Análisis de soluciones para Juegos Cooperativos de valores medios crecientes respecto a un vector: Juegos Financieros

Josep Maria Izquierdo Aznar

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial.
Universitat de Barcelona

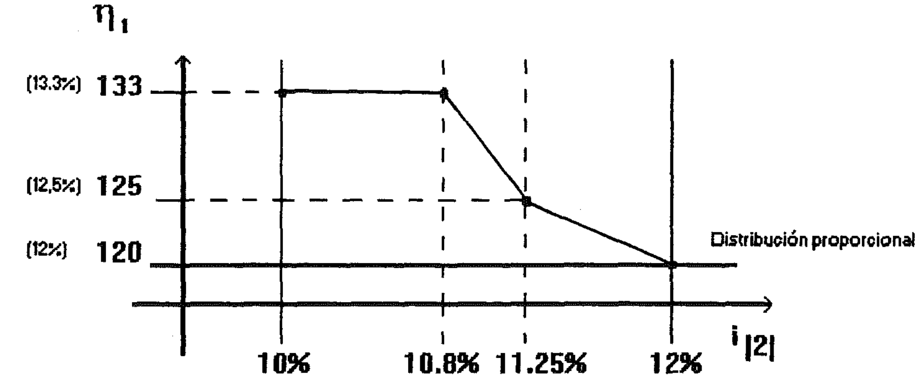
Programa de doctorado-Bienio 1989-1991: Métodos Matemáticos en el Análisis Económico-Financiero

Tesis para optar al Título de Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales.

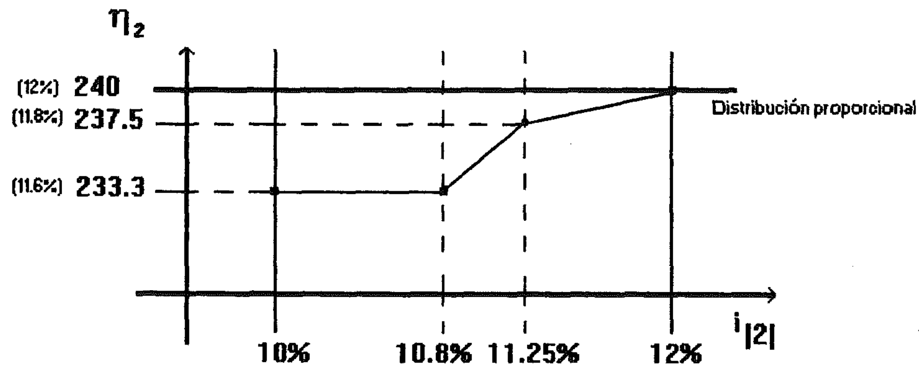
Director-Tutor: Dr. Carles Rafels i Pallarola
Barcelona, 17 Abril 1996

el 12%, es decir, el pago proporcional. En cambio, los pagos a los jugadores 2 y 3 se incrementan desde el 11.6% hasta el 12%.

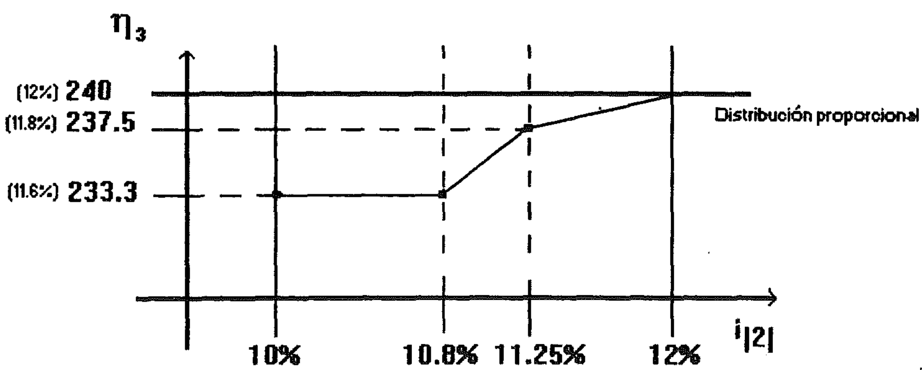
El Nucleolus de un juego financiero simétrico en valores medios



1.- Pago al primer jugador



2.- Pago al segundo jugador



3.- Pago al tercer jugador

Nota: entre paréntesis figuran los pagos a los jugadores expresados en % sobre los capitales invertidos.

En nuestro ejemplo, para $\mathbf{i}_{|2|} = 11\%$ el caso que le corresponde es el (c). Aplicando la fórmula correspondiente obtenemos que

$$\eta(v) = (130,\ 235,\ 235),$$

o en tanto por ciento,

$$\eta(v) = (13\%,\ 11.75\%,\ 11.75\%).$$

Tal y como comentábamos, el jugador 1, con menos inversión que los jugadores 2 y 3, obtiene un pago medio superior.

Al igual que para el valor de Shapley, otra deficiencia es que el nucleolus es una distribución manipulable respecto a los recursos. Continuando con el ejemplo anterior, si el jugador 2 se desdobla en dos de manera que surgen dos nuevos jugadores que invierten un millon cada uno, resulta que el nucleolus del juego pasa a ser:

$$\eta(v) = (123.33,\ 123.33,\ 123.33,\ 230).$$

El jugador 2 ha incrementado su pago mediante esta manipulación del juego.

Para el caso general de n jugadores, la casuística se multiplica de manera extraordinaria; para comprobar la dificultad merece la pena estudiar el trabajo de D. Bitter [7] que estudia el Kernel de un juego de cuatro jugadores. Por tanto, no parece indicado realizar un estudio en la misma dirección para el caso de más jugadores. De esta manera, dado que la clase de los juegos financieros parece demasiado amplia (ver capítulo **1**), restringiremos nuestro estudio a una parte de ellos, que incluirá a los juegos de bancarrota.

4.2.2 Un caso particular

Los juegos de bancarrota, además de ser una interesante aplicación de la Teoría de Juegos Cooperativos, propician una original interpretación de soluciones como el Kernel, el Prekernel y el nucleolus basada en la negociación bilateral de los jugadores (Aumann [5]). Nuestro propósito es extender la misma filosofía a un conjunto de juegos financieros más amplio que los propios juegos de bancarrota; en concreto, consideraremos juegos financieros que verifican la siguiente condición:

$$v(N) - v(S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v \tag{4.15}$$

para toda $S \subset N$ con $v(S) > 0$ y $1 \leq |S| \leq n-2$, y donde $b_i^v = v(N) - v(N \setminus i)$.

Este tipo de juegos ya fueron analizados en los capítulos primero y segundo. Recordemos que entre los juegos que se incluían en esta subclase se encontraban los de Bancarrota, los juegos 1-convexos financieros y los juegos de mínimo nivel generadores de todo juego financiero.

Al igual que para el caso de tres jugadores, se puede demostrar que el Kernel (Prekernel) se reduce a un único punto y que por tanto coincide con el nucleolus. Para ello enunciaremos previamente un Teorema debido a Maschler, Peleg y Shapley ([32]) que utilizaremos posteriormente.

Teorema 4.9 *Sean v, w dos juegos cooperativos de n jugadores tales que $C(v) = C(w)$, entonces*

$$\mathcal{K}(v) \cap C(v) = \mathcal{K}(w) \cap C(w)$$

A partir de este resultado probaremos el siguiente Teorema:

Teorema 4.10 *Sea (N, v) un juego financiero que verifica la condición (4.15), entonces*

$$\mathcal{K}(v) = \{\eta(v)\}.$$

DEM.

En efecto por la proposición **2.13**, $C(v) = C(\overline{v})$ donde $\overline{v}(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}$. Dada esta igualdad es posible aplicar el Teorema **4.9**, lo que implica que $\mathcal{K}(v) \cap C(v) = \mathcal{K}(\overline{v}) \cap C(\overline{v})$. El juego $\overline{v}$ es un juego convexo dado que es un juego de bancarrota donde $d_i = b_i^v$ y $\mathbf{E} = v(N)$ y por tanto el único punto del Kernel coincide con su nucleolus, i.e.

$$\mathcal{K}(\overline{v}) \cap C(\overline{v}) = \{\eta(\overline{v})\}.$$

Por otra parte, el juego v es un juego financiero y por tanto su conjunto de negociación (según Aumann-Maschler) coincide con el Núcleo (Teorema **3.10**). Dado que el Kernel es un subconjunto del conjunto de negociación tenemos que

$$\mathcal{K}(v) \cap C(v) = \mathcal{K}(v).$$

De aquí concluímos que

$$\mathcal{K}(v) = \{\eta(\overline{v})\} = \{\eta(v)\}.$$

□

Por tanto el nucleolus de esta subclase de juegos financieros equivale al cálculo del nucleolus del juego de bancarrota asociado (juego $\overline{v}$). Esto implica que gran parte de las características del nucleolus en un juego de bancarrota se van a verificar para la clase particular de juegos que estamos analizando: entre las más importantes estará su cálculo y la consistencia del nucleolus.

Respecto a la primera cuestión, nos remitiremos al estudio realizado por Aumann y Maschler ([5]) sobre los juegos de Bancarrota; en este artículo se facilita una regla de cálculo para el nucleolus: "The contested garment consistent division rule"(en adelante CGCDR). Para el caso que nos ocupa esta regla va a ser nuevamente aplicable al juego $\overline{v}$. En este juego de bancarrota, las demandas de los creditores son las contribuciones marginales, $d_i = b_i^v$; y el patrimonio ("Estate") será el valor total de la coalición, $v(N)$. A continuación describimos la regla CGCDR.

Sea $(N, \overline{v})$ el juego de bancarrota asociado al juego financiero que verifica (4.15) y $b_1^v, \ldots, b_n^v$ las contribuciones marginales de cada jugador ordenadas de manera que $b_1^v \leq b_2^v \leq \ldots \leq b_n^v$. Obsérvese que para un juego financiero la suma de las contribuciones marginales siempre es mayor que el valor de la coalición total $v(N)$ (i.e. $\sum_{i \in N} b_i^v = b^v(N) \geq v(N)$).

El proceso de reparto se realiza de la siguiente manera: (los pasos que a continuación describiremos se siguen hasta el punto en que se ha asignado el total a repartir):

1 Se realiza un reparto igualitario hasta que todos los jugadores han alcanzado el valor $\frac{1}{2}b_1^v$. Por tanto, si $v(N)$ es suficientemente bajo el pago será igual para todos.

Si todavía queda algo por repartir, el jugador 1 no recibirá ninguna unidad adicional y el reparto igualitario continuará para los jugadores del 2 al n hasta que hayan alcanzado el valor $\frac{1}{2}b_2^v$.

Si todavía queda algo por repartir, el jugador 2 ya no recibirá ningún pago más y el reparto igualitario continuará para los jugadores del 3 al n. Este proceso de reparto igualitario se desarrolla (si se puede) de la misma manera hasta que todos los jugadores han recibido la mitad de su valor marginal $\frac{1}{2}b_i^v$; en ese momento, el último jugador habrá recibido $\frac{1}{2}b_n^v$.

2 Si la asignación aún no ha sido completada, es decir cuando $\frac{1}{2}b^v(N) < v(N)$, el reparto continuará asignando al jugador n todas las unidades que excedan de $\frac{1}{2}b^v(N)$ hasta el punto en que haya recibido su valor marginal menos $\frac{1}{2}b^v_{n-1}$. En este momento el jugador $n-1$ vuelve a entrar en escena realizándose un reparto igualitario entre él y el jugador n hasta que los dos han recibido su valor marginal menos $\frac{1}{2}b^v_{n-2}$; entonces vuelve a entrar el jugador $n-2$ y el reparto igualitario se lleva a cabo entre el jugador n, $n-1$ y $n-2$ hasta que reciben un pago igual a su valor marginal menos $\frac{1}{2}b^v_{n-3}$. Esta etapa de reentrada de los jugadores en el pago continúa hasta que el jugador 1 entra también en escena; en ese momento todos los jugadores han recibido un pago de $b^v_i - \frac{1}{2}b^v_1$.

3 A partir de aquí si todavía queda algo por repartir la distribución ya será igualitaria hasta agotar $v(N)$.

La segunda cuestión que se deriva del Teorema **4.10** es la consistencia de la solución aportada por el Nucleolus. El concepto de consistencia se ha definido en la literatura de juegos para problemas de bancarrota (ver Aumann [5] y Driessen [12]) o en general para problemas en donde los jugadores tiene unos derechos cuantificables sobre la cantidad que se debe repartir ("rights problems"). En los juegos financieros no tenemos explícitamente estos derechos aunque los podemos identificar con las contribuciones marginales de los jugadores; estos valores no constituyen ningún derecho aunque sí una legitima aspiración dado que, como hemos visto en el capítulo segundo, siempre es posible encontrar una distribución en el Núcleo del juego que asigne a un jugador su contribución marginal. Definidos estos derechos, la consistencia se enmarca en un proceso de negociación bilateral. Dada una cierta distribución $\vec{x}$ de la ganancia total consideramos la asignación total que se ha realizado a un par cualquiera de jugadores i y j, es decir, $x_i + x_j$. Estos jugadores podrían plantearse si la distribución de esta cantidad entre ellos dos se ha realizado correctamente. El jugador i no reivindicará de esta cantidad más que el montante de sus derechos, es decir, de su contribución marginal (b^v_i). De esta manera la cantidad que el jugador j se puede asegurar, o sus mínimos derechos, es lo que sobre después de pagar al jugador i sus derechos, es decir, $(x_i + x_j) - b^v_i$; de hecho, sería el máximo entre esta cantidad y cero dado que lo mínimo que el jugador j puede obtener es que no se le pague nada. De la misma manera, el mínimo derecho que el jugador i se puede asegurar sería $\max\{0, (x_i + x_j) - b^v_i\}$. Por tanto, de aquí se deduce que la cantidad sujeta a negociación entre el jugador i y el j sería la diferencia entre el total a repartir

$x_i + x_j$ y los mínimos derechos de ambos jugadores, i.e.

$$(x_i + x_j) \;-\; \max\{0,\, (x_i + x_j) - b_j^v\} \;-\; \max\{0,\, (x_i + x_j) - b_i^v\}.$$

Siguiendo un criterio equitativo, esta cantidad se repartiría de manera igualitaria entre los jugadores de manera que al final cada jugador dispondría de la mínima cantidad que se puede asegurar más la mitad de la cantidad sujeta a negociación. Dependiendo de si la cantidad inicialmente asignada estaba "justamente"[4] repartida, este proceso de negociación puede conducir o no a una redistribución del reparto entre los jugadores.

En este marco una distribución es consistente si los procesos de negociación bilateral entre los jugadores no alteran la distribución; es decir, la distribución es inmune a intentos de redistribución de la cantidad total. Técnicamente, podemos definir la consistencia en términos de los juegos de negociación bilateral y de la solución estándard.

Definición 4.11 *Sea $\vec{x} \in I^*(v)$, definimos el juego de negociación bilateral entre i y j referido a la distribución $\vec{x}$ como $(\{i,j\},\, vb^{\vec{x}}_{\{ij\}})$ donde*

$$\begin{array}{rcl} vb^{\vec{x}}_{\{ij\}}(ij) & = & x_i + x_j, \\ vb^{\vec{x}}_{\{ij\}}(i) & = & \max\{0,\, x_i + x_j \;-\; b_j\}, \\ vb^{\vec{x}}_{\{ij\}}(j) & = & \max\{0,\, x_i + x_j \;-\; b_i\}. \end{array}$$

Por otra parte, la solución standard $(\phi(v))$ para un juego de dos jugadores $(\{i,j\}, v)$ es

$$\begin{array}{rcl} \phi_i(v) & = & v(i) \,+\, \frac{1}{2} \cdot [v(ij) - v(i) - v(j)], \\ \phi_j(v) & = & v(j) \,+\, \frac{1}{2} \cdot [v(ij) - v(i) - v(j)]. \end{array}$$

Teniendo en cuenta las anteriores dos definiciones se deduce la definicición de consistencia:

Definición 4.12 *$\vec{x} \in I^*(v)$ es consistente si y sólo si la solución standard del juego de negociación bilateral entre cualquier jugador i y cualquier jugador j $[(\phi_i,\, \phi_j)]$ coincide con las asignaciones originales $(x_i,\, x_j)$*

A pesar de haber definido las distribuciones consistentes, no tenemos asegurada su existencia. Al respecto, cabe decir que Aumann y Maschler ([5]) demuestran que para los juegos de bancarrota como máximo sólo existe una distribución consistente;

[4]Tomando como criterio de justicia el reparto igualitario en la negociación bilateral.

esta conclusión es extensible a la subclase de juegos financieros que verifica (4.15) (la demostración es idéntica) . Además demuestran que, para los juegos de Bancarrota, esta distribución existe y coincide con el nucleolus. Dado que el nucleolus de los juegos financieros que estamos analizando equivale al calculado para un cierto juego de bancarrota donde las demandas de los acreedores son las contribuciones marginales de los jugadores, concluiremos que el nucleolus de la subclase de juegos financieros es también consistente.

