UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES ECONÒMIQUES I EMPRESARIALS
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA ECONÒMICA, FINANCERA I ACTUARIAL

LA TEORIA DE LA CREDIBILITAT : EXTENSIONS I APLICACIONS

Lluís Bermúdez i Morata
Barcelona, maig 1997.

A 3.5.2 s'ha vist que l'estimador de credibilitat per a la cel·la (i, j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{3.161}$$

Els valors de cadascuna de les components estan expressades en la taula 3.17. En el centre de la taula són donades les nou realitzacions de la variable $\Xi_{ij}^{(12)*}$. L'última columna conté les realitzacions de la variable $\Xi_i^{(1)*}$, que són iguals a zero.

Taula 3.17 *Composició de les primes de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
$i=1$	-57.23	3.88	17.59	0
$i=2$	-66.27	-9.25	9.99	0
$i=3$	-27.77	24.87	115.13	0

Podem veure que les característiques de la taula 3.1 també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada per a cada client nou és més petita si el client té poca experiència laboral (-57.23, -66.27 i -27.77) sigui solter divorciat o aparellat respectivament. Per altra banda, a més antiguitat més prima. Pel que fa a l'estat civil, és prou clar que els aparellats han de pagar més prima sigui quina sigui la seva antiguitat.

L'estimador de credibilitat per a les persones solteres que han treballat menys de dos anys en el seu actual lloc de treball és obtinguda a partir de la taula 3.17 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{ijs} &= m + \Xi_{11}^{(12)*} \\ &= 242.51 - 57.23 = 185.28 \end{aligned} \tag{3.162}$$

Com hem vist al final de l'apartat 3.5.2 el model jeràrquic de Jewell pot també presentar-se amb el segon factor com a primer nivell i el primer factor en el segon nivell depenent del segon factor. Seguirem, doncs, el mateix procediment indicat per l'anterior exemple, però canviant el primer factor pel segon en el primer nivell. I per estimar les primes de credibilitat, hem programat amb llenguatge APL el model de Jewell (vegeu apèndix C). Els paràmetres estructurals estimats per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 242.51 \\ b^{(2)*} &= 0 \\ b^{(12)*} &= 3064.17 \\ S^{2*} &= 26986.55 \end{aligned} \tag{3.163}$$

Hem fet servit els respectius estimadors indicats a la secció 3.5.2. A la taula 3.18 hem fet un resum dels estimadors de credibilitat de les quanties que hauran de ser pagades per la companyia asseguradora el proper any a causa de la fallida dels nous clients, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 3.18 *Primes de Credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	191.60	245.99	258.20
$i=2$	181.93	234.07	251.55
$i=3$	217.86	264.58	345.91

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.125). A la taula següent, hi han les quanties dels coeficients de credibilitat:

Taula 3.19 *Coeficients de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	0.819	0.830	0.823
$i=2$	0.860	0.857	0.845
$i=3$	0.816	0.816	0.833
	0	0	0

Com es pot veure, només trobem els coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ lligats a $\Xi_{ij}^{(12)}$, ja que els coeficients de credibilitat $z_i^{(2)}$ són iguals a zero. Per tant, la component $\Xi_i^{(2)}$ del model no aporta cap explicació a les primes de credibilitat. Així doncs, els resultats són molt semblants als que obteníem del model de Bühlmann-Straub.

Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 3.18, considerem les expressions del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) + (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(2)}(Y_{izw} - m) \tag{3.164}$$

on les mitjanes ponderades es defineixen com:

$$\begin{aligned} X_{ijw} &= \sum_{s=1}^{t_{ij}} \frac{w_{ijs}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijs}; \\ Y_{zjw} &= \sum_{l=1}^{J} \frac{z_{il}^{(12)}}{z_{i\Sigma}^{(12)}} \left(X_{ilw} - \Xi_l^{(1)*}\right) \end{aligned} \tag{3.165}$$

I el vector Y_{zjw} és igual a $(187.94\,, 249.35\,, 293.74)$.

Finalment, hom pot veure que la prima de credibilitat de la cel·la (1,1) pot ser calculada de la manera següent:

$$\begin{aligned} 191.6 = 242.51 &+ 0.819 \cdot (187.95 - 242.51) \\ &+ (1 - 0.819) \cdot 0 \cdot (249.34 - 242.51) \end{aligned} \tag{3.166}$$

A 3.5.2 s'ha vist que l'estimador de credibilitat per a la cel·la (i, j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{3.167}$$

Els valors de cadascuna de les components estan expressats a la taula 3.20. En el centre de la taula són donades les nou realitzacions de la variable $\Xi_{ij}^{(12)*}$. L'última fila conté les realitzacions de la variable $\Xi_i^{(2)*}$, que són igual a zero.

Taula 3.20 *Composició de les primes de credibilitat*

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	−50.92	3.48	15.69
$i=2$	−60.59	−8.44	9.04
$i=3$	−24.65	22.07	103.40
	0	0	0

Podem veure que les característiques de la taula 3.1 també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada per a cada client nou és més petita si el client té poca experiència laboral (−50.92 , −60.59 i −24.65) sigui solter divorciat o aparellat respectivament. Per tant, a més antiguitat més prima. Pel que fa a l'estat civil, és prou clar que els aparellats han de pagar més prima sigui quina sigui la seva antiguitat.

L'estimador de credibilitat per a les persones solteres que han treballat menys de dos anys en el seu actual lloc de treball és obtingut a partir de la taula 3.20 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{11s} &= m + \Xi_{11}^{(12)*} \\ &= 242.51 - 50.92 = 191.6 \end{aligned} \tag{3.168}$$

Capítol 4

Aplicació al ram de robatori de comerços

En aquest capítol apliquem els models credibilístics de classificació creuada al ram de robatori a comerços. Aquest és un ram on la diferenciació de pòlisses segons el risc que assumeixen és molt important, per aquest motiu, la Teoria de la Credibilitat pot representar una bona ajuda a l'hora de calcular les primes de les diferents pòlisses segons la seva pròpia experiència de sinistralitat. En aquest cas, hem escollit dos factors que creiem són els més importants per diferenciar unes pòlisses d'altres. El primer factor que considerem és el capital assegurat per la pòlissa, i el segon el tipus de comerç. El primer factor ha estat dividit en tres categories diferents, per tant $I = 3$, on la primera ($i = 1$) està formada per aquelles pòlisses que tenen un capital assegurat de menys de cinc milions de pessetes; la segona categoria ($i = 2$) és per aquells comerços que tenen un capital assegurat entre cinc i deu milions de pessetes; i per últim, aquelles pòlisses amb el capital assegurat superior als deu milions de pessetes formen la tercera categoria ($i = 3$) del primer factor. Pel que fa al segon factor, hem escollit dotze tipus de comerços diferents ($J = 12$). A continuació enumerem aquests dotze tipus, davant de cada un d'ells hi figura l'abreviació amb la que apareixeran en les següents taules de resultats.

R	$j = 1$	Restaurants, bars i cafeteries
B	$j = 2$	Bijuteries
M	$j = 3$	Moda i confecció
Q	$j = 4$	Queviures
A	$j = 5$	Art
E	$j = 6$	Esports
ED	$j = 7$	Electrodomèstics
O	$j = 8$	Ordinadors i material d'oficines
SV	$j = 9$	So, vídeo i electrònica
S	$j = 10$	Supermercats
T	$j = 11$	Transports (agències)
V	$j = 12$	Viatges (agències)

Les dades que hem fet servir, i que a continuació mostrarem, han estat escollides de les publicacions que l'associació "Investigación cooperativa entre entidades aseguradoras" (I.C.E.A.) va fer durant els anys d'observació de 1990 a 1994. Aquesta associació va fer aquests estudis a partir de les dades oferides per una vintena de companyies asseguradores, que treballen en aquest ram a Espanya. Aquests informes, sota el títol genèric de "La siniestralidad de robo en comercios", són una recopilació estadística del que ha estat aquest ram d'assegurances en aquests cincs anys a Espanya. Hem cregut interessant recollir les dades del cost mitjà de sinistralitat per cada tipus de comerç segons el tram de capital assegurat. Les següents taules mostren el cost mitjà, expressat en pessetes, que representa per a cada companyia. La primera taula és per aquelles pòlisses amb menys de cinc milions de capital assegurat, la segona i tercera per les respectives categories del primer factor.

Taula 4.1 *Cost mitjà per sinistre de les pòlisses contractades per menys de cinc milions de capital assegurat.*

$i = 1$	1990	1991	1992	1993	1994
$j = 1$	88503	85013	96207	103165	106914
$j = 2$	75889	93033	171327	128547	120098
$j = 3$	192058	130176	191222	167635	183663
$j = 4$	87734	59273	80789	77401	79723
$j = 5$	136273	52150	60950	54783	68647
$j = 6$	132729	191835	180930	190604	171582
$j = 7$	161912	144893	148759	137131	151609
$j = 8$	311556	156519	220667	209522	127310
$j = 9$	124917	145000	477056	376214	148903
$j = 10$	90153	104119	76672	85244	84155
$j = 11$	582000	27700	102460	94611	98921
$j = 12$	111429	87423	109643	93229	94034

Amb un ràpid cop d'ull a aquestes dades, podem dir de seguida quins tipus de comerços tenen un cost mitjà de sinistralitat més alt ($j = 8$ i $j = 9$), que corresponen a ordinadors i a so-vídeo, i quins el tenen més baix ($j = 1$ i $j = 4$), que són restaurants i queviures. De la mateixa manera podem veure comerços amb un cost mitjà que podríem considerar de comportament mitjà ($j = 6$ i $j = 3$), que corresponen a botigues d'esports i moda respectivament. També podem veure que en algun cas ($j = 11$) les dades són molt diferents d'un any a l'altre, aquesta variabilitat suposa un entrebanc pels nostres objectius, sobretot, perquè no disposem de molta experiència acumulada. De totes maneres, creiem que si disposèssim de més anys d'observació aquestes dades irregulars serien menys importants.

Taula 4.2 *Quanties del cost mitjà per sinistre de les pòlisses contractades per cinc a deu milions de capital assegurat.*

$i = 2$	1990	1991	1992	1993	1994
$j = 1$	112420	106011	127953	124235	130572
$j = 2$	128250	499200	332000	101500	229737
$j = 3$	198179	213601	207276	275242	265953
$j = 4$	100247	94662	91266	109627	108965
$j = 5$	317200	78500	76556	151769	638000
$j = 6$	265118	232600	268612	240000	206603
$j = 7$	241764	205531	200971	225875	154468
$j = 8$	362250	261594	303833	550864	433444
$j = 9$	240500	309550	92286	403000	380875
$j = 10$	137694	98571	147759	115710	131569
$j = 11$	313000	21000	194929	159000	51143
$j = 12$	165000	154250	72385	104674	160707

Pel que fa a aquesta segona taula, només comentar, que lògicament, el cost mitjà per a tots els tipus de comerços ha augmentat. De la mateixa manera que abans, també hi ha certes observacions irregulars ($j = 9$) que poden alterar els resultats. Un cop més ressaltem la importància de tenir quantes més observacions millor, per poder assegurar l'ajustament dels nostres resultats.

De la tercera taula, per les pòlisses amb un capital assegurat de més de deu milions, i òbviament amb quanties més grans del cost mitjà, podem resaltar la manca de dues observacions per a l'any 1990 ($j = 2$ i $j = 5$) produïdes per la falta de sinistres en aquest any. Això empitjora la falta de suficients observacions perquè els resultats siguin més fiables. Nosaltres creiem que els resultats que veurem a continuació estan prou ajustats a la realitat, però no tenim cap dubte que els resultats i les estimacions millorarien si disposèssim de més anys d'observació.

Taula 4.3 *Cost mitjà per sinistre de les pòlisses contractades per més de deu milions de capital assegurat.*

$i = 3$	1990	1991	1992	1993	1994
$j = 1$	162550	133896	150847	141159	162765
$j = 2$	0	110000	535333	298000	640750
$j = 3$	190929	343435	276382	261431	340520
$j = 4$	124469	208497	207108	217752	327808
$j = 5$	0	40750	126667	311667	32667
$j = 6$	327125	223111	361122	326597	227611
$j = 7$	398286	391039	265699	341268	386183
$j = 8$	139500	221750	453588	1087667	614567
$j = 9$	348667	230083	876313	495769	1015875
$j = 10$	152357	184049	220870	149806	142642
$j = 11$	350500	134500	646187	150903	115645
$j = 12$	25167	48207	61590	78983	99027

Fins ara, només tenim la informació referent al cost mitjà per sinistre, però en aquest ram tant important és el cost mitjà per sinistre com el nombre de sinistres que hi han hagut per a cada any d'observació. Per això, hem cregut convenient incorporar aquesta informació via pesos o ponderacions naturals per a la nostra aplicació. A continuació, de la mateixa manera que abans, detallarem aquesta informació en tres taules, una per a cada un dels trams amb què hem dividit el primer factor.

Taula 4.4 *Nombre de sinistres de les pòlisses contractades per menys de cinc milions de capital assegurat.*

$i = 1$	1990	1991	1992	1993	1994
$j = 1$	1121	2921	3006	4289	4819
$j = 2$	9	61	49	64	51
$j = 3$	585	772	706	767	722
$j = 4$	467	983	990	1215	1149
$j = 5$	11	20	20	23	17
$j = 6$	59	97	86	96	79
$j = 7$	68	84	79	99	87
$j = 8$	9	27	39	46	71
$j = 9$	12	37	18	14	31
$j = 10$	111	185	186	225	200
$j = 11$	2	50	50	72	76
$j = 12$	14	78	98	175	145

Com podem veure en aquesta taula, aquells comerços que tenien un cost mitjà baix com els restaurants o les botigues de queviures són les que tenen un major nombre de sinistres. És a dir, tenen freqüents robatoris però de poca quantitat. En canvi, els comerços d'ordinadors i so-vídeo que tenien un cost mitjà molt elevat tenen molt menys nombre de sinistres. D'aquí, la importància d'incloure el nombre de sinistres en aquesta aplicació. Sense aquestes dades els resultats que obtindríem serien molt diferents als que exposarem a continuació.

Taula 4.5 *Nombre de sinistres de les pòlisses contractades per cinc a deu milions de capital assegurat.*

$i = 2$	1990	1991	1992	1993	1994
$j = 1$	281	917	897	1531	1721
$j = 2$	4	20	7	16	19
$j = 3$	140	333	366	401	449
$j = 4$	97	275	334	308	287
$j = 5$	5	2	9	13	7
$j = 6$	34	85	67	73	63
$j = 7$	55	98	70	112	94
$j = 8$	4	32	24	44	27
$j = 9$	2	20	14	10	16
$j = 10$	36	126	112	131	121
$j = 11$	1	1	14	24	14
$j = 12$	3	20	13	46	41

Com en la informació del cost mitjà, aquí també s'observa un canvi de tendència per a les pòlisses contractades de cinc a deu milions de capital assegurat, si bé en aquest cas el que passa és que el nombre de sinistres disminueix quan el capital assegurat és més alt. Això pot ser causat perquè el nombre d'aquests contractes és menor, així com a les millors mesures de seguretat de que disposen els comerços amb un capital assegurat més gran. De totes maneres es manté la diferència entre els comerços amb un cost mitjà més baix (més nombre de sinistres) i els que el tenen més alt (menys nombre de sinistres).

Taula 4.6 *Nombre de sinistres de les pòlisses contractades per més de deu milions de capital assegurat.*

$i = 3$	1990	1991	1992	1993	1994
$j = 1$	100	83	431	863	989
$j = 2$	0	2	6	10	16
$j = 3$	99	262	241	332	442
$j = 4$	49	159	166	270	213
$j = 5$	0	4	3	6	3
$j = 6$	24	36	41	62	57
$j = 7$	28	76	93	127	115
$j = 8$	4	12	17	18	30
$j = 9$	3	12	16	13	16
$j = 10$	56	184	131	186	162
$j = 11$	2	2	16	31	45
$j = 12$	6	29	39	61	72

Un cop detallades les dades que utilitzarem per la present aplicació, passarem a mostrar dues taules on recollim la informació de les sis anteriors. En la taula següent, per exemple, es troba resumida la informació sobre el cost mitjà de sinistralitat. Per això hem trobat les mitjanes de les dades per als cinc anys d'observació. Les trenta-sis mitjanes del centre de la taula, són les mitjanes per a cada cel·la (i, j). Als marges hi han les mitjanes de les files i les columnes, és a dir, les mitjanes pel segon i primer factors respectivament. Per últim, a la cantonada inferior dreta hi ha la mitjana global de totes les observacions.

Taula 4.7 *Mitjanes del cost mitjà per sinistre*

		< 5	$5 - 10$	> 10	
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	
R	$j = 1$	98627	123152	150162	109858
B	$j = 2$	124381	285000	490118	193350
M	$j = 3$	171462	239504	299996	215558
Q	$j = 4$	75950	100905	235993	100314
A	$j = 5$	68000	246417	156938	122867
E	$j = 6$	177103	240118	290508	224277
ED	$j = 7$	147959	203555	349278	235297
O	$j = 8$	178714	404985	604259	337404
SV	$j = 9$	226196	291742	675450	358756
S	$j = 10$	87697	123581	170101	124000
T	$j = 11$	88008	140648	220740	126970
V	$j = 12$	96224	129471	76806	96307
		106635	153310	220590	134684

En aquesta taula es pot veure el que ja hem comentat abans. Per una banda, l'augment del cost mitjà a mida que canviem el tram de capital assegurat (vegeu l'última fila de la taula que correspon a les mitjanes per a cada tram de capital). I per l'altra, les acusades diferències del cost mitjà segons el tipus de comerç que sigui (vegeu la última columna que correspon a les mitjanes per a cada tipus de comerç).

Taula 4.8 *Sumes del nombre de sinistres*

		< 5	$5 - 10$	> 10	
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	
R	$j = 1$	16256	5347	2766	24369
B	$j = 2$	234	66	34	334
M	$j = 3$	3552	1689	1376	6617
Q	$j = 4$	4804	1301	857	6962
A	$j = 5$	91	36	16	143
E	$j = 6$	417	322	220	959
ED	$j = 7$	417	429	439	1285
O	$j = 8$	192	131	81	404
SV	$j = 9$	112	62	60	234
S	$j = 10$	907	526	719	2152
T	$j = 11$	250	54	96	400
V	$j = 12$	510	123	207	840
		27742	10086	6871	44699

De la mateixa manera, hem construït una taula similar pel nombre de sinistres. Les dades del mig de la taula són el nombre de sinistres que hi ha hagut per a cada cel·la (i, j). L'última fila de la taula, al marge inferior, és el nombre total de sinistres per a cada tram de capital, on s'observa un decreixement del nombre, al passar d'un tram a l'altre. A l'última columna, en canvi, tenim el nombre total de sinistres per a cada tipus de comerç. Per últim, a la cantonada inferior dreta, trobem el nombre total de sinistres observats durant aquests cinc anys.

