrones del cristal con que interacciona. La energía que absorben los electrones hace que suban a un nivel de energía superior. Al desexcitarse, al cabo de unas millonésimas de segundo, estos electrones emiten un fotón luminoso. De esta manera, el cristal de centelleo es un transductor que convierte un fotón γ en un conjunto de fotones de luz visible. Cuanto más energético sea el fotón incidente, más intensa será la señal luminosa de respuesta (más electrones serán excitados y, por tanto, más fotones serán emitidos). Junto al cristal de centelleo está acoplada una batería de fotomultiplicadores conectados a un procesador. A partir de la señal recibida por los diferentes fotomultiplicadores se puede deducir la posición del impacto del fotón. Así se contabiliza juntamente la cantidad de fotones detectados (número de cuentas), su energía (a través de la intensidad de la señal luminosa) y su posición en el plano de proyección. En este proceso de detección se produce una pequeña adición de ruido sobre la señal (ruido electrónico) debido a:

- La eficiencia del detector. No todos los fotones que inciden en el detector son detectados. Algunos no llegan a producir señal porque no interaccionan con el cristal de centelleo.

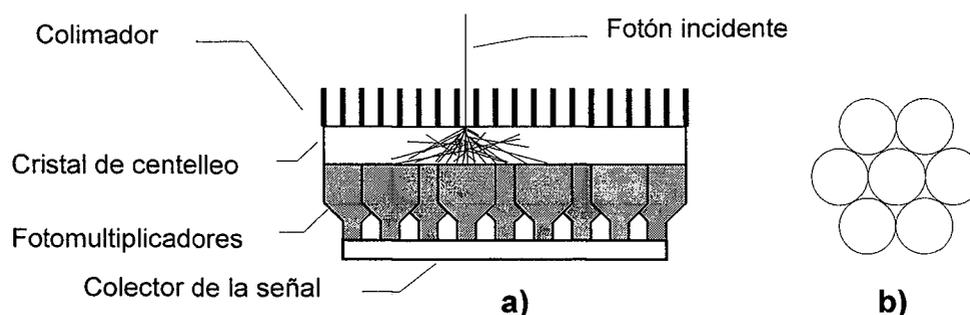


Figura 2.2. a) Estructura de una gammacámara. b) Disposición transversal de los fotomultiplicadores

- Después de realizar una detección, el detector tiene un tiempo muerto en el que es inoperante (de 1 a $5\mu\text{s}$, según la gammacámara [TSU-94]). Cualquier fotón que incidiera en ese intervalo no sería detectado.
- El localizador del impacto sobre el cristal de centelleo tiene una resolución limitada de unos 3mm [TSU-94].

Otro factor fundamental a tener en cuenta es la digitalización del plano de proyección. El plano se cuadricula en unidades de superficie (píxeles). El tamaño de los mismos puede ser predefinido por el técnico que realiza la adquisición. Los fotones que inciden en cada uno de los píxeles son acumulados en el correspondiente contador, produciéndose cierta pérdida de información al no tenerse en cuenta la posición exacta del impacto. Del tamaño de píxel escogido en las proyecciones depende la resolución de la reconstrucción (objeto de mínimo tamaño que puede ser distinguido en la imagen). No obstante, no puede definirse arbitrariamente pequeño, ya que, al reducirlo, también se reduce el número de cuentas por píxel, y, por tanto, se aumenta el ruido. Se ha de buscar una solución de compromiso entre ruido y resolución: para evitar que el ruido sea muy importante, con la consiguiente pérdida de fiabilidad de los datos, se ha de perder resolución y contabilizar conjuntamente los fotones provenientes de una región amplia de tejido, es decir usar tamaños de píxel grandes.

Por otra parte, para determinar la posición del emisor hay que conocer, además de la posición del impacto, la dirección de incidencia del fotón. Como la emisión radiactiva es isótropa en el espacio y la radiación gamma no puede ser focalizada con ningún tipo de lente, para poder garantizar que los fotones incidentes lleguen con una determinada dirección se utilizan colimadores. Los colimadores utilizados constan de una lámina de plomo de unos 4 ó 5 cm de espesor en la que se han realizado una serie de agujeros transversales por los que los fotones llegan al cristal de centelleo. De esta manera, solamente la radiación que llega al cabezal en la dirección que definen estos agujeros es capaz de

atravesar el colimador y ser detectada (en realidad, hay un pequeño porcentaje de la radiación que atraviesa las paredes de los colimadores, fenómeno conocido como penetración septal, y, a su vez, existe dispersión de los fotones con los átomos que componen el colimador [MAT-57] [BAR-81] [DEV-90]). Esto permite asegurar que los fotones detectados en un punto del cabezal han incidido en la dirección que define el agujero del colimador. Si los agujeros del colimador fueran de calibre infinitesimal, para cada ángulo, la proyección de un punto emisor sería un punto, aquel pixel de las proyecciones que 'apunta' al pixel emisor de la imagen. Como el calibre de los agujeros del colimador es finito, hay fotones que inciden en el detector con un ángulo no necesariamente perpendicular al mismo. El resultado de esto, junto con la penetración septal y dispersión de fotones dentro del colimador, es que la imagen de un punto emisor es una mancha o PSF (*Point Spread Function*) (Figura 2-3). Cuanto más alejado esté el punto emisor del detector tanto mayor será la PSF [MET-80]. La presencia del colimador, por otra parte totalmente necesaria, produce otro efecto: reduce en un factor del orden de 1000 los fotones detectados [KNO-83] con el consiguiente aumento del ruido.

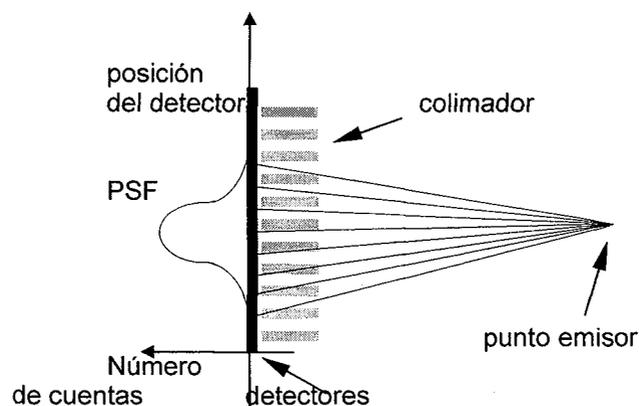


Figura 2-3. Esquema del origen de la PSF

Según los agujeros del colimador sean paralelos o estén focalizados sobre una recta o sobre un punto, se hablará de colimadores paralelos, *fan-beam* o *cone-beam* respectivamente. En este trabajo, se utilizan solamente colimadores de agujeros paralelos.

Existe una clara relación entre el colimador, el tamaño de píxel en las proyecciones, el ruido y la resolución. A fin de reducir el nivel de ruido debe obtenerse el mayor número de cuentas posibles en las proyecciones. Para ello, puede trabajarse con colimadores de mayor eficiencia y utilizar un tamaño de píxel mayor en las proyecciones. Ambas actuaciones producen una pérdida de resolución (pérdida de detalle) en las proyecciones que conlleva una pérdida de resolución en las reconstrucciones. Determinar la relación óptima entre ruido y resolución depende de la finalidad de la imagen obtenida [TSU-84].

Finalmente, un mal reglaje de las gammacámaras puede producir, a su vez, degradación de las imágenes. Los efectos más comunes son el mapa de sensibilidad no uniforme de los detectores, falta de linealidad y mal ajuste del centro de rotación. No obstante, estos dos efectos son fácilmente detectables en un control de calidad y su corrección es sencilla [JAS-80] [ENG-86] [TSU-94].

2.2. Planteamiento matemático de la reconstrucción tomográfica

El proceso de obtención de las proyecciones de un objeto puede ser representado como un sistema lineal, en el que la entrada es el objeto y la salida es el conjunto de proyecciones. La linealidad del sistema es fácil de asumir; un objeto que tenga el doble de actividad genera proyecciones que también tiene el doble de cuentas por píxel (en realidad, esto será cierto mientras el tiempo muerto del detector sea despreciable frente el tiempo medio entre dos impactos). Por tanto, matemáticamente la

reconstrucción tomográfica es un problema de inversión de sistemas lineales. El marco matemático para definir la reconstrucción tomográfica es el del análisis funcional. La imagen a reconstruir es una función que se ha de determinar a partir de otra función, las proyecciones, y un operador que las relaciona. Aunque el formalismo general de la reconstrucción tomográfica se desarrollará en dicho marco, también se incluyen otras visiones del problema, como la algebraica, que aparece al implementar numéricamente el problema, y la estadística.

Las reconstrucciones tomográficas que se llevan a cabo en SPECT son de imágenes tridimensionales a partir de sus proyecciones bidimensionales. Sin embargo, si cada sección (corte tomográfico) de la imagen tridimensional se puede tratar independientemente de las restantes, el problema queda reducido a varias reconstrucciones (tantas como secciones se tomen de la imagen) bidimensionales a partir de proyecciones unidimensionales. En la realidad suponer las diferentes secciones independientes es una aproximación, ya que, tanto la PSF como la dispersión de fotones interrelacionan a varias secciones entre sí. No obstante, esta aproximación es utilizada habitualmente. En caso contrario, la reconstrucción es de mucha mayor complejidad y requiere un esfuerzo de computación notablemente superior. En este trabajo todas las reconstrucciones realizadas son de imágenes bidimensionales. Por tanto, todo el formalismo y las siguientes definiciones están referidos a la reconstrucción de imágenes bidimensionales a partir de sus proyecciones unidimensionales. Su generalización a reconstrucción de imágenes tridimensionales a partir de proyecciones bidimensionales es inmediata [KAK-84] [HER-80]. El proceso de reconstrucción es abordado tanto desde el punto de vista analítico como numérico. Posteriormente, se particulariza el formalismo a la reconstrucción tomográfica en SPECT.

2.2.1. Descripción analítica

Se define una imagen como una función bidimensional $q(x,y)$ positiva, finita y solamente distinta de cero en una región acotada del plano (soporte acotado) [GON-77]. En el caso de la Medicina Nuclear, la función $q(x,y)$ representa la concentración de radiofármaco en cada punto del corte tomográfico en cuestión.

Esta función será siempre de cuadrado integrable. Por tanto, puede ser interpretada como un elemento del espacio L_2 (espacio de Hilbert - lineal, normado- de las funciones de cuadrado integrable) [LOU-83] [MAD-91].

Se define como rayo cualquier recta que atraviese el soporte de la imagen. La ecuación del rayo puede ser determinada en función de dos variables. Usualmente, se utilizan el ángulo θ que forma la perpendicular al rayo con el eje de las abscisas y la distancia t al origen de coordenadas (Figura 2-4). Entonces, la ecuación del rayo es:

$$x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = t$$

Se denomina rayo-suma a la integral de $q(x,y)$ a lo largo de un rayo. Su expresión para el rayo definido por θ y por t es:

$$P_{\theta}(t) = \int_{\text{rayo}} q(x, y) \cdot ds \quad (\text{ec 2-2})$$

donde ds es el diferencial de camino. Sustituyendo ds por su expresión sobre el rayo:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot \delta(x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - t) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{ec 2-3})$$

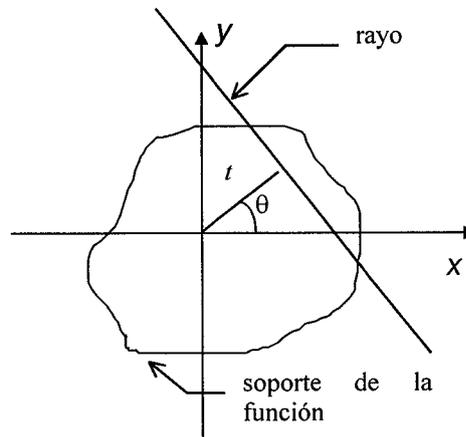


Figura 2.4 Esquema del rayo que atraviesa el soporte de una función

La proyección $P_{\theta}(t)$ en la dirección definida por θ es la función de t obtenida al considerar el conjunto de todos los rayos-suma en esa dirección (Figura 2-5). A cada valor de t se le hace corresponder el rayo-suma $P_{\theta}(t)$.

La proyección de $q(x,y)$ es la función bidimensional $P(\theta,t)$ obtenida al considerar el conjunto de las proyecciones $P_{\theta}(t)$ para cada ángulo θ . El funcional que asocia la función con su proyección, entendida en estos términos, se denomina la transformada de Radon de la función [KAK-84]. Se escribe:

$$q(x,y) \xrightarrow{\mathfrak{R}} P(\theta,t)$$

(ec 2-4)

$$P(\theta,t) = \mathfrak{R}(q(x,y))$$

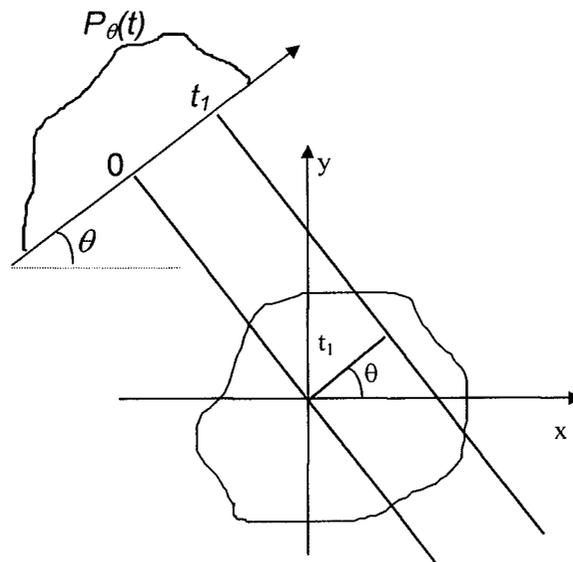


Figura 2-5. Generación de las proyecciones en una dirección dada.

2.2.2. Discretización

Las expresiones del apartado anterior están formuladas para objetos analíticos. Dado que en Medicina Nuclear se trabaja con imágenes y proyecciones digitalizadas, a continuación se escribirán para objetos discretizados. En primer lugar, se realiza un proceso de discretización (*sampling*) de la imagen y de las proyecciones y, posteriormente, se transcribe la expresión analítica del proceso de proyección (ec 2-3) en su análoga discreta. El proceso de discretización, que es necesario para poder realizar los cálculos en la reconstrucción, produce efectos sobre la calidad de la reconstrucción. Un tutorial sobre discretización y pérdida de información puede encontrarse en [JER-77]. Otros muchos textos tratan con mayor o menor profundidad cómo afecta la discretización a la reconstrucción tomográfica, por ejemplo [SMI-73] [BAR-81] [LOU-83] [VIE-88] [FAR-90] [ROS-95a].

Discretización de la imagen

Para digitalizar una imagen, su soporte se acota mediante un rectángulo. Este rectángulo es dividido en unidades básicas de superficie, cada una de las cuales recibe el nombre de píxel (del inglés *picture element*; vóxel - *volume element*- en el caso tridimensional). Generalmente, tanto el soporte de la imagen como los píxeles son cuadrados. A cada píxel se le asigna el valor medio de la imagen en su interior. Así, una imagen digitalizada es una matriz de números reales. Por comodidad, en vez de trabajar con matrices y tener que manejar dos índices, se utilizan vectores, que precisan un solo índice. El vector imagen se construye mediante la sucesión de filas de la matriz imagen. En lo sucesivo, cuando se hable de una imagen, se sobreentenderá que está digitalizada sobre un matriz cuadrada y expresada mediante un vector. La variable que nos da el tamaño del píxel (longitud de sus lados) será t_p . Al número de filas y columnas de la imagen digitalizada se le representa con la variable M . La imagen queda, entonces, almacenada en un vector de MM componentes (M filas de M componentes cada una). Al producirse la digitalización de la imagen se ha de tener en cuenta que se está acotando sus componentes espectrales. Una función discretizada uniformemente está limitada en el espacio de las frecuencias. En efecto, no habrá componentes de frecuencia mayor a la frecuencia de Nyquist, correspondiente a una senoide de 2 píxeles de periodo [PRA-76] [GON-77]:

$$w_{max} = \frac{1}{2t_p}$$

Por tanto, hay que asegurar que en la imagen original no haya frecuencias superiores a w_{max} , ya que, en caso contrario, aparecería el fenómeno de *aliasing* [GON-77]. En la práctica, el ruido sobre las

proyecciones limita la cantidad de píxeles utilizados (ver 2.1.1). El valor usual de M es de 64 o 128, dependiendo del tipo de imagen².

Discretización de las proyecciones

La primera discretización a que es sometida la proyección es en la variable angular. Las proyecciones sólo son adquiridas sobre un número finito de ángulos. La variable N indicará, a partir de ahora, el número de ángulos de proyección utilizados. Sobre el número de ángulos de proyección necesarios para reconstruir la imagen correctamente, en [KAK-84] se recomienda el uso de tantas proyecciones como bins haya por proyección para evitar el efecto del *aliasing*. En el mismo sentido, en un reciente trabajo [CAO-96] se realiza un estudio de los artefactos que aparecen en la imagen debidos al fenómeno del *aliasing* en función del número de ángulos de proyección utilizados. Se concluye que utilizar un número impar de ángulos mejora los resultados, sobre todo si no se considera el efecto de la atenuación. No obstante, el número usual de proyecciones utilizado es de 60 o 120 por ser divisores de 360.

La proyección para cada uno de los ángulos está, a su vez, discretizada en una sucesión de valores reales. La recta sobre la que se proyecta se divide en una serie de segmentos de igual longitud llamados bins (píxeles en caso de proyecciones bidimensionales). El valor que se hace corresponder a cada bin de la proyección es la integral de la proyección entre sus extremos. Para el bin j -ésimo:

$$p_{\theta}(j) = \int_j^{j+1} P_{\theta}(t) \cdot dt \quad (\text{ec 2-5})$$

² Se emplea una potencia de 2 para poder utilizar el algoritmo FFT optimizado (*Fast Fourier Transform*) en la transformada de Fourier de la imagen.

Si se combina la fórmula anterior con la expresión integral de $P_\theta(t)$ (ec 2-2) resulta:

$$p_\theta(j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{\text{rayo}} q(x,y) \cdot ds \cdot dt \quad (\text{ec 2-6})$$

Así, cuando la proyección esté digitalizada, se entenderá por rayo, no la recta que cruza el soporte de la imagen, sino la banda de anchura $t_b = t_{i+1} - t_i$ que lo cruza. La variable t es sustituida por un índice que indica el orden de los bins. El valor que se le asigna al bin j -ésimo de la proyección es la integral de la función $q(x,y)$ sobre la superficie que delimitan los dos extremos del bin (Figura 2-6). En lo sucesivo, el tamaño del bin será designado con la variable t_b . En reconstrucción tomográfica con colimadores paralelos, se hace coincidir el número de bins de cada proyección con el número de las filas y columnas de la imagen expresada matricialmente, así como sus respectivos tamaños ($t_b = t_p$). Por lo tanto, la proyección entendida como función bidimensional de las variables θ y t queda reducida a N filas de M valores reales, es decir, un vector de $M \times N$ componentes. La imagen formada por las N filas de las M componentes de las proyecciones dispuestas matricialmente se la denomina sinograma.