Uno de los tipos de juegos financieros que verifican (4.15) son propiamente los juegos de bancarrota $v_{\mathbf{E};d}$. Para estos juegos, el proceso de asociación de un nuevo juego de Bancarrota ($\overline{v}$) deja inalterado el juego inicial, i.e., $v_{\mathbf{E};d} = \overline{v}$ (ver Teorema **2.29**); sin embargo, las demandas de los acreedores quedan modificadas y en lugar de considerar las iniciales d_i se toman las del nuevo juego que son las contribuciones marginales:

$$b_i^{v_{\mathbf{E};d}} = v_{\mathbf{E};d}(N) - v_{\mathbf{E};d}(N \setminus i) = \min\{E, d_i\}.$$

Los derechos del jugador en el nuevo juego son más correctos dado que son iguales que en el juego de bancarrota inicial pero truncados por el valor total a repartir.

El siguiente ejemplo nos muestra un juego financiero de cuatro jugadores que verifica la condición (4.15) pero que no es ni de Bancarrota, ni 1-convexo.

Ejemplo 4.13 *Sea un juego financiero respecto al vector* (100, 200, 300, 400)*:*

$$v(N) = 120; \quad v(234) = 108; \quad v(134) = 96;$$

$$v(S) = 0 \quad \textit{en otro caso.}$$

A partir del cálculo de las contribuciones marginales de cada jugador

$$b_1^v = 12; \quad b_2^v = 24; \quad b_3^v = 120; \quad b_4^v = 120;$$

asociamos al juego v el correspondiente juego de Bancarrota $\overline{v}$

$$\overline{v}(N) = 120; \quad \overline{v}(234) = 108; \quad \overline{v}(134) = 96; \quad \overline{v}(34) = 84$$

$$\overline{v}(S) = 0 \quad \textit{en otro caso}$$

Obsérvese que ambos juegos no son iguales y por tanto el juego v no es de Bancarrota; tampoco es 1-convexo dado que $v(N) - v(24) < b_1^v + b_3^v$. Sin embargo, es un juego financiero que verifica la condición (4.15).

Calculamos el nucleolus aplicando la regla CGCDR. Repartimos en primer lugar a cada jugador $\frac{1}{2} \cdot b_1^v$, *es decir* 6 *unidades; dado que no hemos agotado el total a repartir (hemos repartido en total* $6 \cdot 4 = 24$ *unidades) continuamos con el proceso, asignando unidades adicionales de pago a los jugadores 2, 3 y 4 (el 1 se retira) hasta llegar a la cantidad* $\frac{1}{2} \cdot b_2^v$, *es decir,* 12 *unidades. Hasta el momento habremos repartido 42 unidades. Dado que todavía no hemos asignado las 120 unidades a repartir, continuamos el proceso asignando unidades a los jugadores 3 y 4 hasta que cada uno de ellos disponga de* $\frac{1}{2} \cdot b_3^v = 60$ *unidades. Sin embargo, ello no es posible dado que entonces repartiríamos una cantidad global entre los jugadores superior a 120 unidades* ($v(N)$)*; de esta manera, los jugadores 3 y 4 sólo llegarán a obtener un pago de 51 unidades. El nucleolus del juego es pues*

$$\eta(\overline{v}) = (6, 12, 51, 51)$$

que coincide con el nucleolus del juego original.

Antes de acabar esta sección dedicada al nucleolus, vamos a justificar que siempre es posible aplicar la regla CGCDR a los juegos de tres jugadores cero-normalizados con Núcleo no vacío (no necesariamente financieros). La clave para demostrarlo es justificar que el Núcleo de un juego cero-normalizado coincide con el juego de bancarrota asociado.

Proposición 4.14 *Sea* (N, v) *un juego cero-normalizado*[5] *de tres jugadores con Núcleo no vacío. Entonces,*

$$C(v) = C(\overline{v})$$

donde $\overline{v}(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}$.

DEM.

Obsérvese que $\overline{v}(N) = v(N)$ y $\overline{v}(ij) = \max\{0, v(ij)\} \geq v(ij) \quad \forall i, j \in N$. Demostraremos ahora la doble inclusión $C(v) \subseteq C(\overline{v})$ y $C(\overline{v}) \subseteq C(v)$.

$C(v) \subseteq C(\overline{v})$.- Sea $\vec{x} \in C(v)$.

En primer lugar comprobaremos que $x_i \geq \overline{v}(i) \quad \forall i \in N$. Supongamos que $x_i < \overline{v}(i)$; ello implica que $x_i < v(N) - b_j^v - b_k^v$ y por tanto,

$$x_i < v(N) - (v(N) - v(ik)) - (v(N) - v(ij)) =^{6} v(ik) - (x_i + x_j + x_k) + v(ij) \leq^{7} v(ik) - x_k.$$

[5] $v(i) = 0 \ \forall i \in N$.

[6] Por eficiencia de $\vec{x}$.

[7] Dado que $\vec{x} \in C(v)$, $x_i + x_j > v(ij)$.

De aquí se deduce que $x_i + x_k < v(ik)$, lo cual es imposible dado que $\vec{x} \in C(v)$.

Sea ahora una coalición $\{ij\}$ de dos jugadores; dado que $\vec{x} \in C(v)$ entonces $x_i \geq v(i) = 0 \ \forall i \in N$ lo que implica que $x_i + x_j \geq 0$. Si a ello añadimos que por hipótesis $x_i + x_j \geq v(ij)$ deduciremos que $x_i + x_j \geq \max\{0, v(ij)\} = \overline{v}(ij)$. Por tanto concluimos que $\vec{x} \in C(\overline{v})$.

$C(\overline{v}) \subseteq C(v)$.- Este caso es inmediato dado que $x_i + x_j \geq \overline{v}(ij) \geq v(ij) \forall i,j \in N$ y $x_i \geq \overline{v}(i) \geq 0 = v(i)$.

□

Entonces aplicaremos el mismo razonamiento para demostrar la coincidencia entre los nucleolus de los dos juegos.

Teorema 4.15 *Sea (N, v) un juego cero-normalizado de tres jugadores con Núcleo no vacío. Entonces,*

$$\eta(v) = \eta(\overline{v})$$

donde $\overline{v}(S) = \max\{0, v(N) - \sum_{i \in N \setminus S} b_i^v\}$.

DEM.

Dado que los Núcleos de ambos juegos coinciden (Proposición **4.14**), también coincidirá la parte del Kernel que intersecta con el Núcleo, i.e.

$$\mathcal{K}(\overline{v}) \cap C(\overline{v}) = \mathcal{K}(v) \cap C(v). \tag{4.16}$$

Recuérdese además que en el capítulo **3** hemos demostrado que para todo juego de tres jugadores equilibrado el Núcleo y el conjunto de negociación coinciden. Si a ello unimos que el Kernel siempre es un subconjunto del conjunto de negociación, deduciremos que también lo será del Núcleo y, por tanto, la ecuación (4.16) se puede reescribir como

$$\mathcal{K}(\overline{v}) = \mathcal{K}(v).$$

Dado que el único elemento del Kernel de $\overline{v}$ coincide con su nucleolus, éste será también el único elemento del Kernel de v y por tanto su nucleolus. □

El cálculo del nucleolus del juego $\overline{v}$ es bien conocido dado que es un juego de bancarrota lo que nos facilitará el cálculo del juego v. El siguiente ejemplo nos muestra cómo aplicar el anterior Teorema.

Ejemplo 4.16 *Sea el siguiente juego cooperativo de tres jugadores:*

$$v(1) = 1;\;\; v(2) = 1;\;\; v(3) = 0;\;\; v(12) = 3;\;\; v(13) = 2;\;\; v(23) = 3;\;\; v(123) = 8.$$

Si cero-normalizamos[8] *el juego tenemos que :*

$$\tilde{v}(1) = 0;\;\; \tilde{v}(2) = 0;\;\; \tilde{v}(3) = 0;\;\; \tilde{v}(12) = 1;\;\; \tilde{v}(13) = 1;\;\; \tilde{v}(23) = 2;\;\; \tilde{v}(123) = 6,$$

donde las contribuciones marginales son $(b_1^{\tilde{v}}, b_2^{\tilde{v}}, b_3^{\tilde{v}}) = (4, 5, 5)$.

Ahora, aplicaremos la regla CGCDR: intentamos pagar a los jugadores de manera igualitaria hasta que se alcanza para todos el pago $\frac{1}{2} \cdot b_1^{\tilde{v}} = \frac{1}{2} \cdot 2$. *En este caso, se ha podido pagar dicha cantidad a todos los jugadores dado que no supera el valor de* $\tilde{v}(N) = 6$*; sin embargo el proceso ha terminado dado que se ha agotado toda la cantidad que podíamos repartir. Por tanto,*

$$\eta(\tilde{v}) = (2,\, 2,\, 2).$$

Como el nucleolus es invariante bajo transformaciones S-equivalentes[9]*, desnormalizamos* $\eta(\tilde{v})$ *y obtenemos el nucleolus del juego original.*

$$\eta(v) = (3,\, 3,\, 2).$$

El análisis realizado generaliza el establecido por Aumann y Maschler respecto a los juegos de Bancarrota. En general, es un problema abierto establecer la coincidencia del Kernel y el nucleolus para el caso de los juegos financieros. A la vista del ejemplo **4.16** , otro problema interesante a estudiar es analizar bajo qué condiciones es posible asociar a un juego v un juego de Bancarrota de manera que ambos juegos tengan el mismo nucleolus.

4.2.3 El nucleolus proporcional

El concepto básico que define el nucleolus de un juego cooperativo es el exceso de una coalición que expresa cuál ha sido el pago a la coalición en relación a lo que ésta se podría garantizar en el juego, es decir, el valor de la función característica. Si el exceso para una coalición S_1, $v(S_1) - x(S_1)$, es mayor que para otra coalición S_2, $v(S_2) - x(S_2)$, ello indica que los miembros de la coalición S_1 están peor pagados

[8] El juego normalizado $\tilde{v}$ está definido como $\tilde{v}(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$.

[9] Una solución Φ es invariante bajo transformaciones S-equivalentes si $\Phi(\lambda \cdot v + d) = \lambda \cdot \Phi(v) + d$;$\lambda \in \mathbf{R}_{++}$; $d \in \mathbf{R}^n$.

que los de la coalición S_2. Sin embargo, esta comparación no tiene en cuenta si son muchos o pocos los miembros de las coaliciones S_1 y S_2, es decir sólo se considera el valor de los excesos de las coaliciones pero no a qué coaliciones se refieren dichos excesos.

Para evitar este incoveniente, se debe considerar el denominado exceso per cápita donde se pondera el exceso por el número de jugadores de la coalición (Ver el *Handbook of Game Theory* vol I pág 626-6 27 [3]).

$$e_c(S,\vec{x}) = \frac{v(S) - x(S)}{|S|}$$

donde $|S|$ indica la cardinalidad de la coalición S. Con esta modificación de los excesos se define el nucleolus por cápita que es aquella distribución que minimiza los excesos per cápita.

Sin embargo, para el caso de los juegos financieros parece más conveniente definir un nucleolus basado en los excesos ponderados por los recursos de las coaliciones (excesos proporcionales) , i.e.

$$e_{p,\vec{C}}(S,\vec{x}) = \frac{v(S) - x(S)}{\sum_{i\in S} C_i}.$$

El vector de excesos proporcionales se formaría de idéntica manera al caso del nucleolus, pero a partir de los excesos proporcionales. Para decidir qué distribución es preferida entre dos cualesquiera, utilizaríamos también el mismo criterio de comparación (orden lexicográfico de los vectores de excesos)

A partir de aquí definimos el nucleolus proporcional $\eta^{p,\vec{C}}$ como la mejor distribución (imputación) teniendo en cuenta como criterio de comparación el del orden lexicográfico de los vectores de excesos proporcionales[10].

Puede parecer en principio que el nucleolus proporcional siempre coincide con la distribución proporcional. Sin embargo, ello no es cierto si pensamos en un juego de dos jugadores; por ejemplo, tomemos el juego financiero respecto al vector $(10, 20)$ cuya función característica es:

$$v(12) = 33;\ v(2) = 22;\ v(1) = 10.$$

Dada una imputación $(x_1,\ x_2)$, los excesos propocionales son $e(\{1\},\vec{x}) = \frac{10-x_1}{10}$ y

[10]Para una definición similar de los excesos y del nucleolus proporcional ver el artíclulo de Lemaire [27].

$e(\{2\}, \vec{x}) = \frac{22-x_2}{20}$ que igualados dan lugar a la distribución $(x_1,\ x_2) = (10.33,\ 22.67)$ y que no corresponde con la distribución proporcional.

El cálculo para juegos de mayor número de jugadores tampoco está en general relacionado con la distribución proporcional. Sea, por ejemplo, el siguiente juego financiero de tres jugadores respecto al vector $(10, 10, 30)$:

$$v(1) = v(2) = 0;\ v(3) = 30;\ v(12) = 10;\ v(13) = v(23) = 44;\ v(123) = 55$$

En este juego los jugadores 1 y 2 aportan los mismos recursos; es fácil demostrar que el pago que recibirán según el nucleolus proporcional deberá ser el mismo. De esta manera el nucleolus proporcional adoptará la forma $\vec{x}(a) = (a,\ a,\ 55-2a)$ donde $0 \leq a \leq 12.5$. En este caso podemos recurrir a un método gráfico de cálculo para seleccionar el valor de a óptimo que minimize los máximos excesos proporcionales. Los excesos proporcionales para cada coalición serán en definitiva una función lineal de a $[e(S,\ \vec{x}(a))]$; por ejemplo para $S = \{1\}$, $e(\{1\},\ \vec{x}(a)) = \frac{0-a}{10}$. En la siguiente gráfica se representan los diferentes excesos en función de a

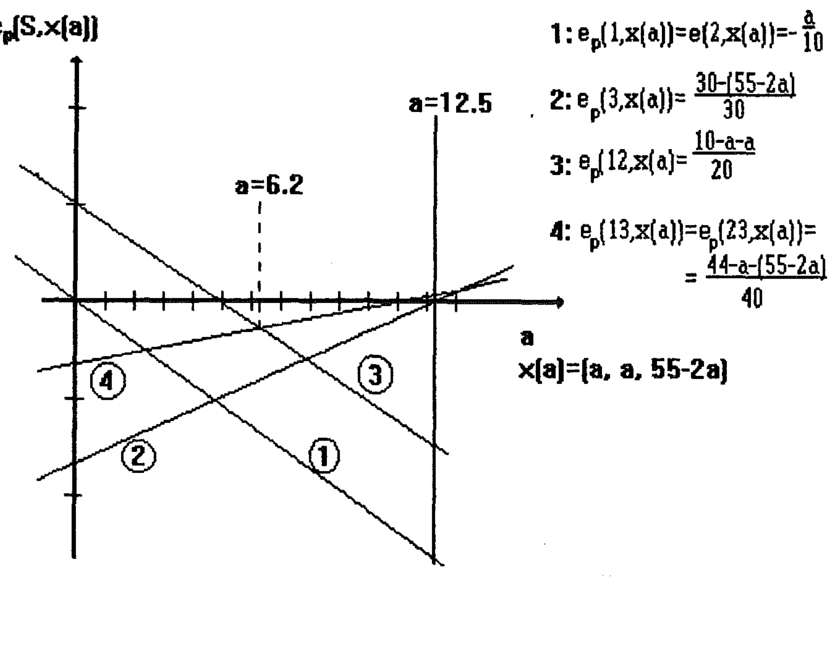


Figura 4.1: Cálculo gráfico del nucleolus proporcional.

Minimizar el máximo exceso proporcional se consigue para el valor $a = 6.2$ con lo que el nucleolus proporcional es $\eta^{p,\vec{C}}(v) = (6.2, 6.2, 42.6)$ que no coincide con la distribución proporcional. La siguiente proposición nos muestra cuándo podemos esperar que el nucleolus proporcional coincida con la distribución proporcional.

Proposición 4.17 *Sea (N,v) un juego financiero respecto a $\vec{C}$. Entonces, si $\frac{v(N\backslash i)}{C(N\backslash i)} = \frac{v(N\backslash j)}{C(N\backslash j)}$ $\forall\, i,j \in N$, el nucleolus proporcional coincide con la distribución proporcional.*

DEM.

Para la distribución proporcional $p(v;\, \vec{C})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{v(N\setminus i) - \sum_{r\in N\setminus i} p_r(v;\, \vec{C})}{C(N\setminus i)} &= \frac{v(N\setminus i)}{C(N\setminus i)} - \frac{\sum_{r\in N\setminus i} p_r(v;\, \vec{C})}{C(N\setminus i)} = \\ &= \frac{v(N\setminus j)}{C(N\setminus j)} - \frac{\sum_{r\in N\setminus j} p_r(v;\, \vec{C})}{C(N\setminus j)} = \\ &= \frac{v(N\setminus j) - \sum_{r\in N\setminus j} p_r(v;\, \vec{C})}{C(N\setminus j)}\end{aligned}$$

$\forall\, i,j \in N$, y

$$\frac{v(N\setminus i) - \sum_{r\in N\setminus i} p_r(v;\, \vec{C})}{C(N\setminus i)} = \frac{v(N\setminus i)}{C(N\setminus i)} - \frac{\sum_{r\in N\setminus i} p_r(v;\, \vec{C})}{C(N\setminus i)} \geq^{11}$$

$$\geq \frac{v(S)}{C(S)} - \frac{\sum_{r\in S} p_r(v;\, \vec{C})}{C(S)} = \frac{v(S) - \sum_{r\in S} p_r(v;\, \vec{C})}{C(S)}$$

$\forall\, i \in N$ y $\forall\, S \subseteq N$.

