Capítol 5

Jocs de demanda amb externalitats

En aquest capítol analitzarem uns jocs de demanda que tenen una funció de costos particular, el que anomenarem jocs de demanda amb externalitats.

L'objectiu és realitzar un estudi d'aquest model de joc de demanda, que a més correspon a un cas amb aplicacions pràctiques, com veurem, i analitzar quines propietats satisfà, així com alguns tipus de solucions aplicables als jocs cooperatius. En concret, estudiarem el core i les solucions puntuals clàssiques de la teoria de jocs cooperatius.

5.1 El model

El model de demanda particular que desenvolupem en aquesta secció està motivat per l'acord de compra de revistes electròniques que va realitzar el Consorci de Biblioteques Universitàries de Catalunya amb l'editorial Kluwer. Les dades del mencionat acord estan desenvolupades en el capítol 2.

L'acord es basa en l'adquisició de **totes** les revistes de l'editorial en versió electrònica. El preu final està establert en funció de la demanda històrica, és a dir, de les adquisicions que realitzava cada universitat amb anterioritat a l'acord. La xifra resultant està referida a la quantitat conjunta a pagar per part del consorci. La quantia total a pagar es desglossa en dues parts, depenent del preu de cada revista en format imprès:

- el 100 % del preu de les revistes que s'adquirien en el darrer període, comptant tots els exemplars (és a dir, també els duplicats), i

- el 10 % del preu de les revistes que no s'adquirien abans.

Aquesta via de fixació de tarifes permet l'ús del global de les revistes de l'editorial a tots els components del consorci, i en el model que presentarem l'anàlisi solament està pensat per a tot el conjunt de membres del consorci. En l'anàlisi a través d'un joc cooperatiu, aquesta dada es tradueix de forma natural en el valor de la coalició total. És a dir, que en l'avaluació de la funció característica es recullen dues parts: la primera computa el pagament de les revistes demandades i la segona engloba el pagament de la resta de revistes amb el preu reduït.

En realitat, darrere d'aquesta política de tarificació es descobreix una funció de costos. Un problema de demanda s'ha definit de forma que el preu d'un bé s'avalua en funció de les unitats demandades. En aquesta situació, el cost final imputable a un bé amb demanda no nul·la es determina a partir del preu (p) original del bé multiplicat per les unitats demandades. Per altra banda, el cost d'un bé no demandat es fixa en el 10 %. Així, la funció de costos per a qualsevol bé pren la forma:

$$f(x) := \begin{cases} 0'1 \cdot p & \text{si } x = 0, \\ & \\ x \cdot p & \text{en altre cas,} \end{cases}$$

on x assenyala el nombre d'unitats del bé demandades conjuntament.

L'acord fixa les següents dades:

- els membres del consorci,

$$N = \{1, \ldots, n\},$$

- el conjunt de revistes que ofereix l'editorial,

$$\mathcal{G} = \{\mathit{1}, \ldots, m\},$$

- les unitats de revistes demandades per cadascun dels membres del consorci, DP_i per a tot $i \in N$,
- el cost d'adquisició de cadascuna de les revistes en format imprès, $c_j > 0$ per a tot $j \in \mathcal{G}$,
- i el percentatge $\alpha = 0'1$ del preu que cal pagar per aquelles revistes no demandades per cap membre del consorci.

Per aconseguir una modelització de la situació plantejada a través d'un problema de demanda, cal conèixer amb exactitud quines són les funcions de costos. En aquest sentit, s'ha seguit la idea de determinació dels preus de l'acord i s'ha estès a qualsevol subcoalició de jugadors. Llavors les funcions de costos que considerarem són de la forma:

$$f_j^{\alpha}(x) := \begin{cases} \alpha \cdot c_j & \text{si } x = 0, \\ \\ x \cdot c_j & \text{en altre cas,} \end{cases}$$

on x indica el nombre d'unitats demandades del bé.

Un cop construïda la matriu de demanda del problema, D, a partir de les dades obtingudes dels jugadors, dels béns i dels perfils de demanda, podem procedir a definir el joc de demanda que resulta del problema presentat.

Per plantejar el joc ens basarem en el model de preus establert amb l'editorial Kluwer. Així, tindrem en compte que una coalició de jugadors ha de pagar per tot el conjunt de béns, però realitzant una diferenciació entre si els membres de la coalició són demandants del bé, i en aquest cas la coalició ha de suportar el cost d'adquirir aquests béns, o no són demandants, i en aquest cas la coalició ha de pagar un percentatge del cost d'aquests béns. Formalment,

Definició 5.1. *Sigui $\Omega_\alpha = (N, \mathcal{G}, D, \mathbf{f}^{\alpha})$ el problema cooperatiu de demanda derivat de l'acord. El joc de demanda amb externalitats, c_{Ω_α}, es defineix de la següent forma:*

$$c_{\Omega_\alpha}(\emptyset) := 0\,;$$

$$c_{\Omega_\alpha}(S) := \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in S} d_{ij} \cdot c_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ \sum_{i \in S} d_{ij} = 0}} \alpha \cdot c_j \quad \textit{per a tota}\, S \subseteq N,\, S \neq \emptyset.$$

Així, per a cada coalició S de jugadors, $c_{\Omega_\alpha}(S)$ denota el cost d'adquirir tots els béns, demandats i no demandats, pels membres de la coalició.

De la matriu de demanda, sabem que el nombre d'unitats del bé j demandades per una certa coalició S és $\sum_{i \in S} d_{ij}$. Si $\sum_{i \in S} d_{ij} = 0$, no hi ha usuaris del bé j entre els membres de la coalició S i, per tant, de forma alternativa podem escriure $u(j) \cap S = \emptyset$ o $s_j = 0$.

A continuació il·lustrarem amb un exemple la situació que volem analitzar.

Exemple 5.2. Sigui un problema cooperatiu de demanda $\Omega_\alpha = (N, \mathcal{G}, D, \mathbf{f}^{\alpha})$ on:

- $N = \{1, 2, 3\}$ són les universitats que formen el consorci,
- $\mathcal{G} = \{\mathit{1}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{4}\}$ són el conjunt de revistes que ofereix l'editorial,
- la matriu de demanda és

$$\mathrm{D} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

- $c = (10, 25, 15, 35)$ és el vector de preus de les revistes,
- i el percentatge a pagar per les revistes no demandades és del 20%, és a dir, $\alpha = 0'2$.

Aquesta situació es pot modelitzar per mitjà d'un joc de costos de demanda amb externalitats c_{Ω_α}, de manera que per a cada coalició S sabem quin és el cost en què ha d'incórrer. Així, per exemple si les universitats $\{1, 2\}$ decideixen formar una coalició només elles dues, el cost que han de suportar és la suma del cost de les seves respectives demandes, $2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 35 = 100$, més el 20% de les revistes que no demanden, $0'2 \cdot 25 = 5$, en total 105.

La funció característica associada al problema de demanda és:

$$c_{\Omega_\alpha}(1) = 65, \qquad c_{\Omega_\alpha}(2) = 52, \qquad c_{\Omega_\alpha}(3) = 25,$$

$$c_{\Omega_\alpha}(12) = 105, \quad c_{\Omega_\alpha}(13) = 75, \quad c_{\Omega_\alpha}(23) = 62,$$

$$c_{\Omega_\alpha}(123) = 115.$$

Cal remarcar que la cooperació provoca una reducció del cost, de manera que és més satisfactori per a les universitats actuar conjuntament a fer-ho per separat. Aquesta reducció de costos és deguda al fet, per una banda, de què el cost de les revistes no demandades recau entre més universitats i, per altra banda, a què disminueix la quantitat a pagar per revistes no demandades ja que pot succeir que revistes no demandades per una coalició ho siguin per una altra. Observi's que en el nostre exemple es manifesta aquesta situació, és a dir, per a qualsevol grup d'universitats sempre és més favorable demandar conjuntament a demandar per separat.

$\diamond$

5.2 Jocs simples de demanda

En aquest apartat descompondrem els jocs de demanda amb externalitats, presentant els jocs simples de demanda. Així, realitzarem una anàlisi en profunditat d'aquests jocs com a pas previ de l'anàlisi dels jocs de demanda amb externalitats.

5.2.1 Descomposició

S'observa clarament que el joc de demanda amb externalitats c_{Ω_α} està format per dos components. En el posterior estudi de les propietats del joc, i sense pèrdua de generalitat, s'ignora el primer component, que notarem per c_D, definit per

$$c_D(S) = \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in S} d_{ij}\cdot c_j \text{ per a tota coalició } S\subseteq N,$$

ja que representa un joc additiu. En un joc additiu, el cost de qualsevol coalició ve donat per la suma dels costos individuals dels membres de la coalició. En aquest cas concret és fàcil veure que, per a cada revista $j\in\mathcal{G}$, la pròpia estructura del joc determina la additivitat.

El segon component determina un joc al qual ens referim com joc d'externalitat (pura), i que designem per c_α, que es defineix

$$c_\alpha(S) = \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ \sum_{i\in S} d_{ij}=0}} \alpha\cdot c_j = \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ u(j)\cap S=\emptyset}} \alpha\cdot c_j \text{ per a tota coalició } S\subseteq N,\ S\neq\emptyset. \tag{5.1}$$

Llavors podem escriure el joc de demanda amb externalitats com

$$c_{\Omega_\alpha} = c_D + c_\alpha. \tag{5.2}$$

Aquest joc es descompon en una suma de diversos jocs, els quals, a la seva vegada, estan induïts pels jocs duals d'unanimitat (definits a l'apèndix A), els que anomenem jocs simples de demanda.

Definició 5.3. *El joc simple de demanda associat a la coalició* $T\subseteq N$, (N, w_T) *es defineix per*

$$w_T(\emptyset) := 0;$$

$$w_T(S) := 1 - u_T^*(S)\,,\ \textit{per a tota } S\subseteq N,\ S\neq\emptyset$$

on 1 es refereix al joc unitari, és a dir, el joc en el qual qualsevol coalició $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$ pren valor 1 i (N, u_T^*) és el joc dual d'unanimitat associat a T, on definim $u_\emptyset^* = 0$.

De forma equivalent, $w_T(S) := u_T(N \setminus S)$ per a tota $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. La definició anterior es pot analitzar de la següent manera:

$$w_T(S) = 1 \text{ per a tota } S \subseteq N,\ S \neq \emptyset,\ \text{si } S \cap T = \emptyset$$

i

$$w_T(S) = 0 \text{ per a tota } S \subseteq N,\ S \neq \emptyset,\ \text{si } S \cap T \neq \emptyset.$$

Observem que $w_\emptyset = 1$ per a tota $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, mentre que $w_N(S) = 0$ per a tota $S \subseteq N$.

Amb la definició anterior, el joc d'externalitat (N, c_α) es pot descompondre com a combinació lineal dels jocs simples de demanda (N, w_T), on les coalicions T estan formades pels demandants de cadascun dels béns.

Proposició 5.4. *Sigui (N, c_α) un joc d'externalitat i (N, w_T) el joc simple de demanda associat a la coalició T. Aleshores, el joc d'externalitat es descompon per*

$$c_\alpha = \sum_{j \in \mathcal{G}} \alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j)}, \tag{5.3}$$

o de forma implícita,

$$c_\alpha(S) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ u(j) \cap S = \emptyset}} \alpha \cdot c_j = \alpha \cdot \sum_{j \in \mathcal{G}} c_j \cdot w_{u(j)}(S) \quad \textit{per a tota } S \subseteq N. \tag{5.4}$$

Demostració:
La descomposició (5.4) és conseqüència directa de la funció característica del joc d'externalitat donat en (5.1).

□

La descomposició del joc d'externalitat com a combinació lineal dels jocs simples de demanda ens facilitarà l'anàlisi del joc c_α. Així, ens centrarem en l'estudi dels jocs simples de demanda. Aquest estudi es realitza com a pas previ d'una anàlisi més profunda del model general dels jocs de demanda amb externalitats. D'aquesta manera, estudiarem quines propietats satisfan els jocs simples de demanda, així com també durem a terme una anàlisi dels conceptes de solucions més usuals de la teoria de jocs cooperatius. En concret analitzarem l'estructura del core com a solució conjuntista i del valor de Shapley, el nucleolus i el valor de tau com a solucions puntuals. Aquests conceptes es troben definits a l'apèndix A.

5.2.2 Propietats

A continuació estudiarem quines propietats satisfà el joc simple de demanda, el que ens permetrà traslladar aquestes propietats als jocs d'externalitats. Així, ens centrarem en l'anàlisi de la subadditivitat, la 1-concavitat i la concavitat.

Recordem que un joc és **subadditiu** si per a tota $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$, es compleix que $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$.

Proposició 5.5. *El joc simple de demanda* (N, w_T) *associat a qualsevol* $T \subseteq N$ *és subadditiu.*

Demostració:
La coalició $T \subseteq N$, és la coalició sobre la qual es defineix el joc simple de demanda. Donades dues coalicions disjuntes qualssevol S i R, $S \cap R = \emptyset$, distingim els tres casos possibles:

1. $S \cap T = \emptyset$ i $R \cap T = \emptyset$. En aquest cas,
$$w_T(S) + w_T(R) = 1 + 1 = 2 \geq 1 = w_T(S \cup R).$$
2. $S \cap T \neq \emptyset$ i $R \cap T = \emptyset$. En aquest cas,
$$w_T(S) + w_T(R) = 1 = w_T(S \cup R).$$
3. $S \cap T \neq \emptyset$ i $R \cap T \neq \emptyset$. En aquest cas,
$$w_T(S) + w_T(R) = 0 = w_T(S \cup R).$$

Per tant, es compleix la condició de subadditivitat.

□

Seguidament, procedim a estudiar la 1-concavitat del joc simple de demanda. Un joc és **1-còncau** (veure la definició A.26 de l'apèndix A) si

$$\sum_{i \in N} SC_i(c) \leq c(N)$$

i

$$c(S) \geq c(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(c)$$

per a tota $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, on $SC_i(c) = c(N) - c(N \setminus \{i\})$ representa el cost separable del jugador i.

Teorema 5.6. *El joc simple de demanda* (N, w_T) *associat a qualsevol* $T \subsetneq N$, *és 1-còncau.*

Demostració:
Sigui $T \subsetneq N$ i consideri's el seu joc simple de demanda associat (N, w_T). Distingim tres casos en funció del nombre de jugadors pertanyents a T.