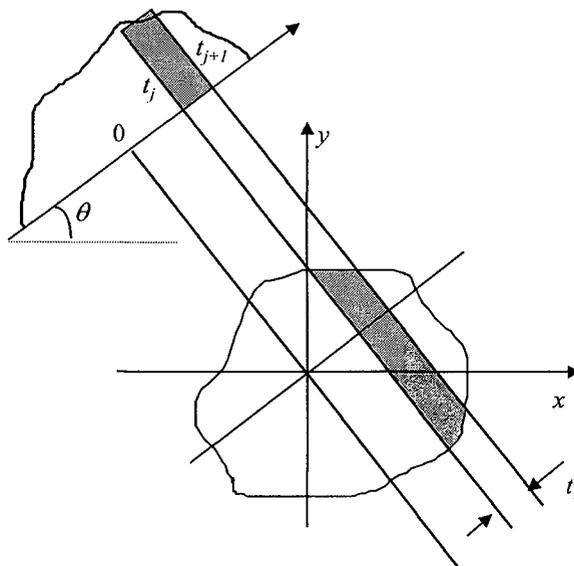


Figura 2-6. La contribución a un bin de la proyección

Otro factor a tener en cuenta es que las proyecciones en los diferentes ángulos de proyección se toman de igual longitud (mismo número de bins de igual tamaño). Puede ocurrir a veces que la proyección para un determinado ángulo sobrepase los límites del segmento donde se realiza la digitalización. En ese caso, la truncación de las proyecciones puede comportar artefactos en la reconstrucción [MUL-96].

Discretización de las ecuaciones

Cuando se discretiza espacialmente la imagen, la integral doble de la expresión (ec 2-6) se puede descomponer en una serie de integrales sobre los píxeles que recorre el rayo. Como en cada píxel la función a integrar es uniforme, el valor de la integral sobre cada píxel es el valor de la función por la integral de la superficie intersección del píxel y el rayo, es decir, el área de la intersección rayo-píxel.

$$\begin{aligned}
 p_{\theta}(j) &= \int_j^{j+1} \int_{\text{rayo}} q(x, y) \cdot ds \cdot dt \\
 &= \sum_{i=1}^{M \times M} \iint_{\text{pixel}-i \cap \text{rayo}-j} q(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{ec 2-7}) \\
 &\cong \sum_{i=1}^{M \times M} \bar{q}_i \cdot \iint_{\text{pixel}-i \cap \text{rayo}-j} dx \cdot dy
 \end{aligned}$$

donde \bar{q}_i es el valor promedio de la función en el píxel. La integral doble de este último término es un valor numérico A'_{ji} que depende del píxel y del bin considerados. Corresponde al área de la intersección del píxel con el rayo.

Usualmente, este factor se normaliza dividiéndolo por el área del píxel. En este caso, en vez de multiplicar este factor por el valor promedio de la función en el píxel, se multiplica por la actividad total del mismo. La expresión (ec 2-7) se reescribe:

$$p_{\theta}(j) = \sum_{i=1}^{M \times M} q_i \cdot \frac{\iint_{\text{pixel}-i \cap \text{rayo}-j} dx \cdot dy}{t_p^2} = \sum_{i=1}^{M \times M} q_i \cdot A_{ji}$$

De esta manera A_{ji} está normalizado a la unidad. En todo caso, A_{ji} es la contribución del píxel i -ésimo de la imagen al bin j -ésimo de las proyecciones (Figura 2-7). Escribiendo el vector proyección como la sucesión de vectores proyección para los distintos ángulos y utilizando una notación vectorial [HER-80], esta última expresión queda:

$$p_j = \sum_i A_{ji} \cdot q_i$$

o

$$p = A \cdot q \quad (\text{ec 2-8})$$

La matriz A formada por el conjunto de factores A_{ji} es conocida como matriz de transición o matriz de pesos. Contiene la información necesaria para la obtención de las proyecciones a partir de la imagen.

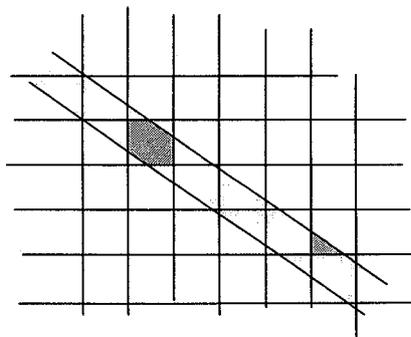


Figura 2-7. Un píxel no contribuye a un bin de la proyección con toda su actividad. Su contribución es proporcional al área de píxel inscrita dentro del rayo. Por ejemplo, los dos píxeles sombreados aportan una proporción de actividad diferente al rayo dibujado.

2.2.3. Particularización al caso de SPECT

Una vez presentado el formalismo general de las reconstrucciones tomográficas, a continuación se desarrolla este mismo formalismo para el caso particular de SPECT, pues la presencia de las distintas degradaciones hace que las ecuaciones deban ser ligeramente modificadas. Se han de tener en cuenta la atenuación, la PSF, la dispersión y el ruido, y cómo se incorporan estas degradaciones al formalismo.

Cuando se tiene en cuenta la atenuación, el valor de la proyección para un ángulo dado no puede obtenerse mediante la integral de la (ec 2-3). Debe introducirse en la misma una función de peso que incorpore el efecto de la pérdida de valor en la proyección debido a la atenuación para cada rayo. Puesto que la atenuación no es isótropa, esta función de peso dependerá, a su vez, de las variables de la proyección:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot w(x, y, t, \theta) \cdot \delta(x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - t) \cdot dx \cdot dy$$

Por ejemplo, si la atenuación es uniforme en todo el objeto, esta última expresión se escribe [LOU-83]:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot \exp(-\mu \cdot l_{\theta}) \cdot \delta(x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - t) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{ec 2-9})$$

donde μ es el coeficiente de atenuación y l_{θ} es la distancia del punto (x, y) al borde del objeto en la dirección θ . Esta expresión suele denominarse transformada de Radon atenuada. Si el mapa de atenuación no es uniforme, la exponencial de esta expresión debe sustituirse por la exponencial inversa de la integral de línea desde cada punto al extremo del objeto en la dirección θ del coeficiente de atenuación punto a punto $\mu(x, y)$ (mapa de atenuación del objeto) por el camino recorrido por el rayo.

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot \exp\left[-\int_0^t \mu(x, y) \cdot dl\right] \cdot \delta(x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta - t) \cdot dx \cdot dy$$

donde la integral dentro de la exponencial se extiende desde el punto (x, y) hasta el punto correspondiente del detector. En la práctica, la atenuación producida por el aire entre el paciente y el detector es despreciada y sólo se calcula la atenuación que se produce dentro del paciente.

Si se incluye la PSF, sobre un punto de la proyección, además de la contribución del rayo perpendicular, otros rayos provenientes de direcciones ligeramente diferentes pueden contribuir a un bin dado (Figura 2-8). En este caso, la función delta que marca la dirección del rayo en (ec 2-9) debe ser suprimida y la función de peso debe incluir la contribución de cada punto de la imagen sobre cada punto de la proyección.

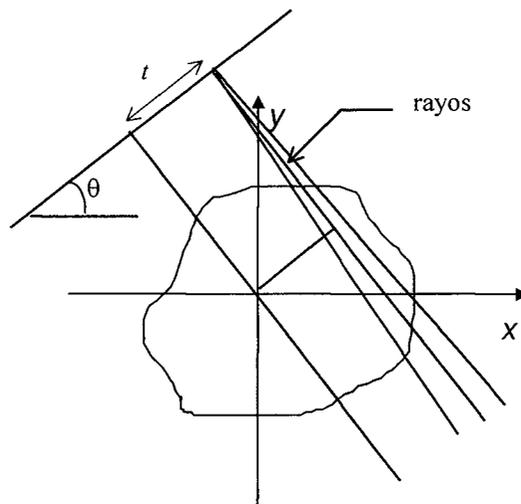


Figura 2-8. Esquema de los distintos rayos que contribuyen a un punto de la proyección cuando existe PSF.

De hecho, toda la información del proceso físico de proyección puede incluirse simultáneamente en esta función de peso, la atenuación, la PSF y la dispersión.

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot w(x, y, t, \theta) \cdot dx \cdot dy \quad (\text{ec 2-10})$$

El ruido no puede incluirse de una manera determinista en esta función de pesos dada su naturaleza aleatoria. Se incluye como una función de residuos que se suma a la proyección del objeto. La expresión de la proyección con todas las degradaciones presentes en SPECT queda:

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot w(x, y, t, \theta) \cdot dx \cdot dy + n_{\theta}(t) \quad (\text{ec 2-11})$$

donde $n_{\theta}(t)$ representa el ruido. Prescindiendo del ruido o incorporándolo en las proyecciones, la reconstrucción tomográfica se plantea como la resolución de una ecuación integral de Fredholm de primera especie [DEM-89]. Al discretizar esta última expresión, al igual que se hacía en el apartado anterior, se obtiene:

$$p = A \cdot q + n \quad (\text{ec 2-12})$$

donde la matriz A está formada por los elementos:

$$A_{ij} = \frac{\iint w(x, y, \theta_k, t_h) \cdot dx \cdot dy}{t_p^2} \quad \text{con } j = k \cdot M + h \quad (\text{ec 2-13})$$

y n representa el ruido (n es a su vez un vector de $M \times N$ componentes, cada una de ellas es el ruido del correspondiente bin de la proyección).

En la (ec 2-12), se ve que la proyección se compone de una parte de señal (determinista) y otra de ruido (aleatoria) que, según el caso, puede ser más o menos significativa.

En resumen, se ha obtenido una formulación de la obtención de las proyecciones a partir de la imagen. Una imagen es un elemento de un espacio vectorial de dimensión $M \times M$. La proyección se obtiene mediante el producto de la imagen por la matriz de transición y la adición de ruido. Proyecciones obtenidas de una misma imagen en las mismas condiciones de adquisición difieren sólo en el vector ruido.

2.2.4. Interpretación estadística del proceso de formación de la proyección.

Se ha mencionado con anterioridad que la emisión radiactiva es un proceso aleatorio. La cantidad de fotones emitidos por un píxel de la imagen está sujeto a fluctuaciones en el tiempo. Por tanto, diferentes muestras de actividad de un mismo píxel, darían lugar a diferentes resultados. En este sentido, la variable que describe la emisión de un píxel de la imagen durante un periodo predeterminado de tiempo puede ser considerada como una variable aleatoria de Poisson. Una imagen es un vector de variables aleatorias de Poisson independientes entre ellas. La proyección es una realización concreta de una función lineal de dichas variables. El elemento A_{ji} de la matriz de transición (normalizado a 1) puede ser interpretado como la probabilidad de que un fotón que es emitido por el píxel i de la imagen incida sobre un bin j de las proyecciones (probabilidad condicional de detectar un fotón en el bin j si ha sido emitido por el píxel i) [SHE-82]. A su vez, el número de fotones detectados por un bin también está sujeto a fluctuaciones en el tiempo, básicamente debido a la variabilidad en el número de fotones emitidos por unidad de tiempo en cada píxel de la imagen. Por consiguiente, el valor de cada bin puede ser considerado como una variable aleatoria. Tanto en el

caso de que no haya degradaciones [SHE-82] [LLA-84] como en el caso de que estén presentes [HER-90] cada una de estas variables puede ser descrita mediante una variable aleatoria de Poisson. Dos adquisiciones diferentes de proyecciones corresponden a dos muestras distintas del mismo conjunto de variables aleatorias.

2.2.5. Problemas matemáticos de la reconstrucción.

La reconstrucción tomográfica es un problema que, debido a su propia estructura, a la presencia de ruido y a los procesos de digitalización que se llevan a cabo, está mal planteado (*ill-posed*) [DAV-83] [LOU-83] [JOY-84] [NAT-88] [DEM-89]. Este hecho tiene tres posibles consecuencias:

- El problema puede no tener solución, debido a la posible incongruencia en los datos a causa del ruido. Este hecho es muy relevante en sistemas sobredeterminados. En este, en [TIH-63] se expone que una ecuación integral como (ec 2-10) no tiene solución si el núcleo de la integral tiene un grado mayor de suavidad que la proyección. Esto sucede cuando este núcleo incluye la PSF y las proyecciones tienen una importante presencia de ruido. Es lógico pensar que este resultado es extrapolable al sistema discretizado.
- Puede que exista solución, pero que no sea única. En objetos analíticos, el hecho de disponer solamente de un conjunto finito de proyecciones implica que la reconstrucción no sea única [SMI-73]. En [LOU-81] [LOU-83] se demuestra que, en este caso, existen imágenes “invisibles” en las direcciones consideradas, es decir, de proyección nula en esas direcciones. Si estas imágenes se suman a la imagen reconstruida se obtiene una nueva solución. Estas imágenes, llamadas imágenes fantasma (*ghost*), constituyen el núcleo o *kernel* del operador proyección y tienen una estructura muy oscilante [LOU-81]. No está evaluado como afectan las diferentes degradaciones a este resultado. Al digitalizar las imágenes este fenómeno prevalecerá o no en función del número de píxeles de la imagen y del número de

ángulos de proyección considerados, es decir, si el sistema lineal resultante está suficientemente determinado o no.

- Puede que tenga solución pero la imagen reconstruida no varíe continuamente con las proyecciones. Este último hecho significa que una pequeña variación en las proyecciones puede dar una variación muy grande en la imagen (amplificación del ruido) [LLA-82] [VIE-88]. Con todo, cada método de reconstrucción tiene sus técnicas de regularización³ que nos garantizan que la solución tiene cierto grado de proximidad a la solución ideal. La regularización también puede solventar el problema de las imágenes *ghost* [LOU-81].

Por otra parte, la corrección que puede hacerse en algunas circunstancias del mal planteamiento del problema no garantiza estabilidad en la reconstrucción. El buen planteamiento es condición necesaria pero no suficiente para que pequeñas variaciones en los datos no den lugar a una solución muy alejada de la ideal. En el planteamiento numérico, se ha de determinar el buen o mal condicionamiento del problema [BER-86]. La reconstrucción tomográfica es un problema mal condicionado⁴ [DEM-89]. El hecho de ser un problema mal planteado y/o mal condicionado es un factor determinante a la hora de decidir las estrategias de resolución.

³ Se entiende por regularización de un problema mal planteado, al paso a otro problema equivalente, dependiente de un parámetro α positivo, que nos garantice que puntos próximos a los datos están relacionados con puntos próximos a las soluciones. El grado de proximidad lo da el parámetro α . Para $\alpha = 0$, el problema se reduce al original [TIK-74]. En los capítulos siguientes se profundiza sobre este punto.

⁴ Si un problema numérico está mal condicionado, pequeñas perturbaciones en los datos producen una gran perturbación en la solución. Es decir, al invertir el problema el ruido existente en los datos se amplifica [BAK-80] [BER-86] [GOL-89].

2.2.6. Reconstrucción: métodos analíticos y métodos iterativos.

En los apartados anteriores, se ha realizado un desarrollo de la obtención de las proyecciones a partir de la imagen desde diferentes puntos de vista. En primer lugar, se ha considerado la imagen como una función analítica y la proyección como una transformación funcional de la misma. Posteriormente se ha introducido la discretización de la imagen y el sistema de ecuaciones de la proyección, que ha sido interpretado de dos maneras diferentes, determinista y estadísticamente.

En este punto se describen, a grandes rasgos, las estrategias existentes de inversión del problema, es decir, encontrar la imagen a partir de unas proyecciones conocidas (reconstrucción tomográfica) y las ventajas e inconvenientes de unas y otras.

Básicamente, se clasifican los métodos en tres grupos:

- La imagen es considerada como una función analítica y la proyección pura (sin función de ponderación, es decir, sin incluir ninguna degradación). En tal caso, la reconstrucción tomográfica es equivalente a invertir la expresión de la (ec 2-4):

$$q(x, y) = \mathfrak{R}^{-1}(P(\theta, t))$$

Este problema, resoluble mediante el teorema de la sección central según se verá en el capítulo 4, tiene solución exacta si se tiene la proyección para todos los valores de la variable angular [SMI-73] [KAK-84]. No obstante, en la práctica se dispone sólo de un número finito de proyecciones, afectadas además por diferentes degradaciones, con lo que la aplicación del teorema de la sección central en la reconstrucción de este tipo de proyecciones da una solución aproximada. Las degradaciones de las proyecciones son

tratadas ya sea previamente a la reconstrucción, mediante el filtrado de las proyecciones, o posteriormente, con algoritmos de corrección sobre la imagen reconstruida. Este método de reconstrucción es denominado retroproyección filtrada (FBP- *Filtered Back Projection* o IFBP- *Iterative Filtered Back Projection*- si se utilizan algoritmos iterativos de corrección de las degradaciones) y se estudia en el capítulo 4.

- Interpretación determinista. Se invierte el sistema lineal (ec 2-12) mediante algún método algebraico iterativo. Estos métodos reciben el nombre genérico de métodos de reconstrucción algebraicos (ART- *Algebraic Reconstruction Techniques*) y se estudian en el capítulo 5.
- Interpretación estadística. Se resuelve mediante un método estadístico el sistema de ecuaciones (ec 2-12), siendo p el conjunto de datos, A una matriz conocida y q las incógnitas. El método habitual es el de máxima verosimilitud de la imagen (imagen que tiene las mayor probabilidad de generar las proyecciones obtenidas). Se hablará de métodos de reconstrucción estadísticos (MLE- *Maximum Likelihood Estimator*). Son el objeto de estudio del capítulo 6.

Los métodos de reconstrucción IFBP, algebraicos y estadísticos son métodos iterativos y precisan el conocimiento de la matriz de transición para el cálculo de las proyecciones, al contrario que FBP. Esto le da a la retroproyección filtrada una gran ventaja frente ellos: una enorme facilidad y rapidez de computación. En la actualidad, es el procedimiento estándar en los equipos de gammagrafía comerciales. No obstante, este método no permite incorporar la corrección de las degradaciones en la reconstrucción, con lo que las imágenes resultantes son de baja calidad. En cambio, el uso de los métodos iterativos permite incluir en la matriz de pesos varios de los efectos degradantes de la imagen [GUL-85] [TSU-94]. Así, al realizar las sucesivas iteraciones, estos efectos se van corrigiendo y se obtiene una imagen de mayor calidad [STA-88]. En particular, los efectos que se pueden corregir en la reconstrucción son la atenuación y la PSF. También podría incluirse la dispersión en la matriz del sistema,

aunque no suele hacerse por la complejidad de los cálculos que requiere. Además, los métodos iterativos son más robustos en los casos de pérdida parcial de las proyecciones por movimiento involuntario del paciente u otro motivo [CAR-86] [AND-89]. El inconveniente esencial de los métodos iterativos es su gran costo computacional, tanto en tiempo de cálculo como en cantidad de memoria. Puede calcularse con facilidad cómo crece la memoria requerida para trabajar con la matriz de pesos en un ordenador. Para los valores estándar utilizados en la rutina clínica $M=64$ y $N=60$, la memoria necesaria para la matriz de transición de cada corte tomográfico es de $64 \times 60 \times 64 \times 64 \times 4$ bytes, siendo 4 los bytes que ocupa un número real en float. Esto da un total de más de 62 Mb. Si se trabajara con el doble de direcciones de proyección, su tamaño se multiplicaría por dos, pero si la imagen se digitalizara, por ejemplo, en matrices 128×128 , el tamaño de la matriz crecería en un factor 16 (más de 200 Mb!). A su vez, el número de operaciones aritméticas realizadas en la reconstrucción depende directamente del número de elementos de la matriz de pesos. Esto conlleva que el tiempo necesario de computación en los métodos iterativos sea notablemente mayor al de la retroproyección filtrada. Para evitar los problemas de memoria utilizada, cabría la posibilidad de calcular los elementos de la matriz en cada iteración, pero eso haría mucho más lento el proceso de reconstrucción. No obstante, los elementos de esta matriz son mayoritariamente cero (matrices tipo *sparse*) y se puede almacenar de una manera compacta según se describe en el siguiente capítulo. Aunque las matrices así empaquetadas pueden reducir su tamaño en más de un 75%, sus dimensiones son un factor limitante muy importante a tener en cuenta a la hora de utilizar métodos iterativos.

