Análisis de soluciones para Juegos Cooperativos de valores medios crecientes respecto a un vector: Juegos Financieros

Josep Maria Izquierdo Aznar

Departament de Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial.
Universitat de Barcelona

Programa de doctorado-Bienio 1989-1991:
Métodos Matemáticos en el Análisis Económico-Financiero

Tesis para optar al Título de Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales.

Director-Tutor: Dr. Carles Rafels i Pallarola
Barcelona, 17 Abril 1996

Director: Dr. Carles Rafels Pallarola

"What will 'really' happen? Which solution concept is 'right'? None of them; they are indicators, not predictions...They depict or illuminate the situation from different angles; each one stresses certain aspects at the expense of others."
(*R. Aumann* (1989) The New Palgrave - Game Theory pág 11.)

Agradecimientos

En primer lugar desearía dar las gracias a mis padres por el apoyo recibido durante tantos años, y a Anna por su infinita paciencia y sus continuos ánimos en los momentos difíciles.

Deseo expresar mi gratitud al profesor Carles Rafels por introducirme en la Teoría de Juegos, por la dedicación que ha prestado a este trabajo y por la amistad que me ha demostrado durante los últimos cuatro años. También quisiera expresar mi reconocimiento hacia el Dr. D. Antonio Alegre, director del departamento de Matématica Económica, Financiera y Actuarial, por la labor en favor de la investigación dentro de la Teoría de Juegos en nuestro departamento y por el apoyo que siempre he recibido de él.

Asimismo, merece una mención especial el interés demostrado y las sugerencias realizadas por el Prof. Theo Driessen cuyos comentarios han ayudado a perfilar el contenido de esta Tesis.

Por último no quisiera olvidarme de Marina, Neus, Francesc Xavier, Jesús y Marcial por su desinteresada colaboración y de todos los demás profesores del departamento que de alguna manera me han ayudado.

Índice

Notaciones

La mayoría de las notaciones utilizadas en esta Tesis están definidas a lo largo del texto. Sin embargo, a continuación listaremos algunas notaciones básicas. que serán frecuentemente usadas en la exposición.

2^N	el conjunto de suconjuntos de N.
$\|S\|$	el número de elementos del conjunto S.
$\square$	indica el final de una demostración.
$\sum_{i \in S} x_i$	el sumatorio de todos los x_i, $i \in S$. En muchas ocasiones se utilizará otra notación equivalente $x(S)$.
$\mathbf{R}^n$	el conjunto de vectores de n componentes.
$\mathbf{R}^n_+$	el conjunto de vectores de n componentes positivas o cero.
$\mathbf{R}^n_{++}$	el conjunto de vectores de n componentes estrictamente positivas.
$\mathbf{Q}^n$	el conjunto de vectores de n componentes racionales.
$\mathbf{N}$	el conjunto de números naturales.
x^S	dado un vector $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ donde cada componente se corresponde con un elemento del conjunto N, x^S es un vector de $\|S\|$ componentes formada por las coordenadas del vector $\vec{x}$ correspondientes a los elementos de S.
$N \setminus S$	el conjunto de elementos de N que no están en S.

Finalmente, para simplificar las expresiones utilizaremos la notación $v(i_1 \dots i_n)$ en lugar de $v(\{i_1, \dots, i_n\})$.

Introducción

El campo de estudio de la Teoría de Juegos se centra en los modelos matemáticos de conflicto y cooperación entre agentes decisores racionales. Las situaciones y problemas que analiza surgen de la interdependencia que tienen las decisiones de los agentes y de su repercusión sobre la utilidad de cada uno de ellos (repercusiones de tipo económico, de poder o, simplemente, de satisfacción). Este planteamiento hace que un objeto de estudio importante para la Teoría de Juegos sea la Economía y, en general, las Ciencias Sociales.

Las decisiones y acciones llevadas a cabo por los agentes pueden tomarse de forma independiente, aunque tomando en cuenta la actuación de otros decisores, o en cooperación y de forma coordinada con ellos. Estos dos enfoques dan lugar a la división de la Teoría de Juegos en un parte dedicada a los juegos cooperativos y en otra dedicada a los juegos no cooperativos. En la presente Tesis nos ocuparemos de modelizar situaciones dentro del campo de la Teoría de Juegos cooperativos.

Dada una actividad económica en la que intervienen varios agentes, o jugadores, un juego cooperativo de utilidad tranferible consiste en un conjunto de jugadores N, y una función característica $v : 2^N \rightarrow \mathbf{R}$, $v(\emptyset) = 0$ que describe, para cada subconjunto de jugadores, la máxima ganancia (o el mínimo coste) que estos jugadores pueden alcanzar si cooperan sin tener en cuenta al resto de jugadores.

Básicamente, un juego cooperativo analiza cuál es el fruto de la cooperación conjunta entre los agentes con la intención de encontrar un criterio que permita la distribución de las ganancias o beneficios obtenidos. En muchos de los modelos estudiados se observa o se asume que la cooperación siempre incrementa positivamente los resultados; sin embargo, la forma en cómo se incrementa es diferente según los problemas analizados.

Una primera idea al respecto nos diría que la adhesión de nuevos miembros a una coalición de agentes nunca empeora el resultado obtenido por la coalición; en Teoría de juegos esta noción se expresa mediante el concepto de **monotonía**.

Una segunda idea reforzaría la anterior e indicaría que romper una coalición de agentes ya formada resultaría ineficiente pues los grupos resultantes de la escisión saldrían perdiendo; esta condición nos conduce a lo que en Teoría de Juegos se denomina **superaditividad**.

Una tercera vía aún más restrictiva respecto a la manera en que la cooperación es beneficiosa exigiría que el efecto positivo de la adhesión de un nuevo agente a una coalición fuera mayor cuanto mayor fuera el número de participantes en la coalición; en otras palabras, estaríamos hablando de la noción de **convexidad** (Shapley, [49]). Para otras modelizaciones de las economías de escala ver el "Survey" de Sharkey [54]

Las dos primeras condiciones (monotonía y superaditividad) son muy generales y se asumen en la mayoría de modelos. La convexidad, sin embargo, implica una regularidad en la aportación de los nuevos jugadores al juego: siempre resulta más productivo que un jugador se incorpore a una coalición con muchos jugadores que a una con pocos jugadores. Esto parece demasiado restrictivo: imaginemos que en una empresa para hacer funcionar una determinada máquina se necesitan como mínimo dos trabajadores; no es difícil de imaginar que la incorporación de un trabajador es más importante cuando sólo existe un trabajador en plantilla que cuando ya existen dos y éstos pueden hacer funcionar la máquina sin su colaboración. Por ello han surgido diversas relajaciones de la convexidad que intentan abarcar más situaciones que la estricta convexidad; en este sentido podemos encontrar en la literatura de juegos conceptos como la semiconvexidad [15], la k-convexidad [13] o la convexidad en media [57].

La noción de convexidad antes mencionada no analiza en ninguna medida si la aportación de un jugador es más importante que la de otro, sólo dice que la incorporación de jugadores es más beneficiosa cuando el grupo formado es más númeroso. Sin embargo, parece importante para el estudio del juego tener en cuenta cuál ha sido la aportación de los agentes al juego. Un ejemplo muy sencillo de condición que expresa de manera clara cuál es esta aportación es la simetría. En los juegos simétricos todos los jugadores son iguales, y por tanto, el beneficio que se obtiene es el mismo para toda coalición que contenga un número igual de jugadores; es decir, si $|S| = |T|$ entonces $v(S) = v(T)$ donde S y T son dos coaliciones de agentes con el mismo número de miembros. De esta manera, establecido cuál es el peso de los jugadores, podemos añadir otros atributos al juego como son la convexidad, la k-convexidad, etc.

Nótese que para un juego simétrico convexo una consecuencia importante es que el beneficio medio respecto al número de jugadores que intervienen en la coalición es creciente, es decir, si $|S|$ es mayor que $|T|$ entonces $\frac{v(S)}{|S|} \geq \frac{v(T)}{|T|}$ donde S y T son dos coaliciones diferentes de jugadores[1]. Otra manera de interpretar el mismo resultado es imaginar que cada jugador aporta a la actividad común una unidad de un recurso

[1]Ver proposición **1.57** pág 58.

homogéneo (el propio trabajo, capital, inputs) de manera que el beneficio medio es creciente respecto a los recursos aportados. Entonces, si los recursos aportados por los jugadores al juego los formalizamos a través de un vector donde cada componente representa la aportación de cada jugador podemos decir que el juego simétrico convexo es un juego creciente respecto a un vector donde todas las componentes son unos. Por tanto, el crecimiento en los valores medios suponen una generalización de los juegos simétricos convexos y otra manera de expresar los beneficios o las economías de escala fruto de la cooperación entre los jugadores.

Esta idea da lugar a lo que denominamos "*juegos de valores medios crecientes respecto a un vector*". Si los valores de la función característica representan los beneficios de las diferentes coaliciones, podemos asumir que siempre serán positivos o cero; los juegos de valores medios crecientes respecto a un vector positivos darán lugar a los **juegos financieros** que serán el objeto de estudio de la presente Tesis.

Naturalmente los juegos simétricos son demasiado sencillos; no siempre todos los jugadores aportarán recursos en la misma medida a la coalición. Para una mejor compresión de este punto, tómese el ejemplo dado por Jean Lemaire [27], [28] donde se plantea el reparto del beneficio obtenido por la inversión de diversos capitales por parte de un conjunto de agentes; en este ejemplo el juego resultante resulta ser creciente en términos medios respecto al vector de capitales.

De los juegos financieros se puede extraer una doble interpretación: una puramente algebraica que consiste en observar el crecimiento en los valores medios del juego respecto a un vector y una económica que incide en que la aportación de recursos por los jugadores repercute de manera creciente en el resultado obtenido. De aquí que cuando abordemos la definición de juego financiero lo hagamos de dos maneras diferentes pero equivalentes: una en la que el juego se construye a partir de la evaluación de los recursos aportados a través de una cierta función; y otra en la que se intenta buscar el vector que hace que el juego sea de valores medios crecientes respecto a ese vector. En esta segunda acepción, al determinar el vector, implícitamente se está realizando una valoración de la aportación de los jugadores.

En este sentido cabe interpretar la inclusión dentro de la clase de los juegos financieros de un modelo muy conocido dentro de la Teoría de juegos como son los juegos de Bancarrota (O'Neill,[40]). Como es bien conocido, en este tipo de juegos se analiza el reparto de un patrimonio entre una serie de acreedores donde cada uno de éstos reclama una cierta cantidad. El juego de bancarrota generado resulta ser financiero respecto al vector de las cantidades reclamadas por cada jugador. Esto abre una serie de preguntas acerca de la aplicación o generalización de las propiedades típicas de los juegos de bancarrota en los juegos financieros.

Esta cuestión se abordará desde tres puntos de vista. En primer lugar, examinaremos si todo juego financiero es convexo como lo son todos los juegos de bancarrota. Este análisis no sólo se centrará en la convexidad sino en otras nociones y generalizaciones de ésta. En segundo lugar, intentaremos observar si, al igual que sucede para los juegos de Bancarrota, el Núcleo de los juegos financieros es siempre no vacío; las evidentes economías de escala inherentes al juego hacen presagiar una respuesta afirmativa. Otro aspecto importante es determinar cuál es la estructura del Núcleo; en los juegos de Bancarrota su definición resulta sencilla. Si bien es de suponer que no será posible extender esta expresión hacia toda la clase de juegos financieros, resulta interesante conocer cuales son las condiciones que hacen posible esta extensión. Por último, dado que para los juegos de Bancarrota resulta particularmente interesante la interpretación de soluciones como el Kernel y el nucleolus, se estudiará si las mismas condiciones anteriores que permitían generalizar los resultados referentes al Núcleo sirven ahora para su aplicación al estudio del Kernel. A pesar de conformar un bloque homogéneo, este estudio estará diseminado en tres capítulos de la Tesis: el análisis de la convexidad lo encontraremos en el capítulo primero, el Núcleo se estudiará en el capítulo segundo y el Kernel se analizará en el capítulo cuarto. El motivo de esta estructuración es que se han considerado como casos particulares dentro del estudio general de los juegos financieros.

La Tesis está organizada en tres partes: en la primera se define el modelo y se estudian sus propiedades; en la segunda se analizan diversas soluciones "clásicas" para los juegos financieros; y en la tercera se comentan y se introducen soluciones específicas para los juegos financieros.

* * * * * *

Respecto a la primera parte, las líneas de estudio se dirigirán en tres direcciones. Primeramente, se establecerán propiedades del modelo para intentar caracterizar la clase de juegos financieros; sin embargo, podemos avanzar que este objetivo no ha podido ser plenamente alcanzado aunque en el Capítulo segundo facilitaremos una caracterización en términos del Núcleo del juego. En segundo lugar, estudiaremos la estructura algebraica de los juegos financieros. El conjunto de los juegos cooperativos de utilidad transferible forman un espacio vectorial siendo los juegos de unanimidad una base para este espacio. Dado que los juegos convexos constituyen un cono dentro de este espacio, se intentará ver si esta misma condición es aplicable a los juegos financieros. El último bloque de este primer capítulo estará dedicado a la comparación de los juegos financieros con otro tipo de juegos como son los convexos, los k-convexos, semiconvexos, y con otros modelos aplicados de juegos como son los "*Clan-Games*", los "*Travelling Salesman Games*" y los "*Linear Production Games*". La intención de este análisis comparativo es situar nuestra clase de juegos dentro del conjunto de juegos cooperativos. Aunque no se analiza en la presente Tesis, otro modelo relacionado con los juegos financieros es el desarrollado por Grafe, Iñarra & Zarzuelo [20] donde estudian lo que denominan "*Externality Games*".

Un problema simétrico al de la distribución de ganancias es el de la distribución de costes. Así como hemos definido los juegos financieros para problemas de distribución de beneficios, también en este primer capítulo nos ocuparemos de los juegos financieros de costes. Estos juegos modelizan el problema de la distribución de costes en la adquisición de un bien divisible o indivisible donde se puede cuantificar la demanda de dicho bien. En este caso se deberá cumplir que el coste medio de satifacer la demanda de cada coalición sea decreciente respecto a la cantidad demandada. La simetría entre los juegos financieros de ingresos y los de costes llevará a formular para cada juego de costes, un juego financiero de ingresos asociado donde el reparto del ahorro generado equivaldrá a la distribución de costes. Una vez establecida esta relación no será necesario volver más al estudio de los juegos de costes y todas la propiedades establecidas se referirán a los juegos de ingresos.

* * * * * *

La segunda parte de la Tesis comprende los capítulos segundo, tercero y cuarto. El capítulo segundo está enteramente dedicado al estudio del Núcleo de un juego financiero, el capítulo tercero a analizar diferentes conceptos de conjunto de negociación y el capítulo cuarto se centra en diversas soluciones como son el valor de Shapley, el nucleolus y el valor de τ.

Aunque correspondan a dos conceptos diferentes es interesante demostrar que dos soluciones coinciden pues de esta manera se refuerza su posible interpretación y adopción como solución del juego. Mientras que el Núcleo es una solución "estática", el conjunto de Negociación incorpora una interacción "dinámica" entre los jugadores. El conjunto de negociación basa su definición en un juego de objeciones y contraobjeciones que se realizan por parte de los jugadores a partir de una propuesta inicial de distribución. Una distribución pertenece al conjunto de negociación si subsiste, si no es eliminada después de que algún jugador realice una objeción contra ella. El núcleo por contra está formado por aquellas distribuciones para las cuales ningún jugador es capaz de realizar una objeción. Tal y como remarcaba Maschler[2], si el Núcleo coincide con el conjunto de negociación la figura del Núcleo sale reforzada pues "*no sólo los puntos fuera del Núcleo están sujetos a objeciones sino a objeciones justificadas....con lo que ni tan siquiera deben ser considerados*". Esta última aseveración quizás sea demasiado taxativa, más si tenemos en cuenta que los valores de la función característica comportan una simplificación del fenomeno económico que se modeliza.

De esta manera la lectura del capítulo segundo debe realizarse por una parte como un tema independiente (sobre todo en lo que hace referencia a la existencia del Núcleo y a la relación de los juegos financieros con los "*markets games*" y los "*flow games*") pero también teniendo en cuenta su posterior conexión con el estudio del conjunto de negociación (prestar especial atención al análisis que se hace de los juegos reducidos).

La noción de Núcleo nos permitirá además dar otra interpretación del concepto de juego financiero. La característica definitoria de un juego financiero es que modeliza situaciones donde existen rendimientos medios crecientes respecto a los recursos invertidos. El hecho de que existan estas economías de escala conducen a que el juego cooperativo generado tenga el Núcleo no vacio. Ésta no es una característica exclusiva de los juegos financieros pues los juegos convexos también comparten esta propiedad. Sin embargo, se puede suponer (y esto es lo que demostramos) que los juegos financieros provienen de situaciones económicas donde los beneficios de la cooperación se mantendrían fueran cuales fueran los recursos aportados por los jugadores. La formalización de estas economías se realiza a través de una función que evalua los beneficios obtenidos por la coalición de los diferentes agentes o jugadores y que da lugar a los valores de la función característica; todo juego generado a partir de esta función tendrá el Nucleo no vacío. Esta característica no será compartida, por ejemplo, por un juego convexo no financiero.

El capítulo tercero, dedicado al Conjunto de Negociación, constituye uno de los ejes centrales de esta Tesis. Ya hemos comentado la importancia de que el Núcleo y el conjunto de Negociación coincidan. En realidad debemos ser cuidadosos y precisar a cuál de las acepciones de conjunto de negociación nos estamos refiriendo. En el capítulo analizaremos tres definiciones diferentes: la de Aumann & Maschler, la de

[2]M.Maschler "*Handbook of Game Theory*" vol I, capítulo 18, pág 637.

Mas-Colell y otra más reciente de Zhou. Aunque aparentemente parecen próximas, la relación entre estos tres conjuntos de negociación no está exactamente determinada en general y por tanto, su estudio nos conducirá no sólo a una mejor comprensión de los juegos financieros sino de las soluciones en si.

Si los capítulos segundo y tercero se refieren a dos soluciones conjuntistas (que recomiendan un conjunto de distribuciones), el capítulo cuarto está dedicado al comentario de tres de las principales soluciones puntuales (que recomiendan una única distribución) definidas en Teoría de Juegos: el Valor de Shapley, el nucleolus y el valor de τ. El capítulo supone un estudio crítico respecto a la aplicabilidad de estas soluciones a los juegos financieros. En toda la exposición subyace la idea de que las soluciones estudiadas en Teoría de Juegos están definidas para modelos donde precisamente no existe ninguna referencia respecto a la aportación de los jugadores. Si se dispone de esta referencia, como es nuestro caso, resulta inevitable realizar una comparación entre lo que se ha aportado y lo que se ha obtenido, y entre lo que han aportado los demás y han obtenido los demás. Esta crítica nos llevará a proponer modificaciones en la definición de estas soluciones (nucleolus proporcional y valor de τ proporcional).

* * * * * *

La última parte de la Tesis recoge el comentario realizado en el capítulo cuarto y analiza soluciones específicas para juegos financieros. En el capítulo quinto se plantean cuáles se consideran propiedades deseables para una solución de un juego financiero; de las soluciones conocidas, la distribución proporcional cumplirá con la mayoría de ellas. Esta solución ha sido ampliamente estudiada en contextos de juegos de bancarrota O'Neil[40], Chun [9], M.A. de Frutos [18], Moulin[37]; en el capítulo se recogen algunos de los axiomas utilizados por estos autores y se reformulan aplicándolos a los juegos financieros con el fin de caracterizar axiomáticamente esta solución.

Si bien es sencilla y posee buenas propiedades, la solución proporcional también es criticable. Partiendo de este punto, se define una nueva solución que denominamos valor del juego financiero; aunque esta solución verificará todas las anteriores propiedades tampoco estará exenta de algunas críticas.

Primera parte

Descripción del modelo

Capítulo 1

Juegos financieros

En este capítulo introducimos la noción de juego financiero a través de una serie de ejemplos distinguiendo entre los juegos financieros de Ingresos (sección **1.1**) y los juegos financieros de costes (sección **1.2**). Se estudian propiedades básicas del modelo, condiciones necesarias para los juegos financieros, así como su estructura algebraica. Establecida la definición formal para ambos tipos de juegos en la sección **1.3** se analiza la relación entre los juegos de costes y los juegos de ingresos. Finalmente, en la sección **1.4** se comparan los juegos financieros con otra clase de juegos destacando sus relaciones y sus diferencias.

1.1 Juego de Ingresos

1.1.1 Algunos Ejemplos

Antes de definir los juegos financieros de Ingresos ilustraremos mediante un par de ejemplos el fenómeno económico que pretendemos analizar.