A continuació, a partir d'aquestes dades, aplicarem cadascun dels models que hem analitzat en el capítol anterior. Començant pel model "two way", seguint amb l'additiu i acabant pels models clàssics de credibilitat. A mida que tinguem resultats de cada model, també mirarem de decidir quin dels models analitzats és el que més s'ajusta a las dades d'aquesta aplicació.

4.1 Model "two way"

En primer lloc, aplicarem les dades al model "two way" pròpiament dit. Tal i com hem vist en la secció 3.3.1, seguirem el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Els paràmetres estructurals estimats per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 134684 \\ b^{(1)*} &= 0 \\ b^{(2)*} &= 0 \\ b^{(12)*} &= 1.8615E10 \\ S^{2*} &= 2.9867E11 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Hem fet servit els estimadors indicats a la secció 3.3.1. Pel que fa als coeficients arbitraris $g_i^{(1)}$ i $g_j^{(2)}$, que apareixen a (3.45) i (3.48) respectivament són iguals a la unitat. Com podem veure, pel fet que les variàncies dels dos factors són iguals a zero, $b^{(1)}$ i $b^{(2)}$, el model "two way" no sembla ser el que més s'ajusta a les dades. Això ens permetrà seguir per altres vies com, per exemple, els models jeràrquics. En aquest cas, el model "two way" ens indica, a través de l'elevat valor de la variància $b^{(12)}$, que potser el model de Bühlmann-Straub és el més indicat, ja que el model "two way" opta per explicar-nos tota la variància de les dades per la component mixta dels dos factors $b^{(12)}$. Com més tard veurem, les primes resultants són molt semblants a les que trobarem quan apliquem el model de Bühlmann-Straub.

A la taula 4.9 hem fet un llistat dels estimadors de credibilitat de les primes que hauran d'abonar els comerços a la companyia asseguradora el proper any perquè aquesta es faci càrrec del risc de robatori, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 4.9 *Primes de Credibilitat*

		<5	$5-10$	>10
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
R	$j=1$	98662	123187	150072
B	$j=2$	125042	255605	376164
M	$j=3$	171297	238518	298091
Q	$j=4$	76145	101316	234131
A	$j=5$	77995	211971	145795
E	$j=6$	175531	235114	279917
ED	$j=7$	147467	201072	341712
O	$j=8$	175318	375492	526624
SV	$j=9$	214730	259454	561355
S	$j=10$	88513	123910	169328
T	$j=11$	90823	139282	208417
V	$j=12$	97397	130073	80970

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.29). A la taula següent, hi han les quanties dels coeficients de credibilitat.

Taula 4.10 *Coeficients de credibilitat*

		< 5	$5 - 10$	> 10	
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	
R	$j = 1$	0.999	0.997	0.994	0
B	$j = 2$	0.936	0.804	0.679	0
M	$j = 3$	0.996	0.991	0.988	0
Q	$j = 4$	0.997	0.988	0.982	0
A	$j = 5$	0.850	0.692	0.499	0
E	$j = 6$	0.963	0.952	0.932	0
ED	$j = 7$	0.963	0.964	0.965	0
O	$j = 8$	0.923	0.891	0.835	0
SV	$j = 9$	0.875	0.794	0.789	0
S	$j = 10$	0.983	0.970	0.978	0
T	$j = 11$	0.940	0.771	0.857	0
V	$j = 12$	0.969	0.885	0.928	0
		0	0	0	

La mitjana dels coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ lligats a l'experiència del risc dins de cada cel·la és aproximadament del 92%, la qual és bastant alta. Era normal que així fos ja que només es tenia en compte $\Xi_{ij}^{(12)}$ per explicar el model. Molt meys importants semblen les dues altres components $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ del model. Com hem vist abans, les seves variàncies són nul·les $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$, i per extensió, els coeficients de credibilitat també ho seran. Per tant, tot sembla indicar que el model que hem d'aplicar és el de Bühlmann-Straub. De totes maneres, veurem que no és l'única alternativa que tenim a les nostres mans. Un cop calculats els coeficients de credibilitat, i per arribar als resultats de la taula 4.9, considerem les expressions

(3.30-3.33) del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$\begin{aligned} X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) &+ (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(1)}(Y_{izw} - m) \\ &+ (1 - z_{ij}^{(12)})z_j^{(2)}(Y_{zjw} - m). \end{aligned} \tag{4.2}$$

En el Teorema 3.5 s'ha demostrat que l'estimador de credibilitat per la cel·la (i,j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{4.3}$$

Taula 4.11 *Composició de les primes de credibilitat*

		< 5	$5 - 10$	> 10	
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	
R	$j = 1$	−36022	−11497	15388	0
B	$j = 2$	−9642	120921	241481	0
M	$j = 3$	36612	103834	163407	0
Q	$j = 4$	−58539	−33368	99447	0
A	$j = 5$	−56689	77287	11111	0
E	$j = 6$	40847	100430	145233	0
ED	$j = 7$	12783	66388	207028	0
O	$j = 8$	40634	240808	39194	0
SV	$j = 9$	80046	124770	426671	0
S	$j = 10$	−46170	−10774	34644	0
T	$j = 11$	−43861	4598	73733	0
V	$j = 12$	−37287	−4611	−53714	0
		0	0	0	

Els valors de cadascuna de les components estan expressades en la taula 4.11. En el centre de la taula són donades les trenta-sis realitzacions de la variable $\Xi_{ij}^{(12)*}$. Com ja hem vist són les úniques, ja que l'última columna corresponent a les realitzacions de la variable $\Xi_i^{(1)*}$, i la fila d'abaix de tot, $\Xi_j^{(2)*}$, són iguals a zero.

Tot i que les components individuals pels factors són iguals a zero, podem veure que les característiques que hem observat a les tres primeres taules també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada per a cada client nou és més petita si el client només assegura per una quantia inferior a cinc milions. Observeu que els valors negatius apareixen més a la primera columna. A més per a tots aquells comerços que havíem comentat que tenien un cost mitjà més elevat ($j = 8$ i $j = 9$) podem observar que sumem quantitats més elevades a la mitjana global m . Els marges de la taula mostren que l'experiència dels riscos dels factors de risc per separat, no tenen cap efecte en la prima de credibilitat com ja havíem endevinat a l'analitzar els coeficients de credibilitat. La prima de credibilitat per als comerços del tipus restaurants ($j = 1$), i que asseguren per un capital menor a cinc milions s'obté a partir de la taula 4.11 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{ijs} &= m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \\ &= 134684 + 0 + 0 - 36022 = 98662 \end{aligned} \tag{4.4}$$

El primer terme és la mitjana global estimada. A continuació, els dos termes iguals a zero són la part que li pertocaria pel fet de ser restaurant i assegurar per menys de cinc milions. Per últim, i a causa de a la interacció que causa el fet conjunt de ser restaurant i al mateix temps, tenir un capital assegurat inferior a cinc milions, es resten 36022 pessetes a la mitjana global.

En conclusió, el resultat d'aplicar les nostres dades al model "two way" no semblen gaire bones. Les components dels factors per separat són nul·les, fet que invalida aquest model per aquestes dades. Pel contrari, el model ens indica mitjançant la component mixta, molt elevada, que podríem aplicar les dades al model de Bühlmann-Straub, així ho farem en una secció posterior. Però aquesta solució pot no ser-ho si el nostre principal objectiu és veure com influeixen a la prima total cadascun dels factors que hem escollit. Per salvar aquest inconvenient se'ns ocurreixen dues vies de solució. Per una banda, recurrir als models jeràrquics. En efecte, el fet que en el model "two way" no s'hagi donat la importància a cada factor per separat ,com esperàvem, no vol dir que no es pugui provar de combinar els mateixos factors d'altres maneres, una d'elles, jerarquitzant-los. És a dir, donant més importància a un factor que a l'altre, contràriament del que feiem a l'aplicar el model "two way". Així doncs, més endavant aplicarem les dades als dos models jeràrquics que poden sorgir amb els dos factors. Per altra banda, la solució pot ser més directa, eliminar la component mixta del model "two way" i forçar al nou model (model additiu) a explicar únicament els efectes d'aquests factors per separat sobre la prima. Això és el que farem a continuació.

4.2 Model additiu "two way"

Un cop hem vist els resultats pel model "two way", creiem convenient calcular els resultats pel model additiu amb els dos factors de risc. Com hem dit anteriorment, ens interesa conèixer l'efecte sobre la prima d'aquests factors per separat, sense la component $\Xi_{ij}^{(12)}$. Tal i com hem vist en la secció 3.4.2 seguirem el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Els paràmetres estructurals obtinguts per l'exemple són:

$$
\begin{aligned}
m^* &= 134684 \\
b^{(1)*} &= 1.2929E10 \\
b^{(2)*} &= 6.3225E9 \\
S^{2*} &= 2.9867E11
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Hem fet servit els estimadors indicats a la secció 3.4.2. Pel que fa als coeficients arbitraris $g_i^{(1)}$ i $g_j^{(2)}$, que apareixen a (3.45) i (3.48) respectivament, són iguals a la unitat. Si comparem les variàncies de les components d'aquest model amb la de l'anterior, observem com $\hat{b}^{(1)}$ i $\hat{b}^{(2)}$ ja no són nul·les, tot el contrari, totes dues són prou grans com per creure en la bondat d'aquest model amb les nostres dades, això és causat per l'eliminació de $\hat{b}^{(12)}$. A la taula 4.12 hem fet un llistat dels estimadors de credibilitat de les primes que hauran d'abonar els comerços el proper any a la companyia asseguradora perquè aquesta es faci càrrec del risc de robatori, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 4.12 *Primes de Credibilitat*

		< 5	$5-10$	> 10
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
R	$j=1$	90672	127395	189687
B	$j=2$	172525	209248	271540
M	$j=3$	185327	222050	284342
Q	$j=4$	81712	118435	180727
A	$j=5$	113796	150519	212811
E	$j=6$	187290	224013	286305
ED	$j=7$	187744	224467	286759
O	$j=8$	289126	325848	388141
SV	$j=9$	294112	330835	393127
S	$j=10$	83358	120081	182373
T	$j=11$	103489	140212	202504
V	$j=12$	70859	107583	169875

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.29). A la taula següent, hi han els valors dels coeficients de credibilitat:

Taula 4.13 *Coeficients de credibilitat*

< 5	$i = 1$	0.999
$5 - 10$	$i = 2$	0.998
> 10	$i = 3$	0.997
R	$j = 1$	0.998
B	$j = 2$	0.876
M	$j = 3$	0.993
Q	$j = 4$	0.993
A	$j = 5$	0.751
E	$j = 6$	0.953
ED	$j = 7$	0.964
O	$j = 8$	0.895
SV	$j = 9$	0.832
S	$j = 10$	0.978
T	$j = 11$	0.894
V	$j = 12$	0.947

Igual que ha passat amb les variàncies de les components, els coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ desapareixen. En canvi, les dues altres components $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ del model incrementen el seu paper explicatiu. Si ens fixem en aquests coeficients podem assegurar que els dos factors per separat expliquen molt bé les primes trobades. Així doncs, més credibilitat és donada a l'experiència de les files i columnes en conjunt. Per l'experiència dels trams de capital assegurat, els factors de credibilitat $z_i^{(1)}$ són més grans, en tots els casos, del 99%. Pel tipus de comerç, els coeficients $z_j^{(2)}$

no són tant alts, però tots ells superen el 75%. Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 4.12, considerem les expressions (3.82-3.85) del Teorema 3.4, de manera que per a cada cel·la (i, j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$\begin{aligned} X_{ij,t_{ij}+1} = m &+ z_i^{(1)}(Y_{iw} - m) \\ &+ z_j^{(2)}(Y_{wj} - m) \end{aligned} \tag{4.6}$$

En el Teorema 3.5 s'ha demostrat que l'estimador de credibilitat per la cel·la (i, j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} \tag{4.7}$$

Taula 4.14 *Composició de les primes de credibilitat*

< 5	$i = 1$	13173
$5 - 10$	$i = 2$	49896
> 10	$i = 3$	112188
R	$j = 1$	−57185
B	$j = 2$	24668
M	$j = 3$	37470
Q	$j = 4$	−66145
A	$j = 5$	−34061
E	$j = 6$	39433
ED	$j = 7$	39887
O	$j = 8$	141268
SV	$j = 9$	146255
S	$j = 10$	−64499
T	$j = 11$	−44368
V	$j = 12$	−76997

L'estimador de credibilitat pels comerços tipus restaurant, i que tenen un capital assegurat inferior als cinc milions, és obtingut a partir de la taula 3.2 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{ijs} &= m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_j^{(2)*} \\ &= 134684 + 13173 - 57185 = 90672 \end{aligned} \tag{4.8}$$

El primer terme és la mitjana global estimada. A aquesta quantitat li sumem 13173 pel fet d'assegurar com a màxim cinc milions de capital. A més, pel fet de ser del tipus restaurant li restem 57185. En conclusió, i a la vista dels resultats obtinguts, el model additiu de dos factors pot ser perfectament un model apropiat per a les nostres dades, sobretot, si ens interessa diferenciar les primes per aquests dos factors al mateix nivell. Tot i això, potser que no ens interessi tenir quan augmenta o disminueix la prima per un dels dos factors, que només ens interessi l'augment o la disminució global deguda als dos factors conjuntament. En aquest cas, com ja hem avançat abans, el model Bühlmann-Straub pot ser tingut en compte. A continuació veurem quins resultats hem obtingut aplicant aquest model clàssic a les nostres dades.

4.3 Model de Bühlmann-Straub

Què passaria si estiguèssim interessats en conéixer com afecten conjuntament els dos factors de risc, capital assegurat i tipus de comerç? El més fàcil seria aplicar el model de Bühlmann-Straub. Tal i com hem vist en la secció 3.5.1 seguirem el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Els paràmetres estructurals obtinguts per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 134684 \\ b^{(12)*} &= 5.1973E9 \\ S^{2*} &= 2.9867E11 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Hem fet servit els estimadors indicats a la secció 3.5.1.

Cal destacar que el paràmetre $\hat{b}^{(12)}$ trobat coincideix amb el paràmetre $\hat{a}$ del respectiu model clàssic, definit a l'apèndix A. A la taula 4.15 hem detallat els estimadors de credibilitat de les quanties que hauran de ser pagades pels comerços el proper any a la companyia asseguradora per cobrir el risc de robatori, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 4.15 *Primes de Credibilitat*

		< 5	$5 - 10$	> 10
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
R	$j = 1$	98754	123275	149847
B	$j = 2$	126412	215037	266807
M	$j = 3$	170876	236055	293369
Q	$j = 4$	76644	102334	229627
A	$j = 5$	93811	177720	139530
E	$j = 6$	171965	224151	258236
ED	$j = 7$	146351	195419	324439
O	$j = 8$	168571	322566	409377
SV	$j = 9$	195164	216193	410900
S	$j = 10$	90496	124675	167480
T	$j = 11$	96732	137573	188516
V	$j = 12$	100118	131131	89383

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals. A la taula següent, hi han els valors dels coeficients de credibilitat:

Taula 4.16 *Coeficients de credibilitat*

		<5	$5-10$	>10
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
R	$j=1$	0.996	0.989	0.980
B	$j=2$	0.803	0.534	0.372
M	$j=3$	0.984	0.967	0.960
Q	$j=4$	0.988	0.958	0.937
A	$j=5$	0.613	0.385	0.218
E	$j=6$	0.879	0.849	0.793
ED	$j=7$	0.879	0.882	0.884
O	$j=8$	0.770	0.695	0.585
SV	$j=9$	0.661	0.519	0.511
S	$j=10$	0.940	0.901	0.926
T	$j=11$	0.813	0.484	0.625
V	$j=12$	0.899	0.682	0.783

Els coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ lligats a l'experiència del risc dins de cada cel·la són molt irregulars. Evidentment si eliminem les dues components $\Xi_i^{(1)}$ i $\Xi_j^{(2)}$ del model, $\Xi_{ij}^{(12)}$ és l'única component per explicar la composició dels estimadors de credibilitat. En aquest cas, si bé la mitjana dels coeficients és prou alta, hi ha moltes irregularitats. Per exemple, les cel·les ($3,2$) i ($3,5$) tenen uns coeficients ridículs a causa des a que les dues cel·les només tenen quatre observacions, com ja vam fer notar a la taula 4.3. Un cop més, ens adonem de la importància de tenir suficients observacions. Per altra banda, algunes altres cel·les tenen uns coeficients de credibilitat molt menors que la mitjana, això pot ser a causa de a observacions irregulars que només es donen un any, i són molt diferents a la mitjana, produint una variància molt més gran. Per exemple, podem observar les agències de transports, $j = 11$, com ja havíem indicat anteriorment. Evidentment, amb més anys d'observació aquests valors irregulars no serien tan rellevants i els coeficients de credibilitat serien molt millors. Un cop calculats els coeficients de credibilitat, i per arribar als resultats de la taula 4.15, considerem les expressions del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) \tag{4.10}$$

En el 3.5.1 s'ha vist que l'estimador de credibilitat per la cel·la (i,j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{4.11}$$

Els valors de la única component $\Xi_{ij}^{(12)*}$ estan expressats en la taula 4.17.

Taula 4.17 *Composició de les primes de credibilitat*

		< 5	$5-10$	> 10
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
R	$j = 1$	−35930	−11409	15163
B	$j = 2$	−8272	80353	132123
M	$j = 3$	36193	101371	158685
Q	$j = 4$	−58040	−32350	94943
A	$j = 5$	−40873	43036	4847
E	$j = 6$	37281	89467	123551
ED	$j = 7$	11667	60735	189755
O	$j = 8$	33887	187882	274693
SV	$j = 9$	60481	81509	276216
S	$j = 10$	−44187	−10009	32796
T	$j = 11$	−37952	2889	53832
V	$j = 12$	−34565	−3553	−45301

Podem veure que les característiques que hem observat a les tres primeres taules també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada per a cada client nou és més petita si el client només assegura per una quantia inferior a cinc milions, observeu que els valors negatius apareixen més a la primera columna. A més per a tots aquells comerços que havíem comentat que tenien un cost mitjà més elevat ($j = 8$ i $j = 9$) podem observar que sumem quantitats més elevades a la mitjana global m .

L'estimador de credibilitat per als restaurants que tenen un capital assegurat de menys de cinc milions és obtingut a partir de la taula 4.17 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{ijs} &= m + \Xi_{ij}^{(12)*} \\ &= 134684 - 35930 = 98754 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En conclusió, tot i que les primes resultants són molt semblants a les trobades com a conseqüència d'aplicar el model "two way", fet que podíem esperar, els coeficients de credibilitat no són prou bons com caldria desitjar. Per tant, tal i com havíem anunciat, potser seria convenient provar amb els models jeràrquics. Això és el que farem a continuació.