Otro factor a determinar es el número de iteraciones que deben realizarse. Según se expone en los capítulos posteriores, los diferentes métodos iterativos de reconstrucción tomográfica suelen mostrar una convergencia parcial a la imagen ideal, con un acercamiento en las primeras iteraciones y un distanciamiento posterior si el número de

iteraciones crece indefinidamente. Por esto, debe ser determinado en cada caso, preferentemente de forma automática, el instante preciso en que el proceso iterativo debe interrumpirse para obtener los mejores resultados. Así mismo, es deseable poseer mecanismos de regulación de la velocidad de convergencia del proceso iterativo, para acelerarlo o retardarlo según convenga.

3. Metodología

El funcionamiento de los métodos de reconstrucción puede evaluarse objetivamente analizando la semejanza entre las características de la reconstrucción de unas proyecciones con las de la imagen original de que provienen. La obtención de una imagen y de sus proyecciones puede conseguirse de dos maneras: a partir de un modelo real, del que se conozca la geometría y la actividad de cada zona, y de sus proyecciones experimentales o a partir de un modelo numérico y de un algoritmo de simulación. Aunque las proyecciones experimentales son preferibles a las simuladas, pues la simulación requiere algunas aproximaciones, dado que los métodos de reconstrucción deben ser probados en un gran número de condiciones para poder extraer conclusiones generales, es necesario disponer de un simulador que permita generar las proyecciones con gran facilidad. La validación de la simulación, que posibilita extrapolar los resultados de la simulación a casos reales, se consigue comparando los resultados obtenidos mediante las proyecciones experimentales y simuladas de un mismo modelo. Otra posibilidad que ofrece la simulación es la generación de proyecciones que no incluyan todas las degradaciones. De esta manera, puede estudiarse por separado el efecto de las diferentes degradaciones de las proyecciones sobre la imagen reconstruida. Finalmente, para valorar la calidad de las reconstrucciones y cuantificar su semejanza con la imagen original se utilizan funciones de mérito (FDM en lo sucesivo).

El esquema de los diferentes estudios realizados en este trabajo es:

- Obtención de proyecciones, tanto experimentales como simuladas por ordenador.
- Análisis de los métodos de reconstrucción y ajuste de los parámetros de los que dependen mediante la evaluación con FDM de las reconstrucciones obtenidas con las proyecciones simuladas.

- Contrastación de los resultados obtenidos mediante simulación con los obtenidos de las proyecciones experimentales.

En este capítulo, pues, se exponen la metodología empleada para la obtención de proyecciones, tanto experimentalmente como por simulación, la reconstrucción y la evaluación de los resultados.

3.1. Adquisición de proyecciones experimentales

El modelo físico utilizado consta de un tanque de metacrilato de forma cilíndrica de 22 cm de diámetro exterior con cierre hermético. En el interior del mismo, están dispuestos longitudinalmente 6 cilindros de metacrilato de 5, 4, 3, 2, 1'5 y 1 cm de diámetro respectivamente (Figura 3-1). Este tanque se llena de una disolución acuosa de ^{99m}Tc , de manera que la emisión radiactiva es uniforme en todo el recipiente salvo en los cilindros, donde es nula. Este modelo será referenciado como modelo de Jaszczak.

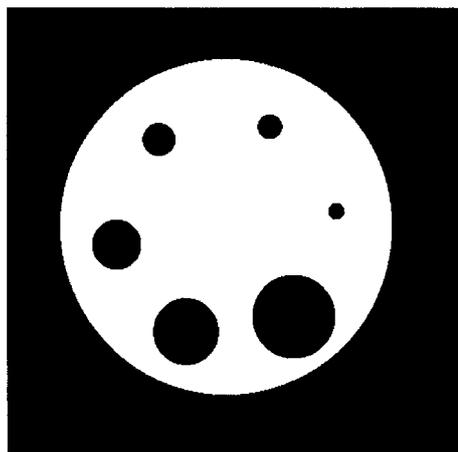


Figura 3-1 Sección digitalizada (512x512) del modelo de Jaszczak

Las adquisiciones de las proyecciones se han llevado a cabo en 60 direcciones equiespaciadas en 360° mediante una gammacámara APEX-SP4-ELSCINT del Servicio de Medicina Nuclear del *Hospital Clínic i Provincial de Barcelona*. Han sido utilizados dos colimadores distintos, uno de baja resolución (colimador- A) y otro de alta resolución (colimador- B), ambos de agujeros paralelos¹.

Para determinar los parámetros de la adquisición, se han tenido en cuenta los parámetros usuales utilizados en la rutina clínica. Dado el tamaño del modelo físico, las proyecciones se han adquirido con los parámetros utilizados normalmente en los estudios de cerebro. De esta manera se ha fijado el número de cuentas, el radio de giro del cabezal de la gammacámara y el tamaño del píxel. Las proyecciones experimentales obtenidas han sido corregidas de decaimiento de radiactividad. Los parámetros de adquisición están descritos en la tabla 3-1.

Colimador	A	B
Número de cuentas por corte tomográfico	400.000 (400Kc)	200.000 (200Kc)
Radio de giro del cabezal	17 cm	17cm
Tamaño del píxel	0.4587 cm	0.4717 cm

Tabla 3-1. Parámetros de adquisición de los estudios.

3.2. Simulación de un estudio

Según se vio en el capítulo anterior, las proyecciones de un objeto numérico se calculan con la expresión (ec. 2-12):

$$p = A \cdot q + n$$

¹ Aunque la estructura de ambos colimadores es análoga, el colimador A, por tener agujeros de mayor calibre, permite el paso de una mayor cantidad de fotones que el colimador B (mayor eficiencia), a costa de perder precisión en la dirección de incidencia (peor resolución, PSF de mayor tamaño)

Para aplicar esta expresión, es preciso construir la matriz de transición que incluya tanto la parte geométrica como el efecto de las degradaciones. Posteriormente, a la proyección obtenida al multiplicar la imagen por esta matriz de pesos se le añade el ruido.

3.2.1. Cálculo de la matriz de transición

El elemento A_{ij} de la matriz de pesos incluye el factor geométrico, la respuesta del detector, la atenuación y la dispersión. Por esto, puede expresarse como función de tres factores:

$$A_{ji} = A_{ji}(s_{ji}, at_{ji}, r_{ji})$$

donde el factor s_{ji} tiene en cuenta la dispersión de los fotones emitidos, at_{ji} tiene en cuenta la atenuación y r_{ji} es el factor geométrico de respuesta del detector (PSF). Bajo la asunción de que los tres fenómenos, dispersión, PSF y atenuación son independientes entre ellos, la función puede ser factorizada [LIA-92]:

$$A_{ji} = s_{ji} \cdot at_{ji} \cdot r_{ji}$$

Cada factor se obtiene por separado, de una forma exacta o aproximada, a partir del conocimiento de la geometría y composición del conjunto objeto-detector. A continuación, se detalla el cálculo de cada uno de ellos.

3.2.2. Tratamiento de la dispersión

Para cada bin de la proyección, los fotones detectados es la suma de fotones primarios (que no han sufrido dispersión alguna) y fotones dispersados:

$$p = p^{pri} + p^{disp} \quad (\text{ec 3-1})$$

La degradación debida a la dispersión depende, entre otros factores, de la distancia del emisor al detector y de la geometría del objeto [FRE-91] [FRE-93]. Su inclusión en la matriz de pesos de manera exacta es un problema de gran complejidad que escapa a los objetivos de este trabajo. Por tanto, se ha buscado una forma alternativa de simular esta degradación.

La mayoría de correcciones de la dispersión en estudios reales están basadas en análisis espectral de la energía de los fotones detectados. La detección simultánea y separada de fotones con energías dentro de dos o más intervalos disjuntos, uno centrado en la energía de emisión del isótopo y los otros en energías menores, permite hacer una estimación de los fotones Compton y sustraerlos del total. Entre la abundante bibliografía referente a este tema, puede destacarse [JAS-85], [KOR-88], [YAN-88], [MAS-89], [LJU-90a], [KIN-92] y [BUV-95]. No obstante, una simulación de la dispersión que incluya la evaluación de la energía de los fotones dispersados precisa utilizar complejos métodos basados en procesos de Monte Carlo [BEC-82], [FLO-84], [LJU-89], [FRE-90] o [ROS-90].

Algunos autores han propuesto tratamientos alternativos de la dispersión como por ejemplo [AXE-84], [FLO-85] y [MSA-87]. Estos métodos suponen que el efecto de la dispersión de cada punto emisor es una función de respuesta sobre la proyección (SRF: *Scatter Response Function*) que puede ser modelizada. Si se realiza la aproximación de suponer la SRF invariante para todos los puntos de la imagen, entonces, la obtención de los fotones dispersados se consigue convolucionando la proyección con esta SRF. En este trabajo, siguiendo los resultados de [MSA-87], para modelizar la dispersión se utiliza la SRF:

$$f(x) = 0.035 \cdot \exp(-0.2 \cdot x) \quad (\text{ec 3-2})$$

La expresión (ec 3-1) se escribe:

$$p = p^{pri} + p^{pri} * f \quad (\text{ec 3-3})$$

y puede ser invertida pasando al dominio frecuencial mediante la transformada de Fourier (FT- *Fourier Transform*):

$$p^{pri} = \text{FT}^{-1} \left[\frac{\text{FT}(p)}{\text{FT}(\delta + f)} \right] \quad (\text{ec 3-4})$$

En resumen, utilizando la aproximación anteriormente citada, no es preciso incluir el efecto de la dispersión en la matriz de transición, ya que puede corregirse por deconvolución sobre las proyecciones mediante esta última expresión. Otra importante ventaja de usar esta aproximación es que la dispersión es más fácilmente simulable mediante la expresión ec 3-3. De esta manera, la ecuación de la generación de la proyección a partir de la imagen, para proyecciones libres de dispersión, puede escribirse:

$$p_j^{pri} = A_{ji}(at_{ji}, r_{ji}) \cdot q_i + n_j \quad (\text{ec 3-5})$$

3.2.3. Inclusión de la PSF

Cuando se hace referencia a la PSF, respuesta del detector a un punto emisor, se entiende en sentido amplio. Es decir, no sólo se incluye el factor geométrico de respuesta debido a la geometría del colimador, sino también todos los fenómenos degradantes asociados al detector, incluida la penetración septal, la dispersión dentro del colimador, el ruido del circuito de localización de impactos en el cristal de centelleo, etc. La parte geométrica puede modelizarse matemáticamente a partir del conocimiento de la estructura del colimador [MET-80], pero las restantes

son de difícil tratamiento matemático y precisan métodos de Monte Carlo para su cálculo [DEV-90]. No obstante, la PSF de un punto para un colimador de agujeros paralelos es ajustable a una gaussiana [FOR-89] [HEB-92] con dispersión dependiente de la distancia emisor-detector.

Por otra parte, ya que las imágenes están digitalizadas, se tiene que calcular la respuesta de un píxel emisor a partir de la PSF de un punto emisor. La PSF de un píxel es la integral sobre todos los puntos del píxel de la PSF de un punto. Si se realiza la aproximación de suponer que todos los puntos del píxel tienen igual función respuesta (independientemente de la posición del punto dentro del píxel), la PSF del píxel se puede calcular mediante la convolución de dicha función respuesta con la proyección geométrica del píxel. Entonces, si la proyección del píxel es de dimensiones mucho menores que la gaussiana, el resultado de convolucionar una gaussiana con dicha función es aproximadamente una gaussiana de mayor dispersión y el ajuste de la PSF de un píxel con una gaussiana es bueno. En caso contrario, es decir si la dispersión de la PSF es muy pequeña en relación al tamaño de la proyección del píxel, prevalecerá la forma de esta proyección y el ajuste a una gaussiana será deficiente. Esto ocurre a distancias muy cortas del colimador. En resumen, a las distancias usuales emisor-detector, la PSF de un píxel emisor es correctamente aproximable por una gaussiana.

Para determinar la variación de la PSF con la distancia del punto emisor al detector, se ha realizado una medición experimental de la PSF en función de la distancia para los dos colimadores de agujeros paralelos utilizados con el modelo físico. Han sido adquiridas proyecciones planas de un punto emisor a distintas distancias emisor-detector. El punto emisor se ha conseguido blindando un pequeño depósito que contenía una gota de una disolución de ^{99m}Tc , por todas partes menos por un orificio. Para cada proyección, se ha ajustado numéricamente una gaussiana a la PSF obtenida. Mediante una regresión se ha comprobado que, en las

distancias usuales emisor-detector (de 10 a 50 cm), la variación de la dispersión (σ) de la gaussiana en función de la distancia (z) del punto emisor al detector es lineal, obteniéndose las siguientes relaciones:

Colimador	A:	$\sigma = 0.0275 \cdot z + 0.2$	$coef.corr = 0.9998$
Colimador	B:	$\sigma = 0.0172 \cdot z + 0.2$	$coef.corr = 0.9997$

donde tanto σ como z están expresados en cm.

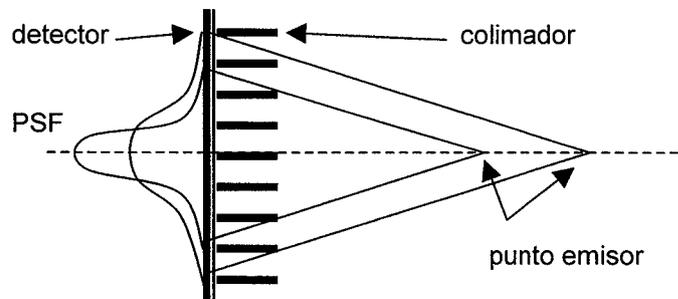


Figura 3-2. La PSF recoge aproximadamente el mismo número de cuentas con independencia de la distancia al detector (abarca un mismo ángulo sólido), aunque su dispersión aumenta con dicha distancia.

La PSF indica cómo se distribuye la energía emitida por cada punto de la imagen en los diferentes píxeles de la proyección. Una observación importante es que el número de fotones detectados es independiente de la distancia. Esto es debido a que, dentro del rango de distancias en que se trabaja, el ángulo sólido de radiación detectada siempre es el mismo (Figura 3-2). Como el área de la PSF es proporcional a la radiación detectada, todas las PSF han de tener el área normalizada a un mismo valor. Queda indeterminado un factor de escala común a todas las PSF. Puede suponerse las gaussianas de área unidad. Cualquier otro valor, daría una reconstrucción igual pero reescalada.

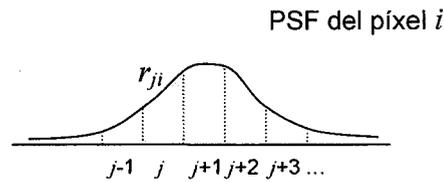


Figura 3-3. Determinación del factor geométrico. Contribución del píxel i de la imagen al bin j las proyecciones

Una vez calculada la PSF, el factor geométrico r_{ji} es el área de la PSF que corresponde al píxel j de las proyecciones (Figura 3-3). Es la parte de radiación emitida en el píxel i de la imagen (sobre un total de 1) que llega al bin j de las proyecciones.

3.2.4. Inclusión de la atenuación

La presencia de un medio atenuante entre el emisor y el detector provoca que sólo un porcentaje de la radiación emitida llegue al receptor, el resto es absorbido por el medio. Este porcentaje no depende de la intensidad de emisión. Depende sólo del grosor y naturaleza del medio atenuante que la radiación atraviesa. La intensidad I que atraviesa un medio atenuante de grosor d es proporcional a la intensidad emitida I_0 . El factor de proporcionalidad at , es positivo, menor que uno y varía de manera exponencial inversa con el grosor [TUB-63] :

$$at = \frac{I}{I_0} = e^{-\mu d}$$

donde μ es el coeficiente de atenuación del medio, que depende de la naturaleza del mismo y de la energía de la radiación y se determina experimentalmente en cada caso, aunque para algunos compuestos está tabulado. Por ejemplo, el coeficiente de atenuación del agua para radiaciones de 140 KeV (energía de los fotones γ del ^{99m}Tc) es de 0.15 cm^{-1} [TUB-63], [HAR-84].

Si la radiación atraviesa diferentes medios atenuantes el factor de reducción de la radiación es el producto de todos los factores:

$$at = e^{-\mu_1 d_1} \cdot e^{-\mu_2 d_2} \dots = \exp\left(-\sum_k \mu_k d_k\right) \quad (\text{ec 3-6})$$

donde μ_k es el coeficiente de atenuación del k -ésimo medio y d_k es el espesor del mismo que atraviesa el rayo en consideración.

Para poder calcular el factor atenuante at_{ji} , es necesario conocer el mapa de atenuación de la imagen, es decir, el valor del coeficiente de atenuación en cada punto de la imagen. Este mapa de atenuación está normalmente digitalizado con el mismo número de píxeles que la imagen. El mapa de atenuación puede ser determinado experimentalmente reconstruyendo las imágenes de transmisión de la radiación de una fuente externa al paciente tomadas en diferentes direcciones previa o simultáneamente al estudio [BAI-87] [BAR-97] o con la información procedente de imágenes obtenidas con TC (Tomografía Computerizada) o RMN (Resonancia Magnética Nuclear). Una vez determinado el mapa de atenuación, el factor atenuante at_{ji} de la radiación del píxel i de la imagen que es detectada en el bin j de las proyecciones viene dado por la expresión análoga a ec 3-6, moviendo el índice k sobre todos los tejidos atravesados:

$$at_{ji} = \exp\left(-\sum_k \mu_k d_k\right)$$

Se ha de mencionar una última aproximación utilizada para simplificar los cálculos. Se ha supuesto que la atenuación era igual para toda la PSF de un punto. Como coeficiente de atenuación para una PSF se ha tomado la de su rayo central. Dada la poca variación de los caminos para los diferentes rayos que producen la PSF de un píxel emisor y la uniformidad

de la mayoría de los mapas de atenuación utilizados, esta aproximación tiene efectos mínimos. Los distintos espesores d_k pueden calcularse fácilmente utilizando el algoritmo descrito en [SID-85].

3.2.5. Empaquetamiento de la matriz de pesos.

Dado que en un bin de las proyecciones contribuyen pocos píxeles de la imagen, los elementos de la matriz de pesos son mayoritariamente nulos (matrices tipo *sparse*). Esto permite guardarla de manera compacta utilizando el método descrito en [BRO-89]. Un elemento de la matriz queda determinado por un índice fila, un índice columna y un valor real. Para almacenar una matriz de este tipo basta con guardar tres vectores, el primero que contenga todos los elementos de la matriz diferentes de cero (en la práctica mayores que un valor umbral) tomados secuencialmente por filas; el segundo que contenga el índice columna de los elementos del primer vector y el tercero que contenga el índice del primer vector en que se cambia de fila, esto es, el índice del elemento cuyo índice fila es mayor que el índice fila del elemento anterior.

3.2.6. Simulación del ruido sobre las proyecciones

El ruido producido durante la emisión y la detección causa que el número de fotones detectados en cada bin no sea el que le correspondería teóricamente dadas la intensidad emisora de cada pixel y la contribución de cada píxel. Según se señaló en el capítulo anterior, cada bin de las proyecciones puede ser descrito mediante una variable de Poisson. El parámetro de esta distribución de probabilidad es su valor medio que, por otra parte, es el valor esperado [CUA-81]. Para simular el ruido en cada bin, se realiza un sorteo de una variable de Poisson de parámetro igual a su valor teórico (sin ruido, pero con las demás degradaciones) mediante las rutinas estándar de generación de números aleatorios encontradas, por ejemplo, en [PRE-92]. Dado que la dispersión de una distribución de

Poisson depende de la raíz cuadrada de su valor esperado, la variación del valor del píxel será porcentualmente más importante respecto el valor esperado cuanto menor sea éste.