Teniendo en cuenta esta desigualdad, los mayores excesos proporcionales serán los correspondientes a los excesos de las coaliciones de $n-1$ jugadores, i.e., $\frac{v(N\backslash i) - \sum_{i\in S} p_i(v;\,\vec{C})}{C(N\backslash i)}$. Ahora demostraremos que si consideramos otra distribución existirá un exceso correspondiente a una coalición que superará los anteriores valores y que, por tanto, hará menos preferida a dicha distribución respecto a la proporcional. En efecto sea $\vec{y}$ otra distribución diferente a la proporcional; entonces tenemos que para algún jugador k se verifica que $y_k > p_k$ y por tanto, $y(N\setminus k) < \sum_{r\in N\setminus k} p(v;\, \vec{C})$. De aquí tenemos que

[11] Nótese que $\frac{v(N\backslash i)}{C(N\backslash i)} \geq \frac{v(S)}{C(S)}$ $\forall S \subset N\setminus i$ por definición de juego financiero y, $\frac{\sum_{r\in S} p_r(v;\,\vec{C})}{C(S)} = \mathbf{f}_S$ $\forall S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$.

$$\frac{v(N \setminus k) - y(N \setminus k)}{C(N \setminus k)} = \frac{v(N \setminus k)}{C(N \setminus k)} - \frac{y(N \setminus k)}{C(N \setminus k)} >$$

$$> \frac{v(N \setminus k)}{C(N \setminus k)} - \frac{\sum_{r \in N \setminus k} p(v; \vec{C})}{C(N \setminus k)} = \frac{v(N \setminus k) - \sum_{r \in N \setminus k} p(v; \vec{C})}{C(N \setminus k)}.$$

Dado que $\frac{v(N \setminus k) - \sum_{r \in N \setminus k} p(v; \vec{C})}{C(N \setminus k)}$ era el máximo exceso para la distribución proporcional, la distribución $\vec{y}$ será peor dado que existe una coalición $(N \setminus k)$ con exceso aún mayor.

□

4.3 El valor de τ

Otra de las soluciones puntuales más importante y reciente es el valor de τ ("$\tau -$ *value*"). Esta solución fue introducida por S.H. Tijs [58] y se caracteriza por ser una solución de compromiso o intermedia entre una cota superior y una cota inferior del pago que los jugadores pueden recibir.

Sea un juego (N, v), la cota superior (M^v) se compone de las contribuciones marginales de cada jugador y representa lo máximo a que cada jugador puede aspirar en el juego; por eso a esta cota superior se la denomina vector de "utopía".

$$M^v \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

En los juegos financieros esta cota es realmente efectiva dado que como vimos en el capítulo segundo, siempre podemos encontrar una distribución en el Núcleo del juego que asigne a un jugador su contribución marginal (Lema **2.16**).

La cota inferior (m^v) se compone de los pagos mínimos que cada jugador se puede asegurar en el juego: si un jugador i pertenece a una coalición S, puede garantizarse como pago lo que resta después de pagar a sus compañeros de coalición lo máximo a que éstos pueden aspirar, es decir su contribución marginal. A esta cota inferior la denominaremos vector de "mínimos derechos".

$$m^v \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } m_i^v = \max_{\emptyset \subseteq S \subseteq N \setminus \{i\}} \left\{ v(S \cup \{i\}) - \sum_{j \in S} M_j^v \right\}.$$

Para que el valor de τ pueda ser calculado se necesita que

i) $\sum_{i\in N} m_i^v \leq v(N) \leq \sum_{i\in N} M_i^v$;

ii) $m_i^v \leq M_i^v \ \forall i \in N$.

es decir que el vector de mínimos derechos y el de utopía representen realmente una cota inferior y superior. Los juegos que verifican estos dos requisitos se denominan cuasiequilibrados; dentro de esta clase de juegos se incluyen los juegos equilibrados. Los juegos financieros al ser totalmente equilibrados verifican las dos condiciones (i) e (ii) por lo que es posible definir el valor de τ.

El valor de τ se define entonces como la única distribución eficiente que se halla en el segmento que une la cota superior e inferior anteriormente definidas

$$\tau(v) = (1-\lambda)\cdot m^v + \lambda \cdot M^v$$

donde $\lambda = \frac{v(N)-\sum_{i\in N} m_i^v}{\sum_{i\in N} M_i^v - \sum_{i\in N} m_i^v}$.

De la definición del valor de τ se desprende que sólo otorgará a los jugadores un pago igual al vector de utopía cuando éste sea eficiente; para el caso de los juegos financieros, es inmediato deducir a partir del Teorema **2.9** que esto sólo sucederá cuando

$$\frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} = \frac{v(N\setminus\{j\})}{\sum_{i\in N\setminus\{j\}} C_i} \ \forall j \in N.$$

En ese caso el $\tau(v)$ coincidirá con el Núcleo del juego. En general, la pertenencia del valor de τ al Núcleo de los juegos financieros constituye un problema abierto que todavía está sin solucionar.

Al igual que hemos realizado para el nucleolus, analizaremos el caso particular expresado por la condición (4.15). Para su estudio definiremos el juego $(N,\overline{v})$ como

$$\overline{v}(S) = \max\left\{0,\, v(N) - \sum_{i\in N\setminus S} M_i^v\right\} \quad S \subseteq N. \tag{4.17}$$

Del anterior juego se puede afirmar:

- teniendo en cuenta (4.15) se deduce que $\overline{v}(S) \geq v(S)$;
- dado que $v(N\setminus i) \geq 0$ (v es un juego financiero).

$$M_i^{\overline{v}} = \overline{v}(N) - \overline{v}(N\setminus i) = v(N) - \max\{0, v(N) - M_i^v\} = M_i^v. \tag{4.18}$$

De los dos puntos anteriores obtenemos que

$$m_i^{\overline{v}} = \max_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \left\{ \overline{v}(S\cup\{i\}) - \sum_{j\in S} M_j^{\overline{v}} \right\} \geq \max_{S\subset N\setminus\{i\}} \left\{ v(S\cup\{i\}) - \sum_{j\in S} M_j^{v} \right\} = m_i^v. \tag{4.19}$$

A partir de aquí podemos enunciar la siguiente proposición que nos facilitará el cálculo del valor de τ para este tipo de juegos.

Proposición 4.18 *Sea (N, v) un juego financiero que verifica la condición (4.15) y $\overline{v}$ el juego definido según la expresión (4.17). Entonces,*

$$\tau(\overline{v}) = \tau(v) \in C(v).$$

DEM.

Por definición del juego $\overline{v}$ se verifica que $\overline{v}(N) = v(N)$; además, por (4.18), las cotas superiores de los juegos v y $\overline{v}$ coinciden, i.e. $M_i^v = M_i^{\overline{v}}$. Por tanto, simplemente queda por verificar que la cota inferior de ambos juegos coincide. Por (4.19), sabemos que $m_i^{\overline{v}} \geq m_i^v$. Dado que el juego $\overline{v}$ es un juego de bancarrota, es también un juego convexo; Driessen ([13] págs. 129-131) demuestra que la cota inferior para un jugador en un juego convexo coincide con el valor de la función característica para dicho jugador. Por tanto, deducimos que

$$m_i^{\overline{v}} = \overline{v}(i) = \max\{0, v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} M_j^{\overline{v}}\} = \max\{0, v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} M_j^v\}.$$

Combinando esta igualdad con la desigualdad (4.19), obtenemos que

$$\max\{0, v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} M_j^v\} \geq m_i^v.$$

Pero por la definición de m_i^v y dado que los juegos financieros son positivos,

$$m_i^v \geq \max\{v(i), v(N) - \sum_{j\in N\setminus i} M_j^v\} \geq \max\{0, v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} M_j^v\}.$$

De las dos últimas desigualdades deducimos que

$$\max\{0, v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} M_j^v\} = m_i^v.$$

Concluyendo, y dado que las cotas inferior y superior coinciden y $v(N) = \overline{v}(N)$, los valores de τ de ambos juegos coinciden.

Por otra parte, como ya hemos discutido para el caso del Nucleolus, el juego $\overline{v}$ es un juego de Bancarrota y por tanto, el valor de τ de $\overline{v}$ siempre pertenecerá a su Núcleo. Dado que, por la proposición **2.13**, los Núcleos del juego v y del juego $\overline{v}$ coinciden, el valor de τ de v pertenecerá al Núcleo de v. □

La anterior proposición, nos permite obtener el valor de τ de un juego financiero que verifica la condición (4.15) a partir de un juego de bancarrota donde $\mathbf{E} = v(N)$ y $d_i = M_i^v$. En el libro de Driessen [13], pág. 160, se facilita una fórmula para el cálculo del valor de τ para un juego de Bancarrota que es la siguiente:

$$\tau_i(v) := \begin{cases} m_i^v & \text{si } v(N) = \sum_{i\in N} m_i^v \\ m_i^v + [v(N) - \sum_{i\in N} m_i^v] \cdot [\sum_{i\in N} M_i^*]^{-1} \cdot M_i^* & \text{si } v(N) > \sum_{i\in N} m_i^v \end{cases}$$

donde $M_i^* = \min\{M_i^v - m_i^v, v(N) - \sum_{i\in N} m_i^v\}$ y $m_i^v = v(i) \quad \forall i \in N$.

Obsérvese que el valor de τ concede a cada jugador el mínimo exigido m_i^v, y lo que queda por distribuir hasta cumplir la eficiencia se distribuye proporcionalmente a los factores M_i^*; dichos factores indican la cantidad máxima exigible por cada jugador una vez recibido el pago m_i^v.

La principal crítica desde el punto de vista de los juegos financieros se centra en que no tienen en cuenta los recursos invertidos por cada jugador. En el siguiente ejemplo, se puede ver con claridad este punto.

Ejemplo 4.19 *Sea el siguiente juego financiero respecto al vector* (100, 200, 250)

$$v(1) = 10; \;\; v(2) = 20; \;\; v(3) = 25; \;\; v(12) = 33;$$

$$v(13) = 38.5; \;\; v(23) = 49.5; \;\; v(123) = 66.$$

El valor de τ de este juego es (13.25, 23.75, 29). Si expresamos estos pagos en tanto por ciento de los recursos invertidos obtendremos

$$\tau(v) = (13.25\%, 11.88\%, 11.6\%)$$

es decir, los jugadores con menores recursos son recompensados con un mayor pago porcentual. Evidentemente, esto no parece ser lo más correcto. El problema radica en que las cotas superiores e inferiores no tienen en cuenta tampoco los valores porcentuales; en el ejemplo anterior las cotas superiores eran en términos relativos (16.5%, 13.8%, 13.2%) siendo la de los jugadores 1 y 2 mayor que la del 3. La solución a este problema pasaría por una modificación de las cotas superiores e inferiores de manera que el pago final sea creciente en términos porcentuales respecto a los recursos invertidos; para concluir el capítulo propondremos a modo de ejemplo una posible variante de estas cotas.

Si la contribución marginal (M_i^v) definía lo máximo a que los jugadores pueden aspirar tendremos que matizar que en ningún caso podrá suceder que en términos medios dicho máximo supere al de otro jugador con mayores recursos. En efecto, si ordenamos los jugadores de menor a mayor según la cantidad de recursos que aportan, i.e.

$$i < j \Rightarrow C_i \leq C_j$$

definiremos la nueva cota superior $\overline{M}^v \in \mathbf{R}^n$ como

$$\overline{M}_i^v = \min\{v(N) - v(N \setminus i),\ C_i \cdot \frac{\overline{M}_{i+1}^v}{C_{i+1}}\} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

donde $\overline{M}_n^v = v(N) - v(N \setminus n)$.

Obsérvese que las nuevas cotas superiores se calculan de forma recurrente a partir de la del jugador n, es decir, la del jugador con mayores recursos; para este jugador la cota coincide con su contribución marginal. Para el jugador i-ésimo, $\overline{M}_i^v$ resulta ser el mínimo de su contribución marginal o de aquella cantidad que, en términos medios, es igual a la cota del jugador $i+1$ $(C_i \cdot \frac{\overline{M}_{i+1}^v}{C_{i+1}}\})$.

La nueva cota superior está bien definida dado que, en un juego financiero, siempre se cumple que

$$M_i^v = v(N) - v(N \setminus \{i\}) = \textstyle\sum_{i \in N} C_i \cdot \mathbf{f}_N - \sum_{i \in N\setminus\{i\}} C_i \cdot \mathbf{f}_{N\setminus\{i\}} \geq$$

$$\geq \textstyle\sum_{i \in N} C_i \cdot \mathbf{f}_N - \sum_{i \in N\setminus\{i\}} C_i \cdot \mathbf{f}_N = C_i \cdot \mathbf{f}_N$$

donde $\mathbf{f}_S = \frac{v(S)}{C(S)}$ $S \subset N$. De aquí se deduce que $\overline{M}_i^v \geq C_i \cdot \mathbf{f}_N$ y por tanto, $\sum_{i \in N} \overline{M}_i^v \geq v(N)$.

La cota inferior será modificada de tal manera que, en términos medios, ningún jugador con menos recursos que otro tenga una cota inferior media mayor. Así redefinimos la cota inferior $\overline{m}^v \in \mathbf{R}^n$ como

$$\overline{m}_i^v = \max\left\{\max_{\emptyset\subseteq S\subseteq N\setminus\{i\}}\left\{v(S\cup\{i\}) - \sum_{j\in S}\overline{M}_j^v\right\}; C_i\cdot\frac{\overline{m}_{i-1}^v}{C_{i-1}}\right\} \quad i=2,\ldots,n$$

donde $\overline{m}_1^v = \max_{\emptyset\subseteq S\subseteq N\setminus\{1\}}\left\{v(S\cup\{1\}) - \sum_{j\in S}\overline{M}_j^v\right\}$.

Al igual que para las cotas superiores, las cotas inferiores se calculan de manera recurrente partiendo en este caso de la cota para el primer jugador (el de menos recursos); para este jugador, la cota inferior es idéntica a la definida para el valor de τ sólo que calculada a partir de las nuevas cotas superiores. Para el jugador i-ésimo, la cota inferior resulta ser el máximo entre la cota inferior clásica pero calculada a partir de las nuevas cotas superiores, y aquella cantidad que en términos medios es igual a la nueva cota inferior del jugador $i-1$, i.e., $C_i \cdot \frac{\overline{m}_{i-1}^v}{C_{i-1}}$. La nueva cota inferior está bien definida dado que $\frac{\overline{m}_i^v}{C_i} \leq \frac{v(N)}{C(N)} = \mathbf{f}_N$. Esta desigualdad es inmediata a partir de la definición de $\overline{m}_i^v$ y de la relación $\frac{v(S\cup\{i\})-\sum_{i\in S}\overline{M}_i^v}{C_i} \leq \mathbf{f}_N$. Esta última desigualdad es fácil de deducir si tenemos en cuenta que $\sum_{i\in S}\overline{M}_i^v \geq \sum_{i\in S} C_i\cdot\mathbf{f}_N$ y que $v(S\cup\{i\}) \leq \sum_{i\in S\cup\{i\}} C_i\cdot\mathbf{f}_N$. Teniendo en cuenta lo anterior, se cumplirá que $\sum_{i\in N}\overline{m}_i^v = v(N)$ y que $\overline{M}_i^v \geq \overline{m}_i^v$ para todo jugador i de N.

A partir de las nuevas cotas, será posible definir un nuevo valor de compromiso que podríamos denominar como el valor de τ proporcional $\tau_p(v)$.

El nuevo valor asignará a cada jugador un pago medio que es creciente respecto a los recursos aportados. En efecto, si $C_i \leq C_j$ tendremos que $\frac{\overline{m}_i^v}{C_i} \leq \frac{\overline{m}_j^v}{C_j}$ y $\frac{\overline{M}_i^v}{C_i} \leq \frac{\overline{M}_j^v}{C_j}$ y por tanto

$$\frac{(1-\lambda)\cdot\overline{m}_i^v + \lambda\cdot\overline{M}_i^v}{C_i} \leq \frac{(1-\lambda)\cdot\overline{m}_j^v + \lambda\cdot\overline{M}_j^v}{C_j} \quad \lambda\in[0,1]$$

Siguiendo con el ejemplo **4.19**, la cota superior modificada sería ahora

$$\overline{M}^v = (13.2,\ 26.4,\ 33),$$

o en términos relativos respecto a los recursos $\overline{M}^v = (13.2\%,\ 13.2\%,\ 13.2\%)$; a partir de la anterior cota calcularíamos la cota inferior modificada: $\overline{m}^v = (10,\ 20,\ 26.4)$ o $(10\%,\ 10\%,\ 10.56\%)$. Finalmente el valor de τ proporcional sería

$$\tau_p(v) = (11.89,\ 23.79,\ 30.31) \text{ o } (11.9\%,\ 11.9\%,\ 12.12\%)$$

Tercera parte

Soluciones específicas

La soluciones clásicas (valor de Shapley, nucleolus, valor de τ), a pesar de su amplia aceptación dentro de la Teoría de Juegos, pueden resultar poco apropiadas para su aplicación a los juegos financieros. El principal problema es que para la Teoría de Juegos cooperativos el punto de partida lo constituye la función característica del Juego; en ella se condensa el resultado de la cooperación, pero obvia el grado en que ésta se ha producido por parte de los jugadores. Para los juegos financieros, este grado viene representado por los recursos asociados a las coaliciones. El nucleolus proporcional, el valor de τ proprocional (definido anteriormente) y el valor de Shapley proporcional son modificaciones de las originales definiciones que intentan paliar este problema.

