Apèndix A

Introducció a la Teoria de Jocs cooperatius

La teoria de jocs és una disciplina matemàtica aplicada que s'encarrega de l'estudi de situacions de cooperació o conflicte en les quals intervenen dos o més jugadors i on de llurs accions en depèn la resolució de la situació. La teoria de jocs intenta proporcionar solucions a aquestes situacions.

La teoria de jocs és un camp d'estudi relativament jove. Es considera que l'article *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* de John von Neumann (1928) [57] va ser l'inici de la teoria de jocs, tot i que els fonaments bàsics de la teoria de jocs van ser donats en el llibre *Theory of Games and Economic Behavior* de John von Neumann i Oscar Morgenstern (1944) [58].

En un marc general, la teoria de jocs es divideix en teoria de jocs cooperatius i teoria de jocs no cooperatius. La diferència més notable entre les dues branques és la possibilitat d'establir acords vinculants o no poder-los establir respectivament. Però encara podem fer una classificació més acurada de la teoria de jocs cooperatius en jocs amb utilitat transferible (TU) i jocs sense utilitat transferible (NTU). En concret, aquesta tesi es centra en l'estudi d'un model de joc cooperatiu amb utilitat transferible.

El concepte d'utilitat transferible es refereix al fet d'assumir que la utilitat pot ser transferida gratuïtament d'un jugador a un altre, tenint en compte que la mesura d'aquesta utilitat és comuna (generalment dinerària) i divisible infinitament. Aquest plantejament fa necessari el coneixement de la utilitat que obté qualsevol subgrup de jugadors.

Des de l'inici de la teoria de jocs, multitud de models de jocs cooperatius han estat introduïts i estudiats. En general, la teoria de jocs cooperatius parteix de situacions en les què diferents parts (anomenats jugadors) estan involucrades en un projecte conjunt i els beneficis o costos d'aquesta cooperació han de ser repartits. Un dels principis fonamentals d'aquesta anàlisi és l'assumpció estàndard que els jugadors que hi intervenen són racionals, és a dir, que cada jugador vol maximitzar la seva pròpia utilitat, amb independència de les utilitats dels altres jugadors.

Així la majoria de situacions estudiades en la teoria de jocs cooperatius assumeix que la coalició total es formarà. La missió de la teoria de jocs cooperatius amb utilitat transferible és respondre a la pregunta de com repartir els guanys/costos entre els jugadors implicats, assumint la cooperació o actuació conjunta del grup de jugadors. Una resposta a la qüestió plantejada la donen els conceptes de solució. Alguns conceptes de solució, com el core (Gillies, 1953 [38]), el kernel (Davis i Maschler, 1965 [27]) o el conjunt de negociació (Aumann i Maschler, 1964 [7]) poden suggerir més d'una distribució. Altres, com el valor de Shapley (Shapley, 1953 [69]), el nucleolus (Schmeidler, 1969 [68]) i el valor de tau (Tijs, 1981 [75]) donen a cada joc, on el concepte està definit, exactament una única distribució.

A.1 Jocs cooperatius amb utilitat transferible

En aquesta secció presentarem la classe de jocs cooperatius amb utilitat transferible, on s'engloba el model de jocs cooperatius objecte d'estudi de la present tesi. D'aquesta manera definirem aquest concepte central, així com també donarem exemples que il·lustraran l'anàlisi que volem realitzar.

Començarem presentant alguns exemples de problemes econòmics que poden ser modelitzats com a jocs cooperatius amb utilitat transferible.

Exemple A.1 (Un problema de distribució de costos entre dos municipis). Dos municipis propers, A i B, estan considerant la possibilitat de construir un sistema de distribució d'aigua conjunt. El poble A pot construir el servei de forma individual amb un cost de 5000 euros. El poble B pot fer el mateix incorrent en un cost de 8000 euros. Ara bé, si ambdues comunitats construïssin un únic sistema de distribució que les servís el cost seria de 11000 euros, el qual és clarament inferior a la suma dels costos individuals. D'aquesta manera, la cooperació entre els dos municipis pren sentit econòmic, ja que conjuntament es poden estalviar 2000 euros. Tanmateix, cooperar els serà beneficiós en funció de com es distribueixin els costos conjunts. Així, han de posar-se d'acord en com repartir el cost de construir el sistema de distribució d'aigua conjunt.

Des del punt de vista de la teoria de jocs cooperatius, aquesta situació es podria modelitzar com un joc cooperatiu amb utilitat transferible (el terme utilitat transferible es refereix al fet que la utilitat, en aquest cas els diners, poden ser transferits d'un jugador a un altre) on els municipis A i B serien el conjunt de jugadors, i on c(A)=5000, c(B)=8000 i c(AB)=11000 representen el que es coneix com a funció característica, és a dir, un número que assigna a cada grup de jugadors el cost (benefici) que suporta (obté) aquella coalició. L'objectiu seria trobar un solució a com repartir els 11000 euros entre els jugadors. La resposta a aquesta qüestió no és immediata.