Cas 1. Suposem que $T = \emptyset$. Com que el valor de tota coalició és igual a 1,

$$w_\emptyset(S) = 1 \quad \text{per a tota } S \subseteq N, S \neq \emptyset.$$

Així s'obté que els costos separables són tots nuls,

$$SC_i(w_\emptyset) = w_\emptyset(N) - w_\emptyset(N \setminus \{i\}) = 0 \text{ per a tot } i \in N,$$

alhora que se satisfà

$$w_\emptyset(S) = 1 \geq w_\emptyset(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(w_\emptyset) = 1 \text{ per a tota } S \subseteq N, S \neq \emptyset.$$

Llavors, clarament el joc simple de demanda $(N, w_\emptyset)$ és un joc 1-còncau.

Cas 2. Suposem que $|T| = 1$, on $T = \{k\}$. Com que

$$\{k\} \cap (N \setminus \{i\}) \neq \emptyset \text{ per a tot } i \in N \setminus \{k\},$$

s'obté que els valors per a les coalicions total i les formades per tots els jugadors excepte el k són nuls,

$$w_{\{k\}}(N) = w_{\{k\}}(N \setminus \{i\}) = 0 \text{ per a tot } i \in N \setminus \{k\},$$

mentre que el valor de la coalició on hi falta el k, és

$$w_{\{k\}}(N \setminus \{k\}) = 1.$$

Llavors, els costos separables són

$$SC_i(w_{\{k\}}) = 0 \text{ per a tot } i \in N \setminus \{k\},$$

mentre que

$$SC_k(w_{\{k\}}) = -1.$$

Llavors, en funció de la pertinença del jugador k a una coalició, tenim que si $k \in S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$w_{\{k\}}(S) = 0 \geq w_{\{k\}}(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(w_{\{k\}}) = 0,$$

mentre que si $k \notin S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$,

$$w_{\{k\}}(S) = 1 \geq w_{\{k\}}(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_k(w_{\{k\}}) = 1.$$

Llavors, el joc simple de demanda $(N, w_{\{k\}})$ és un joc 1-còncau.

Cas 3. Suposem que $2 \leq |T| < n$. Com que

$$T \cap (N \setminus \{i\}) \neq \emptyset \text{ per a tot } i \in N,$$

s'obté que

$$w_T(N) = w_T(N \setminus \{i\}) = 0 \text{ per a tot } i \in N.$$

Llavors, $SC_i(w_T) = 0$ per a tot $i \in N$. Aleshores, com que $w_T(S)$ pren valors 0 o 1, en tot cas satisfà

$$w_T(S) \geq w_T(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(w_T) = w_T(N) = 0$$

per a tota $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Òbviament, el joc simple de demanda (N, w_T) on $|T| \geq 2$, $T \neq N$ és un joc 1-còncau.

□

Un cop vista la 1-concavitat, passarem a estudiar la **concavitat**, la qual indica que les contribucions marginals dels jugadors disminueixen a mesura que creix la coalició. Respecte a la concavitat del joc simple de demanda, aquesta únicament se satisfà sota estrictes condicions. Tal i com demostra Driessen (1988) (veure proposició A.33 de l'apèndix A), un joc 1-còncau c és també còncau si i només si

$$c(S) = c(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(c) \text{ per a tota } S \subseteq N,\ S \neq \emptyset. \tag{5.5}$$

Proposició 5.7. *El joc simple de demanda* (N, w_T) *associat a qualsevol* $T \subsetneq N$*, és còncau si i només si* $|T| \leq 1$.

Demostració:
En base a la demostració del teorema 5.6, quan $|T| = 1$ i $T = \emptyset$, se satisfà la igualtat establerta en (5.5). Per tant, el joc és còncau per a $|T| \leq 1$.

Per altra banda, si $|T| \geq 2, T \neq N$, la condició (5.5) no se satisfà, ja que per aquelles coalicions S tal que $S \cap T \neq \emptyset$ s'obté que $w_T(S) = 1 > w_T(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(w_T) = 0$.

□

Observació 5.8. *Les propietats de subadditivitat, 1-concavitat i concavitat per als jocs simples de demanda també se satisfan quan* $T = N$*, ja que en aquest cas* $w_N = 0$.

Per últim ens centrarem en l'estudi dels conceptes de solucions més usuals de la teoria de jocs cooperatius per als jocs simples de demanda.

5.2.3 El Core

El core és un concepte de solució que satisfà l'eficiència i la racionalitat coalicional. Els jocs amb core no buit s'anomenen jocs equilibrats (veure pàgina 176). Cal remarcar que els jocs 1-còncaus són equilibrats, i en conseqüència es produeix l'existència de distribucions en el core per als jocs simples de demanda.

Proposició 5.9. *El joc simple de demanda* (N, w_T) *associat a qualsevol* $T \subseteq N$ *és equilibrat.*

Demostració:
És immediat, com a conseqüència de la 1-concavitat del joc.

□

Seguidament es procedeix a estudiar l'estructura del core dels jocs simples de demanda, (N, w_T), la qual és funció del nombre de jugadors pertanyents a la coalició $T \subseteq N$. Una condició necessària i suficient per a la 1-concavitat d'un joc és que els vectors de costos separables ajustats eficientment són els vèrtexs del core del joc (veure corol·lari A.30 de l'apèndix A).

Proposició 5.10. *Sigui* (N, w_T) *el joc simple de demanda associat a la coalició* $T \subseteq N$*. Aleshores:*

- *Si* $T = \emptyset$, $Core(w_\emptyset) = convex\{e^i \,/\, i \in N\}$.
- *Si* $|T| = 1\,,\, T = \{k\}$, $Core(w_{\{k\}}) = convex\{e^i - e^k \,/\, i \in N\}$.
- *Si* $|T| \geq 2$, $Core(w_T) = \{\vec{0}\}$.

Demostració:
Considerem els tres casos possibles:

- Si $T = \emptyset$, el vector de costos separables és

  $$SC(w_\emptyset) = \vec{0}.$$

  Com que $w_\emptyset(N) = 1$, el procés d'ajustament eficient implica incrementar en una unitat un dels components del vector $SC(w_\emptyset)$.

  Per tant, el core del joc simple de demanda $(N, w_\emptyset)$ ve donat per

  $$Core(w_\emptyset) = convex\{e^i \,/\, i \in N\}.$$

- Si $|T| = 1\,,\, T = \{k\}$, el vector de costos separables és

  $$SC_i(w_{\{k\}}) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i = k, \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k. \end{cases}$$

  Com que $w_\emptyset(N) = 0$, el procés d'ajustament eficient s'obté incrementant en una unitat un dels components del vector $SC(w_{\{k\}})$.

  El core del joc simple de demanda $(N, w_{\{k\}})$ ve donat per

  $$Core(w_{\{k\}}) = convex\{e^i - e^k \,/\, i \in N\}.$$

- Si $|T| \geq 2$, el vector de costos separables és

  $$SC(w_T) = \vec{0}.$$

  Com que $w_T(N) = 0$, el vector de costos separables és eficient i, per tant, aquest és l'únic punt del core del joc. El core del joc simple de demanda (N, w_T), $2 \leq |T| \leq n$ ve donat per

  $$Core(w_T) = \{\vec{0}\}.$$

$\square$

5.2.4 Solucions puntuals

I ja per acabar, ens centrarem en l'estudi de les solucions puntuals per als jocs simples de demanda.

El **valor de Shapley** d'un joc cooperatiu és el concepte de solució més estès, i està caracteritzat pels axiomes d'eficiència, additivitat, simetria i propietat del jugador fals. A partir d'aquests axiomes, podem doncs obtenir el valor de Shapley d'un joc simple de demanda.

Proposició 5.11. *El valor de Shapley d'un joc simple de demanda* (N, w_T) *és*

$$\phi_i(w_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{|T|} & \text{si} \quad i \in T, \\ \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad i \notin T. \end{cases}$$

Demostració:
Donat el joc simple de demanda $w_T = 1 - u_T^*$, per l'additivitat del valor de Shapley, tenim que

$$\phi(w_T) = \phi(1) - \phi(u_T^*).$$

Aplicant les propietats d'eficiència i simetria és immediat que

$$\phi_i(1) = \frac{1}{n} \text{ per a tot } i \in N.$$

En quant al joc dual d'unanimitat associat a la coalició T, definit per

$$u_T^*(S) := \begin{cases} 1 & \text{si } S \cap T \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \text{si } S \cap T = \emptyset, \end{cases}$$

també és immediat per eficiència, simetria i la propietat del jugador fals que

$$\phi_i(u_T^*) = \begin{cases} \dfrac{1}{|T|} & \text{si } i \in T, \\ \\ 0 & \text{si } i \notin T. \end{cases}$$

Finalment, agregant s'obté el valor de Shapley proposat per al joc simple de demanda.

□

És desitjable que les solucions puntuals estudiades estiguin incloses en el core del joc. En aquest cas, és fàcil veure que, en general, el valor de Shapley d'un joc simple de demanda no pertany al core, i el següent exemple ho posa de manifest:

Exemple 5.12. Sigui un joc simple de demanda amb $N = \{1, 2, 3\}$ i $T = \{1, 2\}$. Llavors,

$$w_T(3) = 1\,,\ w_T(S) = 0 \text{ per a tota } S \neq \{3\}.$$

El valor de Shapley és

$$\phi_1(w_T) = \phi_2(w_T) = -\frac{1}{6}\,,\ \phi_3(w_T) = \frac{1}{3}.$$

Per a les coalicions $\{1, 3\}$ i $\{2, 3\}$ no es compleix la condició de pertinença al core. Així, per a $S = \{1,3\}$ i $S = \{2,3\}$,

$$\phi_1(w_T) + \phi_3(w_T) = \frac{1}{6} > w_T(13) = 0,$$

$$\phi_2(w_T) + \phi_3(w_T) = \frac{1}{6} > w_T(23) = 0.$$

$\diamond$

Una altra solució puntual molt estudiada en la literatura de teoria de jocs és el nucleolus. La característica més destacada d'aquesta solució és la pertinença al core, sempre i quan aquest sigui no buit. En canvi, el valor de tau és una solució de compromís entre dues cotes.

El **nucleolus** d'un joc 1-còncau coincideix amb el centre de gravetat del core del joc (veure teorema A.34 de l'apèndix A). Per aquest motiu, ens proposem determinar el nucleolus del joc simple de demanda en funció del nombre de jugadors pertanyents a T, de la mateixa manera que s'ha determinat el seu core. Remarcar que per als jocs 1-còncaus el nucleolus i el **valor de tau** coincideixen (teorema A.34 de l'apèndix A) i, per tant, ens referirem a ells com un únic concepte de solució.

Proposició 5.13. *Sigui (N, w_T) el joc simple de demanda associat a la coalició $T \subseteq N$. En funció del nombre de jugadors de T, el nucleolus $\eta(w_T)$ i el valor de tau $\tau(w_T)$ són:*

a) Si $T = \emptyset$,

$$\eta_i(w_\emptyset) = \tau_i(w_\emptyset) = \frac{1}{n} \text{ per a tot } \quad i \in N.$$

b) Si $|T| = 1\,, T = \{k\}$,

$$\eta_i(w_{\{k\}}) = \tau_i(w_{\{k\}}) = \begin{cases} \dfrac{1-n}{n} & si \quad i = k, \\[2ex] \dfrac{1}{n} & si \quad i \neq k. \end{cases}$$

c) Si $|T| \geq 2$,

$$\eta_i(w_T) = \tau_i(w_T) = 0 \;\; per\ a\ tot \quad i \in N.$$

Demostració:

En el cas que $T = \emptyset$, és immediat per eficiència i simetria que el valor de la coalició total, $w_\emptyset = 1$, es reparteix a parts iguals.

En el cas que $|T| = 1\,, T = \{k\}$, el centre de gravetat del core és:

$$x = SC(w_{\{k\}}) + NSC(w_{\{k\}}) \cdot \frac{e^N}{n},$$

on

$$SC_i(w_{\{k\}}) = 0 \text{ per a tot } i \in N \setminus \{k\}, \;\; SC_i(w_{\{k\}}) = -1$$

i

$$NSC(w_{\{k\}}) = w_{\{k\}}(N) - \sum_{i \in N} SC_i(w_{\{k\}}) = 1.$$

Així, per al jugador k es té $x_k = -1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1-n}{n}$. I per a la resta de jugadors, $x_i = \dfrac{1}{n}$.

En el cas que $|T| \geq 2$, és immediat ja que el core té un únic punt, el vector nul.

$\square$

5.3 Propietats

En la present secció s'estudien diferents propietats del joc de demanda amb externalitats (N, c_{Ω_α}), així com el seu significat intuïtiu dins el context econòmic.

Les propietats d'aquesta classe de jocs ens permetrà decidir si un determinat concepte de solució és apropiat o no.

Ens centrarem en l'additivitat, la subadditivitat, la monotonia, la concavitat i la 1-concavitat del joc. Per a l'anàlisi d'algunes d'aquestes propietats, utilitzarem els resultats obtinguts en la secció anterior per als jocs simples de demanda.

Recordem que el joc de demanda amb externalitats ve donat per:

$$
\begin{aligned}
c_{\Omega_\alpha}(\emptyset) &:= 0\,; \\
c_{\Omega_\alpha}(S) &:= \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in S} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G} \\ \sum_{i\in S} d_{ij}=0}} \alpha\cdot c_j\,, \quad \text{per a tota}\, S\subseteq N,\ S\neq\emptyset.
\end{aligned}
$$

I recordem que, segons com hem vist en 5.2 tot joc de demanda amb externalitats es pot descompondre com

$$c_{\Omega_\alpha} = c_D + c_\alpha$$

on c_D és un joc additiu i c_α és el joc d'externalitat.

Respecte a l'**additivitat** del joc és fàcil comprovar que (N, c_{Ω_α}) serà additiu si i només si el joc d'externalitat és el joc nul. Això es produirà en tres casos: si el percentatge és zero, si tots els béns són demandats per tothom i finalment si el preu és zero per a tot bé que sigui no demandat per algú.

Proposició 5.14. *Sigui (N, c_{Ω_α}) un joc de demanda amb externalitats. Llavors, el joc c_{Ω_α} és additiu si es compleix alguna de les següents condicions:*

- $\alpha = 0$.
- $d_{ij} > 0$ *per a tot* $i\in N$ *i per a tot* $j\in\mathcal{G}$.
- $c_j = 0$ *per a tot* $j\in\mathcal{G}$ *tal que* $n > n_j$.

Demostració:

Aquesta implicació és immediata ja que si $\alpha = 0$, o $d_{ij} > 0$ per a tot $i\in N$ i per a tot $j\in\mathcal{G}$ o $c_j = 0$ per a tot $j\in\mathcal{G}$ tal que $n > n_j$, aleshores $c_\alpha(S) = 0$ per a tota $S\subseteq N$. I, per tant, $c_{\Omega_\alpha} = c_D$ on c_D és un joc additiu.