Ejemplo 1.1 *Construiremos un juego financiero basado en el ejemplo expuesto por Jean Lemaire [27],[28].*

Tres inversores (a partir de ahora jugadores) deciden colocar su dinero conjuntamente en un banco con el fin de obtener un mayor rendimiento. El jugador 1 dispone de 1,800,000 francos para invertir, el jugador 2 de 900,000 francos y el jugador 3 de 300,000 francos. Acuden a un Banco solicitando información acerca de los tipos de interés que pueden obtener invirtiendo diferentes cantidades; la entidad financiera les proporciona los datos facilitados en la siguiente tabla

Deposito	Tipo de interés (efectivo anual)
0-1,000,000	7.75%
1,000,000-3,000,000	10.25%
3,000,000-5,000,000	12%

Con esta estructura creciente de tipos de interés, los jugadores calculan cuál sería la cantidad que obtendrían invirtiendo conjuntamente los capitales (suponemos un horizonte temporal de la inversión igual a un año):

$$v(123) = (1,800,000 + 900,000 + 300,000) \cdot (1 + 0.12) = 3,360,000$$

Si los tres inversores decidieran cooperar, $v(123)$ sería la cantidad que se tendrían que repartir; obsérvese que en este planteamiento incluimos como cantidad a repartir también el capital que recuperan de su inversión dado que lo que nos planteamos es el reparto de la cantidad total recibida como contraprestación a la cesión de disponibilidad realizada al Banco.

El criterio para la distribución de este rendimiento es usualmente el proporcional a los recursos invertidos; la Teoría de Juegos, y la presente Tesis en concreto, tratará de proponer otros criterios alternativos. Para cumplir dicho objetivo nos es necesario conocer cual sería la contraprestación conseguida por las diferentes subcoaliciones de jugadores ($S \subseteq N$) y que notaremos por $v(S)$; dicho valor refleja la cantidad que cada coalición se puede asegurar sin tener en cuenta a los restantes jugadores. La aportación de la Teoría de Juegos al problema de la distribución del beneficio total radica precisamente en tener en cuenta no sólo la cantidad a repartir, sino también el poder de cada jugador y de cada coalición; dicho poder, aunque quizás de forma simplificada, queda reflejado por el valor de las distintas coaliciones en el juego ($v(S)$). En este ejemplo, la expresión general de $v(S)$ es:

$$v(S) = \sum_{i \in S} C_i \cdot [1 + \mathbf{i}(\sum_{i \in S} C_i)]$$

donde C_i es el capital perteneciente al jugador iésimo y $\mathbf{i}(\sum_{i \in S} C_i)$ el tipo de interés asignado a la coalición S. De esta manera podemos calcular el valor de $v(S)$ para todas las coaliciones:

S	$v(S)$
{1}	1,984,500
{2}	969,750
{3}	323,250
{12}	2,976,750
{13}	2,315,250
{23}	1,323,000
{123}	3,360,000

Llegado a este punto, ya hemos construído lo que denominamos juego cooperativo que se caracteriza por un par (N, v) donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v la denominada función característica con $v : 2^N \longrightarrow R$.

En general podemos formalizar las contraprestaciones obtenidas por los jugadores a través de una función $f : R_+ \rightarrow R$. En nuestro ejemplo dicha función sería:

$$f(x) = x \cdot [1 + i(x)]$$

donde, por cada una de las x unidades monetarias invertidas, se recupera $[1 + \mathbf{i}(x)]$ unidades, siendo $\mathbf{i}(x)$ el tipo de interés asignado a la cantidad x de acuerdo con la siguiente función:

$$i(x) = \begin{cases} 0.0775 & 0 < x < 1,000,000 \\ 0.1025 & 1,000,000 \leq x < 3,000,000 \\ 0.12 & 3,000,000 \leq x \leq 5,000,000 \end{cases}$$

Lo importante de este ejemplo es que nos plantea una situación económica donde observamos **rendimientos medios crecientes** respecto a los recursos aportados por los jugadores. En efecto, nótese que si $x > y$ entonces $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}$, dado que $\frac{f(x)}{x} = [1 + \mathbf{i}(x)]$ y $\mathbf{i}(x)$ es creciente respecto a x (dinero invertido). En particular, el crecimiento en los valores medios también se verificará para los recursos aportados por los jugadores, i.e.

$$\sum_{i \in S} C_i < \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \frac{f(\sum_{i \in S} C_i)}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{f(\sum_{i \in T} C_i)}{\sum_{i \in T} C_i}$$

Gráficamente, la figura **1.1** muestra la estructura creciente de la función tipos de interés, mientras que la figura **1.2** muestra los ingresos según los niveles de inversión.

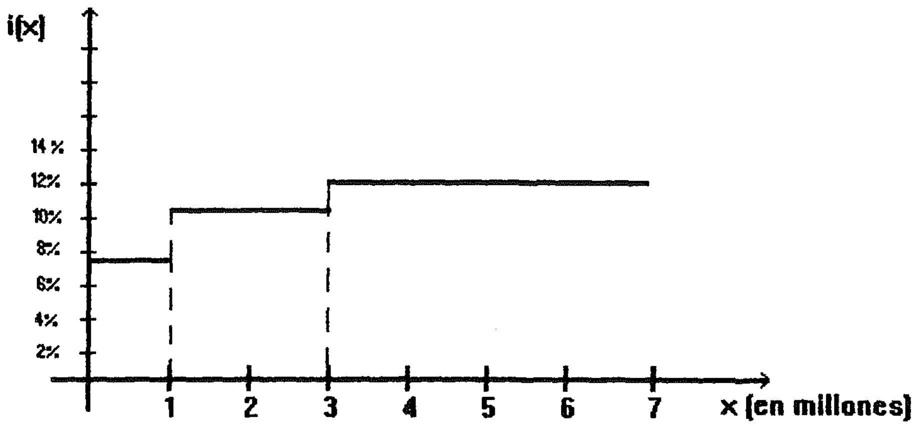

Figura **1.1**: función de tipos de interés.

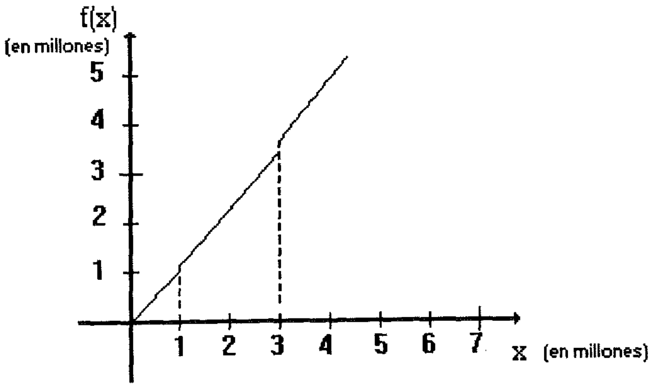

Figura **1.2**: función de ingresos.

Ejemplo 1.2 *Sea una cooperativa agraria que se dedica al procesamiento y preparación para la venta de un determinado producto agrícola. En función de la extensión de los campos de cultivo a procesar se necesitarán un determinado tipo de máquinas u otro cuyo coste anual (amortización) reflejamos en la siguiente tabla:*

Hectáreas	*Amortización*
0-100	*4000 u.m.*
101-399	*6000 u.m.*
400-en adelante	*6500 u.m.*

Una vez procesado el producto agrícola, el Ingreso por la venta de los productos generados a partir de una hectárea es de 50 unidades monetarias. Supongamos que la cooperativa tiene tres socios que poseen respectivamente 25, 75, 450 hectáreas de cultivo respectivamente y que ceden su cosecha a la cooperativa. Dado que la cooperativa tiene que procesar en conjunto las 550 ha. de sus asociados, comprará la máquina cuyo coste anual es de 6500 unidades (supondremos que no existe ningún coste adicional). Una vez procesada y vendida la cosecha, la cantidad que la cooperativa tendrá que repartir entre los socios será de:

$$v(123) = 50 \cdot 550 - 6500 = 21,000 \; u.m.$$

Esta cantidad representa los ingresos totales que percibirán los agricultores por la cesión de sus productos. La pregunta que surge es ¿Cómo se ha de distribuir esta cantidad? Los principios cooperativistas propugnan un reparto proporcional a la actividad de los socios, a la aportación de capital circulante a la explotación (ver el Libro de Enrique Ballestero [6]); en nuestro caso una posible distribución sería la proporcional a las hectáreas de cultivo. Como en el ejemplo anterior y para analizar otras posibles soluciones desde el punto de vista de la Teoría de juegos, construiremos la función característica a partir de la función de Ingresos $f(x) : R_+ \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 50 \cdot x - a(x) & x > 0 \end{cases}$$

donde $a(x) = \begin{cases} 4000 & 0 < x \leq 100 \\ 6000 & 100 < x < 400 \\ 6500 & 400 \leq x \end{cases}$

Dicha función recoge el pago $f(x)$ que la cooperativa realizaría a sus socios como contraprestación a la cesión de sus cosechas que son medidas en hectáreas cultivadas (x). Por tanto y nuevamente, la función recoge el ingreso obtenido por parte de los jugadores ("agricultores") fruto de su asociación.

En nuestro ejemplo, calcularíamos los diferentes ingresos $(f(\sum_{i \in S} C_i))$ que podrían obtener las subcoaliciones (S) de socios de acuerdo con la anterior función y donde C_i representarán las hectáreas cultivadas; los resultados se recogen en la siguiente tabla:

Coalición	ha.($\sum_{i\in S} C_i$)	$f(\sum_{i\in S} C_i)$	$\frac{f(\sum_{i\in S} C_i)}{\sum_{i\in S} C_i}$
1	25	-2,750	-110
2	75	-250	-3.3
3	450	16,000	35.5
12	100	1,000	10
13	475	17,250	36.31
23	525	19,750	37.6
123	550	21,000	38.18

Obsérvese que, al igual que en el caso anterior, se verifica el crecimiento en los ingresos medios, tal y como recoge la última columna de la tabla. Sin embargo, este ejemplo propicia un refinamiento en la definición de los valores de la función característica: si $v(S)$ pretende reflejar la cantidad mínima que la coalición S puede garantizarse por si misma, es evidente que para los jugadores **1** y **2** dicha cantidad no viene reflejada por el valor de la función f dado que obtenemos un ingreso negativo, o lo que lo mismo, pérdidas. Ambos jugadores no poseen una extensión suficiente de terreno para rentabilizar la adquisición de la maquinaria adecuada; por ello es más lógico pensar que si no se adhieren a la cooperativa, no cultivarán los terrenos y por tanto su ingreso será cero. Por tanto, los jugadores siempre podrán asegurarse un ingreso nulo, simplemente, no produciendo. Esta reflexión conduce a modificar[1] la expresión general de la función característica, i.e.

$$v(S) = \max\{0, f(\sum_{i\in S} C_i)\} = (f(\sum_{i\in S} C_i))_+$$

Por tanto, para nuestro ejemplo, tenemos que $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$ y $v(S) = f(\sum_{i\in S} C_i)$ para el resto de coaliciones. Esta ligera modificación no afecta a lo sustancial del juego que es el crecimiento en los ingresos medios respecto a las hectáreas cultivadas.

Es interesante analizar que sucedería si intentáramos generar otro juego a partir de otros valores de hectáreas cultivadas: supongamos que el tercer socio cultivase 300 ha. en lugar de las 450 anteriores; entonces los valores obtenidos serían los calculados en la siguiente tabla:

[1] Recogiendo la sugerencia realizada por el Prof. Theo Driessen.

Coalición	ha. ($\sum_{i\in S} C_i$)	$v(S)$	$\frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i}$
1	25	0	0
2	75	0	0
3	300	9,000	30
12	100	1,000	10
13	325	10,250	31.5
23	375	12,750	34
123	400	13,500	33.75

En este caso el ingreso unitario para la coalición total [{123}] es inferior al obtenido por la coalición {23}: los socios **2** y **3**, actuando conjuntamente, podrían obtener resultados más eficientes en términos medios que si se coaligaran con el socio 1 y por tanto podrían tener inconvenientes a la continuidad del socio 1 si el reparto proporcional es el elegido; en efecto, una característica básica de los juegos financieros, como veremos más adelante, es que siempre es lícito repartir el ingreso proporcionalmente a los recursos aportados. Esto no es posible si se dan las ineficiencias mostradas en el ejemplo: un reparto proporcional otorgaría 33.75 unidades como pago unitario por ha., mientras que si se excluyera de la cooperación al jugador 1 se podrían cobrar hasta 34. Gráficamente, esta situación se puede ilustrar observando la gráfica de los ingresos totales (figura **1.3**) y de los ingresos medios. (figura **1.4**).

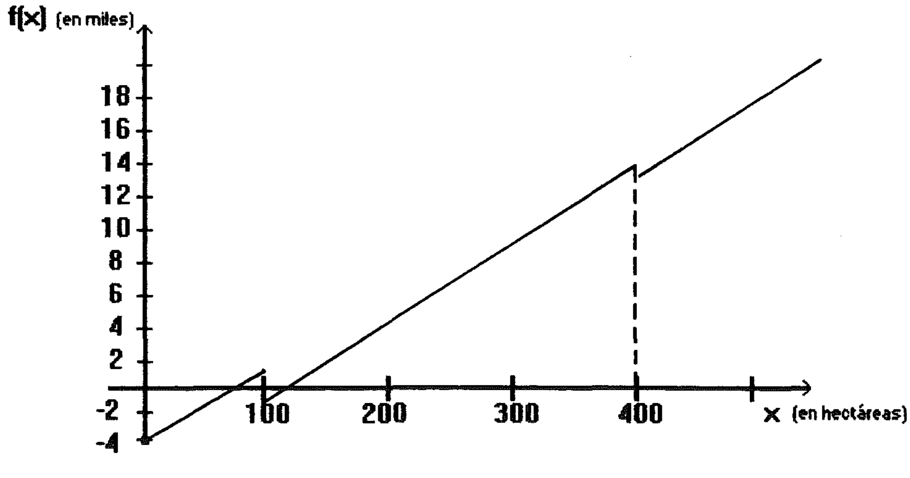

Figura **1.3**: Cooperativa - ingresos totales

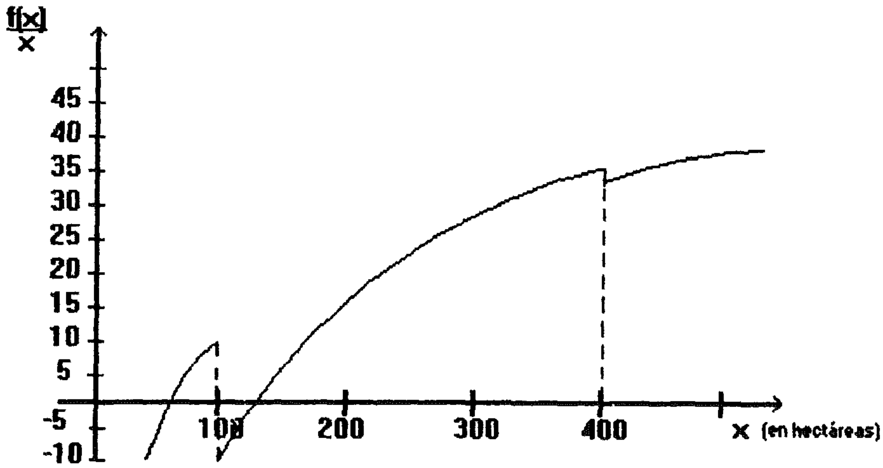

Figura **1.4**: Cooperativa - ingresos medios

A la vista de los dos ejemplos anteriores, podemos extraer una serie de rasgos comunes que caracterizarán un juego financiero de ingresos

- existencia de unos recursos (dinero,inputs,...) en manos de unos "jugadores".

- Dichos recursos se ceden a una entidad (Banco,cooperativa), y a cambio, esta entidad realiza una contraprestación por la cesión de estos recursos, lo cual supone un ingreso para los jugadores. Por tanto, los jugadores **financian** una actividad, un proyecto que les reporta un beneficio o un ingreso

- Los ingresos medios son crecientes. Si una coalición ha entregado una mayor cantidad de recursos, el pago unitario que recibe también es mayor.

- Algebraicamente podemos decir que lo que obtenemos es un juego positivo de **valores medios crecientes** respecto al vector de recursos $(C_1, \ldots, C_n)$.

- El reparto del ingreso total entre los jugadores puede ser establecido, en principio, libremente sin que exista restricción alguna. Este tipo de situaciones generan un juego cooperativo de utilidad transferible. (TU-Game)

En la siguiente sección definiremos formalmente lo que entendenos por juego financiero de ingresos.

1.1.2 Definición del modelo

Los juegos financieros de Ingresos (en adelante $\mathcal{FG}^n$) vienen determinados por la existencia de n agentes o, en adelante, jugadores ($i = 1, \ldots, n$) donde cada uno de ellos posee una cantidad de un cierto recurso (dinero, input, medida objetiva de la aportación del jugador a la actividad) y que notaremos por $C_1, \ldots, C_n$. Los jugadores ceden ("venden") sus recursos a una entidad obteniendo una contraprestación, unos ingresos. La clave para el planteamiento del juego se basa en suponer que los ingresos por unidad cedida son crecientes y que los jugadores siempre estarán interesados en cooperar para obtener un mayor Ingreso.

La Teoría de juegos cooperativos tratará de repartir el rendimiento conjunto teniendo en cuenta los rendimientos que las posibles subcoaliciones pudieran obtener actuando por separado. Los juegos cooperativos de utilidad transferible (TU-games) serán el marco en que trataremos de resolver el problema como hemos comentado anteriormente.

Formalmente los juegos cooperativos (G^n) se definen como un par ordenado (N, v) donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores y v la función característica que reflejará los Ingresos resultado de la cooperación en las diversas subcoaliciones; formalmente v es una aplicación de las partes de N en $\mathbf{R}$ tal que el vacío se valora 0.

Definición 1.3 *Sea f la función que evalua los Ingresos obtenidos en función de las recursos entregados $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$;*

Sea N=$\{1, \ldots, n\}$ el conjunto de jugadores; y $C_1, \ldots C_n$ $C_i > 0$, los recursos invertidos por cada jugador de manera que se cumple que

$$\sum_{i \in S} C_i < \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \frac{f(\sum_{i \in S} C_i)}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{f(\sum_{i \in T} C_i)}{\sum_{i \in T} C_i} \tag{1.1}$$

donde $S, T \subseteq N$; $S, T \neq \emptyset$.
Definimos el juego financiero como:

$(N, v) \in G^n$ $N = \{1, \ldots, n\}$ *con*

- $v(\emptyset) = 0$

- $v(S) = \max\{0, f(\sum_{i \in S} C_i)\}$ $\forall S \subseteq N; S \neq \emptyset$

Como hemos comentado en el anterior ejemplo, la expresión de $v(S)$ es consecuencia de suponer que si los ingresos son negativos, el jugador o coalición siempre se puede asegurar un valor nulo no participando en la actividad económica analizada.

De manera alternativa podemos considerar la siguiente definición:

Definición 1.4 *Un juego (N, v), $v(S) \geq 0$, es financiero respecto a un vector $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$ si y sólo si*

$$\sum_{i \in S} C_i \leq \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \frac{v(S)}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{v(T)}{\sum_{i \in T} C_i} \tag{1.2}$$

donde $S, T \subseteq N$; $S, T \neq \emptyset$.

Ambas definiciones son equivalentes. Efectivamente,

<u>Def.**1.3** $\Rightarrow$ Def.**1.4**</u>.

Sea $v(S) = \max\{0, f(\sum_{i \in S} C_i)\}$, entonces

1) $v(S) \geq 0$.

2) $\sum_{i \in S} C_i = \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow f(\sum_{i \in S} C_i) = f(\sum_{i \in T} C_i) \Rightarrow v(S) = v(T) \Rightarrow$

$$\frac{v(S)}{\sum_{i \in S} C_i} = \frac{v(T)}{\sum_{i \in T} C_i}.$$

$$\sum_{i \in S} C_i < \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \frac{f(\sum_{i \in S} C_i)}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{f(\sum_{i \in T} C_i)}{\sum_{i \in T} C_i} \Rightarrow$$

$$\max\left\{0, \frac{f(\sum_{i \in S} C_i)}{\sum_{i \in S} C_i}\right\} \leq \max\left\{0, \frac{f(\sum_{i \in T} C_i)}{\sum_{i \in T} C_i}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\max\left\{0, f(\sum_{i \in S} C_i)\right\}}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{\max\left\{0, f(\sum_{i \in T} C_i)\right\}}{\sum_{i \in T} C_i} \Rightarrow \frac{v(S)}{\sum_{i \in S} C_i} \leq \frac{v(T)}{\sum_{i \in T} C_i}.$$

<u>Def.**1.4** $\Rightarrow$ Def.**1.3**</u>.

Sea $\mathcal{C} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m \,|\, x_0 = 0 \text{ y } x_{i-1} < x_i\} \subset \mathbf{R}$ el conjunto de valores que representan los recursos aportados por cada una de la coaliciones. Es decir, dado un valor x_i, existe al menos una coalición S tal que $\sum_{k \in S} C_k = x_i$, y viceversa, toda coalición S viene representada por un valor igual a la suma de los recursos aportados por sus miembros, i.e. para toda $S \subseteq N$ existe un índice i tal que $x_i = \sum_{k \in S} C_k$.

Denotemos por v_i $i = 0 \ldots m$ al valor de la función característica de la coalición $S \subset N$ que verifica que $\sum_{k \in S} C_k = x_i$. Puede existir más de una coalición con los mismos recursos, pero verifíquese que a partir de la definición (1.2) se deduce que, si

$\sum_{k\in S} C_k = \sum_{k\in T} C_k$, entonces $v(S) = v(T)$. Nótese además que $v_0 = 0$ dado que $x_0 = 0$ se corresponde con la coalición vacía y que $v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_m$.