Una solució òbvia seria repartir el cost a parts iguals, és a dir, 5500 euros a pagar cada poble, però aquest repartiment no seria acceptat pel poble A ja que incorreria en un cost superior al seu cost individual (5000 euros). Així, si s'assumeix que els pobles cooperaran, sembla necessari dividir el cost total de manera que cada poble estigui disposat a pagar com a màxim el cost de construir ell sol el servei.

Una de les solucions més comunament acceptades és dividir proporcionalment, en aquest cas podríem fer-ho respecte als costos individuals. Així, el municipi A hauria de pagar aproximadament 4230 euros i el poble B 6770 euros. Encara que aquest repartiment podria no ser acceptat pel poble A ja que ell només s'estalvia 770 euros mentre que el poble B s'estalvia 1230 euros.

Més endavant, mostrarem com la teoria de jocs cooperatius pot ajudar a seleccionar divisions del cost total recorrent al compliment de determinades propietats.

$\diamond$

A continuació presentarem un exemple d'una aplicació real.

Exemple A.2 (The Tennessee Valley Authority (Ransmeier, 1942[65]). El TVA va ser un ambiciós projecte de desenvolupament portat a terme pel govern federal dels Estats Units durant la dècada dels anys 30. L'objectiu era establir un programa dedicat a millorar les oportunitats econòmiques de la regió de la vall. Les principals línies d'acció del TVA eren: millorar tant la navegació com els recursos recreatius del riu, controlar les inundacions i proporcionar energia hidroelèctrica.

Els economistes encarregats del projecte van tenir la missió d'analitzar els costos i beneficis d'aquest projecte, així com també es van haver de plantejar com distribuir els costos entre els tres objectius. Els economistes del TVA van haver de decidir quin havia de ser el nivell òptim de la iniciativa. Aquesta estimació va ser difícil de dur a terme degut a què la informació sobre la demanda per a projectes públics no està disponible i està subjecte a grans errors d'estimació.

A la pràctica, els encarregats del projecte van determinar els *target levels* en què serien proporcionats la navegació (objectiu 1), el control d'inundacions (objectiu 2) i l'energia (objectiu 3). I llavors van estimar el mínim cost de construir el sistema que complís els objectius. Per a cada subgrup d'objectius es van estimar els costos d'assolir aquests en els nivells indicats.

La funció de costos estimada per als objectius del TVA (costos expressats en milers de dòlars) ve donada en la següent taula [1]:

Objectius	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
Cost	163,52	140,82	250,09	301,60	378,82	367,37	412,58

Una vegada estimats els costos dels diferents objectius havien de proposar mètodes de distribució dels costos. Ransmeier (1942) va suggerir alguns criteris que hauria de satisfer una distribució satisfactòria, entre ells es trobava el fet de què els costos distribuïts entre els diferents objectius no haurien d'excedir el cost de qualsevol de les combinacions d'objectius. Com ja veurem més endavant les solucions que satisfan això corresponen a un conegut concepte de solució de la teoria de jocs cooperatius, el core.

Remarcar que el TVA no va adoptar oficialment cap mètode de repartiment de costos que fos acceptat de manera unilateral, sinó que es van desenvolupar diferents alternatives.

$\diamond$

A continuació procedirem a definir formalment que s'entén per un joc cooperatiu amb utilitat transferible o joc TU.

Definició A.3. *Un* **joc cooperatiu amb utilitat transferible** *és un parell* (N, v) *on* $N = \{1, \ldots, n\}$ *és el conjunt finit de* **jugadors** *i* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *és la* **funció característica** *que assigna a cada coalició* $S \subseteq N$ *un nombre real* $v(S)$ *on* $v(\emptyset) := 0$.

Així, els subconjunts S que es poden formar en N representen les possibles coalicions del joc, $S \subseteq N$. Donada una coalició S, $v(S)$ designa la utilitat o valor que obté la coalició si coopera, amb independència de les actuacions de la resta de jugadors.

Per simplificar la notació, un joc TU (N, v) sovint s'identifica amb la seva funció característica v.

[1] Taula obtinguda de Ransmeier (1942), pàgina 329.

La classe de tots els jocs TU amb conjunt de jugadors N es denota per G^N i per G a la classe de tots els jocs TU (amb conjunt de jugadors finit).

Sigui (N, v) un joc d'utilitat transferible (TU). El joc TU $(N, \hat{v})$, on $\hat{v} := \lambda \cdot v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es defineix per $\hat{v}(S) := \lambda \cdot v(S)$ per a tota $S \subseteq N$. La suma de dos jocs TU, $(N, \hat{v})$, on $\hat{v} = v + v'$, es defineix per $\hat{v}(S) := v(S) + v'(S)$, per a tota $S \subseteq N$.