$\square$

Així, el joc de demanda amb externalitats quedarà determinat per la suma dels costos generats per les demandes individuals de cadascun dels membres de la coalició només si es satisfan algunes de les condicions anteriors.

Corol·lari 5.15. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Llavors, el joc* c_{Ω_α} *és additiu si* $c_\alpha = 0$.

Anem ara a analitzar la **subadditivitat** del joc de demanda amb externalitats. Per això utilitzarem el resultat obtingut a la secció anterior on es demostra que els jocs simples de demanda són subadditius.

Proposició 5.16. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Llavors, el joc* c_{Ω_α} *és subadditiu.*

Demostració:
Com $c_{\Omega_\alpha} = c_D + c_\alpha$ on c_D és un joc additiu, hi ha suficient amb demostrar que el joc d'externalitat c_α és subadditiu.

Per la descomposició efectuada en (5.3), es pot estendre la subadditivitat assolida en els jocs simples de demanda als jocs d'externalitat (proposició 5.5). Així, c_{Ω_α} és subadditiu.

□

La subadditivitat del joc de demanda amb externalitats c_{Ω_α} és una "bona"propietat, ja que implica que hi ha incentius a formar la coalició total i, per tant, a què totes les universitats actuïn conjuntament. Així, per a qualsevol dues coalicions disjuntes és més favorable unir-se perquè la unió els hi produeix una disminució de costos, amb l'esquema d'actuació previst.

A continuació estudiarem la **monotonia** del joc. Com es pot veure en la definició A.19 de l'apèndix A, un joc és monòton si $c(S) \leq c(T)$ per a tota $S \subseteq T \subseteq N$. En el nostre model, aquesta propietat indica que a mesura que augmenta el nombre d'universitats d'una coalició el cost per a aquesta coalició també incrementa i això és degut a l'increment en el nombre de revistes demandades.

Proposició 5.17. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Llavors, el joc* c_{Ω_α} *és monòton.*

Demostració:
Cal veure que $c_{\Omega_\alpha}(S) \leq c_{\Omega_\alpha}(T)$ per a tota $S \subseteq T \subseteq N$. Ho veurem comprovant que $c_{\Omega_\alpha}(T) - c_{\Omega_\alpha}(S) \geq 0$.

$$c_{\Omega_\alpha}(T) - c_{\Omega_\alpha}(S) \geq$$

$$\geq \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{Tj}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Tj}=0}} \alpha\cdot c_j - \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{Sj}\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0}} \alpha\cdot c_j =$$

$$= \sum_{j\in\mathcal{G}} (d_{Tj} - d_{Sj})\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Tj}=0}} \alpha\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0}} \alpha\cdot c_j =$$

$$= \sum_{j\in\mathcal{G}} (d_{Tj} - d_{Sj})\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Tj}=0}} \alpha\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0,\, d_{Tj}=0}} \alpha\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0,\, d_{Tj}\neq 0}} \alpha\cdot c_j =$$

$$= \sum_{j\in\mathcal{G}} (d_{Tj} - d_{Sj})\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0,\, d_{Tj}\neq 0}} \alpha\cdot c_j =$$

$$= \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0,\, d_{Tj}\neq 0}} d_{Tj}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}\neq 0,\, d_{Tj}\neq 0}} (d_{Tj} - d_{Sj})\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0,\, d_{Tj}\neq 0}} \alpha\cdot c_j =$$

$$= \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0,\, d_{Tj}\neq 0}} (d_{Tj} - \alpha)\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}\neq 0,\, d_{Tj}\neq 0}} (d_{Tj} - d_{Sj})\cdot c_j \geq 0\,.$$

□

La diferència de cost entre una coalició T i una subcoalició S d'aquesta està doncs formada per dos tipus de béns. Els primers són aquells que tenen demandants dins de T i, en canvi, cap demandant en S; en aquest cas, la diferència entre les unitats demandades pels membres de T sempre és una quantitat superior al percentatge α que han de pagar els de S, que com cal recordar és un nombre entre 0 i 1. Els altres béns són els que tenen demandants dins de S i, conseqüentment també en T, de manera que la diferència és novament positiva o nul·la. Per tant, se satisfà la monotonia del joc.

Observació 5.18. *En general, el joc d'externalitat c_α no és monòton.*

Seguidament estudiarem la **monotonia en l'estalvi** del joc. Com es defineix a l'apèndix A, un joc és monòton en l'estalvi si $c(S) + \sum_{i\in T\setminus S} c(i) \geq$

$c(T)$ per a tota $S \subseteq T \subseteq N$. La monotonia en l'estalvi és una bona propietat a satisfer per un joc de costos. En el nostre model, aquesta propietat indica que, a mesura que incrementa el nombre d'universitats d'una coalició, l'estalvi per a aquesta coalició no decreix.

Proposició 5.19. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Llavors, el joc* c_{Ω_α} *és monòton en l'estalvi.*

Demostració:
Cal veure que $c_{\Omega_\alpha}(S) + \sum_{i \in T \setminus S} c_{\Omega_\alpha}(i) \geq c_{\Omega_\alpha}(T)$ per a tota $S \subseteq T \subseteq N$:

$$\begin{aligned} c_{\Omega_\alpha}(S) + \sum_{i \in T \setminus S} c_{\Omega_\alpha}(i) &= \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in S} d_{ij} \cdot c_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{Sj}=0}} \alpha \cdot c_j + \\ &\quad + \sum_{i \in T \setminus S} \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j + \sum_{i \in T \setminus S} \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{ij}=0}} \alpha \cdot c_j = \\ &= \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in T} d_{ij} \cdot c_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{Sj}=0}} \alpha \cdot c_j + \sum_{i \in T \setminus S} \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{ij}=0}} \alpha \cdot c_j \geq \\ &\geq \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in T} d_{ij} \cdot c_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{Tj}=0}} \alpha \cdot c_j = c_{\Omega_\alpha}(T). \end{aligned}$$

□

La monotonia en l'estalvi assegura l'incentiu que té tota coalició a afegir altres jugadors al joc, ja que això fa incrementar el seu estalvi.

Analitzem ara la **1-concavitat** del joc de demanda amb externalitats. Cal remarcar que aquesta propietat juga un paper fonamental en la proposta de solucions que realitzarem posteriorment en els jocs de demanda amb externalitats.

Recordem que un joc c és 1-còncau si quan es considera qualsevol coalició S, i als jugadors de fora de S se'ls fa incórrer en el seu cost separable, el que queda del cost total per la coalició S és, com a molt, el seu cost $c(S)$.

Per provar la 1-concavitat dels jocs de demanda amb externalitats farem ús del resultat obtingut en els jocs simples de demanda.

Teorema 5.20. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Llavors, el joc* c_{Ω_α} *és 1-còncau.*

Demostració:
Com $c_{\Omega_\alpha} = c_D + c_\alpha$ on c_D és un joc additiu, hi ha suficient amb demostrar que el joc d'externalitat c_α és 1-còncau.

Per la descomposició efectuada en (5.4), c_α és combinació lineal de jocs simples de demanda que són jocs 1-còncaus (teorema 5.6). Per les propietats dels jocs 1-còncaus, la combinació per la suma i pel producte per un escalar positiu de jocs 1-còncaus dóna lloc a un joc 1-còncau. Així, es pot estendre la 1-concavitat assolida en els jocs simples de demanda als jocs d'externalitat. I pel mateix motiu, podem afirmar que c_{Ω_α} és 1-còncau.

□

Per últim, procedirem a estudiar la **concavitat** i veurem que, en general, els jocs de demanda amb externalitats no satisfan la propietat de concavitat. La concavitat en els jocs de demanda amb externalitats només s'assoleix sota estrictes condicions. Veurem seguidament que la concavitat únicament depèn del nombre de demandants, sense considerar el nombre de jugadors ni els preus dels béns, quan tenim com a mínim tres jugadors (el cas de dos jugadors no l'analitzarem ja que la concavitat en aquest cas és equivalent a l'existència d'imputacions). De nou, s'utilitza el resultat referent a la concavitat dels joc simples de demanda com a pas previ del resultat.

Proposició 5.21. *El joc d'externalitat* (N, c_α) $|N| \geq 3$ *és còncau si i només si per a tot* $j \in \mathcal{G}$, *o* $n_j \leq 1$ *o* $n_j = n$.

Demostració:
$\Leftarrow$) De l'expressió (5.3) tenim que

$$c_\alpha = \sum_{j \in \mathcal{G}} \alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j)}.$$

Com que per a tot $j \in \mathcal{G}$, $n_j \leq 1$ o $n_j = n$, per la proposició 5.7 els jocs $w_{u(j)}$ són còncaus. I la combinació lineal positiva de jocs còncaus és un joc còncau.

$\Rightarrow$) Com c_α és còncau i 1-còncau, llavors

$$c_\alpha(S) = c_\alpha(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(c_\alpha).$$

Si existeix un bé j^* tal que $2 \leq n_j^* < n$, llavors sabem que per la proposició 5.7 existeix una coalició $S \subseteq N$ tal que

$$w_{u(j^*)}(S) > w_{u(j^*)}(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(w_{u(j^*)}). \tag{5.6}$$

Així, si multipliquem (5.6) per $\alpha \cdot c_j$ tenim

$$\alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j^*)}(S) > \alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j^*)}(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(\alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j^*)}). \quad (5.7)$$

i per a tot $j \neq j^*$, sabem que el joc d'externalitat és 1-còncau, és a dir,

$$\alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j)}(S) \geq \alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j)}(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(\alpha \cdot c_j \cdot w_{u(j)}). \quad (5.8)$$

De manera que agregant (5.7) i (5.8)

$$c_\alpha(S) > c_\alpha(N) - \sum_{i \in N \setminus S} SC_i(c_\alpha)$$

i s'arriba a contradicció.

□

Corol·lari 5.22. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats amb* $|N| \geq 3$. *Llavors, el joc* c_{Ω_α} *és còncau si i només si* $n_j \leq 1$ *o* $n_j = n$ *per a tot* $j \in \mathcal{G}$.

Demostració:
Com que $c_{\Omega_\alpha} = c_D + c_\alpha$ on c_D és un joc additiu, hi ha suficient amb demostrar que el joc d'externalitat c_α és còncau. Per la proposició 5.21 això succeirà si i només si $n_j \leq 1$ o $n_j = n$ per a tot $j \in \mathcal{G}$.

□

Així, en els jocs de demanda amb externalitats les contribucions marginals dels jugadors disminueixen a mesura que creix la coalició, en casos molt concrets, quan tots els béns tenen un únic demandant, tots els jugadors en són demandants o no tenen cap demandant. Observi's que si hi ha un bé que té dos usuaris, per exemple, i algun altre no usuari, quan un d'ells s'uneix a un no usuari el seu cost separable és negatiu mentre que si s'afegeix a una coalició formada per un no usuari i un usuari el cost separable és zero.

5.4 El Core

Donat un problema cooperatiu de demanda $\Omega_\alpha = (N, \mathcal{G}, D, \mathbf{f}^\alpha)$, el problema que es planteja és dividir els costos generats en l'adquisició dels béns $c_{\Omega_\alpha}(N)$ entre els jugadors.

En aquest apartat, nosaltres prendrem com a repartiment dels costos unes distribucions que pertanyen a un concepte de solució conjuntista àmpliament utilitzat dins la teoria de jocs cooperatius, el core. Les solucions que pertanyen al core satisfan la desitjada propietat de què qualsevol coalició està d'acord amb aquesta distribució ja que el cost total que se li imputa és inferior al cost en el que hauria d'incórrer per ella mateixa, és a dir, les distribucions del core satisfan l'anomenada racionalitat coalicional.

El propòsit d'aquest apartat és veure que el joc cooperatiu de demanda amb externalitats té el core no buit, és a dir, que podem trobar distribucions eficients que satisfan la racionalitat coalicional. A més, determinarem el core del joc donant els seus vèrtexs.

Proposició 5.23. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc cooperatiu de demanda amb externalitats. Llavors el core d'aquest joc és no buit.*

Demostració:
A partir del teorema 5.20, que ens diu que el joc de demanda amb externalitat és 1-còncau, tenim que el core no és buit com a conseqüència del teorema A.29.

□

És més, el core d'un joc de demanda amb externalitats és la suma dels cores del joc additiu i del joc d'externalitat.

Teorema 5.24. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Aleshores,*

$$Core(c_{\Omega_\alpha}) = Core(c_D) + Core(c_\alpha)$$

on c_D *i* c_α *són respectivament el joc additiu i el joc d'externalitat associats a* c_{Ω_α}.

Demostració:
La demostració és immediata ja que c_D és un joc additiu, i el core d'un joc additiu es redueix a un punt.

□

Com és ben conegut (veure apèndix A), per als jocs còncaus és condició necessària i suficient que el core del joc contingui tots els vectors de contribucions marginals. De forma similar, la 1-concavitat es caracteritza pel fet que tots els vectors de costos separables ajustats eficientment pertanyin al core del joc, tal i com s'enuncia en el teorema A.29 de l'apèndix A. A més, pel corol·lari A.30 sabem que aquests vectors són els vèrtexs del core, el que implica que el core té exactament n vèrtexs. D'aquesta forma, si determinem el vector de costos separables del joc de demanda podrem obtenir els vèrtexs del core. El cost separable per a un jugador $i \in N$ (veure pàgina 180) al joc de demanda amb externalitats és:

$$\begin{aligned} SC_i(c_{\Omega_\alpha}) &= c_{\Omega_\alpha}(N) - c_{\Omega_\alpha}(N \setminus \{i\}) = \\ &= \sum_{j\in\mathcal{G}} \sum_{k\in N} d_{kj} \cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G} \\ u(j)=\emptyset}} \alpha \cdot c_j - \sum_{j\in\mathcal{G}} \sum_{k\in N\setminus i} d_{kj} \cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G} \\ u(j)\subseteq\{i\}}} \alpha \cdot c_j = \\ &= \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G} \\ u(j)=\{i\}}} \alpha \cdot c_j = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G} \\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha \cdot c_j \end{aligned} \tag{5.9}$$

per a tot $i \in N$.

Així, el vector de costos separables queda

$$SC(c_{\Omega_\alpha}) = (SC_1(c_{\Omega_\alpha}), \ldots, SC_n(c_{\Omega_\alpha})) \tag{5.10}$$

on $SC_i(c_{\Omega_\alpha})$ és l'expressió obtinguda anteriorment.

El cost separable d'un jugador indica la part del cost que el jugador ha de suportar. En els jocs de demanda amb externalitats el cost separable per a un jugador es descompon en dues parts: d'aquells béns dels quals no és l'únic demandant paga el cost de les unitats que demanda, i d'aquells béns que només compra ell suporta el seu cost menys el preu reduït del bé.