3.2.7. Cálculo de la matriz de pesos

A fin de recapitular todo lo expuesto hasta ahora sobre la matriz de pesos, a continuación se describe el algoritmo implementado para su cálculo.

I. Reserva de memoria, lectura de los parámetros (tamaño del píxel, número de píxeles, ángulos de proyección, tipo de colimador) y del mapa de atenuación.

II. Para cada bin de la proyección en cada ángulo

a) Cálculo del rayo que incide en el centro del bin y de sus intersecciones con los píxeles de la imagen.

b) Para cada píxel de la imagen.

- Cálculo de la distancia lateral, distancia ortogonal del píxel al rayo.
- Cálculo de la distancia del píxel a la proyección.
- Cálculo de la gaussiana que se ajusta a la PSF correspondiente a esa distancia.
- Determinación del factor geométrico a partir de la gaussiana y la distancia lateral.
- Si el factor geométrico es mayor que un valor de corte
 - Cálculo del factor de atenuación a partir de las intersecciones del rayo con los píxeles y el mapa de atenuación.
 - Producto del factor geométrico con el factor de atenuación
 - Si el peso resultante es mayor que el valor de corte, guardar el peso y su posición dentro de la matriz. Con ello se consigue evitar el crecimiento excesivo de la matriz con pesos irrelevantes.

III. Guardar la matriz de pesos según la estructura que tiene definida.

3.2.8. Generación de las proyecciones

La simulación numérica se realiza mediante un programa que realiza los procesos descritos con anterioridad:

I. Lectura de la imagen a proyectar y de la matriz de pesos. Lectura de los parámetros de la simulación (número de realizaciones de ruido, número inicial para la serie de números aleatorios necesaria para el sorteo de las variables de Poisson, número de cuentas de la proyección).

II. Cálculo de las proyecciones mediante el producto de la imagen por la matriz de pesos.

III. Convolución con la SRF para la simulación de la dispersión.

IV. Cálculo del número de cuentas de las proyecciones. Ajuste del número de cuentas al deseado mediante el reescalado de las proyecciones.

V. Para cada realización de ruido:

a) Modificación del valor que inicializa las series aleatorias.

b) Simulación del ruido. Para cada bin de las proyecciones:

- Sorteo de una variable de Poisson de parámetro igual al valor del bin.

- Sustitución del valor del bin por el valor obtenido en el sorteo.

c) Corrección de dispersión por deconvolución con la SRF.

d) Grabación de las proyecciones en un archivo.

Si no se simula ruido, los pasos III y V-(c) se anulan, puesto que convolucionar y deconvolucionar con la misma SRF no altera la proyección inicial. En este caso, la simulación de la dispersión no tiene ningún efecto.

El proyector ha sido objeto de diversos controles para garantizar su correcta implementación. En primer lugar, se han simulado las proyecciones sin degradaciones de objetos de los que se podían calcular las proyecciones analíticamente (objetos definidos mediante la superposición de elipses- las proyecciones analíticas de una elipse pueden encontrarse en [KAK-84]) a fin de verificar los programas de proyección por comparación de las proyecciones obtenidas.

Posteriormente, se han proyectado sin ruido y sin atenuación imágenes tipo delta para comprobar las dimensiones de la PSF resultante. La atenuación se ha comprobado mediante la obtención analítica de proyecciones con atenuación uniforme y sin PSF ni ruido y su comparación con las proyecciones obtenidas mediante el simulador en las mismas condiciones. La validez de las aproximaciones realizadas en el simulador se obtiene con la corroboración de la coincidencia de los resultados obtenidos en simulaciones numéricas con los obtenidos con las proyecciones experimentales.

3.2.9. Estudios simulados

Han sido generadas gran cantidad de proyecciones con diferentes parámetros de adquisición de diversos modelos numéricos. De todos ellos se han obtenido diferentes realizaciones de ruido mediante diferentes sorteos en cada uno de los bin de las proyecciones. La estructura del simulador ha permitido generar proyecciones con ninguna, alguna o todas las degradaciones incluidas. De esta manera, se ha podido estudiar por separado el efecto de cada una de estas degradaciones en la imagen resultante, tanto si la degradación era corregida en la reconstrucción como si no. Además, se ha podido comparar la reconstrucción obtenida con el modelo original, lo que ha permitido evaluar objetivamente la calidad de la reconstrucción.

En los estudios numéricos simulados se ha utilizado principalmente los modelos numéricos reflejados en la Figura 3-4. El primero es una digitalización del modelo real disponible en una matriz de 64x64 píxeles. Se hace notar que esta imagen es binaria. Los bordes de los márgenes del objeto no tienen valores intermedios (grises) como correspondería si se digitalizara la imagen, sino que valen 0 o 1 según su valor teórico sea mayor o menor que 0'5. Esto se ha hecho así para que las regiones de interés no tuvieran los bordes difusos y se pudieran evaluar las diferentes

FDM con precisión. En contrapartida, se ha perdido parecido con el modelo real, sobre todo en los círculos de radio menor. El mapa de atenuación de este modelo se ha definido uniforme con $\mu=0.15 \text{ cm}^{-1}$, igual que el modelo real. El segundo modelo es la simplificación de una sección de tórax. Esta formado por una elipse de actividad uniforme, correspondiente a los tejidos blandos del tórax, dos regiones elípticas sin actividad, que simulan los pulmones, un aro de mayor actividad, que representa una sección del corazón, y dos círculos de actividad media que corresponden al esófago y columna vertebral. En este caso la atenuación no es constante en todo el objeto, sino que cada región tiene la atenuación del tejido que representa. En la Figura 3-4, junto a los modelos numéricos se muestran sus mapas de atenuación y la numeración con la que serán referidas las distintas regiones en la evaluación de las FDM.

En la Figura 3-5, se muestran los sinogramas del modelo de Jaszczak. Los 5 primeros están obtenidos mediante simulación y el último corresponde a una adquisición experimental del modelo real. El sinograma (a) corresponde a la proyección sin degradaciones del modelo numérico (proyecciones de los círculos negros superpuestas a la proyección del fondo uniforme, que es sinusoidal por estar el modelo ligeramente descentrado). En (b), se incluyen las degradaciones de atenuación y PSF. Se observa la difuminación de los contornos (debida a la PSF) y la disminución del efecto de los círculos negros en algunas proyecciones (debido a la atenuación). Los tres sinogramas siguientes corresponden a tres realizaciones de ruido de las proyecciones con atenuación, PSF y dispersión con 50 Kc (1 Kc=1.000 cuentas), 200 Kc y 800 Kc respectivamente. Se observa el aumento de ruido al disminuir el número de cuentas, así como una buena concordancia entre el modelo real con el modelo simulado correspondiente (200 Kc).

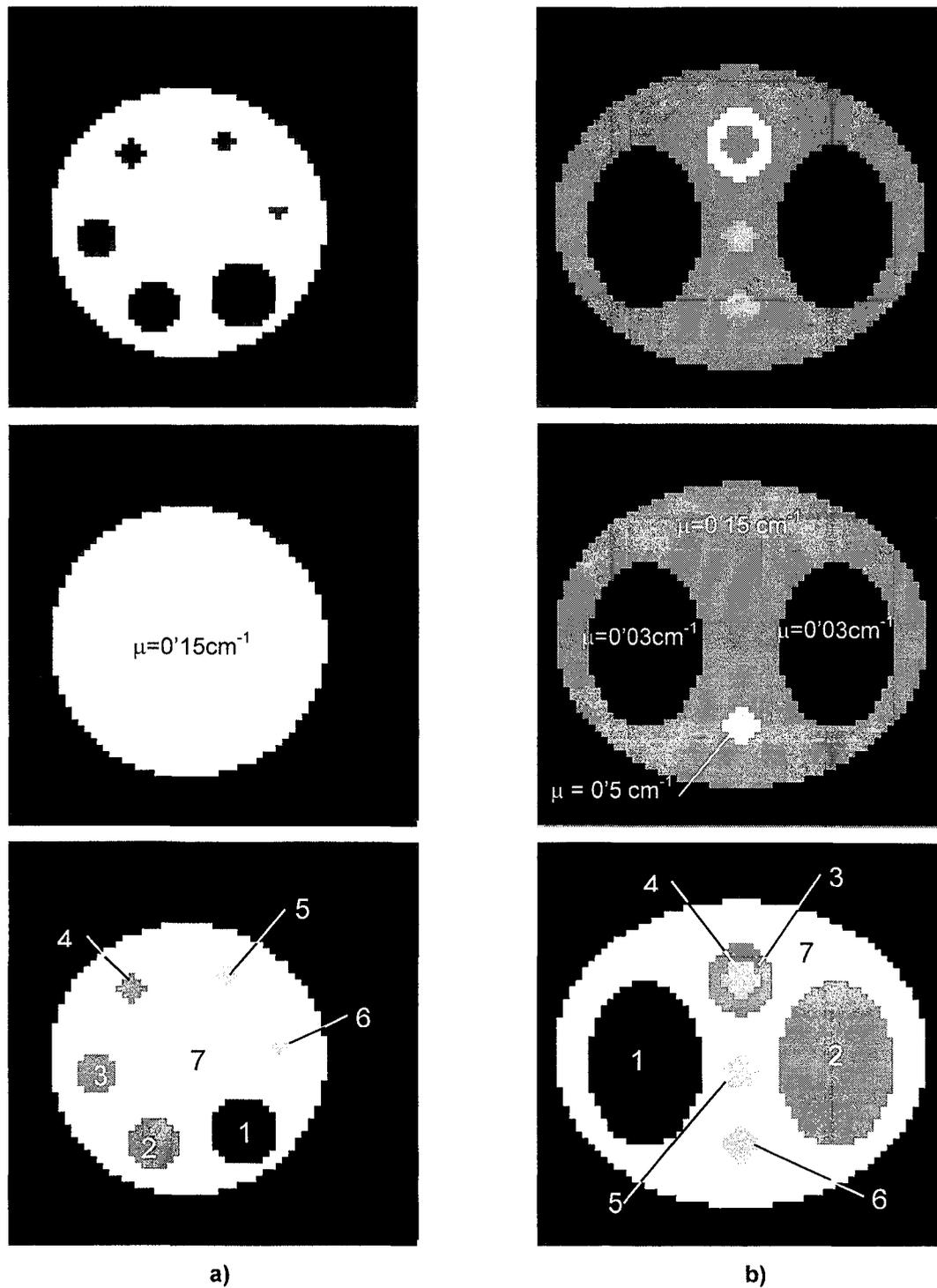


Figura 3-4 Principales modelos numéricos utilizados en las simulaciones. a) digitalización del modelo de Jaszczak a 64x64 píxeles, su mapa de atenuación y la numeración de las regiones de interés. b) modelo numérico que simula una sección del tórax, su mapa de atenuación y la numeración de las regiones de interés.

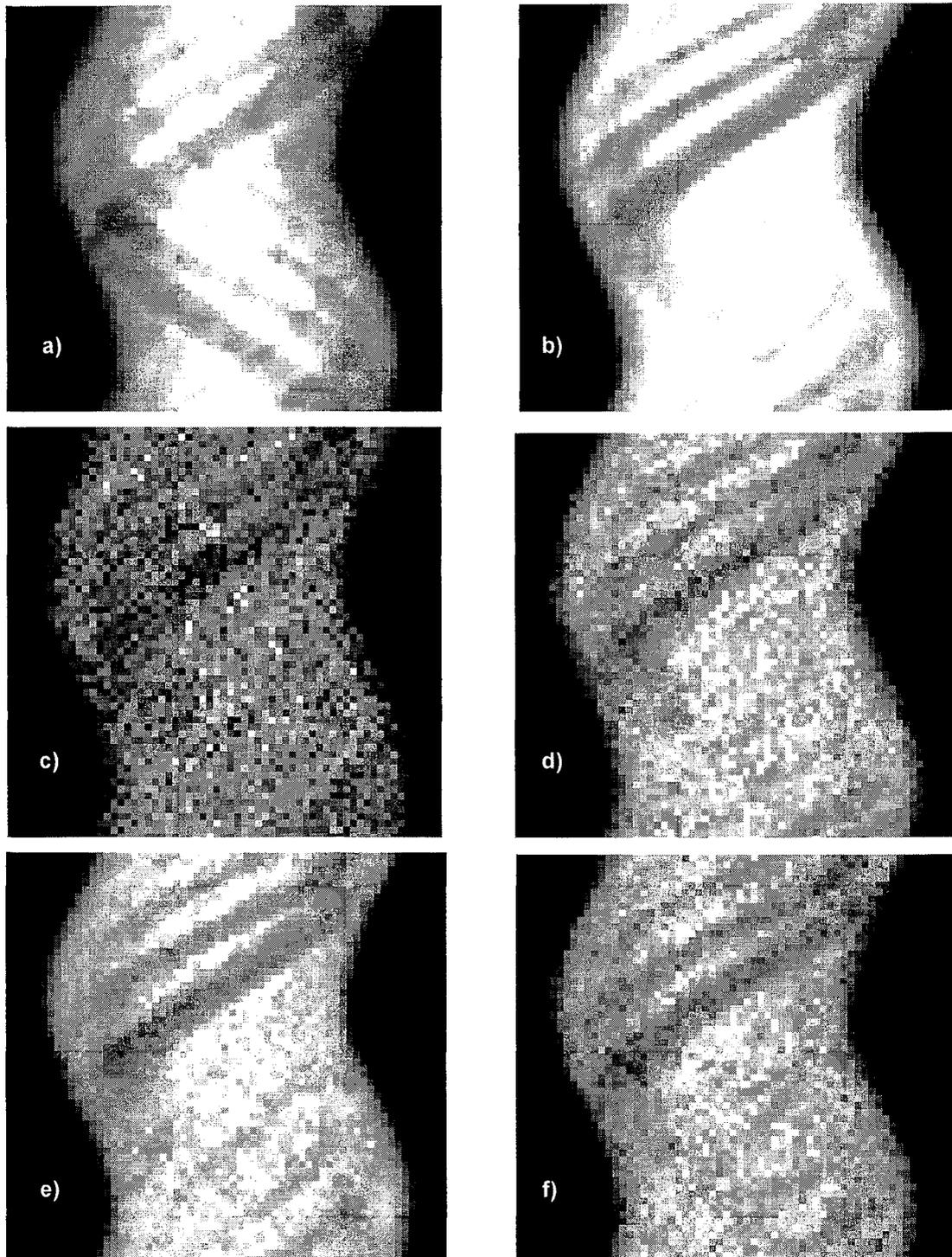


Figura 3-5. Aspecto del sinograma del modelo de Jaszczak. a) Proyecciones sin degradaciones. b) Proyecciones con degradación de atenuación y PSF. c) d) e) Proyecciones con atenuación, PSF y ruido (correspondiente a 50 Kc, 200 Kc y 800 Kc respectivamente). f) Proyecciones experimentales del modelo real (200 Kc).

3.3. El proceso de reconstrucción

En este punto se expone los rasgos comunes a todas las reconstrucciones realizadas, sea cual sea el método de reconstrucción empleado. Las consideraciones particulares de cada método están expuestas en los capítulos concernientes a esos métodos:

- Dada la gran cantidad de variantes de los métodos de reconstrucción, se han estudiado los algoritmos más genéricos de cada especie. Se ha procurado utilizar la menor cantidad posible de restricciones sobre los métodos para que los resultados fueran lo más generales posibles.
- Los estudios se han realizado sobre uno o dos modelos solamente. No se ha realizado una evaluación a fondo de la dependencia de los resultados con el modelo. Los resultados, por tanto, están vinculados al modelo. No obstante, la metodología de estudio de la dependencia de la calidad de la imagen respecto a los parámetros de la reconstrucción es general. Este procedimiento puede ser empleado para estudiar la reconstrucción óptima de cualquier modelo de que se disponga.
- Todas las proyecciones reconstruidas, tanto las simuladas numéricamente como las reales, han sido corregidas mediante deconvolución de dispersión utilizando la expresión (ec 3-4) con la SFR definida en (ec 3-2).
- Para realizar las reconstrucciones y demás cálculos se ha utilizado un ordenador HP9000/720 workstation (57 MIPS, 17 MFLOPS). Como lenguaje de programación se ha empleado el C sobre HP-UNIX.
- A la hora de programar los métodos de reconstrucción, en todos los casos la imagen se ha asignado a vectores *float* con precisión sencilla (4 bytes por píxel). Aunque visualmente la precisión que ofrecen los vectores *char* (1 byte por píxel) o *short int* (2 bytes por píxel) es suficiente, en los cálculos se ha utilizado más precisión para permitir una evolución continua de la imagen reconstruida en las diferentes iteraciones. El uso de precisión doble se desestimó porque aumenta el

tiempo de cálculo, consume más memoria y no aporta mejoras sensibles a la reconstrucción.

- En los métodos de reconstrucción y corrección iterativos, para poder evaluar la evolución de las imágenes respecto al número de iteraciones empleadas, a cada iteración se ha grabado la imagen. Posteriormente, sobre cada una de las imágenes que forman estas secuencias se ha calculado el valor de las diferentes FDM. Esto ha permitido obtener su variación en función del número de iteraciones.
- Dada la naturaleza aleatoria del ruido, para poder asegurar que los resultados son lo más generales posibles y desligar las conclusiones de la realización particular de ruido, todos los cálculos han sido hechos sobre 10 realizaciones diferentes de ruido y se han obtenido los promedios y la dispersión. En algunos casos puntuales en que la dispersión resultaba elevada, se han llegado a promediar 100 realizaciones de ruido diferente.
- El hecho de expresar los resultados con promedios no implica que no se haya estudiado el comportamiento de los métodos en realizaciones concretas de ruido. En los casos más significativos, además de evaluar los promedios, se ha evaluado el comportamiento singular de las diferentes realizaciones de ruido para determinar la existencia o no de anomalías en los resultados particulares.
- Para visualizar las imágenes resultantes, se han convertido a formato 1 byte o 2 bytes. En el primer caso se han normalizado de manera que su valor máximo fuera 255 (1 byte puede expresar valores de 0 a 255).

3.4. La evaluación de imágenes mediante funciones de mérito

El primer problema que aparece cuando se quiere valorar una imagen reconstruida, es que difícilmente su calidad será óptima en todos los aspectos. Por ejemplo, suele ocurrir que una imagen con buen contraste tiene una importante presencia de ruido y una imagen sin ruido suele

tener los contornos muy difuminados. Dependiendo de la finalidad de la imagen, una característica u otra puede ser aceptable o no. Por ejemplo, si se quiere detectar lesiones de tamaño pequeño, la presencia de ruido será muy molesta, con lo que será preferible imágenes más suaves, pero si se quiere cuantificar niveles de actividad, será preciso disponer de un buen contraste. La evaluación de la imagen depende del propósito para el que ha sido adquirida [HAN-90] [HER-91a].

Existen, básicamente, dos procedimientos de valoración de los métodos de reconstrucción: los métodos subjetivos y el cálculo de funciones de mérito sobre las imágenes reconstruidas. En el primer caso, las imágenes obtenidas en las diferentes pruebas se presentan a un número significativo de observadores cualificados que valoran diferentes aspectos de la misma, como puede ser la detectabilidad de una zona de diferente actividad, el aspecto general de la imagen, el ruido, etc. Con sus resultados se construyen las denominadas curvas ROC (Receiver Operating Characteristic) con las que se determina el mejor método o parámetros de reconstrucción en cada caso [DEB-88] [HAN-90] [GUI-91].