Respecte a l'estructura algèbrica dels jocs TU cal remarcar que el conjunt de tots els jocs TU amb conjunt de jugadors N amb la suma i el producte per un escalar, $(G^N, +, \cdot; \mathbb{R})$, és un espai vectorial de dimensió $2^n - 1$ on $n = |N|$.

Una base d'aquest espai G^N ve donada pel conjunt de jocs d'unanimitat $\{u_T \,/\, T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$. Així, tot joc cooperatiu es podrà escriure com a combinació lineal de jocs d'unanimitat. Per analitzar la descomposició d'un joc, començarem recordant la definició de joc d'unanimitat.

Definició A.4. *Donat* $N = \{1, \ldots, n\}$ *es defineix el* **joc d'unanimitat** *respecte a la coalició* $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, (N, u_T), *com*

$$u_T(S) := \begin{cases} 1 & si\ T \subseteq S \\ 0 & altre\ cas \end{cases} \qquad per\ a\ tota\ \ S \subseteq N. \tag{A.1}$$

És a dir, definim $2^n - 1$ jocs d'unanimitat distints, tants com coalicions es poden prendre. Tot joc cooperatiu es pot obtenir com a combinació lineal de jocs d'unanimitat. Els escalars trobats són únics i queden caracteritzats en termes dels valors de la funció característica. A partir d'ara, ens referirem a aquests escalars com les coordenades d'unanimitat del joc. Així,

$$v(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot u_T(S)$$

on $\lambda_T = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t-r} v(R)$ per a tota $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$.

Els jocs d'unanimitat són un cas particular dels jocs simples.

Definició A.5. *Un joc cooperatiu* (N, v) *és un* **joc simple** *si satisfà*

$$v(S) = \{0, 1\} \quad per\ a\ tota\ S \subseteq N\ on\ v(N) = 1.$$

Definició A.6. *Donat* (N, v) *es defineix el* **joc dual** (N, v^*) *com*

$$v^*(S) := v(N) - v(N \setminus S)\ per\ a\ tota\ S \subseteq N$$

Definició A.7. *Donat* $N = \{1, \ldots, n\}$ *es defineix el* **joc dual d'unanimitat** *respecte a la coalició* $T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$, (N, u_T^*), *com*

$$u_T^*(S) := \begin{cases} 1 & \textit{si } S \cap T \neq \emptyset \\ 0 & \textit{altre cas} \end{cases} \qquad \textit{per a tota } S \subseteq N. \tag{A.2}$$

Degut al fet que el model objecte d'estudi de la tesi analitza situacions de repartiment de costos, presentarem les properes definicions en termes de costos.

La formulació d'un problema d'assignació de costos en termes de teoria de jocs cooperatiu es modela a través d'un **joc cooperatiu de costos** (N, c). En aquest cas, N representa el conjunt d'agents entre els quals s'ha de dividir el cost conjunt. Per exemple, aquests agents poden ser un grup de municipis col·laborant en la construcció d'una depuradora o un grup de veïns que decideix instal·lar l'antena parabòlica a l'edifici. La funció $c : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ és la funció característica de costos. Per a cada coalició $S \in 2^N$, $c(S)$ denota el cost minimal pels membres d'S per aconseguir el seu objectiu. En particular, $c(\emptyset) = 0$. La classe de tots els jocs de costos amb conjunt de jugadors N es designa per CG^N.

Noti's que els exemples A.1 i A.2 presentats anteriorment corresponen a situacions modelitzades mitjançant jocs cooperatius TU de costos.

Remarcar que tot joc de costos té un homòleg en guanys, de manera que a cada joc de costos li podem associar un joc d'estalvis que representarà l'estalvi que obté la coalició en cooperar. És a dir, l'estalvi d'una coalició vindrà donat per la diferència entre el que els costaria als membres d'una coalició realitzar el projecte individualment, $\sum_{i \in S} c(i)$, i el que els hi costaria si cooperessin, $c(S)$.

Així doncs, donat un joc de costos (N, c) el **joc d'estalvis associat** es defineix com:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S) \quad \text{per a tota } S \subseteq N.$$

Observi's que el joc d'estalvis associat sempre és un joc amb valors individuals zero. Un mètode que reparteixi l'estalvi total, $v(N)$, ens permet generar automàticament mètodes que imputin una part del cost total a cada jugador.

A.2 Conceptes de solucions per a jocs TU

Dins els jocs TU és usualment assumit que tots els jugadors cooperen i que, per tant, la coalició total es forma. Així, un dels objectes d'estudi des dels inicis de la teoria de jocs és la cerca de solucions que proporcionin un repartiment del cost o benefici conjunt.