Calcularem el diferencial entre l'eficiència i la suma dels costos separables, per tal de procedir a l'ajust eficient. Aquesta quantitat és coneguda en la literatura de jocs com els costos no separables.

$$
\begin{aligned}
NSC(c_{\Omega_\alpha}) &= c_{\Omega_\alpha}(N) - \sum_{i\in N} SC_i(c_{\Omega_\alpha}) = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in N} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j - \sum_{i\in N}\sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{i\in N}\sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha\cdot c_j = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in N} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j - \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in N} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1}} \alpha\cdot c_j = \\
&= \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1}} \alpha\cdot c_j = \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\leq 1}} \alpha\cdot c_j.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Els costos no separables representen la quantitat que queda per repartir del cost total després d'assignar a cadascun dels jugadors el seu cost separable. En el nostre model aquesta quantitat correspon al preu reduït dels béns no demandats més el preu reduït dels béns amb un únic demandant.

Així doncs, els vectors de costos separables ajustats eficientment s'obtenen incrementant *una* de les coordenades en la quantitat obtinguda dels costos no separables. És a dir, si afegim els costos no separables al cost separable d'un jugador i tindrem

$$
\begin{aligned}
SC_i(c_{\Omega_\alpha}) + NSC(c_{\Omega_\alpha}) &= \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\leq 1}} \alpha\cdot c_j = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1}} \alpha\cdot c_j = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}=0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j.
\end{aligned}
$$

Proposició 5.25. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. Aleshores, el core del joc* c_{Ω_α} *té* n *vèrtexs, els quals designarem per* $x^k \in \mathbb{R}^N$ *per a cada* $k \in N$, *on*

$$x_i^k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}=0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j & si \quad i=k, \\ \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha\cdot c_j & si \quad i\neq k. \end{cases}$$

Demostració:

La demostració és immediata pel corol·lari A.30 de l'apèndix A, ja que els extrems del core d'un joc 1-còncau són els vectors de costos separables ajustats eficientment.

$\square$

Així, si prenem una distribució del core d'un joc de demanda amb externalitats, el màxim que pagarà un jugador és el cost de la seva demanda més el preu reduït dels béns no demandats per ningú i dels béns amb un únic demandant que no és ell; mentre que el mínim que se li assignarà serà el seu cost separable.

El problema que es planteja davant tota solució conjuntista és la necessitat de triar, al final, una única distribució com a mètode final de repartiment. Així, donat un problema cooperatiu de demanda, el qual hem representat com un joc cooperatiu de costos, un dels primers objectius que se'ns planteja és obtenir una distribució de repartiment dels costos que genera la coalició total. En aquest cas, a partir del model plantejat, volem trobar una manera de repartir els costos d'adquisició d'un conjunt de revistes entre els membres d'un consorci de biblioteques.

Dins la teoria de jocs cooperatius hi ha diferents solucions que proporcionen una única distribució que dóna el repartiment del cost, entre elles es troben el valor de Shapley, el nucleolus i el valor de tau. En les properes seccions ens centrarem en facilitar fórmules de càlcul d'aquests conceptes de solucions puntuals. La principal característica d'aquestes expressions és que no necessitem recórrer a la funció característica pel seu còmput, sinó que amb les dades del problema cooperatiu de demanda en tenim suficient. Això és degut a dos motius: per una banda la 1-concavitat del joc i per altra banda a l'estructura especial del model estudiat.

5.5 El valor de Shapley

El valor [de Shapley] va ser introduït per Shapley (1953) [69]. Com s'esmenta en l'apèndix A, aquest concepte de solució puntual està caracteritzat pels axiomes d'eficiència, additivitat, simetria i propietat del jugador fals. A partir d'aquests axiomes i a partir de la descomposició efectuada en la secció 5.2 podrem doncs obtenir el valor de Shapley d'un joc de demanda amb externalitats d'una manera molt senzilla.

Proposició 5.26. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats. El valor de Shapley del joc* c_{Ω_α} *és*

$$\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{j\in\mathcal{G}} \frac{1}{n}\cdot\alpha\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \frac{1}{n_j}\cdot\alpha\cdot c_j \tag{5.12}$$

per a tot $i \in N$.

Demostració:
Donada l'additivitat, calcularem el valor de Shapley del joc de demanda com la suma dels valors de Shapley dels jocs c_D i c_α.

i) Donat $(N,\, c_D)$ on c_D és un joc additiu, el valor de Shapley assigna els costos individuals de les seves demandes, així:

$$\phi_i(c_D) = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j \text{ per a tot } i\in N.$$

ii) Donat $(N,\, c_\alpha)$ definit a (5.4) per a cada $S\subseteq N$, $S\neq\emptyset$ com

$$c_\alpha(S) = \sum_{\substack{j\,\in\mathcal{G}\\ u(j)\,\cap\, S=\emptyset}} \alpha\cdot c_j = \alpha\cdot\sum_{j\,\in\mathcal{G}} c_j\cdot w_{u(j)}(S),$$

el valor de Shapley de c_α s'obté d'una manera fàcil, aplicant la fórmula del valor de Shapley per als jocs simples de demanda obtinguda a la proposició 5.11.

Així, per a qualsevol $i\in N$,

$$\phi_i(c_\alpha) = \sum_{j\in\mathcal{G}} \phi_i(w_{u(j)})\cdot\alpha\cdot c_j = \sum_{j\in\mathcal{G}} \frac{1}{n}\cdot\alpha\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \frac{1}{n_j}\cdot\alpha\cdot c_j.$$

Ara, per additivitat $\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \phi_i(c_D) + \phi_i(c_\alpha)$ per a tot $i \in N$.

$\square$

La interpretació intuïtiva del valor de Shapley per als jocs de demanda amb externalitats és la següent: el valor de Shapley imputarà el cost total diferenciant entre demandants i no demandants dels béns. Sembla raonable que tot i que un agent no sigui demandant del bé suporti una part del cost d'aquest, ja que farà ús del bé, i per tant, la part a imputar-li podria ser el preu reduït que hauria de pagar per no ser demandant del bé dividit a parts iguals entre els agents. Mentre que als demandants se'ls hi faria pagar per les unitats demandades però descomptant-els-hi la part pagada pels no demandants a parts iguals; aquest descompte aplicat és degut al fet que el bé és utilitzat per demandants i no demandants i, per tant, no seria lògic que els demandants carreguessin amb tot el cost.

A continuació il·lustrarem amb un exemple el criteri de repartiment del valor de Shapley.

Exemple 5.27. Sigui el problema de demanda de l'exemple 5.2, on la matriu de demanda és

$$\mathrm{D} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

els preus dels béns $c_1 = 10$, $c_2 = 25$, $c_3 = 15$ i $c_4 = 35$ i $\alpha = 0'2$.
El cost total a repartir és, doncs,

$$\begin{aligned} c_{\Omega\alpha}(N) &= 3 \cdot c_1 + 3 \cdot c_3 + c_4 + 0'2 \cdot c_2 = \\ &= 3 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 35 + 0'2 \cdot 25 = 115. \end{aligned}$$

En aquest cas, el nombre d'usuaris de cada bé és:

$$n_{\mathit{1}} = 3,\ n_{\mathit{2}} = 0,\ n_{\mathit{3}} = 2,\ n_{\mathit{4}} = 1.$$

El valor de Shapley assigna els següents pagaments:

$$\begin{aligned} \phi_1(c_{\Omega\alpha}) &= 0'2 \cdot \tfrac{25}{3} + 10 + 15\left(1 + 0'2 \cdot \tfrac{1}{3} - 0'2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) + \\ &\quad +35\left(1 + 0'2 \cdot \tfrac{1}{3} - 0'2\right) = 56'5, \\ \phi_2(c_{\Omega\alpha}) &= 0'2 \cdot \left(\tfrac{25}{3} + \tfrac{35}{3}\right) + 10 + 15\left(2 + 0'2 \cdot \tfrac{1}{3} - 0'2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 43'5, \\ \phi_3(c_{\Omega\alpha}) &= 0'2 \cdot \left(\tfrac{25}{3} + \tfrac{15}{3} + \tfrac{35}{3}\right) + 10 = 15. \end{aligned}$$

Observi's que els jugadors paguen una quantitat inferior al seu cost individual, que no és més que la suma del cost de les seves demandes més el percentatge corresponent dels béns no demandats.

$\diamond$

És desitjable que les solucions puntuals estudiades estiguin incloses en el core del joc. En aquest cas, és fàcil veure que, en general, el valor de Shapley no hi pertany, com a l'exemple següent:

Exemple 5.28. Sigui un problema de demanda amb un únic bé, $\mathcal{G} = \{\mathit{1}\}$, amb un preu qualsevol $c_{\mathit{1}} > 0$ i tres jugadors, $N = \{1, 2, 3\}$. i considerem un percentatge α qualsevol, on $0 \leq \alpha \leq 1$. Els jugadors 1 i 2 demanden una unitat del bé mentre que el 3 no el demanda:

$$\mathrm{D} = \begin{array}{c c} & \mathit{1} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La funció característica associada al problema de demanda és:

$$c_{\Omega_\alpha}(1) = c_1, \qquad c_{\Omega_\alpha}(2) = c_1, \qquad c_{\Omega_\alpha}(3) = \alpha \cdot c_1,$$

$$c_{\Omega_\alpha}(12) = 2c_1, \qquad c_{\Omega_\alpha}(13) = c_1, \qquad c_{\Omega_\alpha}(23) = c_1,$$

$$c_{\Omega_\alpha}(123) = 2c_1.$$

El valor de Shapley és:

$$\phi(c_{\Omega\alpha}) = \left(c_{\mathit{1}} - \frac{\alpha \cdot c_{\mathit{1}}}{6}, c_{\mathit{1}} - \frac{\alpha \cdot c_{\mathit{1}}}{6}, \frac{\alpha \cdot c_1}{3}\right).$$

Observi's que per a les coalicions $\{1, 3\}$ i $\{2, 3\}$ no es compleix la condició de pertinença al core. Així, per a $\{1, 3\}$ i per a $\{2, 3\}$

$$\phi_1(c_{\Omega\alpha}) + \phi_3(c_{\Omega\alpha}) = c_{\mathit{1}} + \frac{\alpha \cdot c_{\mathit{1}}}{6} > c_{\mathit{1}} = c_{\Omega_\alpha}(13),$$

$$\phi_2(c_{\Omega\alpha}) + \phi_3(c_{\Omega\alpha}) = c_{\mathit{1}} + \frac{\alpha \cdot c_{\mathit{1}}}{6} > c_{\mathit{1}} = c_{\Omega_\alpha}(23).$$

$\diamond$

Com hem vist en l'exemple anterior, el valor de Shapley en general no pertany al core. Ara bé, si el joc és còncau es pot assegurar que el valor de Shapley està inclòs en el core. En dos casos particulars en què el joc és còncau, podem donar una expressió més compacta del valor de Shapley: quan tots els béns tenen un demandant o menys, o bé tots els jugadors són demandants dels béns.

Observació 5.29. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitats amb* $n_j \leq 1$ *o* $n_j = n$ *per a tot* $j \in \mathcal{G}$. *Aleshores, el valor de Shapley pertany al core de* c_{Ω_α} *i les seves expressions són respectivament:*

- *Si* $n_j \leq 1$*:*

$$\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{ij} \neq 0}} (d_{ij} - \alpha) \cdot c_j \text{ per a tot } i \in N.$$

- *Si* $n_j = n$*:*

$$\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j \text{ per a tot } i \in N.$$

5.6 El nucleolus i el valor de tau

Una altra solució puntual molt coneguda en la literatura de la teoria de jocs és el nucleolus, introduït per Schmeidler (1969) [68]. La característica més destacada d'aquesta solució és la pertinença al core, sempre i quan aquest sigui no buit. Com hem vist en la secció 5.4 el model estudiat dels jocs de demanda amb externalitats té la propietat de ser equilibrat, és a dir, té distribucions que pertanyen al core.

En general, el nucleolus no té fórmula de càlcul, però en aquest cas, com que es tracta d'un joc 1-còncau podem obtenir-lo o bé com el centre de gravetat dels punts extrems del core (teorema A.34) o bé com a suma dels nucleolus del joc additiu c_D (és l'únic punt del core) més el nucleolus del joc d'externalitats c_α, ja que el core dels jocs de demanda amb externalitats és additiu. Nosaltres l'obtindrem via aquesta darrera opció, utilitzant els resultats obtinguts per als jocs simples de demanda. És més, el càlcul del nucleolus és molt senzill i el trobarem a partir del nombre de demandants de cada bé.

D'altra banda, el nucleolus és aquella imputació que maximitza les mínimes satisfaccions de les coalicions, i en aquest sentit és equilibradora entre les coalicions.

Cal remarcar que el nucleolus i el valor de tau coincideixen per als jocs 1-còncaus (teorema A.34). Recordem que el valor de tau és una solució eficient que s'obté com a combinació convexa d'una cota superior i una cota inferior. Degut a aquesta coincidència enunciarem en un únic resultat les fórmules del nucleolus i del valor de tau.

Proposició 5.30. *Sigui (N, c_{Ω_α}) un joc de demanda amb externalitats. El nucleolus, $\eta(c_{\Omega_\alpha})$, i el valor de tau, $\tau(c_{\Omega_\alpha})$, s'obtenen de:*

$$\eta_i(c_{\Omega_\alpha}) = \tau_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\le 1,\, d_{ij}=0}} \frac{1}{n}\cdot\alpha\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \frac{1-n}{n}\cdot\alpha\cdot c_j \tag{5.13}$$

per a tot $i \in N$.

Demostració:
Calcularem el nucleolus (valor de tau) del joc de demanda com la suma dels nucleolus (valors de tau) dels jocs c_D i c_α, ja que el joc c_D és un joc additiu.

i) Donat (N, c_D) on c_D és un joc additiu, el nucleolus (valor de tau) assigna els costos individuals de les seves demandes, així:

$$\eta_i(c_D) = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j\,, \text{ per a tot } i\in N.$$

ii) Donat (N, c_α) definit a (5.4) com

$$c_\alpha(S) = \sum_{\substack{j\,\in\,\mathcal{G}\\ u(j)\,\cap\, S=\emptyset}} \alpha\cdot c_j = \alpha\cdot\sum_{j\,\in\mathcal{G}} c_j\cdot w_{u(j)}(S), \text{ per } S\neq\emptyset,$$

el nucleolus (valor de tau) de c_α s'obté d'una manera fàcil, aplicant la fórmula del nucleolus (valor de tau) per als jocs simples de demanda obtinguda a la proposició 5.13 i tenint present la 1-concavitat d'aquests jocs.