Una solución, que no tiene su origen en la Teoría de Juegos pero ampliamente aceptada, es la distribución proporcional respecto a los recursos. Esta solución representa la aproximación más simple a la valoración de la aportación de los jugadores; otras valoraciones pueden proporcionar otras soluciones proporcionales a dichas valoraciones. En esta última parte de la Tesis nos dedicaremos al estudio de soluciones específicas para los juegos financieros que se adaptan a las características especiales del modelo estudiado. El considerar soluciones que tengan en cuenta la aportación de los jugadores ya plantea una diferencia sustancial respecto a las soluciones clásicas: si en estas últimas la solución Φ se aplicaba sobre un juego cooperativo v, en las primeras habremos de considerar además explícitamente el vector de recursos $\vec{C}$. Por tanto, la solución se aplicará a un par $(v; \vec{C})$ que conjuntamente constituirá lo que denominaremos el "*problema financiero*"; de esta forma, una solución al problema financiero la notaremos como $\Phi(v; \vec{C})$.

En el capítulo **5** estudiaremos la familia de distribuciones proporcionales y entre ellas la distribución proporcional a los recursos y el "valor del juego financiero".

Capítulo 5

La Familia de soluciones proporcionales

Toda distribución $\vec{x}$ del valor de la coalición total $v(N)$ se puede interpretar como un reparto proporcional respecto a unos ciertos factores $\gamma_i \geq 0$, i.e.

$$x_i = \frac{\gamma_i}{\sum_{k \in N} \gamma_k} \cdot v(N) \; \forall i \in N.$$

Estos factores pueden responder a una valoración más o menos objetiva de la aportación de los jugadores, o simplemente, al resultado de la negociación. Cuando nos enfrentamos al problema de los juegos financieros, parece obligado ligar el valor de estos factores a los recursos aportados por los jugadores (C_i). De esta manera podemos expresar los factores γ_i como $\gamma_i = C_i \cdot \omega_i$ y la familia de distribuciones proporcionales como

$$\Phi_i^n(v; \vec{C}) = \frac{C_i \cdot \omega_i}{\sum_{k \in N} C_k \cdot \omega_k} \cdot v(N) \; \forall i \in N \tag{5.1}$$

donde $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ es la valoración relativa[1] de cada unidad de recurso aportada por el jugador i. Podemos normalizar estos valores exigiendo que $\sum_{i \in N}(C_i \cdot \omega_i) = v(N)$; en este caso el factor ω_i representará además el pago medio otorgado por la solución al jugador i.

Como ya hemos dicho, a partir de la fórmula de una distribución proporcional (5.1) es posible generar cualquier distribución simplemente haciendo variar los valores ω_i, estando fijos los recursos C_i. Dado que ω_i representa la valoración que se hace en el reparto de los recursos en poder del jugador i, parece adecuado establecer una serie de restricciones en los posibles valores que pueda tomar:

[1] Lo importante es el valor de ω_i en relación al resto de valores ω_j, $j \in N$ $j \neq i$.

- Si $C_i = C_j$ parece lógico establecer que $\omega_i = \omega_j$; no resultaría razonable un reparto donde dos jugadores con idénticos recursos recibieran diferentes pagos. Esta propiedad es la que denominaremos simetría respecto a recursos y que denotaremos por **SR**.

- Parece lógico también exigir que la aportación de mayores recursos sea premiada con un mayor pago unitario, i.e.

$$C_i < C_j \Rightarrow \frac{\Phi_i^n(v;\vec{C})}{C_i} \leq \frac{\Phi_j^n(v;\vec{C})}{C_j} \quad i,j \in N.$$

  Si tenemos en cuenta que

$$\frac{\Phi_i^n(v;\vec{C})}{C_i} = \omega_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{k\in N} C_k \cdot \omega_k} \; \forall i \in N;$$

  la anterior condición se puede reescribir como

$$\text{si } C_i < C_j \Rightarrow \omega_i \leq \omega_j \;\; i,j \in N. \tag{5.2}$$

  Toda solución que verifique esta condición diremos que es creciente en valores medios (**CVm**) .

- Si el pago que recibe un jugador viene influido por la cantidad de recursos que ha aportado, no parece demasiado difícil imaginar que un jugador pueda especular con la posibilidad de desdoblarse, simplemente repartiendo sus recursos entre dos o más jugadores ficticios con el objetivo de obtener un pago superior. Dada una solución al juego, una buena propiedad que se le puede exigir es que sea inmune a este tipo de manipulaciones unilaterales por parte de los jugadores. De aquí se define la propiedad de juego no manipulable respecto a los recursos (**NMR**).

  Para formalizar esta propiedad es necesario generalizar el concepto de solución de un juego.

Definición 5.1 *Sea $\Omega^n \subset \mathcal{FG}^n \times \mathbf{R}^n_{++}$ el conjunto de pares $(v;\vec{C})$ donde v es un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$. Una solución al problema financiero de n jugadores es una función $\Phi^n : \Omega^n \to \mathbf{R}^n$ que asigna a cada par constituido por el juego v y el vector $\vec{C}$ respecto al cual el juego es financiero un vector de n componentes. Una solución para el conjunto de problemas financieros la denotaremos como $\Phi = (\Phi^n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

Apoyándonos en la anterior definición enunciaremos la propiedad de no manipulabilidad respecto a los recursos. Esta propiedad sólo tendrá sentido cuando consideremos juegos financieros cuya función generadora verifique la siguiente condición:

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y} \;\; \forall\, x,\, y > 0, \;\; \text{tal que } x < y \quad \text{siendo } f(0) = 0. \tag{5.3}$$

Así de esta manera, cuando un jugador decida desdoblarse será posible calcular los beneficios o pérdidas fruto de esta manipulación (la función está fija) y el juego resultante (que tendrá un mayor número de jugadores y un vector diferente de recursos) continuará siendo financiero.

A partir de ahora denotaremos como $\mathcal{FG}_f^n$ al conjunto de juegos financieros de n jugadores generados por una determinada función f continua que verifica (5.3); de la misma manera, definiremos Ω_f^n como el conjunto de pares $(v, \vec{C})$ donde $v \in \mathcal{FG}_f^n$ y $\vec{C}$ es el vector asociado. Por extensión definiremos a $\mathcal{FG}_f$ como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{FG}_f^n$ y a Ω_f como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_f^n$.

Observación 5.2 *Si $(v; \vec{C}) \in \Omega_f$ ello quiere decir que*

$$v(S) = \max\{0, f(\sum_{i\in S} C_i)\} \quad S \subset N$$

El juego así generado será financiero dado que f verifica (5.3).

Definición 5.3 *Sea $\Phi = (\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una solución definida en Ω_f. Φ es no manipulable respecto a los recursos si y sólo si para todo $n \geq 1$, para todo problema financiero $(v;\, \vec{C}) \in \Omega_f^n$ y para todo jugador $i \in N$ se cumple que*

$$\Phi_i^n(v; \vec{C}) = \sum_{k=1}^{m} \Phi_{i_k}^{n-1+m}(v'; (\vec{C}^{N\setminus i}, C_{i_1}, \ldots, C_{i_m}))$$

donde $\vec{C}^{N\setminus i}$ representa el vector $\vec{C}$ restringido a las componentes de los jugadores de $N \setminus i$, $C_i = \sum_{k=1}^{m} C_{i_k}$ y $(v'; (\vec{C}^{N\setminus i}, C_{i_1}, \ldots, C_{i_m})) \in \Omega_f^{n-1+m}$.

La anterior propiedad nos indica que el pago que obtendría un jugador i en el juego v donde este jugador se considera como un único agente y el pago que obtendría cuando la solución se aplica al juego v' donde el jugador se presenta fraccionado (conjunto de jugadores de $\{i_1, \ldots, i_m\}$) es el mismo.

Si interpretamos la solución dentro del conjunto de distribuciones proporcionales tendremos que, dada una solución, la no manipulabilidad equivale a exigir que si aplicamos la solución en el juego donde el jugador no se ha desdoblado, i.e.

$$\Phi_r^n(v; \vec{C}) = \frac{C_r \cdot \omega_r}{\sum_{p \in N} C_p \cdot \omega_p} \cdot v(N) \; \forall r \in N$$

y lo comparamos con la aplicación de la solución al caso en que el jugador se ha desdoblado, i.e.

$$\Phi^{n-1+m}(v'; (\vec{C}^{N \setminus i}, C_{i_1}, \ldots, C_{i_m})) = \frac{C_r \cdot \omega'_r}{\sum_{p \in N'} C_p \cdot \omega'_p} \cdot v(N') \; \forall r \in N';$$

donde $N' = \{N \setminus i, i_1, \ldots, i - m\}$, se cumple que

$$\omega_i \cdot C_i = \sum_{k=1}^{m} \omega'_k \cdot C_{i_k}$$

donde los pesos ω_r y ω'_r han sido normalizados de manera que $\sum_{r \in N} \omega_r \cdot C_r = v(N)$ y $\sum_{r \in N'} \omega'_r \cdot C_r = v(N')$.

Esta propiedad ha sido ampliamente utilizada para estudiar la solución proporcional en los juegos de Bancarrota : M.A de Frutos utiliza las propiedades "Non-advantageous splitting" (**NAS**) y "Non-advantageous joining" (**NAJ**) que indican que los jugadores no obtendrán ningún beneficio de dividirse o juntarse; O'Neil [40] y Chun [9] definen una propiedad equivalente denominada "Strategy-proofness" que es utilizada para caracterizar la solución proporcional en los juegos de Bancarrota.

- La racionalidad individual(**IR**), $\Phi_i^n(v; \vec{C}) \geq v(i) \; \forall i \in N$ es otra exigencia indiscutible para toda distribución. Si la solución se interpreta dentro de la familia de distribuciones proporcionales se deberá cumplir que $\omega_i \geq \frac{v(i)}{C_i} \; \forall i \in N$.

- Finalmente, una consecuencia de la definición de la familia de distribuciones proporcionales es la eficiencia que denotaremos por **EF** . Recordemos que una solución $(\Phi^n)_{n \in \mathbf{N}}$ es eficiente si

$$\sum_{i \in N} \Phi_i^n(v; \vec{C}) = v(N) \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Este conjunto de propiedades restringen el conjunto de posibles soluciones proporcionales para un juego financiero. Vamos a ver a continuación qué papel juegan en la distribución proporcional a los recursos.

5.1 La distribución proporcional

Como ya hemos mencionado anteriormente, la distribución proporcional a los recursos se consigue asignando una valoración por unidad de recurso igual para todos los jugadores, i.e. $\omega_i = \omega_j \ \forall i, j \in N$

Definición 5.4 *Sea* $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ *y* $C_1, \ldots, C_n$ *los recursos asociados a los jugadores, definiremos el pago proporcional* $p(v; \vec{C}) \in \mathbf{R}^n$ *como*

$$p_i(v, \vec{C}) = \left(\frac{C_i}{C(N)} \cdot v(N) \right)_{i=1,\ldots,n}$$

En general, la solución $(\Phi^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *coincidirá con la solución proporcional si* $\Phi^n(v; \vec{C}) = p(v; \vec{C}) \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Es inmediato verificar que $p(v; \vec{C})$ cumple las propiedades de eficiencia **EF**, racionalidad individual **IR**, simetría respecto los recursos **SR**, observa crecimiento respecto a valores medios **CVm** y no es manipulable respecto a recursos **NMR**.

En lo sucesivo nos ocuparemos de caracterizar la distribución proporcional para aquellos juegos financieros generados por una función continua que cumple la condición (5.3); recordemos que dicha condición establecía que la función f siempre generaba un juego financiero fuera cual fuera el vector de recursos. Para establecer esta caracterización, previamente, enunciaremos un axioma de continuidad **CONT**:

Definición 5.5 *Una solución* $(\Phi^n)_{n \in \mathbf{N}}$ *definida en* Ω_f *es continua si para todo* $n \in \mathbf{N}$, *para todo problema financiero* $(v; \vec{C}) \in \Omega_f$ *y para toda sucesión* $\{\vec{C}_k\}$ *de vectores de* $\mathbf{R}^n_{++}$ *tal que* $\{\vec{C}_k\} \longrightarrow_{\mathbf{R}^n} \vec{C}$, *entonces*

$$\Phi^n(v_k; \vec{C}_k) \longrightarrow_{\mathbf{R}^n} \Phi^n(v; \vec{C})$$

donde $(v_k; \vec{C}_k) \in \Omega_f$.

Observación 5.6 *Nótese que dado que* $(v_k; \vec{C}) \in \Omega_f$ *y* f *es una función continua se cumplirá que*

$$\text{si } \{\vec{C}_k\} \longrightarrow_{\mathbf{R}^n} \vec{C} \Rightarrow \{v_k(S)\} \longrightarrow_{\mathbf{R}} v(S) \ \ \forall S \subseteq N$$

Teorema 5.7 *La distribución proporcional es la única solución en Ω_f que cumple las propiedades* **EF**, **SR**, **NMR** *y* **CONT**.

DEM

Es inmediato verificar que la solución proporcional cumple los cuatro axiomas propuestos.

Supongamos ahora que tenemos una solución $(\Phi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ definida en Ω_f que verifica **NMR**, **SR**, **EF** y **CONT**. Sea $(v;\vec{C}) \in \Omega_f^n$ un problema financiero donde

$$v(S) = \max\{0, f(\sum_{i\in S} C_i)\} \quad S \subset N.$$

y $N = \{1, \ldots, n\}$.

En primer lugar supondremos que $\vec{C} \in \mathbf{Q}_{++}^n$, es decir que las componentes del vector $\vec{C}$ son números racionales positivos. Entonces construiremos un juego financiero asociado de la siguiente manera: sea D el mínimo común múltiplo de los denominadores de $C_1, \ldots, C_n$; a partir de aquí subdividiremos cada valor C_i en $m_i = \frac{C_i}{1/D} = C_i \cdot D$ partes iguales y definiremos el conjunto $N' = \{1_1, \ldots, 1_{m_1}, \ldots, n_1, \ldots, n_{m_n}\}$ como el conjunto de nuevos jugadores surgidos de las subdivisiones realizadas donde el jugador i_k dispone de una cantidad de recurso C'_{i_k} igual a $\frac{1}{D}$ $\forall\, i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m_i$. Si se realiza este proceso y teniendo en cuenta las propiedades de la función f, podremos generar a partir de esta función y el vector $\vec{C}' = \left(C'_{i_k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,m_i}}$ un nuevo juego financiero (N', v') con $|N'| = n' = (\sum_{i\in N} C_i) \cdot D = \sum_{i=1}^n m_i$.

En el nuevo juego v' cada jugador i ha subdividido sus recursos en m_i trozos iguales. Utilizando la propiedad **NMR** podemos establecer la relación entre el pago al jugador i en el juego original y la suma de los pagos a los jugadores i_k en los cuales se ha desdoblado en el juego v'. Efectivamente, dado que Φ^n cumple **NMR** tendremos que, para todo $i \in N$, si los jugadores excepto el i unen sus recursos $(C(N\setminus i) = \sum_{k\in N\setminus i} C_k)$ no obtendrán ninguna ventaja, i.e.

$$\sum_{k\in N\setminus i} \Phi_k^n(v,\vec{C}) = \Phi_{N\setminus i}^2(v^{\mathbf{I}}; [C(N\setminus i), C_i])$$

donde $(v^{\mathbf{I}}; [C(N\setminus i), C_i]) \in \Omega_f$ es el problema financiero de dos jugadores: el i y aquel que tiene como recursos $C(N\setminus i)$; $\Phi_{N\setminus i}^2$ representa el pago a este último jugador. Por eficiencia (**EF**) de la solución ello nos permitirá deducir que

$$\Phi_i^n(v, \vec{C}) = \Phi_i^2(v^{\mathbf{I}};\ [C(N\setminus i), C_i])$$

Si en el problema $(v^{\mathbf{I}};\ [C(N\setminus i), C_i])$ desdoblamos al jugador cuyos recursos eran $C(N\setminus i)$ en $C(N\setminus i)\cdot D$ jugadores asignando a cada uno de ellos una cantidad de recurso C'_{j_k} igual a $\frac{1}{D}$, podremos aplicar de nuevo las propiedades de **NMR** y **EF** obteniendo que

$$\Phi_i^2(v^{\mathbf{I}};\ [C(N\setminus i), C_i]) = \Phi_i^{1+C(N\setminus i)\cdot D}(v^{\mathbf{II}};\ [\left(C'_{j_k}\right)_{\substack{j=1,\dots,n\ j\neq i\\ k=1,\dots,m_j}}, C_i])$$

donde $(v^{\mathbf{II}};\ [\left(C'_{j_k}\right)_{\substack{j=1,\dots,n\ j\neq i\\ k=1,\dots,m_j}}, C_i]) \in \Omega_f$ es el nuevo problema financiero resultante. Finalmente por la propiedad **NMR** deduciremos que

$$\Phi_i^{1+C(N\setminus i)\cdot D}(v^{\mathbf{II}};\ [\left(C'_{j_k}\right)_{\substack{j=1,\dots,n\ j\neq i\\ k=1,\dots,m_j}}, C_i]) = \sum_{k=1}^{m_i}\Phi_{i_k}^{n'}(v';\ \left(C'_{j_k}\right)_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,m_j}})$$

De las anteriores igualdades podemos deducir que

$$\Phi_i^n(v;\ \vec{C}) = \sum_{k=1}^{m_i}\Phi_{i_k}^{n'}(v';\ \left(C'_{j_k}\right)_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,m_j}}) \tag{5.4}$$

De aquí, y teniendo en cuenta (5.4) y la eficiencia de $(\Phi^n)_{n\in\mathbf{N}}$, obtenemos que

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i^n(v;\ \vec{C}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\Phi_{i_k}^{n'}(v';\vec{C}') = v'(N'). \tag{5.5}$$

Por otra parte, por el axioma de Simetría respecto a recursos se cumplirá que

$$\Phi_{i_k}^{n'}(v';\ \vec{C}') = \frac{v(N)}{n'}$$

que sustituido en (5.4) resultará que

$$\Phi_i^n(v;\ \vec{C}) = \sum_{i=1}^{m_i}\frac{v(N)}{n'} = m_i\frac{v(N)}{n'} = C_i\cdot D\cdot\frac{v(N)}{n'}.$$

Teniendo en cuenta que $n' = (\sum_{i\in N})C_i\cdot D$, llegamos a

$$\Phi_i^n(v;\ \vec{C}) = C_i\cdot D\cdot\frac{v(N)}{n'} = C_i\cdot D\cdot\frac{v(N)}{\sum_{i\in N}C_i\cdot D} = C_i\cdot\frac{v(N)}{\sum_{i\in N}C_i}$$

y por tanto, la solución Φ^n coincide con la distribución proporcional.