Donat un joc de costos (N, c), el problema d'assignació de costos es transforma en una situació en la que cal distribuir els costos conjunts d'una manera justa. En jocs corresponents a situacions de guanys tenim definits la noció de vector de pagaments, conjunt d'imputacions o core entre d'altres. En el cas de joc de costos aquestes nocions es poden traslladar sense cap problema d'una manera intuïtiva.

Els conceptes de solució poden ser conjuntistes o puntuals. Dins de les solucions conjuntistes el core és una de les més utilitzades dins l'àmbit de la teoria de jocs cooperatius. Ara bé, en ser una solució conjuntista en molts casos conté més d'un punt i l'elecció d'un d'ells pot ser complicada. Aquest problema s'evita amb les denominades solucions puntuals com són el valor de Shapley, el nucleolus o el valor de tau.

A continuació presentarem alguns conceptes de solució comunament usats a la teoria de jocs cooperatius que compleixin certes propietats raonables que justifiquen la seva aplicació.

A.2.1 Solucions conjuntistes

La primera condició que podem demanar a un repartiment per a un joc de costos és que la distribució assignada divideixi exactament la quantitat a repartir $c(N)$, és a dir, que la solució sigui **eficient**. Notarem per x_i el cost que se li imputa al jugador i.

Definició A.8. *Sigui* (N, c) *un joc de costos, el conjunt de* **preimputacions**, $I^*(c)$, *es defineix com aquell conjunt de distribucions que reparteixen entre els jugadors el cost conjunt* $c(N)$ *. Així,*

$$I^*(c) := \{x \in \mathbb{R}^N \,/\, \sum_{i \in N} x_i = c(N)\}.$$

La segona condició desitjable per a una solució és que el cost assignat a un jugador hauria de ser inferior al cost en què incorre individualment. Aquesta condició es coneix com a **racionalitat individual**. Així,

Definició A.9. *Sigui* (N, c) *un joc de costos, el conjunt d'***imputacions***,* $I(c)$*, es defineix com el conjunt de preimputacions les quals són individualment racionals, és a dir,*

$$I(c) := \{x \in I^*(c) \,/\, x_i \leq c(i) \quad \textit{per a tot } i \in N\}.$$

El conjunt d'imputacions pot ser buit. Els jocs cooperatius amb conjunt d'imputacions no buit es coneixen com a jocs **essencials**. Observi's que un joc de costos (N, c) és essencial si i només si $\sum_{i \in N} c(i) \geq c(N)$.

El conjunt d'imputacions en el cas de ser no buit és sovint molt gran. Així, aquest conjunt és vist més com un conjunt al que ha de pertànyer una solució que no com una solució per si mateix.

Dins dels conceptes de solucions conjuntistes, en destaca el core d'un joc cooperatiu, introduït per Gillies (1953) [38]. Usualment, el core és un concepte definit per a jocs de guanys mentre que en la literatura dels jocs de costos se l'anomena anticore. En aquest cas, tot i treballar amb jocs de costos, utilitzarem la terminologia més comuna, i parlarem de core d'un joc de costos.

Definició A.10. *Sigui* (N, c) *un joc de costos, el* **core***,* $Core(c)$*, es defineix com:*

$$Core(c) := \{x \in \mathbb{R}^N \,/\, \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \textit{ per a tota } S \subseteq N, \sum_{i \in N} x_i = c(N)\}.$$

Cal notar que qualsevol element del core és una imputació, és a dir, que el core és un subconjunt del conjunt de les imputacions. Donada una distribució x de repartiment de costos, si $x \in Core(c)$ vol dir que no hi ha cap coalició S que tingui incentius a separar-se, és l'anomenada racionalitat coalicional. Suposem que per a una determinada coalició S la distribució assignés $c(S) < x(S)$, llavors la coalició S podria millorar la situació de tots els seus membres pels seus propis mitjans. En altres paraules, el core és aquell subconjunt de les imputacions on això mai és possible.

Els jocs amb core no buit reben el nom de jocs **equilibrats**. El concepte de joc equilibrat pot fer-se més estricte. Així, es diu que un joc (N, c) és **totalment equilibrat** si el **subjoc** induït (S, c_S) és equilibrat per a tota $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, on (S, c_S) es defineix com $c_S(T) = c(T)$ per a tota $T \subseteq S$. D'aquesta forma, direm que un joc és totalment equilibrat si i només si qualsevol subjoc induït té el core no buit.

Un resultat referent al core, és que si agafem diferents jocs i sumem els seus cores, aleshores el conjunt resultant està inclòs en el core de la suma.

Proposició A.11. *Sigui* (N, c_1) *i* (N, c_2) *dos jocs cooperatius de costos. Aleshores,* $Core(c_1) + Core(c_2) \subseteq Core(c_1 + c_2)$.

Un dels problemes del core d'un joc cooperatiu és la possibilitat de ser buit. El core d'un joc presenta altres problemes, a part del fet de poder ser buit. Així, el core pot estar format per un nombre molt elevat de distribucions, dificultant la designació d'una sola distribució. Per aquest motiu, estudiarem algunes de les solucions puntuals més remarcables de la teoria de jocs.

