

# FORMES D'ONA DE MAASS I OPERADORS DIFERENCIALS

Treball final del Màster

Dionís Remón

Universitat de Barcelona, 2009



## Introducció<sup>1</sup>

El problema que s'estudia en aquest treball és la construcció de funcions d'ona de Maass (degudes a Hans Maass (1911-1992)).

Algunes aplicacions d'aquestes funcions es troben en teoria de nombres. A més, com a funcions pròpies de l'operador de Laplace-Beltrami tenen vincles forts en capítols de la física.

El primer capítol conté una introducció breu als conceptes necessaris d'anàlisi matemàtica com ara les funcions de Bessel. En el segon s'expliquen propietats de grups fuchsians amb la inclusió de la representació gràfica de dominis fonamentals. El tercer se centra en estudiar amb detall les propietats de les funcions d'ona de Maass. Finalment, en el capítol quart es donen les eines necessàries per a poder realitzar càlculs acurats amb aquestes funcions en un futur immediat.

Per acabar vull agrair la paciència que ha tingut la directora d'aquest treball, la Dra. Pilar Bayer, així com també la de la meva família i la dels meus amics.

---

<sup>1</sup>Amb el suport de MTM2006-04895.



# Índex

<b>1</b>	<b>Funcions de Bessel</b>	<b>9</b>
1.1	Operador de Laplace-Beltrami . . . . .	9
1.2	Funcions de Bessel . . . . .	11
1.2.1	Funcions de Bessel de primera espècie . . .	12
1.2.2	Funcions de Bessel de segona espècie . . .	15
1.2.3	Funcions de Bessel de modificades . . . . .	16
1.2.4	Funcions de Bessel de tercera espècie . . .	18
1.3	Funcions invariants per l'operador de Laplace . .	18
<b>2</b>	<b>Grups fuchsians</b>	<b>21</b>
2.1	Semiplà de Poincaré . . . . .	21
2.1.1	Mètrica hiperbòlica . . . . .	22
2.1.2	Topologia del grup $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	26
2.1.3	Grups discrets i pròpiament discontinus . .	28
2.2	Propietats dels grups fuchsians . . . . .	30
2.2.1	Elements especials del grup modular . . .	31

2.2.2	Propietats dels subgrups discrets . . . . .	31
2.2.3	Grups de congruència . . . . .	34
2.2.4	Classes dobles definides per a grups de congruència . . . . .	40
2.3	Dominis fonamentals . . . . .	45
2.3.1	Definicions i primeres propietats . . . . .	46
2.3.2	Amplada i altura . . . . .	49
2.3.3	Domini fonamental de Dirichlet . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Formes d'ona de Maass</b>	<b>59</b>
3.1	Definicions generals i notacions . . . . .	59
3.1.1	Caràcters de Dirichlet . . . . .	59
3.1.2	Formes de Maass . . . . .	63
3.2	Espais de formes de Maass . . . . .	65
3.2.1	Els espais $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ . . . . .	65
3.2.2	L'operador de conjugació . . . . .	67
3.2.3	Series de Fourier . . . . .	68
3.2.4	Involucions i normalitzadors . . . . .	68
3.2.5	L'operador de reflexió . . . . .	71
3.2.6	Simetrització completa . . . . .	73
3.2.7	Operadors de Hecke . . . . .	75
3.2.8	Formes noves i formes velles . . . . .	79
3.2.9	Les aplicacions normalitzadores de les puntes com a normalitzadors de $(\Gamma_0(q), \chi)$ . . . . .	84

<i>ÍNDIX</i>	7
<b>4 Aspectes computacionals</b>	<b>87</b>
4.1 Introducció . . . . .	87
4.2 Remarques numèriques . . . . .	88
4.3 El sistema lineal . . . . .	89
4.4 Un algoritme de reducció . . . . .	93





# Capítol 1

## Funcions de Bessel

En aquest capítol tenim com a objectiu principal la definició de les funcions de Bessel i l'estudi de les seves propietats més importants. Aquestes funcions proporcionen un paper clau per a poder desenvolupar més endavant les formes d'ona de Maass. Per tal de definir-les, hem de començar repassant alguns conceptes sobre operadors diferencials.