Analizaremos ahora el caso en que $\vec{C} \in \mathbf{R}^n_{++} \setminus \mathbf{Q}^n_{++}$. Sea entonces $\{\vec{C}_p\}_{p\in\mathbf{N}}$ una sucesión de vectores de componentes racionales positivas tal que para todo $i \in N$, $C_i^p \longrightarrow C_i$ siendo $C_i^p \geq C_i$ $\forall p \geq 1$. De aquí y para cada vector $\vec{C}_p \in \mathbf{Q}^n_{++}$ podemos generar un juego financiero v_p donde $v_p(S) = \max\{0, f(\sum_{i\in S} C_i^p)\}$ $\forall S \subset N$; dada la continuidad de la función f generadora de los juegos financieros ello implicará que $v_p(S) \longrightarrow v(S)$ donde $v_p(S) \geq v(S)$ $S \subseteq N$. Además, dado que la función f es de valores medios crecientes, se cumplirá que

$$\frac{v_p(N)}{\sum_{i\in N} C_i^p} \geq \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i} \quad \forall p \in \mathbf{N}. \tag{5.6}$$

Por el resultado obtenido sobre los juegos financieros respecto a vectores racionales positivos sabemos que

$$\Phi_i^n(v_p, \vec{C}_p) = C_i^p \cdot \frac{v_p(N)}{\sum_{i\in N} C_i^p}.$$

Finalmente, por (5.6) y la propiedad de continuidad de $(\Phi^n)_{n\in\mathbf{N}}$ se deriva que

$$\Phi_i^n(v, \vec{C}) = \lim_{p\to\infty} \Phi_i^n(v_p, \vec{C}_p) = \lim_{p\to\infty} \left\{ C_i^p \cdot \frac{v_p(N)}{\sum_{i\in N} C_p^i} \right\} = C_i \cdot \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}$$

Por tanto, la solución Φ^n coincidirá con la distribución proporcional. □

La anterior caracterización está inspirada en las analizadas para los juegos de bancarrota. Obsérvese que cuando en un juego de Bancarrota fraccionamos la demanda d_i de un acreedor en varias partes el juego de Bancarrota cambia pero la función que lo genera resulta inalterada dado que en realidad la cantidad global reclamada por el conjunto de los acreedores no varía. De esta manera, los juegos de bancarrota resultado de posibles fraccionamientos quedan recogidos en una subclase de juegos financieros donde la función f es fija, y para la cual la anterior caracterización es aplicable.

A continuación realizaremos otro estudio axiomático de la distribución propocional que no necesita tener fija la función generadora de los juegos. En primer lugar definiremos los axiomas que necesitaremos para ello.

Ax**1**.- Eficiencia (**EF**), definida de la forma usual.

Ax**2**.- Pseudo racionalidad individual (**PSIR**).

Definición 5.8 *Sea Φ^n una solución definida para el conjunto de problemas financieros de n jugadores Ω^n. Diremos que esta solución cumple la propiedad de pseudo racionalidad individual si para todo $(v;\, \vec{C}) \in \Omega^n$ se cumple que*

$$\frac{v(N)}{C(N)} \geq 1 \;\Rightarrow\; \Phi_i^n(v;\, \vec{C}) \geq C_i \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Esta propiedad nos dice que si el conjunto de jugadores recupera la inversión que ha realizado, el pago que los jugadores deben recibir ha de ser superior a lo que cada uno había invertido.

Ax3.- Linealidad restringida (**LR**).

Definición 5.9 *Sea Φ^n una solución definida para el conjunto de problemas financieros de n jugadores Ω^n. Diremos que esta solución cumple la propiedad de linealidad restringida si para todo par v_1, v_2 de juegos financieros respecto al mismo vector $\vec{C}$ y para todo $\lambda \geq 0$ se cumple que*

(i) $\Phi_i^n(\lambda\, v_1;\, \vec{C}) = \lambda\, \Phi_i^n(v_1;\, \vec{C}) \;\; \forall i \in N;$

(ii) $\Phi_i^n(v_1 + v_2;\, \vec{C}) = \Phi_i^n(v_1;\, \vec{C}) + \Phi_i^n(v_2;\, \vec{C}).$

El adjetivo "restringida" se refiere a que sólo se debe cumplir cuando analizamos juegos v_1 y v_2 que son financieros respecto a un mismo vector. Obsérvese que la suma de dos juegos financieros respecto a un mismo vector es financiero respecto al mismo vector.

Teorema 5.10 *La distribución proporcional es la única solución Φ^n que cumple las propiedades* **EF**, **PSRI** *y* **LR** *en Ω^n.*

DEM

La solución propocional $p(v, \vec{C})$ satisface los tres axiomas requeridos:

1) **EF**.- $\sum_{i \in N} p_i(v;\, \vec{C}) = \sum_{i \in N} C_i \frac{v(N)}{C(N)} = \frac{v(N)}{C(N)} \sum_{i \in N} C_i = v(N).$

2) **PSRI**.- $p_i(v;\, \vec{C}) = C_i \frac{v(N)}{C(N)} \geq$ (dado que $\frac{v(N)}{C(N)} \geq 1$) $\geq C_i \;\;\; i = 1, \ldots, n.$

3) **LR**.- Sean v_1 y v_2 juegos financieros respecto al vector $\vec{C}$. Por definición $p_i(v_1;\vec{C}) = C_i\,\frac{v_1(N)}{C(N)}$ y $p_i(v_2;\vec{C}) = C_i\,\frac{v_2(N)}{C(N)}$, de donde

$$p_i(v_1;\vec{C}) + p_i(v_2;\vec{C}) = C_i\left(\frac{v_1(N)}{C(N)} + \frac{v_2(N)}{C(N)}\right) = C_i\left(\frac{v_1(N)+v_2(N)}{C(N)}\right) = p_i(v_1+v_2;\vec{C});$$

$$p_i(\lambda\, v;\vec{C}) = C_i\,\frac{\lambda\, v(N)}{C(N)} = \lambda\, C_i\,\frac{v(N)}{C(N)} = \lambda\, p_i(v;\vec{C}).$$

Consideremos ahora una solución Φ^n que satisface **EF**, **PSRI** y **LR**; vamos a ver que esta solución coincide con la proporcional.

Sea $(v,\vec{C}) \in \Omega_n$. Por la proposición **1.27** (pág. 34), el juego v se puede descomponer como combinación lineal de juegos de mínimo nivel, i.e.

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{S_k} \cdot v_{S_k,\vec{C}}$$

donde $v_{S_k,\vec{C}}$ son los juegos de mínimo nivel, $\lambda_{S_k} = \frac{v(S_k)}{\sum_{i\in S_k} C_i} - \frac{v(S_{k-1})}{\sum_{i\in S_{k-1}} C_i} \geq 0$ $k = 1\ldots,m$, $\frac{v(S_0)}{\sum_{i\in S_0} C_i} = 0$, $S_m = N$ y $\sum_{k=1}^{m}\lambda_{S_k} = \frac{v(N)}{C(N)}$ (ver página 34). Tres características importantes de estos juegos son:

(i) Son juegos financieros respecto al mismo $\vec{C}$.

(ii) $v_{S_k,\vec{C}}(N) = C(N)$.

(iii) $\frac{v_{S_k,\vec{C}}(N)}{C(N)} = 1$.

De lo anterior deducimos que

$$\begin{aligned}\Phi_i^n(v;\vec{C}) &= \Phi_i^n\left(\textstyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_{S_k}\cdot v_{S_k,\vec{C}};\vec{C}\right) = (\text{por Ax. }\mathbf{LR}) = \textstyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_{S_k}\cdot\Phi_i^n(v_{S_k,\vec{C}},\vec{C}) \geq \\ &\geq (\text{por Ax. }\mathbf{PSIR}) \geq \textstyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_{S_k}\cdot C_i = \left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_{S_k}\right)\cdot C_i = \\ &= \left(\text{dado que } \textstyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_{S_k} = \frac{v(N)}{C(N)}\right) = \frac{v(N)}{C(N)}\cdot C_i = p_i(v;\vec{C}).\end{aligned}$$

Finalmente, por el axioma de eficiencia, obtendremos que $\Phi_i^n(v;\vec{C}) = p_i(v,\vec{C})$. □

Los tres axiomas requeridos en el anterior Teorema son independientes. Nótese que, por ejemplo, el valor de Shapley cumple **EF** y **LR** pero no **PSIR**; ello no deja de ser sorprendente pues exigir que se reintegre como mínimo el capital invertido no parece una exigencia muy fuerte. La distribución igualitaria del excedente respecto al capital invertido $\phi_i^n(v;\vec{C}) = C_i + \frac{1}{n}(v(N) - C(N))$ cumple las propiedades **EF** y **PSIR** pero no **LR**. Finalmente, entre las soluciones que cumple las propiedades **LR** y

PSIR pero no son eficientes estaría aquella que asigna a cada jugador su contribución marginal en el juego, i.e. $\phi_i^n(v; \vec{C}) = b_i^v$.

Frente a las anteriores caracterizaciones axiomáticas de la distribución proporcional proponemos otra aproximación a dicha solución más cercana al marco de discusión del nucleolus del juego [2]. Previamente definiremos una serie de conceptos.

Definición 5.11 *Sea $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ respecto al vector $\vec{C}$ y $\vec{x} \in I^*(v)$. Definimos el pago medio a una coalición S dada la preimputación $\vec{x}$ como*

$$rm(S, \vec{x}) = \frac{\sum_{i \in S} x_i}{\sum_{i \in S} C_i}.$$

Por tanto $rm(S, \vec{x})$ nos indica el pago en tanto por uno respecto a los recursos aportados. La idea que queremos transmitir es que muchas veces en la realidad económica se comparan los pagos recibidos de una cierta operación no en términos absolutos sino en términos relativos. Por tanto, lo que nos interesará es comparar los pagos medios de las coaliciones porque quizás será en esos términos que se establecerá la negociación. De aquí definimos lo que entendemos como vector de pagos medios dada una preimputación $\vec{x}$: las componentes de este vector serán los pagos medios para todas las coaliciones ordenadas en orden creciente.

Definición 5.12 *Sea un juego financiero, $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ y $C_1, \ldots, C_n$ los correspondientes recursos asociados a los jugadores. Sea $\vec{x} \in I^*(v)$, definimos el vector de pagos medios dada la preimputación $\vec{x}$, $\vartheta(\vec{x}) \in \mathbf{R}^{2^n-1}$ como*

$$\vartheta(\vec{x}) = \left(rm(S_m^{\vec{x}}, \vec{x})\right)_{m=1,\ldots,2^n-1},$$

donde $rm(S_1^{\vec{x}}, \vec{x}) \leq rm(S_2^{\vec{x}}, \vec{x}) \leq \ldots \leq rm(S_{2^n-1}^{\vec{x}}, \vec{x})$ y $S_m^{\vec{x}} \subset N$, $S_m^{\vec{x}} \neq \emptyset$.

El vector de pagos medios ordena las coaliciones desde la peor pagada (en términos medios) hasta la mejor pagada; dicho vector nos da una idea de las diferencias en el pago entre las diversas coaliciones. El siguiente paso lógico que realizaremos será intentar comparar distribuciones teniendo en cuenta el vector de pagos medios. Para ello nos apoyaremos en la comparación de vectores según el criterio del orden lexicográfico.

[2]Ver sección **4.2**.

Definición 5.13 *Sean dos vectores* $\vec{x}$, $\vec{y}$ $\in I^*(v)$*; diremos que* $\vec{x}$ *es preferido a* $\vec{y}$ *si y sólo si*

$$\vartheta(\vec{x}) \succ_L \vartheta(\vec{y})$$

es decir, para algún k $1 \leq k \leq 2^n - 1$

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_k(\vec{x}) & > & \vartheta_k(\vec{y}) \quad y \\ \vartheta_j(\vec{x}) & = & \vartheta_j(\vec{y}) \quad \forall j \;\; 1 \leq j < k. \end{array}$$

Este planteamiento nos conduce de manera natural a la distribución proporcional.

Teorema 5.14 *Sea* $(v;\vec{C}) \in \Omega^n$ *y* $\vec{x} \in I^*(v)$ *de manera que* $\vartheta(\vec{x}) \succ_L \vartheta(\vec{y})\ \forall \vec{y} \in I^*(v)$*, entonces* $\vec{x} = p(v;\, \vec{C})$.

DEM

En efecto, $\vartheta_j(p(v;\, \vec{C})) = \frac{v(N)}{C(N)}$ $j = 1, \ldots, 2^n - 1$. Supongamos que $\vec{x} \neq p(v;\, \vec{C})$, entonces existiría un jugador $i \in N$ de manera que $\frac{x_i}{C_i} < \frac{v(N)}{C(N)}$ lo que implicaría que $\vartheta_1(\vec{x}) < \frac{v(N)}{C(N)}$. Dado que $\vartheta_1(p(v;\, \vec{C})) = \frac{v(N)}{C(N)}$ tendríamos que $\vartheta(p(v;\, \vec{C})) \succ_L \vartheta(\vec{x})$ lo cual supondría una contradicción con la hipótesis de que $\vartheta_1(\vec{x}) \succ_L \vartheta_1(\vec{y})\ \forall i \in I^*(v)$.

□

Si el pago proporcional a los jugadores de acuerdo con los recursos aportados es quizás la más simple y extendida de las soluciones es porque posee unas ventajas que podemos resumir de la siguiente manera:

1. cálculo muy sencillo,

2. fácil de comprender,

3. valoración objetiva de la contribución de los jugadores, y,

4. además, para el caso de los juegos financieros, pertenece siempre al Núcleo (Proposición **2.2**).

Sin embargo, también podemos extraer una serie de inconvenientes que se resumirían en los siguientes puntos:

1. Sólo depende de la ganancia de la coalición total $v(N)$ y de los recursos aportados por los jugadores. De alguna manera es la antítesis de lo que se pretende en

la teoría de juegos cooperativos donde se utilizan las ganancias de las posibles subcoaliciones: da igual que un jugador sea indispensable o no para obtener el beneficio; la valoración que se hará de los recursos será la misma con lo que parece existir un agravio comparativo.

2. Si una coalición puede obtener por sí misma el pago proporcional respecto a los recursos pero los miembros que están fuera de dicha coalición no pueden obtenerla, no hay motivo para pensar que si se reparte proporcionalmente la ganancia total, la coalición de los n jugadores pueda cristalizar o mantenerse.

   En principio parece coherente establecer una distribución que premie a quien contribuya a la obtención del beneficio.

Vistos estos incovenientes, intentaremos definir una distribución que estando incluida en la familia de distribuciones proporcionales, sea lo más equitativa posible.

5.2 El Valor del juego financiero

Uno de los objetivos de esta Tesis se centraba en definir un nuevo concepto de solución que se adaptara a las peculiaridades del juego financiero. A mi juicio dicha solución debería cumplir las siguientes características:

(a) Que no descartara la filosofía del reparto proporcional ampliamente aceptado por su sencillez. Por tanto, la solución escogida deberá tener en cuenta los recursos en poder de cada jugador.

(b) Que tuviera en cuenta las ganancias de las posibles subcoaliciones y por tanto dependiera de los valores de la función característica.

(c) Que repartiera de manera equitativa los rendimientos totales no sólo en términos absolutos sino también en términos porcentuales respecto a los recursos aportados.

(d) Que la valoración que se haga de las aportaciones de los jugadores sea lo más objetiva posible (que tenga en cuenta la aportación de los jugadores).