Així, per a qualsevol $i \in N$,

$$\begin{aligned}\eta_i(c_\alpha) = \tau_i(c_\alpha) &= \sum_{j\in\mathcal{G}} \eta_i(w_{u(j)}) \cdot \alpha \cdot c_j = \\ &= \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\leq 1,\, d_{ij}=0}} \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \frac{1-n}{n} \cdot \alpha \cdot c_j .\end{aligned}$$

I si apliquem l'additivitat

$$\eta_i(c_{\Omega_\alpha}) = \tau_i(c_{\Omega_\alpha}) = \eta_i(c_D) + \eta_i(c_\alpha)\,, \text{ per a tot } i \in N.$$

□

El nucleolus i el valor de tau, a l'hora de distribuir el cost total, diferencien en el repartiment del cost de cada bé entre si el bé no té cap demandant, té un demandant o té dos demandants o més. El mètode de distribució és el següent: si el bé no té cap demandant, aleshores adjudica el preu reduït d'aquest bé a parts iguals entre tots els jugadors; si el bé té un demandant, llavors assigna als no demandants el preu reduït proporcionalment al nombre total de jugadors i al demandant la resta; i finalment, si el bé té dos demandants o més els hi assigna el cost de la seva demanda a cadascun.

Procedim a mostrar amb un exemple el mètode de repartiment utilitzat pel nucleolus i el valor de tau.

Exemple 5.31. Sigui el problema de demanda de l'exemple (5.2), el nucleolus i el valor de tau d'aquest problema són:

$$\begin{aligned}\eta_1(c_{\Omega\alpha}) = \tau_1(c_{\Omega\alpha}) &= 0'2 \cdot \tfrac{25}{3} + 0'2 \cdot (-\tfrac{2}{3}) \cdot 35 + 10 + 15 + 35 = 57, \\ \eta_2(c_{\Omega_\alpha}) = \tau_2(c_{\Omega_\alpha}) &= 0'2 \cdot \left(\tfrac{25}{3} + \tfrac{35}{3}\right) + 10 + 30 = 44, \\ \eta_3(c_{\Omega_\alpha}) = \tau_3(c_{\Omega_\alpha}) &= 0'2 \cdot \left(\tfrac{25}{3} + \tfrac{35}{3}\right) + 10 = 14.\end{aligned}$$

◇

Cal remarcar que el fet de disposar d'una fórmula de càlcul per al nucleolus és molt interessant, degut al fet que en general el seu còmput requereix la resolució d'una seqüència finita de programes lineals.

A continuació exposarem el cas particular en què tots els béns tenen com a màxim un demandant, ja que en aquest cas el nucleolus i el valor de tau coincideixen amb el valor de Shapley.

Proposició 5.32. *Sigui* (N, c_{Ω_α}) *un joc de demanda amb externalitat amb* $n_j \leq 1$ *per a tot* $j \in \mathcal{G}$*. Aleshores, el valor de Shapley i el nucleolus coincideixen i la seva fórmula és:*

$$\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \eta_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \left(d_{ij} \cdot c_j + \frac{1-n}{n} \cdot \alpha \cdot c_j\right) + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}=0}} \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j$$

per a tot $i \in N$.

Demostració:
És fàcil veure la coincidència de les dues solucions. Sabent que $n_j \leq 1$, a partir de l'equació (5.12) el valor de Shapley és

$$\begin{aligned}
\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) &= \sum_{j\in\mathcal{G}} \left(d_{ij} \cdot c_j + \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j\right) - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \frac{1}{n_j} \cdot \alpha \cdot c_j = \\
&= \sum_{j\in\mathcal{G}} \left(d_{ij} \cdot c_j + \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j\right) - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \alpha \cdot c_j = \\
&= \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \left(d_{ij} \cdot c_j + \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j - \alpha \cdot c_j\right) + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}=0}} \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j = \\
&= \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}\neq 0}} \left(d_{ij} \cdot c_j + \frac{1-n}{n} \cdot \alpha \cdot c_j\right) + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{ij}=0}} \frac{1}{n} \cdot \alpha \cdot c_j,
\end{aligned}$$

que és la fórmula del nucleolus per $n_j \leq 1$.

□

En el cas d'un joc de demanda amb externalitats amb tots els béns demandats per tots els usuaris, és a dir, $n_j = n$ per a tot $j \in \mathcal{G}$ també es dóna la coincidència entre el valor de Shapley i el nucleolus, ja que en aquesta situació el joc d'externalitats és nul i per tant se'ls hi assigna el cost de la seva demanda.

5.7 Altres mètodes de repartiment

En aquesta secció presentarem altres possibles criteris de distribució del cost total. Entre ells presentarem la distribució proporcional a les demandes, la distribució proporcional als costos individuals, i finalment especificarem el conegut mètode *Alternate Cost Avoided*.

Donat un problema de demanda, la **distribució proporcional respecte a les demandes**, $P(c_{\Omega_\alpha})$, es defineix com:

$$P_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \frac{\alpha\cdot c_j}{n} + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\neq 0}} d_{ij}\cdot c_j \quad \text{per a tot } i\in N.$$

És a dir, un jugador pagarà proporcionalment a la seva demanda. D'aquesta manera, dels béns que no són demandats per ningú es pagarà el preu reduït del bé dividit a parts iguals entre els jugadors, i dels béns demandats cada jugador pagarà les unitats que ell demanda.

Aquesta distribució és eficient, ja que

$$\sum_{i\in N} P_i(c_{\Omega_\alpha}) \;=\; \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \alpha\cdot c_j + \sum_{i\in N}\sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\neq 0}} d_{ij}\cdot c_j \;=\; c_{\Omega_\alpha}(N).$$

Aquesta distribució compleix la condició de pertinença al core del joc de demanda amb externalitats.

Proposició 5.33. *Sigui (N, c_{Ω_α}) un joc de demanda amb externalitats. Aleshores, la distribució proporcional a les demandes, $P(c_{\Omega_\alpha})$, pertany al core de c_{Ω_α}.*

Demostració:
Pel teorema 5.20 el joc c_{Ω_α} és 1-còncau. Llavors si apliquem la proposició A.32 de l'apèndix A una distribució eficient pertany al core si i només si $x_i \geq SC_i(c_{\Omega_\alpha})$ per a tot $i\in N$. El cost separable s'ha calculat a partir de l'expressió (5.9) i així $P(c_{\Omega_\alpha}) \in Core(c_{\Omega_\alpha})$ si i només si

$$\sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \frac{\alpha\cdot c_j}{n} + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\neq 0}} d_{ij}\cdot c_j \geq \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha\cdot c_j.$$

Observi's que $\sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\neq 0}} d_{ij}\cdot c_j = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j$, per tant, és equivalent a provar que

$$\sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=0}} \frac{\alpha\cdot c_j}{n} \geq - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ij}\neq 0}} \alpha\cdot c_j.$$

La desigualtat clarament es compleix ja que $\alpha\cdot c_j \geq 0$.

$\square$

Passarem a analitzar ara un altre mètode. La **distribució proporcional respecte als costos individuals**, $P^*(c_{\Omega_\alpha})$, es defineix com:

$$P_i^*(c_{\Omega_\alpha}) = c_{\Omega_\alpha}(i) \cdot \frac{c_{\Omega_\alpha}(N)}{\sum_{k\in N} c_{\Omega_\alpha}(k)} \quad \text{per a tot}\, i\in N.$$

Es tracta òbviament d'una preimputació (eficiència), és a dir, que reparteix el cost total entre els jugadors. L'inconvenient que presenta és que, en general, no pertany al core del joc de demanda amb externalitats. Això és degut al fet que no tenim garantit que la quantitat imputada a un jugador segons aquesta regla de distribució sigui més gran que el cost separable del jugador.

Finalment, presentarem un altre mètode que va ser utilitzat com a solució de distribució en el projecte TVA (veure apèndix A, exemple A.2), l'anomenat mètode **Alternate Cost Avoided** (ACA). La utilització d'aquest concepte és adequat degut a la pertinença al core del joc de demanda amb externalitats.

El mètode ACA assigna a cada jugador el cost separable més una proporció del cost no separable. Recordem que el cost separable és la part del cost que ha de ser assumida per cada agent, mentre que el cost no separable és la part del cost que queda per ser distribuïda un cop els agents han suportat el seu cost separable.

Així, el problema és com distribuir el cost no separable. La possibilitat que considera el mètode ACA és assignar a cada jugador la proporció del cost no separable, que vindrà determinada per la diferència entre el seu cost individual i el seu cost separable.

Així, donat un joc de demanda amb externalitats c_{Ω_α} el mètode ACA es defineix com:

$$ACA_i(c_{\Omega_\alpha}) = SC_i(c_{\Omega_\alpha}) + \frac{\beta_i(c_{\Omega_\alpha})}{\sum_{i\in N}\beta_i(c_{\Omega_\alpha})} \cdot NSC(c_{\Omega_\alpha}) \quad \text{per a tot } i \in N$$

on $\beta_k(c_{\Omega_\alpha}) = c_{\Omega_\alpha}(k) - SC_k(c_{\Omega_\alpha})$, per $k \in N$.

La distribució és eficient ja que

$$\sum_{i\in N} ACA_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{i\in N} SC_i(c_{\Omega_\alpha}) + \sum_{i\in N}\left(\frac{\beta_i(c_{\Omega_\alpha})}{\sum_{i\in N}\beta_i(c_{\Omega_\alpha})} \cdot NSC(c_{\Omega_\alpha})\right) = c_{\Omega_\alpha}(N),$$

on (veure pàgina 180)

$$\sum_{i\in N}\frac{\beta_i(c_{\Omega_\alpha})}{\sum_{i\in N}\beta_i(c_{\Omega_\alpha})} = 1.$$

Proposició 5.34. *Sigui (N, c_{Ω_α}) un joc de demanda amb externalitats. Aleshores, el mètode d'Alternate Cost Avoided, $ACA(c_{\Omega_\alpha})$, pertany al core de c_{Ω_α}.*

Demostració:

El joc c_{Ω_α} és 1-còncau i si apliquem la proposició A.32 de l'apèndix A, una distribució eficient pertany al core si i només si $x_i \geq SC_i(c_{\Omega_\alpha})$ per a tot $i \in N$. Per tant, únicament cal veure que $\beta_k \geq 0$ per a tota $k \in N$,

$$c_{\Omega_\alpha}(k) = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{kj}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{kj}=0}} \alpha\cdot c_j \geq \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{kj}\cdot c_j - \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{kj}\neq 0}} \alpha\cdot c_j = SC_k(c_{\Omega_\alpha}).$$

□

La diferència principal amb altres solucions possibles (com les vistes anteriorment) és la proporció a pagar per aquells béns que no demanda el jugador. Altres alternatives a aquest mètode serien assignar els costos no separables a parts iguals o bé assignar altres tipus de proporcions.

5.8 Aplicació: assignació de costos en el CBUC en la compra de revistes a l'editorial Kluwer

En aquesta secció tractarem amb el problema de distribució de costos que sorgeix de l'agrupació de vuit universitats públiques catalanes i de la Biblioteca de Catalunya en el Consorci de Biblioteques Universitàries de Catalunya (CBUC).

Com ja hem comentat en el capítol 2, l'any 1996 es va crear el CBUC, el qual està format per vuit universitats públiques catalanes: Universitat de Barcelona (**UB**), Universitat Autònoma de Barcelona (**UAB**), Universitat Politècnica de Catalunya (**UPC**), Universitat Pompeu Fabra (**UPF**), Universitat Rovira i Virgili (**URV**), Universitat de Lleida (**UdL**), Universitat de Girona (**UdG**), Universitat Oberta de Catalunya (**UOC**) i la Biblioteca de Catalunya (**BC**). El CBUC es va crear amb l'objectiu de compartir serveis comuns i de reduir costos. Un dels objectius del CBUC és evitar la duplicació de revistes a les que estan subscrites els seus membres i crear un fons comú de revistes electròniques.

El CBUC manté relacions amb diferents editorials. Una de les més significatives en quant a volum de revistes que ofereix és l'editorial Kluwer. Així, ens centrarem en l'acord a què va arribar el CBUC amb l'editorial Kluwer. Aquesta editorial segueix una política de fixació de preus, les dades de la qual es troben recollides amb detall en el capítol 2. L'acord al que van arribar l'editorial i el CBUC té com a característica principal l'establiment d'economies d'escala. Cal remarcar que l'acord també el va signar la Universitat Jaume I de Castelló (**UJI**), tot i que aquesta no és membre del CBUC.

A la taula C.3 de l'apèndix C es troben recollides les dades relatives a la subscripció que realitzaven en format imprès les diferents universitats de la totalitat de les revistes oferides per l'editorial Kluwer al Consorci abans de la signatura de l'esmentat acord.

La principal motivació d'aquesta secció és estudiar com s'haurien de distribuir les tarifes de subscripció de les revistes entre les diferents universitats tenint en compte la presència d'economies d'escala, des d'un punt de vista de la teoria de jocs cooperatius. Així, en primer lloc comprovarem que aquesta situació coincideix amb un cas particular del model dels jocs de demanda amb externalitats. Després comentarem i calcularem les diferents solucions estudiades en les seccions 5.5, 5.6 i 5.7, presentarem el mètode de repartiment aplicat pel Consorci, compararem les diferents solucions i finalment proposarem aquella solució que per les propietats que satisfà sigui més apropiada per al nostre model.

El problema de distribució dels costos resultant de l'adquisició del paquet de revistes de l'editorial Kluwer pressuposa el compliment de certes condicions. Així començarem establint la principal hipòtesi del problema, cada universitat té la seva pròpia demanda de revistes. D'ara endavant, en aquesta aplicació considerarem que el conjunt de jugadors és:

$$N = \{\mathbf{UB}, \mathbf{UAB}, \mathbf{UPC}, \mathbf{UPF}, \mathbf{URV}, \mathbf{UdL}, \mathbf{UdG}, \mathbf{UOC}, \mathbf{BC}, \mathbf{UJI}\}$$

i que la demanda de cada universitat inclou exactament les revistes a les que estava subscrita en format imprès (veure taula C.3).

A grans trets, l'acord es basa en l'adquisició de totes les revistes de l'editorial en versió electrònica. El preu final està establert en funció de la demanda històrica. La quantitat total a pagar serà la suma del cost de la demanda històrica dels membres del Consorci més el 10% del preu de les revistes que no s'adquirien amb anterioritat a l'acord. Formalment,

$$f_j(x) = \begin{cases} 10\% \cdot c_j & \text{si} \quad x = 0, \\ x \cdot c_j & \text{en altre cas,} \end{cases}$$

on c_j és el preu anual de subscripció per a cada revista.