Les referències principals d'aquest capítol són [Wat66] i [Whi46].

### 1.1 Operador de Laplace-Beltrami

A més de les referències esmentades abans, en aquesta secció s'ha emprat [Bay09].

L'operador de Laplace o laplaciana, que denotarem per  $\Delta$ , és un operador diferencial definit en la mètrica euclidià. És un dels operadors el·líptics més importants i amb més aplicacions. En física, s'usa en el modelatge de la propagació d'ones i de fluxes de calor, formant part de l'equació de Helmholtz. L'operador de Laplace és central en electrostàtica i en mecànica de fluids, anco-

rat en l'equació de Laplace i l'equació de Poisson. En mecànica quàntica representa el terme d'energia cinètica de l'equació de Schrödinger. En matemàtiques, el laplacà forma part del nucli de la teoria de Hodge i de resultats de la cohomologia de De Rham.

**1.1.1 Definició.** En l'espai euclidià de dimensió  $n$  l'operador de Laplace és un operador diferencial de segon ordre, que es defineix com la divergència del gradient.

D'aquesta manera, si  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ , aleshores el laplacà de  $f$  es defineix per

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f,$$

on  $\nabla$  denota el gradient d'una funció, és a dir,

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

**1.1.2 Definició.** El conjunt de funcions que pertanyen al nucli de  $\Delta$  correspon al conjunt de funcions anomenades harmòniques.

Aquest operador pot ser generalitzat a espais no euclidians, on pot esdevenir el·líptic, com en el cas euclidià, hiperbòlic o ultrahiperbòlic. En l'espai de Minkowski, el laplacà esdevé l'operador d'Alembert i és de la forma següent :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

En particular, l'operador pot ser definit en qualsevol varietat riemanniana o pseudo-riemanniana. En aquests casos, rep el nom d'operador de Laplace-Beltrami i té la forma següent:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right), \quad (1.1)$$

on  $g^{ij}$  denoten les entrades de la matriu  $g = (g^{ij})$  que defineix la mètrica. En aquest cas també se satisfà que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

En coordenades locals, l'operador de Laplace-Beltrami s'expressa en termes del tensor  $g$  i dels símbols de Christoffel  $\{\Gamma_{ij}^k\}$ :

$$\Delta f = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right).$$

En aquest treball l'emprarem en el pla hiperbòlic, és a dir, en el semiplà superior complex

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\},$$

on  $\Im(z)$  denota la part imaginària de  $z = x + iy$ , equipat amb la mètrica

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \quad d\mu = \frac{dx dy}{y^2}, \quad (1.2)$$

en la qual  $ds$  denota l'element d'arc i  $d\mu$ , el d'àrea. En aquesta situació, l'operador de Laplace-Beltrami és descrit per

$$\Delta(f) = -y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

## 1.2 Funcions de Bessel

En aquesta secció fem un breu repàs de les funcions de Bessel i dels seus diferents tipus. Aquestes funcions també són conegudes amb el nom de funcions cilíndriques.

Les anomenades funcions de Bessel foren considerades per primera vegada per Daniel Bernoulli, l'any 1738, però el seu estudi sistemàtic va ser iniciat en 1824, per Bessel, en l'obra *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht* (Berliner Abh. 1824).

Tal i com veurem més endavant, les formes d'ona de Maass són combinació lineal d'un cert tipus de funcions de Bessel.

### 1.2.1 Funcions de Bessel de primera espècie

**1.2.1 Definició.** L'equació diferencial de Bessel de primera espècie és l'equació diferencial ordinària de segon ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (1.3)$$

on  $n \in \mathbb{C}$  és fixat.

De forma equivalent,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0. \quad (1.4)$$

Les solucions de l'equació diferencial de Bessel (1.3) s'anomenen funcions de Bessel de primera espècie.