A partir de aquí definimos la siguiente función $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) + v_i & x_{i-1} \leq x < x_i \quad i = 1, \ldots, m-1 \\ \\ \dfrac{v_m - v_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}(x - x_m) + v_m & x_{m-1} \leq x \end{cases}$$

Esta función es lineal a tramos, positiva y continua; además si $x_i = \sum_{k\in S} C_k$ se cumple que $f(\sum_{k\in S} C_k) = f(x_i) = v_i = v(S) \geq 0$. De aquí es inmediato que

$$v(S) = \max\{0, f(\sum_{i\in S} C_i)\}.$$

Nótese que esta igualdad es cierta por la positividad de los juegos financieros. Además se cumple que

$$\sum_{i\in S} C_i < \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \frac{f(\sum_{i\in S} C_i)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{f(\sum_{i\in T} C_i)}{\sum_{i\in T} C_i}$$

donde $S, T \subseteq N$; $S, T \neq \emptyset$.

En consecuencia, siempre que enunciemos que un juego es financiero citaremos respecto a qué vector; más adelante discutiremos si ese vector puede o no ser único (proposiciones **1.43** y **1.45**, páginas 44-45).

Observación 1.5 *En lo sucesivo utilizaremos indistintamente la anterior notación y otra más simple:* $v(S) = \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \cdot \sum_{i\in S} C_i = (\sum_{i\in S} C_i) \cdot \mathbf{f}_S$ *donde* $\mathbf{f}_S = \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i}$. *Entonces, la condición (1.2) se puede reformular como*

$$\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \mathbf{f}_S \leq \mathbf{f}_T$$

donde $S, T \subseteq N$; $S, T \neq \emptyset$.

1.1.3 El caso de los juegos de Bancarrota

El estudio de los juegos de Bancarrota fue iniciado por O'Neill [40]. En ellos se plantea cómo distribuir un patrimonio (herencia) **E**, teniendo en cuenta que las demandas de los acreedores (herederos) $d_i > 0$ superan el montante a repartir[2]. Más formalmente

[2]En su artículo, O'Neill considera que las demandas puedan ser igual a cero; nosotros exigiremos que todas sean estrictamente positivas pues sino generaríamos un jugador ficticio $v(S \cup i) = v(S)\ \forall S \subseteq N \setminus i$.

tenemos que $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de acreedores, $d := (d_1, \ldots, d_n)$ las demandas o reclamaciones de cada acreedor y que $\sum_{j \in N} d_j \geq \mathbf{E}$.

El problema de la bancarrota $(\mathbf{E}, d)$ genera un juego cooperativo cuya función característica viene dada por

$$v_{\mathbf{E};d}(S) := \max\{0, \mathbf{E} - d(N \backslash S)\} = (\mathbf{E} - d(N \backslash S))_+ \quad \forall S \subseteq N \tag{1.3}$$

Tal y como está definido el juego, el valor de una coalición se identifica con la cantidad sobrante (si sobra) luego de pagar a los acreedores que no están en la coalición. La aportación de un jugador al juego podría medirse según el valor de su reclamación pues al incorporarse a una coalición rebaja el montante que la coalición ha de pagar a los jugadores no incluidos en ella y incrementa la cuantía que puede asegurarse la coalición, precisamente en el valor de la demanda (siempre y cuando anteriormente el valor que podía asegurarse la coalición fuera positivo). Parece interesante pues, reformular la definición del juego de bancarrota en términos de una función evaluada para las distintas reclamaciones (esta idea es debida al Prof. Theo Driessen, ver [12]):

$$v_{\mathbf{E};d}(S) := \max\{0, \mathbf{E} - d(N \backslash S)\} = \max\{0, \mathbf{E} - d(N) + d(S)\};$$

tomando $\Delta = \mathbf{E} - d(N)$ y $f(x) = \Delta + x$ tendremos que

$$v_{\mathbf{E};d}(S) := \max\{0, f(d(S))\}.$$

Observemos que el juego de bancarrota adquiere la forma de un juego financiero donde $(C_1 \ldots, C_n) = (d_1, \ldots, d_n)$.

Proposición 1.6 *Un juego de Bancarrota $(N, v_{\mathbf{E};d})$ siempre es un juego financiero donde los recursos asociados a cada jugador coinciden con las demandas de los acreedores, i.e. $\vec{C} = \vec{d}$.*

DEM. Dada la definición de juego financiero basta comprobar que si

$$\sum_{i \in S} d_i < \sum_{i \in T} d_i \Rightarrow \frac{f(\sum_{i \in S} d_i)}{\sum_{i \in S} d_i} \leq \frac{f(\sum_{i \in T} d_i)}{\sum_{i \in T} d_i}.$$

En efecto,

$$\frac{f(\sum_{i \in S} d_i)}{\sum_{i \in S} d_i} = \frac{\Delta + \sum_{i \in S} d_i}{\sum_{i \in S} d_i} = \frac{\Delta}{\sum_{i \in S} d_i} + 1 <^{3}$$

[3] $\Delta \leq 0$ dado que $\sum_{j \in N} d_j \geq \mathbf{E}$.

$$< \frac{\Delta}{\sum_{i\in T} d_i} + \frac{\sum_{i\in T} d_i}{\sum_{i\in T} d_i} = \frac{f(\sum_{i\in T} d_i)}{\sum_{i\in T} d_i}.$$

□

Los ejemplos **1.2** y **1.1** vistos en la sección anterior indican una división de las funciones generadoras de juegos financieros en dos tipos: aquellas que siempre generan un juego financiero para cualquier nivel de recursos en posesión de los jugadores (Ejemplo **1.1**) y aquellas que, para valores concretos, verifican las condiciones de crecimiento en los ingresos medios (Ejemplo **1.2**). Si nos centramos en el primer tipo de funciones, nos interesa modelizar situaciones en las que los Ingresos marginales son siempre superiores a los ingresos medios. Aparte de la función definida a tramos expuesta en el primer ejemplo, enunciaremos cierto tipo de funciones interesantes que dan lugar a juegos financieros:

- suponiendo hipótesis de diferenciabilidad, funciones positivas con elasticidad mayor o igual a 1.

  DEM.

  Sea $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_{++}$, $f(0) = 0$ una función con valores medios crecientes, i.e.

$$x < y \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y} \;\forall\, x, y \in \mathbf{R}_{++},$$

  A partir de la definición **1.3** es fácil observar que todo juego generado a partir de esta función será financiero. Sin embargo, si la función f es diferenciable la función $\frac{f(x)}{x}$ también lo será y por tanto la anterior condición equivale a que su primera derivada sea positiva:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' \geq 0 \;\forall\, x \in \mathbf{R}_{++};$$

  desarrollando la derivada tenemos

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} \geq 0$$

  lo que implica que

$$f'(x)\cdot x - f(x) \geq 0 \quad \text{o, dado que } f(x) > 0,\; E[f(x)] = f'(x)\frac{x}{f(x)} \geq 1.$$

  Por tanto, dada la diferenciabilidad de la función, valores medios crecientes y elasticidad mayor o igual a 1 son equivalentes.

□

- funciones lineales. $f(x) = a \cdot x + b$ con $a \geq 0$ y $b \leq 0$. Estas funciones generan toda la gama de juegos de bancarrota analizados anteriormente. Además la función se podría interpretar como una función de beneficios donde b representaría los costes fijos y a el margen entre el precio y los costes variables.

  Si $b = 0$ el juego generado es aditivo $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$ por lo que cabe considerarlo como inesencial (no se plantea el problema del reparto entre los jugadores); para este caso imaginemos, por ejemplo, un juego financiero como el del ejemplo **1.1** en donde todos los jugadores pudieran conseguir el mismo tipo de interés.

- funciones convexas $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, con $f(0) \leq 0$.

  DEM.

  En efecto, si f es convexa entonces se cumple que

$$f[(1-\lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot x_1] \leq (1-\lambda) \cdot f(0) + \lambda \cdot f(x_1) \ \forall \lambda \in]0,1], \forall x_1 > 0$$

  o simplificando, $f(\lambda \cdot x_1) \leq \lambda f(x_1)$. Dividiendo a ambos lados por $\lambda \cdot x_1$ obtenemos que

$$\frac{f(\lambda \cdot x_1)}{\lambda \cdot x_1} \leq \frac{f(x_1)}{x_1}$$

  y dado que ello se cumple para todo x_1 se cumplirá la estructura creciente en los valores medios. □

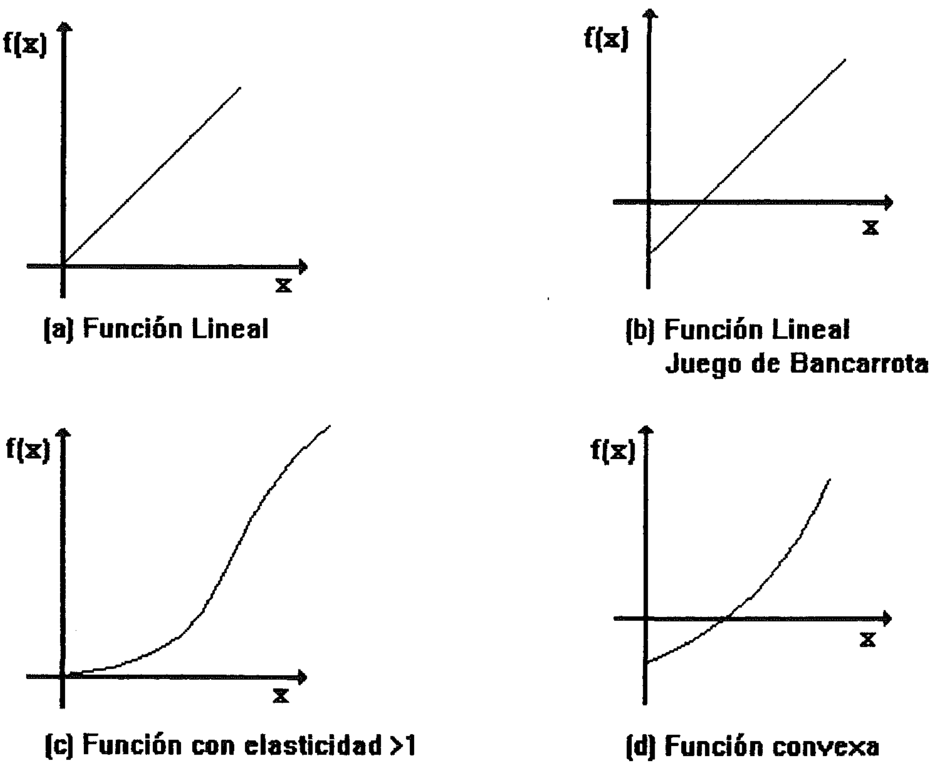

Figura **1.5**: funciones generadoras de un juego financiero de ingresos.

1.1.4 Propiedades

En esta sección se exponen una serie de propiedades básicas del modelo, comentando el significado intuitivo de éstas. Las tres primeras se derivan directamente de la definición. En todas las propiedades (N, v) representará un juego financiero respecto al vector $\vec{C} = (C_1, \ldots, C_n)$, y S y T dos coaliciones no vacías.En adelante, y por simplicidad, notaremos como $C(S)$ al sumatorio $\sum_{i \in S} C_i$.

Propiedad 1.7 $C(S) = C(T) \Rightarrow v(S) = v(T)$

es decir, "*si dos coaliciones invierten los mismos recursos obtienen los mismos Ingresos.*"

El reverso de esta implicación no es en general cierta debido a que $v(S)$ y $v(T)$ podrían ser cero pero no por ello S y T deberían tener los mismos recursos; simplemente podría suceder que $f(C(S))$ y f(C(T)) fueran ambos inferiores a cero. Sin embargo, podemos enunciar una condición más restringida.

Propiedad 1.8 $C(S) = C(T) \Rightarrow \frac{v(S)}{C(S)} = \frac{v(T)}{C(T)}$.

"Si dos coaliciones tienen los mismos recursos, su Ingreso medio será el mismo"
Obsérvese que el recíproco no es cierto, es decir que si para dos coaliciones observamos que su ingreso medio es el mismo no es porque hayan aportado los mismos recursos sino porque el tramo de la función de ingreso donde se evaluan dichos recursos presenta rendimientos constantes. En cambio si que es cierta la siguiente propiedad:

Propiedad 1.9 $\frac{v(S)}{C(S)} < \frac{v(T)}{C(T)} \Rightarrow C(S) < C(T)$,

es decir, si existen diferencias entre los ingresos medios de dos coaliciones ello implica que los recursos de las dos coaliciones también son diferentes.

Propiedad 1.10 $C(S) < C(T) \Rightarrow v(S) \leq v(T)$.

DEM.

Por la definición de juego financiero tenemos que $0 \leq \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i}$ y por tanto $\sum_{i\in S} C_i \cdot \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \sum_{i\in T} C_i \cdot \frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i}$ lo que implica que $v(S) \leq v(T)$.

□

Nótese que la desigualdad estricta $v(S) < v(T)$ no es necesariamente cierta; a pesar de que la coalición S aporte menos recursos que la T, puede ser que el valor de ambas coaliciones en la función característica sea 0 con lo cual obtendríamos la igualdad.

Esta propiedad tendría la siguiente interpretación: *"Cuanto más recursos tiene una coalición mayor es el Ingreso obtenido"*.

Observación 1.11 *Un caso particular lo tendremos cuando $S \subset T \quad S \neq T$, es decir, cuando S y T sean comparables; entonces se cumplirá que*

$$S \subset T \Rightarrow C(S) < C(T) \Rightarrow v(S) \leq v(T).$$

Ello nos está diciendo que los juegos financieros son monótonos.

Propiedad 1.12 *Si $v(N) = 0$ entonces $v(S) = 0$ para toda $S \subset N$.*

Esta propiedad es simplemente una consecuencia de la anterior observación y de la positividad del juego.

Propiedad 1.13 *Si $C(S) < C(T)$,*

$$v(S) = v(T) \Rightarrow v(S) = v(T) = 0.$$

DEM.

Supongamos que $C(S) < C(T)$ y $v(S) = v(T) \neq 0$. Entonces $\frac{1}{C(S)} > \frac{1}{C(T)} \Rightarrow \frac{v(S)}{C(S)} > \frac{v(T)}{C(T)}$ lo cual supone una contradicción con el caracter financiero del juego. □

Propiedad 1.14 *Sea* $T \subset N$, $T \neq N$; *si* $v(N) = v(T) \Rightarrow v(S) = 0 \ \forall S \subseteq N$.

DEM.

Si $v(N) = v(T)$, aplicando la propiedad **1.13** tenemos que $v(N) = v(T) = 0$. Entonces, aplicando la propiedad **1.12** se deduce que $v(S) = 0 \ \forall S \subseteq N$. □

Propiedad 1.15 $v(S) < v(T) \Rightarrow C(S) < C(T)$.

DEM.

Si se cumpliera que $C(S) \geq C(T)$, ello implicaría por la definición de juego financiero que $\frac{v(S)}{C(S)} \geq \frac{v(T)}{C(T)}$. De aquí se deduciría que

$$v(S) = \frac{v(S)}{C(S)} \cdot C(S) \geq \frac{v(T)}{C(T)} \cdot C(S) \geq \frac{v(T)}{C(T)} \cdot C(T) = v(T)$$

contradicción con la hipótesis inicial. □

Propiedad 1.16 $0 < v(S) = v(T) \Rightarrow C(S) = C(T)$

DEM.

Si $C(S)$ no fuera igual a $C(T)$, entonces se cumpliría que $C(S) > C(T)$ o $C(S) < C(T)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C(S) < C(T)$; entonces por la definición de juego financiero, tendríamos que $\frac{v(S)}{C(S)} \leq \frac{v(T)}{C(T)}$. Dado que $v(S) = v(T) > 0$, esta última desigualdad implica que $\frac{1}{C(S)} \leq \frac{1}{C(T)}$ o de manera equivalente que $C(T) \leq C(S)$, contradicción con la hipótesis realizada.

□

Propiedad 1.17 *Sean* $v_1, \ldots, v_t$ *t-juegos financieros definidos sobre el mismo conjunto de jugadores* N *y respecto al mismo vector de recursos* $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathbf{R}^n_{++}$, *i.e.* $v_i(S) = (\sum_{i \in S} C_i) \cdot \mathbf{f}^i_S$, *entonces*

$$(N, v^{\mathbf{max}}) \ \textit{es un juego financiero respecto al vector} \ (C_1, \ldots, C_n)$$

donde $v^{\mathbf{max}}(S) = \max\{v_1(S), \ldots, v_k(S), \ldots, v_t(S)\}$

DEM.

Por la observación **1.5** $v^{\max}(S) = \max\{\mathbf{f}_S^1, \ldots, \mathbf{f}_S^k, \ldots, \mathbf{f}_S^t\} \cdot \sum_{i \in S} C_i$. Entonces, si $\sum_{i \in S} C_i \leq \sum_{i \in T} C_i \Rightarrow \mathbf{f}_S^k \leq \mathbf{f}_T^k \;\; i = 1, \ldots, t \Rightarrow$

$$\max\{\mathbf{f}_S^1, \ldots, \mathbf{f}_S^k, \ldots, \mathbf{f}_S^t\} \leq \max\{\mathbf{f}_T^1, \ldots, \mathbf{f}_T^k, \ldots, \mathbf{f}_T^t\} \quad \forall\, S,\, T \subseteq N;\; S, T \neq \emptyset.$$

□

El juego máximo indica que cada coalición puede invertir sus recursos de la mejor manera: si cada proyecto en el cual puede invertir respeta las características de los juegos financieros, el juego resultante continuará siendo financiero.

Propiedad 1.18 *Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de jugadores y $C_1, \ldots, C_n$ los recursos en posesión de cada uno de ellos. Sean f y g dos funciones generadoras de un juego financiero que presentan un crecimiento en los valores medios para todo el dominio $\mathbf{R}_+$; sea $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Entonces*

$$v(S) = \max\{0,\, f(\alpha \cdot C(S)) + g((1-\alpha) \cdot C(S))\} \quad \alpha \in (0,1)$$

es un juego financiero respecto al mismo vector $(C_1, \ldots, C_n)$.

DEM.

$$\begin{aligned}
\text{Si } C(S) \leq C(T) \Rightarrow \quad \frac{v(S)}{C(S)} &= \max\left\{0,\, \frac{f(\alpha \cdot C(S)) + g((1-\alpha) \cdot C(S))}{C(S)}\right\} && = \\
&= \max\left\{0,\, \frac{f(\alpha \cdot C(S))}{C(S)} + \frac{g((1-\alpha) \cdot C(S))}{C(S)}\right\} && = \\
&= \max\left\{0,\, \alpha \cdot \frac{f(\alpha \cdot C(S))}{\alpha \cdot C(S)} + (1-\alpha) \cdot \frac{g((1-\alpha) \cdot C(S))}{(1-\alpha) \cdot C(S)}\right\} && \leq \\
&\leq \max\left\{0,\, \alpha \cdot \frac{f(\alpha\, C(T))}{\alpha \cdot C(T)} + (1-\alpha) \frac{g((1-\alpha) \cdot C(T))}{(1-\alpha) \cdot C(T)}\right\} && = \\
&= \max\left\{0,\, \frac{f(\alpha \cdot C(T)) + g((1-\alpha) \cdot C(T))}{C(T)}\right\} && = \frac{v(T)}{C(T)}
\end{aligned}$$

□

Esta última propiedad incide en la posibilidad de que, por diversos motivos, los jugadores dividan sus recursos, invirtiendo una parte (α) en un proyecto (representado por la función f) y el resto ($1-\alpha$) en otro proyecto (representado por la función g).Los resultados obtenidos mantienen las características del juego financiero.

1.1.5 La estructura algebraica de los juegos financieros

Es bien conocido que el conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible G^n tiene estructura de espacio vectorial y su dimensión es $2^n - 1$. Una base para ese espacio la constituyen los juegos de unanimidad .

Definición 1.19 *El juego de unanimidad asociado a la coalición T ($\emptyset \neq T \subseteq N$) se define como*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & si\, T \subseteq S \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Existen $2^n - 1$ juegos de unanimidad, tantos como coaliciones no vacías. Todo juego cooperativo v se puede expresar como combinación lineal de los juegos de unanimidad, i.e.

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T \cdot u_T$$

donde $\lambda_T = \sum_{R \subseteq T} (-1)^{t-r} v(R)$, $t = |T|$ y $r = |R|$.

Los juegos de unanimidad son asimismo juegos convexos (Driessen [13] p. 114-115); dado que son linealmente independientes y los juegos convexos forman un cono en el espacio de los juegos cooperativos tenemos que la dimensión de dicho cono es $2^n - 1$.

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la estructura de los juegos financieros. Empezaremos destacando tres características importantes de los juegos financieros:

(a) En primer lugar, es importante remarcar que la suma de dos juegos financieros cualesquiera (respecto a cualquier vector) no siempre resulta un juego financiero. El siguiente ejemplo nos muestra este punto:

Ejemplo 1.20 *Considérese los juegos v y w donde*

v(1) = 10; v(2) = 10; v(3) = 10; v(12) = 20; v(13) = 20; v(23) = 20; v(123) = 30

w(1) = 10; w(2) = 20; w(3) = 20; w(12) = 30; w(13) = 44; w(23) = 44; w(123) = 55

El juego v es financiero respecto al vector $(10, 10, 10)$ *y el juego w respecto al vector* $(10, 20, 20)$.