4.4 Model jeràrquic de Jewell

En aquest model tenim dues possibilitats. Per una banda, considerar el primer factor, tram de capital assegurat, com a principal factor explicatiu de les dades, i en segon lloc, sumar a aquesta component $\Xi_i^{(1)}$ la component mixta $\Xi_{ij}^{(12)}$, és a dir, fer dependre el segon factor del primer o, dit d'una altra manera, jerarquitzar els factors de manera que el primer factor sigui el primer nivell i el segon factor el segon nivell complementant el primer. Aquesta situació pot ser resumida de la següent manera:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{4.13}$$

Per altra banda, també podem escollir el segon factor, tipus de comerç, com el principal factor a tenir en compte, deixant per la componenent mixta la participació del primer factor, això és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{4.14}$$

Així doncs, començant pel primer cas, aplicarem les dades tal i com hem vist en la secció 3.5.2. Seguirem, doncs, el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. Els paràmetres estructurals obtinguts per l'exemple són:

$$\begin{aligned} m^* &= 134684 \\ b^{(1)*} &= 2.2319E10 \\ b^{(12)*} &= 0 \\ S^{2*} &= 2.9867E11 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Hem fet servit els estimadors indicats a la secció 3.3.1. A la vista dels paràmetres trobats, podem dir que aquest model no ens serveix de gaire, ja que $b^{(12)*}$ és igual a zero. I per tant, el segon factor desapareix de la nostra anàlisi. Com veurem en la següent taula, les primes que hi trobarem no s'ajusten bé a la nostra primera idea de diferenciar els riscos segons els factors.

A la taula 4.18 hem detallat dels estimadors de credibilitat de les primes que hauran de ser pagades el proper any a la companyia asseguradora, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 4.18 *Primes de Credibilitat*

		< 5	$5 - 10$	> 10
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
R	$j = 1$	106649	153285	220423
B	$j = 2$	106649	153285	220423
M	$j = 3$	106649	153285	220423
Q	$j = 4$	106649	153285	220423
A	$j = 5$	106649	153285	220423
E	$j = 6$	106649	153285	220423
ED	$j = 7$	106649	153285	220423
O	$j = 8$	106649	153285	220423
SV	$j = 9$	106649	153285	220423
S	$j = 10$	106649	153285	220423
T	$j = 11$	106649	153285	220423
V	$j = 12$	106649	153285	220423

Com es pot veure fàcilment, només hi ha tres primes diferents, una per a cada tram de capital assegurat. Obviament, sent $\Xi_i^{(1)}$ l'única component explicativa, ens trobem amb un resultats molt simples.

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.29). A la taula següent, hi han els valors dels coeficients de credibilitat:

Taula 4.19 *Coeficients de credibilitat*

< 5	$i = 1$	0.999
$5 - 10$	$i = 2$	0.999
> 10	$i = 3$	0.998

Com es pot veure, només trobem els coeficients de credibilitat $z_i^{(1)}$ lligats a $\Xi_i^{(1)}$, ja que els coeficients de credibilitat $z_{ij}^{(12)}$ són iguals a zero. Per tant, la component $\Xi_{ij}^{(12)}$ del model no aporta cap explicació a les primes de credibilitat, com era d'esperar.

Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 4.18, considerem les expressions del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i, j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) + (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(1)}(Y_{izw} - m) \tag{4.16}$$

A 3.5.2 s'ha vist que l'estimador de credibilitat per la cel·la (i, j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_i^{(1)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{4.17}$$

Els valors de cadascuna de les components estan expressades en la taula 4.20. Evidentment, només hem escrit els valors per la primera component $\Xi_i^{(1)*}$, ja que per la component mixta $\Xi_{ij}^{(12)*}$ tots els valors són iguals a zero.

Taula 4.20 *Composició de les primes de credibilitat*

< 5	$i = 1$	-28035
$5 - 10$	$i = 2$	18601
> 10	$i = 3$	85739

Podem veure que les característiques de la taula 3.1 també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada és més petita si el client només assegura menys de cinc milions de capital. L'estimador de credibilitat per la cel·la $(1, 1)$ és obtingut a partir de la taula 3.2 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{ijs} &= m + \Xi_{ij}^{(12)*} \\ &= 134684 - 28035 = 106649 \end{aligned} \tag{4.18}$$

En conclusió, el model jeràrquic amb el primer factor com a principal característica no ens ajuda a diferenciar pels dos factors, ja que a l'eliminar la component mixta perdem tota la informació referent al segon factor. Així doncs, la idea de primer escollir un determinat tram de capital i després, dins d'aquell tram, diferenciar per a cada tipus de comerç, no funciona.

Per tant, mirarem de provar el segon factor com a primer nivell del model jeràrquic i deixar el primer factor per a la component mixta. És a dir, primer diferenciem per a cada tipus de comerç i, dins d'un comerç en concret, diferenciem pels tres trams de capital assegurat.

Així doncs, aplicarem les dades tal i com hem vist en la secció 3.5.2. Seguirem, doncs, el procediment allà indicat per estimar les primes de credibilitat. A continuació detallem els paràmetres estructurals calculats segons el que hem apuntat abans:

$$\begin{aligned} m^* &= 242.51 \\ b^{(2)*} &= 5.3381E9 \\ b^{(12)*} &= 9.8438E8 \\ S^{2*} &= 2.9867E11 \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'elevat valor de les variàncies $b^{(2)}$ i $b^{(12)}$ donen validesa al model jeràrquic de dos nivells que hem escollit:

$$X_{ijs} = m + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \tag{4.20}$$

A la taula 4.21 hem fet un llistat dels estimadors de credibilitat de les primes que hauran d'abonar els comerços a la companyia asseguradora el proper any perquè aquesta es faci càrrec del risc de robatori, és a dir, els $X_{ijt_{ij}+1}$.

Taula 4.21 *Primes de Credibilitat*

		< 5	$5 - 10$	> 10
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
R	$j = 1$	99091	123195	147570
B	$j = 2$	166728	214684	228684
M	$j = 3$	175896	237722	286953
Q	$j = 4$	79265	106740	208740
A	$j = 5$	116040	142749	131775
E	$j = 6$	195028	230195	249442
ED	$j = 7$	180336	212370	298420
O	$j = 8$	263320	343434	377418
SV	$j = 9$	289546	309339	372787
S	$j = 10$	97561	124849	157325
T	$j = 11$	113865	135998	155737
V	$j = 12$	98406	109977	91827

Aquí podem veure la diferència entre els resultats del model jeràrquic trobat anteriorment i aquest. En aquest cas, a més de diferenciar per cada tipus de botiga, també hi ha diferències segons el tram de capital assegurat. Els resultats però, són diferents al del model additiu, que també tenia en compte els dos factors. La diferència es troba en el tractament que es fa del primer factor. En el model additiu aquest factor té la mateixa importància que el segon, en canvi, en el model jeràrquic el primer factor depén del segon factor.

Per aconseguir aquests resultats ha estat necessari, en primer lloc, calcular els coeficients de credibilitat, a partir dels paràmetres estructurals, segons (3.29). A la taula següent, hi han els valors dels coeficients de credibilitat:

Taula 4.22 *Coeficients de credibilitat*

		< 5	$5-10$	> 10	
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	
R	$j=1$	0.982	0.946	0.901	0.939
B	$j=2$	0.435	0.179	0.101	0.795
M	$j=3$	0.921	0.848	0.819	0.933
Q	$j=4$	0.941	0.811	0.738	0.931
A	$j=5$	0.231	0.106	0.050	0.677
E	$j=6$	0.579	0.515	0.420	0.891
ED	$j=7$	0.579	0.586	0.591	0.905
O	$j=8$	0.387	0.301	0.211	0.830
SV	$j=9$	0.270	0.170	0.165	0.766
S	$j=10$	0.749	0.634	0.703	0.919
T	$j=11$	0.452	0.151	0.240	0.820
V	$j=12$	0.627	0.288	0.405	0.877

Pel que fa als coeficients de credibilitat, s'observa que els coeficients del mig de la taula, $z_{ij}^{(12)}$ lligats a $\Xi_{ij}^{(12)}$, presenten el mateix problema que hem comentat pels coeficients del model Bühlmann-Straub. Pel que fa als coeficients de credibilitat $z_i^{(2)}$ poden considerar-se com prou bons.

Un cop calculats els coeficients de credibilitat i per arribar als resultats de la taula 4.21, considerem les expressions del Teorema 3.2, de manera que per a cada cel·la (i,j) l'estimador de credibilitat és igual a:

$$X_{ij,t_{ij}+1} = m + z_{ij}^{(12)}(X_{ijw} - m) + (1 - z_{ij}^{(12)})z_i^{(2)}(Y_{izw} - m) \qquad (4.21)$$

A 3.5.2 s'ha vist que l'estimador de credibilitat per la cel·la (i,j) és:

$$X_{ijs} = m + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \qquad (4.22)$$

Els valors de cadascuna de les components estan expressades en la taula 4.23. En el centre de la taula son donades les 36 realitzacions de la variable $\Xi_{ij}^{(12)*}$. L'última columna conté les realitzacions de la variable $\Xi_i^{(1)*}$.

Taula 4.23 *Composició de les primes de credibilitat*

		< 5	$5-10$	> 10	
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	
R	$j=1$	-24855	-751	23625	-10739
B	$j=2$	-32660	15296	29296	64704
M	$j=3$	-51904	9922	59153	93116
Q	$j=4$	-52496	-25021	76978	-2923
A	$j=5$	-14408	12300	1326	-4235
E	$j=6$	-24636	10530	29776	84981
ED	$j=7$	-44498	-12464	73586	90150
O	$j=8$	-53539	26575	60559	182176
SV	$j=9$	-23386	-3596	59852	178251
S	$j=10$	-29487	-2198	30277	-7636
T	$j=11$	-21305	828	20567	486
V	$j=12$	-3668	7903	-10248	-32609

Podem veure que les característiques de la taula 3.1 també apareixen en els resultats de credibilitat. Així, la quantia estimada per ser pagada és més petita si el client només assegura menys de cinc milions de capital. Observeu que la primera columna és negativa per a tots els tipus de botiga. L'estimador de credibilitat per la cel·la $(1,1)$ és obtinguda a partir de la taula 3.2 de la següent manera:

$$\begin{aligned} X_{ijs} &= m + \Xi_j^{(2)*} + \Xi_{ij}^{(12)*} \\ &= 134684 - 10739 - 24855 = 99091 \end{aligned} \tag{4.23}$$

En conclusió, el model jeràrquic amb el segon factor com primer nivell pot ser considerat com acceptable. Per últim, ens queda considerar quin dels models analitzats és el que millor s'ajusta a les nostres dades. Per aquest problema no tenim una resposta objectiva. Tres, són els models que podem considerar acceptables: model Bühlmann-Straub, model additiu i el darrer model jeràrquic. Però és difícil assegurar quin dels tres és el millor. Subjectivament, nosaltres creiem que en el mateix ordre que els hem anunciat van millorant.

PART II:

APLICACIONS DE LA TEORIA DE LA CREDIBILITAT AL CALCUL DE RESERVES IBNR

Capítol 5

Introducció als models IBNR

En una companyia d'assegurances les despeses ocasionades pels sinistres d'un cert període no són, normalment, saldades al final d'aquest període. Per tant, unes reserves han de ser establertes al final de cada període. Per determinar la reserva, que ha de constar en el balanç, és molt important prediure les quanties que seran pagades en el futur. Per aquest propòsit s'han desenvolupat, des de principis dels anys 70, un gran nombre de models. Aquests models són coneguts sota el nom genèric de models IBNR, encara que l'acrònim IBNR vol dir "Incurred But Not Reported" (ocurregut però no declarat), que és, realment, una subclasse d'aquestes reserves més genèriques. Parlant estrictament, en els models IBNR s'assumeix que un cop el sinistre és declarat la quantia final és coneguda. Això no és així normalment, en tot cas ho seria pels anomenats RBNS ("Reported But Not Settled", declarats però no saldats). En aquest treball no farem distincions entre aquests dos tipus de models.

Com ja hem anunciat, a la fi de l'any comptable, en una companyia d'assegurances, normalment, resten alguns sinistres per pagar, i és per aquests que es creen les reserves per sinistres. Ademés, per regla general, no totes les quanties dels sinistres són conegudes al final de l'any comptable, i per això, també ha de ser calculada una reserva.

En una companyia d'assegurances, l'habilitat per estimar les pròpies reserves de manera correcta és d'una gran importància. Un dels propòsits d'aquesta estimació és el d'assegurar una correcta imatge del passiu de la companyia en el balanç comptable. Però no és l'única raó, també hem d'adonar-nos que la determinació dels nivells de primes depén directament de l'estimació de les reserves per sinistres. Així doncs, una repetida infravaloració d'aquestes reserves ens portarà directament a unes primes massa baixes, amb totes les conseqüències que això portarà a la companyia en el futur. Per aquesta raó, en els papers per la presentació de l'estat comptable anual i en les fitxes tècniques de les primes, es dóna tanta atenció a l'estimació de les reserves per sinistres.

Per fer una acurada definició de les reserves per sinistres, podem dividir aquestes en dues classes diferents:

- Reserves per sinistres coneguts per la companyia, però encara no completament pagats, o bé, per sinistres dels quals es desconeix la quantia final (perquè no es coneixen encara les conseqüències finals del sinistre, o estem esperant el veredicte del jutge) i pot incrementar-se la quantia mentre esperem, o simplement encara no s'ha fet el pagament. Aquesta classe de reserves per sinistres es denominada reserva IBNER ("Incurred But Not Enough Reserved").

- Reserves per sinistres que encara no són coneguts per la companyia perquè no han estat encara declarats. Aquesta part de les reserves és normalment denominada IBNR ("Incurred But Not Reported").

A la pràctica, no sempre es fa aquesta distinció. Ademés, la terminologia no és uniforme, i en la majoria dels casos es fa servir el nom IBNR per parlar del conjunt de les reserves per sinistres. La definició de reserva no és unànim. Així, per exemple, De Vylder fa la distinció entre sinistres IBNYR ("Incurred But Not Yet Reported") i IBNFR ("Incurred But Not Fully Reported"). Un sinistre IBNYR és aquell que les seves conseqüències no són conegudes fins més tard, a causa de retards aleatoris. Aquests retards poden ser originats per causes administratives o bé pel tipus de contingència coberta. En canvi, un sinistre IBNFR és un sinistre conegut per la companyia però amb cost de desenvolupament desconegut o incomplet, com per exemple, malalties de llarga durada o rehabilitacions postaccidents. Totes dues classes de sinistres formen la cartera d'IBNR per De Vylder. Per una extensa recopilació sobre models amb diferents classes de sinistres encara no saldats totalment, el lector es referit a Norberg, R. (1986b). De totes formes, com a exemple, considerem una assegurança de responsabilitat professional i estudiarem els diferents tipus d'IBNR que poden sorgir.

En primer lloc, un cas particular apareix quan el sinistre que cobria la pòlissa ha estat causat per un notari, per exemple. L'existència del sinistre serà coneguda per la companyia molt aviat, però aquesta haurà de decidir si accepta la quantia del sinistre o si procedirà judicialment perquè es determini aquesta quantia. Poden passar anys abans d'arribar a una solució definitiva. Per tant, es tracta d'un sinistre IBNFR. En segon lloc, sovint passa que per una pòlissa determinada, el sinistre no és visible fins al cap de deu o vint anys, per exemple, els defectes en un edifici. En principi, una certa quantia ha de ser reservada de les primes rebudes en l'any d'origen de la pòlissa. En aquest cas, resulta ser un sinistre IBNYR. Per últim, és possible que algunes de les pòlisses siguin anul·lades per una causa aliena. Però els sinistres coberts poden aparèixer després de finalitzat el contracte (un risc *a posteriori*). Per aquests casos també s'ha de fer una reserva per sinistres IBNYR. Totes aquestes situacions, i d'altres, solen ser englobades i tractades pels models IBNR que a continuació analitzarem, sobretot, els models basats en la Teoria de la Credibilitat.

La relativa importància que poden tenir els diferents tipus de reserves varia segons els casos. Per la companyia asseguradora, una reserva IBNR (en el sentit estricte) serà establerta per sinistres que es produeixen molt al final de l'any, accidents que són declarats tot just acaben de tancar-se els llibres de comptes. En aquest cas, la reseva és petita i de poca importància en el conjunt. Pel contrari, en el cas d'una reserva d'IBNER per sinistres que van a judici, serà bastant important per una companyia asseguradora d'automòbils, ja que passarà molt temps abans que la quantia final sigui coneguda, i fins i tot, el retard la pot incrementar. Per tant, una adequada reserva ha de ser determinada.

El fet que la quantia d'un sinistre s'incrementi anys després de la seva ocurrència, té un impacte no sols en el cas de la reserva de la companyia asseguradora, sinó que també en la reserva IBNR de la companyia reasseguradora en el cas d'operar amb "excess of loss", on el reassegurador només ha d'intervenir en sinistres que superen una certa quantia. Ell només coneix l'existència del sinistre un cop la quantia d'aquest és suficientment gran, i això pot ser molts anys després de l'accident. Per tant, és molt important fer una reserva adequada pel reassegurador. Ademés, el problema és, fins i tot, més difícil que en l'estimació de les reserves per sinistres de que hem parlat, perquè la informació sobre sinistres no declarats serà absent.

Així doncs, la decisió sobre la mida que han de tenir aquestes reserves és molt complexa, amb molts factors que hi intervenen i amb molts pasos. Per norma, un dels passos en el procés és l'estimació de les futures pèrdues basant-se amb les dades del passat. Aquest és un pas quantitatiu i gens fàcil, on poden ser aplicades tècniques matemàtiques. En el present treball només tractarem aquest punt, i més concretament, aquells mètodes que es basin en la Teoria de la Credibilitat.

5.1 Triangle "run-off"

Un fet comú, com a punt inicial, en tots els models per calcular les reserves per sinistres és el denominat triangle "run-off". Aquest triangle, és la manera més natural de mostrar les dades dels pagaments futurs a partir de cada any d'origen, i s'anomena "triangle" perquè aquesta és la forma en què apareixen les dades, degut a que com més llunyà estigui l'any d'origen, més gran serà el seu historial.