Un altre concepte de solució ben conegut és el conjunt de Weber introduït per Weber (1988) [81]. Per definir-lo, introduïm la noció de vector de contribucions marginals. Denotarem per Π^N el conjunt de totes les $n!$ permutacions del conjunt de jugadors N.

Definició A.12. *Sigui* (N, c) *un joc cooperatiu de costos i* $\pi \in \Pi^N$. *El vector de contribucions marginals,* $m^\pi(c) \in \mathbb{R}^N$, *corresponent a* π *ve donat per*

$$m_i^\pi(c) := c(P_i^\pi \cup \{i\}) - c(P_i^\pi) \quad \text{per a tot } i \in N,$$

on $P_i^\pi := \{k \in N \,/\, \pi(k) < \pi(i)\}$ *representa el conjunt de jugadors que precedeix el jugador* i *en l'ordre* π.

Si pensem per exemple en què els jugadors entren d'un en un en una habitació segons l'ordre π, aleshores el vector m^π dóna per a cada jugador el cost que aporta en afegir-se als jugadors que es trobaven a la habitació.

Un vector de contribucions marginals no és necessàriament una distribució pertanyent al core. Ara bé, si un vector de contribucions marginals pertany al core, aquest és un extrem del core.

Definició A.13. *Sigui* (N, c) *un joc de costos, el* **conjunt de Weber***,* $W(c)$*, és l'embolcall convex del conjunt de tots els vectors de contribucions marginals del joc.*

Weber (1988) mostra que el core d'un joc cooperatiu de costos està contingut en l'anomenat conjunt de Weber. Posteriorment, Derks (1992) [28] en dóna una demostració més curta.

A.2.2 Solucions puntuals

Les solucions puntuals més conegudes dins la teoria de jocs cooperatius són: el valor de Shapley, el nucleolus i el valor de tau. Procedim a definir-les.

El valor de Shapley va ser introduït per Shapley (1953) [69], qui va donar la fórmula i va estudiar les propietats. La fórmula és la següent:

Definició A.14. *Sigui* (N, c) *un joc de costos. El* **valor de Shapley**, $\phi(c)$, *es defineix com:*

$$\phi_i(c) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} [c(S \cup \{i\}) - c(S)], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La interpretació es pot realitzar pensant en què en el problema de distribució del cost conjunt, el cost que hauran d'assumir els jugadors està sotmès a una incertesa. En el sentit de què l'assignació depèn d'un cert ordre, en concret, del moment en què els jugadors s'afegeixin a una coalició que ja està formada. Així, el jugador haurà de pagar l'increment del cost en afegir-se a la coalició formada. Per tant, assumint que els ordres són igual de probables, el valor de Shapley s'interpreta com la mitjana del cost que aporta cada jugador a les diferents coalicions que no el contenen.

Shapley va caracteritzar el seu valor mitjançant quatre axiomes:

- **Eficiència:** $\sum_{i \in N} \phi_i(c) = c(N)$.
- **Simetria:** Per a tot joc de costos (N, c) i per a tota permutació $\pi : N \longrightarrow N$ amb $(N, \pi c)$ es compleix $\phi_{\pi(i)}(\pi c) = \phi_i(c)$ per a tot $i \in N$.
- **Additivitat:** Per a tot parell de jocs de costos (N, c) i (N, c') es compleix que $\phi(c + c') = \phi(c) + \phi(c')$ on $(c + c')(S) = c(S) + c'(S)$.
- **Propietat del jugadors fals:** Si un jugador és fals o *dummy*, és a dir, $c(S \cup \{i\}) - c(S) = c(i)$ per a tota $S \subseteq N \setminus \{i\}$, llavors $\phi_i(c) = c(i)$.

A continuació definirem el nucleolus. El **nucleolus** va ser introduït per Schmeidler (1969) [68]. La seva definició es basa en la idea dels excessos o queixes que presenten els jugadors davant d'una solució eficient. Una característica important és que el nucleolus només està definit per a jocs essencials.

Com a pas previ definirem l'excés o queixa d'una coalició.

Definició A.15. *Sigui* (N, c) *un joc de costos i* x *una imputació. L'***excés** *de la coalició* $S \subseteq N$ *respecte a* x*, es defineix com:*

$$e(S, x) = \sum_{i \in S} x_i - c(S)$$

L'excés representa la "queixa" de la coalició S davant la distribució donada x. Així, si l'excés és positiu vol dir que la coalició paga per sobre del cost mínim que es garanteix a la funció característica, és a dir, la distribució no està dins del core. Per tant, una coalició vol que l'excés sigui el més petit possible. Així, el nucleolus es defineix com la imputació que minimitza les màximes queixes de les coalicions.