El juego suma $v + w$ nunca puede ser un juego financiero dado que para ello tendría que existir un vector (C_1, C_2, C_3) de manera que $C_1 < C_2 = C_3$ (aplicación de las propiedades **1.15** y **1.16**) y que $\frac{(v+w)(1)}{C_1} \leq \frac{(v+w)(12)}{C_1+C_2}$ y $\frac{(v+w)(2)}{C_2} \leq \frac{(v+w)(12)}{C_1+C_2}$ (por aplicación de la definición de juego financiero). De las dos anteriores desigualdades, y sustituyendo los valores de $v+w$, se llega a que $\frac{3}{2}C_1 = C_2$. Dado que estamos suponiendo el caracter financiero del juego se debe cumplir que

$$C_2 + C_3 < C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow \frac{(v+w)(23)}{C_2 + C_3} \leq \frac{(v+w)(123)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

o, según las relaciones entre los valores de C_1, C_2 y C_3 y sustituyendo los valores de $(v + w)$,

$$\frac{64}{3C_1} \leq \frac{85}{4C_1} \text{ o bien } 256 \leq 255$$

lo cual supone una contradicción.

Por contra si v y w fueran dos juegos financieros respecto al mismo vector el juego suma también sería un juego financiero respecto a dicho vector. En efecto,

$$\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \frac{v(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{v(T)}{\sum_{i\in T} C_i} \text{ y } \frac{w(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{w(T)}{\sum_{i\in T} C_i},$$

y por tanto

$$\sum_{i\in S} C_i \leq \sum_{i\in T} C_i \Rightarrow \frac{v(S) + w(S)}{\sum_{i\in S} C_i} \leq \frac{v(T) + w(T)}{\sum_{i\in T} C_i}.$$

(b) En segundo lugar, si un juego v es financiero respecto a un vector, entonces $\lambda \cdot v$ $[\lambda \geq 0]$ es un juego financiero respecto al mismo vector. Esta afirmación se deduce directamente de la definición.

(c) En general, los juegos de unanimidad no son juegos financieros.

Proposición 1.21 *El único juego de unanimidad que es financiero es el asociado a la coalición total, u_N.*

DEM.

El juego u_N es financiero respecto a cualquier vector $\vec{C} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}_{++}$ dado que para toda $S \subset N$ tenemos que $\frac{u_N(S)}{\sum_{i\in S} C_i} = 0 < \frac{1}{\sum_{i\in N} C_i} = \frac{u_N(N)}{\sum_{i\in N} C_i}$.

Consideremos ahora otro juego de unanimidad u_R $R \subset N$; supongamos que existiera un vector $\vec{C} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}_{++}$ para el cual el juego fuera financiero; entonces se verificaría que $\sum_{i\in R} C_i < \sum_{i\in N} C_i$ y por tanto, por definición de juego financiero que $\frac{u_R(R)}{\sum_{i\in R} C_i} \leq \frac{u_R(N)}{\sum_{i\in N} C_i}$ pero ello no se cumple dado que $u_R(R) = u_R(N)$.

□

De estas tres observaciones deducimos que, fijado un vector $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$, los juegos que son financieros respecto a dicho vector forman un cono dentro del espacio de los juegos cooperativos. Por otra parte, si pretendemos establecer cuáles son los juegos financieros generadores de este cono y por tanto la dimensión del cono, los juegos de unanimidad no nos serán de gran utilidad. En sustitución de éstos vamos a definir lo que denominaremos como **juegos de mínimo nivel** de recursos asociados a un vector $\vec{C}$.

Definición 1.22 *Un juego de mínimo nivel de recursos respecto al vector $\vec{C}$ asociado a la coalición $T \neq \emptyset$ $(N, v_{T,\vec{C}})$, se define como:*

$$v_{T,\vec{C}}(S) := \begin{cases} 0 & si \ \sum_{i\in S} C_i < \sum_{i\in T} C_i \\ \sum_{i\in S} C_i & si \ \sum_{i\in S} C_i \geq \sum_{i\in T} C_i \end{cases} \quad \forall S \subseteq N,\ S \neq \emptyset$$

Cada juego de mínimo nivel es un juego aditivo truncado: en efecto, obsérvese que el valor de una coalición es cero siempre y cuando los recursos asociados a la coalición no alcancen un mínimo nivel $(\sum_{i\in T} C_i)$; si superan este nivel el valor asociado es el del juego aditivo generado por el vector $\vec{C}$.

Observación 1.23 *Cada juego de mínimo nivel es un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$. Esto es inmediato si tenemos en cuenta que el valor medio de las coaliciones cuyos recursos no llegan hasta el nivel requerido es 0 y 1 para las que superan dicho nivel.*

La siguiente pregunta que nos planteamos es ¿Cuántos juegos de mínimo nivel diferentes existen para un vector dado?. En principio, parece ser que existen $2^n - 1$, tantos como coaliciones podamos generar a partir del conjunto N. Sin embargo es fácil imaginar que algunos de ellos coincidirán.

Proposición 1.24 *Sea N un conjunto de jugadores; $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$ el vector de recursos asociados a los jugadores; R y T dos subconjuntos de jugadores. Entonces para toda $S \subseteq N$*

$$v_{R,\vec{C}}(S) = v_{T,\vec{C}}(S) \Leftrightarrow \sum_{i\in R} C_i = \sum_{i\in T} C_i \ .$$

DEM.

$\Leftarrow$) es inmediato dado que el punto crítico que marca cuando los valores pasan a ser mayores que cero es el mismo.
$\Rightarrow$) Supongamos que $v_{R,\vec{C}}(S) = v_{T,\vec{C}}(S)\ \forall S \subseteq N$ pero $\sum_{i\in R} C_i > \sum_{i\in T} C_i$; entonces por definición de juego de mínimo nivel $v_{R,\vec{C}}(T) = 0 < \sum_{i\in T} C_i = v_{T,\vec{C}}(T)$ lo cual supone una contradicción con la hipótesis inicial.

□

Observación 1.25 *Dado un vector $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$, existen como mínimo n juegos de mínimo nivel diferentes y como máximo $2^n - 1$. Como hemos visto en la anterior proposición, que dos juegos de nivel mínimo asociado a dos coaliciones diferentes sean iguales o no depende del vector de recursos con el que estemos trabajando. Cuando utilicemos un vector donde todas sus componentes sean iguales obtendremos n juegos de mínimo nivel diferentes; seleccionando adecuadamente el vector de manera que para cada coalición obtengamos unos recursos totales diferentes, podremos construir $2^n - 1$ juegos de nivel diferentes.*

En las dos siguientes proposiciones verificaremos que los juegos de mínimo nivel respecto a un vector $\vec{C}$ son linealmente independientes (proposición **1.26**) y generadores de los juegos financieros respecto a dicho vector $\mathcal{FG}^n_{\vec{C}}$ (proposición **1.27**) ; obviamente restringiremos nuestro estudio a aquellos juegos de mínimo nivel que sean diferentes. Para ello ordenaremos las coaliciones en orden creciente de la cantidad de recursos en su poder ($\sum_{i\in S} C_i$) teniendo en cuenta que si dos coaliciones tuvieran la misma cantidad de recursos seleccionaremos sólo una de ellas como representante de esa cantidad. De esta manera al final obtendremos un conjunto de coaliciones

$$S_0, S_1, \ldots, S_m \qquad \sum_{i\in S_{k-1}} C_i < \sum_{i\in S_k} C_i \quad k = 1, \ldots, m$$

donde $S_0 = \emptyset$ [4] y $S_m = N$, siendo $n \leq m \leq 2^n - 1$.

Proposición 1.26 *Sea N el conjunto de jugadores; $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$ el vector de recursos asociado a cada jugador y $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_r\}$ el conjunto de coaliciones con diferentes cantidades de recursos ordenadas de menor a mayor según el total de recursos. Entonces, el conjunto $\{v_{S_k,\vec{C}} \mid S_k \in \mathcal{L}\}$ es linealmente independiente.*

[4] Adoptaremos el convenio usual de que un sumatorio definido sobre un conjunto vacío de índices es nulo, $\sum_{i\in S_0} C_i = 0$.

DEM.

Si $|N| = 1$, entonces sólo existe un juego de mínimo nivel y es obviamente linealmente independiente. Consideremos el caso en que $|N| \geq 2$, entonces por la observación **1.25** tendremos como mínimo n juegos de nivel mínimo diferentes. Supongamos una combinación de los juegos de mínimo nivel igualados al juego nulo (0_N):

$$\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} \cdot v_{S_k,\vec{C}} = 0_N \tag{1.4}$$

donde $\lambda_{S_k} \in \mathbf{R}$.
Supongamos ahora que no todos los valores λ_{S_k} son iguales a cero; entonces seleccionaremos aquella coalición, que denominaremos $S_{\mathbf{m}} \in \mathcal{L}$, tal que $\lambda_{S_{\mathbf{m}}} \neq 0$ y $\sum_{i \in S_{\mathbf{m}}} C_i \leq \sum_{i \in S_k} C_i \ \forall S_k \in \mathcal{L}$ con $\lambda_{S_k} \neq 0$.

Nótese que $S_{\mathbf{m}}$ no puede coincidir con S_1. Efectivamente, si ello fuera cierto tendríamos que $\lambda_{S_1} \neq 0$; además la ecuación (1.4) evaluada para la coalición S_1 implicaría que

$$\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} \cdot v_{S_k,\vec{C}}(S_1) = 0. \tag{1.5}$$

Sin embargo, utilizando la definición de los juegos de mínimo nivel y dado que $\sum_{i \in S_1} C_i < \sum_{i \in S_k} C_i \ \ k = 2 \ldots, r$ llegaríamos a que

$$\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} \cdot v_{S_k,\vec{C}}(S_1) = \lambda_{S_1} \cdot v_{S_1,\vec{C}}(S_1) = \lambda_{S_1} \cdot \sum_{i \in S_1} C_i \neq 0$$

lo cual supone una contradicción con (1.5). Por tanto, supondremos a partir de ahora que $\mathbf{m} \geq 2$. Entonces,

$$v_{S_{\mathbf{m}},\vec{C}} = \sum_{S_k \in \mathcal{L}; S_k \neq S_{\mathbf{m}}} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_{\mathbf{m}}}} \cdot v_{S_k,\vec{C}}.$$

En particular se verifica que para la coalición $S_{\mathbf{m}}$

$$v_{S_{\mathbf{m}},\vec{C}}(S_{\mathbf{m}}) = \sum_{i \in S_{\mathbf{m}}} C_i = \sum_{S_k \in \mathcal{L};\, S_k \neq S_{\mathbf{m}}} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_{\mathbf{m}}}} \cdot v_{S_k,\vec{C}}(S_{\mathbf{m}}) =$$

(por definición de juego de mínimo nivel)

$$= \sum_{S_k \in \mathcal{L};\, C(S_k) < C(S_{\mathbf{m}})} -\frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_{\mathbf{m}}}} \cdot \sum_{i \in S_{\mathbf{m}}} C_i$$

De aquí se deduce que $\sum_{S_k \in \mathcal{L};\, C(S_k) < C(S_{\mathbf{m}})} - \frac{\lambda_{S_k}}{\lambda_{S_{\mathbf{m}}}} = 1$, pero entonces ello implicaría que algún λ_{S_k} es diferente de cero lo cual es una contradición con la manera en que hemos seleccionado $S_{\mathbf{m}}$. Por tanto concluimos que $\lambda_{S_k} = 0 \ \forall \ S_k \in \mathcal{L}$ y en consecuencia, que todos los juegos de mínimo nivel son linealmente independientes.

$\square$

Proposición 1.27 *El conjunto de juegos de mínimo nivel respecto al vector $\vec{C}$ es generador de cualquier juego financiero respecto a dicho vector, i.e.*

$$si\ v \in \mathcal{FG}^n_{\vec{C}}\ entonces\ v = \sum_{S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} \cdot v_{S_k,\vec{C}}.$$

DEM.

Simplemente verificaremos que para un juego financiero v respecto a $\vec{C}$ los valores $\lambda_{S_k} = \frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} C_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} C_i}$ $k = 1 \ldots, m$ generan el juego v, donde hemos tomado por convenio y para simplificar notaciones $\frac{v(S_0)}{\sum_{i \in S_0} C_i} = 0$. En efecto, sea $S \subseteq N$ entonces

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\emptyset \neq S_k \in \mathcal{L}} \lambda_{S_k} \cdot v_{S_k,\vec{C}}(S) &= \textstyle\sum_{S_k \in \mathcal{L}} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} C_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} C_i} \right] \cdot v_{S_k,\vec{C}}(S) = \\
&= \textstyle\sum_{S_k \in \mathcal{L};\, C(S_k) \leq C(S)} \left[\frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} C_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} C_i} \right] \cdot \sum_{i \in S} C_i =
\end{aligned}$$

[Dado que $\sum_{i \in S} C_i = \sum_{i \in S_{k^*}} C_i$ para algún $S_{k^*} \in \mathcal{L}$ tenemos que]

$$= \frac{v(S_{k^*})}{\sum_{i \in S_{k^*}} C_i} \cdot \sum_{i \in S} C_i = \frac{v(S)}{\sum_{i \in S} C_i} \cdot \sum_{i \in S} C_i = v(S)$$

$\square$

Observación 1.28 *Dado que $\sum_{i \in S_{k-1}} C_i < \sum_{i \in S_k} C_i$ y por la definición de juego financiero se verifica que $\frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i \in S_{k-1}} C_i} \leq \frac{v(S_k)}{\sum_{i \in S_k} C_i}$ y, por tanto, $\lambda_{S_k} \geq 0$*

De las dos anteriores proposiciones y la última observación se deriva el Teorema principal de esta sección.

Teorema 1.29 *El conjunto de Juegos financieros respecto a un vector $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++}$ forman un cono en el espacio de los juegos cooperativos, siendo los juegos de mínimo nivel diferentes asociados a este vector un sistema generador del cono.*

La dimensión del cono generado se deriva de la observación **1.25**

Teorema 1.30 $n \leq \dim \mathcal{FG}^n_{\vec{C}} \leq 2^n - 1$

1.1.6 Condiciones Necesarias

En esta sección enunciaremos una serie de condiciones necesarias que cumple todo juego financiero y que nos permitirán reconocer si un juego puede o no ser financiero fijándonos simplemente en los valores de la función característica.

Proposición 1.31 *Si (N, v) es un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$, entonces (N, v) es superaditivo.*

DEM.

Sea $S, T \subset N$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$

$$v(S) + v(T) = \frac{v(S)}{C(S)} \cdot C(S) + \frac{v(T)}{C(T)} \cdot C(T) \leq$$

[por la definición (**1.4**)]

$$\leq \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)} \cdot C(S) + \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)} \cdot C(T) = v(S \cup T).$$

□

Obsérvese que el recíproco no es cierto como se comenta posteriormente en el ejemplo **1.36**.

Observación 1.32 *Un juego cooperativo positivo de dos jugadores (N=$\{1,2\}$) que verifica la condición de superaditividad es siempre financiero respecto al vector* $(C_1, C_2) = (v(1), v(2))$.

Antes de enunciar la segunda condición necesaria, definiremos el concepto de juego coalicionalmente anónimo.

Definición 1.33 *Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores. Diremos que (N, v) es* coalicionalmente anónimo $\Longleftrightarrow$

1. *Para toda $S, T, R \subset N$,*

   $v(S) = v(T) \Rightarrow v((S \cup R) - (T \cap R)) = v((T \cup R) - (S \cap R)).$

2. *Para toda $S, T, R \subset N$,*

   $v(S) > v(T) \Rightarrow v((S \cup R) - (T \cap R)) > v((T \cup R) - (S \cap R)).$

Proposición 1.34 *Si* (N, v) *es un juego financiero respecto a un cierto vector* $(C_1, \ldots, C_n)$ *de recursos donde* $v(S) > 0 \quad \forall S \subset N; \quad S \neq \emptyset$*, entonces* (N, v) *es coalicionalmente anónimo.*

DEM.

a) Sean R, S, T tres subconjuntos de N

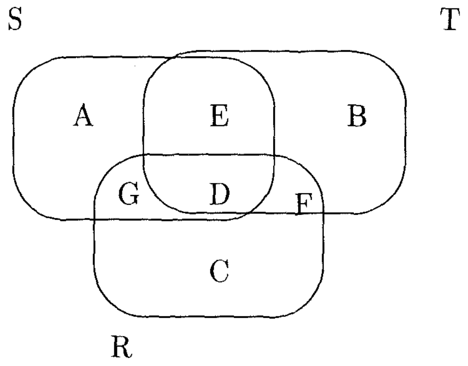

Figura **1.6**

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & S - [S \cap (T \cup R)] \\
B & = & T - [T \cap (S \cup R)] \\
C & = & R - [R \cap (S \cup T)] \\
D & = & S \cap R \cap T \\
E & = & [T \cap S] - [S \cap R \cap T] \\
F & = & [R \cap T] - [S \cap R \cap T] \\
G & = & [R \cap S] - [S \cap R \cap T]
\end{array}
$$

Si

$$v(S) = v(T) \Rightarrow {}^{5}C(S) = C(T) \Rightarrow$$

(mirando la Figura **1.6**)

$$C(A \cup E \cup G \cup D) = C(B \cup E \cup F \cup D)$$

[5]Obsérvese que $0 < v(S) = v(T)$.

$[A, B, C, D, E, F, G$ son subconjuntos disjuntos $] \Rightarrow$

$$C(A) + C(E) + C(G) + C(D) = C(B) + C(E) + C(F) + C(D) \quad \Rightarrow$$

$$C(A) + C(G) = C(B) + C(F). \tag{1.6}$$

Entonces,

$$C((S \cup R) \ - \ (T \cap R)) = C(A \cup C \cup E \cup G) = C(A) + C(C) + C(E) + C(G) =$$

[por (1.6)]

$$C(B) + C(C) + C(E) + C(F) = C(B \cup C \cup E \cup F) = C(T \cup R \ - \ S \cap R).$$

Finalmente si

$$C((S \cup R) \ - \ (T \cap R)) = C((T \cup R) \ - \ (S \cap R)) \ \Rightarrow$$

$$\boxed{v((S \cup R) \ - \ (T \cap R)) = v((T \cup R) \ - \ (S \cap R))}$$

b) la demostración para el caso de estricta desigualdad es análoga a la anterior. □

Para entender mejor esta propiedad, supongamos que S, T, R son subconjuntos disjuntos, entonces si el juego es coalicionalmente anónimo se cumple que

1. Si $v(S) = v(T) \Rightarrow v(S \cup R) = v(T \cup R)$
2. Si $v(S) > v(T) \Rightarrow v(S \cup R) > v(T \cup R)$

o en otras palabras:"*Si dos coaliciones obtienen el mismo Ingreso es debido a que habían invertido los mismos recursos; si una tercera coalición R se une tanto a S como a T, los recursos resultantes de las nuevas coaliciones ($S \cup R$ y $T \cup R$) serán también iguales y por tanto conseguirán el mismo Ingreso*". De manera similar se puede entender el caso de desigualdad. Esta propiedad es importante ya que establece que las coaliciones son anónimas en el sentido de que no importa quienes son sus componentes, sino que lo importante es de qué cantidad de recursos dispone la coalición; para obtener Ingresos, no importa la procedencia de los recursos sino su cuantía.

Observación 1.35 *La anterior condición no se mantiene si no se exige que* $v(S) > 0 \; \forall \; S \subseteq N$; $S \neq \emptyset$. *Como ejemplo, podemos poner un juego de bancarrota donde* $\mathbf{E} = 400$ *y* $\vec{d} = (100, 200, 300)$; *en este juego* $v(1) = v(2)$ *pero por contra* $v(13) < v(23)$.

La propiedad de juego coalicionalmente anónimo es de gran utilidad ya que nos permite descartar a ciertos juegos como financieros. El siguiente ejemplo pone de manifiesto este punto así como el papel que juegan las propiedades vistas en la sección precedente.

Ejemplo 1.36 *Sea el siguiente juego de tres jugadores,* $(\{123\}, v)$

$$v(i) = 2; \;\; v(12) = 5; \;\; v(13) = 4; \;\; v(23) = 4; \;\; v(123) = 10.$$

Este juego es superaditivo pero, en cambio, no puede ser nunca financiero: aplicando la condición de juego coalicionalmente anónimo y dado que $v(2) = v(3)$ se tendría que cumplir que $v(1 \cup 2) = v(1 \cup 3)$ y se puede ver que ello no es así.

Intuitivamente podríamos llegar al mismo resultado ya que si $v(i) = 2 \;\; \forall i \in N$ entonces, todos los jugadores deberían aportar los mismos recursos; de esto se deriva que las coaliciones de dos jugadores también deberían aportar los mismos recursos, y por tanto, no debería existir ninguna diferencia entre los ingresos de las coaliciones $\{12\}$ y $\{13\}$.

Finalmente, enunciaremos la tercera condición necesaria para que un juego sea financiero y que hemos denominado "*aditividad parcial*".

Proposición 1.37 *Sea* $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ *con respecto al vector de recursos* $\vec{C}$. *Sean* $S, T, M, P \subseteq N$ *cuatro coaliciones que verifican las siguientes condiciones:*

a) $v(S) + v(T) = v(S \cup T) \quad \emptyset \neq S, T \subset N \quad S \cap T = \emptyset$;

b) $min\{v(S), v(T)\} \leq \left\{ \begin{array}{c} v(M) \\ v(P) \\ v(M \cup P) \end{array} \right\} \leq v(S \cup T)$

$M \cap P = \emptyset$.