Definim X_{js} com el risc a tenir en consideració corresponent al període d'origen j ($j = 1, 2, \ldots, k$) i en el seu s -èssim ($s = 1, 2, \ldots, t$) període de desenvolupament. Suposarem, com és habitual, que tenim el mateix nombre de períodes d'origen i de desenvolupament $k = t = J$. Després de J períodes, coneixem les observacions de la variable aleatòria X_{js} per $j + s \leq J + 1$. Basant-nos amb aquestes dades conegudes, volem prediure els futurs valors per X_{js} , o sigui, per $j + s \geq J + 2$. Per exemple, considerem una cartera de pòlisses per incendi, i X_{js} les quanties pagades per aquest motiu. Si els períodes són anuals i comencem al 1991, per $j = 1$, cada risc X_{js} és igual a la suma de quanties pagades per sinistres de pòlisses contractades a l'any d'origen j però saldades a l'any de desenvolupament s . Per exemple, X_{24} és la quantia total dels pagaments fets al 1995 corresponents a les pòlisses que varen ser venudes l'any 1992. Gràficament aquesta composició es pot veure en el següent dibuix:

Taula 5.1 *Triangle "run-off"*

	1	2	3	$\ldots$	$J-1$	J
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	$\ldots$	$X_{1,J-1}$	X_{1J}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	$\ldots$	$X_{2,J-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$J-2$	$X_{J-2,1}$	$X_{J-2,2}$	$X_{J-2,3}$			
$J-1$	$X_{J-1,1}$	$X_{J-1,2}$				
J	$X_{J,1}$					

Les realitzacions conegudes van apareixent horitzontalment per a cada any d'origen que avancen, al mateix temps, verticalment. Ademés, els riscos $X_{j,J+1-j}$ paral·lels a la diagonal $X_{J1}, \ldots, X_{1J}$ ens donen les observacions pagades al mateix any d'observació $j+s$. Com ja hem avançat, el problema de les reserves IBNR, consisteix en l'extrapolació de les realitzacions conegudes del triangle anterior per calcular les observacions futures desconegudes, i convertir el triangle amb quadrat.

Les observacions X_{js} de les cel·les del triangle "run-off" poden representar diferents conceptes: nombre de sinistres, pagaments absoluts o relatius, etc. Ademés poden aparéixer en forma acumulada o no. De totes maneres, totes aquestes possibilitats poden ser tranformades en altres i viceversa. Tots els models que han sorgit durant aquests últims vint anys, fan unes hipòtesis sobre l'estructura que segueixen aquests triangles. Aquestes hipòtesis determinen el model i la manera d'ajustar-nos a les dades conegudes. Aquest ajustament és essencial i l'èxit del procés matemàtic depén d'ell.

5.2 Evolució en el tractament de les reserves

En diferents contextes o situacions, diferents mètodes poden ser apropiats per fer calcular les reserves. Aquestes situacions venen determinades per factors externs, per les companyies o per les dades que es tenen. En un principi, es van aplicar mètodes molt simples, mancats d'un rerefons estadístic. Els models són molt precaris, amb càlculs molt senzills. A Van Eeghen, J. (1981), es poden trobar algun d'aquests mètodes. Una de les raons per les que són simples, és perquè no es preocupen de les tendències aleatòries presents en les dades, considerant-les eliminades. A la pràctica, aquests mètodes van ser molt utilitzats. Ademés, en els països on hi havien normes legals per calcular les reserves per sinistres, les companyies eren obligades a utilitzar aquestes classes de mètodes.

Actualment, tot i que molt lentament, alguns països s'han adonat de la necessitat d'aplicar mètodes millors d'estimació per les reserves, i així, s'utilitzen mètodes més complicats, tots ells provistos d'algoritmes per eliminar les influències aleatòries, és a dir, tots tenen una important component estadística. Aquests mètodes, anomenats clàssics en aquest treball, són la base dels mètodes de credibilitat que analitzarem en els següents capítols. Pel lector interessat en els mètodes clàssics, a l'apèndix B d'aquesta tesi doctoral es poden veure alguns dels més coneguts. Per a més informació ens remetem al treball recopilatori de Van Eeghen, J. (1981). Algun dels mètodes que s'hi troben tracten explícitament amb influències exògenes anomenades "inflació". Això no significa que només es tingui amb compte la infació monetària, sinó l'efecte combinat d'aquells factors que tenen un impacte en la quantia de les dades que corresponen al mateix any d'observació $j+s$. Per exemple, podem pensar amb canvis de tendència a la legislació de cada país. L'efecte que fa en les dades passades es suposa desconegut, i es estimat a partir de les dades del triangle pels períodes futurs. O sigui, que l'ajustament de les dades per l'efecte de la "inflació" és una part integrada del procediment numèric. De totes maneres, encara que sigui un punt molt important, nosaltres no entrarem a fons en aquests models.

Taylor, G. (1986) dóna una visió dels models IBNR, fent servir diferents nivells de classificació. El nivell més alt de classificació és la divisió entre models d'acord amb el respectiu reconeixement de la naturalesa estocàstica dels sinistres. Els models són dividits en dues categories, models estocàstics i models no estocàstics. Encara que en alguns casos, els models no estocàstics poden donar una certa interpretació estocàstica. Algunes vegades sembla inútil aplicar models estocàstics si la informació no és completa.

Una altra classificació és la distinció entre macromodels i micromodels. Els primers treballen amb tot el col·lectiu a la vegada, en canvi, els micromodels comencen des d'un nivell de sinistre individual. En ocasions, com veurem més endavant en el model de De Vylder-Mack, un micromodel ens serveix d'ajuda per obtindre les hipòtesis d'un macromodel. En aquesta tesi doctoral la nostra atenció es centra en els macromodels.

Tots aquests mètodes tenen en comú que modelen els pagaments del triangle IBNR d'acord uns paràmetres fixes. De Vylder, F. (1982) va ser el primer a representar les característiques d'aquests pagaments amb paràmetres aleatoris en el seu model IBNR de credibilitat. El seu pot ser catalogat com a macromodel on només són modelats els trets bàsics dels riscos. En el mateix context credibilístic, Mack, T. (1990) supervisa el model anterior a través de l'estudi de micromodels. Ademés modifica, a partir dels resultats, les hipòtesis del model de De Vylder. Una altra aproximació pot ser trobada a Norberg, R. (1986b), on es presenta un model general de credibilitat i es descriuen varis casos especials fent una clara distinció entre les condicions fixes o aleatòries dels riscos. Més endavant, a Hesselager i Witting (1988) un suggeriment de Norberg és aplicat per donar més flexibilitat al model, fent servir una distribució aleatòria pels retards dels sinistres, enlloc d'una fixa. Neuhaus, W. (1992) generalitza el model i ens mostra com es pot generar tal distribució. Una altra extensió ens ve donada per Hesselager, O. (1991), introdueix un model IBNR de credibilitat jeràrquica, on es fan distincions entre els diferents tipus de sinistres. Per cada tipus de sinistres hi ha un respectiu triangle IBNR i les dependències entre aquests triangles són modelades en un esquema jeràrquic. Una macroversió d'aquest model ha estat aplicada a unes dades d'una assegurança de crèdit per Goovaerts et al. (1994).

Per altra banda Dannenburg, D. (1996a) presenta un model de credibilitat autorregressiu d'IBNR. En aquest model, els pagaments de l'any de desenvolupament són en part d'altres anys o períodes i en part pagaments procedents del mateix període. Aquest model pot aplicar-se a la predicció de les futures recuperacions en una assegurança de crèdit. En tal cas, l'assegurador de crèdit paga la quantia corresponent que no ha estat pagada a la companyia perquè el client no ha pogut fer front al deute. Més tard, l'assegurador pren el sinistre com seu i intenta recuperar la quantia negociant amb el deutor. Donat un any de desenvolupament en concret, els pagaments de recuperacions dels anys anteriors tenen dues fonts diferents. Per una part, hi ha la continuació dels pagaments dels períodes previs i per altra, altres deutors que comencen a pagar. Això el porta a considerar les quanties de recuperació

X_{js} corresponents al període d'origen j i al període de desenvolupament s com la suma de dues components: la fracció de pagaments referits als anys previs més els nous pagaments o, matemàticament,

$$X_{js} = l \cdot X_{j,s-1} + Z_{js} \tag{5.1}$$

Com en altres models IBNR de credibilitat, el període d'origen j es caracteritzat per un paràmetre estocàstic inobservable denominat Θ_j . Els nous pagaments es suposa que estan distribuïts segons el model De Vylder-Mack. El model pot ser comparat amb el conegut model de Chain-ladder. Allí el paràmetre autorregressiu l és diferent per cada període, però els pagaments adicionals Z_{js} no es tenen en compte explícitament.

Encara que els micromodels poden ser més realistes, a la pràctica, molt sovint donem més importància als macromodels d'IBNR. Això es degut a que les dades a utilitzar son molt més manejables i més accessibles. En aquest treball, ens centrarem en el macromodel de De Vylder i en la millora d'aquest feta per Mack. Finalment, farem servir els models de classificació creuada vistos en aquesta tesi doctoral per desenvolupar un model IBNR "two way", on el model "two way" vist en el capítol 3.3 serà utilitzat per modelar dependències estocàstiques entre pagaments corresponents a diferents períodes d'origen.

Capítol 6

Model IBNR de De Vylder

6.1 Introducció

Com podem veure a l'apèndix B, i més extensament a Van Eeghen, J. (1981), hi ha diversos mètodes per calcular les reserves IBNR. El primer autor que va proposar un mètode estocàstic va ser Straub, E. Seguidament, Bühlmann, H. et al. (1980) proposen un nou model probabilístic. Amb aquests mètodes es basa De Vylder per fer el seu model IBNR de credibilitat. De Vylder, F. (1982) desenvolupa un model estocàstic i multiplicatiu per l'estimació d'IBNR. El factor de que depén l'any d'origen és ajustat credibilísticament. Es considera el triangle "run-off" ocupat per les observacions de la variable aleatòria X_{js} on $j = 1, 2, \ldots, k$ i $s = 1, 2, \ldots, t$. Definim X_{js} com els pagaments corresponents a l'any d'origen j efectuats a l'any de desenvolupament s. En la següent taula, cada fila j correspon a un any d'origen dels accidents; i cada columna s a l'any en què es fa efectiu el pagament de l'accident originat l'any j.

Taula 6.1 *Triangle "run-off"*

	1	2	3	...	$t-1$	t
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	$X_{1,t-1}$	X_{1t}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	...	$X_{2,t-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$k-2$	$X_{k-2,1}$	$X_{k-2,2}$	$X_{k-2,3}$			
$k-1$	$X_{k-1,1}$	$X_{k-1,2}$				
k	$X_{k,1}$					

Les variables X_{js} estan dividides en dues classes, les variables observades i les que no ho són. Les primeres són les dades del nostre problema, les que apareixen en el triangle "run-off". Les altres són la solució del nostre problema, les variables que hem d'estimar per omplir el triangle "run-off" i tranformar-lo en rectangle. Així doncs, es tracta de fer prediccions de les variables no observades basant-nos en les realitzacions de les variables observades. Per diferenciar unes de les altres, definim els següents conjunts:

$$
\begin{aligned}
T_j &= \{s \,/\, X_{js} \text{ és coneguda; } j \text{ fixe}\} \\
K_s &= \{j \,/\, X_{js} \text{ és coneguda; } s \text{ fixe}\}
\end{aligned}
$$

On T_j és la fila j de dades conegudes i K_s la columna s de dades conegudes. D'aquí podem deduir que si $s \in T_j$ i $j \in K_s$ la variable X_{js} és del primer tipus, de les conegudes que figuren a la taula 6.1.

6.2 Hipòtesis del model

De Vylder, F. (1982) assumeix que la distribució de la variable aleatòria $\vec{X}_j$, definida com $\vec{X}_j = (X_{j1}, X_{j2}, ..., Xjt)'$ depén d'un paràmetre estructural Θ_j

que es defineix tal i com es raonava a la Teoria de la Credibilitat. La diferència entre els anys d'origen j és caracteritzada per la realització d'un paràmetre de risc que es suposa d'igual distribució estructural per tots els anys. A més, enumera les següents hipòtesis:

(DV.1) Les pòlisses $j = 1, 2, \dots, k$, o sigui, els parells $(\Theta_1 , \vec{X}_1)$, $(\Theta_2 , \vec{X}_2)$, ..., $(\Theta_k , \vec{X}_k)$ són independents. Això implica que els anys d'origen són independents.

(DV.2) Assumpció multiplicativa: $\vec{X}_j$ pot ser expressat com

$$\vec{X}_j = \vec{Y}_j \cdot \beta(\Theta_j) \tag{6.1}$$

on $\vec{Y}_j = (Y_{j1} , Y_{j2} , \dots, Y_{jt})'$ és un vector aleatori desconegut i suposadament independent de Θ_j , i $\beta(\Theta_j)$ és una funció escalar de la variable estructural Θ_j .

(DV.3) Les hipòtesis de treball per $\vec{Y}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) són:

$E[\vec{Y}_j] = y_s = (y_1 , y_2 , \dots, y_t)'$ és independent de j .
$Cov[\vec{Y}_j] = \dfrac{r^2}{w_j} \cdot I_{t \times t}$ on r^2 és un escalar desconegut, independent de j ; w_j és una ponderació coneguda de l'any d'origen j , i I és la matriu identitat de dimensió $t \times t$.

(DV.4) Equidistribució i independència de les variables estructurals $\Theta_1 , \Theta_2 , \dots, \Theta_k$.

6.3 Paràmetres estructurals

Per poder desenvolupar el model, els següents paràmetres es suposen coneguts:

$$\begin{array}{ll} y_s & b = E[\beta(\Theta_j)] \\ S^2 = r^2 \cdot E[\beta^2(\Theta_j)] & a = Var[\beta(\Theta_j)] \end{array} \tag{6.2}$$

Més endavant veurem com poden ser estimats a partir de les dades disponibles de les variables observades.

6.4 Comentari de les hipòtesis

En primer lloc, descriurem breument l'origen del model proposat a la secció 6.2. La idea d'aproximar X_{js} per una expressió multiplicativa del tipus $e_s m_j$ no és nova. De fet, és la base del mètode clàssic de Chain-ladder (veure apèndix B.1). El corresponent model estocàstic és $X_{js} = e_s m_j + R_{js}$, on l'error R_{js} té mitjana zero (les lletres majúscules són variables aleatòries). El següent pas és reemplaçar m_j per una variable aleatòria M_j , i llavors considerar el model $X_{js} = e_s M_j + R_{js}$ on M_j i R_{js} es suposen independents. Aquest model és semblant al model que tenim $X_{js} = Y_{js} M_j$ on Y_{js} i M_j són independents. R_{js} i e_s del model anterior queden emmagatzemades juntes a Y_{js} . Finalment, introduint les variables d'estructura Θ_j característiques de la Teoria de la Credibilitat, ja tenim una idea bàsica del model que volem analitzar.

Les hipòtesis del present model són essencialment introduïdes per facilitar l'estimació de $Cov[\vec{X}_j]$. Per altra banda, el model no té en compte la inflació; més tard, veurem com es pot afegir aquesta variable al nou model.

6.5 Estimadors de credibilitat

El problema que es planteja és el d'estimar $E[X_{js} \,/\, \Theta_j]$, de DV.2 i DV.3 resulta que

$$E[X_{js} \,/\, \Theta_j] = y_s \cdot \beta(\Theta_j) \tag{6.3}$$

Per tant, només ens cal y_s i trobar un estimador de credibilitat per $\beta(\Theta_j)$. Per això, disposem de les variables observades X_{js} . A partir de les hipòtesis enunciades a la secció 6.2, es pot reduir el problema a un de Teoria de la Credibilitat amb les següents hipòtesis:

(DV.1) Les pòlisses $j = 1, 2, \ldots, k$, o sigui, els parells $(\Theta_1, \vec{X}_1), (\Theta_2, \vec{X}_2), \ldots,$ $(\Theta_k, \vec{X}_k)$ són independents.

(DV.2) $E\left[\vec{X}_j \,/\, \Theta_j\right] = y_s \cdot \beta(\Theta_j)$

(DV.3) $Cov\left[\vec{X}_j \,/\, \Theta_j\right] = \dfrac{r^2}{w_j}\beta^2(\Theta_j) \cdot I = \sigma_j^2(\Theta_j) \cdot I$

(DV.4) Equidistribució i independència de les variables estructurals $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$.

Sota aquestes condicions, es pot aplicar el model de regressió de Hachemeister (vegeu apèndix A) per estimar $\beta(\Theta_j)$ i, amb algunes generalitzacions, els resultats d'aquest model són vàlids.

Teorema 6.1 *L'estimador de credibilitat* B_j *per* $\beta(\Theta_j)$ *és igual a*

$$B_j = (1 - z_j)b + z_j\hat{b}_j \tag{6.4}$$

on

$$\begin{aligned}
\hat{b}_j &= \left(y_j'y_j\right)^{-1} y_j'X_j = \left(\sum_{s\in T_j} y_s X_{js}\right) \Big/ \left(\sum_{s\in T_j} y_s^2\right) \\
z_j &= \frac{a}{a + S_j^2 v_j} \\
S_j^2 &= E[\sigma_j^2(\Theta_j)] = S^2 \,/\, w_j \\
v_j &= \left(y_j'y_j\right)^{-1} = \frac{1}{\sum\limits_{s\in T_j} y_s^2}
\end{aligned}$$

Per a més informació, vegeu Hachemeister, C. (1975) i De Vylder, F. (1976). Observeu que per la definició de $\hat{b}_j$ la segona expressió només és vàlida pel cas de regressió lineal múltiple sense terme constant, això és, estimar per mínims quadrats expressions del tipus $Y = X \cdot \beta$.

Així doncs, per estimar les variables X_{js} no observades, calculem les mitjanes de cada any de desenvolupament y_s que haurem de multiplicar per les estimacions de B_j de cada any d'origen, és a dir:

$$\hat{X}_{js} = \hat{y}_s \cdot B_j \tag{6.5}$$

6.6 Estimació dels paràmetres estructurals

En primer lloc, prenem com a valor del primer paràmetre estructural la unitat, és a dir, $b = 1$. Per causa de la hipòtesi multiplicativa, es pot multiplicar $\beta(\Theta_j)$ per un nombre i després dividir Y_j pel mateix nombre. Per tant, si suposem que $y_s = E[X_{js}] = E[Y_{js}]$ i cada X_{js} és un estimador no esbiaixat per y_s el valor de b ha de ser necessàriament la unitat. Així doncs, podem estimar y_s com:

$$\hat{y}_s = \frac{\sum\limits_{j \in K_s} w_j X_{js}}{\sum\limits_{j \in K_s} w_j} \tag{6.6}$$

En segon lloc, es dona un estimador òptim per S^2. Considerant que X_{js} és normalment distribuïda, i que $\hat{b}_j$ es determina per una regressió lineal simple (sense terme independent), l'estimador òptim per S^2 és:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{j \in K_s} t_j - 1} \cdot \sum_{j \in K_s} w_j \cdot \sum_{s \in T_j} \left(X_{js} - y_s \hat{b}_j\right)^2 \tag{6.7}$$

Aquest estimador és sempre esbiaixat, i és la definició que ha esdevingut clàssica als models de credibilitat.

Per últim, a partir de l'expressió $E[(\hat{b}_j - b_j)^2] = a + S_j^2 p_j$ i segons De Vylder, F. (1978), del valor de z_j i $b = 1$ es considera el següent pseudo-estimador (ja que l'estimador depén del paràmetre a ser estimat via z_j) no esbiaixat per a :

$$\hat{a} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} z_j (\hat{b}_i - 1)^2 \tag{6.8}$$

6.7 Extensions del model

6.7.1 Inflació

De Vylder, en el seu article de 1982 ja introdueix aquesta variable a partir d'un canvi poc significatiu. Així, en cas de dades amb inflació X^i_{js} el model pot ser adaptat de la següent manera:

$$X^i_{js} = U_{j+s} \cdot Y_{js}\beta(\Theta_j) \tag{6.9}$$

suposant U_{j+s} , Y_{js} i Θ_j independents i on U_{js} és el factor d'inflació en cada any $j+s$.