Així, el joc cooperatiu de costos correspon al joc de demanda amb externalitats estudiat a la secció 5.1 on $\alpha = 0'10$. A partir de les dades recollides en la taula C.3 de l'apèndix C, obtenim el cost total a repartir en aquest supòsit:

$$c_{\Omega_\alpha}(N) \;=\; \sum_{j \in \mathcal{G}} \sum_{i \in N} d_{ij} \cdot c_j \;+\; \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ n_j = 0}} 0'1 \cdot c_j \;=\; 305.264'65 \,\text{euros.}$$

És a dir, el cost total de subscripció és el cost de la demanda històrica de les universitats signants de l'acord més el 10% del preu de les revistes no demandades per cap universitat signant. Observi's que el preu assignat a les revistes no demandades és realment baix, ja que només han de pagar un 10% del preu real de subscripció.

Com s'ha observat en estudis posteriors a la signatura de l'acord, de les consultes realitzades un 50% eren sobre les revistes no demandades per cap universitat, encara que pot ser perquè les revistes en format paper no s'han cancel·lat totalment i no es consulten completament en format electrònic.

Per tant, això mostra que el preu reduït acordat és realment beneficiós per a les universitats. Això mostra també que la demanda realitzada per les universitats potser no era òptima.

Una altre indicador de com de beneficiós és l'acord és realitzar una anàlisi comparativa amb els costos individuals de les universitats. Els costos individuals de cada universitat es mostren en la següent taula.

$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UB})$	$167.873'35$	$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UdL})$	$59.818'50$
$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UAB})$	$120.821'30$	$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{URV})$	$59.598'45$
$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UPC})$	$67.592'75$	$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UOC})$	$55.072'35$
$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UPF})$	$72.383'10$	$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{BC})$	$55.072'35$
$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UdG})$	$65.198'10$	$c_{\Omega_\alpha}(\mathbf{UJI})$	$69.745'05$

Taula 5.1: Costos individuals de c_{Ω_α}

Si comparem la suma dels costos individuals de cada universitat per actuar individualment amb el cost total de subscripció obtenim un estalvi total de $793.175'30 \; - \; 305.264'65 \; = \; 487.910'65$ euros.

El cost de subscripció de tot el paquet de revistes per a una coalició S ve donat per:

$$c_{\Omega_\alpha}(S) \;=\; \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in S} d_{ij}\cdot c_j \;+\; \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Sj}=0}} 0'1\cdot c_j.$$

El joc de demanda amb externalitats té una estructura molt especial. S'observa clarament que el joc en qüestió és la suma de diferents jocs, un per a cada revista; de manera que el cost total de subscripció ve determinat per la suma dels costos d'adquisició de cada revista. Així, sembla raonable cercar mètodes de distribució additius que distribueixin separadament el cost de cada revista entre els membres del Consorci.

Com hem estudiat a la secció 5.3 la cooperació entre totes les biblioteques està garantida, ja que per a qualssevol dues coalicions la suma dels seus costos és superior al cost de la coalició total. Per tant, l'objectiu final és repartir $c_{\Omega_\alpha}(N)$, però cal tenir en compte els costos de les diferents coalicions ja que els membres d'una coalició no estaran disposats a què se'ls hi assigni una quantitat superior al cost que haurien de suportar per ells mateixos, és a dir, demanem que els repartiments pertanyin al core de c_{Ω_α}.

El teorema 5.24 caracteritza el core d'un joc de demanda amb externalitats com la suma del core del joc additiu c_D més el core del joc d'externalitat. Cal remarcar que el core d'un joc additiu té una única distribució. En el cas del joc associat a l'acord establert entre el CBUC i l'editorial Kluwer hauríem de distribuir el cost de la demanda històrica:

$$c_D(N) = \sum_{j\in\mathcal{G}}\sum_{i\in N} d_{ij}\cdot c_j = 268.507'5\,\text{euros}$$

entre els membres del consorci, per tant, sembla raonable que cada universitat suporti inicialment el cost de la seva demanda, és a dir, $\sum\limits_{j\in\mathcal{G}} d_{ij}\cdot c_j$. A més, aquesta és l'única distribució del core del joc c_D. Per tant, el core del joc additiu assigna les següents quantitats:

$c_D(\mathbf{UB})$	$124.831'00$	$c_D(\mathbf{UdL})$	$5.273'50$
$c_D(\mathbf{UAB})$	$72.941'50$	$c_D(\mathbf{URV})$	$5.029'00$
$c_D(\mathbf{UPC})$	$13.846'00$	$c_D(\mathbf{UOC})$	0
$c_D(\mathbf{UPF})$	$19.150'50$	$c_D(\mathbf{BC})$	0
$c_D(\mathbf{UdG})$	$11.133'00$	$c_D(\mathbf{UJI})$	$16.303'00$

Observi's que en el joc additiu la UOC i la BC no han de suportar cap cost ja que la seva demanda abans de signar l'acord era nul·la. Mentre que la UB ha de suportar el cost més elevat, ja que és la universitat que demandava més revistes, seguida de la UAB.

Ara només resta per distribuir el cost de les revistes no demandades per cap membre del Consorci, és a dir,

$$c_\alpha(N) = \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ d_{Nj}=0}} 0'1\cdot c_j = 36.757'15\,\text{euros}.$$

És necessari considerar que aquelles revistes que són demandades per alguna universitat, i per les que aquesta universitat està pagant, seran utilitzades també per les universitats del Consorci que no les demandaven i aquest fet s'hauria de tenir present alhora de distribuir la part que queda del cost total. En concret, la Universitat Oberta de Catalunya i la Biblioteca de Catalunya inicialment no demandaven cap revista i per tant no podien realitzar cap consulta, però en passar a formar part del Consorci, la UOC i la BC passen a tenir accés a tot el paquet de revistes de l'editorial Kluwer. Així, la UOC i la BC haurien de suportar una part del cost total i no només la part corresponent a les revistes no demandades per cap membre del Consorci.

Per prosseguir l'anàlisi del vessant cooperatiu seguim estudiant el concepte de core. En aquest model el core assignarà com a màxim a una universitat el cost de la seva demanda més el preu reduït de les revistes no demandades per cap universitat i de les revistes amb una única universitat demandant que és ella. I el mínim que li assignarà a una universitat és el seu cost separable, és a dir, el cost marginal d'afegir-se a la coalició formada per totes les altres universitats. Aquesta última condició ens determina el core d'un joc 1-còncau.

Així, per saber si una distribució pertany al core del joc de demanda associat a l'editorial Kluwer només cal comprovar si satisfà les següents desigualtats:

$$x_i \ \geq \ SC_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} d_{ij} \cdot c_j \ - \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ n_j = 1,\, d_{ij} \neq 0}} 0'1 \cdot c_j \text{ per a tot } i \in \ N.$$

Per als membres del Consorci aquestes desigualtats a satisfer són:

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{UB}} &\geq 117.200'80,\\
x_{\mathrm{UAB}} &\geq 70.062'80,\\
x_{\mathrm{UPC}} &\geq 12.888'20,\\
x_{\mathrm{UPF}} &\geq 18.831'80,\\
x_{\mathrm{UdG}} &\geq 11.015'45,\\
x_{\mathrm{UdL}} &\geq 5.077'15,\\
x_{\mathrm{URV}} &\geq 4995'65,\\
x_{\mathrm{UOC}} &\geq 0,\\
x_{\mathrm{BC}} &\geq 0,\\
x_{\mathrm{UJI}} &\geq 15.373'55.
\end{aligned}$$

El problema encara es manté obert ja que de moment no hem decidit com distribuir el cost de cada revista. Ja sabem que el core no realitza una única prescripció, sino que deixa tot un ventall de possibilitats (de fet, el que estableix són fites als repartiments). A continuació calcularem les solucions usuals de la teoria de jocs cooperatius analitzades en la secció 5.5 i 5.6. Entre elles discutirem: el valor de Shapley, el nucleolus i el valor de tau, la distribució proporcional a les demandes, la distribució proporcional als costos individuals i l'*Alternate Cost Avoided*. A part, tant la UOC com la BC no demanaven cap revista abans i, per tant, són agents "iguals", el que es reflectirà en què el cost imputable serà igual.

Una de les característiques més rellevants del nostre model particular és que les solucions usuals de la teoria de jocs cooperatius, les quals en general no són senzilles de calcular, es poden computar d'una manera molt fàcil. En un entorn pràctic això és certament una propietat molt interessant. S'ha de tenir en compte que el Consorci, per calcular la distribució final, ha de considerar una gran quantitat de dades i, per tant, les facilitats de càlcul esdevenen importants.

Procedim a calcular les solucions esmentades:

- **Valor de Shapley:** la fórmula del valor de Shapley per als jocs de demanda amb externalitats l'hem obtingut a la proposició 5.26. La seva expressió per a l'acord amb l'editorial Kluwer on $\alpha = 0'1$ és la següent:

$$\phi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} \left(d_{ji} \cdot c_j + \frac{1}{n} \cdot 0'1 \cdot c_j \right) - \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ d_{ji} \neq 0}} \frac{1}{n_j} \cdot 0'1 \cdot c_j$$

per a tot $i \in N$.

El valor de Shapley diferencia entre demandants i no demandants de les revistes. Considera que tot i que una universitat no demandi una determinada revista ha de suportar una part del cost d'adquisició ja que en farà ús. La part que se l'imputa és el preu reduït que hauria de pagar per no ser demandant de la revista dividit a parts iguals entre totes les universitats. Els demandants pagaran per les revistes demandades però descomptant-els-hi la part pagada pels no demandants a parts iguals; aquest descompte és degut a què la revista en qüestió serà utilitzada per demandants i no demandants i, per tant, sembla raonable que no suportin tot el cost de subscripció de la revista.

Observi's que el valor de Shapley es computa per a cadascuna de les 731 revistes que formen part del paquet facilitat per Kluwer i després es sumen les diferents distribucions obtingudes.

Així, la part del cost total que se li assignaria a cada universitat segons el valor de Shapley és:

$\phi_{UB}(c_{\Omega_\alpha})$	$120.816'82$	$\phi_{UdL}(c_{\Omega_\alpha})$	$10.448'08$
$\phi_{UAB}(c_{\Omega_\alpha})$	$73.754'20$	$\phi_{URV}(c_{\Omega_\alpha})$	$10.323'46$
$\phi_{UPC}(c_{\Omega_\alpha})$	$18.259'79$	$\phi_{UOC}(c_{\Omega_\alpha})$	$5.507'23$
$\phi_{UPF}(c_{\Omega_\alpha})$	$23.774'36$	$\phi_{BC}(c_{\Omega_\alpha})$	$5.507'23$
$\phi_{UdG}(c_{\Omega_\alpha})$	$16.218'64$	$\phi_{UJI}(c_{\Omega_\alpha})$	$20.654'83$

Taula 5.2: Valor de Shapley de c_{Ω_α}

Cal remarcar que el valor de Shapley és un dels mètodes d'assignació de costos actualment més analitzats com a forma de repartiment de costos. El valor de Shapley aplica el concepte de marginalitat al conjunt de possibles combinacions d'universitats fent la mitjana d'aquestes. Així, en el nostre model s'haurien de computar 10!=3.628.800 vectors de contribucions marginals. Per tant, la simplicitat de la fórmula obtinguda per als nostres jocs esdevé un fet transcendental. Per últim, noti's que en el nostre cas concret el valor de Shapley pertany al core del joc ja que els pagaments assignats a cada universitat superen el cost separable de cadascuna d'aquestes.

- **Nucleolus i valor de tau:** la fórmula del nucleolus i del valor de tau per als jocs de demanda amb externalitats l'hem obtingut a la proposició 5.30. Recordem que per a aquests jocs els dos conceptes de solució coincideixen. La seva expressió per al model de Kluwer on $\alpha = 0'1$ és la següent:

$$\eta_i(c_{\Omega_\alpha}) = \tau_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j\in\mathcal{G}} d_{ji}\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j\leq 1,\, d_{ji}=0}} \frac{1}{n}\cdot 0'1\cdot c_j + \sum_{\substack{j\in\mathcal{G}\\ n_j=1,\, d_{ji}\neq 0}} \frac{1-n}{n}\cdot 0'1\cdot c_j$$

per a tot $i \in N$.

De manera similar a com passava amb el valor de Shapley, el nucleolus és un concepte de solució additiu per als jocs de demanda amb externalitats i, per tant, el seu còmput correspon al càlcul del nucleolus de les 731 revistes del paquet.

El nucleolus i el valor de tau diferencien entre si la revista no té cap demandant, té un demandant o té dos demandants o més. L'assignació és la següent: si la revista no té cap demandant aleshores assigna el preu reduït a parts iguals; si té un únic demandant, assigna als no demandants el preu reduït a parts iguals entre les universitats i al demandant la resta; i si té dos o més demandants assigna el cost de la seva demanda.

La part del cost total que se li assignaria a cada universitat segons el nucleolus i el valor de tau és:

$\eta_{UB}(c_{\Omega_\alpha})$	$122.182'73$	$\eta_{UdL}(c_{\Omega_\alpha})$	$10.059'08$
$\eta_{UAB}(c_{\Omega_\alpha})$	$75.044'73$	$\eta_{URV}(c_{\Omega_\alpha})$	$9.977'58$
$\eta_{UPC}(c_{\Omega_\alpha})$	$17.870'13$	$\eta_{UOC}(c_{\Omega_\alpha})$	$4.981'92$
$\eta_{UPF}(c_{\Omega_\alpha})$	$23.813'73$	$\eta_{BC}(c_{\Omega_\alpha})$	$4.981'92$
$\eta_{UdG}(c_{\Omega_\alpha})$	$15.997'38$	$\eta_{UJI}(c_{\Omega_\alpha})$	$20.355'48$

Taula 5.3: Nucleolus i valor de tau de c_{Ω_α}

Respecte al nucleolus, cal destacar dos fets. Per una banda la pertinença al core del joc i per una altra banda el seu fàcil còmput com a conseqüència de la 1-concavitat del joc.

- **Distribució proporcional a les demandes:** una de les distribucions més utilitzades és el repartiment proporcional. La seva expressió per als jocs de demanda amb externalitats es troba a la secció 5.7. Per al model de Kluwer on $\alpha = 0'1$ és la següent:

$$P_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ n_j = 0}} \frac{0'1 \cdot c_j}{n} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{G} \\ n_j \neq 0}} d_{ji} \cdot c_j \quad \text{per a tot } i \in N.$$

La distribució proporcional a les demandes diferencia entre revistes demandades i no demandades. Així, les universitats pagaran la proporció que els hi pertoca per la seva demanda i de les revistes no demandades pagaran el preu reduït a parts iguals.