Entonces, se cumple que

$$v(M) + v(P) = v(M \cup P).$$

DEM.

En primer lugar, partiendo de la hipótesis (a) del enunciado demostraremos que

$$\frac{v(S)}{C(S)} = \frac{v(T)}{C(T)} = \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)}.$$

Dado que $S \cap T = \emptyset$ y $S, T \neq \emptyset$ tenemos que $C(S) < C(S \cup T)$ lo cual implica que $\frac{v(T)}{C(T)} \leq \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)}$.
Si $\frac{v(S)}{C(S)} < \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)}$ entonces

$$\begin{aligned} v(S) + v(T) &= \tfrac{v(S)}{C(S)} \cdot C(S) + \tfrac{v(T)}{C(T)} \cdot C(T) < \\ &< \tfrac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)} \cdot C(S) + \tfrac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)} \cdot C(T) = v(S \cup T) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con la hipótesis (a) del enunciado y, por tanto, concluimos que

$$\frac{v(S)}{C(S)} = \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)}. \tag{1.7}$$

De la misma manera deducimos que

$$\frac{v(T)}{C(T)} = \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)}. \tag{1.8}$$

Obsérvese que si $v(S)$ o $v(T)$ son iguales a cero, entonces por las anteriores igualdades tenemos que $v(S \cup T) = 0$. A partir de la hipótesis (b) se verifica trivialmente que $v(M) + v(P) = v(M \cup P)$.

Supongamos que $v(S)$ y $v(T)$ son estrictamente mayores de cero. Entonces aplicaremos las propiedades **1.15** y **1.16** para deducir que

$$min\{C(S), C(T)\} \leq \left\{ \begin{array}{c} C(M) \\ C(P) \\ C(M \cup P) \end{array} \right\} \leq C(S \cup T).$$

De aquí, y por la definición de juego financiero y la propiedad **1.8**, se obtiene que

$$min\{\frac{v(S)}{C(S)}, \frac{v(T)}{C(T)}\} \leq \left\{ \begin{array}{c} \frac{v(M)}{C(M)} \\ \frac{v(P)}{C(P)} \\ \frac{v(M \cup P)}{C(M \cup P)} \end{array} \right\} \leq \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)}.$$

Teniendo en cuenta (1.7) y (1.8) concluimos que

$$\frac{v(M)}{C(M)} = \frac{v(M \cup P)}{C(M \cup P)} = \frac{v(P)}{C(P)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} v(M) + v(P) &= v(M) \cdot \tfrac{v(M)}{C(M)} + v(P) \cdot \tfrac{v(P)}{C(P)} = \\ &= v(M) \cdot \tfrac{v(M \cup P)}{C(M \cup P)} + v(P) \cdot \tfrac{v(M \cup P)}{C(M \cup P)} = v(M \cup P) \end{aligned}$$

□

Hemos denominado a esta última propiedad "*aditividad parcial*" dado que pone de manifiesto que si para algunas coaliciones la función característica se comporta de manera aditiva, también se habrán de comportar de manera aditiva los valores de las coaliciones intermedias[6] a éstas. Esto es importante desde el punto de vista de discutir si un juego es financiero o no; el siguiente ejemplo precisará esta consideración:

Ejemplo 1.38 *Sea el siguiente juego*

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 20; v(\{3\}) = 30;$$

$$v(\{12\}) = 30; v(\{13\}) = 40; v(\{23\}) = 55; v(\{123\}) = 65.$$

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 10 \\ v(\{2\}) &= 20 \\ v(\{3\}) &= 30 \\ v(\{12\}) &= 30 \\ v(\{13\}) &= 40 \\ v(\{23\}) &= 55 \\ v(\{123\}) &= 65 \end{aligned}$$

Por aplicación de la proposición **1.37** y dado que $v(\{1\}) + v(\{23\}) = v(\{123\})$ y los valores de $v(\{2\})$, $v(\{13\})$ y $v(\{123\})$ se hallan entre $v(\{1\})$ y $v(\{123\})$ se tendría que cumplir que

$$v(\{13\}) + v(\{2\}) = v(\{123\}).$$

Dado que no se verifica dicha igualdad, el juego no es financiero.

Junto con el ejemplo anterior, los tres ejemplos siguientes demostrarán la independencia de las tres condiciones necesarias enunciadas.

[6] Respecto a los recursos que aportan.

Ejemplo 1.39

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 20; v(\{3\}) = 29;$$

$$v(\{12\}) = 29; v(\{13\}) = 40; v(\{23\}) = 55; v(\{123\}) = 66.$$

Ejemplo 1.40

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 10; v(\{3\}) = 36;.$$

$$v(\{12\}) = 30; v(\{13\}) = 20; v(\{23\}) = 25; v(\{123\}) = 66.$$

El ejemplo **1.38** cumple las condiciones expresadas en las proposiciones **1.31** y **1.34**, pero no la proposición **1.37**; el ejemplo **1.39** cumple las proposiciones **1.34** y **1.37** pero no es un juego superaditivo; finalmente, el ejemplo **1.40** verifica las proposiciones **1.31** y **1.37** pero no la **1.34**.

Ejemplo 1.41

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 22.5; v(\{3\}) = 32.5;$$

$$v(\{12\}) = 32.5; v(\{13\}) = 42.5; v(\{23\}) = 56; v(\{123\}) = 66.1$$

Si el juego fuera financiero, y por la aplicación de la propiedad **1.15** tendría que existir un vector (C_1, C_2, C_3), tal que que $C_1 < C_2 < C_3$ lo que implica por la definición de juego financiero que

$$\frac{v(1)}{C_1} \leq \frac{v(2)}{C_2} \leq \frac{v(12)}{C_1 + C_2},$$

de donde se deduce que $C_2 = 2,25 \cdot C_1$.
Por otra parte por la propiedad **1.16**, $C_3 = C_1 + C_2$ de donde $C_3 = 3,25 \cdot C_1$. Observemos entonces que

$$\frac{v(\{23\})}{C_2 + C_3} = \frac{56}{5,5 \cdot C_1} \text{ y } \frac{v(\{123\})}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{66.1}{6,5 \cdot C_1}.$$

verificándose que $\frac{56}{5.5 \cdot C_1} > \frac{66.1}{6.5 \cdot C_1}$ lo que es imposible por definición de juego financiero.

En el ejemplo **1.41**, tenemos una muestra de un juego que verifica las tres anteriores proposiciones pero que no es financiero, indicando la no suficiencia de dichas condiciones. A pesar de que la definición de juego financiero resulta aparentemente sencilla, no es fácil determinar cuándo un juego es financiero o no. En realidad, la dificultad principal se halla en la propia definición de juego financiero: se exige que el juego sea de valores medios crecientes respecto a un vector pero no se pone ninguna restricción[7] respecto a la elección del vector. La consecuencia inmediata es que un juego puede ser financiero respecto a dos vectores diferentes y no proporcionales[8]. Como muestra de esta circunstancia, examimenos el siguiente juego de cuatro jugadores:

$v(\{1\}) = 30$; $v(\{2\}) = 15$; $v(\{3\}) = 44$; $v(\{4\}) = 60$;

$v(\{12\}) = 49.5$; $v(\{13\}) = 84$; $v(\{14\}) = 96$; $v(\{23\}) = 66$; $v(\{24\}) = 78$;

$v(\{34\}) = 117$; $v(\{123\}) = 102$; $v(\{124\}) = 123.5$; $v(\{134\}) = 168$;

$v(\{234\}) = 147$; $v(\{1234\}) = 189$.

resulta ser financiero respecto al vector

$$(C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4) = (30,\, 15.857143,\, 44,\, 54.571430),$$

pero también respecto al vector

$$(C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4) = (30,\, 15,\, 40,\, 50);$$

además será financiero respecto a cualquier vector que se halle entre estos dos. Para probar este punto, enunciaremos previamente el siguiente Lema.

Lema Sea (N, v) un juego financiero respecto a los vectores C^1 y $C^2 \in \mathbf{R}^n_{++}$ y S, T dos coaliciones de manera que $v(S) > 0$, entonces

$$\text{Si } C^1(S) \leq C^1(T) \Rightarrow C^2(S) \leq C^2(T).$$

DEM.

Supongamos que, bajo las condiciones del enunciado, el Lema no se verifica y que por tanto tenemos a la vez que $C^1(S) \leq C^1(T)$ y $C^2(S) > C^2(T)$. Como $C^1(S) \leq C^1(T)$ entonces $v(S) \leq v(T)$ por lo que $v(T) > 0$. Por otra parte, como $C^2(T) < C^2(S)$ obtenemos que $\frac{v(T)}{C^2(T)} \leq \frac{v(S)}{C^2(S)}$ de donde $v(T) < v(S)$ lo que implica una contradicción. $\square$

[7]Excepto la positividad.

[8]De manera obvia, a partir de la definición de juego financiero se deduce fácilmente que si un juego es financiero respecto a $\vec{C}$ también lo es respecto $\lambda \cdot \vec{C}$ $\lambda > 0$; cuando hablemos de vectores diferentes, nos referiremos a que no sean proprocionales.

Proposición 1.42 *Sea (N, v) un juego financiero respecto a los vectores C^1 y $C^2 \in \mathbf{R}^n_{++}$, entonces (N, v) es un juego financiero respecto a $\lambda \cdot C^1 + (1 - \lambda) \cdot C^2$ donde $\lambda \in [0, 1]$.*

DEM.

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, el Teorema se verifica por la hipótesis de que el juego era financiero respecto a C^1 y C^2.

Si $\lambda \in (0, 1)$ hemos de demostrar que si

$$\lambda \cdot C^1(S) + (1 - \lambda) \cdot C^2(S) \leq \lambda \cdot C^1(T) + (1 - \lambda) \cdot C^2(T) \Rightarrow$$
$$\frac{v(S)}{\lambda \cdot C^1(S) + (1 - \lambda) \cdot C^2(S)} \leq \frac{v(T)}{\lambda \cdot C^1(T) + (1 - \lambda) \cdot C^2(T)}$$

Para ello distinguiremos dos casos

a) $v(S) > 0$. Dado que $\lambda \cdot C^1(S) + (1 - \lambda) \cdot C^2(S) \leq \lambda \cdot C^1(T) + (1 - \lambda) \cdot C^2(T)$ deberemos tener que $C^1(S) \leq C^1(T)$ o bien $C^2(S) \leq C^2(T)$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C^1(S) \leq C^1(T)$. La aplicación del anterior Lema nos permite afirmar que también se cumple que $C^2(S) \leq C^2(T)$. Entonces, aplicando la definición de juego financiero obtendremos que

$$\frac{v(S)}{C^1(S)} \leq \frac{v(T)}{C^1(T)}, \tag{1.9}$$
$$\frac{v(S)}{C^2(S)} \leq \frac{v(T)}{C^2(T)}. \tag{1.10}$$

Arregladas convenientemente y multiplicadas por λ y $(1 - \lambda)$ respectivamente estas desigualdades resultarían

$$\lambda \cdot C^1(T) \cdot v(S) \leq \lambda \cdot C^1(S) \cdot v(T) \tag{1.11}$$
$$(1 - \lambda) \cdot C^2(T) \cdot v(S) \leq (1 - \lambda) \cdot C^2(S) \cdot v(T) \tag{1.12}$$

Sumando las ecuaciones (1.11) y (1.12) y operando adecuadamente obtendríamos que

$$\frac{v(S)}{\lambda \cdot C^1(S) + (1 - \lambda) \cdot C^2(S)} \leq \frac{v(T)}{\lambda \cdot C^1(T) + (1 - \lambda) \cdot C^2(T)}$$

con lo que la implicación del Teorema se cumpliría.

b) $v(S) = 0$. Para este caso el enunciado del Teorema se verificaría trivialmente dado que los juegos financieros son siempre positivos.

$\square$

El hecho de que un juego financiero lo sea respecto a más de un vector no es un problema si nos referimos a su estructura, o a la aplicación de soluciones clásicas en Teoría de juegos, aunque sí que lo es si pretendemos aplicar soluciones que tengan en cuenta la aportación de los jugadores al juego y por tanto, que no sean indiferentes al vector respecto al cual el juego es financiero.

A diferencia del anterior ejemplo, existen juegos donde está perfectamente determinado cuál es el vector que los hace financieros. A continuación enunciaremos dos condiciones suficientes, la segunda de las cuales será una generalización de la primera. Vale la pena remarcar que cuando hablemos de que existe un único vector nos referiremos a que están univocamente definidas las proporciones relativas entre las componentes del vector; por tanto, si dos vectores son proporcionales serán iguales a efectos del estudio de un juego financiero.

Proposición 1.43 *Si $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ y el Núcleo del juego, $C(v)$, se reduce a una única distribución entonces sólo existe un vector respecto al cual el juego es financiero.*

DEM.

Como veremos en el capítulo segundo, el Núcleo se define como

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S) \ \ \forall S \subset N\}$$

Supongamos ahora que existieran dos vectores $\vec{C}^1$ y $\vec{C}^2$ respecto a los cuales el juego fuera financiero. Entonces las distribuciones proporcionales respecto a los dos vectores pertenecerían al Núcleo (ver el capítulo segundo, proposición **2.2**) lo cual es imposible dado que éste se reducía a un único vector. $\square$

Esta condición, si bien evidente, nos permite formular una de más general; previamente definiremos una serie de conceptos.

Definición 1.44 *Sea* $(N,v) \in \mathcal{FG}^n$, *entonces definimos*

$\mathcal{C} \; := \left\{A_k \,|\, A_k \subseteq N;\; card(C(v_{|A_k}) = 1\right\}$. *Conjunto de coaliciones de manera que el Núcleo de los subjuegos asociados se reducen a una única distribución.*

$$\Omega \; := \left\{ (A_{i_1},\ldots,A_{i_r}) \;\; tal\ que \;\; \begin{array}{l} 1)\ \{A_{i_1},\ldots,A_{i_r}\} \subseteq \mathcal{C}; \\ 2)\ \bigcup_{j=1}^{r} A_{i_j} \;=\; N; \\ 3)\ A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset \;\; 1 \leq j < r \end{array} \right\}.$$

Ω es el conjunto de vectores donde las componentes son coaliciones de $\mathcal{C}$ ordenadas de tal manera que la intersección de dos coaliciones consecutivas es no vacía y la unión de todas ellas es igual a N.

Nótese que tanto $\mathcal{C}$ como Ω pueden ser conjuntos vacíos. Utilizando estas definiciones establecemos la siguiente condición suficiente

Proposición 1.45 *Un juego financiero (N,v) lo es respecto a un único vector si $\Omega \neq \emptyset$.*

DEM.

Supongamos que existieran dos vectores $\vec{C}^1$ y $\vec{C}^2$ no proporcionales entre sí respecto a los cuales el juego (N,v) fuera financiero. Sea entonces $w = (A_{i_1},\ldots,A_{i_p})$ un elemento de Ω; dado que todas las componentes A_{i_j} de w pertenecen a Ω los núcleos de los subjuegos asociados a estas coaliciones tendrán un único vector en el Núcleo, i.e. $card(C(v_{|A_{i_j}})) = 1 \;\; j = 1,\ldots,p$. Por la proposición **1.43**, los juegos $(A_{i_j},\, v_{|A_{i_j}})$ serán financieros respecto a un único vector. De aquí que para cada A_{i_j}, $1 \leq j < p$ se cumplirá que

$$\vec{C}^{1,A_{i_j}} \;=\; \lambda_{i_j} \cdot \vec{C}^{2,A_{i_j}} \quad \lambda_{i_j} \in \mathbf{R}_{++}, \tag{1.13}$$

$$\vec{C}^{1,A_{i_{j+1}}} \;=\; \lambda_{i_{j+1}} \cdot \vec{C}^{2,A_{i_{j+1}}} \quad \lambda_{i_{j+1}} \in \mathbf{R}_{++} \tag{1.14}$$

donde $\vec{C}^{1,A_{i_j}}$, $\vec{C}^{2,A_{i_j}}$, $\vec{C}^{1,A_{i_{j+1}}}$ y $\vec{C}^{2,A_{i_{j+1}}}$ son los vectores $\vec{C}^1$ y $\vec{C}^2$ restringidos a las coaliciones A_{i_j} y $A_{i_{j+1}}$.

Dado que $A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset$, las ecuaciones (1.13) y (1.14) particularizadas para un jugador $k \in A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}}$ se convierten en

$$C_k^1 \;=\; \lambda_{i_j} \cdot C_k^2, \quad \lambda_{i_j} \in \mathbf{R}_{++}, \tag{1.15}$$

$$C_k^1 \;=\; \lambda_{i_{j+1}} \cdot C_k^2, \quad \lambda_{i_{j+1}} \in \mathbf{R}_{++}. \tag{1.16}$$

donde $1 \leq j \leq p-1$. De (1.15) y (1.16) concluimos que

$$\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j+1}} \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

o equivalentemente que

$$\lambda_{i_j} = \lambda \in \mathbf{R}_{++} \quad j = 1, \ldots, r.$$

Dado que $\bigcup_{j=1}^{p} A_{i_j} = N$, concluimos que $\vec{C}^1 = \lambda \vec{C}^2$. Esto supone una contradicción pues partíamos de la hipótesis de que ambos vectores no eran proporcionales. $\square$

El siguiente ejemplo clarificará el anterior Teorema

Ejemplo 1.46 *Sea el siguiente juego financiero de cuatro jugadores respecto al vector* (10, 20, 40, 50)

$$v(\{1\}) = 10;\ v(\{2\}) = 20;\ v(\{3\}) = 48;\ v(\{4\}) = 60;$$

$$v(\{12\}) = 30;\ v(\{13\}) = 60;\ v(\{14\}) = 72;\ v(\{23\}) = 72;\ v(\{24\}) = 84;$$

$$v(\{34\}) = 108;\ v(\{123\}) = 84;\ v(\{124\}) = 96;\ v(\{134\}) = 120;$$

$$v(\{234\}) = 143;\ v(\{1234\}) = 156$$

Para comprobar si sólo es financiero respecto al vector $(10, 20, 40, 50)$, buscaremos aquellas coaliciones cuyos subjuegos asociados tienen el Núcleo reducido a una única distribución, i.e.

$$\mathcal{C} = \{\{12\}, \{34\}, \{134\}\}.$$

A partir de los elementos de $(\mathcal{C})$ definimos el conjunto Ω:

$$\Omega = \{(\{12\}, \{134\}), (\{134\}, \{12\}), (\{12\}, \{134\}, \{34\}), (\{34\}, \{134\}, \{12\})\}.$$

Dado que $\Omega \neq \emptyset$ el juego v será financiero sólo respecto al vector (10, 20, 40, 50)

En general, no es sencillo determinar si un juego es financiero o no; para encontrar un vector respecto al cual el juego sea financiero deberemos utilizar técnicas de programación lineal. Encontrar una caracterización de los juegos financieros en términos de desigualdades entre los valores de la función característica que sea manipulable de forma práctica es todavía un problema abierto. En el capítulo **2**, apartado **2.4**, hemos solucionado parcialmente este problema aunque la caracterización que allí se da no es "operativa" a efectos de determinar el caracter financiero de un juego.

1.2 Juego de costes

Si en los juegos financieros de ingresos, las economias de escala venían representadas por rendimientos medios crecientes, en la presente sección estudiaremos un típico problema de distribución de costes donde las economías de escala estarán representadas por costes medios decrecientes. La situación analizada se producirá, por ejemplo, cuando varios jugadores que desean comprar ciertas cantidades de un mismo producto cooperan negociando conjuntamente el precio de compra con el proveedor; la ventaja para los compradores radicará en los descuentos obtenidos por el mayor volumen del pedido. Al igual que para los juegos financieros de ingresos donde se daban dos definiciones alternativas, los juegos financieros de costes se podrán definir a partir de la existencia explícita de unas demandas y una función de costes, o a partir de la existencia de un vector de manera que los valores medios de la función característica sean decrecientes.

1.2.1 El modelo

Definición 1.47 *Sea $d_1, \ldots, d_n$ $d_i > 0$, las demandas de un cierto producto para los diferentes jugadores $1, \ldots, n$; sea $\hat{f} : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ una función no decreciente (i.e. si $x \leq y$ entonces $\hat{f}(x) \leq \hat{f}(y)$) tal que $\hat{f}(x) > 0 \; \forall x > 0$, y que cumpla además que*

$$\sum_{i \in S} d_i > \sum_{i \in T} d_i \Rightarrow \frac{\hat{f}(\sum_{i \in S} d_i)}{\sum_{i \in S} d_i} \leq \frac{\hat{f}(\sum_{i \in T} d_i)}{\sum_{i \in T} d_i}. \tag{1.17}$$

Definimos un juego financiero de costes como aquel par $(N, \mathbf{c})$ tal que:

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *y*
- $\mathbf{c} : 2^N \rightarrow R_+$ *con*
  - $\mathbf{c}(\emptyset) = 0$,
  - $\mathbf{c}(S) = \hat{f}(\sum_{i \in S} d_i) \; \forall \, S \subseteq N; \; S \neq \emptyset$

Al conjunto de juegos financieros de costes[9] de n jugadores lo notaremos como $\mathcal{FCG}^n$. Como ya mencionabamos, podemos dar una definición alternativa a la anterior:

[9]Para evitar confusiones hemos utilizado la notación $\mathrm{c}(S)$ para los valores de la función característica; recuérdese que en el modelo de los juegos de ingresos denotabamos por $C(S)$ a la cantidad de recursos aportada por la coalición S, i.e. $\sum_{i \in S} C_i$.