La valoración de los resultados puede hacerse también mediante funciones que cuantifiquen las características que determinan la calidad de la imagen. Estas funciones son denominadas figuras o funciones de mérito (FDM). Han sido propuestas diferentes FDM para evaluar la calidad de las imágenes en [DEB-88] [HER-89] [HER-91b] [MILL-92], [KIN-94] o [MUR-94]. En este trabajo se empleará únicamente este método, pues en todos los casos se conoce de antemano la imagen ideal que debiera dar la reconstrucción, lo que permite el uso de muy diversas FDM. Las FDM utilizadas en este trabajo pueden clasificarse en tres categorías, las referentes a la globalidad de la imagen, las referentes a una o varias regiones de interés de la imagen y las funciones estadísticas, utilizadas fundamentalmente para evaluar imágenes reconstruidas con métodos estadísticos.

3.4.1. Figuras de mérito globales

Estas FDM cuantifican el parecido de la imagen reconstruida con el modelo original. Las funciones utilizadas son:

- **Coefficiente de correlación (CC)** entre la reconstrucción y la imagen original. Está definido por la expresión:

$$CC = \frac{\sum_i q_i \cdot q_i^{REF} - M^2 \cdot VM \cdot VM^{REF}}{\sqrt{\sum_i q_i^2 - M^2 \cdot VM^2} \cdot \sqrt{\sum_i (q_i^{REF})^2 - M^2 \cdot (VM^{REF})^2}}$$

donde VM significa valor medio (suma de valores dividido por el número de píxeles) y el superíndice ^{REF}, designa a la imagen de referencia (imagen original). El coeficiente de correlación tiene un valor máximo de 1 correspondiente al caso de que ambas imágenes coincidan exactamente. No obstante, es preciso hacer notar que esta función es invariante por cualquier transformación lineal que afecte a la imagen entera, por ejemplo, sumarle un mismo valor a todos los píxeles de la imagen o multiplicar el todos los píxeles de la imagen por un mismo factor. Esto refleja, que CC es alto cuando ambas imágenes se parecen en forma y los valores de los píxeles se mantienen relacionados con una función lineal, aunque no coincidan en valor exactamente.

3.4.2. Figuras de méritos sobre regiones de interés

Estas FDM se utilizan para valorar los detalles de la imagen y la correcta relación entre diferentes partes de la misma. Para su uso, es preciso contar con una máscara de la imagen que defina las diferentes regiones. Es caso de estudios simulados, la máscara se obtiene a partir de la imagen original. Para estudios reales, la máscara puede ajustarse en una imagen reconstruida o definirse a través del conocimiento de la geometría del modelo físico empleado. Las FDM de este tipo utilizadas son:

- **Contraste** (*CON*) de una región 1 sobre otra región 2 que la incluye. Definido por la expresión:

$$CON = \frac{|VM1 - VM2|}{|VM1 + VM2|}$$

donde *VM* es el valor medio dentro de la región correspondiente. El contraste, así definido, oscila entre 0 (una región contraste nulo equivale a decir que tiene el mismo valor que su periferia y, por tanto no es distinguible) y el valor teórico correspondiente a los valores exactos del modelo. Para regiones donde el valor teórico es 0, el contraste máximo es 1.

- **Coefficiente de variación** (*CV*) de una región 1, definido por

$$CV = \frac{\sigma_1}{VM1} \cdot 100$$

donde σ_1 es la desviación estándar del valor de los píxeles de la zona 1. Para regiones que tienen un valor uniforme, *CV* es cero.

- La **relación señal-ruido** (*SNR: Signal to Noise Ratio*) de una región 1 sobre otra región 2 que la incluye, definida por:

$$SNR = \frac{|VM1 - VM2|}{\sigma_2}$$

Es decir, *SNR* compara las diferencias de valores medios de dos zonas con el ruido de la zona envolvente. Una *SNR* baja indica que una región no es diferenciable de las fluctuaciones de la zona que la incluye. Por tanto, se deseará que el valor de esta FDM sea lo máximo posible.

3.4.3. Figuras de mérito estadísticas

Otra manera de evaluar imágenes es realizar algún tipo de test de fiabilidad estadística. Estas FDM se utilizan, sobre todo, para evaluar imágenes reconstruidas con métodos estadísticos [VEK-87] [COA-91] [HUD-94], aunque igualmente pueden ser empleadas en otros casos. Las FDM estadísticas utilizadas en este trabajo son:

- **Verosimilitud directa** (*DL: Direct Likelihood*) La verosimilitud $L(X_1, \dots, X_n)$ de una muestra de una variable aleatoria es el valor de la función de densidad cuando las variables aleatorias tienen el valor que indica la muestra [CUA-81] [CUA-96]. Para el caso de reconstrucción tomográfica de imágenes, según se explica con detalle en el capítulo 6, las proyecciones son una realización de las variables aleatorias. Por tanto, la verosimilitud es la probabilidad las proyecciones condicionada al valor de los píxeles de la imagen reconstruida. Da una medida de la probabilidad de que una imagen reconstruida hubiera generado las proyecciones de que se dispone. Por tanto, es deseable que adquiera el valor más alto posible (valores entre 0 y 1). Considerando cada bin de la proyección p_j como una variable aleatoria de Poisson,

$$L(\mathbf{q}) = P(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \prod_{j=1}^{M \times N} e^{-\sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} \cdot q_i} \cdot \frac{\left[\sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} \cdot q_i \right]^{p_j}}{p_j!}$$

Frecuentemente, en lugar de la verosimilitud, se calcula su logaritmo, pues su evaluación resulta más sencilla y, por ser el logaritmo una función monótona creciente, el valor en que alcanza su máximo coincide con el de la verosimilitud. Algunos autores, incluyen directamente el logaritmo en la definición de la verosimilitud [HUD-94]. En este trabajo se utiliza esta definición. Entonces, su valor oscila entre $-\infty$ y 0 y su expresión es:

$$DL = \sum_{j=1}^{M \times N} \left(- \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} q_j + p_j \cdot \log \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} q_j - \log p_j! \right)$$

- **Verosimilitud cruzada** (*CL: Cross Likelihood*). Cuando se dispone de dos conjuntos de proyecciones, se puede calcular la probabilidad condicionada de obtener el segundo conjunto de proyecciones con la imagen reconstruida a partir del primer conjunto de proyecciones. Análogamente a *DL*, se calcula su logaritmo. Su expresión es:

$$CL = \sum_{j=1}^{M \times N} \left(- \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} q_i + p_j^B \cdot \log \sum_{i=1}^{M \times M} A_{ji} q_i - \log p_j^B! \right)$$

donde el superíndice 'B' hace referencia a que se trata del segundo conjunto de proyecciones.

4. La retroproyección filtrada

La retroproyección filtrada (FBP) es el método de reconstrucción tomográfica que, por su sencillez y facilidad de aplicación, es utilizado de manera estándar en los equipos convencionales de gammagrafía. Su aplicación a ECT está descrita por primera vez en [SHE-74].

En el planteamiento de la FBP, la reconstrucción de la imagen a partir de las proyecciones se consigue por inversión de la transformada de Radon por medio de un algoritmo basado en el teorema de la sección central. La fórmula de inversión resultante es teóricamente exacta para imágenes y proyecciones analíticas. No obstante, la aplicación de este método de reconstrucción en casos reales supone asumir una serie de aproximaciones. El uso de dichas aproximaciones y la presencia de las degradaciones hace que, en general, las imágenes obtenidas sean de baja calidad. Existen, no obstante, diferentes métodos de corrección o compensación de las degradaciones, ya sea sobre las proyecciones antes de la reconstrucción o sobre la imagen una vez reconstruida. En este capítulo, se expone la formulación matemática e implementación de la FBP y el estudio de la calidad de la imagen en función de los parámetros del filtro empleado y el número de iteraciones de un método iterativo de corrección de la atenuación.

4.1. Formulación matemática.

En primer lugar, se recuperan algunos resultados del Análisis Funcional que serán precisos en el desarrollo de la FBP. Pueden encontrarse resúmenes de esta teoría, por ejemplo, en [GON-77], [BAR-81], [LEW-83] o [HER-87]. A continuación, se expone la teoría que permite construir el algoritmo de la FBP y, finalmente, se muestra la implementación matemática de las distintas técnicas de compensación de las degradaciones.

4.1.1. Filtros.

Se entiende por filtrado de una función $f(x)$ mediante la función de filtro lineal espacialmente invariante $g(x)$ a la función obtenida de convolucionar la función original con la función de filtro

$$\hat{f}(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cdot g(x - \alpha) d\alpha$$

Según el teorema de convolución, esto es equivalente a la modificación de su espectro de frecuencias con la transformada de Fourier de la función de filtro, ya que

$$\text{FT}(f(x) * g(x)) = \text{FT}(f(x)) \cdot \text{FT}(g(x)) = F(u) \cdot G(u)$$

es decir, la transformada de Fourier de una convolución es el producto de transformadas de Fourier de las dos funciones. Por tanto, se puede filtrar una función mediante el paso al espacio de las frecuencias:

$$\hat{f}(x) = f(x) * g(x) = \text{FT}^{-1}(F(u) \cdot G(u))$$

A su vez, el filtrado sucesivo por dos o más filtros puede hacerse simultáneamente por la propiedad asociativa de la convolución:

$$\hat{f}(x) * h(x) = \text{FT}^{-1}(F(u) \cdot G(u) \cdot H(u)) \quad (\text{ec- 4-1})$$

4.1.2. Teorema de la sección central

El teorema de la sección central relaciona la transformada de Fourier unidimensional de las proyecciones con la transformada bidimensional del objeto. En efecto, sea $q(x,y)$ una imagen y $Q(u,v)$ su transformada de Fourier. Se tienen las siguientes relaciones:

$$Q(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot \exp(-2\pi i(ux + vy)) dx dy \quad (\text{ec-4-2})$$

$$q(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(u, v) \cdot \exp(2\pi i(ux + vy)) du dv$$

Sea $S_{\theta}(w)$ la transformada de Fourier unidimensional de la proyección en la dirección θ .

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) \cdot \exp(-2\pi i wt) dt \quad (\text{ec-4-3})$$

A partir de estas relaciones, se puede formular el siguiente teorema:

Teorema de la sección central: Sea $Q(w, \theta)$ el valor de $Q(u, v)$ a lo largo de la línea que forma un ángulo θ con el eje u . Entonces:

$$Q(w, \theta) = S_{\theta}(w) \quad (\text{ec-4-4})$$

La demostración para el ángulo de proyección 0 es inmediata. Basta con expresar $Q(u, 0)$ en función de la proyección:

$$\begin{aligned} Q(u, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \cdot \exp(-2\pi i ux) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dy \right] \cdot \exp(-2\pi i ux) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_0(t) \exp(-2\pi i ut) dt = S_0(u) \end{aligned}$$

ya que la integral entre corchetes de la segunda igualdad corresponde al valor de la proyección para un ángulo igual a cero. En la última igualdad se ha sustituido la variable muda x por la variable t para que la expresión coincidiera con (ec-4-3).

La generalización a un ángulo cualquiera, puede hacerse mediante un cambio de las coordenadas cartesianas a otras giradas un ángulo θ .

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(s, t) ds$$

con lo que

$$\begin{aligned} S_\theta(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) \cdot \exp(-2\pi i wt) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} q(t, s) ds \right] \cdot \exp(-2\pi i wt) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(t, s) \cdot \exp(-2\pi i wt) dt ds \\ &= FT(q(t, s))_{s=0} = Q(w, \theta) \end{aligned}$$

ya que $s=0$ corresponde a la recta que pasa por el origen en la dirección θ .

4.1.3. Reconstrucción tomográfica por retroproyección.

A partir del teorema de la sección central puede implementarse un algoritmo de reconstrucción tomográfica. Con este propósito, se escribe la igualdad (ec-4-2) expresando las variables (u, v) del espacio de frecuencias en coordenadas polares (w, θ) :

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(u, v) \cdot \exp(2\pi i(ux + vy)) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} Q(w, \theta) \cdot \exp(2\pi i w \cdot (x \cos \theta + y \text{sen } \theta)) w dw d\theta \end{aligned}$$

donde la w que multiplica a los diferenciales en la última expresión proviene del jacobiano del cambio de variables. Si se cambian los límites de integración de las variables polares, teniendo en cuenta que $Q(-w, \theta) = Q(w, \theta + \pi)$, y utiliza el hecho que $t = x \cos \theta + y \sin \theta$, esta última expresión puede escribirse como:

$$q(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} Q(w, \theta) \cdot \exp(2\pi i w \cdot t) |w| dw d\theta$$

Haciendo uso del teorema de la sección central

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(w) \cdot \exp(2\pi i w \cdot t) |w| dw \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \hat{P}_\theta(t) d\theta = \int_0^\pi \hat{P}_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \end{aligned} \quad (\text{ec-4-5})$$

donde $\hat{P}_\theta(t)$ corresponde a la expresión entre corchetes y es el filtrado de la proyección mediante un filtro de rampa¹. Esta última igualdad, indica que puede obtenerse la imagen a partir de la integración de la proyección filtrada. Al proceso de sumar para todos los ángulos y sobre todos los puntos del rayo el valor de la proyección se le denomina retroproyección.

4.1.4. Compensación de las degradaciones.

Las fórmulas hasta ahora deducidas, son exactas para proyecciones ideales. Al aplicarlas a proyecciones de SPECT, debido a las diferentes degradaciones, el resultado es de baja calidad. A continuación, se describe cómo puede mejorarse la calidad la reconstrucción resultante por medio de técnicas de compensación de las degradaciones.

¹ Se conoce como filtro de rampa al filtro cuya descomposición espectral es el valor absoluto de la recta identidad $H(u) = |u|$.

Corrección del ruido mediante filtros paso-baja.

En ECT, se admite que el ruido es blanco, es decir, que tiene una descomposición espectral uniforme² [BAR-81] [ROS-95a]. Dado que en las imágenes con que se trabaja en SPECT las componentes de baja y media frecuencia tienen mucho más peso que las de alta frecuencia, es en la alta frecuencia donde el ruido predomina sobre la señal. El uso del filtro de rampa amplifica este fenómeno al potenciar las altas frecuencias, provocando la existencia de un ruido en forma de picoteado sobre las reconstrucciones. La principal estrategia para limitar el ruido en la reconstrucción es filtrar las proyecciones con un filtro que reduzca las componentes de alta frecuencia (filtro paso-baja). La inevitable reducción de las altas frecuencias de la imagen producida en el filtrado disminuye la definición de la imagen (suavizado y fenómeno de Gibbs en los contornos) [GON-77]. Cuanto mayor sea la reducción de las altas frecuencias menos importancia tendrá el ruido, pero más suavizada resultará la reconstrucción. En cada caso debe ser determinado el filtrado que proporcione la relación deseada entre el nivel de ruido y la suavidad de la imagen.

Diversos autores han propuesto modificaciones del filtro de rampa para tratar el problema del ruido. Generalmente, estos filtros pueden ajustarse a cada situación mediante uno o más parámetros, de forma que pueda decidirse las características del filtrado. Se ha de hacer notar que la utilización del filtro de rampa modificado equivale a un doble filtrado, en primer lugar por el filtro de rampa, necesario para la FBP, y en segundo lugar, con un filtro paso-baja (ec 4-1). Es por ello que todos los filtros que aparecen a continuación están multiplicados por el filtro de rampa, y

² Suponer que el ruido es blanco es aproximadamente equivalente a suponer que el ruido en cada bin es independiente (no está correlacionado) respecto el de los otros bins [BAR-81].

ocasionalmente por otros factores, y representados con dicho filtro de referencia. En un abuso de lenguaje, se designan los filtros resultantes con el nombre del filtro paso-baja utilizado. En [PUC-97], hay un extenso sumario de los diferentes filtros utilizados en las principales gammacámaras del mercado. Los filtros más usuales también están descritos en [GON-77] [HER-87] [APE-88] o [TSU-94]. Son:

- Filtro de Shepp-Logan, definido en el espacio de las frecuencias por la expresión:

$$H(w) = |w| \cdot \text{sinc}\left(\frac{w}{2w_{max}}\right)$$

donde la función sinc(x) está definida por:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x}$$

y w_{max} es la frecuencia máxima (frecuencia de Nyquist). En la Figura 4-1 se puede observar su perfil frente al del filtro de rampa. El filtro de Shepp-Logan tiene una resolución similar a la del filtro de rampa pero reduce la amplificación del ruido en las altas frecuencias.

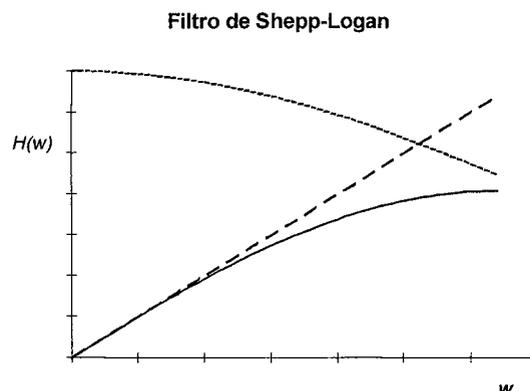


Figura 4-1. Filtro de Shepp-Logan (línea continua) obtenido al multiplicar el filtro de rampa (línea discontinua) con un filtro paso-baja (línea puntos). Este último filtro está representado a una escala diferente (valor máximo igual a 1)

- Filtro de Butterworth, definido por la expresión:

$$H(w) = |w| \cdot \frac{(1 + a \cdot |w|)}{\sqrt{1 + \left(\frac{|w|}{b \cdot w_{max}}\right)^c}}$$

El perfil de este filtro está controlado por tres parámetros, el parámetro de resolución a ($0 \leq a < 0.9$), la frecuencia de corte b y el orden del filtro c . El primero de los parámetros sirve para potenciar las frecuencias de la proyección que resultan disminuidas en la adquisición a causa de la respuesta del detector. Dado que el efecto de este parámetro es de difícil predicción, suele tomar el valor 0. Los otros dos son responsables de la suavidad del filtro. Su variación da una flexibilidad muy grande para crear filtros con diferentes propiedades. En la Figura 4-2 se ve la variación del filtro de Butterworth en función de sus parámetros.

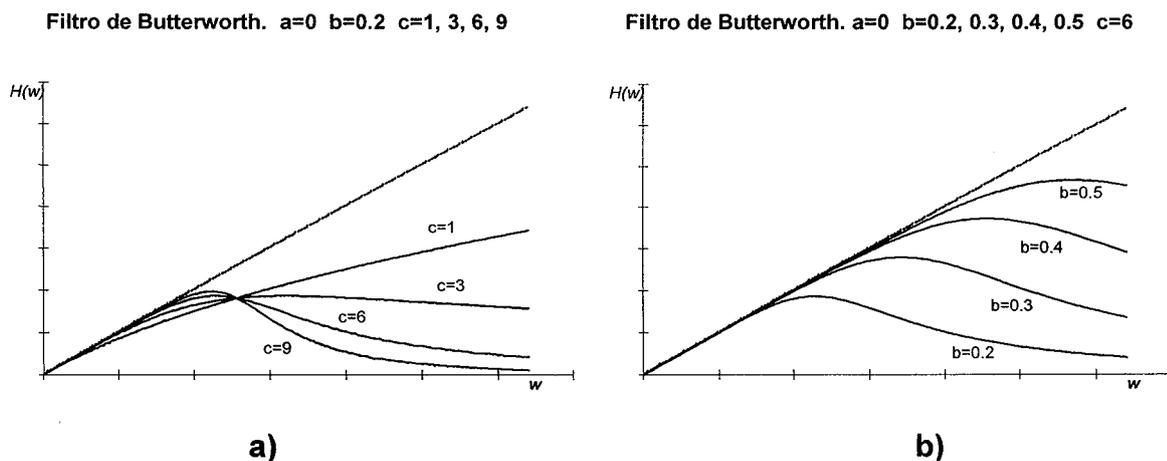


Figura 4-2. Variación del filtro de Butterworth al variar sus parámetros: a) variación respecto el parámetro c , b) variación respecto el parámetro b .