Definició A.16. *Sigui (N, c) un joc de costos essencial. El* **nucleolus**, *$\eta(c)$, és la imputació que minimitza les màximes queixes de les coalicions.*

Alternativament, sigui $\Theta(x)$ el vector format pels 2^n excessos respecte a la distribució x, un per a cada coalició $S \subseteq N$, ordenats de forma decreixent. Si prenem qualsevol altra distribució y amb vector d'excessos $\Theta(y)$ podem comparar-la amb x mitjançant la comparació de les queixes una a una segons l'ordre establert, resultant millor la distribució que doni un menor excés a alguna de les coalicions.

Formalment, donades dues distribucions x i y amb vectors d'excessos $\Theta(x) = (\Theta(x)_1, \ldots, \Theta(x)_{2^n})$ i $\Theta(y) = (\Theta(y)_1, \ldots, \Theta(y)_{2^n})$, respectivament, direm que x és preferida a y si es compleix

$$\begin{array}{l} \Theta(x)_i < \Theta(y)_i \quad \text{per a algun } i \text{ tal que } 1 \leq i \leq 2^n \\ \text{i} \\ \Theta(x)_k = \Theta(y)_k \quad \text{per a tota } k \text{ tal que } 1 \leq k \leq i-1, \end{array}$$

i ho notarem per $x \preceq_{lex} y$.

Aquest procés de comparació de dues distribucions s'anomena ordenació lexicogràfica dels vectors d'excessos. Així, el nucleolus es pot definir com aquella imputació que és preferida a qualsevol altra imputació, segons l'ordre lexicogràfic dels vectors d'excessos, és a dir, $\Theta(\eta(c)) \preceq_{lex} \Theta(y)$ per a tota $y \in I(c)$.

És fàcil comprovar que el nucleolus és una distribució que pertany al core del joc si el joc és equilibrat.

Teorema A.17. *Sigui (N, c) un joc de costos equilibrat, aleshores $\eta(c) \in Core(c)$.*

Cal remarcar que per a la majoria de jocs els nucleolus és una solució difícil de calcular.

L'últim concepte de solució puntual que discutirem és el valor de tau, introduït per Tijs (1981) [75]. Per a un joc de costos prenem la definició donada en Otten (1995) [61]. Aquesta solució es caracteritza per ser una distribució intermèdia entre una cota inferior , $SC(c)$, i una cota superior, $m(c)$, dels costos en els què poden incórrer els jugadors.

Sigui (N, c) un joc cooperatiu de costos. La cota inferior $SC(c)$ s'anomena el **cost separable** dels jugadors. Així, $SC_i(c)$ representa el cost mínim en el què ha d'incórrer el jugador i, que ve donat pel cost addicional d'incloure el jugador i en la coalició formada per tots els altres jugadors. Formalment,

$$SC_i(c) := c(N) - c(N \setminus i) \quad \text{per a tot } i \in N.$$

La **cota superior**, $m(c)$, està composta pel màxim cost que estan disposats a suportar els jugadors. Així, si un jugador i s'afegeix a una coalició S estarà disposat a suportar com a molt el que queda després d'assignar a tots els altres membres de la coalició el mínim cost en el que han d'incórrer, és a dir, el seu cost separable. Formalment,

$$m_i(c) := \min_{\emptyset \subseteq S \subseteq N \setminus i} \{c(S \cup i) - \sum_{k \in S} SC_k(c)\} \quad \text{per a tot } i \in N.$$

Per a què el valor de tau pugui ser calculat s'han de complir dues condicions:

1. $SC_i(c) \leq c(i)$ per a tot $i \in N$.
2. $\sum_{i \in N} SC_i(c) \leq c(N) \leq \sum_{i \in N} c(i)$.

Els jocs que verifiquen aquestes dues condicions s'anomenen jocs **quasi-equilibrats**. Dins d'aquesta classe es troben els jocs equilibrats. Respecte a la condició 1, noti's que si per a algun jugador i, $SC_i(c) > c(i)$ aleshores no seria favorable incloure al jugador i en el projecte conjunt. La condició 2 implica que després de què cada jugador ha assumit el seu cost mínim, aleshores encara queda una part del cost que hauria de ser distribuïda. Aquest cost "sobrant" és l'anomenat **cost no separable** i ve donat per:

$$NSC(c) := c(N) - \sum_{i \in N} SC_i(c). \tag{A.3}$$

El valor de tau, $\tau(c)$, es defineix com l'únic vector eficient que s'obté com a combinació convexa del vector de costos separables i del vector $m(c)$. És a dir,

Definició A.18. *Sigui* (N, c) *un joc de costos, el* **valor de tau** *es defineix com:*

$$\tau(c) = (1-\lambda)SC(c) + \lambda\, m(c)$$

on λ *és tal que* $\sum_{i\in N} \tau_i(c) = c(N)$.