Definición 1.48 *Un juego* $(N, \mathbf{c})$ *es financiero respecto a un vector* $\vec{d} \in \mathbf{R}^n_{++}$ *si y sólo si* $\mathbf{c}(S) > 0$, $\mathbf{c}(\emptyset) = 0$ *y*

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in S} d_i \geq \sum_{i \in T} d_i \Rightarrow \quad & \frac{\mathbf{c}(S)}{\sum_{i \in S} d_i} \leq \frac{\mathbf{c}(T)}{\sum_{i \in T} d_i}, \\ & y \ \ \mathbf{c}(S) \geq \mathbf{c}(T). \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde $S, T \subseteq N$; $S, T \neq \emptyset$.

De manera similar al caso de los juegos de ingresos se puede comprobar que ambas definiciones son equivalentes. De esta manera, cuando nos refiramos a un juego financiero de costes haremos siempre referencia respecto a qué vector de demandas.

Ejemplo 1.49 *Supongamos un centro de compra que suministra un determinado producto a tres distribuidores. El centro de compra ofrece los siguientes precios unitarios según la cantidad que se demande:*

$1 - 60$	300 *u.m.*
$61 - 100$	290 *u.m.*
$101 - 500$	280 *u.m.*
más de 500	270 *u.m.*

Las demandas de los tres distribuidores son $d_1 = 20$, $d_2 = 50$, $d_3 = 300$. *Los distribuidores deciden negociar conjuntamente el precio unitario obteniendo un precio de 280 u.m.; posteriormente discutirán entre ellos la manera de repartirse el coste total. En la siguiente tabla se recoge el coste de adquirir las demandas de las diversas coaliciones así como el coste medio que, en este caso, coincide con el precio unitario. Nótese como se verifican las dos características de los juegos financieros de costes: crecimiento en el coste total y decrecimiento en los costes medios.*

Coalición	Demanda	coste-$\mathbf{c}(S)$	precio unitario
1	20	6,000	300 u.m.
2	50	15,000	300 u.m.
3	300	84,000	280 u.m.
12	70	20,300	290 u.m.
13	320	89,600	280 u.m.
23	350	98,000	280 u.m.
123	370	103,600	280 u.m.

En el ejemplo anterior la función de costes y las demandas eran explícitas. Otros problemas de distribución de costes donde no encontramos esta situación pueden ser, sin embargo, interpretados como juegos financieros; este el caso de los "cost-sharing games" en su versión más simple.

El problema se centra en la distribución del coste de financiación de un bien público entre los beneficiarios de su utilización. En efecto, sea c el coste del bien público y b_i los beneficios de los usuarios; entonces, la función característica del juego asociado $(N, \mathbf{c})$ es $\mathbf{c}(S) = \min\{c, \sum_{i\in S} b_i\}$ $\forall S \subseteq N$ donde $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots b_n \leq c \leq \sum_{i\in N} b_i$. Hemos de remarcar que la función $\mathbf{c}(S)$ no indica realmente el coste de abastecer a los usuarios de la coalición S aunque si el máximo que éstos están dispuestos a pagar; en ningún caso pagarán más que el beneficio que les reporte el disfrute del bien.

Para ver "un cost-sharing game" como un juego de costes financiero hemos de determinar cuál es el vector de demandas respecto al cual el juego es financiero.

Aunque la demanda del bien público no es explícita, podemos asumir que para cada usuario es proporcional al beneficio obtenido, i.e. $d_i = \beta \cdot b_i$, $\beta > 0$. Entonces, si $\sum_{i\in S} d_i \geq \sum_{i\in T} d_i$ se cumple que

$$\frac{\mathbf{c}(S)}{\sum_{i\in S} d_i} = \frac{\min\{c, \sum_{i\in S} b_i\}}{\sum_{i\in S} d_i} = \min\{\frac{c}{\sum_{i\in S}\beta\cdot b_i}, \frac{\sum_{i\in S} b_i}{\sum_{i\in S}\beta\cdot b_i}\} \leq$$

$$\leq \min\{\frac{c}{\sum_{i\in T}\beta\cdot b_i}, \frac{\sum_{i\in T} b_i}{\sum_{i\in T}\beta\cdot b_i}\} = \frac{\min\{c, \sum_{i\in T} b_i\}}{\sum_{i\in T} d_i} = \frac{\mathbf{c}(T)}{\sum_{i\in T} d_i}$$

Además se verifica que $\mathbf{c}(S) \geq \mathbf{c}(T)$ por lo que concluimos que el "cost-sharing game" es financiero respecto al vector $\vec{d}$.

Al igual que hacíamos para el modelo de ingresos, enumeraremos una serie de funciones que siempre generan un juego financiero de costes sean cuales sean las demandas de los jugadores:

a) Funciones lineales $\hat{f}(x) = a \cdot x + b \;\; a \geq 0; \; b \geq 0$. Si en lugar de comprar las unidades de los productos demandados, los agentes las producen ellos mismos, el problema será el de repartir el coste conjunto de producción. En este caso el parametro b representaría el coste fijo y el a el coste variable por unidad.

b) Funciones lineales truncadas, i.e. $\hat{f}(x) = \min\{c, a \cdot x\} \quad a > 0; \; c > 0$ Esta función es la que da lugar a los "cost-sharing games" antes analizados.

c) Funciones diferenciables estrictamente positivas con elasticidad menor que 1, es decir, aquellas en que el coste marginal es inferior al coste medio[10].

d) Funciones cóncavas, positivas y crecientes[11].

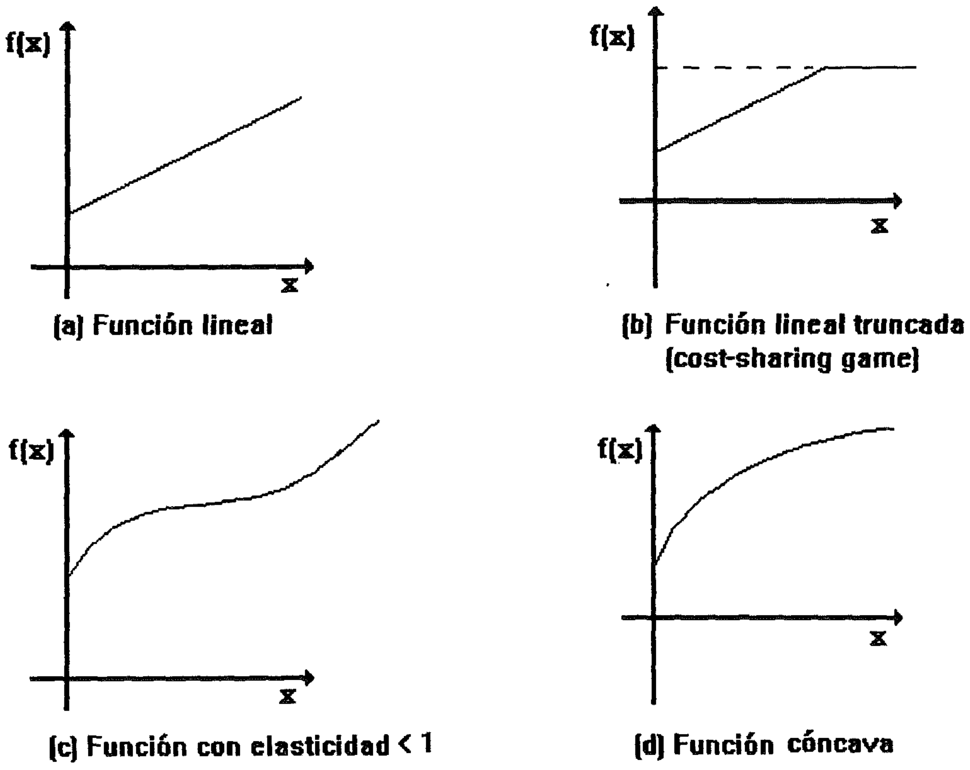

Figura 1.7: funciones generadoras de un juego financiero de costes.

[10]La demostración es análoga a la que realizábamos para las funciones de ingresos con elasticidad mayor que 1.

[11]La demostración es análoga a la que realizábamos para las funciones de ingresos convexas.

1.3 Juego de Costes- juego de Ingresos

La finalidad de estudiar la relación entre los juegos de costes y de ingresos se centra en reducir el estudio de un juego financiero de costes al de un juego de ingresos asociado de manera que éste conserve las propiedades de los juegos financieros de ingresos. Los planteamientos usuales utilizan el juego de ahorro de costes para formular dicho juego asociado, pero este proceso, aplicado a juegos financieros, nos hace perder la información y la estructura del juego original.

Ejemplo 1.50 *Sea el siguiente juego financiero de costes con respecto al vector* $(10, 20, 30)$*:*

$$\mathbf{c}(1) = 11;\ \mathbf{c}(2) = 22;\ \mathbf{c}(3) = 30;\ \mathbf{c}(12) = 30;\ \mathbf{c}(13) = 40;\ \mathbf{c}(23) = 50;\ \mathbf{c}(123) = 60.$$

Construimos el juego de ahorro de costes, $\tilde{v}(S) = \sum_{i \in S} \mathbf{c}(i) - \mathbf{c}(S)$*, obteniendo el siguiente resultado:*

$$\tilde{v}(i) = 0;\ \tilde{v}(12) = 3;\ \tilde{v}(13) = 1;\ \tilde{v}(23) = 2;\ \tilde{v}(123) = 3.$$

Como se puede observar los valores individuales son cero y el valor para la coalición $\{12\}$ es superior al de la $\{13\}$ sugiriendo que el ahorro es mayor para ésta última coalición lo que no es exactamente cierto; además el juego no es financiero de ingresos respecto al vector (d_1, d_2, d_3) de demandas, ni lo podría ser respecto a ningún otro vector. Este último punto se deduce directamente de la aplicación de la proposición **1.37**. Por tanto vamos a definir un juego alternativo al de ahorro clásico.

Como hemos visto, los juegos financieros de costes se caracterizan por unos costes unitarios decrecientes; por tanto, a medida que se incrementa la demanda, el ahorro de costes por unidad se incrementa. Basándonos en esta idea definiremos el juego de ingresos asociado a uno de costes; dicho juego tendrá la misma estructura que la de un juego financiero de ingresos.

El ahorro de costes lo estableceremos tomando como referencia el coste unitario para el jugador con menor demanda (si existiera más de uno, tomaríamos uno de ellos); este jugador lo notaremos como i^*; es decir,

$$i^* \in N \text{ tal que } d_{i^*} \leq d_j \ \forall j \in N.$$

En el ejemplo **1.49**, la menor demanda correspondía al jugador 1 con un coste unitario de 300 ptas. $(d_{i^*} = d_1 = 20)$.

Definición 1.51 *Definimos el ahorro unitario de S respecto a i^*, $h_S^{i^*}$ como*

$$h_S^{i^*} = \frac{\mathbf{c}(i^*)}{d_{i^*}} - \frac{\mathbf{c}(S)}{d(S)}.$$

Definición 1.52 *Definimos el juego de ingresos (N, c^*) asociado a uno de costes (N, c) como*

$$c^*(S) = d(S) \cdot h_S^{i^*}.$$

El juego asociado se puede asimilar a un juego financiero de ingresos donde, por cada unidad demandada, cada coalición ingresa (o deja de pagar) el ahorro en el coste unitario. La expresión del juego asociado se puede expresar como

$$c^*(S) = d(S) \cdot \frac{\mathbf{c}(i^*)}{d_{i^*}} - \mathbf{c}(S).$$

El juego asociado es un juego financiero de ingresos respecto del vector $(d_1, \ldots, d_n)$, i.e.

$$d(S) \leq d(T) \Rightarrow \frac{c^*(S)}{d(S)} \leq \frac{c^*(T)}{d(T)}.$$

Asimismo, se puede observar que se trata de una transformación S-equivalente del juego original, i.e.

$$c^* = \alpha \cdot c + \gamma$$

donde $\alpha = -1$ y γ es un juego aditivo donde $\gamma(S) = \frac{\mathbf{c}(i^*)}{d_{i^*}} \cdot \sum_{i \in S} d_i$. Esto es importante dado que la mayoría de soluciones en Teoría de Juegos se preservan bajo transformaciones S-equivalentes del Juego.

Ejemplo 1.53 *Siguiendo con el ejemplo 1.49 el juego asociado que se formaría sería*

Coalición	Demanda	precio unitario	ahorro unit. $h_S^{i^*}$	$c^*(S)$
1	20	300 u.m.	0	0
2	50	300 u.m.	0	0
3	300	280 u.m.	20	6,000
12	70	290 u.m.	10	700
13	320	280 u.m.	20	6,400
23	350	280 u.m.	20	7,000
123	370	280 u.m.	20	7,400

$\mathbf{c}(S)$	$\tilde{v}(S)$
6,000	0
15,000	0
84,000	0
20,300	700
89,600	400
98,000	1,000
103,600	1,400

Obsérvese en el ejemplo que las coaliciones $\{1\}$ y $\{2\}$ al tener que pagar el precio más alto posible no consiguen ningún ahorro unitario y por tanto su ahorro total (ingreso total) es cero. Sin embargo, la coalición total, al pagar el precio unitario más bajo, también obtiene el ahorro unitario y total más alto. Para poder comparar, a la derecha de la anterior tabla se ha escrito el juego de ahorro clásico ($\tilde{v}$) que se puede verificar que no es un juego financiero de ingresos respecto al vector de demandas $(20, 50, 300)$[12].

A pesar de provenir de ideas diferentes, los juegos de ingresos asociados y los de ahorro clásicos coincidirán en ocasiones como muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.54 *Sea (N, c) un juego financiero de costes respecto al vector $(d_1, \ldots, d_n)$;*

$$si \ \frac{\mathbf{c}(i)}{d_i} = \beta > 0 \ \forall i \in N \ \ entonces \ c^* = \tilde{v},$$

donde $\tilde{v}(S) = \sum_{i \in S} \mathbf{c}(i) - \mathbf{c}(S)$ es el juego de ahorro de costes.

DEM.

En efecto, si $\frac{\mathbf{c}(i)}{d_i} = \beta \ \forall i \in N$ entonces

$$c^*(S) = d(S) \cdot \frac{\mathbf{c}(i^*)}{d_i^*} - \mathbf{c}(S) = \sum_{i \in S} (d_i \frac{\mathbf{c}(i)}{d_i}) - \mathbf{c}(S) = \sum_{i \in S} \mathbf{c}(i) - \mathbf{c}(S).$$

□

Esto es lo que sucede, por ejemplo, con los cost-sharing games que analizábamos anteriormente donde se cumple que $\mathbf{c}(i) = b_i$ y que $\frac{b_i}{d_i} = \frac{1}{\beta} \ \forall i \in N$. De aquí que el juego de ahorro de costes de un cost-sharing game coincida con el juego de ingresos asociado.

$$\begin{aligned} \tilde{v}(S) &= \textstyle\sum_{i \in S} \mathbf{c}(i) - \mathbf{c}(S) = \sum_{i \in S} b_i - \mathbf{c}(S) = \\ &= \textstyle\sum_{i \in S} \frac{d_i}{\beta} - \mathbf{c}(S) = \frac{1}{\beta} \sum_{i \in S} d_i - \mathbf{c}(S) = \\ &= d(S) \cdot \frac{b_{i*}}{d_{i*}} - \mathbf{c}(S) = c^*(S) \end{aligned}$$

[12]Se puede comprobar que el juego de ahorros sí que continuaría siendo un juego financiero pero respecto a otro vector, por ejemplo el $(66 + \frac{2}{3}, 866 + \frac{2}{3}, 466 + \frac{2}{3})$. Sin embargo, no parece correcto considerar otro vector cuando hay uno determinado por el juego, más si tenemos en cuenta que el reparto que se haga puede venir condicionado por este vector (distribución proporcional, valor financiero del juego; ver Capítulo **5**).

Además, el juego de ahorro de costes (y juego de ingresos asociado) se encuadrará con lo que se conoce en la literatura de juegos como un surplus-sharing game $v(S)$.

$$\tilde{v}(S) = \sum_{i\in S}\mathbf{c}(i) - \mathbf{c}(S) = \sum_{i\in S} b_i - \min\{c, \sum_{i\in S} b_i\} =$$

$$= \sum_{i\in S} b_i + \max\{-c, -\sum_{i\in S} b_i\} = \max\{\sum_{i\in S} b_i - c, 0\} = v(S)$$

En este juego lo que se reparte es el excedente del beneficio de todos los usuarios respecto al coste de construir el bien público $\sum_{i\in N} b_i \dot{-} c$.

1.4 Comparación entre los juegos financieros y otro tipo de juegos

Las economías de escala surgidas de la cooperación entre los agentes son frecuentemente modelizadas en Teoría de Juegos mediante la convexidad. En esta sección comparamos los juegos financieros con diversas nociones y generalizaciones de la convexidad como son los juegos propiamente convexos, los juegos semiconvexos, los juegos k-convexos y los juegos permutacionalmente convexos. Finalmente observaremos como, bajo ciertas condiciones, otros modelos de juegos como son los "Clan Games" y los "Travelling Salesman games" se pueden interpretar como juegos financieros. Además se muestra en qué forma un juego financiero se puede reescribir como un "Linear production game".

1.4.1 Juegos convexos

A primera vista puede parecer que la condición de juego convexo $v(S\cup i) - v(S) \leq v(T\cup i) - v(T) \quad S \subset T \subsetneq N\backslash i$ (Shapley [49]) se tiene que verificar para todo juego financiero. Esta apreciación no es correcta aunque si es cierto que ambos tipos de juegos presentan muchos puntos de similitud: son superaditivos, tienen el Core no vacio y son totalmente equilibrados[13]. De todas maneras no todo juego convexo es financiero, ni todo juego financiero es convexo. El juego del ejemplo **1.38** no es financiero como demostramos en secciones precedentes pero sí es convexo. Para ilustrar que tampoco se cumple la relación inversa considérese el siguiente juego:

Ejemplo 1.55

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 20; v(\{3\}) = 30$$

[13]Ver capítulo 2.

$$v(\{12\}) = 30; v(\{13\}) = 44; v(\{23\}) = 55; v(\{123\}) = 66.$$

Dicho juego es financiero respecto al vector (10, 20, 30), pero se puede comprobar que no es convexo.

No obstante, también es cierto que existen gran cantidad de juegos financieros que sí son convexos; vamos a analizar en qué situaciones sucede esto.

Dado un juego financiero respecto a un vector $\vec{C}$, sea $\mathcal{C} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m \mid x_0 = 0 \text{ y } x_{k-1} < x_k\} \subset \mathbf{R}$ el conjunto de valores que representan los recursos aportados por cada una de la coaliciones. Es decir, dado un valor x_k, existe al menos una coalición S tal que $\sum_{i\in S} C_i = x_k$ y viceversa, toda coalición S viene representada por un valor igual a la suma de los recursos aportados por sus miembros, i.e. existe un núnero k tal que $x_k = \sum_{i\in S} C_i$. Denotemos por $v_k \quad k = 0,\ldots,m$ al valor de la función característica de la coalición $S \subset N$ que verifica que $\sum_{i\in S} C_i = x_k$. Puede existir más de una coalición con los mismos recursos, pero verifíquese que a partir de la definición (1.2) se deduce que si $\sum_{i\in S} C_i = \sum_{i\in T} C_i$, entonces $v(S) = v(T)$. La condición suficiente de convexidad se enuncia en la siguiente manera:

Proposición 1.56 *Sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$.*

$$Si \ \frac{v_{k+1} - v_k}{x_{k+1} - x_k} \leq \frac{v_{k+2} - v_{k+1}}{x_{k+2} - x_{k+1}} \quad k = 0,\ldots,m-2, \quad \textit{el juego } v \textit{ es convexo.}$$

Gráficamente, la proposición queda reflejada en la Figura **1.8**: cada uno de los términos $\frac{v_{k+1} - v_k}{x_{k+1} - x_k}$ expresan la pendiente de las rectas que unen los puntos (x_k, v_k) y (x_{k+1}, v_{k+1}); la proposición requiere que las pendientes de estas rectas sean crecientes tal y como se ve en la figura.

En la figura **1.9** se puede ver que si escogemos dos puntos cualesquiera, por ejemplo el (x_{k1}, v_{k1}) y el (x_{k2}, v_{k2}), la recta que une los dos puntos (recta p) tiene una pendiente superior a la recta que hemos denominado m y que une el punto (x_{k1}, v_{k1}) y el inmediatamente siguiente (x_{k11}, v_{k11}); sin embargo, la recta p tiene una pendiente inferior a la recta que hemos denominado M y que une el punto (x_{k2}, v_{k2}) y el inmediatamente anterior (x_{k12}, v_{k12}).

Supongamos ahora que tomamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
x_{k1} &= \textstyle\sum_{i\in S} C_i & v_{k1} &= v(S) \\
x_{k1^i} &= \textstyle\sum_{i\in S\cup i} C_i & v_{k1^i} &= v(S \cup i) \\
x_{k2} &= \textstyle\sum_{i\in T} C_i & v_{k2} &= v(T) \\
x_{k2^i} &= \textstyle\sum_{i\in T\cup i} C_i & v_{k2^i} &= v(T \cup i)
\end{aligned}$$

donde $S \subset T \subseteq N \setminus i$.