- Filtro de Hanning, definido por la expresión:

$$H(w) = |w| \cdot (1 + a \cdot |w|) \cdot \left(0.5 + 0.5 \cdot \left(\cos \left(\pi \cdot \frac{|w|}{w_{max}} \right)^b \right)^c \right)$$

Este filtro depende de tres parámetros análogos a los del filtro de Butterworth. Su variación con dichos parámetros queda reflejada en la Figura 4-3.

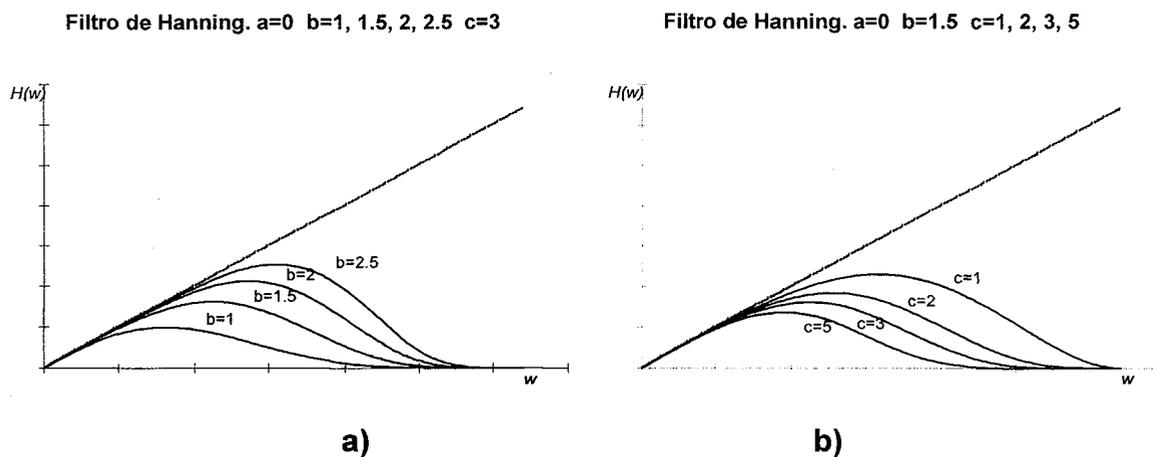


Figura 4-3. Variación del filtro de Hanning en relación a sus parámetros. a) variación respecto el parámetro b. b) variación respecto el parámetro c.

Corrección de la PSF. Filtro de Metz

La corrección de la PSF dependiente del punto emisor (distancia emisor-detector) no es abordable en el algoritmo de la FBP. Para tratar la PSF, se ha de prescindir de su dependencia con la distancia y suponer que es la misma para cada punto emisor (se toma una PSF promedio, en general la correspondiente al centro de la imagen). Aunque la compensación del efecto de la PSF puede realizarse por filtrado de la imagen reconstruida,

el método más común es la deconvolución sobre las proyecciones de esta PSF promedio.

El filtro de Metz está definido por la expresión:

$$H(w) = |w| \cdot \frac{1 - (1 - S^2(w))^c}{S(w)}$$

con

$$S(w) = C \cdot e^{-k \cdot w^2}$$

siendo C y k dos constantes que determinan la PSF promedio. Es la composición de tres filtros: el filtro de rampa, un filtro paso-baja para reducir el ruido y el filtro inverso de la PSF promedio (Figura 4-4a). La Figura 4-4b muestra la variación del filtro de Metz con el exponente c .

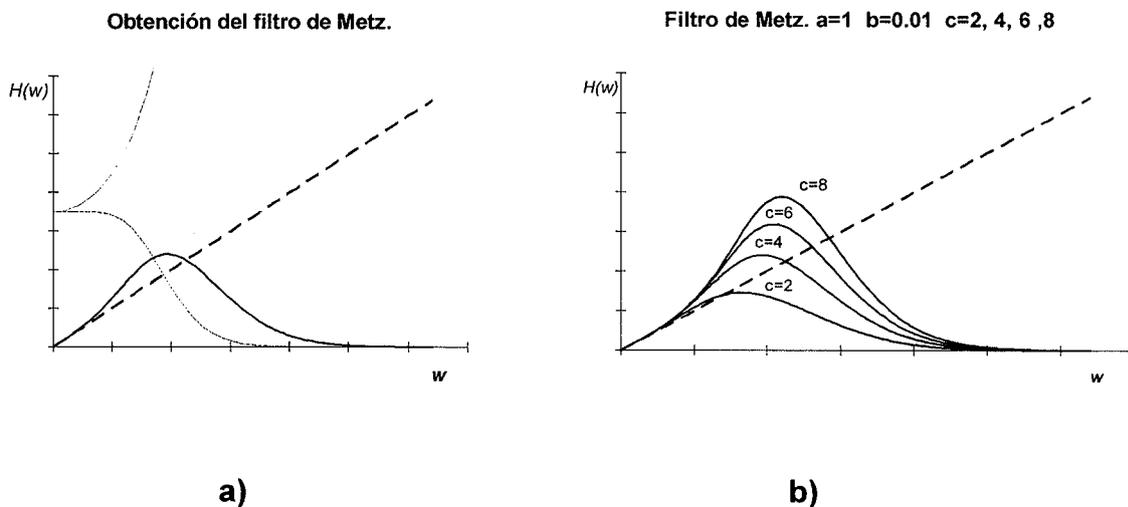


Figura 4-4. a) Obtención del filtro de Metz (línea gruesa) como producto de tres filtros: el filtro de rampa (línea discontinua), un filtro paso-baja (línea fina) y la inversa de la PSF (línea de puntos). Los dos últimos filtros están escalados a un valor máximo de 2. b) Variación del filtro de Metz con el parámetro c

Corrección de la atenuación. El método de Chang.

El efecto de la atenuación es la disminución de cuentas en las proyecciones. La retroproyección de dichas proyecciones produce una imagen que, a su vez, contiene un menor número de cuentas que la imagen real. El déficit de cuentas no tendría mayor trascendencia si fuera uniforme en toda la reconstrucción. Sin embargo, está más acentuado en los píxeles centrales de la imagen que en los periféricos [GEL-88]. La rectificación de este fenómeno, importante para la correcta cuantificación e interpretación de las imágenes, ha sido objeto de numerosos estudios. Los diferentes métodos de corrección desarrollados pueden clasificarse básicamente en tres grupos: pre-corrección (corrección sobre las proyecciones mediante filtrado) [GLI-91] [KIN-91] [MAZ-93], corrección en la reconstrucción mediante la modificación del algoritmo FBP (*WFBP-Weighted Filtered Back Projection*) u otros métodos [BEL-79] [CEN-79] [GUL-81] [GUL-85] [MAN-88a] [MAN-88b] [SIN-88] [ZEN-91] [PAN-96] [WEL-97] y post-corrección (corrección en la imagen reconstruida) [CHA-78] [CHA-79] [WAL-81] [MAN-87] [TSU-89] [PAN-93].

De entre los métodos de post-corrección destaca el método desarrollado por Chang [CHA-78] [CHA-79], que es el método empleado en este trabajo. La estrategia utilizada en este método, para paliar el déficit de cuentas en la reconstrucción es la normalización del número de cuentas en cada píxel con un factor que compute, en promedio, la atenuación de los rayos emitidos desde dicho píxel. Para la deducción de la fórmula de corrección en el método de Chang, en primer lugar, se proyecta y retroproyecta una imagen tipo δ en un medio con atenuación uniforme, sin tener en consideración otras degradaciones. La imagen puede expresarse mediante:

$$q(x, y) = A\delta(x - x_0, y - y_0)$$

Siendo A su intensidad y (x_o, y_o) su ubicación. Si se sustituye esta imagen en la expresión (ec 2-9):

$$P_\theta(t) = A \delta(x_o \cos \theta + y_o \sin \theta - t) \cdot \exp(-\mu \cdot l_\theta)$$

Su transformada de Fourier es:

$$S_\theta(w) = A \cdot \exp(2\pi i \cdot (x_o \cos \theta + y_o \sin \theta)) \cdot \exp(-\mu \cdot l_\theta)$$

La proyección para el ángulo θ filtrada con el filtro de rampa vale:

$$\hat{P}_\theta(t) = \int_{w_{max}}^{w_{max}} A \cdot \exp(-2\pi i w \cdot (x_o \cos \theta + y_o \sin \theta - t)) \cdot \exp(-\mu l_\theta) w \cdot dw$$

donde la integración está limitada por los valores máximos de la frecuencia. La retroproyección de esta expresión es:

$$q(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{w_{max}}^{w_{max}} A \cdot \exp(2\pi i w ((x - x_o) \cos \theta + (y - y_o) \sin \theta)) \cdot \exp(-\mu l_\theta) w \cdot dw \cdot d\theta$$

que en el punto (x_o, y_o) es:

$$\begin{aligned} q(x_o, y_o) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{w_{max}} A \cdot \exp(-\mu l_\theta) w \cdot dw \cdot d\theta \\ &= \pi w_{max}^2 A \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-\mu l_\theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

Se define el factor de corrección para el punto (x_o, y_o) como el valor que se obtendría en el caso de que no hubiera atenuación ($\mu=0$) dividido por el calculado cuando hay atenuación:

$$c(x_0, y_0) = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-\mu l_\theta) d\theta}$$

que cuando se utiliza funciones digitalizadas es:

$$c_k = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(-\mu l_{\theta_i}^k)}$$

donde $l_{\theta_i}^k$ es la distancia desde el píxel k hasta el extremo de la imagen en el ángulo θ_i y el sumatorio se extiende a las N proyecciones.

Una vez deducida para una imagen puntual, la corrección de una imagen cualquiera se consigue calculando estos coeficientes para todos los puntos de la imagen (una imagen cualquiera es la suma de imágenes puntuales). La imagen es multiplicada, píxel a píxel, por el factor correctivo correspondiente. La compensación en una imagen no puntual mediante este procedimiento es aproximada ya que en un bin de la proyección intervienen diferentes píxeles de la imagen, cada uno con una atenuación distinta. Si el mapa de atenuación no es uniforme, la exponencial de esta última expresión debe sustituirse por:

$$c_k = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=k}^{j_{\max}} \exp(-\mu_j l_{j\theta_i})} \quad (\text{ec- 4-6})$$

donde en el segundo sumatorio sólo se suma para los píxeles incluidos en el rayo que parte del píxel emisor y llega al detector. $l_{j\theta_i}$ es la longitud de la intersección del rayo con el píxel j -ésimo (Figura 4-5) y puede calcularse fácilmente con el algoritmo descrito en [SID-85].

El resultado después de multiplicar la imagen por estos factores de corrección mejora los resultados de la reconstrucción, aunque, a veces, no suficientemente. Esto ocurre generalmente cuando el mapa de atenuación no es uniforme en todo el objeto. Entonces, es posible aplicar este método iterativamente. Para ello se debe disponer de un proyector que nos permita obtener las proyecciones resultantes de la imagen reconstruida. Estas proyecciones calculadas se contrastan con las originales. La diferencia entre ambas es tomada como una nueva proyección que se reconstruye y se corrige al igual que la imagen original (filtro de Metz y Chang). Esta segunda reconstrucción (imagen diferencia) se suma a la primera obteniéndose una segunda imagen. El proceso puede repetirse tantas veces como sea preciso para la obtención de una imagen de calidad.

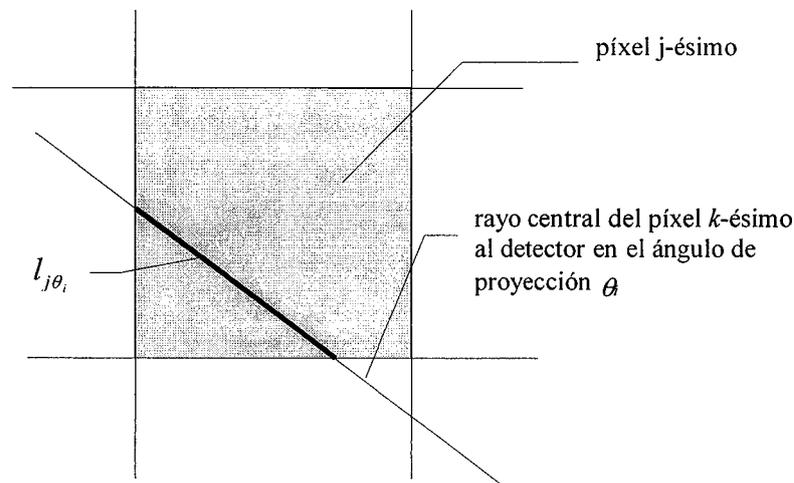


Figura 4-5. Intersección de un rayo con un píxel

4.1.5. Implementación de la FBP.

Según la expresión (ec 4-5), la imagen puede obtenerse por retroproyección de la proyección filtrada mediante un filtro de rampa. Parte de las degradaciones pueden ser corregidas de una manera aproximada, ya sea *a priori* sobre las proyecciones, mediante un filtrado,

o, *a posteriori*, sobre la imagen. En este trabajo se utilizará un filtro de Metz para compensar el ruido y la PSF y el método de Chang iterativo para compensar la atenuación. Estos son los métodos de corrección más comunes y con mejores resultados. Las proyecciones se supondrán corregidas de antemano de dispersión. En caso contrario, también podría incluirse esta corrección en el filtro.

En la implementación numérica del algoritmo han de tenerse en cuenta una serie de consideraciones:

- Las funciones están discretizadas en una serie de puntos equidistantes. Por tanto las expresiones integrales deben sustituirse por sumatorios y la transformada de Fourier por la transformada de Fourier discretizada (se emplea el algoritmo FFT: *Fast Fourier Transform*, descrito, por ejemplo en [GON-77] o en [PRE-92]).
- El uso de la transformada de Fourier discreta para calcular convoluciones plantea un problema. La transformada de Fourier discreta de la imagen discretizada no coincide con la discretización de la transformada continua de la imagen [BAR-81]. Es preciso orlar la imagen y las proyecciones unidimensionales con ceros (en este trabajo se han añadido tantos ceros como píxeles de la imagen), antes de proceder a su transformación de Fourier, sino la hipótesis de periodicidad de la TF produce la aparición de solapamientos.
- La retroproyección en el caso discreto presenta, también, alguna particularidad. El valor del bin j -ésimo de las proyecciones debe repartirse por todos los píxeles de la imagen que contribuyen al rayo-suma que incide en ese píxel. El hecho que el rayo no pase por los centros de los píxeles implica la utilización de una interpolación para repartir el valor de la proyección a los píxeles adyacentes al rayo. La interpolación utilizada es la lineal.

4.1.6. El algoritmo IFBP.

A continuación, a modo de compendio de lo expuesto hasta el momento, se describe el algoritmo de la FBP con corrección iterativa de la atenuación por el método de Chang. Los pasos de los que consta son:

I. Inicialización

- a) La imagen se inicializa a cero. $q=0$.
- b) Mediante el mapa de atenuación del objeto se calcula los factores de corrección de cada píxel de la imagen (imagen de corrección).

II. Reconstrucción mediante FBP.

- a) Se filtran las proyecciones. El filtrado se realiza con el paso al espacio de frecuencias, producto por la transformada del filtro y regreso mediante la transformada inversa a las componentes espaciales.
- b) Cada bin de la proyección filtrada se retroproyecta, es decir, se distribuyen las cuentas del mismo a lo largo de todo el rayo que incide en ese bin. Para ello:
 - Se calcula el rayo que incide en el centro del bin.
 - Se recorren todos los píxeles de la imagen y se calcula la distancia d de su centro al centro del rayo.
 - Si esta distancia es menor que 1 (medida en píxeles) se le añade al píxel de la imagen el valor del bin multiplicado por el factor $1-d$
- c) Si es preciso, se graba la imagen.

III. Corrección de la atenuación

- a) Se multiplica la imagen por la imagen de corrección calculada a partir del mapa de atenuación (corrección Chang)
- b) Si se desea iterar el proceso, se repite el siguiente proceso tantas veces como sea necesario:
 - Se proyecta la imagen actual
 - Se obtiene la diferencia de la proyección original (sin filtrar) con la proyección calculada.

- La proyección diferencia se reconstruye como la original (mediante filtrado, retroproyección y corrección de Chang) y se suma a la primera, obteniéndose la segunda imagen.

4.1.7. Rango de validez de la FBP. Valoración de las aproximaciones realizadas en su implementación.

En la exposición del desarrollo de la FBP, se ha mencionado un conjunto de supuestos y aproximaciones que condicionan el uso de este método. En primer lugar, según se explica en 4.1.3, debido a las simetrías de las coordenadas polares se puede realizar la retroproyección tanto a partir de la integración entre 0 y 2π como a partir de la integración entre 0 y π de las proyecciones filtradas. Sin embargo, si se dispone de proyecciones en un conjunto de ángulos distinto de estos dos, al aplicar la FBP aparecen imágenes muy defectuosas. Esto ocurre cuando parte de las proyecciones han de desestimarse por movimiento involuntario del paciente durante la adquisición. La FBP es muy sensible a la pérdida de proyecciones en alguno de los ángulos. También es importante que no haya truncaciones en las proyecciones. La reconstrucción mediante FBP de proyecciones truncadas produce artefactos en la imagen reconstruida [OGA-84] [MÜL-96].

Otro factor a tener en cuenta es que, aunque inicialmente el ruido de cada píxel es independiente, el proceso de reconstrucción tiende a correlacionar el ruido de píxeles adyacentes. Esto significa que si, por ejemplo, un píxel determinado tiene un valor superior a su valor esperado, los píxeles vecinos también tenderán a tener un valor superior a su valor esperado. La corrección del ruido mediante un filtro paso-baja reduce la varianza total del ruido pero aumenta este efecto. La consecuencia sobre la imagen es que desaparece el ruido llamado de “sal y pimienta” (ruido diferente píxel a píxel) pero pueden aparecer artefactos o grumos (cúmulos de varios píxeles con un valor superior o inferior a su valor

esperado) [ROS-95a], cuya presencia es menos deseable, pues pueden inducir a error sobre la existencia de zonas de mayor o menor actividad en un estudio.

Finalmente, la corrección de la atenuación con el método de Chang, presupone disponer del mapa de atenuación de antemano, ya sea con imágenes de transmisión (TC o gammagráficas) o con el conocimiento *a priori* de la geometría y composición del objeto. Además, si se quiere aplicar iterativamente, es preciso implementar un proyector que incluya las degradaciones. Con todo ello, la principal ventaja de la FBP respecto los métodos iterativos (facilidad de cálculo) desaparece, pues aplicar esta corrección repercute en un incremento notable del costo computacional.

4.2. Descripción de las pruebas realizadas

Para realizar este estudio han sido obtenidas proyecciones del modelo experimental descrito en el apartado 3.1. con los parámetros de adquisición:

- Colimador B de agujeros paralelos (ver 3.2.3.)
- 60 proyecciones equiespaciadas en 360°.
- 64 bins de 0.4717 cm en las proyecciones.
- Radio de giro de la gammacámara de 17 cm.
- 200 Kc de promedio por corte tomográfico.