L'inconvenient d'aquesta distribució és que les universitats que no demandaven cap revista només hauran de pagar la part que els hi pertoca del preu reduït de les revistes no demandades, mentre que podran fer ús de totes les revistes. Tot i això, aquesta distribució pertany al core del joc de demanda amb externalitats i, per tant, sembla que totes les coalicions possibles estaran d'acord amb aquest repartiment.

La part del cost total que se li assignaria a cada universitat segons la distribució proporcional a les demandes és:

$P_{UB}(c_{\Omega_\alpha})$	$128.506'72$	$P_{UdL}(c_{\Omega_\alpha})$	$8.949'22$
$P_{UAB}(c_{\Omega_\alpha})$	$76.617'22$	$P_{URV}(c_{\Omega_\alpha})$	$8.704'72$
$P_{UPC}(c_{\Omega_\alpha})$	$17.521'72$	$P_{UOC}(c_{\Omega_\alpha})$	$3.675'72$
$P_{UPF}(c_{\Omega_\alpha})$	$22.826'22$	$P_{BC}(c_{\Omega_\alpha})$	$3.675'72$
$P_{UdG}(c_{\Omega_\alpha})$	$14.808'72$	$P_{UJI}(c_{\Omega_\alpha})$	$19.978'72$

Taula 5.4: Distribució proporcional a les demandes de c_{Ω_α}

- **Distribució proporcional respecte als costos individuals:** aquesta distribució reparteix proporcionalment als costos individuals, ja que considera que s'ha de repartir en funció de la incidència que tinguin els costos individuals respecte als costos totals. La seva expressió per als jocs de demanda amb externalitats es troba a la secció 5.7. Per al model de Kluwer on $\alpha = 0'1$ és la següent:

$$P_i^*(c_{\Omega_\alpha}) \;=\; c_{\Omega_\alpha}(i) \cdot \frac{c_{\Omega_\alpha}(N)}{\displaystyle\sum_{k\in N} c_{\Omega_\alpha}(k)} \quad \text{per a tot}\, i \in N.$$

El problema que té aquesta distribució és la no pertinença al core dels jocs de demanda amb externalitats, degut al fet que se li assigna un cost inferior al seu cost separable que, recordem, és el cost mínim que ha de suportar tota universitat.

La part del cost total que se li assignaria a cada universitat segons la distribució proporcional respecte als costos individuals és:

$P^*_{UB}(c_{\Omega_\alpha})$	$64.608'42$	$P^*_{UdL}(c_{\Omega_\alpha})$	$23.021'99$
$P^*_{UAB}(c_{\Omega_\alpha})$	$46.499'77$	$P^*_{URV}(c_{\Omega_\alpha})$	$22.937'30$
$P^*_{UPC}(c_{\Omega_\alpha})$	$26.014'02$	$P^*_{UOC}(c_{\Omega_\alpha})$	$21.195'37$
$P^*_{UPF}(c_{\Omega_\alpha})$	$27.857'65$	$P^*_{BC}(c_{\Omega_\alpha})$	$21.195'37$
$P^*_{UdG}(c_{\Omega_\alpha})$	$25.092'40$	$P^*_{UJI}(c_{\Omega_\alpha})$	$26.842'36$

Taula 5.5: Distribució proporcional als costos individuals de c_{Ω_α}

Així, per exemple la Universitat de Barcelona hauria de pagar aproximadament un 21% del cost total, el que suposa 64.608'42 euros, quantitat sensiblement inferior als 117.200'80 euros que hauria de suportar, corresponent al seu cost separable. La distribució no pertany al core del joc.

Així, aquesta distribució clarament beneficia a les universitats grans, mentre que perjudica a les petites, les quals han de suportar un cost molt elevat.

- **Alternate Cost Avoided:** aquesta distribució utilitza un sistema de distribució que està en certa manera relacionat amb la distribució proporcional respecte als costos individuals amb la diferència important de què s'assegura que les diferents universitats suporten el seu cost separable.

  Així, assigna en primer lloc el cost separable a cada universitat, el qual és el mínim que han de suportar, i la resta ho distribueix proporcionalment a la diferència entre els costos individuals i el cost separable. La seva expressió per als jocs de demanda amb externalitats es troba a la secció 5.7. Per al model de Kluwer on $\alpha = 0'1$ és la següent:

  $$ACA_i(c_{\Omega_\alpha}) = SC_i(c_{\Omega_\alpha}) + \frac{\beta_k(c_{\Omega_\alpha})}{\sum\limits_{k\in N}\beta_i(c_{\Omega_\alpha})} \cdot NSC(c_{\Omega_\alpha}) \quad \text{per a tot}\, i \in N,$$

  on $\beta_k = c_{\Omega_\alpha}(k) - SC_k(c_{\Omega_\alpha})$.

  Aquesta distribució manté la filosofia de la solució anterior, però evitant el problema de la no pertinença al core. Aquest problema el soluciona assignant a cada universitat el cost mínim en què ha d'incórrer (d'aquesta manera ens assegurem que la distribució pertanyi al core) i la resta ho distribueix proporcionalment a la diferència entre el cost individual i la quantitat ja assignada.

  La part del cost total que se li assignaria a cada universitat segons la distribució ACA és:

$ACA_{UB}(c_{\Omega_\alpha})$	$121.895'48$	$ACA_{UdL}(c_{\Omega_\alpha})$	$10.148'79$
$ACA_{UAB}(c_{\Omega_\alpha})$	$74.765'44$	$ACA_{URV}(c_{\Omega_\alpha})$	$10.054'45$
$ACA_{UPC}(c_{\Omega_\alpha})$	$17.956'46$	$ACA_{UOC}(c_{\Omega_\alpha})$	$5.102'31$
$ACA_{UPF}(c_{\Omega_\alpha})$	$23.793'19$	$ACA_{BC}(c_{\Omega_\alpha})$	$5.102'31$
$ACA_{UdG}(c_{\Omega_\alpha})$	$16.035'33$	$ACA_{UJI}(c_{\Omega_\alpha})$	$20.410'93$

Taula 5.6: Alternate Cost Avoided de c_{Ω_α}

Un cop analitzats els criteris d'assignació usuals de la teoria de jocs cooperatius, presentarem el criteri de distribució del Consorci.

La principal diferència entre els mètodes de distribució presentats des del punt de vista de la teoria de jocs cooperatius i el mètode de repartiment del Consorci, és que els primers només tenen en consideració la demanda històrica de les diferents universitats, mentre que el segon té en compte diferents factors externs a la demanda de revistes, i que inclou dades com el tamany relatiu de la institució i altres.

Els factors que té presents el Consorci en el moment de repartir el cost total de subscripció del paquet de revistes de l'editorial Kluwer són: el pressupost, el nombre d'estudiants i la demanda històrica de cada universitat.

L'acord de repartiment a què van arribar les universitats públiques de Catalunya considerava la següent fórmula:

- El 50% del cost total de subscripció es reparteix proporcionalment al cost de la demanda històrica de cada universitat.

- El 50% del cost total de subscripció restant es reparteix tenint en compte els següents factors:

  - 40% de repartiment igualitari,
  - 30% en funció del pes per estudiants,
  - 30% en funció del pes per pressupost de despeses.

La següent taula mostra el cost total repartit segons els diferents conceptes:

Concepte	**Part del cost total**	**Percentatge**
Demanda històrica	$152.632'33$	50
Repart.igualitari	$61.052'93$	20
Pes estudiants	$45.789'70$	15
Pes pressupost	$45.789'70$	15
Total	$305.264'65$	100

Taula 5.7: Part del cost total per conceptes

La següent taula mostra les dades necessàries per realitzar el repartiment:

Univ.	Cost d.h.	Estudiants	Pressupost
UB	124.831′00	54.858	208.631′32
UAB	72.941′50	32.381	136.120′66
UPC	13.846′00	26.882	124.854′74
UPF	19.150′50	7.385	44.228′59
UdG	11.133′00	10.589	39.529′18
UdL	5.273′50	9.159	34.677′11
URV	5.029′00	11.487	40.014′23
UOC	0	14.837	22.358′43
BC	0	0	0
UJI	16.303′00	12.847	30.807′88

Taula 5.8: Dades utilitzades pel Consorci (2001)

Les següents taules mostren respectivament els repartiments parcials amb els percentatges sobre els costos parcials:

Univ.	Dist.s/d.h.	%
UB	70.959′83	46′49
UAB	41.463′39	27′17
UPC	7.870′72	5′16
UPF	10.886′05	7′13
UdG	6.328′52	4′15
UdL	2.997′71	1′96
URV	2.858′72	1′87
UOC	0′00	0′00
BC	0′00	0′00
UJI	9.267′39	6′07
Total	152.632′33	100

Taula 5.9: Distribució del 50% del cost total segons la demanda històrica

Univ.	Dist.igua.	%	Dist.s/est.	%	Dist.s/pres.	%	Suma(y_1)
UB	6.105′29	10	13.922′30	30′40	14.023′57	30′63	34.051′16
UAB	6.105′29	10	8.217′91	17′95	9.149′62	19′98	23.472′82
UPC	6.105′29	10	6.822′33	14′90	8.392′36	18′33	21.319′98
UPF	6.105′29	10	1.874′22	4′09	2.972′91	6′49	10.952′43
UdG	6.105′29	10	2.687′36	5′87	2.657′03	5′80	11.449′69
UdL	6.105′29	10	2.324′44	5′08	2.330′89	5′09	10.760′63
URV	6.105′29	10	2.915′26	6′37	2.689′64	5′87	11.710′19
UOC	6.105′29	10	3.765′45	8′22	1.502′87	3′28	11.373′61
BC	6.105′29	10	0′00	0′00	0′00	0′00	6.105′29
UJI	6.105′29	10	3.260′41	7′12	2.070′81	4′52	11.436′52
Total	61.052′93	100	45.789′70	100	45.789′70	100	152.632′33

Taula 5.10: Distribucions parcials

Per últim en la pròxima taula mostrem el repartiment assignat considerant els diferents factors (y).

$y_{UB}(c_{\Omega_\alpha})$	105.010′99	$y_{UdL}(c_{\Omega_\alpha})$	13.758′33
$y_{UAB}(c_{\Omega_\alpha})$	64.936′21	$y_{URV}(c_{\Omega_\alpha})$	14.568′91
$y_{UPC}(c_{\Omega_\alpha})$	29.190′70	$y_{UOC}(c_{\Omega_\alpha})$	11.373′61
$y_{UPF}(c_{\Omega_\alpha})$	21.838′48	$y_{BC}(c_{\Omega_\alpha})$	6.105′29
$y_{UdG}(c_{\Omega_\alpha})$	17.778′21	$y_{UJI}(c_{\Omega_\alpha})$	20.703′91

Taula 5.11: Distribució del CBUC

Considerant el repartiment realitzat pel Consorci, s'observa que aquest no pertany al core del joc de demanda amb externalitats de Kluwer ja que a les universitats més grans, UB i UAB, no arriba a assignar-els-hi el seu cost separable. La distribució realitzada pel CBUC beneficia les universitats grans, això és degut a que un 20% del cost total es reparteix a parts iguals, així cada universitat, ja sigui gran o petita i independentment a la seva demanda, haurà de carregar amb un cost fix de $20\% \cdot 305.264'65/10 = 6.1052'9$ euros.

Òbviament aquesta quantitat afecta més a les distribucions assignades a les universitats petites que no a les universitats grans. La motivació implícita en el Consorci és que hi ha un cost que s'ha d'imputar independentment de la demanda històrica o del tamany i que després la resta té a veure amb la docència i la recerca, i que això és reflecteix en els altres indicadors. Les institucions petites o grans, poden millorar la recerca gràcies a la disponibilitat de fons de revistes més grans.

Una altra possibilitat de repartiment seria barrejar el mètode de distribució realitzat pel Consorci i els diferents mètodes de distribució de la teoria de jocs cooperatius. La idea és distribuir el 50% del cost de subscripció segons les diferents solucions estudiades des del vessant dels jocs cooperatius i l'altre 50% segons la part que recull el Consorci tenint en compte les circumstàncies de cada institució (y_1).

Degut al fet que les solucions cooperatives ja les tenim calculades per al pressupost total, només cal aplicar un factor de proporcionalitat del 50% per obtenir la distribució resultant.

La propera taula recull el resultat de les diferents distribucions:

Univ.	$\phi(\frac{1}{2}c_{\Omega_\alpha})+y_1$	$\eta(\frac{1}{2}c_{\Omega_\alpha})+y_1$	$P(\frac{1}{2}c_{\Omega_\alpha})+y_1$	$P^*(\frac{1}{2}c_{\Omega_\alpha})+y_1$	$ACA(\frac{1}{2}c_{\Omega_\alpha})+y_1$
UB	$94.459'57$	$95.142'52$	$98.304'52$	$66.355'37$	$94.998'90$
UAB	$60.349'92$	$60.995'18$	$61.781'43$	$46.722'71$	$60.855'54$
UPC	$30.449'87$	$30.255'04$	$30.080'84$	$34.326'99$	$30.298'20$
UPF	$22.839'61$	$22.859'29$	$22.365'54$	$24.881'26$	$22.849'02$
UdG	$19.559'00$	$19.448'37$	$18.854'04$	$23.995'89$	$19.467'35$
UdL	$15.984'67$	$15.790'17$	$15.235'24$	$22.271'62$	$15.835'02$
URV	$16.871'92$	$16.698'98$	$16.062'55$	$23.178'84$	$16.737'42$
UOC	$14.127'23$	$13.864'57$	$13.211'47$	$21.971'29$	$13.924'76$
BC	$8.858'91$	$8.596'26$	$7.943'15$	$16.702'98$	$8.656'45$
UJI	$21.763'94$	$21.614'26$	$21.425'88$	$24.857'70$	$21.641'98$
Total	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$

Taula 5.12: Distribució del CBUC més les clàssiques

L'inconvenient que presenten aquestes solucions és la no pertinença al core, ja que totes assignen a les universitats grans quantitats inferiors al seu cost separable.

L'objectiu final és realitzar una anàlisi comparativa entre les diferents solucions. Per a una millor comparació en la següent taula recollim la totalitat de les distribucions computades.