Es defineixen,

$$\begin{aligned} u_{j+s} &= E[U_{j+s}] \\ X^*_{js} &= X_{js} \,/\, u_{j+s} \\ Y^*_{js} &= U_{j+s} y_{js} \,/\, u_{j+s} \end{aligned}$$

per tal de tractar el model deflactat de la mateixa manera que l'anterior:

$$X^*_{js} = Y^*_{js}\beta(\Theta_j) \tag{6.10}$$

Suposant que no hi ha canvis en la matriu de covariàncies de Y^*_{js} .

6.7.2 Model de Hadidi

El mètode de De Vylder d'estimació d'IBNR considera una tendència independentment establerta. Una modificació d'aquest mètode va ser suggerida per Hadidi, N. (1985), el qual preveu que en certes ocasions l'actuari voldria combinar, les dades per estimar IBNR, amb la seva pròpia intuició de la tendència. Hadidi proposa doncs la possibilitat de que l'actuari pugui modificar les dades segons ell cregui convenient, d'acord amb el que ell sospiti de com la variable X_{js} és desenvoluparà. Per tot això, modifica el mètode de De Vylder sense perdre, però, el seu esperit (hipòtesi multiplicativa). La introducció d'una nova variable, el vector $P' = (p_1, \ldots, p_t)$ dona l'entrada a l'opinió de l'actuari. La nova variable seria l'equivalent subjectiu de $Y_j' = y_s = (y_1, \ldots, y_t)$ .Aquest vector, independent de $\vec{Y}_j$, però obviament correlacionat amb X_{js} de la mateixa manera que en De Vylder:

$$X_j = P \cdot \beta'(\Theta_j) \tag{6.11}$$

on β' és una funció escalar diferent de β , i és estimada a partir de les observacions $\vec{X}_j$ i la tendència P' . Aplicant el mètode dels mínims quadrats a les columnes observades $\vec{X}_j$ podem obtenir un estimador per β' denominat b_j' . L'estimador de credibilitat $\hat{\beta}_j$ per $\beta'(\Theta_j)$ és, segons Hadidi:

$$B_j' = (1 - z_j - z_j') \cdot b + z_j b_j + z_j' b_j' \tag{6.12}$$

El mateix autor, dona els passos a seguir per tal d'estimar els valors de B_j' . Primer, s'han de calcular els resultats com hem fet pel métode de De Vylder. Un cop s'han estimat els paràmetres, l'actuari pot fer una nova avaluació a partir de la nova tendència que ell escull P' . Per calcular de nou els resultats, necessitarem els següents paràmetres del model De Vylder: $\hat{b}_j$, $\hat{S}_j^2$, z_j i $\hat{a}$. Cal mencionar que aquest z_j no són els factors de credibilitat necessaris per estimar B_j' segons l'expressió (6.11), però en canvi, són necessaris per l'estimació de $\hat{a}$.

En aquest punt, comencem a fer servir el vector P per calcular de nou, d'una manera similar, els mateixos resultats. Primer, estimem $\hat{b}_j'$ de la mateixa manera que ho vam fer per $\hat{b}_j$ a l'anterior model, però a partir del nou vector P ,

$$\hat{b}_j' = \left(\sum_{s \in T_j} p_s X_{js} \right) / \left(\sum_{s \in T_j} p_s^2 \right) \tag{6.13}$$

A continuació es calculen, $\hat{S}_j'^2$ i $\hat{S}'^2$, també de la mateixa manera que abans però amb P enlloc de Y . També fem el mateix per $v_j' = 1 / (\sum p_s^2)$. Amb totes aquestes dades calculem les següents variàncies: $\hat{a}$, $Var[\hat{b}_j] = \hat{S}^2 v_j$ i $Var[\hat{b}'_j] = \hat{S}'^2 v'_j$. Amb les quals calculem el coeficient k_j

$$k_j = \frac{1}{Var[\hat{b}_j]Var[\hat{b}'_j] + \hat{a}Var[\hat{b}_j] + \hat{a}Var[\hat{b}'_j]} \tag{6.14}$$

que fem servir per obtindre els coeficients de credibilitat z_j i z'_j de l'expressió de B'_j (6.11):

$$z_j = k_j \hat{a} \hat{S}'^2 v'_j \; ; \qquad z'_j = k_j \hat{a} \hat{S}^2 v_j \tag{6.15}$$

I ja ho tenim tot per calcular B'_j ,

$$B'_j = (1 - z_j - z'_j) \cdot b + z_j b_j + z'_j b'_j \tag{6.16}$$

Finalment, només ens manca multiplicar per y_s , $\hat{X}_{js} = y_s \cdot B'_j$.

6.8 Exemple numèric

Com exemple aclaridor de les seccions anteriors i per comparar posteriorment amb la resta de models, hem escollit l'exemple que Mack (1990) inclou en el seu article. Com és habitual en el càlcul de les reserves IBNR les dades venen donades en un triangle "run-off" on cada fila j correspon a un any d'origen, i cada columna s a un any de desenvolupament. En aquest cas, tenim 10 anys d'observació, $k = t = 10$. Les observacions venen recollides en el següent triangle:

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	857	1845	1242	92	−46	524	604	170	176	16
$j=2$	466	1764	1406	962	922	918	92	116	12	
$j=3$	682	2370	80	−182	64	−40	228	68		
$j=4$	787	1283	640	276	244	81	−42			
$j=5$	668	1450	1524	1653	910	726				
$j=6$	958	1921	2741	958	666					
$j=7$	805	1491	2000	1312						
$j=8$	523	2051	1789							
$j=9$	1023	1857								
$j=10$	818									

Es pot veure com les quanties són creixents fins el segon o tercer període de desenvolupament i decreixents a partir d'aquí. En la següent taula ens venen donats els resultats d'aplicar el mètode de De Vylder a l'anterior triangle. En l'última fila trobem els estimadors pels paràmetres y_s , calculats segons (6.6).

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	857	1845	1242	92	−46	524	604	170	176	16
$j=2$	466	1764	1406	962	922	918	92	116	12	16.2
$j=3$	682	2370	80	−182	64	−40	228	68	81.8	13.9
$j=4$	787	1283	640	276	244	81	−42	97.7	77.8	13.2
$j=5$	668	1450	1524	1653	910	726	227.5	121.7	97	16.5
$j=6$	958	1921	2741	958	666	516.2	257.6	137.9	109.8	18.7
$j=7$	805	1491	2000	1312	483.5	464.4	231.8	124	98.8	16.8
$j=8$	523	2051	1789	765.7	486.2	467	233.1	124.7	99.3	16.9
$j=9$	1023	1857	1466.6	744.2	472.5	453.8	226.5	121.2	96.6	16.4
$j=10$	818	1790.1	1434.8	728	462.3	443.9	221.6	118.6	94.4	16.1
$\hat{y}_s$	758.7	1781.3	1427.7	724.4	460	441.8	220.5	118	94	16

Per arribar a aquests resultats, un cop calculats y_s , s'obtenen els estimadors individuals $\hat{b}_j$, seguidament es calcula $\hat{S}^2 = 166253.22$. Llavors estem preparats per calcular els coeficients de credibilitat z_j i el paràmetre $\hat{a} = 0.0194$, i ja podem calcular els estimadors de credibilitat per $\beta(\Theta_j)$,

$$B_j = (1 - z_j)b + z_j\hat{b}_j \tag{6.17}$$

Finalment, ja podrem estimar la resta de X_{js} desconegudes del triangle "run-off",

$$\hat{X}_{js} = \hat{y}_s \cdot B_j \tag{6.18}$$

Alguns dels resultats citats per calcular els resultats finals es poden veure en la següent taula:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
$\hat{b}_j$	0.907	1.040	0.706	0.611	1.072	1.389	1.120	1.141	1.089	1.078
z_j	0.442	0.442	0.442	0.442	0.440	0.433	0.425	0.403	0.305	0.063
B_j	0.959	1.018	0.870	0.828	1.032	1.168	1.051	1.057	1.027	1.005
Σ		16.3	95.7	188.8	462.7	1040	1419	2193	3598	5310

Per últim, veiem que Σ és la suma de les quanties estimades per cada any d'origen. La suma total o reserva total és 14324.

Per exemple, per calcular l'observació X_{86} , això és, de l'any d'origen 8 i any de desenvolupament 6, veiem que:

$$\begin{aligned}
y_6 &= 441.8 \\
B_8 &= (1 - z_8) \cdot b + z_8 \cdot \hat{b}_8 = \\
&= (1 - 0.403) \cdot 1 + 0.403 \cdot 1.141 = 1.057 \\
\hat{X}_{86} &= 441.8 \cdot 1.057 = 467
\end{aligned}$$

Capítol 7

Model IBNR de De Vylder-Mack

7.1 Introducció

El model de De Vylder va ser millorat i generalitzat per Mack, T. (1990). En el model de De Vylder, una de les hipòtesis no sembla real en la majoria dels casos, com veurem a continuació. En el nou model, s'intenta superar aquest inconvenient. A més es presenta el model com un cas especial del model de credibilitat de Bühlmann-Straub més simple que el de Hachemeister, en el qual De Vylder es va basar per muntar el seu model.

Es defineix S_{js} com la quantia total dels sinistres ocurreguts durant l'any d'origen j ($j = 1, 2, ..., k$) i pagats en l'any de desenvolupament s ($s = 1, 2, ..., t$), i w_j com una mesura coneguda de volum de l'any d'origen j, per exemple, el volum de primes, el nombre de pòlisses o el nombre de sinistres. Normalment, S_{js} és conegut per tot $j + s \leq k + 1$ (triangle "run-off"), i volem estimar els S_{js} per $j + s > k + 1$. Com en el model anterior, considerem els ratis de pèrdua $X_{js} = S_{js} / w_j$ de cada any d'origen j com dependents d'un paràmetre multidimensional, el qual es interpretat com una realització de la variable estructural Θ_j .

7.2 Hipòtesis del model

Mack, T. (1990) fa les següents hipòtesis:

(VM.1) Les pòlisses $j = 1, 2, ..., k$, o sigui, els parells $(\Theta_1, \vec{X}_1), (\Theta_2, \vec{X}_2), ...,$ $(\Theta_k, \vec{X}_k)$ són independents entre sí, i hi ha equidistribució i independència de les variables estructurals $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_k$.

(VM.2) $Cov[X_{js}, X_{ju} / \Theta_j] = 0$ per $s \neq u$

(VM.3) $E[X_{js} / \Theta_j] = y_s \cdot \beta(\Theta_j)$

(VM.4) $Var[X_{js} / \Theta_j] = y_s \cdot \sigma^2(\Theta_j) / w_j$

7.3 Comentaris de les hipòtesis

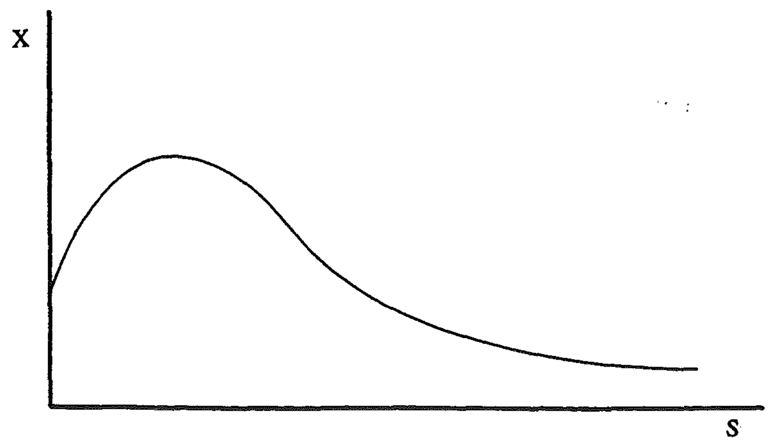
7.3.1 Comparació amb el mètode de De Vylder

Les dues primeres hipòtesis VM.1 i VM.2 són les usuals a la Teoria de la Credibilitat, en aquest cas, aplicades al desenvolupament de sinistres amb cua llarga a través de diferents anys d'origen i dins una cartera d'assegurances. En el mètode de De Vylder són les hipòtesis DV.1 i DV.4. Aquestes hipòtesis són acceptables sempre i quan es suposi que les causes dels sinistres, l'avaluació dels sinistres i el seu tractament no canviïn amb el pas dels anys.

La tercera hipòtesi VM.3 és l'assumpció multiplicativa que ja coneixem del model De Vylder i abans, fins i tot, del mètode de Chain-ladder. Això implica que cada any d'origen j pot tenir diferents nivells de $\beta(\Theta_j)$, però tots amb el mateix desenvolupament esperat $y_1, ..., y_t$. Aquesta hipòtesi és lleugerament més general que en el model de De Vylder com veurem amb més detall més endavant.

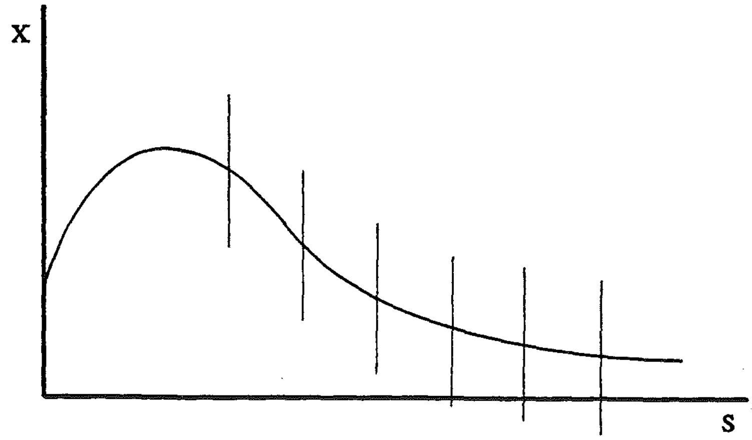
En canvi, la darrera hipòtesi VM.4, difereix molt de la corresponent al model de De Vylder (DV.3) ja que aquest últim va assumir que la $Var[X_{js} / \Theta_j]$ era independent de s , és a dir, que es manté constant en tots els períodes de desenvolupament de cadascun dels anys d'origen j ; mentre que Mack proposa que sigui proporcional a y_s . Mack segueix varis raonaments que el porten a considerar aquesta hipòtesi. En primer lloc, recull algunes consideracions que mostren que a la realitat la $Var[X_{js} / \Theta_j]$ depén de s com de fet ja havia apuntat Norberg, R. (1986). Si mirem el comportament d'una cartera de pòlisses de cua llarga d'una forma més acurada, podrem comprovar aquesta dependència de $Var[X_{js} / \Theta_j]$ en s . En particular, i per un exemple d'una assegurança de responsabilitat civil, hi ha dues raons per explicar el fenomen de la cua llarga; en primer lloc, molts sinistres no es manifesten fins al cap d'un cert temps desde que es van cometre, per exemple, les faltes d'un arquitecte. En segon lloc, un cop manifestat el sinistre pot passar molt tèmps fins que es quantifiqui aquest; ja sigui perque la decisió judicial es faci esperar o per la mateixa duració del sinistre, per exemple, en tractaments mèdics de recuperació. A més durant tot aquest temps poden haver-hi canvis en l'avaluació, pagaments o altres consideracions.

Amb aquest rerefons, és clar que els valors $y_1 , \ldots , y_t$ del desenvolupament intern dels anys d'origen j és decreixent i tendeix a zero, potser, amb l'excepció d'un cert increment al principi, explicat per les dues mateixes causes anteriors, així doncs, gràficament tenim:



Això ens porta a considerar que el valor esperat de X_{js} variarà enormement a través del desenvolupament dels períodes considerats. Es a dir, $E[X_{js} / \Theta_j]$ depén de s (VM.3).

A més, les variables aleatòries X_{js} són no negatives amb quasi tota certesa; per tant, costa d'imaginar, que en un cas com aquest, les variables aleatòries tinguin la mateixa variància durant tot el període considerat. O dit d'una altra manera, si mantenim la variància constant, com la variable aleatòria decreix a través de s , per valors alts de s tindriem variàncies negatives; per aquesta raó, Mack fa les variàncies proporcionals a y_s , de manera que quan aquesta tendeix a zero, la variància també s'apropara a zero. Gràficament,



I per tant, com hem vist a VM.4,

$$Var[X_{js} / \Theta_j] = y_s \left(\sigma^2(\Theta_j) / w_j\right)$$

canviant la hipòtesi tercera del model De Vylder.

7.3.2 Micromodel de Mack

Amb l'idea intuitiva anterior podem entendre la raó d'assumir VM.4, però Mack intenta explicar-ho a través d'un micromodel i deduir d'ell la forma de la quarta hipòtesi. Per una banda, tenim clar que, d'alguna manera, la $Var[X_{js} / \Theta_j]$ depén de s . De l'altra, si prenem de forma particular un any d'origen j amb un Θ_j

donat i escrivim que,

$$X_{js} = \sum_{i=1}^{N_{js}} Z_{js}^{(i)} = Z_{js}^{(1)} + Z_{js}^{(2)} + \cdots + Z_{js}^{(N_{js})} \tag{7.1}$$

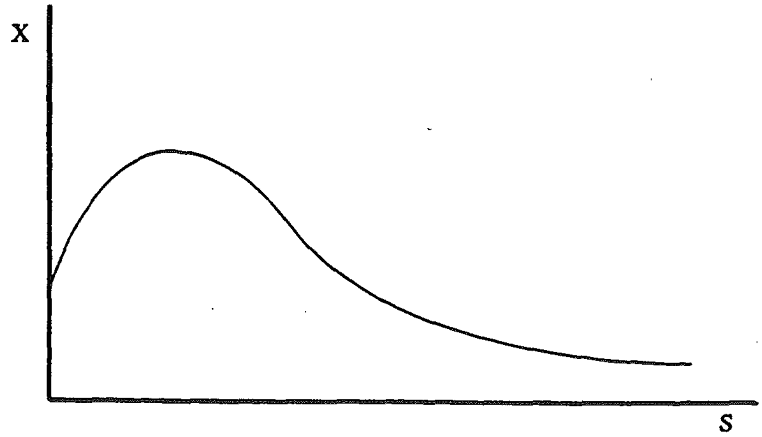
on N_{js} és el nombre d'aquells sinistres de l'any d'origen j que suposen un canvi $Z_{js}^{(i)}$ en la quantia total ocurreguda per aquell any de desenvolupament s . Com és normal, suposarem que $Z_{js}^{(1)}$, $Z_{js}^{(2)}$, ..., $Z_{js}^{(N_{js})}$ estan idènticament distribuïdes i són independents del nombre de sinistres N_{js} . També, com és usual a la Teoria del Risc, per un any (omitint l'índex (i)) tenim:

$$\begin{aligned} E[X_{js}] &= E[N_{js}] \cdot E[Z_{js}] \\ Var[X_{js}] &= E[N_{js}] \cdot Var[Z_{js}] + Var[N_{js}] \cdot (E[Z_{js}])^2 = \\ &= E[X_{js}] \cdot E[Z_{js}] \cdot (d_1(Z_{js}) + d_2(N_{js})) \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} d_1(Z_{js}) &= Var[Z_{js}] \,/\, (E[Z_{js}])^2 \\ d_2(N_{js}) &= Var[N_{js}] \,/\, E[N_{js}] \end{aligned}$$

De la definició de N_{js} és clar que N_{js} depén de s , i que segueix el mateix comportament que abans mostrava y_1 , ..., y_t ,



Ara bé, si fem les següents hipòtesis:

1. Suposem que la variable aleatòria N_{js} segueix una distribució Poisson. En aquest cas, el valor de $d_2(N_{js})$ no depén de s .
2. A més, suposem que la variable Z_{js} no depén de s , o sigui, els canvis a X_{js} venen totalment explicats per les diferències en les realitzacions de Z_{js} . Per aquesta raó, el valor de $d_1(Z_{js})$ és independent s .