Para demostrar la convexidad del juego tendríamos que probar que

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T).$$

Traducido a la anterior notación ello equivale a:

$$v_{k1^i} - v_{k1} \leq v_{k2^i} - v_{k2}$$

Dividiendo ambas expresiones por C_i (recurso aportado por el jugador i), o mejor dicho, dividiendo en un caso por $x_{k1^i} - x_{k1} = C_i$ y en otro por $x_{k2^i} - x_{k2} = C_i$, obtenemos que

$$\frac{v_{k1^i} - v_{k1}}{x_{k1^i} - x_{k1}} \leq \frac{v_{k2^i} - v_{k2}}{x_{k2^i} - x_{k2}}$$

Por tanto, verificar la convexidad del juego equivale a comparar la pendiente de dos rectas: la de aquella que une los puntos (x_{k1}, v_{k1}) y (x_{k1i}, v_{k1i}) (recta $p1$ en la figura **1.10**), y la de aquella que une los puntos (x_{k2}, v_{k2}) y (x_{k2i}, v_{k2i}) (recta $p2$ en la figura **1.10**). La comparación es posible utilizando el anterior razonamiento: la pendiente de la recta $p1$ es inferior al de la $M1$; ésta es inferior al de la $m2$; y, finalmente, el de la $p2$ es superior al de la $m2$. Encadenando estas relaciones obtenemos que la pendiente de la recta $p1$ es inferior al de la recta $p2$.

El caso analizado anteriormente por la figura **1.10** representa aquel en que $C(S \cup i) \leq C(T)$; la figura **1.11** analiza el otro caso posible cuando $C(S \cup i) > C(T)$.

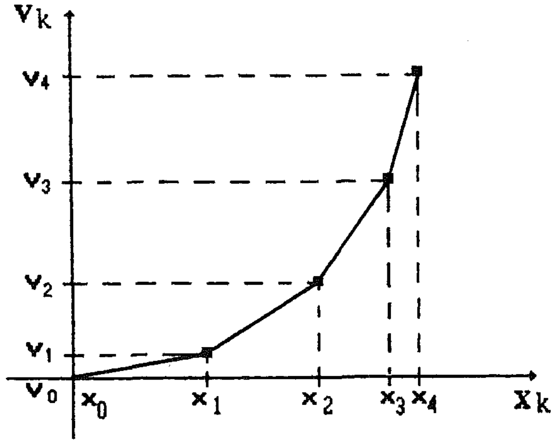

Figura **1.8**

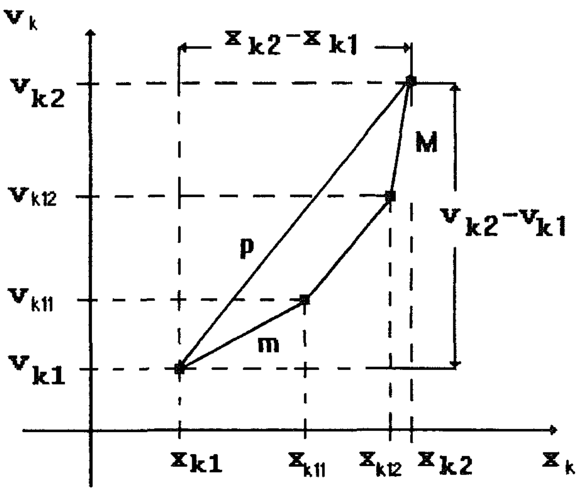

Figura **1.9**

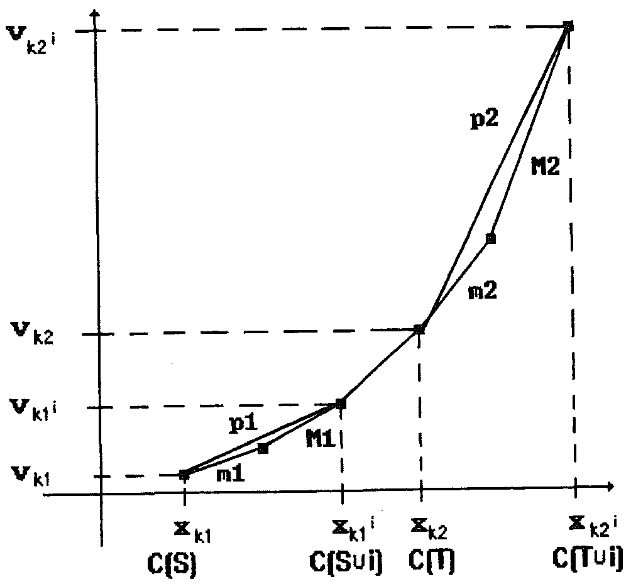

Figura **1.10**

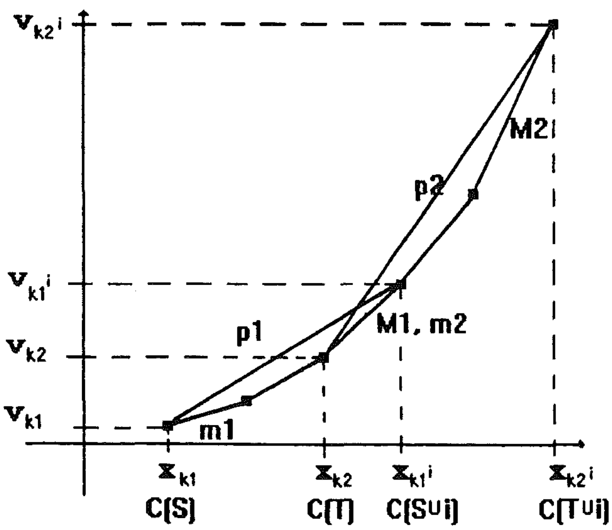

Figura **1.11**

En la figura **1.8** se observa que la condición expresada en la proposición **1.56** equivale a que el juego financiero pueda ser generado por una función convexa. Shapley [49] ya remarcaba que el juego que se obtenía al evaluar los valores de un juego modular (μ donde $\mu(S) = \sum_{i \in N} \mu(i)$) a través de una función convexa f resultaba ser convexo ($v(S) = f(\mu(S))$). Sin embargo, también resaltaba que no todo juego convexo podía ser generado a partir de una función convexa. Para los juegos financieros convexos nos encontramos con la misma situación; la siguiente figura nos muestra un ejemplo de juego financiero convexo de tres jugadores respecto al vector $\vec{C} = (10, 20, 30)$ (y sólo respecto a este vector o a uno proporcional [14]). pero que no puede ser generado nunca por una función convexa f, es decir, para toda función convexa f siempre existe una coalición $S \subsetneq N$ tal que $f(\sum_{i \in S} C_i) \neq v(S)$.

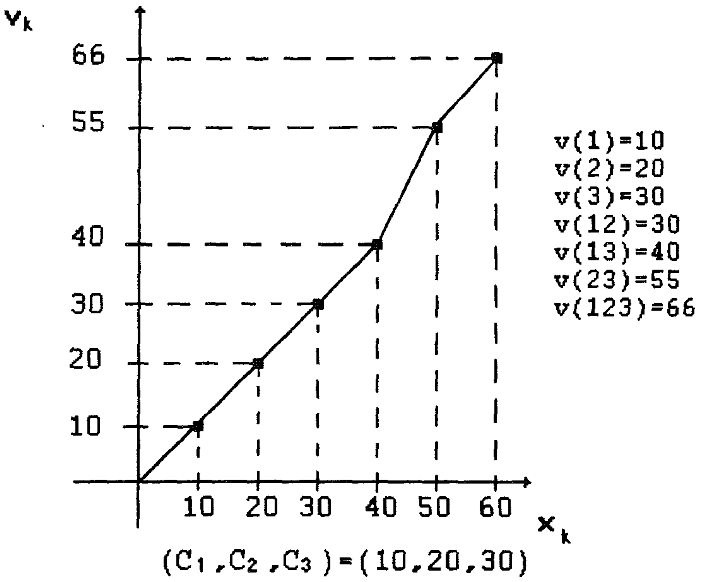

Figura **1.12**

A pesar de esto y tal y cómo avanzabamos en la introducción, sí que se cumplirá que todo juego simétrico convexo es de hecho un juego financiero simétrico. De hecho podemos formular una condición más general.

Proposición 1.57 *Un juego v es positivo ($v(S) \geq 0$) ,simétrico ($v(S) = f(|S|)$) y totalmente equilibrado si y sólo si v es un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$ donde $C_i = 1$ $i = 1, \ldots, n$.*

[14] Dados los valores de la función característica(ver Figura **1.12**) y por la definición **1.4**, si el juego fuera financiero respecto al vector (C_1, C_2, C_3) se debería cumplir que $\frac{v(1)}{C_1} \leq \frac{v(12)}{C_1+C_2}$ y $\frac{v(2)}{C_2} \leq \frac{v(12)}{C_1+C_2}$ de donde se deduciría que $C_2 = 2 \cdot C_1$; además, la propiedad **1.16** implicaría que $C_1 + C_2 = C_3$ y por tanto obtendríamos las siguientes relaciones: $C_3 = 3 \cdot C_1$ y $C_2 = 2 \cdot C_1$.

DEM.

En primer lugar recordaremos un resultado enunciado por Driessen [13] pág. 193. y que dice que un juego simétrico tiene el Núcleo[15] no vacío si y sólo si

$$\frac{v(S)}{|S|} \leq \frac{v(N)}{|N|} \quad \forall\, 1 \leq |S| \leq |N| \tag{1.19}$$

$\Rightarrow$) Si tenemos un juego simétrico, positivo y totalmente equilibrado[16] la condición (1.19) se cumplirá no solamente para el juego total (N, v) sino para cada uno de los subjuegos (S, v) $S \subset N$ lo que implica que

$$\frac{v(S)}{|S|} \leq \frac{v(T)}{|T|} \quad \forall\, 1 \leq |S| \leq |T|;$$

ello garantizará que el juego será financiero respecto a $\vec{C} = (1, 1, \ldots, 1)$.

$\Leftarrow$) Si v es un juego financiero respecto al vector $\vec{C} = (1, 1, \ldots, 1)$, entonces v es por definición simétrico, positivo y totalmente equilibrado. □

En concreto, como un juego simétrico convexo y positivo es totalmente equilibrado, por la proposición **1.57** se cumplirá que también es financiero. Sin embargo, en general no todo juego financiero simétrico es convexo.

Otra relación interesante de estudiar es aquella que se da entre la convexidad de un juego financiero y el juego de valores medios $\frac{v}{C}$ donde $\frac{v}{C}(S) = \frac{v(S)}{C(S)}$ $S \subset N$. Se puede demostrar que la convexidad del juego de valores medios implica la convexidad del juego financiero. Sin embargo, exigir esta convexidad implicaría por ejemplo que

$$\frac{v(S)}{C(S)} + \frac{v(T)}{C(T)} \leq \frac{v(S \cup T)}{C(S \cup T)} \quad \forall S, T \subseteq N \quad S \cap T = \emptyset$$

Si pensamos en términos de unos jugadores que invierten y obtienen un cierto tipo de interés, ello equivale a exigir que si la coalición S y la coalición T obtienen el mismo tipo de interés, la coalición $S \cup T$ obtenga el doble. Esto parece una imposición demasiado exigente por lo que definiremos una convexidad relajada donde fundamentalmente se prescinde de la superaditividad.

Definición 1.58 *Un juego w es* **convexo$_*$** *si y sólo si*

$$w(S) + w(T) \leq w(S \cup T) + w(S \cap T) \quad \forall S, T \subseteq N \quad S \cap T \neq \emptyset$$

[15] El estudio del Núcleo se realizará en el Capítulo **2**.

[16] Juegos con núcleo no vacío donde cada subjuego tiene asimismo el núcleo no vacío.

A partir de esta definición estableceremos la relación entre el juego financiero y el juego de valores medios.

Proposición 1.59 *Sea* $(N,v) \in \mathcal{FG}^n$ *respecto al vector* $\vec{C}$*, entonces*

$$\textit{si el juego} \quad (N, \frac{v}{C}) \ \textit{es } \textbf{convexo}_* \Rightarrow (N,v) \ \textit{es convexo}$$

donde $\frac{v}{C}(S) = \frac{v(S)}{C(S)}$ $S \neq \emptyset$ *y* $\frac{v}{C}(\emptyset) = 0$.

DEM.

Hemos de demostrar que $v(S)+v(T) \geq v(S\cup T)+v(S\cap T)$ $\forall S,T \subseteq N$. distinguiremos dos casos:

a) $S \cap T = \emptyset$. Por la superaditividad del juego financiero y teniendo en cuenta que $v(S\cap T) = v(\emptyset) = 0$ es inmediato que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S\cap T).$$

b) $S \cap T \neq \emptyset$. En este caso se cumple que

$$\begin{aligned} v(S)+v(T) &= \tfrac{v(S)}{C(S)} \cdot [C(S\setminus T) + C(S\cap T)] + \tfrac{v(S)}{C(S)} \cdot [C(T\setminus S) + C(S\cap T)] = \\ &= [\tfrac{v(S)}{C(S)} + \tfrac{v(T)}{C(T)}] \cdot C(S\cap T) + \tfrac{v(S)}{C(S)} \cdot C(S\setminus T) + \tfrac{v(T)}{C(T)} \cdot C(T\setminus S) \\ &\quad (\text{por } \textbf{convexidad}_* \text{ y dado que } \tfrac{v(S)}{C(S)}, \tfrac{v(T)}{C(T)} \leq \tfrac{v(S\cup T)}{C(S\cup T)}) \\ &\leq [\tfrac{v(S\cup T)}{C(S\cup T)} + \tfrac{v(S\cap T)}{C(S\cap T)}] \cdot C(S\cap T) + \tfrac{v(S\cup T)}{C(S\cup T)} \cdot [C(S\setminus T) + C(T\setminus S)] = \\ &\quad v(S\cap T) + v(S\cup T). \end{aligned}$$

□

Comentábamos anteriormente que el juego de la Figura **1.12** no cumplía con las condiciones de la proposición **1.56** y que no podía ser generado por una función convexa. Sin embargo, este juego sí que verifica la proposición **1.59**.

De manera inversa, el siguiente ejemplo mostrará que un juego puede cumplir la proposición **1.56** sin cumplir la **1.59**.

$$v(i) = 0;\ v(12) = v(13) = v(23) = 10;\ v(123) = 20$$

donde $(C_1, C_2, C_3) = (10, 10, 10)$.

1.4.2 Otros conceptos de convexidad

En la literatura de juegos se han estudiado varias generalizaciones de la convexidad; en esta sección estudiaremos si los juegos financieros se enmarcan en alguna de las nuevas nociones propuestas. En todas las definiciones aparece como concepto central la contribución marginal b_i^v de un jugador i a la coalición total, $b_i^v = v(N) - v(N\backslash i)$. La contribución marginal indica el beneficio que reporta la incorporación de un jugador cuando el resto ya formaban coalición.

En primer lugar analizaremos la semiconvexidad que fue introducida por Driessen y Tijs. [15] La definición de un juego semiconvexo es la siguiente:

Definición 1.60 *La clase SC^n de juegos semiconvexos se define como*

$$SC^n := \{b_i^v \geq v(\{i\}) \ y \ v(S) - \sum_{j \in S\backslash i} b_j^v \leq v(\{i\}) \ \forall i \in N \ y \forall \ S \subset N; \ i \in S\}$$

donde $b_i^v = v(N) - v(N\backslash i)$.

Dado que son una generalización, los juegos semiconvexos engloban a la clase de juegos convexos. Sin embargo, no sucede lo mismo con los juegos financieros como demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.61 *Sea el siguiente juego financiero de tres jugadores respecto al vector* (10, 10, 10)

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 10; v(\{3\}) = 10$$

$$v(\{12\}) = 22; v(\{13\}) = 22; v(\{23\}) = 22; v(\{123\}) = 33$$

Este juego no es semiconvexo dado que $v(12) - b_1^v > v(1)$. No obstante, es fácil imaginar juegos financieros semiconvexos cuando la diferencia entre el valor medio obtenido por la coalición total y el de cualquier coalición de $n-1$ jugadores es suficientemente grande para que la condición expresada en la definición se cumpla.

Otra generalización de los juegos convexos fue nuevamente introducida por Driessen ([13]): son los denominados juegos k-convexos. Esta clase de juegos se definen vía la denominada k-cobertura del juego ("k-cover")

Definición 1.62 *Sea $(N, v) \in G^n$ y $k \in \mathbf{N}$ tal que $v(N) - \sum_{j \in N\backslash S} b_j^v \geq v(S) \ \forall S \subset N$ con $|S| \geq k$. La k-cobertura del juego v, es otro juego asociado $v_k \in G^n$ definido como:*

$$v_k(S) := \begin{cases} v(S) & si\ |S| < k \\ v(N) - \sum_{j\in N\setminus S} b_j^v & si\ |S| \geq k \end{cases}$$

donde $b_i^v = v(N) - v(N\setminus i)$.

El término k-cobertura se explica por el hecho de que v_k siempre está por encima de v $[v_k(S) \geq v(S)]$. La clase de los juegos k-convexos se define por la convexidad de su k-cobertura.

Definición 1.63 *Sea* $k \in N$. *La clase* C_k^n *de los juegos k-convexos de n personas viene dada por*

$$C_k^n = \{v \in G^n \textit{tal que la k-cobertura } v_k \textit{ del juego } v \textit{ es convexa.}\}$$

Son especialmente interesantes dos casos particulares: cuando $k = n$, y cuando $k = 1$. En el primero nos reencontramos con la clase de juegos convexos[17]; en el segundo obtenemos la clase de juegos 1-convexos que podemos definir alternativamente de la siguiente manera:

Definición 1.64 *La clase de juegos 1-convexos viene dada por*

$$C_1^n = \{v \in G^n | b^v(N) \geq v(N)\ y\ v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v \geq v(S)\ \ \forall S\subset N,\ S\neq\emptyset\}$$

Estudiaremos primero la relación con los juegos 1-convexos.

Lema 1.65 *Sea* $(N,v) \in \mathcal{FG}^n$ *y* $(C_1,\ldots,C_n)$ *los recursos asociados a los jugadores. Entonces,*

$$\frac{v(N\setminus i)}{C(N\setminus i)} = \frac{v(N)}{C(N)}\ \forall i\in N \ \Rightarrow\ (N,v)\in C_1^n$$

DEM. Asumiendo las hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} b_i^v = v(N) - v(N\setminus i) &= \tfrac{v(N)}{C(N)}\cdot C(N) - \tfrac{v(N\setminus i)}{C(N\setminus i)}\cdot C(N\setminus i) = \\ &= \tfrac{v(N)}{C(N)}\cdot[C(N) - C(N\setminus i)] = \tfrac{v(N)}{C(N)}\cdot C(i). \end{aligned}$$

De aquí es inmediato que $b^v(N) = v(N)$. Por otra parte,

[17]Obsérvese que la k-cobertura coincide con el juego original cuando k=n. Ello también sucede cuando $k = n-1$ y por tanto, los juegos $(n-1)$-convexos son también convexos.

$$v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v = \sum_{i\in N} b_i^v - \sum_{i\in N\setminus S} b_i^v = \sum_{i\in S} b_i^v =$$
$$= \frac{v(N)}{C(N)} \cdot C(S) \geq \frac{v(S)}{C(S)} \cdot C(S) = v(S).$$

□

Es decir, si para un juego financiero los valores medios de la función característica de las coaliciones de n-1 jugadores son idénticas e iguales al valor medio para la coalición total, entonces el juego es 1-convexo; en general, la implicación inversa no es cierta. Esta relación será importante cuando analizemos determinadas soluciones para dichos juegos.

No obstante, no todos los juegos financieros son k-convexos (para alguna k): el juego del ejemplo **1.55** es financiero, no convexo y por tanto no puede ser 2-convexo, ni 3-convexo. Calculando la 1-cobertura de este juego se puede verificar que no es tampoco 1-convexo.

Otra noción de convexidad es la introducida por Granot & Huberman [21] vía los denominados juegos permutacionalmente convexos. Una de las características básicas de esta nueva definición es que siempre existe al menos un vector de contribuciones marginales[18] que pertenece al Núcleo[19] del juego. En general, no es cierto que todo juego financiero sea permutacionalmente convexo: el siguiente ejemplo de juego financiero simétrico nos muestra esta última afirmación.

Ejemplo 1.66

$$v(\{1\}) = 10; v(\{2\}) = 10; v(\{3\}) = 10$$

$$v(\{12\}) = 22; v(\{13\}) = 22; v(\{23\}) = 22; v(\{123\}) = 33$$

con $C_i = 10 \ \ \forall i \in N$.

los vectores de valores marginales vienen expresados en la siguiente tabla:

[18]Dada una permutación $\theta : N \rightarrow N$ de los jugadores, el pago a un jugador i según el vector de contribuciones marginales asociado a θ, x^θ es $x_i^\theta = v(P_i^\theta \cup i) - v(P_i^\theta)$ donde $P_i^\theta = \{j \in N \,|\, \theta(j) < \theta(i)\}$.

[19]Ver capítulo **2**.