Tot i que aquesta és la definició més emprada, hi ha altres definicions que també poden ser considerades. Per exemple, originàriament les funcions de Bessel van ser considerades com les funcions que s'obtenien com a coeficients del desenvolupament en sèrie de Laurent de la funció

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}z(t - \frac{1}{t})};$$

és a dir,

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}z(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z).$$

Fins ara no hem dit res sobre les solucions de l'equació diferencial (1.3). Ens interessa mostrar una representació funcional explícita d'una solució d'aquesta equació diferencial. Per a assolir aquest fi, provem el teorema següent.

**1.2.2 Teorema.** Donat  $n \in \mathbb{C}$ , definim la funció

$$J_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}x\right)^n \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt, \quad (1.5)$$

on  $x \in \mathbb{R}$ . Aleshores funció  $J_n(x)$  és una solució de l'equació diferencial (1.3).

El contorn de la integral recorre el camí que parteix de  $-\infty$  recorre la circumferència unitat en el sentit invers a les busques del rellotge i retorna a  $-\infty$ .

DEMOSTRACIÓ. Per a provar aquest resultat fem els càlculs corresponents de forma explícita. Realitzem en primer lloc la diferenciació de la funció

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \oint t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt.$$

En calcular la derivada primera, obtenim la funció següent:

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= n \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n-1} \oint t^{-n-1} e^{t-x^2/4t} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} \oint t^{-n-1} \left(\frac{1}{2t}\right) e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt. \end{aligned}$$

En calcular la derivada segona obtenim el següent:

$$\begin{aligned} J''_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n n(n-1)x^{n-2} \oint t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n nx^n \oint t^{-n-1} \left(\frac{x}{2t}\right) e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+1)x^n \oint t^{-n-1} \left(\frac{1}{2t}\right) e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{n+1} \oint t^{-n-1} \left(\frac{1}{2t}\right) \left(\frac{2x}{4t}\right) e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt. \end{aligned}$$

Per a acabar amb la demostració, substituïm les funcions que hem calculat anteriorment en la fórmula que ens dóna la equació diferencial de Bessel (1.3) i comprovem que, efectivament, la igualtat es compleix. Procedim com segueix:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = \\ & \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \oint \left\{ \frac{n^2}{x^2} - \frac{n}{x^2} - \frac{n}{t} - \frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2} \right\} t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt + \\ & \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \oint \left\{ \frac{n}{x^2} - \frac{1}{2t} \right\} t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt + \\ & \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \oint \left\{ 1 - \frac{n^2}{x^2} \right\} t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} dt = \\ & \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n \oint \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t^{-n-1} e^{t-\frac{x^2}{4t}} \right\} dt = 0, \end{aligned}$$

i l'última igualtat se satisfà atès que la integral admet una primitiva i, a més, pren el mateix valor al principi que al final de recorre la corba tancada.  $\square$

Podem estendre  $J_n$  a una funció de variable complexa. Per a  $z \in \mathbb{C}$ , definim  $J_n(z)$  per la igualtat

$$J_n(z) := \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} e^{t-\frac{z^2}{4t}} dt,$$

on  $\arg z$  pren el valor principal i  $|\arg t| \leq \pi$  en el contorn.

Si  $n$  és un enter es té la representació integral

$$J_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}(u-u^{-1})} u^{-n-1} dt,$$

que s'assoleix fent el canvi  $u = 2t/z$ , i on el contorn de la integral encercla l'origen i el recorregut és en sentit horari a les busques

del rellotge. Si, a més, l'enter  $n$  és positiu podem escriure la funció com

$$J_n(z) := \frac{1}{\pi i} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta.$$

Tot hi això, en el nostre treball ens interessarà treballar també amb funcions de Bessel amb  $n$  no necessàriament enter.

Per a expressar aquesta integral com una sèrie de potències, observem que és una funció analítica en  $z$  i podem obtenir els coeficients de les sèries de Taylor en potències de  $z$  per diferenciació sota el signe d'integral. Tenint en compte que  $t^{-n-1}e^{t-\frac{z^2}{4t}}$  assoleix el seu valor inicial després de descriure el camí que va de menys infinit descriu un cercle en sentit contrari a les busques del rellotge entorn del zero i torna a l'infinit, resulta que les derivades sota el signe d'integral tenen sentit. Per tant podem derivar en un entorn del zero i desenvolupar la sèrie de Taylor. Després d'això obtenim el següent desenvolupament

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)},$$

on  $\Gamma$  denota la funció gamma d'Euler.