Sota aquestes dues hipòtesis, a la part dreta de l'equació:

$$Var[X_{js}] \;=\; E[X_{js}] \cdot E[Z_{js}] \cdot (d_1(Z_{js}) \,+\, d_2(N_{js}))$$

només $E[X_{js}]$ depén de s , i per tant, partint de la seva definició a VM.3 $E[X_{js} \,/\, \Theta_j] \;=\; y_s \cdot \beta(\Theta_j)$ ens porta directament a VM.4, multiplicant DV.3 per y_s i fent per tant la $Var[X_{js} \,/\, \Theta_j]$ proporcional a y_s .

7.3.3 Alternativa general a la definició de VM.4

Un altre plantejament alternatiu és aquell que arriba a la conclusió de que les hipòtesis DV.3 i VM.4 poden ser expressades com:

$$Var[X_{js} \,/\, \Theta_j] \;=\; y_s^2 \left(\sigma^2(\Theta_j) \,/\, w_j\right)$$

Veiem com, i sota quines hipòtesis, es pot arribar a aquesta conclusió.

A l'anterior micromodel de X_{js} , s'ha interpretat N_{js} com aquell nombre de sinistres que fan que hi hagi un canvi en l'any de desenvolupament s . Aquest és el model natural, on N_{js} depén de s . Però si canviem les normes i considerem que N_{js} és independent de s , interpretem que $N_{js} = N_j$. Això implica que hi ha algunes $Z_{js} = 0$ amb probabilitat positiva, perquè en cada any de desenvolupament hi ha normalment sinistres la quantia o avaluació dels quals no varien, per exemple, sinistres no declarats i sinistres ja saldats. Com X_{js} encara ha de comportar-se com y_s , s'haurà de modelar amb $E[Z_{js}]$. Per tant, la variació en X_{js} es introduïda considerant distribucions de Z_{js} depenents de j . La manera més fàcil de fer això és assumint que, donat Θ_j , Z_{js} té la mateixa distribució que $Z_{j1} \cdot (y_s / y_1)$. Això significa que, per una j fixa, totes les Z_{js} tenen distribucions de la mateixa forma, les quals són proporcionalment transportades d'acord amb la mida de y_s . Aquí doncs, $E[Z_{js}] = E[Z_{j1}] \cdot (y_s / y_1)$ depén de s de la mateixa manera que $d_1(Z_{js}) = d_1(Z_{j1})$ no hi depén. Per tant, ara podem escriure que

$$\begin{aligned} Var[X_{js}] &= E[X_{js}] \cdot E[Z_{js}] \cdot (d_1(Z_{js}) + d_2(N_{js})) \cdot \frac{E[N_{js}]}{E[N_{js}]} = \\ &= (E[X_{js}])^2 \cdot (d_1(Z_{js}) + d_2(N_{js})) \cdot \frac{1}{E[N_{js}]} \end{aligned}$$

d'on observem que només $(E[X_{js}])^2$ depén de s , això ens porta a considerar:

$$Var[X_{js} / \Theta_j] = y_s^2 \left(\sigma^2(\Theta_j) / w_j\right)$$

De totes maneres, no creiem que aquesta alternativa a la hipòtesi VM.4 sigui molt propera a la realitat, si bé pot ser certa per casos especials i pot ser-hi aplicada. De fet el que ens atrau de tot això és que podem englobar totes aquestes alternatives amb una sola expressió, així doncs, generalitzem la hipòtesi VM.4 per:

$$Var\,[X_{js} / \Theta_j] = y_s^{2-\alpha} \cdot \sigma^2(\Theta_j) / w_j$$

On α pot valer 0, 1, 2. Si $\alpha = 2$ es correspon amb el model de De Vylder, on la variància no depén de s . En canvi, si $\alpha = 1$ la hipòtesi resultant és la nostra favorita, on la distribució de pagaments o els canvis d'avaluació són els mateixos per tots els anys de desenvolupament. Si $\alpha = 0$ obtenim la hipòtesi de l'alternativa general que acabem d'analitzar.

En resum, i per globalitzar els diferents models que han anat sorgint en aquest capítol, a continuació reformulem les hipòtesis del model De Vylder-Mack:

(VM.1) Les pòlisses $j = 1, 2, \dots, k$, o sigui, els parells $(\Theta_1 , \vec{X}_1), (\Theta_2 , \vec{X}_2), \dots,$ $(\Theta_k , \vec{X}_k)$ són independents entre sí i hi ha equidistribució i independència de les variables estructurals $\Theta_1 , \Theta_2 , \dots, \Theta_k$.

(VM.2) $Cov[X_{js}\,,\, X_{ju}\,/\,\Theta_j] \;=\; 0$ per $s \neq u$

(VM.3) $E\,[X_{js}\,/\,\Theta_j] \;=\; y_s \cdot \beta(\Theta_j)$

(VM.4)' $Var\,[X_{js}\,/\,\Theta_j] \;=\; y_s^{2-\alpha} \cdot \sigma^2(\Theta_j)\,/\,w_j \qquad \alpha \;=\; 0\,,1\,,2.$

7.4 Adaptació al model de Bühlmann-Straub

De Vylder, sota les seves hipòtesis, va tractar el seu model com un cas particular de l'esquema del model de Hachemeister. Mack canvia aquesta visió i demostra que amb unes lleugeres transformacions el model es pot presentar com un cas especial del model de Bühlmann-Straub. Mack considera el següent canvi de variable:

$$Y_{js} \;=\; X_{js}\,/\,y_s$$

i reformulant les hipòtesis:

(VM.2) $Cov[Y_{js}\,,\, Y_{ju}\,/\,\Theta_j] \;=\; 0$ per $s \neq u$

(VM.3) $E\,[Y_{js}\,/\,\Theta_j] \;=\; \beta(\Theta_j)$ independent de s

(VM.4)' $Var\,[Y_{js}\,/\,\Theta_j] \;=\; \sigma^2(\Theta_j)\,/\,(w_j y_s^{\alpha}) \qquad \alpha \;=\; 0\,,1\,,2.$

Aquest és el model de Bühlmann-Straub amb una ponderació $(w_j y_s^{\alpha})$ una mica especial. Abans d'aplicar les fòrmules de credibilitat usuals, farem encara una altra transformació del model per poder simplificar en l'estimació de paràmetres. Aquesta transformació mostra que el paràmetre estructural $b \;=\; E[\beta(\Theta_j)]$ pot ser relacionat amb el desenvolupament dels anys $y_1\,,\,\ldots,\,y_t$. Així definim,

$$\begin{aligned} x_s \;&=\; b\,y_s \\ \tilde{Y}_{js} \;&=\; X_{js}\,/\,x_s \;=\; Y_{js}\,/\,b \\ \tilde{\beta}(\Theta_j) \;&=\; \beta(\Theta_j)\,/\,b \\ \tilde{\sigma}^2(\Theta_j) \;&=\; \sigma^2(\Theta_j)\,/\,b^{2-\alpha} \end{aligned} \qquad (7.2)$$

i llavors tenim les noves hipòtesis,

(VM.2) $Cov[\tilde{Y}_{js}\,,\tilde{Y}_{ju}\,/\,\Theta_j] \;=\; 0$ per $s \neq u$

(VM.3) $E\left[\tilde{Y}_{js}\,/\,\Theta_j\right] \;=\; \tilde{\beta}(\Theta_j)$

(VM.4)' $Var\left[\tilde{Y}_{js}\,/\,\Theta_j\right] \;=\; \tilde{\sigma}^2(\Theta_j)\,/\,(w_j x_s^{\alpha}) \qquad \alpha = 0\,,1\,,2.$

Aquest model per $\tilde{Y}_{js}$ té la mateixa forma que l'anterior model per Y_{js} , però amb l'avantatge que:

$$E[\tilde{\beta}(\Theta_j)] \;=\; 1$$

A més, i tenint com base les hipòtesis anteriors, tenim les següents fórmules per l'estimador de credibilitat del desconegut $\tilde{Y}_{js}$:

$$\hat{\tilde{Y}}_{js} \;=\; z_j \cdot \hat{b}_j + (1 - z_j) \tag{7.3}$$

amb

$$\begin{aligned}
\hat{b}_j &= \left(\sum_{s\in T_j} w_j x_s^{\alpha} \tilde{Y}_{js}\right) \Big/ \left(\sum_{s\in T_j} w_j x_s^{\alpha}\right) = \\
&= \left(\sum_{s\in T_j} x_s^{\alpha} \tilde{Y}_{js}\right) \Big/ \, v_j & (7.4)\\
v_j &= \sum_{s\in T_j} x_s^{\alpha} & (7.5)\\
T_j &= \{s / X_{js} \text{ és coneguda } ; j \text{ fixe}\}\\
z_j &= \frac{w_j v_j}{w_j v_j + S^2 / a} & (7.6)\\
S^2 &= E\left[\tilde{\sigma}^2(\Theta_j)\right]\\
a &= Var\left[\tilde{\beta}(\Theta_j)\right]
\end{aligned}$$

Finalment, l'estimador de credibilitat per les variables X_{js} no conegudes de l'any d'origen j i any de desenvolupament s és:

$$\hat{X}_{js} \;=\; \hat{x}_s \hat{\tilde{Y}}_{js} \tag{7.7}$$

7.5 Estimació dels paràmetres estructurals

A la pràctica, cal estimar els paràmetres estructurals $x_1, \ldots, x_s, a, S^2$ i per tant fer-ho a partir de les dades que tenim. Com l'esperança de X_{js} és x_s, considerem que x_s es estimat per:

$$\hat{x}_s = \left(\sum_{j \in K_s} w_j X_{js} \right) / \left(\sum_{j \in K_s} w_j \right) \tag{7.8}$$

on $K_s = \{ s \, / \, X_{js} \text{ és conegut} \, ; j \text{ fixe} \}$.

L'estimador per S^2 és:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{k} w_j \cdot \sum_{s \in T_j} x_s^{\alpha} \left(\tilde{Y}_{js} - \hat{b}'_j \right)^2 \tag{7.9}$$

amb $m = \sum_{j=1}^{k} (t_j - 1)$, on t_j és el nombre d'elements de T_j . Per últim, hem escollit el següent estimador per a :

$$\hat{a} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k} z_j \cdot \left(\hat{b}'_j - 1 \right)^2 \tag{7.10}$$

Per calcular aquest estimador, cal un procés iteratiu. Com ja hem apuntat, la referència bibliogràfica d'aquest model és Mack, T. (1990), on es poden trobar aquests paràmetres recomenats. A continuació, aplicarem el mateix exemple del capítol anterior als tres casos que es deriven de les nodes hipòtesis.

7.6 Exemple numèric

Seguint amb l'exemple del capítol anterior, a continuació detallem els resultats d'aplicar el mètode De Vylder-Mack per els tres casos segons α sigui 0, 1 ó 2. Per exemple, quan $\alpha = 1$ els resultats són:

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	857	1845	1242	92	−46	524	604	170	176	16
$j=2$	466	1764	1406	962	922	918	92	116	12	16.8
$j=3$	682	2370	80	−182	64	−40	228	68	72.5	12.3
$j=4$	787	1283	640	276	244	81	−42	91.9	73.2	12.5
$j=5$	668	1450	1524	1653	910	726	246.6	132.0	105.1	17.9
$j=6$	958	1921	2741	958	666	526.8	262.9	140.7	112.1	19.1
$j=7$	805	1491	2000	1312	500.5	480.7	239.9	128.4	102.3	17.4
$j=8$	523	2051	1789	754	478.8	459.8	229.5	122.8	97.8	16.6
$j=9$	1023	1857	1486.6	754.3	478.9	460.0	229.6	122.9	97.9	16.6
$j=10$	818	1797.6	1440.8	731.1	464.2	445.8	222.5	119.1	94.9	16.1
$\hat{x}_s$	758.7	1781.3	1427.7	724.4	460	441.8	220.5	118	94	16

En aquesta taula ens venen donats els resultats d'aplicar el mètode de De Vylder-Mack en la forma que creiem millor ($\alpha = 1$). En l'última fila trobem els estimadors pels paràmetres x_s , calculats segons (7.8).

Per arribar a aquests resultats, un cop calculats x_s , es trobem els estimadors individuals $\hat{b}_j$, seguidament es calcula $\hat{S}^2 = 196.11$. Llavors estem preparats per calcular els coeficients de credibilitat z_j i el paràmetre $\hat{a} = 0.0343$. I ja podem calcular els estimadors de credibilitat per $\beta(\Theta_j)$,

$$\hat{\hat{Y}}_{js} = z_j \cdot \hat{b}_j + (1 - z_j) \tag{7.11}$$

Finalment, ja podrem estimar la resta de X_{js} desconegudes del triangle "run-off",

$$\hat{X}_{js} = \hat{x}_s \cdot \hat{\hat{Y}}_{js} \tag{7.12}$$

Alguns dels resultats citats per calcular els resultats finals es poden veure en la següent taula:

$\alpha=1$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
b_j	0.907	1.105	0.551	0.562	1.239	1.406	1.195	1.100	1.134	1.078
z_j	0.514	0.513	0.509	0.504	0.495	0.474	0.451	0.410	0.308	0.117
$\tilde{Y}_{js}$	0.952	1.054	0.771	0.779	1.118	1.193	1.088	1.041	1.041	1.009
Σ		16.9	84.8	177.6	501.6	1062	1469	2159	3647	5332

Per últim, veiem que Σ és la suma de les quanties estimades per cada any d'origen. La suma total o reserva total és 14450.

En segon lloc, si $\alpha = 2$ obtenim, com era d'esperar, els mateixos resultats que els trobats en el capítol anterior pel model de De Vylder:

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	857	1845	1242	92	−46	524	604	170	176	16
$j=2$	466	1764	1406	962	922	918	92	116	12	16.2
$j=3$	682	2370	80	−182	64	−40	228	68	81.8	13.9
$j=4$	787	1283	640	276	244	81	−42	97.7	77.8	13.2
$j=5$	668	1450	1524	1653	910	726	227.5	121.7	97	16.5
$j=6$	958	1921	2741	958	666	516.2	257.6	137.9	109.8	18.7
$j=7$	805	1491	2000	1312	483.5	464.4	231.8	124	98.8	16.8
$j=8$	523	2051	1789	765.7	486.2	467	233.1	124.7	99.3	16.9
$j=9$	1023	1857	1466.6	744.2	472.5	453.8	226.5	121.2	96.6	16.4
$j=10$	818	1790.1	1434.8	728	462.3	443.9	221.6	118.6	94.4	16.1
$\hat{x}_s$	758.7	1781.3	1427.7	724.4	460	441.8	220.5	118	94	16

$\alpha=2$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
b_j	0.907	1.040	0.706	0.611	1.072	1.389	1.120	1.141	1.089	1.078
z_j	0.442	0.442	0.442	0.442	0.440	0.433	0.425	0.403	0.305	0.063
$\tilde{Y}_{js}$	0.959	1.018	0.870	0.828	1.032	1.168	1.051	1.057	1.027	1.005
Σ		16.3	95.7	188.8	462.7	1040	1419	2193	3598	5310

Així doncs, veiem que Σ és la suma de les quanties estimades per cada any d'origen. La suma total o reserva total és 14324.

Per últim, fent $\alpha = 0$ els resultats són els següents:

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	857	1845	1242	92	−46	524	604	170	176	16
$j=2$	466	1764	1406	962	922	918	92	116	12	16.5
$j=3$	682	2370	80	−182	64	−40	228	68	66	11.2
$j=4$	787	1283	640	276	244	81	−42	83.9	66.8	11.4
$j=5$	668	1450	1524	1653	910	726	267.7	143.3	114.1	19.4
$j=6$	958	1921	2741	958	666	520.2	259.6	138.9	110.7	18.8
$j=7$	805	1491	2000	1312	508.9	488.7	243.9	130.5	104.0	17.7
$j=8$	523	2051	1789	731.6	464.6	446.2	222.7	119.2	94.9	16.16
$j=9$	1023	1857	1493.8	757.9	481.3	462.2	230.7	123.4	98.3	16.7
$j=10$	818	1800	1442.7	732	464.8	446.4	222.8	119.2	95.0	16.2
$\hat{x}_s$	758.7	1781.3	1427.7	724.4	460	441.8	220.5	118	94	16

Per arribar a aquests resultats, un cop calculats x_s , es trobem els estimadors individuals $\hat{b}_j$, seguidament es calcula $\hat{S}^2 = 0.348$. Llavors estem preparats per calcular els coeficients de credibilitat z_j i el paràmetre $\hat{a} = 0.0540$. I ja podem calcular els estimadors de credibilitat per $\beta(\Theta_j)$,

$$\tilde{Y}_{js} = (1 - z_j)b + z_j\hat{b}_j \tag{7.13}$$

Finalment, ja podrem estimar la resta de X_{js} desconegudes del triangle "run-off",

$$\hat{X}_{js} = \hat{x}_s \cdot \tilde{Y}_{js} \tag{7.14}$$

Alguns dels resultats citats per calcular els resultats finals es poden veure en la següent taula:

$\alpha=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
b_j	1.130	1.059	0.462	0.444	1.444	1.406	1.277	1.031	1.195	1.078
z_j	0.608	0.583	0.554	0.520	0.482	0.437	0.383	0.317	0.237	0.134
$\tilde{Y}_{js}$	1.079	1.034	0.702	0.711	1.214	1.177	1.106	1.010	1.046	1.010
Σ		16.5	77.2	162.1	544.5	1048	1494	2095	3664	5339

Així doncs, veiem que Σ és la suma de les quanties estimades per cada any d'origen. La suma total o reserva total és 14441.