A.3 Classes de jocs cooperatius TU

En aquesta secció introduirem algunes propietats que pot satisfer la funció característica d'un joc. La família de jocs que satisfà alguna propietat específica s'anomena d'una forma especial.

Una primera propietat a estudiar és la monotonia. Aquesta propietat requereix que en créixer el nombre de jugadors, el cost que suporta una coalició no disminueixi.

Definició A.19. *Un joc cooperatiu de costos* (N, c) *és* **monòton** *si*

$$c(S) \leq c(T) \quad \textit{per a tota } S \subseteq T \subseteq N.$$

Noti's que si un joc és monòton, $c(S) \geq 0$ per a tota $S \subseteq N$. A més els costos separables d'un jugador a les diferents coalicions $c(S \cup \{i\}) - c(S)$ sempre són positius.

Ara bé, en els jocs de costos és interessant analitzar si el joc d'estalvis és monòton, és a dir, que en créixer el nombre de jugadors, l'estalvi no disminueixi.

Definició A.20. *Un joc cooperatiu de costos* (N, c) *és* **monòton en l'estalvi** *si*

$$c(S) + \sum_{i\in T\setminus S} c(i) \geq c(T) \quad \textit{per a tota } S \subseteq T \subseteq N.$$

Una altra propietat apropiada a satisfer per un joc de costos és la subadditivitat, la qual ens diu que la unió de coalicions que no tenen jugadors en comú és beneficiosa.

Definició A.21. *Un joc cooperatiu de costos* (N, c) *és* **subadditiu** *si*

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) \quad \textit{per a tota } S, T \subseteq N \textit{ tal que } S \cap T = \emptyset.$$

Els jocs de costos totalment equilibrats són subadditius.

Un cas particular de la subadditivitat és l'additivitat.

Definició A.22. *Un joc cooperatiu de costos* (N, c) *és* **additiu** *si*

$$c(S) + c(T) = c(S \cup T) \quad \textit{per a tota } S, T \subseteq N \textit{ tal que } S \cap T = \emptyset.$$

Observi's que si un joc és additiu $c(S) = \sum_{i \in S} c(i)$ per a tota $S \subseteq N$. Per tant, els jugadors són *dummy* i el joc ve determinat pels valors de les coalicions individuals. Per als jocs additius tots els conceptes de solució estudiats en la secció anterior, excepte el conjunt de preimputacions, divideixen $c(N)$ de la mateixa manera, és a dir, assignen $c(i)$ a cada jugador.

A continuació, definirem una de les classes més importants de jocs cooperatius, els jocs convexos, introduïts per Shapley (1971). Nosaltres ens referirem a l'equivalent en costos, és a dir, als jocs còncaus. La concavitat exigeix que els costos separables dels jugadors disminuexin a mesura que creix la coalició.

Definició A.23. *Un joc cooperatiu de costos* (N, c) *és* **còncau** *si*

$$c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T) \quad \textit{per a tota } S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Observi's que els jocs còncaus són subadditius i que tot subjoc d'un joc còncau és a la vegada còncau.

A continuació enunciarem un resultat que fa referència als jocs còncaus.

Shapley (1971) va demostrar que per als jocs convexos el conjunt de Weber coincideix amb el core. Posteriorment, Ichiishi (1981) prova la caracterització contrària. Així, per als jocs de costos tenim:

Teorema A.24. *Sigui* $(N,\ c)$ *un joc de costos, aleshores:*

1. $Core(c) \subseteq W(c)$.
2. $W(c) = Core(c) \Longleftrightarrow (N,\ c)$ *és còncau.*

Com a conseqüència, el core d'un joc còncau és no buit. A més la coincidència entre el core i el conjunt de Weber provoca que els vectors de contribucions marginals juguin un paper molt destacat en el context dels jocs de costos còncaus, ja que ens permeten determinar el core. Una altra conseqüència és que per als jocs còncaus el valor de Shapley és un element del core.

Finalment, remarcar que en la classe dels jocs còncaus, el core és un concepte de solució additiu. I que el valor de tau té un càlcul molt senzill, ja que la cota superior coincideix amb el vector de costos individuals, $m_i(c) = c(i)$ per a tot $i \in N$.

Proposició A.25. *Siguin* (N, c_1) *i* (N, c_2) *dos jocs cooperatius de costos còncaus. Aleshores s'obté la igualtat* $Core(c_1+c_2) = Core(c_1)+Core(c_2)$.

Per últim, definirem una classe de jocs que van ser introduïts per Driessen (1985) [29], els jocs 1-còncaus[2].

Aquesta classe de jocs presenta propietats molt interessants, com és la seva caracterització en termes del core, així com també la facilitat de càlcul de determinats conceptes de solució de la teoria de jocs cooperatius com són el nucleolus i el valor de tau.