En total han sido obtenidas 10 proyecciones independientes del modelo. También han sido generados numéricamente 3 conjuntos de proyecciones de 100 Kc, 200 Kc y 800 Kc respectivamente. Estos conjuntos han constado de 10 proyecciones, cada una con una realización diferente de ruido y los mismos parámetros geométricos que el modelo real. Estas proyecciones incluyen la simulación de atenuación, PSF, dispersión y ruido. Las proyecciones han sido corregidas de dispersión por deconvolución de la SRF correspondiente y reconstruidas mediante FBP utilizando un filtro de Metz, con los valores de la gaussiana

correspondientes a la PSF del centro de la imagen, y corrección de atenuación por el método de Chang iterativo. Se han reconstruido las proyecciones para cada valor del parámetro c del filtro de Metz (ver 4.1.4) comprendido entre 0.5 y 5 de 0.5 en 0.5. Las imágenes reconstruidas han sido evaluadas con las figuras de mérito: CC , CV , CON y SNR . Las FDM CON y SNR se han evaluado sobre todos los círculos (la graficación corresponde al círculo 1, dado que es el que más píxeles tiene y, por tanto, estadísticamente los resultados ofrecen menor dispersión) y CV sobre la zona 7 del modelo (fondo del modelo) (las zonas del modelo están definidas en 3.2.9).

Igualmente, dado que el método de Chang estaba pensado originalmente para imágenes con un mapa de atenuación uniforme, para poder evaluar sus prestaciones en imágenes con atenuación no uniforme han sido generadas un conjunto de proyecciones del modelo de tórax (ver 3.2.9) con 200 kc. De este modelo no ha sido posible tener un modelo real, por lo que los resultados obtenidos por simulación no han podido ser corroborados experimentalmente. Los parámetros de la simulación han sido los más usuales en las pruebas clínicas:

- Colimador A de agujeros paralelos (ver 3.2.3.)
- 60 proyecciones equiespaciadas en 360° .
- 64 bins de 0.566 cm en las proyecciones.
- Radio de giro de la gammacámara de 20.4 cm.
- 200 Kc de promedio por corte tomográfico.

Para evaluar este modelo han sido calculadas las mismas FDM. En las gráficas están representadas CON y SNR de la zona 3 (miocardio) respecto a su interior y de la zona 1 (pulmón) respecto al fondo del modelo (las zonas del modelo están definidas en 3.2.9). El número de iteraciones efectuadas ha sido de 15.

4.3. Resultados obtenidos

En este capítulo se ha creído conveniente mostrar bastantes imágenes para que el lector pueda establecer la relación que hay entre los valores de las FDM y el aspecto de la imagen. En capítulos posteriores la presencia de imágenes en los resultados es mucho menor.

En la Figura 4-6, se puede observar la evolución de la imagen reconstruida con las iteraciones. Las imágenes sucesivas (dispuestas por filas) son el resultado obtenido en las diferentes iteraciones del proceso de reconstrucción para el modelo simulado de 200Kc y utilizando un filtro de Metz con exponente=1. La primera imagen (arriba a la izquierda) corresponde a FBP sin corrección de atenuación. Es más oscura que las demás puesto que al no estar corregida de atenuación, el número total de cuentas es claramente inferior. Si se modificara la escala de grises para observar con mayor nitidez esa imagen, se produciría la saturación de numerosos píxeles de las imágenes restantes.

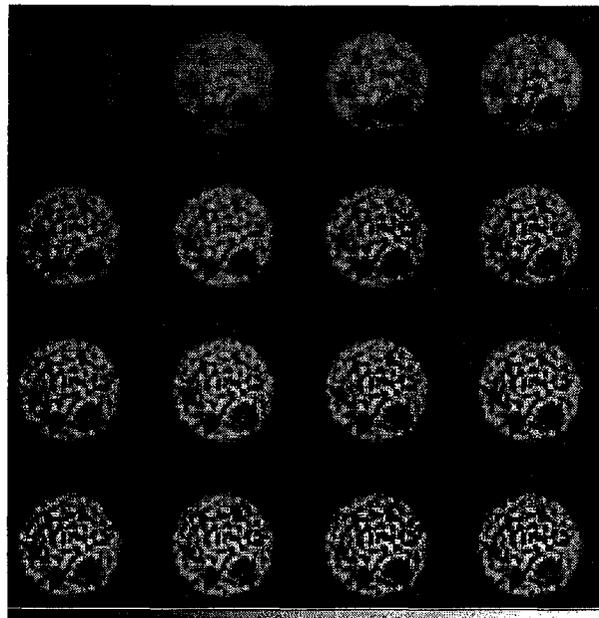


Figura 4-6. Evolución de la imagen con el número de iteraciones para la reconstrucción mediante IFBP con filtro de Metz (exponente=1) del modelo de Jaszczak simulado con 200Kc.

Cualitativamente, en la secuencia se aprecia que las imágenes son más suaves al principio y, a medida que se itera, el ruido va amplificándose paulatinamente. También se observa que las primeras imágenes son menos contrastadas que las últimas. Cuantitativamente, sobre cada una de las imágenes se evalúan las diferentes FDM. Los resultados expuestos en las gráficas siguientes son el promedio sobre 10 realizaciones de ruido de estos valores.

La Figura 4-7 muestra la variación del coeficiente de correlación (CC), el coeficiente de variación (CV) y el contraste ($CONI$) y relación señal-ruido ($SNRI$)³ del círculo de mayor tamaño en función del número de iteraciones en el modelo de Jaszczak simulado de 200Kc (4 gráficas primeras) y para el modelo real equivalente (4 gráficas restantes). Las diferentes líneas de las gráficas corresponden a diferentes valores del exponente en el filtro de Metz utilizado en la reconstrucción. La línea continua representa los valores obtenidos con el exponente igual a 0'5, la línea de puntos y rayas para el exponente 1, las líneas de rayas son de los exponentes 2, 3, y 4 respectivamente (la longitud de las rayas es menor cuanto mayor es el exponente) y la línea de puntos corresponde al exponente 5. En la iteración 1 se indica los valores obtenidos mediante FBP sin corrección de atenuación. Las iteraciones siguientes se refieren a las sucesivas iteraciones del método de Chang. Estos criterios se han mantenido en todas las gráficas de FDM en función del número de iteraciones de este capítulo.

Respecto la variación del valor de las FDM con el número de iteraciones, se observa que no todas tienen un comportamiento igual. Mientras CC , CV y $SNRI$ alcanzan un valor óptimo tras el que empeoran, $CONI$ sigue

³ El número 1 en $CONI$ y $SNRI$ hace referencia a la zona 1 del modelo (círculo negro de mayor tamaño- ver 3.1). En lo sucesivo se seguirá este criterio.

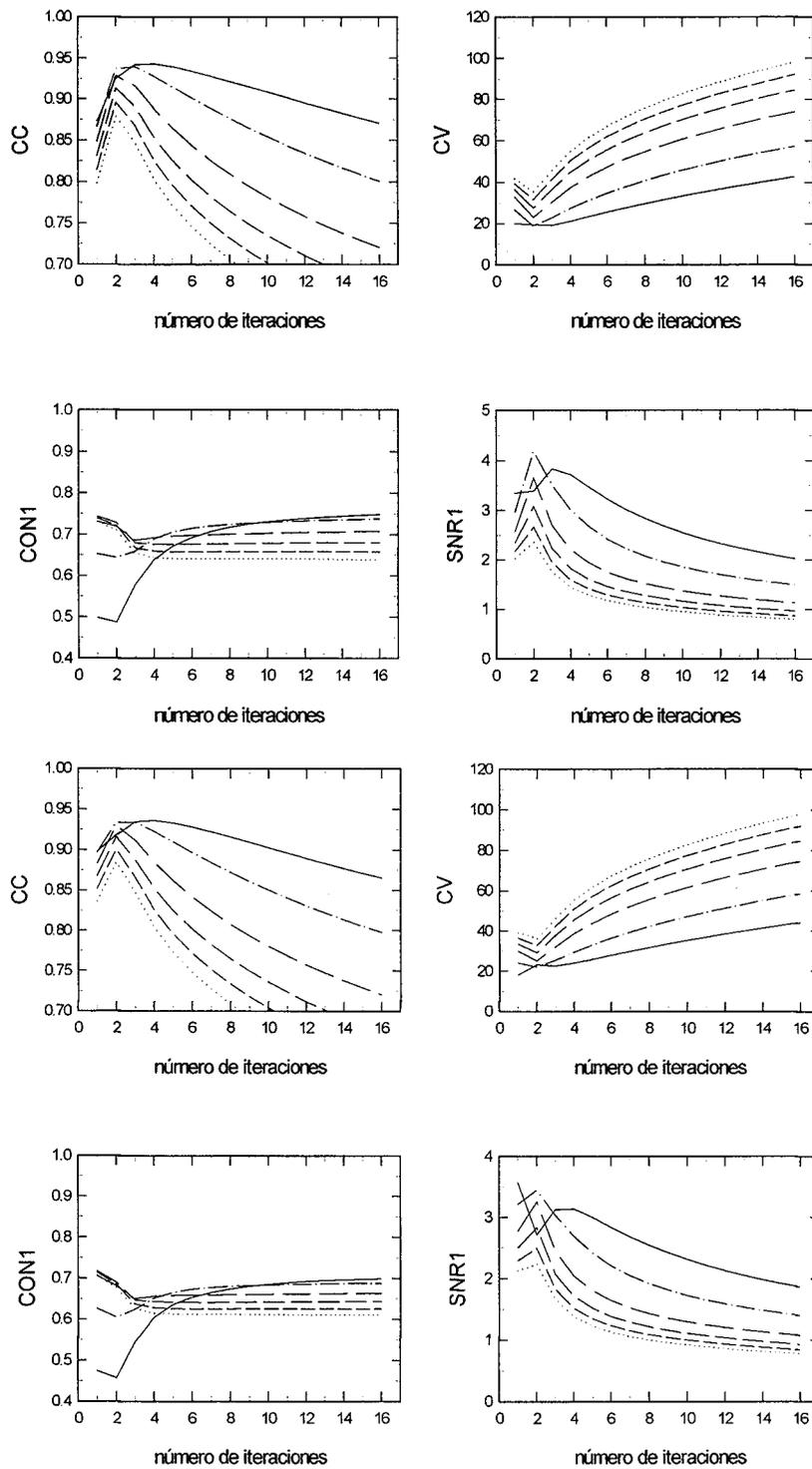


Figura 4-7. Modelo simulado de Jaszczak 200 Kc (cuatro gráficas superiores) y modelo real equivalente (cuatro gráficas inferiores). Representación del *CC*, *CV*, *CON1* y *SNR1* en función del número de iteraciones. La iteración 1 corresponde a FBP sin corrección de atenuación y las siguientes a las sucesivas iteraciones de IFBP. La línea continua corresponde a un exponente 0.5 y las demás a un exponente 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

aumentando hasta el final. La degradación de CC , CV y $SNRI$ con el número de iteraciones es más acentuada cuanto mayor es el exponente del filtro. El número de iteraciones precisas para alcanzar el valor máximo es menor cuanto mayor es el exponente. Se observa, también, que para exponentes altos, el mejor valor obtenido en las diferentes FDM es inferior al obtenido con exponentes menores. Esto indica que globalmente la imagen es de peor calidad. Por otra parte, si el valor del exponente es bajo, la imagen es menos ruidosa (CV tiene un valor menor) y un mejor valor de CC , pero el contraste es menor. Los resultados obtenidos con el modelo real tienen gran concordancia respecto los obtenidos con el modelo simulado.

En la Figura 4-8, las tres primeras filas muestran las imágenes obtenidas para el modelo de Jaszczak simulado con 200Kc. Las tres filas corresponden a las reconstrucciones realizadas con tres valores distintos del exponente del filtro de Metz, 0.5, 1, y 3 respectivamente. Las columnas corresponden correlativamente a la imagen obtenida con FBP, a la imagen en la iteración donde CC es máxima y a la imagen obtenida a las 16 iteraciones. Las tres últimas filas muestran las mismas imágenes para el modelo real. En ambas series puede observarse, en concordancia con las gráficas, que el contraste aumenta con las iteraciones y con el exponente al igual que la presencia de ruido sobre la reconstrucción. En la primera columna puede apreciarse una distribución no uniforme de la actividad en la imagen. La periferia del cilindro es más activa que el centro. Esto está de acuerdo con la no corrección de la atenuación sobre la imagen [GEL-88].

En la Figura 4-9, se puede comprobar cómo varían los resultados con el número de cuentas. Las gráficas corresponden al modelo de Jaszczak simulado, las 4 primeras con 100Kc y las 4 restantes con 800Kc. En estas gráficas se pone de manifiesto que cuanto mayor es el número de

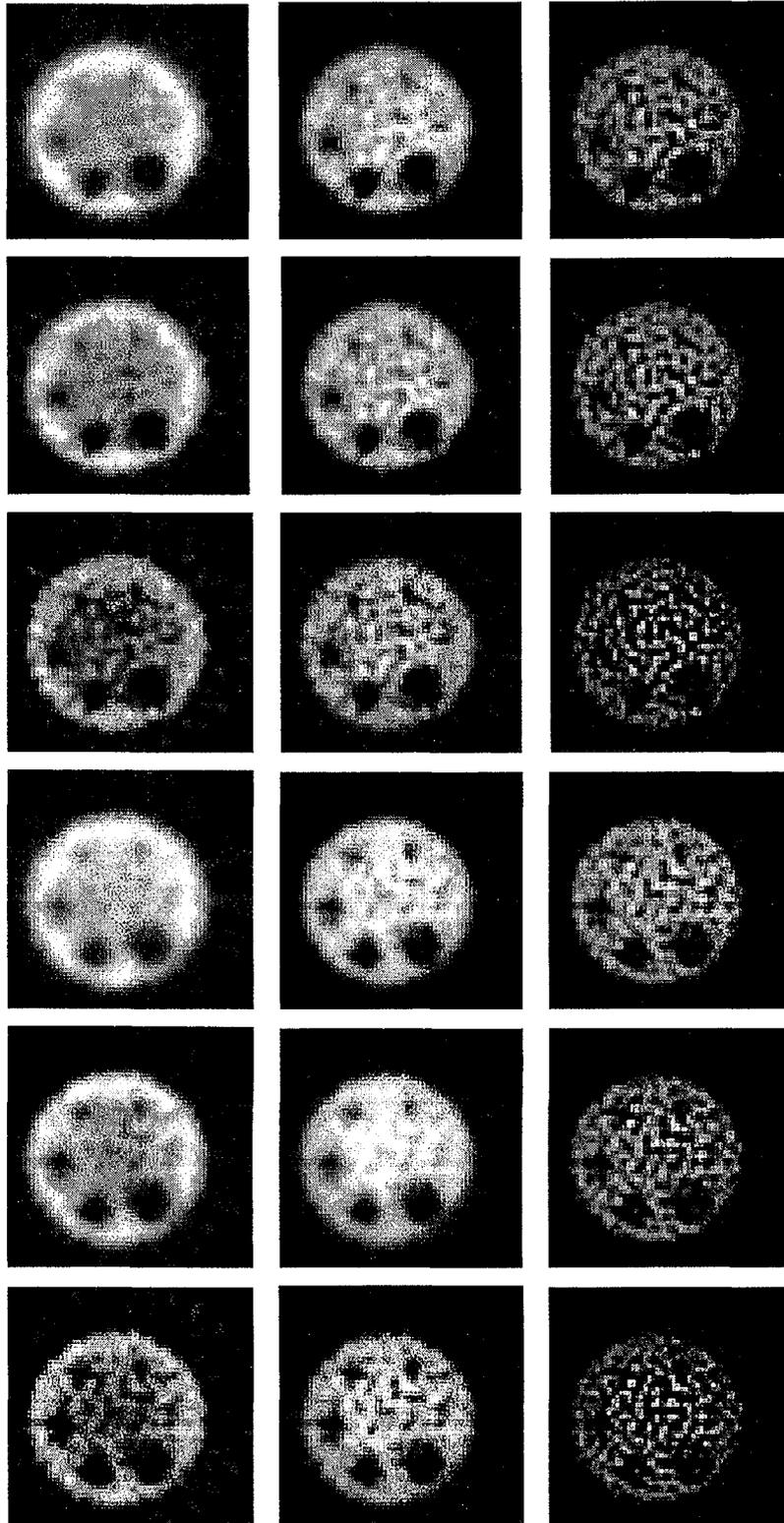


Figura 4-8. Imágenes del modelo simulado 200Kc (tres filas primeras) y del real (tres restantes). Para cada modelo, las tres filas corresponden sucesivamente al exponente 0.5, 1 y 3 del filtro de Metz. Las 3 columnas son, correlativamente, la imagen de FBP, la imagen en la iteración donde CC es máximo y en la iteración 16.

cuentas y, por consiguiente, menor la importancia del ruido, el número de iteraciones que pueden hacerse sin que la imagen se degrade es mayor, alcanzándose valores de las FDM mejores. La menor presencia de ruido permite un mejor ajuste de la imagen a las proyecciones. Otro hecho destacable es que el uso de exponentes altos está limitado por el número de cuentas. Según se observa en la gráfica de *CC* para 100Kc, sólo con los dos valores más bajos del exponente se encuentran valores aceptables. Para valores superiores del exponente las imágenes tienen valores peores de *CC* y *CONI*. Para 800Kc, el uso de exponentes mayores da buenos resultados a un número menor de iteraciones.

Por otra parte, para los valores inferiores del exponente (0.5 y 1), *CONI* parece ser independiente del nivel de ruido. Las líneas continua (exponente 0.5) y de punto- raya (exponente 1) de las gráficas de 100 Kc y 800 Kc son prácticamente superponibles (también con las mismas líneas del modelo de 200 Kc – Figura 4-7 -). No ocurre lo mismo con *SNRI*, claramente dependiente del número de cuentas. Para exponentes superiores, *CONI* alcanza peores valores con 100 Kc.

En la Figura 4-10 se muestran las imágenes de los modelos de Jaszczak simulado con 100 Kc (las tres filas superiores) y 800 Kc (las tres filas inferiores), en las mismas condiciones de la Figura 4-8. En ellas se pone de manifiesto tanto la mayor calidad de las imágenes como las mejores prestaciones usando exponentes altos para 800 Kc que para 100 Kc. La diferencia de calidad entre las imágenes de 100 Kc y 800 Kc con exponente 3 es mucho mayor que la diferencia de calidad observada para el exponente 0.5.