Capítol 8

Model IBNR "two-way"

8.1 Introducció

La independència entre els pagaments corresponents a diferents períodes d'origen, assumida en la majoria dels models IBNR de credibilitat, no és sempre una assumpció real, com ja fou indicat a Sundt, B. (1979c). Per exemple, si els períodes d'origen es corresponen amb els anys en que l'assegurança ha estat venuda, i els períodes d'accident, els anys en que els sinistres han estat pagats, les quanties del corresponent triangle IBNR són les sumes dels sinistres generats pels contractes que han estat venuts en els específics anys d'origen i que encara són a la cartera. Suposem que els períodes són anuals. Com cada any d'origen hi ha el mateix grup de pòlisses (a part d'aquelles que deixen la cartera), és raonable que es pugui assumir que per cada any d'origen els sinistres dels conseqüents anys de desenvolupament estan correlacionats. Per altra banda, en un particular any d'observació els nombres de sinistres que corresponen a diferents anys d'origen estan també relacionats d'alguna manera com a conseqüència, per exemple, del temps o la inflació. De Vylder i Mack bàsicament, assumeixen que tals influències no són aleatòries i les modelen a partir dels paràmetres y_{js} (o x_s a partir de l'apartat 7.4).

8.2 Hipòtesis del model

En aquest nou model, tenim en compte aquestes dependències entre pagaments de diferents anys d'origen però pagades al mateix any d'observació a través de la introducció d'uns nous paràmetres. Cada període d'observació correspon a la diagonal del triangle "run off" (de l'inferior esquerre al superior dret) que conté les realitzacions de X_{js} amb el mateix valor $j + s$. La $(j+s)$-èssima diagonal és aleshores caracteritzada per la variable $\Theta_{j+s}^{(d)}$, mentrestant les característiques derivades de cada any d'origen són ara representades per la variable aleatòria $\Theta_j^{(o)}$. D'aquesta manera, el model de De Vylder-Mack pot ser extés a un model de classificació creuada "two way", substituint les hipòtesis (VM.1)-(VM.4)' del capítol anterior per:

(TW.1) Les variables $\Theta_j^{(o)}$ són independents i estan idènticament distribuïdes. Les variables $\Theta_{j+s}^{(d)}$ també ho són, además són independents de $\Theta_j^{(o)}$. Les variàncies de X_{js} són finites.

(TW.2) $E\left[X_{js} \,/\, \Theta_j^{(o)} , \Theta_{j+s}^{(d)}\right] \;=\; y_{js} \cdot \mu(\Theta_j^{(o)} , \Theta_{j+s}^{(d)})$

(TW.3) $E[Cov[X_{js} , X_{ju} \,/\, \Theta_j^{(o)} , \Theta_{j+s}^{(d)}]] \;=\; \delta_{su} \cdot y_{js}^{2-\alpha} \cdot S^2 \,/\, w_j$

on $\delta_{su} = \begin{cases} 1 & s = u \\ 0 & s \neq u \end{cases}$, i $\alpha = 0 , 1 , 2.$

La tercera hipòtesi recull, amb la incorporació del símbol de Kronecker, la (VM.2) i (VM.4)'. Les variables $\Theta_j^{(o)}$ i $\Theta_{j+s}^{(d)}$ recullen la informació sobre les dependències que s'estableixen entre els sinistres de cada any d'origen $(\Theta_j^{(o)})$ i entre els pagaments que es fan al mateix any d'observació ($\Theta_{j+s}^{(d)}$).

8.3 Estimadors de credibilitat

Per obtindre els estimadors de credibilitat pels pagaments futurs, apliquem el model de classificació cruada "two way" que vam veure a 3.3 a les variables aleatòries transformades $U_{js} = X_{js} \,/\, y_{js}$. En aquest cas, el model pot ser definit a partir de la següent expressió:

$$U_{js} = 1 + \Xi_j^{(o)} + \Xi_{j+s}^{(d)} + \Xi_{j,j+s}^{(o,d)} + \Xi_{js} \tag{8.1}$$

on nosaltres donem per fet que $E[\mu(\Theta_j^{(o)}\,,\,\Theta_{j+s}^{(d)})] = 1$ sense pèrdua de generalitat, com s'ha vist en els models anteriors. Com sempre, les components Ξ no estan correlacionades entre si, tenen mitjana zero i les següents variàncies:

$$\begin{array}{ll} Var[\Xi_j^{(o)}] = b^{(o)} & Var[\Xi_{j+s}^{(d)}] = b^{(d)} \\ & \\ Var[\Xi_{j,j+s}^{(o,d)}] = b^{(o,d)} & Var[\Xi_{js}] = S^2 \,/\, \left(w_{js} y_{js}^{\alpha}\right) \end{array} \tag{8.2}$$

El triangle d'IBNR conté una observació en cada cel·la del model de classificació creuada "two way" de 3.3. Per tant, les variables aleatòries $\Xi_{j,j+s}^{(o,d)}$ són específiques per a cada valor de la cel·la $(j\,,\,s)$ i poden ser considerades conjuntament amb la component Ξ_{js} com un terme aleatori,

$$U_{js} = 1 + \Xi_j^{(o)} + \Xi_{j+s}^{(d)} + \Delta_{js} \tag{8.3}$$

amb

$$\Delta_{js} = \Xi_{j,j+s}^{(o,d)} + \Xi_{js} \tag{8.4}$$

D'aquesta manera, la variable U_{js} pot ser distribuïda d'acord amb el model additiu "two way" que ja hem vist a 3.4.2. Els pesos o ponderacions del model són aleshores iguals als recíprocs de les variàncies,

$$Var[\Delta_{js}] = b^{(o,d)} + S^2 \,/\, \left(w_{js} y_{js}^{\alpha}\right) \tag{8.5}$$

Aquests pesos no són coneguts perquè hi han funcions dels paràmetres desconeguts com $b^{(o,d)}$, y_{js} i S^2 . Encara que sigui possible l'estimació de tots aquests paràmetres (amb restriccions per y_{js}), assumirem d'aquí en davant que $b^{(o,d)}$

és zero. Així, no serà gaire complicada l'estimació dels paràmetres. Tot això, fa que la segona hipòtesi del model (TW.2) sigui substituïda per la següent assumpció additiva:

$$\text{(TW.2)'} \quad E\left[X_{js} \,/\, \Theta_j^{(o)}, \Theta_{j+s}^{(d)}\right] = y_{js} \cdot \left(1 + v_o(\Theta_j^{(o)}) + v_d(\Theta_{j+s}^{(d)})\right)$$

on els termes v no estan correlacionats, tenen mitjana zero i variàncies $b^{(o)}$ i $b^{(d)}$ respectivament. Els pesos per als estimadors de credibilitat que trobarem són $v_{js} = w_{js} \cdot y_{js}^{\alpha}$. Tal i com vam veure a l'anterior capítol, creiem que $\alpha = 1$ és l'opció més adequada, i serà la que farem servir en aquest capítol.

L'estimador de credibilitat per U_{js} ($j = 2, \dots, J$) i ($s = J - j + 2, \dots, J$) pot ser escrit com:

$$U_{js}^{*} = 1 + \Xi_j^{(o)*} + \Xi_{j+s}^{(d)*} + \Delta_{js}^{*} \tag{8.6}$$

D'aquesta manera, ens trobem amb un model additiu "two way". Degut a que les variables aleatòries $\Xi_{j+s}^{(d)*}$ i Δ_{js}^{*} no estan correlacionades amb les quanties observades del triangle IBNR, els seus estimadors de credibilitat són iguals al seu valor esperat 0. Per tant, l'estimador de credibilitat de (8.6) està només basat en l'estimador de credibilitat de $\Xi_j^{(o)*}$ per $\Xi_j^{(o)}$.

$$E\left[X_{js} \,/\, \Theta_j^{(o)}, \Theta_{j+s}^{(d)}\right] = y_{js} \cdot \left(1 + \Xi_j^{(o)*}\right) \tag{8.7}$$

Per determinar aquesta quantia, nosaltres podem fer servir els resultats pel model additiu que vam veure a 3.4.2. Un cop adaptada la notació, aleshores podem veure que l'estimador de credibilitat per U_{js} està basat en dues classes diferents de mitjanes. El primer tipus de mitjana són les mitjanes ponderades de les quanties corresponents dels períodes d'origen. Pel període d'origen i nosaltres tenim:

$$U_{iw}^{(o)} = \sum_{r=1}^{J-i+1} \frac{v_{ir}}{v_{i\Sigma}^{(o)}} U_{ir} \qquad \text{on } v_{i\Sigma}^{(o)} = \sum_{r=1}^{J-i+1} v_{ir} \tag{8.8}$$

L'altre classe de mitjanes són les d'aquelles quanties que estan a les diagonals del triangle "run off". Per la diagonal $i+r$ ($i+r = 2, \dots, J+1$) farem servir:

$$U_{i+r,w}^{(d)} = \sum_{h=1}^{i+r-1} \frac{v_{i+r-h,h}}{v_{(i+r)\Sigma}^{(d)}} U_{i+r-h,h} \qquad \text{on } v_{(i+r)\Sigma}^{(d)} = \sum_{h=1}^{i+r-1} v_{i+r-h,h} \tag{8.9}$$

D'acord amb les expressions (3.98) i (3.99) del model additiu "two way", l'estimador de credibilitat $\Xi_i^{(o)*}$ resulta del següent sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} \Xi_i^{(o)*} &= z_i^{(o)} \cdot \left(U_{iw}^{(o)} - 1\right) - z_i^{(o)} \sum_{r=1}^{J-i+1} \frac{v_{ir}}{v_{i\Sigma}^{(o)}} \cdot \Xi_{i+r}^{(d)*} \qquad (i = 1, \dots, J) \\ \Xi_{i+r}^{(d)*} &= z_{i+r}^{(d)} \cdot \left(U_{i+r,w}^{(d)} - 1\right) - z_{i+r}^{(d)} \sum_{h=1}^{i+r-1} \frac{v_{i+r-h,h}}{v_{(i+r)\Sigma}^{(d)}} \cdot \Xi_{i+r-h}^{(o)*} \; (i+r = 2, \dots, J+1) \end{aligned} \tag{8.10}$$

Aquí, els factors de credibilitat corresponents al període d'origen i i a la diagonal $(i+r)$ són:

$$z_i^{(o)} = \frac{b^{(o)}}{b^{(o)} + S^2 / v_{i\Sigma}^{(o)}} \qquad \text{i} \qquad z_{i+r}^{(d)} = \frac{b^{(d)}}{b^{(d)} + S^2 / v_{(i+r)\Sigma}^{(d)}} \tag{8.11}$$

Amb aquests resultats i el fet de que $\hat{X}_{js} = y_{js} \cdot U_{js}^*$ (tal i com estipula la propietat de linealitat), arribem al següent teorema.

Teorema 8.1 *L'estimador de credibilitat per* X_{js} *(* $j = 2, \dots, J$ *) i (* $s = J-j+2, \dots, J$ *) és igual a:*

$$\hat{X}_{js} = y_{js} \cdot \left(1 + \Xi_j^{(o)*}\right) = \tag{8.12}$$

$$= \left(1 + z_j^{(o)} \left(Y_{jw}^{(o)} - 1\right)\right) \tag{8.13}$$

amb

$$Y_{jw}^{(o)} = \sum_{r=1}^{J-j+1} \frac{v_{jr}}{v_{j\Sigma}^{(o)}} \left(U_{jr} - \Xi_{j+r}^{(d)*}\right) \tag{8.14}$$

on els termes $\Xi_{j+r}^{(d)*}$ *són determinats pel sistema d'equacions a (8.10).*

Encara que, com hem apuntat abans, $\Xi_{j+s}^{(d)}$ és estimat com zero per $j+s \geq J+2$, l'estimador de credibilitat del teorema anterior és una funció de l'estimador de credibilitat $\Xi_{j+s}^{(d)*}$ per $j+s \leq J+1$ via $Y_{jw}^{(o)}$. Aquesta és una mitjana ponderada de U_{jr} , de la qual són restats els valors estimats de $\Xi_{j+s}^{(d)}$. Això és així degut a la influència de les observacions en el triangle "run-off", que són característiques pels períodes passats d'observació, però irrellevants pel futur, ja que els suposem iguals a zero.

En la propera secció, veurem els estimadors pels paràmetres estructurals necessaris per poder aplicar el model d'IBNR "two way" que hem derivat.

8.4 Estimadors pels paràmetres estructurals

Per estimar el paràmetre y_{js} són necessàries algunes restriccions per evitar el problema de tenir més paràmetres que observacions. Per això assumirem que $y_{js} = y_s$ per tota j , aleshores l'estimador proposat per De Vylder, F. (1982) en el seu model pot ser utilitzat:

$$\hat{y}_s = \frac{\sum_{j=1}^{J-t+1} w_{js} X_{js}}{\sum_{j=1}^{J-t+1} w_{js}} \qquad s = 1, \dots, J \tag{8.15}$$

Coneixent aquests valors, ja podem assumir que el paràmetre y_s és conegut i ens cal trobar un procediment per estimar els paràmetres $b^{(o)}$, $b^{(d)}$ i S^2 . El procediment utilitzat és similar al que vam utilitzar pel model de classificació creuada additiu. El punt de partida seran les sumes de diferències al quadrat entre les quanties $U_{js} = X_{js} / y_s$ i les seves mitjanes de files, columnes i diagonals. Així, per començar, prenem la següent suma de quadrats per les diagonals:

$$Q^{(d)} = \sum_{j=2}^{J+1} \sum_{h=1}^{j-1} v_{j-h,h} \cdot \left(U_{j-h,h} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{v_{j-k,k}}{v_{j\Sigma}^{(d)}} U_{j-k,k} \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=2}^{J+1} \sum_{h=1}^{j-1} v_{j-h,h} \cdot \left(U_{j-h,h} - U_{jw}^{(d)}\right)^2 \tag{8.16}$$

$U_{jw}^{(d)}$ és la mitjana de diagonals, com podem veure a l'expressió (8.9). El valor esperat d'aquesta variable aleatòria és:

$$\sum_{j=2}^{J+1} \sum_{h=1}^{j-1} v_{j-h,h} \cdot Var[U_{j-h,h}] - \sum_{j=2}^{J+1} v_{j\Sigma}^{(d)} \sum_{h=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{v_{j-h,h}}{v_{j\Sigma}^{(d)}} \frac{v_{j-k,k}}{v_{j\Sigma}^{(d)}} Cov[U_{j-h,h}\,,\, U_{j-k,k}] \tag{8.17}$$

on tenim que:

$$Cov[U_{j-h,h}\,,\, U_{j-k,k}] = b^{(d)} + \delta_{h,k} \cdot \left(b^{(o)} + S^2 / v_{j-k,k}\right) \tag{8.18}$$

Substituint això a l'expressió (8.17) resulta que:

$$\begin{aligned} E[Q^{(d)}] &= \sum_{j=1}^{J+1} \left\{ v_{j\Sigma}^{(d)} (b^{(o)} + b^{(d)}) + jS^2 - v_{j\Sigma}^{(d)} b^{(d)} - v_{j\Sigma}^{(d)} \sum_{h=1}^{j-1} \frac{v_{j-h,h}^2}{v_{j\Sigma}^{(d)2}} - S^2 \right\} = \\ &= b^{(o)} \left(v_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=2}^{J+1} \sum_{h=1}^{j-1} \frac{v_{j-h,h}^2}{v_{j\Sigma}^{(d)}} \right) + S^2 J(J-1)/2 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Aquí, $v_{\Sigma\Sigma}$ es defineix com la suma dels pesos corresponents a les observacions del triangle "run-off".

La segona suma de quadrats que considerem és la que correspon als períodes d'origen (files):

$$Q^{(o)} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{s=1}^{J-j+1} v_{js} \cdot \left(U_{js} - U_{jw}^{(o)}\right)^2 \tag{8.20}$$

amb $U_{jw}^{(o)}$ definit a (8.8). El seu valor esperat és:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{s=1}^{J-j+1} v_{js} \cdot Var[U_{js}] - \sum_{j=1}^{J} v_{j\Sigma}^{(o)} \sum_{r=1}^{J-j+1} \sum_{s=1}^{J-j+1} \frac{v_{jr}}{v_{j\Sigma}^{(o)}} \frac{v_{js}}{v_{j\Sigma}^{(o)}} Cov[U_{jr}\,,\, U_{js}] \tag{8.21}$$

amb

$$Cov[U_{jr}\,,\, U_{js}] = b^{(o)} + \delta_{rs} \cdot \left(b^{(d)} + S^2 / v_{js}\right) \tag{8.22}$$

D'aquesta expressió i de forma similar a (8.19), trobem que:

$$E[Q^{(o)}] = b^{(d)} \left(v_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^{J} \sum_{s=1}^{J-j+1} \frac{v_{js}^2}{v_{j\Sigma}^{(o)}} \right) + S^2 J(J-1)/2 \tag{8.23}$$

Finalment, ens fixem en la suma de quadrats corresponent als períodes de desenvolupament (columnes):

$$\begin{aligned} Q^{(a)} &= \sum_{s=1}^{J} \sum_{j=1}^{J-s+1} v_{js} \cdot \left(U_{js} - \sum_{i=1}^{J-s+1} \frac{v_{is}}{v_{\Sigma s}^{(a)}} U_{is} \right)^2 = \\ &= \sum_{s=1}^{J} \sum_{j=1}^{J-s+1} v_{js} \cdot \left(U_{js} - U_{ws}^{(a)} \right)^2 \qquad v_{\Sigma s}^{(a)} = \sum_{i=1}^{J-s+1} v_{is} \end{aligned} \tag{8.24}$$

de la qual podem derivar que:

$$E[Q^{(a)}] = (b^{(o)} + b^{(d)}) \left(v_{\Sigma\Sigma} - \sum_{s=1}^{J} \sum_{j=1}^{J-s+1} \frac{v_{js}^2}{v_{\Sigma s}^{(a)}} \right) + S^2 J(J-1)/2 \tag{8.25}$$

Amb els valors esperats, el mètode dels moments pot ser utilitzat per obtindre estimadors per $b^{(o)}$, $b^{(d)}$ i S^2. Així doncs, obtenim tres estimadors no esbiaixats solucionant el següent sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{aligned} E[Q^{(d)}] &= Q^{(d)} \\ E[Q^{(o)}] &= Q^{(o)} \\ E[Q^{(a)}] &= Q^{(a)} \end{aligned} \right. \tag{8.26}$$

Com passava a 3.3, els estimadors que resulten d'aquest procediment no podem esperar que siguin els òptims, però són els menys complicats per calcular.