### 1.2.2 Funcions de Bessel de segona espècie

Ja que estem tractant amb una equació diferencial de segon ordre, tenim un parell de solucions linealment independents. Si considerem la funció  $J_n(z)$  com un element de la base ens agradaria saber quin és l'altre conjunt de solucions de l'equació diferencial.

**1.2.3 Definició.** La funció de Bessel de segona espècie (dita, també, funció de Weber) es defineix segons la fórmula següent.

$$Y_s(z) := \frac{J_s(z) \cos(s\pi) - J_{-s}(z)}{\sin(s\pi)}.$$

**1.2.4 Proposició.** Per a  $n$  no enter, el parell  $\{J_n(z), J_{-n}(z)\}$  és un sistema fonamental de solucions de (1.3). Per a  $n$  enter, ho és el parell  $\{J_n(z), Y_n(z)\}$ .  $\square$

### 1.2.3 Funcions de Bessel de modificades

Les funcions de Bessel definides en la secció anterior no són suficients per a donar el concepte de forma d'ona de Maass. Ens cal donar la definició de funció de Bessel modificada.

**1.2.5 Definició.** Anomenem funcions de Bessel modificades les funcions que sorgeixen com a solució de l'equació diferencial ordinària de segon ordre

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0, \quad (1.6)$$

anomenada equació diferencial de Bessel modificada.

Anàlogament al cas anterior, en el teorema següent provem com són les solucions d'equació.

**1.2.6 Teorema.** Sigui  $s \in \mathbb{C}$ . Aleshores la funció

$$I_s(x) := J_s(ix), \quad (1.7)$$

amb  $x \in \mathbb{R}$ , és solució de la equació diferencial (1.6),

**DEMOSTRACIÓ.** Per a provar aquesta afirmació procedim de la forma següent. Considerem l'equació de Bessel modificada (1.6) i substituïm la variable  $y$  per la funció  $I_s(z)$ .

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2 I_s(x)}{dx^2} + x \frac{dI_s(x)}{dx} - (x^2 + s^2)I_s(x) &= \\ &= x^2 \frac{d^2 J_s(ix)}{d^2 x} + x \frac{dJ_s(ix)}{dx} - (x^2 + s^2)J_s(ix) = \\ &= i^2 x^2 \frac{d^2 J_s(ix)}{d^2 (ix)} + ix \frac{dJ_s(ix)}{dix} + ((ix)^2 - s^2)J_s(ix). \end{aligned}$$



Ara, fent el canvi  $y = ix$  obtenim que  $J_s(ix)$  és solució de (1.6).  
□

En aquest cas, l'equació diferencial de segon ordre també té dues solucions independents. La primera és la funció  $I_s(x)$  descrita en el teorema anterior. Per a obtenir la segona solució de l'equació de Bessel modificada (1.6), definim la funció  $K_s(x)$ , per a tots els valors de  $s$  no enters segons la igualtat

$$K_s(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{\{I_{-s}(x) - I_s(x)\}}{\sin(s\pi)}.$$

Tal i com hem definit aquestes funcions, només estan definides sobre els nombres reals. Per tal de definir-les sobre els complexos, es consideren igual, però amb la variable complexa. Aleshores, aquestes funcions també són solució de l'equació diferencial modificada (1.6).

En el cas de la funció  $K_s(z)$ , quan  $|\arg z| > \frac{3}{2}\pi$ , posseeix una expansió asimptòtica

$$K_s(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(4s^2 - 1^2)(4s^2 - 3^2) \cdots (4s^2 - (2r-1)^2)}{r! 2^{3r} z^r} \right],$$

per a valors grans de  $|z|$ .