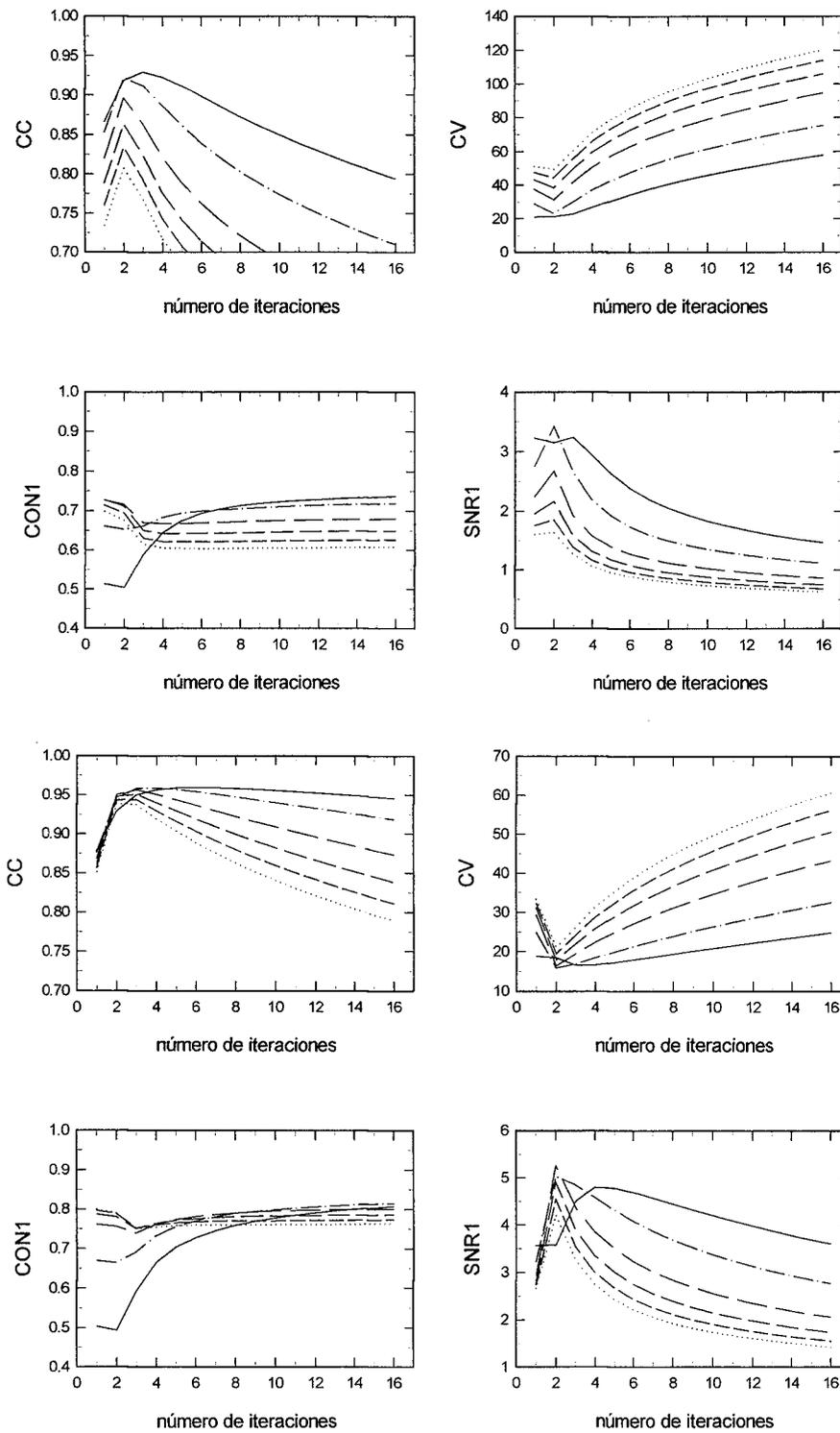


Figura 4-9. Modelo de Jaszczak simulado con 100 Kc (cuatro gráficas superiores) y 800 Kc (cuatro gráficas inferiores). Representación del *CC*, *CV*, *CON1* y *SNR1* en función del número de iteraciones. La iteración 1 corresponde a FBP sin corrección de atenuación y las siguientes a las sucesivas iteraciones de IFBP. La línea continua corresponde a un exponente 0'5 y las demás a un exponente 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

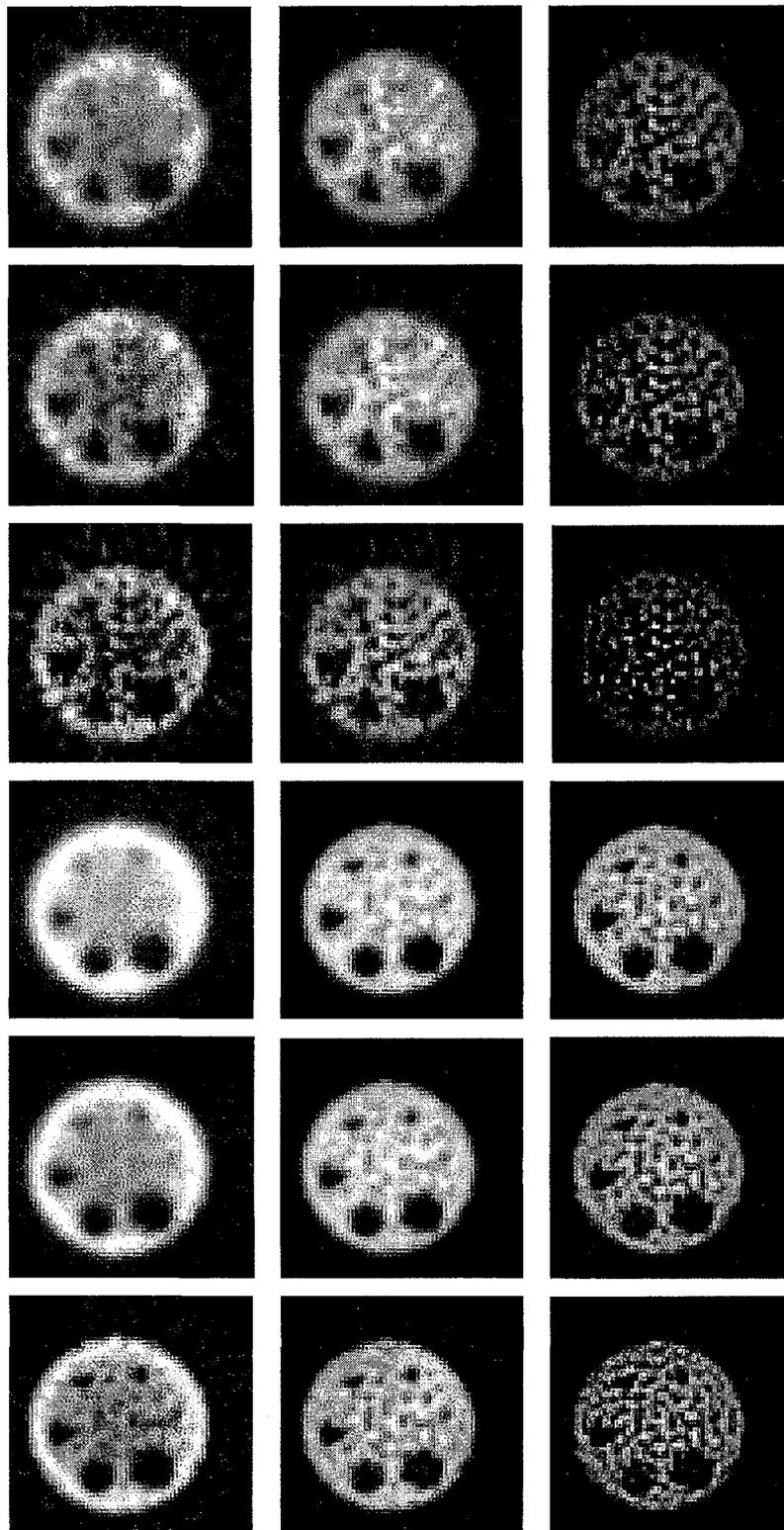


Figura 4-10. Imágenes del modelo simulado con 100 Kc (tres primeras filas) y 800 Kc (tres restantes). Para cada modelo, las tres filas corresponden sucesivamente al exponente 0.5, 1 y 3 del filtro de Metz. Las 3 columnas son, correlativamente, la imagen de FBP, la imagen en la iteración donde CC es máximo y en la iteración 16.

En la Figura 4-11, esta representado el mejor valor alcanzado por las diferentes FDM en función del exponente para el modelo de Jaszczak simulado (200 Kc). Se observa que para los tres valores primeros del exponente, los resultados son parecidos, aunque algo mejores con el exponente 1 para *SNR1*. En cambio, los mejores resultados obtenidos con exponentes superiores son peores. Esto significa que, globalmente para exponentes altos la reconstrucción es de peor calidad. Solamente el máximo de *CON1* se mantiene independiente del valor del exponente. No obstante, cabe destacar que, de acuerdo con la Figura 4-9, mientras el valor máximo de *CON1* se alcanza en la última iteración para exponentes bajos, para exponentes altos se alcanza con FBP sin corrección de atenuación (imágenes con distribución no uniforme de cuentas entre el centro y la periferia de la imagen).

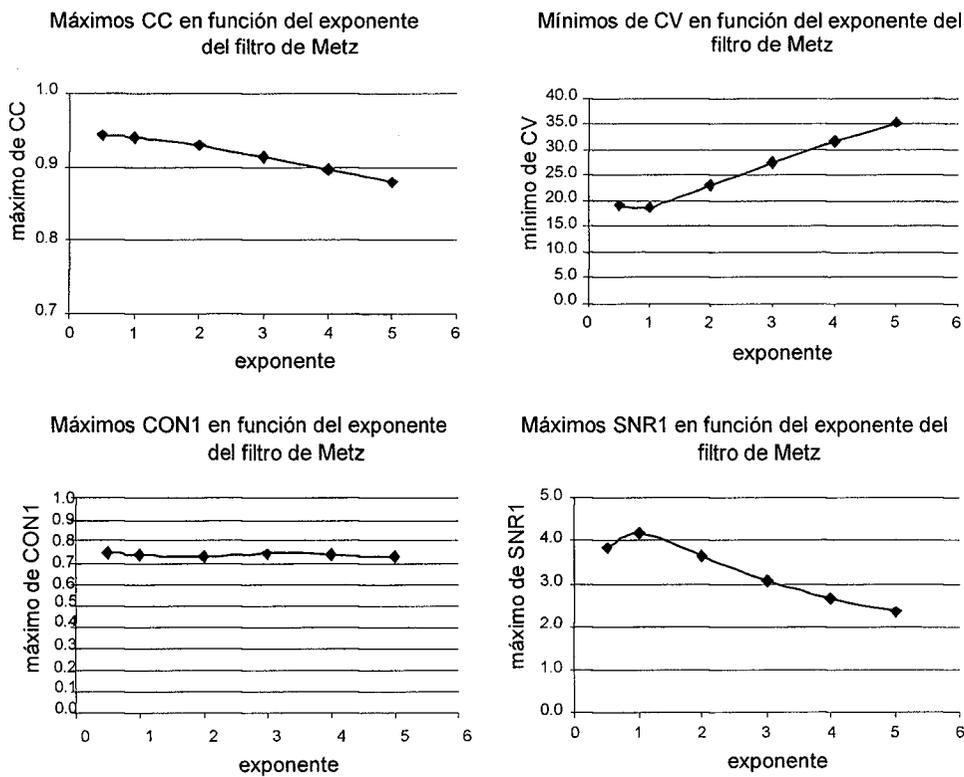


Figura 4-11 Mejores valores de las FDM en función del exponente del filtro utilizado en la reconstrucción. Valores correspondientes al modelo de Jaszczak simulado (200 Kc).

La Figura 4-12 muestra los resultados obtenidos con el modelo de tórax (con mapa de atenuación no uniforme) con 200 Kc. Las FDM mostradas son *CC*, *CV*, *CON* y *SNR* de las zonas 1 (pulmón) y 3 (corazón) (ver Figura 3-4). El contraste teórico de la zona 1 es 1 y el de la zona 3 es 0.5.

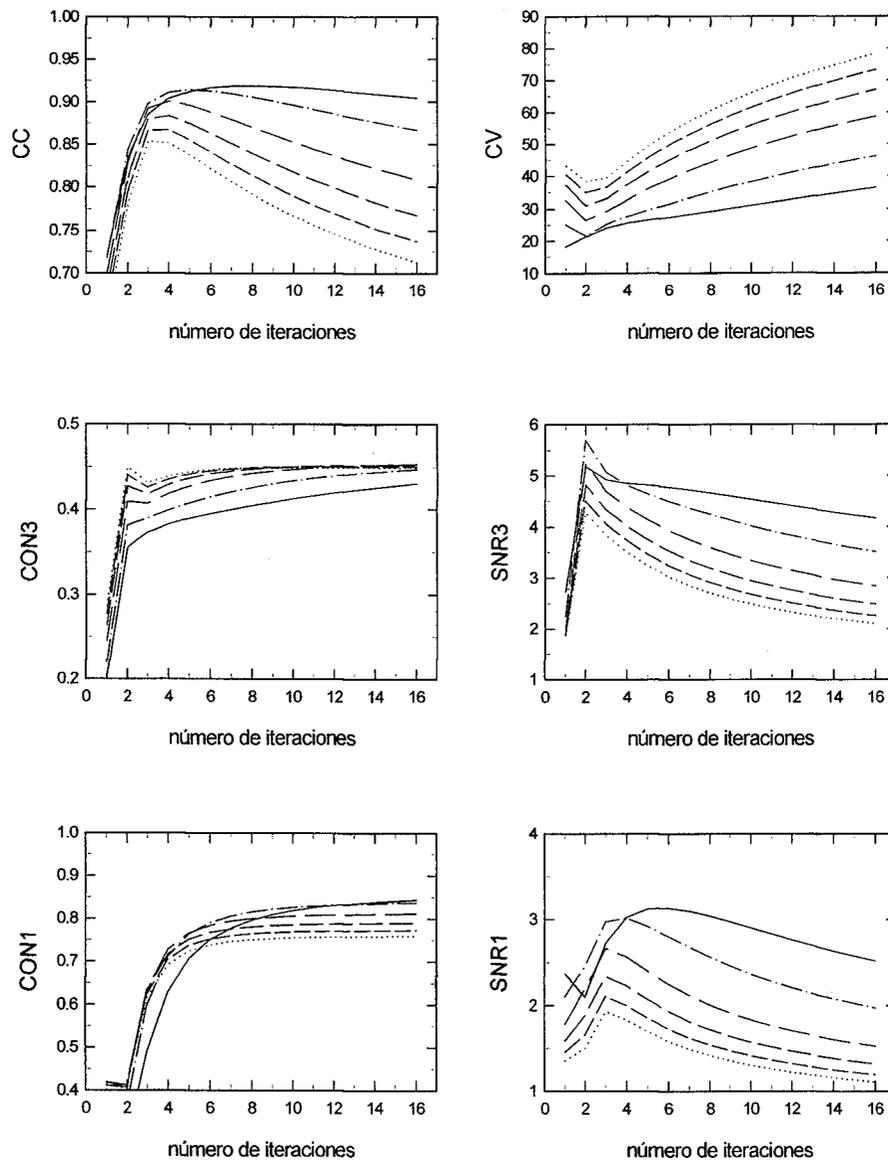


Figura 4-12 Modelo de tórax simulado 200 Kc. Representación del *CC*, *CV*, *CON3*, *SNR3*, *CON1* y *SNR1* en función del número de iteraciones. La iteración 1 corresponde a FBP sin corrección de atenuación y las siguientes a las sucesivas iteraciones de IFBP. La línea continua corresponde a un exponente 0'5 y las demás a un exponente 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

Aunque el comportamiento es muy parecido al observado en las gráficas del modelo de Jaszczak, sí existe una diferencia remarcable. En ningún caso los mejores resultados para CC , $SNR1$ y $SNR3$ se obtienen en la iteración 2 (correspondiente a FBP con corrección de Chang no iterativa), siempre son obtenidos a partir de la iteración 3. También es destacable los valores bajos obtenidos por $CON1$ en FBP.

En la Figura 4-13 puede observarse las imágenes de este modelo para tres exponentes diferentes (0.5, 1 y 3 dispuestos correlativamente en las filas) y para la FBP (primera columna), máximo de CC (segunda columna) e iteración 16 (tercera columna). Puede comprobarse la poca definición de los pulmones en la primera columna, y el aumento del contraste y del ruido con las iteraciones y el exponente.

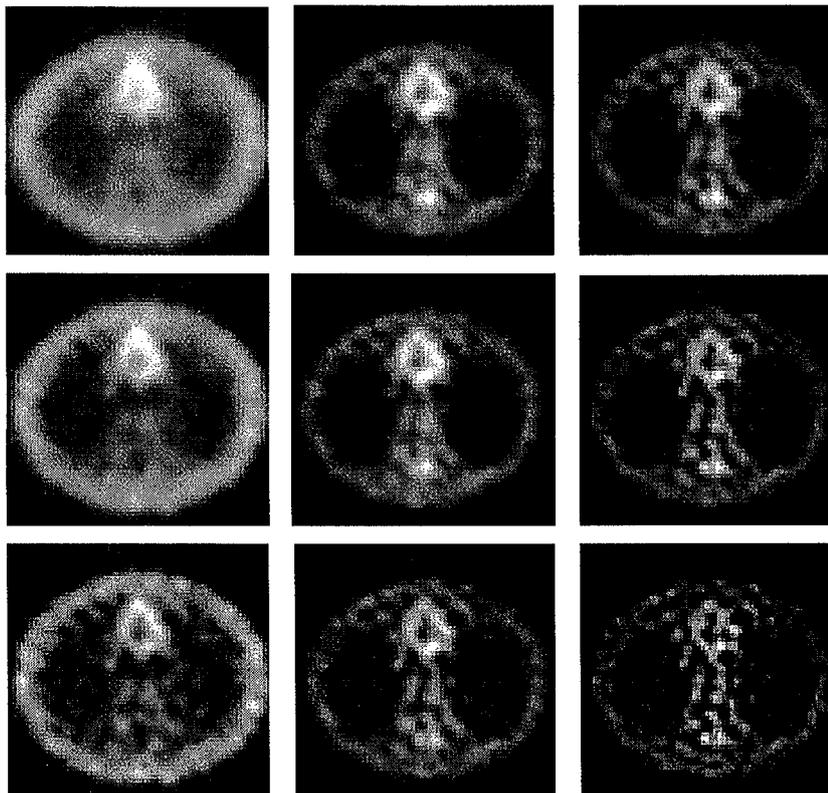


Figura 4-13. Imágenes del modelo de tórax simulado (200 Kc). Las tres filas corresponden respectivamente al exponente 0.5, 1 y 3 del filtro de Metz. Las 3 columnas son, correlativamente, la imagen de FBP (iteración 1), la imagen en la iteración donde CC es máximo y en la iteración 15.

4.4. Discusión de los resultados

La primera observación que puede hacerse es la gran similitud de los resultados obtenidos con las proyecciones simuladas y de los resultados obtenidos con las proyecciones experimentales (Figura 4-8). Esta similitud valida la simulación implementada y las aproximaciones realizadas en la misma. Otro hecho destacable es que la corrección iterativa de la atenuación mejora los resultados de FBP, pues, además de corregir la distribución no uniforme de cuentas sobre el fondo, mejora los valores de las FDM. Sólo *CON* obtiene en algún caso su mejor valor con FBP, aunque dada la incorrecta distribución de cuentas sobre el fondo de la imagen en estos casos, esta mejora no es muy significativa.

En cuanto al método iterativo de reconstrucción, se observa una dependencia entre el número de iteraciones a realizar, el exponente del filtro de Metz empleado y el ruido sobre las proyecciones. Para niveles de cuentas altos, si el exponente es bajo, se necesitan más iteraciones para obtener resultados análogos a los obtenidos con exponentes mayores. En este sentido el exponente puede ser interpretado como un factor regulador de la velocidad de convergencia del proceso iterativo, como un factor de aceleración del mismo. No obstante, en general, el valor del exponente tiene un máximo tras el cual la calidad de la imagen obtenida es claramente inferior. Este valor umbral depende del número de cuentas, siendo mayor cuantas más cuentas tengan las proyecciones. En este sentido, siempre se podría aumentar el exponente para conseguir la mejor imagen a la segunda iteración (FBP con Chang sin iterar), pues en este caso no sería necesaria la construcción del proyector con lo que el método sería de mucha más fácil aplicación. Sin embargo, según lo visto en el modelo de tórax, cuando el mapa de atenuación no es uniforme, aunque se modifique el exponente, nunca la mejor imagen se obtiene a la iteración 2. Esto indica que, cuando el mapa de atenuación es no uniforme, no basta con una aplicación del método de Chang para corregir la atenuación y es preciso iterar.