8.5 Exemple numèric

En aquest últim model, els resultats de l'exemple dels dos anteriors models són:

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	857	1845	1242	92	−46	524	604	170	176	16
$j=2$	466	1764	1406	962	922	918	92	116	12	17.4
$j=3$	682	2370	80	−182	64	−40	228	68	63.5	10.8
$j=4$	787	1283	640	276	244	81	−42	83.6	66.6	11.3
$j=5$	668	1450	1524	1653	910	726	267.2	143.0	113.9	19.4
$j=6$	958	1921	2741	958	666	570.3	284.6	152.3	121.3	20.6
$j=7$	805	1491	2000	1312	503.5	483.6	241.4	129.2	102.9	17.5
$j=8$	523	2051	1789	727.0	461.6	443.4	221.3	118.4	94.3	16.1
$j=9$	1023	1857	1456.9	739.2	469.4	450.8	225.0	120.4	95.9	16.3
$j=10$	818	1775.4	1423.0	722.0	458.5	440.3	219.8	117.6	93.7	15.9
$\hat{y}_s$	758.7	1781.3	1427.7	724.4	460	441.8	220.5	118	94	16

Per arribar a aquests resultats, en primer lloc, calculem les mitjanes de les files i les de les diagonals del triangle "run-off". Amb elles podem muntar el sistema d'equacions lineals, segons (8.26), per trobar els valors de les variàncies $b^{(o)}$, $b^{(d)}$ i S^2. Els resultats d'aquest sistema són:

$$\begin{aligned} b^{(o)} &= 0.0899 \\ b^{(d)} &= 0.0377 \\ S^2 &= 167.234 \end{aligned}$$

Amb aquestes dades ja podem trobar els coeficients de credibilitat pels anys d'origen $z^{(o)}$ i per les diagonals $z^{(d)}$. Això ens porta a calcular $\Xi_j^{(o)}$ per acabar estimant les variables X_{js} del triangle:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{js} &= \hat{y}_s \cdot U_{js}^* = \\ &= \hat{y}_s \cdot \left(1 + \Xi_j^{(o)*}\right) \end{aligned}$$

En la següent taula, exposem aquestes dades intermitges:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
U^o	0.907	1.105	0.551	0.562	1.240	1.406	1.195	1.100	1.134	1.078
U^d	1.129	0.910	0.929	0.992	0.572	0.771	1.051	1.159	1.251	1.195
z_j^o	0.765	0.764	0.761	0.757	0.750	0.735	0.716	0.681	0.577	0.290
z_j^d	0.146	0.364	0.472	0.514	0.537	0.558	0.567	0.572	0.576	0.577
Ξ_j^o	−0.058	0.091	−0.32	−0.29	0.212	0.291	0.094	0.004	0.020	−0.003
Σ		17.4	74.3	161.5	543.5	1149	1478	2082	3574	5266

A l'última fila (Σ), es troben els valors acumulats de les estimacions $\hat{X}_{js}$ per cada any d'origen, sumant aquestes obtenim la quantia de la reserva total, que és 14346.

Per exemple, per calcular l'observació X_{86} , això és, de l'any d'origen 8 i any de desenvolupament 6, veiem que:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_6 &= 441.8 \\
U_{js}^* &= \left(1 + \Xi_j^{(o)*}\right) = \\
&= 1 + 0.004 \\
\hat{X}_{js} &= \hat{y}_s \cdot \left(1 + \Xi_j^{(o)*}\right) \\
\hat{X}_{86} &= 441.8 \cdot 1.004 = 443.4
\end{aligned}
$$

Capítol 9

Aplicació de reserves IBNR

9.1 Dades de l'aplicació

Per portar a terme aquesta aplicació hem escollit les dades reals d'una companyia belga que opera per tota Europa. Les dades que exposarem a continuació pertanyen a un contracte d'assegurança de crèdit utilitzat per diversos estats: Bèlgica, Països Baixos, Alemanya, França i el Regne Unit. Les dades del triangle "run-off" són trimestrals i, en ordre a la confidencialitat de les dades, han estat retocades. A més del triangle, sota d'aquest, exposem el volum de negoci per a cada any d'origen. Un cop esposades les dades, mostrarem els resultats que hem obtingut pels tres models analitzats en aquesta tesi doctoral. Per això, hem programat aquests models amb llenguatge APL com es pot veure a l'apèndix C. Finalment, mirarem de comparar els resultats obtinguts mitjançant dos mètodes.

Taula 9.1 *Dades corresponents a Bèlgica*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	390	592.6	161.8	3.5	10.5	0	0	0	0	0
$j=2$	1830	2315	868.2	369.4	73.1	14.8	87.1	0.4	0	
$j=3$	2561	2715	1345	456	119.4	72.1	4.4	0		
$j=4$	1718	2098	633.5	189	96.7	47	0			
$j=5$	1576	2784	804.4	265.3	145.5	78.7				
$j=6$	2317	3974	1385	115.3	223.3					
$j=7$	2089	1796	522.5	127.9						
$j=8$	1814	1724	180.1							
$j=9$	2266	1834								
$j=10$	1839									

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
w_j	29	112	153	131	146	190	114	111	108	138

Taula 9.2 *Dades corresponents als Països Baixos*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	157	1238	1341	413.1	154.9	58.3	22.2	6.1	0.1	0
$j=2$	21.8	750	793.4	105	90.2	22.6	16	38.9	2.4	
$j=3$	28.5	749.3	875.6	433.7	57.7	26.9	29.8	5.5		
$j=4$	29.9	435.9	799	439.7	166.7	24.7	0.2			
$j=5$	11.1	488	670.4	955.5	45.1	27.8				
$j=6$	31.1	926	495.1	65.3	9.5					
$j=7$	85.8	584.6	602.8	171.8						
$j=8$	74.5	899.2	577.3							
$j=9$	136.7	815.7								
$j=10$	28.3									

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
w_j	373	375	441	420	429	433	404	391	381	422

Taula 9.3 *Dades corresponents a Alemanya*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	7.8	3.3	0	0	0	16	0	0	0	0
$j=2$	70.8	209.9	277.6	335.5	0	75.4	148.4	0	0	
$j=3$	48.5	92.5	133.8	450.2	34.6	8.3	0	0		
$j=4$	0	10	30.8	49.3	22.9	1.5	0			
$j=5$	6.4	95.5	55.1	53.6	0	1.9				
$j=6$	119.3	574	113.4	8.7	0					
$j=7$	416.8	1031	300.8	0						
$j=8$	208.6	377.9	225.5							
$j=9$	290.5	239								
$j=10$	427									

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
w_j	1	20	10	4	16	17	30	23	15	16

Taula 9.4 *Dades corresponents a França*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	127.9	731.8	1953	724.7	344.3	64.3	86.9	50.7	0	0
$j=2$	339.1	1083	1097	523.6	191.2	112.1	130	114.9	0	
$j=3$	740.3	2569	1959	614.5	521	14.3	7.1	89.2		
$j=4$	686.8	2286	1075	319	11.8	24.8	104.9			
$j=5$	405.4	1077	754.1	52.1	249.8	0				
$j=6$	597.8	786.3	514.8	293.6	45					
$j=7$	345.1	901.4	1040	0						
$j=8$	136.5	675.9	577.3							
$j=9$	372.6	285.8								
$j=10$	706.6									

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
w_j	66	65	114	96	58	59	55	39	38	67

Taula 9.5 *Dades corresponents al Regne Unit*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	102.6	227.2	175.5	117.4	0	71.1	0	26.4	55.9	0
$j=2$	1057	1348	360.4	76.8	31.2	47	68.7	5	0	
$j=3$	723.7	1592	992.3	385.5	44.8	126.2	12.6	0		
$j=4$	472	382.5	613.7	253.2	84.7	80.5	0			
$j=5$	4.3	378.8	360.6	128.5	289.4	13.8				
$j=6$	330.1	647.9	442.1	12.4	0					
$j=7$	163.9	238.1	275.1	32.1						
$j=8$	858.7	631.3	459.6							
$j=9$	256.3	134								
$j=10$	31									

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$
w_j	18	57	70	40	33	28	13	38	15	33

9.2 Resultats de l'aplicació

Taula 9.6 *Resultats de Bèlgica pel mètode de De Vylder*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	390	592.6	161.8	3.5	10.5	0	0	0	0	0
$j=2$	1830	2315	868.2	369.4	73.1	14.8	87.1	0.4	0	0
$j=3$	2561	2715	1345	456	119.4	72.1	4.4	0	0	0
$j=4$	1718	2098	633.5	189	96.7	47	0	0.2	0	0
$j=5$	1576	2784	804.4	265.3	145.5	78.7	30.5	0.2	0	0
$j=6$	2317	3974	1385	115.3	223.3	71.6	41.4	0.2	0	0
$j=7$	2089	1796	522.5	127.9	100	42.4	24.5	0.2	0	0
$j=8$	1814	1724	180.1	188.1	94.7	40.1	23.2	0.1	0	0
$j=9$	2266	1834	671.1	195.6	98.5	41.7	24.1	0.1	0	0
$j=10$	1839	2452	809.5	236	118.8	50.4	29.1	0.2	0	0

Taula 9.7 *Resultats de Bèlgica pel mètode De Vylder-Mack*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	390	592.6	161.8	3.5	10.5	0	0	0	0	0
$j=2$	1830	2315	868.2	369.4	73.1	14.8	87.1	0.4	0	0
$j=3$	2561	2715	1345	456	119.4	72.1	4.4	0	0	0
$j=4$	1718	2098	633.5	189	96.7	47	0	0.2	0	0
$j=5$	1576	2784	804.4	265.3	145.5	78.7	30.7	0.2	0	0
$j=6$	2317	3974	1385	115.3	223.3	71.1	41.1	0.3	0	0
$j=7$	2089	1796	522.5	127.9	99.5	42.2	24.4	0.2	0	0
$j=8$	1814	1724	180.1	187.2	94.3	39.9	23.1	0.1	0	0
$j=9$	2266	1834	665.5	194	97.7	41.4	23.9	0.1	0	0
$j=10$	1839	2468	814.7	237.5	119.6	50.7	29.3	0.2	0	0

Taula 9.8 *Resultats de Bèlgica pel mètode "two way"*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	390	592.6	161.8	3.5	10.5	0	0	0	0	0
$j=2$	1830	2315	868.2	369.4	73.1	14.8	87.1	0.4	0	0
$j=3$	2561	2715	1345	456	119.4	72.1	4.4	0	0	0
$j=4$	1718	2098	633.5	189	96.7	47	0	0.2	0	0
$j=5$	1576	2784	804.4	265.3	145.5	78.7	29.7	0.2	0	0
$j=6$	2317	3974	1385	115.3	223.3	70	40.5	0.2	0	0
$j=7$	2089	1796	522.5	127.9	96.5	40.9	23.6	0.1	0	0
$j=8$	1814	1724	180.1	177.5	89.4	37.9	21.9	0.1	0	0
$j=9$	2266	1834	711.2	207.3	104.4	44.2	25.6	0.2	0	0
$j=10$	1839	2470	815.5	237.7	119.7	50.7	29.3	0.2	0	0

Taula 9.9 *Resultats dels Països Baixos pel mètode De Vylder*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	157	1238	1341	413.1	154.9	58.3	22.2	6.1	0.1	0
$j=2$	21.8	750	793.4	105	90.2	22.6	16	38.9	2.4	0
$j=3$	28.5	749.3	875.6	433.7	57.7	26.9	29.8	5.5	1.4	0
$j=4$	29.9	435.9	799	439.7	166.7	24.7	0.2	15.1	1.2	0
$j=5$	11.1	488	670.4	955.5	45.1	27.8	13.1	13.1	1	0
$j=6$	31.1	926	495.1	65.3	9.5	28.8	15.6	15.6	1.2	0
$j=7$	85.8	584.6	602.8	171.8	68.1	25.3	13.6	13.6	1.1	0
$j=8$	74.5	899.2	577.3	234.9	83.1	30.8	16.6	16.6	1.3	0
$j=9$	136.7	815.7	803.8	255.8	90.5	33.6	18.1	18.1	1.4	0
$j=10$	28.3	781.5	780	248.2	87.8	32.6	17.6	17.6	1.3	0

Taula 9.10 *Resultats dels Països Baixos pel mètode De Vylder-Mack*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	157	1238	1341	413.1	154.9	58.3	22.2	6.1	0.1	0
$j=2$	21.8	750	793.4	105	90.2	22.6	16	38.9	2.4	0
$j=3$	28.5	749.3	875.6	433.7	57.7	26.9	29.8	5.5	1.5	0
$j=4$	29.9	435.9	799	439.7	166.7	24.7	0.2	16.7	1.3	0
$j=5$	11.1	488	670.4	955.5	45.1	27.8	12.7	12.7	1	0
$j=6$	31.1	926	495.1	65.3	9.5	26.5	14.3	14.3	1.1	0
$j=7$	85.8	584.6	602.8	171.8	70.4	26.1	14.1	14.1	1.1	0
$j=8$	74.5	899.2	577.3	236.7	83.7	31.1	16.8	16.8	1.3	0
$j=9$	136.7	815.7	834.1	265.4	93.9	34.8	18.8	18.8	1.4	0
$j=10$	28.3	724.5	723	230.1	81.4	30.2	16.3	16.3	1.2	0

Taula 9.11 *Resultats dels Països Baixos pel mètode "two way"*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	157	1238	1341	413.1	154.9	58.3	22.2	6.1	0.1	0
$j=2$	21.8	750	793.4	105	90.2	22.6	16	38.9	2.4	0
$j=3$	28.5	749.3	875.6	433.7	57.7	26.9	29.8	5.5	1.5	0
$j=4$	29.9	435.9	799	439.7	166.7	24.7	0.2	16.5	1.3	0
$j=5$	11.1	488	670.4	955.5	45.1	27.8	9.4	9.4	0.7	0
$j=6$	31.1	926	495.1	65.3	9.5	22.2	12	12	0.9	0
$j=7$	85.8	584.6	602.8	171.8	71.2	26.4	14.2	14.2	1.1	0
$j=8$	74.5	899.2	577.3	259.4	91.8	34	18.4	18.4	1.4	0
$j=9$	136.7	815.7	981.5	312.3	110.5	41	22.1	22.1	1.7	0
$j=10$	28.3	723.4	722	229.8	81.3	30.1	16.3	16.3	1.2	0

Taula 9.12 *Resultats d'Alemanya pel mètode De Vylder*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	7.8	3.3	0	0	0	16	0	0	0	0
$j=2$	70.8	209.9	277.6	335.5	0	75.4	148.4	0	0	0
$j=3$	48.5	92.5	133.8	450.2	34.6	8.3	0	0	0	0
$j=4$	0	10	30.8	49.3	22.9	1.5	0	0	0	0
$j=5$	6.4	95.5	55.1	53.6	0	1.9	35.6	0	0	0
$j=6$	119.3	574	113.4	8.7	0	39.1	82.1	0	0	0
$j=7$	416.8	1031	300.8	0	32.9	78.6	164.7	0	0	0
$j=8$	208.6	377.9	225.5	193	17.8	42.7	89.4	0	0	0
$j=9$	290.5	239	145.3	141.6	13.1	31.3	65.6	0	0	0
$j=10$	427	424.8	206.2	200.9	18.6	44.4	93	0	0	0

Taula 9.13 *Resultats d'Alemanya pel mètode De Vylder-Mack*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	7.8	3.3	0	0	0	16	0	0	0	0
$j=2$	70.8	209.9	277.6	335.5	0	75.4	148.4	0	0	0
$j=3$	48.5	92.5	133.8	450.2	34.6	8.3	0	0	0	0
$j=4$	0	10	30.8	49.3	22.9	1.5	0	0	0	0
$j=5$	6.4	95.5	55.1	53.6	0	1.9	46.1	0	0	0
$j=6$	119.3	574	113.4	8.7	0	34	71.3	0	0	0
$j=7$	416.8	1031	300.8	0	28.4	67.8	142.1	0	0	0
$j=8$	208.6	377.9	225.5	200.9	18.6	44.4	93.1	0	0	0
$j=9$	290.5	239	148.5	144.6	13.4	32	67	0	0	0
$j=10$	427	374.1	181.6	176.9	16.4	39.1	81.9	0	0	0

Taula 9.14 *Resultats d'Alemanya pel mètode "two way"*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	7.8	3.3	0	0	0	16	0	0	0	0
$j=2$	70.8	209.9	277.6	335.5	0	75.4	148.4	0	0	0
$j=3$	48.5	92.5	133.8	450.2	34.6	8.3	0	0	0	0
$j=4$	0	10	30.8	49.3	22.9	1.5	0	0	0	0
$j=5$	6.4	95.5	55.1	53.6	0	1.9	28.3	0	0	0
$j=6$	119.3	574	113.4	8.7	0	31.1	65.1	0	0	0
$j=7$	416.8	1031	300.8	0	28.1	67.2	140.9	0	0	0
$j=8$	208.6	377.9	225.5	197.1	18.2	43.6	91.3	0	0	0
$j=9$	290.5	239	161.3	157.1	14.5	34.7	72.8	0	0	0
$j=10$	427	467.5	226.9	221.1	20.4	48.9	102.4	0	0	0

Taula 9.15 *Resultats de França pel mètode De Vylder*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	127.9	731.8	1953	724.7	344.3	64.3	86.9	50.7	0	0
$j=2$	339.1	1083	1097	523.6	191.2	112.1	130	114.9	0	0.1
$j=3$	740.3	2569	1959	614.5	521	14.3	7.1	89.2	0.1	0.1
$j=4$	686.8	2286	1075	319	11.8	24.8	104.9	100.7	0.1	0.1
$j=5$	405.4	1077	754.1	52.1	249.8	0	54.9	59.2	0	0.1
$j=6$	597.8	786.3	514.8	293.6	45	29.7	53.1	57.3	0	0
$j=7$	345.1	901.4	1040	0	177.1	29.9	53.4	57.6	0	0
$j=8$	136.5	675.9	577.3	188.7	122.5	20.7	36.9	39.8	0	0
$j=9$	372.6	285.8	587.4	178.9	116.1	19.6	35	37.7	0	0
$j=10$	706.6	1197	1099	334.6	217.3	36.7	65.5	70.6	0	0

Taula 9.16 *Resultats de França pel mètode De Vylder-Mack*

X_{js}	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	$s=9$	$s=10$
$j=1$	127.9	731.8	1953	724.7	344.3	64.3	86.9	50.7	0	0
$j=2$	339.1	1083	1097	523.6	191.2	112.1	130	114.9	0	0.1
$j=3$	740.3	2569	1959	614.5	521	14.3	7.1	89.2	0.1	0.2
$j=4$	686.8	2286	1075	319	11.8	24.8	104.9	99.8	0.1	0.2
$j=5$	405.4	1077	754.1	52.1	249.8	0	55.9	60.3	0.1	0.1
$j=6$	597.8	786.3	514.8	293.6	45	31.9	56.9	61.4	0.1	0.1
$j=7$	345.1	901.4	1040	0	175.9	29.7	53.1	57.2	0.1	0.1
$j=8$	136.5	675.9	577.3	192.1	124.7	21.1	37.6	40.6	0	0.1
$j=9$	372.6	285.8	614.7	187.2	121.5	20.5	36.6	39.5	0	0.1
$j=10$	706.6	1181	1084	330.1	214.3	36.2	64.6	69.7	0.1	0.1