Teniendo en cuenta estas premisas definiremos el valor del juego financiero $\sigma(v;\ \vec{C})$ de la siguiente manera:

Definición 5.15 *Sea* $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ *respecto al vector* $\vec{C}$. *Definimos el valor financiero de* v, $\sigma(v; \vec{C})$ *como*

$$\sigma_i(v;\, \vec{C}) = \frac{C_i \cdot \sum_{S;\, i\in S} \mathbf{f}_S}{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \sum_{S;\, k\in S} \mathbf{f}_S\right)} \cdot v(N) \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.7}$$

donde recordemos que $\mathbf{f}_S = \frac{v(S)}{C(S)}$ *y suponemos que* $v(N) > 0$.

Teniendo en cuenta que el número de coaliciones en las que un jugador i interviene es 2^{n-1}, si multiplicamos y dividimos la expresión (5.7) por 2^{n-1} obtenemos que

$$\sigma_i(v;\, \vec{C}) = \frac{C_i \cdot \frac{\sum_{S;\, i\in S} \mathbf{f}_S}{2^{n-1}}}{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \left(\frac{\sum_{S;\, k\in S} \mathbf{f}_S}{2^{n-1}}\right)\right)} \cdot v(N)$$

es decir, el valor del juego financiero pertenece a la familia de distribuciones proporcionales donde $\omega_i = \frac{\sum_{S;\, i\in S} C_i \cdot \mathbf{f}_S}{2^{n-1}}$. Obsérvese cómo la valoración ω_i que se hace de los recursos de cada jugador equivale a la media de los valores medios de las coaliciones donde el jugador interviene; con esto se pretende una valoración objetiva de la aportación del jugador.

Ejemplo 5.16 *Sea* $(N, v) \in \mathcal{FG}^n$ *respecto al vector* (100, 200, 300)

$$\begin{array}{llll} v(1) = 10 & v(2) = 20 & v(3) = 30 & \\ v(12) = 30 & v(13) = 44 & v(23) = 55 & v(123) = 66 \end{array}$$

Entonces, el valor del juego financiero $\sigma(v, \vec{C})$ *es:*

$$\sigma_1(v;\, \vec{C}) = \frac{100\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})}{100\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})+200\,(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_{123})+300\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})} = 10.87$$

$$\sigma_2(v;\, \vec{C}) = \frac{200\,(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_{123})}{100\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})+200\,(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_{123})+300\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})} = 21,74$$

$$\sigma_3(v;\, \vec{C}) = \frac{300\,(\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_{123})}{100\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})+200\,(\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{23}+\mathbf{f}_{123})+300\,(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{13}+\mathbf{f}_{123})} = 33,38$$

Propiedades

Es inmediato comprobar que el valor σ cumple las propiedades de eficiencia (**EF**), simetría respecto a recursos (**SR**) y crecimiento en los valores medios (**CVm**). Además verifica las siguientes propiedades:

- **Racionalidad individual.** En efecto, para todo jugador $i \in N$ se verifica que $\sigma_i(v;\, \vec{C}) \geq 0$. Por tanto, vamos a analizar el caso en que $v(i) > 0$.

$$\sigma_i(v;\vec{C}) = \frac{C_i \cdot \sum_{S;\, i\in S} \mathbf{f}_S}{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \sum_{S;\,k\in S} \mathbf{f}_S\right)} \cdot v(N) = \frac{C_i \cdot \sum_{S;\, i\in S} \mathbf{f}_S}{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \sum_{S;\,k\in S} \mathbf{f}_S\right)} \cdot v(N) \cdot \frac{v(i)}{v(i)} =$$

$$= \frac{\dfrac{C_i \cdot \sum_{S;\, i\in S} \mathbf{f}_S}{v(i)}}{\dfrac{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \sum_{S;\,k\in S} \mathbf{f}_S\right)}{v(N)}} \cdot v(i) \geq^{3} \frac{\dfrac{C_i \cdot \sum_{S;\, i\in S} \mathbf{f}_{\{i\}}}{v(i)}}{\dfrac{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \sum_{S;\,k\in S} \mathbf{f}_N\right)}{v(N)}} \cdot v(i) =$$

$$= \frac{\dfrac{2^{n-1} \cdot C_i \cdot \mathbf{f}_{\{i\}}}{v(i)}}{\dfrac{2^{n-1} \cdot \sum_{k\in N} C_k \cdot \mathbf{f}_N}{v(N)}} \cdot v(i) = \frac{\dfrac{2^{n-1} \cdot v(i)}{v(i)}}{\dfrac{2^{n-1} \cdot v(N)}{v(N)}} \cdot v(i) = v(i).$$

- **Simetría respecto a los valores medios.** Dos jugadores i y j son simétricos respecto a valores medios si para todo $T \subseteq N \setminus \{ij\}$ se cumple que $\mathbf{f}_{T\cup i} = \mathbf{f}_{T\cup j}$.

  A partir de esta definición, decimos que una solución $(\Phi^n)_{n\in \mathbb{N}}$ verifica simetría respecto a valores medios (**SrVm**) si para todo par de jugadores $i, j \in N$ simétricos respecto a valores medios , se cumple que $\frac{\Phi_i^n(v;\vec{C})}{C_i} = \frac{\Phi_j^n(v;\vec{C})}{C_j}$. Una condición más fuerte establecería que

$$\frac{\Phi_i^n(v;\,\vec{C})}{C_i} = \frac{\Phi_j^n(v;\,\vec{C})}{C_j} \Leftrightarrow \; i \text{ y } j \; \text{ son jugadores simétricos}$$

  Esta última propiedad la denominaremos **simetría fuerte respecto a los valores medios (SFrVm)**.

Proposición 5.17 *Sea (N, v) un juego financiero respecto al vector $\vec{C}$, entonces el valor $\sigma(v;\,\vec{C})$ verifica la propiedad* **SFrVm**.

DEM.

Hemos de demostrar que $\frac{\sigma_i(v;\vec{C})}{C_i} = \frac{\sigma_j(v;\vec{C})}{C_j} \Leftrightarrow i$ y j son jugadores simétricos

$\Leftarrow$)

[3]Por definición de juego financiero se verifica que $\mathbf{f}_S \geq \mathbf{f}_i \;\; \forall S;\, i \in S$ y $\mathbf{f}_N \geq \mathbf{f}_S \;\; \forall S \subset N$

Sean i y j dos jugadores simétricos respecto a valores medios, entonces

$$\sum_{S;\, i \in S} \mathbf{f}_S = \sum_{S;\, j \in S} \mathbf{f}_S.$$

Por (5.7)

$$\frac{\sigma_i(v;\vec{C})}{C_i} = \sum_{S;\, i \in S} \mathbf{f}_S \cdot \frac{v(N)}{\sum_{k \in N} C_k \sum_{S;\, k \in S} \mathbf{f}_S} = \sum_{S;\, j \in S} \mathbf{f}_S \cdot \frac{v(N)}{\sum_{k \in N} C_k \sum_{S;\, k \in S} \mathbf{f}_S} = \frac{\sigma_j(v;\vec{C})}{C_j}.$$

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $\frac{\sigma_i(v,\vec{C})}{C_i} = \frac{\sigma_j(v;\vec{C})}{C_j}$ siendo i y $j \in N$; por la definición del valor del juego financiero, ello implica que

$$\sum_{S;\, i \in S} \mathbf{f}_S = \sum_{S;\, j \in S} \mathbf{f}_S. \tag{5.8}$$

Supongamos que para algún $R \subseteq N \setminus \{ij\}$ se cumpliera que

$$\mathbf{f}_{R \cup i} < \mathbf{f}_{R \cup j} \tag{5.9}$$

entonces por la propiedad **1.9** tendríamos que $C(R \cup i) < C(R \cup j)$ y por tanto que $C_i < C_j$. De aquí se deduce además que $C(T \cup i) < C(T \cup j) \ \ \forall T \subseteq N \setminus \{ij\}$ y entonces, por la definición de juego financiero,

$$\mathbf{f}_{T \cup i} \leq \mathbf{f}_{T \cup j} \ \ \forall T \subseteq N \setminus \{ij\}. \tag{5.10}$$

De (5.9) y (5.10) se deduciría que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{S;\, i \in S} \mathbf{f}_S &= \textstyle\sum_{T \subseteq N \setminus \{ij\}} \mathbf{f}_{T \cup i} + \sum_{\{ij\} \subseteq T \subseteq N} \mathbf{f}_T < \\ &< \textstyle\sum_{T \subseteq N \setminus \{ij\}} \mathbf{f}_{T \cup j} + \sum_{\{ij\} \subseteq T \subseteq N} \mathbf{f}_T = \sum_{S;\, j \in S} \mathbf{f}_S \end{aligned}$$

contradicción con (5.8). □

Si observamos el ejemplo **5.16** verificaremos que los jugadores 1 y 2 son simétricos y que su pago medio también es igual $\frac{10.87}{100} = \frac{21.74}{200} = 10.87\%$. También observamos que el pago medio del jugador 3 ($\frac{33.38}{300} = 11.13\%$) es superior al del 1 y 2.

- **Monotonía** Sea N un conjunto de jugadores cualquiera y $\vec{C}$ los recursos en poder de los jugadores; una solución Φ^n definida en Ω^n es monótona respecto a

N si para cada par de funciones generadoras de un juego financiero, f y f', que verifican

$$f'(\sum_{i\in N} C_i) \geq f(\sum_{i\in N} C_i) \text{ y } f'(\sum_{i\in S} C_i) = f(\sum_{i\in S} C_i) \ \forall S \subset N$$

obtenemos que

$$\Phi_i^n(v'; \vec{C}) \geq \Phi_i^n(v; \vec{C}) \ \forall i \in N$$

donde $v(S) = \max\{0, f(\sum_{i\in S} C_i)\}$ y $v'(S) = \max\{0, f'(\sum_{i\in S} C_i)\}$ $\forall S \subseteq N$. Esta propiedad es importante dado que implica que los jugadores siempre optarán por buscar la utilización conjunta de los recursos que reporte un mayor beneficio; es importante que la regla de reparto adoptada no desincentive a los jugadores en la consecución de cualquier mejora (pensemos que, por ejemplo, la función f puede ser una función de producción asociada a una determinada tecnología y que la función f' puede representar una mejora en la tecnología utilizada; esta propiedad introducida por Meggido [35] ha sido ampliamente comentada por Young ([62]; *Handbook of Game Theory*, vol II, cap 34 [2]).

Proposición 5.18 *El valor del juego financiero verifica la propiedad de monotonía respecto a N.*

DEM.

Sea g_i la función que asigna para cada posible valor de $v(N)$ el valor del juego financiero para el jugador i, $\sigma_i(v, \vec{C})$; dado que consideramos fijos los recursos, la función g_i dependerá de $\mathbf{f}_N = \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} C_i}$, i.e.

$$g_i(\mathbf{f}_N) = \frac{C_i \cdot \left[\mathbf{f}_N + \sum_{S;\, i\in S;\, S\neq N} \mathbf{f}_S\right]}{\sum_{k\in N}\left(C_k \cdot \left(\sum_{S;\, k\in S;\, S\neq N} \mathbf{f}_S + \mathbf{f}_N\right)\right)} \cdot (\mathbf{f}_N \cdot \sum_{k\in N} C_i),$$

o de manera equivalente,

$$g_i(\mathbf{f}_N) = \frac{C_i \cdot \mathbf{f}_N + A}{C + B \cdot \mathbf{f}_N} \cdot (\mathbf{f}_N \cdot B),$$

donde $A = C_i \cdot \sum_{S;\, i\in S;\, S\neq N} \mathbf{f}_S$, $B = \sum_{k\in N} C_k$ y $C = \sum_{k\in N}(C_k(\sum_{S;k\in S;S\neq N} \mathbf{f}_S))$.

Si calculamos su derivada obtenemos:

$$g_i'(\mathbf{f}_N) = \frac{A\,B\,C + 2\cdot C_i\,B\,\mathbf{f}_N\,C + C_i\,B^2\mathbf{f}_N^2}{(C + B\,\mathbf{f}_N)^2}$$

que es positiva para toda $\mathbf{f}_N \geq 0$ dado que $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Ello nos indica que la función, y por tanto el valor σ_i, es creciente respecto a $\mathbf{f}_N$. De aquí concluímos que $\sigma(v;\, \vec{C})$ es monotónico para N.

El Núcleo y el valor $\sigma(v)$

A pesar de las buenas propiedades que cumple el valor del juego financiero, no siempre es posible asegurar que pertenece al Núcleo. Para ello, observemos el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.19 *Sea el siguiente juego financiero respecto al vector* (200, 200, 300)

$$\begin{array}{llll} v(1) = 20 & v(2) = 20 & v(3) = 31.5 & \\ v(12) = 44 & v(13) = 55 & v(23) = 55 & v(123) = 77. \end{array}$$

El Núcleo de este juego se reduce a un único punto, la distribución proporcional a los recursos $p(v;\, \vec{C}) = (22,\, 22,\, 33)$, pero $\sigma(v;\, \vec{C}) = (21.8909,\, 21.8909,\, 33.2181)$.

Además existe el inconveniente de que el valor $\sigma(v;\, \vec{C})$ es dominado[4] vía la coalición $\{12\}$ por la distribución del Núcleo. Sin embargo, este problema no es exclusivo del valor sigma: así el valor de Shapley para este juego es $\phi(v) = (21.917,\, 21.917,\, 33.167)$ que también es dominado por el Núcleo. Esta observación nos conduce a formular el siguiente Teorema de imposibilidad.

Teorema 5.20 *No existe ninguna solución definida en Ω^n con $n \geq 3$ que verifique las propiedades* **EF**, **SFrVm** *y* **CVm**, *y que no sea dominada por el Núcleo.*

DEM.

Sea $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una solución sobre los juegos financieros que cumple **EF**, **SFrVm** y **CVm** y que no es dominada por el núcleo. Apliquemos esta solución al anterior juego financiero de tres jugadores respecto al vector $\vec{C} = (200,\, 200,\, 300)$

$$\begin{array}{llll} v(1) = 20 & v(2) = 20 & v(3) = 31.5 & \\ v(12) = 44 & v(13) = 55 & v(23) = 55 & v(123) = 77. \end{array}$$

[4]Ver página 111.

Como Φ^3 es una solución que verifica **SFrVm** y **CVm** tenemos que

$$\frac{\Phi_1^3(v;\,\vec{C})}{200} = \frac{\Phi_2^3(v;\,\vec{C})}{200} < \frac{\Phi_3^3(v;\vec{C})}{300}; \qquad (5.11)$$

esto es consecuencia de que los jugadores 1 y 2 son simétricos y el jugador 3 aporta más recursos que los dos anteriores. Por la eficiencia de Φ^3 tenemos que

$$\Phi_1^3(v;\,\vec{C}) + \Phi_2^3(v;\,\vec{C}) + \Phi_3^3(v;\,\vec{C}) = 77.$$

Finalmente por (5.11) obtenemos que

$$\Phi_1^3(v;\vec{C}) + \Phi_1^3(v;\vec{C}) + \frac{3}{2}\Phi_1^3(v;\vec{C}) < 77$$

y por tanto, $\Phi_1^3(v;\vec{C}) < 22$. Por la simetría de los jugadores 1 y 2, $\Phi_2^3(v;\vec{C}) < 22$ lo que implica, dada la eficiencia de Φ^3, que $\Phi_3^3(v;\vec{C}) > 33$.

Por otra parte la única distribución del núcleo es (22, 22, 33), que domina a $\Phi^3(v;\vec{C})$ via la coalición $\{12\}$. □

El anterior Teorema nos plantea la incompatiblidad de una distribución que premie al que más recursos aporta (propiedades **SFrVm** y **CVm**) y la no dominación por parte del Núcleo.

Conclusiones

El estudio de todo modelo en Teoría de juegos debe constar a mi juicio de tres etapas: una primera de *análisis del modelo* y de la estructura del juego generado; una segunda de *aplicación de los instrumentos y soluciones* típicos de la Teoría de juegos; y en tercer lugar, *una discusión sobre la aplicación de estas soluciones* al modelo estudiado lo que puede derivar en la propuesta de nuevos conceptos de solución. En este capítulo de conclusiones resumiremos los resultados obtenidos en cada uno de estos puntos así como los problemas que aún quedan por resolver respecto al modelo y que sugieren nuevas líneas de investigación.

* * * * * *

Respecto al *análisis del modelo*, un primer objetivo de la Tesis se ha centrado en la determinación de las características diferenciales de los juegos financieros con el propósito de establecer si éstos constituyen una clase especial de juegos con entidad propia. A tal efecto se han estudiado y verificado conocidas propiedades de los juegos cooperativos como son la monotonía, la superaditividad y se han definido otras específicas como son la *anonimidad coalicional* o la *aditividad parcial.* Estas propiedades ya confieren de entrada a los juegos financieros un carácter diferencial respecto a las demás clases conocidas de juegos.

Cuando se trabaja por primera vez con los juegos financieros, la primera idea que surge es la de afirmar que todos los juegos financieros son siempre convexos. Sin embargo, como se ha discutido ampliamente en el capítulo **1**, no sólo no son convexos sino que además no se adecúan a ninguna de las generalizaciones sobre la convexidad ya definidas. La primera conclusión que podemos extraer de la investigación es que los juegos financieros constituyen una clase bastante amplia dentro de los juegos cooperativos; a pesar de que su definición es aparentemente precisa, deja suficiente margen para englobar una gran cantidad de juegos diferentes entre los cuales se hallan, por ejemplo, los juegos de bancarrota. Esto amplía la importancia del modelo pues representa una generalización no sólo de los problemas de bancarrota sino de todos aquellos que comparten la misma modelización ("*rights problems*").