Definició A.26. *Un joc cooperatiu de costos* (N, c) *és* **1-còncau** *si*
$$\sum_{i\in N} SC_i(c) \leq c(N) \;\; i \;\; c(S) \geq c(N) - \sum_{i\in N\setminus S} SC_i(c) \;\; \text{per a tota} \;\; S \subseteq N, \; S \neq \emptyset.$$

Notarem per C_1^N la classe dels jocs 1-còncaus.

La segona condició de la definició de joc 1-còncau estableix que la part que queda del cost total d'una coalició S en el joc c és com a molt el seu cost $c(S)$ sempre que els costos totals $c(N)$ són distribuïts de tal manera que tots els jugadors fora d'S incorren en el seu cost separable.

A continuació enunciarem alguns dels resultats més significatius referents als jocs 1-còncaus i que hem extret de Driessen (1988).

En primer lloc farem refèrencia a l'estructura algèbrica d'aquests jocs, estudiant la suma i el producte per escalar.

Proposició A.27. *Siguin* (N, c_1) *i* (N, c_2) *dos jocs de costos 1-còncaus. Aleshores, el joc suma* $(N, c_1 + c_2)$ *és un joc 1-còncau.*

Proposició A.28. *Siguin* (N, c) *un joc de costos 1-còncau i* $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Aleshores, el joc producte per escalar no negatiu* $(N, \lambda c)$ *és un joc 1-còncau.*

La noció de 1-concavitat pot ser caracteritzada en termes del core i uns vectors de pagaments adequats. Concretament, aquests vectors són els vectors de costos separables ajustats eficientment. Així, els jocs 1-còncaus són equilibrats.

[2] A Driessen (1985) es fa referència a jocs d'estalvis 1-convex, i seguint la filosofia de les seccions anteriors traslladarem aquest concepte a la classe dels jocs de costos.

Teorema A.29. *Sigui* (N, c) *un joc de costos. Aleshores,*

$$Core(c) = convex\{SC(c) + NSC(c)e^i \,/\, i \in N\} \Longleftrightarrow c \in C_1^N$$

on $e_k^i = \begin{cases} 1 & si \quad i = k, \\ 0 & si \quad i \neq k. \end{cases}$

Observi's que, de fet, cada vèrtex del core es pot obtenir a partir del vector de costos separables incrementant una única coordenada de manera que el vector resultant és eficient. Aquest procés és el que dóna nom als jocs 1-còncaus. Noti's que el cost no separable, $NSC(c)$, és positiu en la classe dels jocs 1-còncaus, el que es dedueix per la pròpia definició.

Com a conseqüència de l'anterior teorema, obtenim que els extrems del core són els vectors de costos separables ajustats eficientment.

Corol·lari A.30. *Sigui* (N, c) *un joc de costos 1-còncau. Aleshores,*

$$extrems\, Core(c) = \{SC(c) + NSC(c)e^i \,/\, i \in N\}.$$

Una altra conseqüència de l'anterior teorema l'obtenim quan el vector de costos separables és eficient. Aquest és l'únic cas en què el core és un únic punt.

Corol·lari A.31. *Sigui* (N, c) *un joc de costos 1-còncau. Aleshores, el core és un singleton si només si* $\displaystyle\sum_{i \in N} SC_i(c) = c(N)$.

Remarcar que per a un joc 1-còncau les restriccions del core es poden reduir a les restriccions que involucren $n - 1$ jugadors.

Proposició A.32. *Sigui* (N, c) *un joc de costos 1-còncau i* $x \in I^*(c)$. *Aleshores,*

$$x \in Core(c) \Longleftrightarrow x_i \geq SC_i(c) \quad per\ a\ tot\, i \in N.$$

En general la condició de concavitat i de 1-concavitat són diferents. La concavitat d'un joc 1-còncau només es dóna quan les desigualtats de l'expressió que caracteritza els jocs 1-còncaus es converteixen en igualtats.

Proposició A.33. *Sigui* (N, c) *un joc de costos. Aleshores c és 1-còncau i còncau si i només si* $\displaystyle c(S) = c(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(c) \quad per\ a\ tota\ \ S \subseteq N,\ S \neq \emptyset.$

Per últim, donarem una fórmula que permet calcular d'una manera senzilla el nucleolus i el valor de tau dels jocs 1-còncaus. Això és degut a què tant el nucleolus com el valor de tau són el centre de gravetat dels punts extrems del core dels jocs 1-còncaus.

Teorema A.34. *Sigui (N, c) un joc de costos 1-còncau. Aleshores, el nucleolus de c, $\eta(c)$, i el valor de tau de c, $\tau(c)$, coincideixen amb el centre de gravetat dels punts extrems del core, és a dir,*

$$\eta(c) = \tau(c) = SC(c) + NSC(c) \cdot \frac{e^N}{n}.$$

En general, per als jocs 1-còncaus, el valor de Shapley no guarda relació amb el centre de gravetat del core i no hi ha una fórmula explícita de càlcul.