θ	x_1	x_2	x_3
1 2 3	10	12	11
1 3 2	10	11	12
2 1 3	12	10	11
2 3 1	11	10	12
3 1 2	12	11	10
3 2 1	11	12	10

Se puede comprobar que ninguno de ellos pertenece al Núcleo del juego, el cual se reduce a un sólo punto [C(v) ={(11,11,11)}].

Finalmente, analizaremos una última extensión de la convexidad dada por Sprumont [57] y Iñarra & Usategui [23] que definen los denominados juegos convexos en media. Una de las características de estos juegos es que el Valor de Shapley siempre pertenece al Núcleo de estos juegos. Dado que, cómo se verá en el capítulo tercero, el valor de Shapley no siempre pertenece al Núcleo de un juego financiero deduciremos que tampoco los juegos convexos en media incluyen al conjunto de juegos financieros.

1.4.3 *The travelling Salesman game*

Más curioso resulta observar cómo un cierto tipo de problemas que no tienen nada que ver con el espíritu de los juegos financieros, se pueden modelizar a través de la Teoría de Juegos cooperativos y resultar, en ciertos casos, un juego financiero. Este es el caso del *Travelling Salesman Game* que empezaron a estudiar Fishburn y Pollak [17] y que Potters, Curiel y Tijs [45] continuaron, estableciendo condiciones para que el Núcleo[20] del juego fuera no vacío.

El problema se plantea en los siguientes términos: un representante comercial, partiendo de su domicilio, debe visitar exactamente una vez cada una de las ciudades de una determinada lista y después regresar a casa. El problema se centra en repecutir a los clientes los costes del viaje. Existen diversas modalidades para el juego dependiendo de si la ruta a seguir por el representante debe ser fija o puede ser variable escogiéndose la ruta óptima que reporte el menor coste; en el siguiente ejemplo asumiremos una ruta fija.

Ejemplo 1.67 *Sea un representante que debe visitar tres clientes situados en tres ciudades diferentes: primero acudirá a la ciudad* **1**, *luego a la ciudad* **2**, *y finalmente*

[20] "Core"

a la **3** *regresando posteriormente al origen* **0**. *Los costes de desplazamiento entre las ciudades se recogen en la siguiente gráfica:*

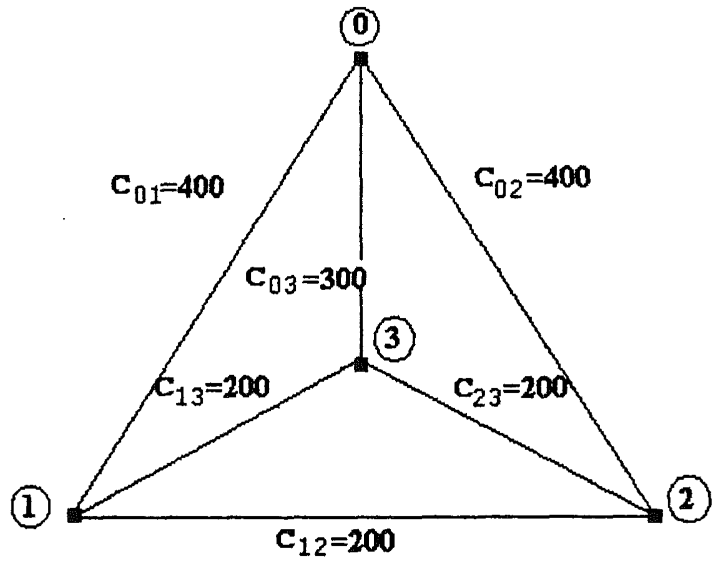

Figura **1.13**

A partir de este planteamiento podemos construir un juego de costes donde $c(123) = 1,200$ y en donde $c(S)$ será el coste de visitar sólo una o dos ciudades según el orden establecido. El resultado de estos cálculos se reflejan en la siguiente tabla:

Coalición	coste $[c(S)]$	$\sum_{i \in S} c_{0i}$	$\frac{c(S)}{\sum_S c_i}$
1	800	400	2
2	800	400	2
3	600	300	2
12	1000	800	1.25
13	900	700	1.28
23	900	700	1.28
123	1,100	1,100	1

El juego de costes resultante, *Travelling Salesman Game*, adquiere la estructura de Juego financiero de costes si identificamos los costes de desplazamiento desde el punto de origen hasta cada ciudad **i**, $(c_{0\mathbf{1}}, \ldots, c_{0\mathbf{n}})$, con las demandas $(d_1, \ldots d_n)$ que intervienen en la definición de un juego financiero de costes.

Como recoge la cuarta columna, los valores medios de la función característica son decrecientes respecto a los costes y por tanto el juego de costes es financiero. Planteado de esta manera es sencillo deducir que una condición suficiente para que un "Travelling salesman game" sea financiero es que

$$\sum_{i \in S} c_{0\mathbf{i}} \leq \sum_{i \in T} c_{0\mathbf{i}} \Rightarrow \frac{c(S)}{\sum_{i \in S} c_{0\mathbf{i}}} \geq \frac{c(T)}{\sum_{i \in T} c_{0\mathbf{i}}}$$

$S, T \subseteq N$; $S, T \neq \emptyset$.

Sin embargo, es fácil construir juegos de este tipo que no pueden ser financieros; por ejemplo, el generado por la siguiente figura:

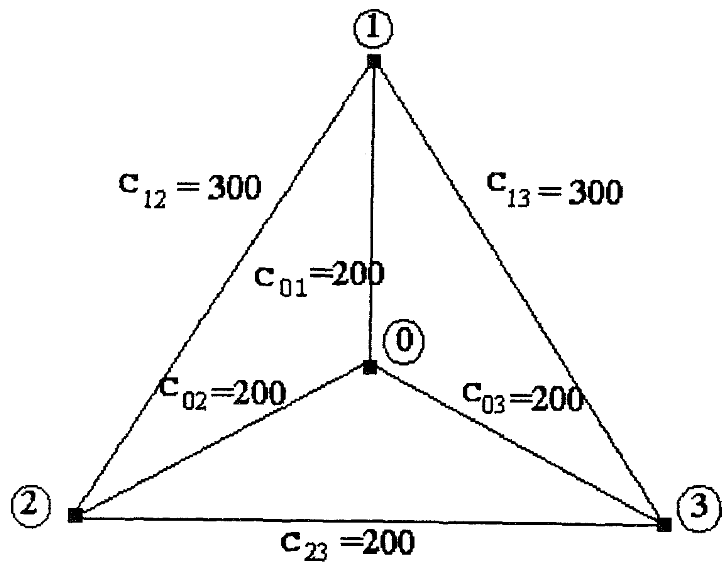

Figura **1.14**

Dada la simetría del juego de costes generado ($c(1) = c(2) = c(3) = 400$), si el juego fuera financiero se debería cumplir que $c(12) = c(23)$; sin embargo, mirando la figura se comprueba que $c(12) = 700 > 600 = c(23)$.

1.4.4 *Clan Games*

Este tipo de juegos fueron introducidos por Potters, Poos y Tijs [46]. En ellos se presenta situaciones de conflicto entre jugadores "*ricos*" y jugadores "*pobres*"[21]. Los jugadores ricos forman un clan de manera que ningún jugador pobre puede obtener ningún resultado positivo sin la colaboración del clan ("Propiedad del Clan"). Ante esta situación, los jugadores pobres se pueden defender uniéndose y negociando con el clan conjuntamente dado que el incremento del beneficio que se deriva de la coalición entre todos los jugadores pobres y el clan es superior a la suma de los incrementos fruto de la coalición entre uno de los jugadores pobres y el clan. De alguna manera el clan tiene más a perder si recibe el boicot de todos los jugadores pobres conjuntamente que si recibe la oposición de los jugadores por separado; es la denominada propiedad de la "Unión". Más formalmente podemos definir un *clan game* de la siguiente manera:

Definición 1.68 *Un juego cooperativo* $v : 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ *es un* clan game *si*

(1) $v(S) \geq 0$ *y* $b_i^v = v(N) - v(N-i) \geq 0 \;\; \forall i \in N$

(2) Existe una coalición no vacia denominada **CLAN** $\subset N$ *de manera que*

- *(a)* $v(S) = 0$ *si* **CLAN** $\not\subset S$ *("propiedad del Clan").*
- *(b)* $v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v$ *si* **CLAN** $\subset S$.

  ("propiedad de la Unión").

Esta situación, jugadores influyentes versus no influyentes, encaja muy bien en la filosofía del juego financiero si incluímos en la construcción del juego un jugador (o varios) que poseen gran cantidad de recursos y que pueden obtener altos rendimientos medios y otros jugadores con pocos recursos que solo obtengan altos rendimientos cuando se unen al clan. Ilustremos esta idea con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.69 *Sea un juego financiero similar al del ejemplo* **1.1** *pero con cuatro jugadores cuyos recursos disponibles para invertir son:*

$$C_1 = 4,000,000; \; C_2 = 4,000,000; \; C_3 = 500,000; \; C_4 = 500,000$$

Los tipos de interés aplicables a las diferentes cantidades a invertir son:

[21] Ver también el modelo denominado "Big Boss games" [38].

Deposito	*Tipo de interés (efectivo anual)*
0-5,500,000	*0%*
5,500,000-8,000,000	*12%*
más de 8,000,000	*15%*

Por tanto la función característica que se genera es:

$v(1) = 0$	$v(2) = 0$	$v(3) = 0$	$v(4) = 0$
$v(12) = 8,960,000$	$v(13) = 0$	$v(14) = 0$	$v(23) = 0$
$v(24) = 0$	$v(34) = 0$	$v(123) = 9,775,000$	$v(124) = 9,775,000$
$v(134) = 0$	$v(234) = 0$	$v(1234) = 10,350,000$	

Es fácil verificar que el nuevo juego cumple con las condiciones requeridas por un *clan game* identificando al clan con la coalición $\{12\}$. A partir de este ejemplo es posible establecer una condición suficiente para que un juego financiero sea un clan game.

Proposición 1.70 *Un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$ es un clan game si existe una coalición T que verifica las siguientes condiciones:*

1) $\frac{v(N)}{C(N)} = \frac{v(N\setminus i)}{C(N\setminus i)} \ \forall i \in N \setminus T,$

2) $v(N \setminus i) = 0 \ \ \forall i \in T.$

Si se cumplen estas dos condiciones identificaremos al CLAN con la coalición T.

DEM.

Demostraremos que la coalición T constituye un clan dentro del juego,i.e. **CLAN** $=$ T. Dada la monotonía de los juegos financieros, el requisito **2**) equivale a la "propiedad del Clan". Por otra parte, del requisito **1**) se deduce que para todo jugador $i \in N \setminus T$

$$\begin{aligned} b_i^v &= v(N) - v(N \setminus i) = \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C(N) - \tfrac{v(N\setminus i)}{C(N\setminus i)} \cdot C(N \setminus i) = \\ &= \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C(N) - \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C(N \setminus i) = \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C_i. \end{aligned}$$

De aquí que para toda coalición S tal que $T \subseteq S$ se cumpla que

$$\begin{aligned} v(N) - v(S) &= v(N) - \tfrac{v(S)}{C(S)} \cdot C(S) \geq \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C(N) - \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C(S) = \\ &= \tfrac{v(N)}{C(N)} \cdot C(N \setminus S) = \textstyle\sum_{i\in N\setminus S} b_i^v \end{aligned}$$

por lo que se verifica la "propiedad de la Unión" □

1.4.5 *Linear production Games*

Los juegos de producción lineal fueron definidos por Owen ([42]). En ellos se analiza un modelo de producción lineal donde, a partir de unos inputs $I_1, \ldots, I_j, \ldots, I_m$, se producen unos outputs $O_1, \ldots, O_k, \ldots, O_q$.

Las necesidades técnicas de producción requieren que para fabricar una unidad de O_k se necesiten $a_{jk} \geq 0$ unidades del input I_j; La matriz de producción es

$$A := (a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,q}}$$

para la que suponemos que en cada fila existe al menos un elemento estrictamente positivo (es decir que todos los inputs son utilizados.) Si se dispone de una vector (columna) de inputs $b \in \mathbf{R}_+^m$, entonces los posibles vectores (columna) de output $x \in \mathbf{R}_+^q$ que se pueden producir a partir de b verifican que $A \cdot x \leq b$ siendo x_k la cantidad de output k producida.

Si cada unidad de output O_k puede ser vendida al precio p_k, el ingreso obtenido por la venta de un cierto vector de producción x será

$$p^T \cdot x$$

donde $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_+^q$ es el vector de precios para los outputs.

De esta manera el valor o rendimiento que se puede extraer a partir de un determinado vector de inputs x es:

$$val(b) := \max\{p^T x \mid A \cdot x \leq b \;\; x \geq 0\};$$

$val(b)$ equivale a los ingresos obtenidos por la venta del vector óptimo de producción, que es aquella producción factible que genera los máximos ingresos.

Dada esta situación supongamos que un conjunto de n agentes, $N = \{1, \ldots, n\}$ controla los inputs necesarios para la producción. En su versión más simple del modelo (Owen[42]), supongamos que cada agente i dispone de un vector $b^i \in \mathbf{R}_+^m$ de inputs y que por tanto, una coalición $S \subseteq N$ de agentes controla una cantidad de input $b(S)$ igual a $\sum_{i \in S} b^i$. A partir de aquí podemos generar un juego de producción lineal (N, w) donde

$$w(S) := val(b(S)) \;\; \forall S \subseteq N \; S \neq \emptyset$$

Owen demuestra que este tipo de juegos siempre tienen el Núcleo no vacio.

Situados en este contexto los juegos financieros también pueden ser interpretados como juegos de producción lineal. En general, es conocido que todo juego totalmente equilibrado no negativo se puede expresar mediante un Linear production Game donde los inputs son la participación de los jugadores en las diferentes coaliciones; por tanto, los juegos financieros se podrán expresar también de la misma forma. Sin embargo, dado que en los juegos financieros la aportación de recursos está determinada, en esta sección daremos una manera natural de representarlos como juegos de producción lineal.

Efectivamente, sea (N, v) un juego financiero respecto al vector de recursos $(C_1, \ldots, C_n)$; supondremos que $0 < C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_n$. Entonces, podemos ordenar las coaliciones $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ de manera creciente respecto a la cantidad de recursos aportada, i.e.

$$\sum_{i \in S_k} C_i \leq \sum_{i \in S_{k+1}} C_i \quad k = 1, \ldots, 2^n - 2; \quad S_k \subseteq N \quad S_k \neq \emptyset$$

A partir de aquí supongamos un proceso de producción lineal donde se fabrican $2^n - 1$ productos a partir de n inputs. La matriz de producción es

$$A := (a_{jk}) \begin{array}{l} j = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, 2^n - 1 \end{array} \tag{1.20}$$

donde $a_{jk} = \begin{cases} \frac{C_j}{C_1} & \text{si } j \in S_k \\ 0 & \text{si } j \notin S_k \end{cases}$

El vector de recursos disponible por el jugador i es $b^i \in \mathbf{R}^n_+$ donde

$$b^i_j = C_j \text{ si } j = i \text{ y cero si } j \neq i. \tag{1.21}$$

Finalmente, el vector de precios $p \in \mathbf{R}^{2^n-1}_{++}$ vendrá dado por

$$p_k = \frac{\sum_{i \in S_k} C_i}{C_1} \mathbf{f}_{S_k} \quad k = 1, \ldots, 2^n - 1. \tag{1.22}$$

Dada esta situación podemos enunciar el siguiente Teorema:

Teorema 1.71 *Sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$; sea además (N, w) el juego de producción lineal generado a partir de la matriz (1.20) y los vectores de recursos (1.21) y de precios (1.22). Entonces,*

$$v(S) = w(S) \text{ para toda } S \subseteq N$$

DEM.

El juego w se define como

$$w(S) = val(b(S)) = \max\{p^T \cdot x \,|\, A \cdot x \leq b(S) \;\; x \geq 0\} \;\; S \subseteq N; \; S \neq \emptyset$$

El conjunto factible de planes de producción vendrá determinado por

$$A \cdot x \leq b(S)$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} (a_{jk} \cdot x_k) \leq \sum_{i \in S} b_j^i; \; j = 1, \ldots, n.$$

Cada una de las anteriores desigualdades corresponde a cada uno de los inputs, pero también a cada uno de los jugadores (existían tantos inputs como jugadores; la restricción j-ésima se corresponde con el jugador j-ésimo) . De esta manera, **dada una coalición** S las desigualdades se pueden dividir en dos conjuntos: aquellas asociadas a jugadores que pertenecen a S y aquellas asociadas a jugadores que no pertenecen a S, i.e.

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{j \in S_k} \frac{C_j}{C_1} \cdot x_k \leq C_j & \text{si } j \in S; \\ \sum_{j \in S_k} \frac{C_j}{C_1} \cdot x_k \leq 0 & \text{si } j \notin S. \end{array}\right. \quad j = 1, \ldots, n$$

Esto equivale a

$$\sum_{k;\, j \in S_k} x_k \leq C_1 \quad \text{si } j \in S; \tag{1.23}$$

$$j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{k;\, j \in S_k} x_k \leq 0 \quad \text{si } j \notin S. \tag{1.24}$$

De (1.24) se deduce que $x_k = 0$ para toda k tal que $j \in S_k \setminus S$. Teniendo en cuenta esto, las desigualdades (1.23) se pueden reescribir como

$$\sum_{k;\; j \in S_k \subseteq S} x_k \leq C_1 \quad \forall j \in S. \tag{1.25}$$

Por otra parte la función a maximizar es

$$f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{2^n-1}) = \sum_{k=1}^{2^n-1} p_k \cdot x_k.$$

Teniendo en cuenta (1.24), la función se puede expresar como

$$f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{2^n-1}) = \sum_{S_k \subseteq S} p_k \cdot x_k. \tag{1.26}$$

Por otra parte, por la definición de p_k y las características del juego financiero se cumple que

$$p_k \geq 0 \qquad k = 1, \ldots 2^n - 1$$

$$p_k \leq p_{k+1} \quad k = 1, \ldots 2^n - 2$$

Como consecuencia de (1.25) y (1.26), el máximo de la función f cuando los únicos jugadores que aportan recursos son los de una coalición S determinada se alcanzará para el vector $e^S \in \mathbf{R}^{2^n-1}$ donde

$$e_k^S = C_1 \text{ si } S_k = S \quad \text{y } e_k^S = 0 \text{ en otro caso.}$$

Pero para este vector se verifica que

$$w(S) = val(b(S)) = f(e^S) = \frac{\sum_{i\in S} C_i}{C_1} \mathbf{f}_S \cdot C_1 = v(S)$$

con lo que se demuestra que el juego de producción lineal definido equivale al juego financiero.

□

Ejemplo 1.72 *Sea el siguiente juego financiero de tres jugadores respecto al vector* (10, 20, 40)

$$v(1) = 10;\ v(2) = 20;\ v(3) = 40;\ v(12) = 30;\ v(13) = 55;\ v(23) = 66;\ v(123) = 84$$

Si ordemanos las coaliciones por la cantidad de recursos obtendremos que

$$\begin{array}{ll}
S_1 = \{1\} & \sum_{i\in\{1\}} C_i = 10 \\
S_2 = \{2\} & \sum_{i\in\{2\}} C_i = 20 \\
S_3 = \{12\} & \sum_{i\in\{12\}} C_i = 30 \\
S_4 = \{3\} & \sum_{i\in\{3\}} C_i = 40 \\
S_5 = \{13\} & \sum_{i\in\{13\}} C_i = 50 \\
S_6 = \{23\} & \sum_{i\in\{23\}} C_i = 60 \\
S_7 = \{123\} & \sum_{i\in\{123\}} C_i = 70
\end{array}$$

A partir de aquí construimos el juego de producción lineal donde existen tres inputs (I_1, I_2, I_3) y siete outputs (uno por cada coalición); las cantidades producidas de cada output son $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ y los vectores de recursos disponibles por cada jugador son:

$$b^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

La matriz de producción es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente, el vector de precios será

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7) = (1, 2, 3, 4, 5.5, 6.6, 8.4).$$

Dados estos datos el programa lineal que genera el juego de producción y también el juego financiero es:

$$v(S) = \max\; 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5.5x_5 + 6.6x_6 + 8.4x_7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \sum_{i \in S} b_i^1 \\ \sum_{i \in S} b_i^2 \\ \sum_{i \in S} b_i^3 \end{pmatrix}$$

$x_k \geq 0 \;\; k = 1, \ldots, 7.$

Aunque todo juego financiero puede ser expresado como un juego de producción lineal, no todo juego de producción lineal es un juego financiero.

Ejemplo 1.73 *Considérese el siguiente modelo de producción lineal*

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} O_1 & O_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$b^1 = (5,8)$; $b^2 = (5,2)$; $b^3 = (0,2)$ *y* $(p_1, p_2) = (5,7)$.

El juego generado es

S	$v(S)$
$\{1\}$	*23*
$\{2\}$	*14*
$\{3\}$	*0*
$\{1,2\}$	*40*
$\{1,3\}$	*25*
$\{2,3\}$	*19*
$\{1,2,3\}$	*42*

Aplicando la condición necesaria de juego financiero expresada en la proposición **1.37**, *dado que* $v(1) + v(23) = v(123)$ *se debería cumplir que* $v(2)+v(13) = v(123)$*; ello no es así por lo que llegamos a la conclusión de que el juego no es financiero.*