Per tal de fer càlculs en el futur, ens interessarà tenir una expressió fàcilment avaluable d'aquestes funcions per a valors molt grans de  $|z|$ . Considerant només la primera part de l'expansió, observem que, per a valors grans de  $|z|$ , la funció  $K_s(z)$  compleix que

$$K_s(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

### 1.2.4 Funcions de Bessel de tercera espècie

En molts desenvolupaments de l'anàlisi matemàtica sobre representacions integrals i expansions asimptòtiques s'usen combinacions de les funcions  $J_n(z)$  i  $Y_n(z)$ ; és a dir, expressions tals com  $J_n(z) \pm iY_n(z)$  apareixen freqüentment. Aquestes combinacions també es presenten en la teoria de funcions de Bessel purament imaginàries. Això té com a conseqüència que a les funcions  $J_n(z) \pm iY_n(z)$ , se les anomeni funcions de Bessel de tercera espècie. Se solen denotar amb la lletra  $H$ . Les dos funcions de Bessel de tercera espècie estan definides per les igualtats

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z), \quad H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z).$$

## 1.3 Funcions invariants per l'operador de Laplace

Si no és diu el contrari, d'ara endavant entendrem com a laplaciana l'operador de Laplace-Beltrami definit en l'espai hiperbòlic. En aquesta secció considerem funcions pròpies del laplaciana.

Recordem que la forma d'aquest operador és

$$\Delta(f) = -y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).$$

**1.3.1 Exemple.** Els primer exemples que podem donar de funcions invariants pel laplaciana són les funcions  $y^s$  i  $xy^{-s}$ , on  $s \in \mathbb{C}$ . Podem comprovar que ambdues funcions són funcions pròpies de valor propi  $s(1-s)$ .

Les funcions anteriors no són gaire útils a l'hora de formar les formes d'ona de Maass, perquè, entre altres coses, no podem construir amb elles funcions que ens proporcionin bones condicions de periodicitat. Per tant, el que farem a continuació serà

donar un altre tipus de funcions “no trivials” que també són vectors propis de l'operador de Laplace.

**1.3.2 Teorema.** *Sigui la funció de variable complexa*

$$f(z) := y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix},$$

on  $z = x + iy$ . Aleshores, la funció  $f$  és funció pròpia de l'operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right),$$

de valor propi  $\lambda = \left( \frac{1}{4} + R^2 \right)$ .

DEMOSTRACIÓ. És trivial comprovar que derivant respecte de  $x$  obtenim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix},$$

i derivant respecte de  $y$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -\frac{1}{4} y^{-3/2} K_{iR}(y) e^x + y^{-1/2} K'_{iR}(y) e^x + y^{1/2} K''_{iR}(y) e^{ix}.$$

Si ara substituïm, tenim que

$$\begin{aligned}
\Delta f(z) &= -y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \right) \\
&= y^{5/2} K_{iR}(y) e^{ix} + \frac{1}{4} y^{1/2} K_{iR}(y) e^{ix} - y^{3/2} K'_{iR}(y) e^{ix} \\
&\quad - y^{5/2} K''_{iR}(y) e^{ix} \\
&= \{ -y^2 K''_{iR}(y) - y K'_{iR}(y) - y^2 K_{iR}(y) - R^2 K_{iR}(y) + \\
&\quad + R^2 K_{iR}(y) + \frac{1}{4} K_{iR}(y) \} \cdot e^{ix} y^{1/2} \\
&= \{ -y^2 K''_{iR}(y) - y K'_{iR}(y) - (y^2 + R^2) K_{iR}(y) + \\
&\quad - R^2 K_{iR}(y) + \frac{1}{4} K_{iR}(y) \} \cdot e^{ix} y^{1/2} \\
&= \left( \frac{1}{4} - (iR)^2 \right) y^{1/2} \cdot K_{iR}(y) \cdot e^{ix}
\end{aligned}$$

tal i com volíem provar.  $\square$

Observem que el valor propi d'aquestes funcions és de la forma

$$\lambda = \frac{1}{4} + R^2.$$

Combinacions d'aquestes funcions són les que més endavant ens proporcionaran les funcions d'ona de Maass. Escrivim el valor propi d'aquesta forma tant particular degut a que, com veurem més endavant, segons una conjectura de Selberg, en el cas que tractarem, el valor de  $R$  ha de pertànyer a l'interval  $[0, \infty)$ .