Univ.	$\phi(c_{\Omega_\alpha})$	$\eta(c_{\Omega_\alpha})$	$P(c_{\Omega_\alpha})$	$P^*(c_{\Omega_\alpha})$	$ACA(c_{\Omega_\alpha})$	y
UB	$120.816'82$	$122.182'73$	$128.506'72$	$64.608'42$	$121.895'48$	$105.010'99$
UAB	$73.754'20$	$75.044'73$	$76.617'22$	$46.499'77$	$74.765'44$	$64.936'21$
UPC	$18.259'79$	$17.870'13$	$17.521'72$	$26.014'02$	$17.956'46$	$29.190'70$
UPF	$23.774'36$	$23.813'73$	$22.826'22$	$27.857'65$	$23.793'19$	$21.838'48$
UdG	$16.218'64$	$15.997'38$	$14.808'72$	$25.092'40$	$16.035'33$	$17.778'21$
UdL	$10.448'08$	$10.059'08$	$8.949'22$	$23.021'99$	$10.148'79$	$13.758'33$
URV	$10.323'46$	$9.977'58$	$8.704'72$	$22.937'30$	$10.054'45$	$14.568'91$
UOC	$5.507'23$	$4.981'92$	$3.675'72$	$21.195'37$	$5.102'31$	$11.373'61$
BC	$5.507'23$	$4.981'92$	$3.675'72$	$21.195'37$	$5.102'31$	$6.105'29$
UJI	$20.654'83$	$20.355'48$	$19.978'72$	$26.842'36$	$20.410'93$	$20.703'91$
Total	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$	$305.264'65$

Taula 5.13: Taula comparativa de les ditribucions analitzades

En la següent taula recollim els percentatges de la part de cost total de subscripció assignades a les diferents universitats per cadascuna de les distribucions de la taula anterior.

Univ.	$\%\phi(c_{\Omega_\alpha})$	$\%\eta(c_{\Omega_\alpha})$	$\%P(c_{\Omega_\alpha})$	$\%P^*(c_{\Omega_\alpha})$	$\%ACA(c_{\Omega_\alpha})$	$\%y$
UB	$39'58$	$40'03$	$42'10$	$21'16$	$39'93$	$34'40$
UAB	$24'16$	$24'58$	$25'10$	$15'23$	$24'49$	$21'27$
UPC	$5'98$	$5'85$	$5'74$	$8'52$	$5'88$	$9'56$
UPF	$7'79$	$7'80$	$7'48$	$9'13$	$7'79$	$7'15$
UdG	$5'31$	$5'24$	$4'85$	$8'22$	$5'25$	$5'82$
UdL	$3'42$	$3'30$	$2'93$	$7'54$	$3'32$	$4'51$
URV	$3'38$	$3'27$	$2'85$	$7'51$	$3'29$	$4'77$
UOC	$1'80$	$1'63$	$1'20$	$6'94$	$1'67$	$3'73$
BC	$1'80$	$1'63$	$1'20$	$6'94$	$1'67$	$2'00$
UJI	$6'77$	$6'67$	$6'54$	$8'79$	$6'69$	$6'78$
Total	100	100	100	100	100	100

Taula 5.14: Percentatges sobre el cost total

A la taula anterior s'observa que els percentatges d'assignació del cost total entre les solucions que pertanyen al core no difereixen molt, ara bé si realitzem una comparació entre els percentatges de les solucions que pertanyen al core i de les solucions que no pertanyen al core s'observa una diferència substancial, veient-se perjudicades les universitats petites les quals han de suportar una part força elevada del cost total. Cal remarcar que les universitats grans en les distribucions que pertanyen al core són les que suporten un percentatge més elevat del cost degut al fet de la dependència d'aquestes solucions respecte a la demanda històrica.

Una altra dada que pot ser d'interès és l'estalvi respecte als costos individuals que té cadascuna de les universitats en les diferents situacions.

Univ.	Est.ϕ	Est.η	Est.P	Est.P^*	Est.ACA	Est.y
UB	$47.056'53$	$45.690'62$	$39.366'64$	$103.264'93$	$45.977'87$	$62.862'36$
UAB	$47.067'11$	$45.776'58$	$44.204'09$	$74.321'53$	$46.055'86$	$55.885'09$
UPC	$49.332'96$	$49.722'62$	$50.071'03$	$41.578'73$	$49.636'32$	$38.402'05$
UPF	$48.608'74$	$48.569'37$	$49.556'88$	$44.525'45$	$48.589'91$	$50.544'62$
UdG	$48.979'46$	$49.200'73$	$50.389'39$	$40.105'70$	$49.162'77$	$47.419'89$
UdL	$49.370'42$	$49.759'43$	$50.869'29$	$36.796'51$	$49.669'71$	$46.060'17$
URV	$49.274'99$	$49.620'88$	$50.893'74$	$36.661'15$	$49.544'00$	$45.029'54$
UOC	$49.565'12$	$50.090'43$	$51.396'64$	$33.876'98$	$49.970'04$	$43.698'74$
BC	$49.565'12$	$50.090'43$	$51.396'64$	$33.876'98$	$49.970'04$	$48.967'06$
UJI	$49.090'22$	$49.389'57$	$49.766'33$	$42.902'69$	$49.334'12$	$49.041'14$

Taula 5.15: Estalvi sobre el cost individual

Realitzant una anàlisi de la taula anterior es podria arribar a la conclusió errònia de què els estalvis són similars per a totes les universitats, excepte en alguns casos extrems com pot ser el de l'estalvi generat per la distribució proporcional respecte als costos individuals per a la UB. Ara bé, aquesta impressió no és correcta ja que si expressem els resultats anteriors en termes de percentatges de reducció sobre el cost individual obtenim unes dades que ens porten a unes altres deduccions. En la següent taula expressem aquests percentatges de reducció sobre el cost individual:

Univ.	%R.ϕ	%R.η	%R.P	%R.P^*	%R.ACA	%R.y
UB	$28'03$	$27'22$	$23'45$	$61'51$	$27'39$	$37'45$
UAB	$38'96$	$37'89$	$36'59$	$61'51$	$38'12$	$46'25$
UPC	$72'99$	$73'56$	$74'08$	$61'51$	$73'43$	$56'81$
UPF	$67'15$	$67'10$	$68'46$	$61'51$	$67'13$	$69'83$
UdG	$75'12$	$75'46$	$77'29$	$61'51$	$75'41$	$72'73$
UdL	$82'53$	$83'18$	$85'04$	$61'51$	$83'03$	$77'00$
URV	$82'68$	$83'26$	$85'39$	$61'51$	$83'13$	$75'55$
UOC	$90'00$	$90'95$	$93'33$	$61'51$	$90'74$	$79'35$
BC	$90'00$	$90'95$	$93'33$	$61'51$	$90'74$	$88'91$
UJI	$70'39$	$70'81$	$71'35$	$61'51$	$70'73$	$70'31$

Taula 5.16: Percentatge de reducció sobre el cost individual

Analitzant la taula anterior observem que respecte a les distribucions que pertanyen al core (valor de Shapley, nucleolus, proporcional a les demandes i ACA), si realitzem un rang de les universitats respecte a la reducció relativa en els costos, s'observa que la BC i la UOC són les més afavorides i la UB la menys. Veient els resultats numèrics s'observen dos grups d'institucions. Per una banda trobem les institucions "petites"(UPC, UPF, UdG, UdL, URV, UOC, BC, UJI) i per altra banda les universitats "grans", UB i UAB.

Respecte a les distribucions que no pertanyen al core (proporcional als costos individuals i la del CBUC), existeix una gran diferència entre ambdues. Així, les analitzarem separadament. La distribució proporcional als costos individuals té la característica d'assignar el mateix percentatge de reducció a totes les universitats. Comparant la distribució assignada pel Consorci amb les distribucions que no pertanyen al core s'observa que la primera no realitza unes diferències tan elevades entre universitats grans i petites.

Observi's que tot i que les diferències entre els diferents mètodes de càlcul són menors, l'elecció d'un o un altre mètode pot tenir importants efectes sobre els pressupostos i actuacions de les universitats. Així, per exemple els mètodes de la teoria de jocs cooperatius són els que més beneficien a les universitats petites.

En definitiva, davant la manca d'un mètode superior als altres, les diferències observades exigeixen que es comparin les propietats dels distints mètodes i es seleccioni el mètode d'acord amb les necessitats de cada cas.

Comparació i proposta

Una vegada hem plantejat i resolt els mètodes més discutits i utilitzats de repartir costos comuns, ha arribat el moment de comparar les propietats dels principals mètodes d'assignació de costos.

El reconeixement de què els sistemes de repartiment de costos tenen com a objectiu trobar solucions justes o raonables al problema de finançar els serveis comuns, compartits per diferents usuaris, ha de ser suficient per comprendre que no existeix el "millor"sistema de repartiment.

El que una forma de compartir els costos comuns d'una activitat sigui considerada justa, depèn de tot un conjunt de circumstàncies específiques del problema concret. Generalment, podem aspirar com a molt, a què els sistemes satisfacin un conjunt de propietats considerades raonables *a priori*. La inexistència del millor mètode de repartiment pot, per tant, entendre's com derivat de la impossibilitat de satisfer simultàniament totes les propietats desitjables, i la superioritat d'una solució dependrà doncs de les característiques concretes de cada problema. Així, és important remarcar l'enorme importància que té l'estudi detallat de la funció de costos objecte de repartiment a l'hora d'aplicar les solucions.

A continuació establirem els criteris que creiem que ha de satisfer una solució per a un joc de demanda amb externalitats:

- **Racionalitat individual:** La primera propietat que podem demanar és que cap de les universitats es vegi perjudicada en compartir, és a dir, $x_i \leq c_{\Omega_\alpha}(i)$. És a dir, que a cap de les universitats se li assigni un cost superior al cost de la seva demanda, és l'anomenada racionalitat individual.

- **Racionalitat coalicional:** Una segona propietat que podem demanar és que cap grup d'universitats hagi de pagar més del que els hi costaria per si mateixes atendre a la seva demanda, és a dir, $\sum_{i \in S} x_i \leq c_{\Omega_\alpha}(S)$, per tant estem demanant que pertanyi al core del joc de demanda amb externalitats.

- **Additivitat:** Una tercera propietat requerible és l'additivitat. El Consorci demana un paquet de revistes, les demandes de les quals són independents, així sembla raonable demanar que el sistema de repartiment sigui additiu, és a dir, $\psi_i(c_{\Omega_\alpha}) = \sum_{j \in \mathcal{G}} \psi_i^j(c_{\Omega_\alpha}^j)$ per a tot $j \in \mathcal{G}$. El requeriment es tradueix en demanar que la solució assigni el mateix a la distribució realitzada sobre el conjunt de revistes que a la suma de les fetes sobre cadascuna de les revistes individualment, per tant, es requereix que el procés d'imputació es pugui dur a terme independentment per a cada revista.

- **Còmput fàcil:** Un quarta propietat que es pot requerir és un càlcul senzill. En un entorn pràctic és molt important aquesta propietat, ja que degut al gran nombre de revistes demandades pel Consorci aquesta propietat pren un sentit molt rellevant pel gran nombre de càlculs que s'han de realitzar.

- **Pagar pels béns no demandats:** Una cinquena propietat a requerir és que les universitats que no demandaven cap revista paguin una part del cost de la demanda històrica de les revistes ja que a posteriori en faran ús. Així, sembla lògic que encara que una universitat amb anterioritat a l'acord no demandés res suporti una part del cost ja que podrà fer ús de la revista.

Procedim, per últim, a concretar l'objectiu de la present secció: proposar una solució de repartiment del cost total de subscripció del paquet de revistes de l'editorial Kluwer. Per fer-ho tindrem en compte els criteris anteriorment establerts basats en les propietats que considerem ha de satisfer una solució per a un joc de demanda amb externalitats.

D'aquesta manera el mètode de repartiment que proposem és el **nucleolus**. A continuació enumerarem les raons per les que creiem que és especialment idoni com a solució per al nostre model:

1. El nucleolus per als jocs de demanda amb externalitats és un concepte de solució eficient que satisfà la racionalitat individual, és a dir, cap universitat incorre en un cost superior al cost de la seva demanda.

2. El nucleolus és un concepte de solució que pertany al core sempre que aquest és no buit. Com els jocs de demanda amb externalitats són jocs equilibrats, el nucleolus sempre es troba dins del core d'aquests jocs. A més, en els nostres jocs això equival a que cap universitat suporta un cost inferior al seu cost separable.

3. El nucleolus per als jocs de demanda amb externalitat és un concepte de solució additiu (tot i que per a un joc en general no ho és), de manera que el repartiment de costos es pot portar a terme imputant costos independentment per a cada revista.

4. El nucleolus, en general s'obté com a solució de la iteració d'una sèrie de programes lineals i per tant el seu còmput és complicat. Ara bé, en el nostre model, degut a la 1-concavitat, el nucleolus pot ser computat d'una manera molt senzilla utilitzant la seva additivitat i una fórmula especial per a aquest cas concret. Aquest fet pren una especial rellevància en un context empíric.

5. El nucleolus per als jocs de demanda amb externalitat és un concepte de solució que assigna a les universitats que no demandaven cap bé, una part del cost de la demanda històrica de les revistes ja demandades, el que té una fàcil justificació ja que en formar-se el Consorci passaran de no tenir accés a cap revista a tenir accés a totes les revistes, per tant sembla raonable que suportin una part d'aquest cost.

6. I finalment, el nucleolus és l'**únic** concepte de solució dels analitzats que satisfà les condicions requerides anteriorment.

A continuació farem un breu anàlisi de quines propietats no satisfan les solucions analitzades.

Respecte a la racionalitat individual totes les solucions la satisfan. En canvi, la racionalitat coalicional només la satisfan algunes de les tradicionals de la teoria de jocs cooperatius: el nucleolus, la distribució proporcional a les demandes i l'ACA. Observi's que en aquest cas concret el valor de Shapley també pertany al core, ara bé en general aquesta pertinença no es dóna, ja que depèn de la demanda de les diferents universitats. És fàcil comprovar que les altres distribucions no pertanyen al core ja que per a algunes universitats els seu cost separable es troba per sobre de la seva assignació. Respecte a l'additivitat, el nucleolus i la distribució proporcional a les demandes la satisfan, mentre que l'ACA clarament no la satisfà. I per últim comentar que la distribució proporcional a les demandes no satisfà la condició de què les universitats que no demandaven cap revista paguin una part dels béns demandats, ja que cada membre del Consorci segons aquest repartiment paga la seva demanda més una part de les revistes no demandades per cap universitat. Així, per exemple la UOC només paga el cost dividit a parts iguals de les revistes no demandades, mentre que de la resta de revistes no paga res. Això és degut a què la proporcional es basa exclusivament en la demanda històrica i, per tant, si amb anterioritat a la creació del Consorci no demandava res ara tampoc no suportarà cap cost.

Per últim, comentar que els resultats obtinguts en aquesta anàlisi així com la proposta de solucions són tan sols el resultat d'una anàlisi des del punt de vista dels jocs cooperatius. No hem utilitzat criteris, com ho fa el Consorci, que provinguin de factors exògens a la funció característica del joc cooperatiu, que en alguns casos pot ser rellevant. Eventualment, segur que aspectes que no hem considerat com la política estratègica de cada universitat decidiran el criteri final de distribució.