Un segundo objetivo presente en el análisis del modelo se ha concentrado en intentar caracterizar los juegos financieros con la intención, por un lado, de determinar exactamente las características de los juegos financieros, y por otro, para reconocer fácilmente cuándo un juego es financiero o no. En este sentido, tan sólo hemos obtenido respuestas parciales definiendo condiciones necesarias (superaditividad, anonimidad coalicional, aditividad parcial) que sin embargo son de gran utilidad para determinar cuándo un juego no es financiero.

Un tercer punto referente al estudio del modelo ha estado dedicado a la estructura algebraica de los juegos financieros. Así como los juegos convexos constituyen una clase de juegos cerrada por la suma (la suma de dos convexos es un convexo), los juegos financieros no comparten esta propiedad. Para recuperar esta característica nos hemos visto obligados a restringir el estudio al conjunto de juegos que son financieros respecto a un vector dado. La subclase de juegos financieros así definidos constituyen un cono dentro del espacio vectorial de los juegos cooperativos siendo los denominados juegos de mínimo nivel un sistema de generadores de este cono.

La descomposición de los juegos financieros en combinación lineal de juegos de mínimo nivel parecía abrir en principio una buena vía para el estudio de los juegos financieros. Como destacaremos más adelante, hemos llegado a conocer perfectamente las características de los juegos de mínimo nivel pero no ha sido posible extender los resultados a la clase general de los juegos financieros; ello ha sido debido a que la mayoría de soluciones (Núcleo, Kernel, nucleolus, valor de τ) no poseen la propiedad de aditividad.

Cabe resaltar que una de las ventajas del modelo es que analiza problemas sencillos pero a la vez prácticos lo que facilita el análisis del problema y la interpretación de los resultados obtenidos. Sin embargo, la misma sencillez del modelo invita a preguntar por una generalización del modelo. Una primera aproximación en este sentido iría en la dirección de permitir que los jugadores, en lugar de aportar un único recurso homogéneo, aportasen cada uno de ellos un conjunto de recursos; seguramente la solución habrá de pasar por el establecimiento de un vector de precios de manera que se pueda valorar globalmente la aportación del jugador. En esta línea un problema interesante a resolver es el de determinar cuándo un "*Linear production game*", donde cada jugador aporta un vector de inputs, resulta ser un juego financiero. El problema inverso ha sido analizado en el capítulo **2** donde hemos analizado de qué forma un juego financiero podía ser formulado como un juego de producción lineal.

* * * * * *

La segunda etapa en el estudio de los juegos financieros ha sido dedicada a la *apli-*

cación de los instrumentos y soluciones clásicas en Teoría de Juegos. En concreto resumiremos los resultados obtenidos referentes al Núcleo, al conjunto de Negociación, al Kernel así como al conjunto de soluciones puntuales (Shapley, nucleolus y valor de τ).

Dada la estructura del juego no resulta sorprendente que el Núcleo tenga un papel preponderante en el modelo ni que la distribución proporcional pertenezca siempre a éste dado que forman una parte consustancial al modelo. Por su interpretación, resulta particularmente interesante el caso en que el Núcleo se reduce a un único punto; recordemos que ello sucede cuando los valores medios de las coaliciones de $n-1$ jugadores coinciden con el valor medio de la coalición total. Por tanto, el Núcleo del juego será tanto más "grande" cuanto más distantes estén los valores medios de las coaliciones de $n-1$ jugadores del valor medio de la coalición total. Esto parecería indicar que los límites del Núcleo vienen fuertemente determinados por las coaliciones de $n-1$ jugadores. Así nos hemos dedicado a estudiar cuándo en un juego financiero los límites del Núcleo están delimitados por las contribuciones marginales de las coaliciones. Recuérdese, por ejemplo, que en un juego de bancarrota $v_{\mathbf{E};d}$ el Núcleo del juego viene definido por

$$C(v_{\mathbf{E};d}) = \{\vec{x} \in I^*(v_{\mathbf{E};d}) \text{ y } v_{\mathbf{E};d}(i) \leq x_i \leq b_i^{v_{\mathbf{E};d}} \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Es decir, el Núcleo del juego de Bancarrota está definido por el conjunto de vectores eficientes cuyas componentes se hallan entre los valores individuales de los jugadores y sus contribuciones marginales. Dado que los juegos de Bancarrota son juegos convexos, siempre existirán vectores donde estos límites efectivamente se alcanzan.

Este resultado ha podido ser extendido a una subclase de juegos financieros que hemos simbolizado por $\mathcal{FG}_*^N$ y que hemos definido como

$$\mathcal{FG}_*^{\mathrm{N}} = \{\mathrm{v} \in \mathcal{FG}^{\mathrm{N}} \,|\, \mathrm{v(N)} - \mathrm{v(S)} \geq \mathrm{b^v(N \setminus S)} \ \forall \mathrm{S} \subset \mathrm{N}, \mathrm{v(S)} > 0\}.$$

Esta clase es suficientemente interesante pues incluye a los juegos de bancarrota y a los juegos de mínimo nivel generadores de los juegos financieros. A pesar de que era evidente que una condición tan fuerte no se cumpliría para todo juego financiero, resultaba interesante analizar si al menos en cada uno de los vértices del Núcleo encontraríamos una contribución marginal de algún jugador; ello es importante pues nos indicaría cuál es el poder de las coaliciones en el juego. Sin embargo, la respuesta ha sido negativa: en el ejemplo de la página 104 uno de los vértices del núcleo no satura a ninguna restricción correspondiente a una coalición de $n-1$ jugadores, y por tanto en ese caso, son el resto de coaliciones las que ponen límite a las posibles distribuciones del Núcleo.

La similitud con los juegos convexos se pone de manifiesto también en el estudio del Núcleo: primero porque ambos tipos de juegos son no sólo equilibrados, sino totalmente equilibrados; en segundo lugar porque se comportan de manera similar respecto a los juegos reducidos. En el presente trabajo nos hemos interesado por la reducción jugador a jugador del juego. De hecho, algebraicamente es equivalente la reducción global de un conjunto de jugadores que jugador a jugador. Sin embargo, no es equivalente si lo que nos interesa es detectar cuáles son las condiciones, el pago que debe recibir el jugador reducido para que el juego reducido conserve el carácter financiero. En nuestro estudio hemos visto que este pago debía ser tal que fuera superior al pago según la distribución proporcional en cada juego reducido. Ello supone una rigidez de los juegos financieros con respecto a los juegos convexos en los que la reducción genera un juego convexo siempre que se retribuya al jugador reducido con un pago que pueda estar en el núcleo. Esta característica diferencial hace que el trabajo con los juegos financieros se complique y que sea importante resolver la siguiente cuestión: ¿En qué condiciones el Núcleo de un juego financiero equivale al de un juego convexo? Si la respuesta siempre fuera afirmativa sería muy importante dado que posibilitaría un conocimiento mucho mayor del núcleo de los juegos financieros; en este caso, la siguiente cuestión importante sería conocer el proceso de asociación a cada juego financiero de ese juego convexo con el mismo Núcleo. Aparte del caso obvio en que el juego es directamente convexo, el Núcleo de los juegos $\mathcal{FG}_*^N$ coincide con el de un juego convexo y en concreto con el de un juego de Bancarrota. Es obvio que no siempre será posible asociar al juego financiero un juego de Bancarrota con el mismo Núcleo que el juego financiero original pero quizás podríamos asociar otro tipo de juego convexo; aunque ha sido estudiado, este punto no ha podido ser resuelto. Un argumento en favor de investigar este tipo de relaciones es el de aprovechar las propiedades conocidas para los juegos convexos y extenderlas hacia los juegos financieros.

Finalmente otro aspecto importante analizado respecto al Núcleo es el de su estabilidad en el sentido de von Neumann y Morgenstern. En general hemos visto que el Núcleo de los juegos financieros no es estable y que existen conjuntos estables mayores que el Núcleo y que lo contienen. Por contra, también hemos facilitado un ejemplo de juego no convexo pero con Núcleo estable con lo que no sólo los juegos financieros convexos tienen el Núcleo estable. Respecto al ejemplo, es interesante remarcar la original forma de demostrar esta estabilidad utilizando juegos reducidos: se examina la dominación de todas las imputaciones fuera del Núcleo fijando el valor de uno de los jugadores y examinando las dominaciones en el juego reducido. Este procedimiento puede constituir una nueva vía para el estudio general de los conjuntos estables en los juegos financieros con el objetivo de demostrar que siempre existen para esta clase de juegos; este último punto continua todavía abierto.

Si la estabilidad no es una característica definitoria del Núcleo de un juego financiero, sí que nos dice muchas más cosas el estudio de los diversos conjuntos de Negociación. En el trancurso del capítulo **3** se ha comparado el Núcleo con distintas definiciones de conjuntos de negociación.

A pesar de ser un resultado en parte esperado, no deja de ser importante la coincidencia entre el Núcleo y el conjunto de negociación en el sentido de Aumann & Maschler. Esperado porque la estructura de beneficios medios crecientes del juego financiero así lo hacían presagiar; importante porque no se conocen demasiados resultados acerca de las propiedades del conjunto de negociación en juegos de mercado, en juegos totalmente equilibrados.

Podemos decir que el conjunto de negociación es una solución muy intuitiva en los juegos financieros; con esto queremos decir que las objeciones (propuestas alternativas a una distribución inicial) que se plantean en la discusión entre jugadores responden a una razonamiento lógico y sencillo. ¿Quién va a formular "quejas" respecto al pago recibido?; pues aquel jugador que en términos medios respecto a los recursos aportados esté peor pagado. ¿Quién va a recibir estas "quejas"?; pues aquel jugador que esté mejor pagado. Otro problema distinto es determinar cuál es el pago que deben recibir los jugadores para que la objeción tenga fundamento. Esta pregunta la hemos resuelto mediante el uso de los juegos reducidos. Mediante la reducción del juego jugador a jugador vamos seleccionando aquellos jugadores que realmente no están suficientemente remunerados y que son los que realmente deben incrementar su pago y llevar el peso de la objeción.

El anterior resultado se ve reforzado por la coincidencia con el conjunto de negociación definido por Mas-Colell. Esto es importante porque llegamos a la misma conclusión incluso variando la definición de la solución.

En cambio, no hemos obtenido el mismo resultado cuando hemos comparado el Núcleo con el conjunto de negociación definido por Zhou.

El Conjunto de negociación de Zhou permite pagos fuera del Núcleo; éstos sin embargo deben cumplir como condición necesaria que existan al menos dos coaliciones de jugadores no comparables pero con intersección no vacía que tengan el mismo exceso $(v(S) - x(S))$ y que éste sea máximo respecto a los excesos del resto de coaliciones. Traducido al caso de tres jugadores ello implica que se podría llegar a un acuerdo en un pago fuera del Núcleo cuando dos coaliciones de dos jugadores tuvieran un exceso positivo igual; ello supone que dos jugadores estarán cobrando más que su contribución marginal a expensas del tercer jugador.

El conjunto de negociación de Zhou abre dos cuestiones interesantes: la primera de ellas se refiere a si tiene significado seleccionar distribuciones fuera del Núcleo en un modelo como el de los juegos financieros; la segundo se refiere a la relación de este conjunto con una posible caracterización de la convexidad. Respecto al primer punto se ha de decir que los valores de la función característica no indican un objetivo ineludible a alcanzar por todos los jugadores. Quizás una distribución no remunera suficiente a alguna coalición pero no por ello todos los miembros de la coalición se han de movilizar para conseguir un pago mayor; dentro de la coalición pueden existir algunos jugadores que sí estén bien retribuidos; si los jugadores que están en peores condiciones no son capaces de mejorar por sí sólos no existe motivo para pensar que podrán obtener la colaboración del resto de jugadores. Podríamos resumirlo diciendo que "*cooperación*" no implica "*solidaridad*". Por ejemplo, supongamos un juego de tres jugadores donde el primer jugador aporta 1.000.000 de ptas, el segundo 2.000.000 de ptas. y 3.000.000 de ptas el tercero. Aportando estas cantidades a un banco obtienen el 10 % si invierten hasta 3.000.000 de ptas. y el 11% si invierten más. Obsérvese que en esta situación el tercer jugador es indispensable para la obtención del 11 % pero en cambio es un jugador que puede ser vulnerable. Efectivamente, imaginemos que por diversas razones se llega a un principio de acuerdo en las que el pago acordado es $(1.117.500, 2.227.500, 3,315,000)$; el tercer jugador recibe menos del 11 % pero en cambio es un jugador indispensable para su consecución. La distribución propuesta no pertenece al Núcleo dado que las coaliciones $\{2,3\}$ y $\{1,3\}$ podrían mejorar su resultado. Nótese que a pesar de esto los jugadores **1** y **2** involucrados en éstas coaliciones reciben ambos un pago superior al 11%. A partir de esta distribución inicial, cualquier negociación posterior siempre repercutiría de manera positiva en el tercer jugador produciéndose una regresión en el pago de uno de los dos jugadores restantes; dependerá de los requisitos que se exijan para las objeciones para que éstas sean viables.

Por ejemplo, Aumann & Maschler tiene claro que si el jugador **3** promueve una colaboración y llega a un acuerdo con el **2** para mejorar ambos su pago, el jugador **3** no aceptará una posterior contraoferta del jugador **1** y por tanto la distribución inicial nunca se llevará a cabo.

En la definición de Mas-Colell y Zhou es posible que un jugador que participa en una objeción pueda luego intervenir en una contraobjeción sin restricción alguna, si le interesa. Aparte de ciertas diferencias en las coaliciones que pueden intervenir en la negociación, lo importante es examinar las definiciones de objeción y contraobjeción. En el conjunto de negociación de Mas-Colell es más difícil defenderse contra una objeción que en el conjunto definido por Zhou. Ello simplemente sucede porque los requisitos para una objeción son menos estrictos en Mas-Colell que en Zhou y por tanto el conjunto de objeciones a realizar es más amplio para el primero que para el segundo. De manera inversa cuando hablamos de una contraobjeción son menos estrictas las condiciones de Zhou que las de Mas-Colell con lo que serán mayores las posibles contraobjeciones en el primero que en el segundo. Esto es cierto para un juego de tres jugadores y por eso resulta ser mayor el conjunto de negociación de Zhou que el de Mas-Colell. Ello sería cierto en general si no fuera porque en el conjunto de negociación de Zhou las posibles coaliciones que pueden presentar una contraobjeción están limitadas por unas ciertas condiciones. Ello deja indeterminada la relación entre el conjunto de Negociación de Zhou y el de Mas-Colell. La indeterminación de la anterior relación ha quedado resuelta en nuestro estudio para el caso de los juegos financieros; como hemos visto en el capítulo **3**, el conjunto de negociación de Mas-Colell está incluido en el de Zhou.

Una consecuencia interesante de la coincidencia entre dos de los conjuntos de negociación y el Núcleo es que descarta una posible caracterización de los juegos convexos vía el conjunto de negociación de Aumann-Maschler (ya era conocido) o vía el conjunto de Mas-Colell. Sin embargo, la caracterización utilizando la definición de Zhou queda abierta y reforzada por el resultado anteriormente citado.

Una vez examinadas dos soluciones conjuntistas, era obligado investigar cuál es el comportamiento de tres de las soluciones puntuales más importantes en Teoría de Juegos: el Valor de Shapley, el nucleolus y el valor de τ. Básicamente, de cada solución se ha intentado examinar su pertenencia al Núcleo, su cálculo y su interpretación en los juegos financieros.

Respecto a la pertenencia al Núcleo hemos obtenido resultados diversos: para el valor de Shapley es fácil encontrar ejemplos en que no pertenece al Núcleo; el nucleolus por definición siempre es un elemento del Núcleo y para el Valor de τ no hemos podido presentar ni un resultado afirmativo ni uno negativo.

Respecto al cálculo, nos hemos centrado especialmente en intentar ver si, aprovechando las características de los juegos financieros, podíamos encontrar un algoritmo de cálculo para el nucleolus. En primer lugar nos hemos dedicado al caso de tres jugadores que, a pesar de estar sobradamente estudiado, era de nuestro interés para realizar una crítica posterior de la solución; en el estudio realizado hemos llegado a encontrar un conjunto de fórmulas que permiten su cálculo.

Dada la dificultad encontrada en el estudio general del nucleolus, hemos dedicado parte de nuestros esfuerzos a determinar si el Kernel de un juego financiero se reducía a un único elemento, y por tanto, al nucleolus. Un primer indicio positivo al respecto lo constituye la equivalencia entre el Núcleo y el conjunto de Negociación de Aumann & Maschler: dado que el Kernel está incluido dentro del conjunto de negociación también será un subconjunto del Núcleo. Un segundo resultado obtenido se refiere a la clase de juegos que denominabamos $\mathcal{FG}_*^N$. Para esta clase, hemos llegado a determinar que efectivamente el Kernel contenía un único elemento. La demostración utilizada se basa en la identificación del Núcleo del juego financiero con el de un juego de Bancarrota: si para éste el kernel contiene un único elemento, el del juego financiero también contendrá un único elemento. Esta técnica de demostración es la misma que Driessen [13] utiliza para establecer que sólo existe un único elemento que a la vez pertenezca al Núcleo y al Kernel para el caso de los juegos k-convexos. Sin embargo para el caso general, no hemos podido demostrar ningún resultado positivo al respecto; por ello, como aludíamos anteriormente, consideramos importante dedicar esfuerzos a verificar si el núcleo de un juego financiero siempre equivale al de un juego convexo.

* * * * * *

Respecto a la interpretación de las soluciones puntuales anteriormente mencionadas, todas adolecen del mismo defecto: no tienen en cuenta que en el juego está determinada la aportación de cada jugador. Es evidente que cualquier distribución es posible: anteriormente cuando hablábamos del conjunto de negociación discutíamos un ejemplo donde los jugadores con menos aportación eran remunerados en términos medios mejor que el jugador con mayor aportación; se puede comprobar que esa distribución pertenece al conjunto de negociación de Zhou. Sin embargo, cuando se trata de establecer una única distribución que sirva como referencia para un posible pago a los jugadores, parece que admitir situaciones como aquella no parece lo más idóneo. Pues bien, esto es lo que sucede con el Valor de Shapley, el nucleolus y el valor de τ. Por ello llegamos a la conclusión de que o bien se abandona su recomendación para los juegos financieros o se modifica su definición. En este sentido hemos apuntado dos posibles modificaciones de estas soluciones: el nucleolus proporcional y el valor de τ proporcional.

Igual que determinadas soluciones son especialmente indicadas para determinados modelos, en el capítulo **5**, se ha discutido cuáles deberían ser las propiedades deseables para toda solución aplicada a los juegos financieros. Entre las propiedades establecidas destacan la *no manipulabilidad respecto a recursos* (**NMR**), el *crecimiento respecto a valores medios* (**CVm**), la *simetría respecto a recursos* (**SR**) y la *simetría fuerte respecto a valores medios* (**SFrVm**).

La distribución proporcional es una de las soluciones más utilizadas en la práctica: siempre que existe una base objetiva de la aportación de los agentes, en el caso de la distribución de beneficios, o de la utilización del bien cuyo coste se debe imputar, el reparto proporcional es el usualmente aceptado. A pesar de cumplir buenas propiedades, **SR**, **CVm** y ser la única que cumple no manipulabilidad respecto a recursos, también es fácilmente criticable pues no distingue quién es el jugador que tiene una aportación más decisiva al juego. En este sentido hemos definido la propiedad de simetría fuerte respecto a valores medios que expresa que dos jugadores sólo recibirán el mismo pago medio si y sólo si tienen la misma aportación al juego, esto es, si son simétricos. Aquí el concepto de simetría se refiere a si los jugadores son sustitutos respecto a los valores medios de las coaliciones.

Parece una buena idea exigir a una solución que distinga entre las aportaciones de los jugadores, o en otras palabras, que verifique la propiedad **SFrVm**; la distribución proporcional, por ejemplo, no cumple esta propiedad.

El valor del juego financiero es un nuevo concepto de solución que responde al anterior planteamiento verificando **SFrVm**. Además de esta propiedad cumple las propiedades de **SR** y **CVm**, es individualmente racional, cumple la propiedad de monotonía débil pero sin embargo, no selecciona siempre una distribución del Núcleo. Este incoveniente no lo es tanto si admitimos, como hemos discutido anteriormente, que es posible que se den distribuciones fuera del Núcleo. Más preocupante que este último dato resulta el hecho de que en la discusión del capítulo facilitamos un ejemplo de juego donde el valor financiero del juego es dominado (en el sentido de von Neumann y Morgenstern) por el único elemento del Núcleo.

Este resultado pone de manifiesto la incompatibilidad de ciertas propiedades. Es notorio remarcar el Teorema de imposibilidad que enunciamos y que establece que es imposible hallar una solución que cumpla las propiedades de eficiencia, crecimiento respecto a valores medios y simetría fuerte, y que no sea dominada por el Núcleo; este es el caso del valor financiero del juego. En descargo de este incoveniente diremos que en la mayoría de los casos (si el Núcleo es suficientemente grande) la distribución pertenecerá al Núcleo.

Para finalizar mencionaremos que un trabajo interesante que aún queda por realizar respecto a soluciones específicas es la extensión de soluciones típicas utilizadas para juegos de Bancarrota a la clase de los juegos financieros, tanto en el aspecto de redefinición de las soluciones como el de su estudio axiomático. En nuestro estudio tan sólo hemos adaptado propiedades conocidas para juegos de bancarrota con la finalidad de caracterizar la distribución proporcional.

Bibliografía

[1] R.J. Aumann and H. Drèze. Cooperative games with coalition structures. *International Journal of Game Theory*, 3(4):217–237, 1973.

[2] R.J. Aumann and S. Hart. *Handbook of Game Theory.* Volume 2 of *Handbooks in Economics 11*, Elsevier Science Publishers B.V., The Netherlands, 1995.

[3] R.J. Aumann and S. Hart. *Handbook of Game Theory.* Volume 1 of *Handbooks in Economics 11*, Elsevier Science Publishers B.V., The Netherlands, 1992.

[4] R.J. Aumann and M. Maschler. The bargaining sets for cooperative games. *In: Advances in Game Theory (Eds. Dresher, Shapley & Tucker). Princeton University Press, Princeton, New Jersey*, 443–476, 1964.

[5] R.J. Aumann and M. Maschler. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the talmud. *Journal of Economic Theory*, 36:195–213, 1985.

[6] E. Ballestero. *Economía social y empresas cooperativas. Alianza Universidad*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1990.

[7] D. Bitter. The kernel for the grand coalition of the four-person game. *International Journal of Game Theory*, 11(3):215–239, 1982.

[8] S. Brune. On the regions of linearity for the nucleolus and their computation. *International Journal of Game Theory*, 12(1):47–80, 1983.

[9] Y. Chun. The proportional solution for rights problems. *Mathematical Social Sciences*, 15:231–246, 1988.

[10] I.J. Curiel, M. Maschler, and S.H. Tijs. Bankruptcy games. *Zeitschrift für Operations Research*, 31:143–159, 1987.

[11] M. Davis and M. Maschler. The kernel of a cooperative game. *Naval Res. Logist. Quart.*, 12:223–259, 1965.

[12] T.S.H. Driessen. An alternative game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the talmud: the case of the greedy bankruptcy game. *Center for Rationality and interactive decision Theory. the Hebrew Univeristy of Jerusalem*, Discussion paper n 93, 1996.

[13] T.S.H. Driessen. *Cooperative Games, solutions and applications. Theory and Decision Library. Series C:Game Theory, Math. Programming & Math. Economics.*, Kluwer Academic Publishers., Dordrecht, the Netherlands, 1988.

[14] T.S.H. Driessen. Tree enterprises and bankruptcy ventures: a game theoretic similarity due to a graph theoretic proof. *Center for Rationality and interactive decision Theory. the Hebrew Univeristy of Jerusalem*, Discussion paper n 92, 1996.

[15] T.S.H. Driessen and S.H. Tijs. The τ-value, the core and semiconvex games. *International Journal of Game Theory*, 14(4):229–248, 1985.

[16] B. Dutta, D. Ray, K. Sengupta, and R. Vohra. A consistent bargaining set. *Journal of Economic Theory*, 49:93–112, 1989.

[17] P.C. Fishburn and H.O. Pollak. Fixed route cost allocation. *American Mathematical Monthly*, 90:366–378, 1983.

[18] M.A. de Frutos. Coalitional manipulations in a bankruptcy problem. Enero 1995. no publicado.

[19] D. Gillies. Solutions to general non-zero-sum games. *Annals of mathematical studies. "Contribution to the theory of Games"*, 4:47–85, 1959.

[20] F. Grafe, E. Iñarra, and J.M. Zarzuelo. On externality games. *Documentos de Trabajo, Universidad del Pais Vasco*, 93.01:, 1993.

[21] D. Granot and G. Huberman. The relationship betwen convex games and minimum cost spanning tree games: a case for permutationally convex games. *SIAM J. Alg. Disc. Math.*, 3:228–292, 1982.

[22] S. Hamlem, W. Hamlem, and J. Tschirhart. The use of the generalized Shapley value in joint cost allocation. *The Accounting Review.*, LV(2), 1980.

[23] E. Iñarra and J.M. Usategui. The Shapley value and average convex games. *International Journal of Game Theory*, 22:13–29, 1993.

[24] E. Kalai and D. Samet. On weighted Shapley values. *International Journal of Game Theory*, 16:205–222, 1987.

[25] E. Kalai and E. Zemel. Generalized network problems yielding totally balanced games and games of flow. *Mathematics of Operation Research*, 30:998–1008, 1982.

[26] E. Kalai and E. Zemel. Totally balanced games and games of flow. *Mathematics of Operation Research*, 7:476–478, 1982.

[27] J. Lemaire. An application of game theory: cost allocation. *Astin Bulletin*, 14(1), 1983.

[28] J. Lemaire. Cooperative game theory and its insurance applications. *Astin Bulletin*, 21(1), 1991.

[29] W.F. Lucas. A game with no solution. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 74:237–239, 1968.

[30] M. Maschler. An advantage of the bargaining set over the core. *Journal of Economic Theory*, 13:184–192, 1976.

[31] M. Maschler. The inequalities that determine the bargaining set $\mathcal{M}_1^{(i)}$. *Israel Journal of Mathematics*, 4:127–134, 1966.

[32] M. Maschler, B. Peleg, and L.S. Shapley. Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solutions concepts. *Mathematics Operation Research*, 4:303–338, 1979.

[33] M. Maschler, B. Peleg, and L.S. Shapley. The kernel and bargaining set for convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:73–93, 1972.

[34] A. Mas-Colell. An equivalence theorem for a bargaining set. *Journal of Mathematical Economics.*, 18:129–139, 1989.

[35] N. Megiddo. On the nonmonotonocity of the bargaining set, the kernel and the nucleolus of a game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 27:355–358, 1974.

[36] H. Moulin. *Axioms of cooperative Decision Making. Econometric Society Monographs.*, Cambridge University Press., Cambridge, 1988.

[37] H. Moulin. Equal or proportional division of a surplus, and other methods. *International Journal of Game Theory*, 16(3):161–186, 1987.

[38] S. Muto, M. Nakayama, J Potters, and S.H. Tijs. On big boss games. *The Economic Studies Quarterly.*, 39(4):303–321, 1988.

[39] M. Nuñez and C. Rafels. Extreme core points and reduced games. 1994. XXV Symposium Mathematical Prog. Michigan.

[40] B. O'Neill. A problem of rights arbitration from the talmud. *Mathematic Social Sciences*, 2:345–371, 1982.

[41] G. Owen. *Game Theory.* New York Academic Press., New York, 1982.

[42] G. Owen. On the core of linear production games. *Math. Programming*, 9:358–370, 1975.

[43] B. Peleg. An axiomatization of the core of market games. *Mathematics of Operation Research.*, 14(3):448–456, 1989.

[44] B. Peleg. On the reduced game property and its converse. *International Journal of Game theory*, 15(3):187–200, 1986.

[45] J Potters, I. Curiel, and S.H. Tijs. Traveling salesman games. *Mathematical Programming*, 53:199–211, 1992.

[46] J. Potters, J. Poos, and S.H. Tijs. Clan games. *Games and Economic Behavior 1, 275-293*, 1:275–293, 1989.

[47] D. Schmeidler. Cores of exact games. *Journal of Math. Analysis and Applications*, 40:214–225, 1972.

[48] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.

[49] L.S. Shapley. Core of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1:11–26, 1971.

[50] L.S. Shapley. On balanced sets and cores. *Naval Res. Logist. Quartely*, 14:453–460, 1967.

[51] L.S. Shapley. A value for n-person games. *Annals of mathematical studies.*, 28:307–317, 1953.

[52] L.S. Shapley and M. Shubik. On market games. *Journal of Economic Theory*, 1:9–25, 1969.

[53] W.W. Sharkey. Cooperative games with large cores. *International Journal of Game Theory*, 11:175–182, 1982.

[54] W.W. Sharkey. Game teoretic modeling of increasing returns to scale. *Games and Economic Behavior*, 1:370–431, 1989.

[55] W.W. Sharkey and L.G. Telser. Supportable cost functions for the multiproduct firm. *Journal of Economic theory*, 18:23–37, 1978.

[56] M. Shubik. *A Game-Theoretic Approach to Political Economy.* The MIT Press., Cambridge, Massachusetts, London, England., 1984.

[57] Y. Sprumont. Population monotonic allocation schemes for cooperatives with transferable utility. *Games and Economic Behavior*, 2:378–394, 1990.

[58] S.H. Tijs. Bounds for the core and the τ-value. *Game Theory and Mathematical Economics (Eds. O.Moeschlin & D. Pallasche) North-Holland*, 123–132, 1981.

[59] S.H. Tijs and F.A.S. Lipperts. The hypercube and the core cover of n-person cooperative games. *Cahier Centre D' tudes de Recherche Op rationelle.*, 24:27–37, 1982.

[60] R. Vohra. An existence theorem for a bargaining set. *Journal of Mathematical Economics*, 20:19–34, 1991.

[61] J. von Neuman and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.(3 ed.).* Princeton University Press., Princeton, New Jersey., 1953.

[62] H.P. Young. Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 14:65–72, 1985.

[63] L. Zhou. A new bargaining set of an n-person game and endogenous coalition formation. *Games and Economic Behavior*, 6:512–526, 1994.

Índice alfabético

A

Aditividad 170
Aditividad parcial 38
Agentes (juegos de mercado) 85
Arco 81

B

Bancarrota
  El problema 21
  El juego 22, 90, 173
  y Distribución proporcional 214
  y Valor de τ 203
  y Nucleolus 188

C

Caracterización
  del Valor de Shapley 169
  de la distribución proporcional 216, 219
"Clan game" 67
CLAN, propiedad 67
Cobertura del Núcleo 91
Colección equilibrada 80
Conjunto de Negociación 123, 124
  según Aumann & Maschler 125, 126
  según Mas-Colell 145
  según Zhou 153, 154
Conjuntos estables 109,111
  y Núcleo 112
Consistencia 191, 192
Continuidad 215
Contraobjección 124, 125
  según Aumann & Maschler 126
  según Mas-Colell 146
  según Zhou 154
Contribución marginal 95 99
Costes medios decrecientes 47
"Cost-sharing game" 49
Crecimiento en valores medios 212, 228

D

Desreducción 131, 136
Distribución proporcional 79, 215, 88
  caracterización
    vía axiomas 216, 219
    vía pagos medios 222
Dominación 111
"Dummy" 170

E

Eficiencia 170, 214, 218
Estructura de coalición 125, 153
Estructura algebraica 29
Exceso 126, 128, 174
  per capita 197
  proporcional, 197 **F**

"Flow game" 81
Flujo 81
Función
 característica 1
 de Costes 47
 de Ingresos 15
 de utilidad 85
 lineal 86

G

Generador 34
Grafo 82

I

Independencia lineal 32
Ingresos
 Marginales 23
 Medios 23

J

Juego
 1-convexo 62 , 90
 cero-normalizado 194, 196
 coalicionalmente anónimo 35
 convexo 2 , 54, 99, 112
 convexo$_*$ 59
 convexo en media 64
 cooperativo 1 ,19
 de mercado 81, 84
 de producción lineal 69
 de utilidad transferible 19
 equilibrado 80, 126
 exacto 94, 112
 k-convexo 61
 máximo 28
 monótono 226
 permutacionalmente convexo 63
 reducido 96, 117, 135, 148, 157
 semiconvexo 61
 superaditivo 35
 totalmente equilibrado 81
Juegos de mínimo nivel 31, 91
Juegos de valores medios crecientes 3, 18, 100, 132, 147
Juegos Financieros
 de ingresos 19
 de costes 47
Jugador
 simétrico 225
 falso 170

K

K-cobertura 61
Kernel 175, 188

L

Linealidad restringida 219

M

Manipulaciones 173, 212
"Market game", (*ver Juegos de Mercado*)
Máximo excedente 175
Máximo, juego (*ver Juego Máximo*)
Mercado 84, 85
Monotonía respecto a N 226
mínimo nivel, (*ver Juegos de mínimo nivel*)

N

Negociación bilateral 192
No manipulabilidad 212
"Non-advantageous joining" 214

"Non-advantageous splitting" 214
Núcleo 79, 123, 228
Nucleolus 174, 175
    per cápita 197
    proporcional 197
Nudo 81

O

Objección 125
    según Aumann & Maschler 125
    según Mas-Colell 145
    según Zhou 153
Orden lexicográfico 174, 221

P

Pago medio 128
    a una coalición 221
Prekernel 175, 188
Prenucleolus 175
Pseudoracionalidad individual 218

R

Racionalidad individual 214, 225
Red 81
Regla "CGCDR" 190, 194
Rendimientos crecientes 13
"Rights Problems" 191

S

Simetría 169
    respecto a recursos 212
    respecto a valores medios 225
    fuerte resp a val. medios 225, 229
Solución 77, 209, 213
Solución "standard" 192
"Strategy-proof" 214
Suma de dos juego financieros 29

T

Transformaciones S-equivalentes 196
"Travelling Salesman game" 64

U

Unanimidad, juegos de 29
Unión, propiedad 67

V

Valor
    de Shapley 169
    de τ 200
        proporcional 205
    del juego financiero 223
Valor esperado 172
vector
    de Contribuciones marginales 63, 91
    de Excesos proporcionales 197
    de Mínimos derechos 91, 200
    de Pagos medios 221
    de Utopía 200
    eficiente 77