# Capítol 2

## Grups fuchsians

En aquest capítol fem una introducció més precisa al concepte de semiplà de Poincaré, i al grup de les transformacions lineals fraccionaries que hi actuen. Tot això ens portarà a la definició de grups fuchsians.

Un cop tinguem la definició de grups fuchsians estudiarem els diferents tipus de dominis fonamentals que originen i donarem un mètode efectiu per a calcular-los. L'algoritme serà emprat més endavant per tal de poder calcular formes d'ona de Maass.

Les referències principals d'aquest capítol són [Iwa97], [Kat92] i [Miy76].

### 2.1 Semiplà de Poincaré

En aquesta secció ens centrarem en donar conceptes inicials sobre el semiplà de Poincaré així com del grup de les transformacions lineals fraccionaries. Per a aquest fi, primer farem una introducció a la mètrica hiperbòlica.

Més endavant farem una descripció de com actua el grup

de les transformacions lineals fraccionaries sobre el semiplà de Poincaré, així com de la topologia d'aquest grup.

### 2.1.1 Mètrica hiperbòlica

Sigui  $\mathcal{H}$  el semiplà de Poincaré amb les mètriques hiperbòliques definides en el capítol anterior. Aleshores, dos punts qualssevol de  $\mathcal{H}$  poden ser units per una única geodèsica i la distància entre aquests dos punts és mesurada sobre aquesta geodèsica. Però  $\mathcal{H}$  no és euclidià, atès que no compleix el cinquè axioma d'Euclides, és a dir, hi ha més d'una geodèsica que passa per un punt exterior a una geodèsica donada (l'axioma de les paral·leles). De fet, en aquesta situació poden haver-hi fins a infinites geodèsiques que no tenen cap altre punt en comú però que passen per un punt exterior a una geodèsica donada.

Sigui  $I = [0, 1]$  i definim  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  com un camí diferenciable a trossos,  $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathcal{H} \mid t \in I\}$ . Aleshores la longitud hiperbòlica  $h(\gamma)$  és donada per la fórmula

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt}{y(t)} = \int_0^1 \frac{|dz| dt}{y(t)}.$$

**2.1.1 Definició.** La distància hiperbòlica entre dos punts  $z$  i  $w$ , denotada per  $\rho(z, w)$ , es defineix per la fórmula

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma),$$

on l'ímfim es pren sobre tots els camins  $\gamma$  que uneixen els punts  $z$  i  $w$  en  $\mathcal{H}$ .

Es fàcil veure que la funció  $\rho$  no pren valors negatius, que compleix la propietat de ser simètrica, és a dir, se satisfà que  $\rho(z, w) = \rho(w, z)$ , per a tot  $z, w \in \mathcal{H}$ , i, a més, satisfà la desigualtat triangular

$$\rho(z, w) \leq \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w).$$

Per tant és una funció distància en  $\mathcal{H}$ .

Considerem el conjunt de les matrius reals de dimensió 2, és a dir, de la forma

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Com és habitual, la funció determinant serà  $\det(g) = ad - bc$  i la funció traça  $\operatorname{tr}(g) = a + d$ .

El conjunt de matrius que compleixen  $\det(g) = 1$ , serà l'objecte principal d'estudi d'aquesta secció. S'anomena el grup especial lineal real i el denotarem per  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ . És immediat comprovar que és un grup, atès que el producte de dos matrius de determinant 1 és una matriu de determinant 1, i la inversa d'una matriu de determinant 1 també és una matriu de determinant 1.

Denotem el grup projectiu especial lineal

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \operatorname{Id}\}.$$

En aquest cas tenim que redefinir lleugerament la funció traça per tal que estigui ben definida en el nou conjunt. Així doncs, tenim  $\operatorname{Tr}(-g) = -\operatorname{Tr}(g)$ , per tant

$$\operatorname{Tr}^2(T) = \operatorname{Tr}^2(g)$$

i

$$\operatorname{Tr}(T) := |\operatorname{Tr}(g)|,$$

on  $T$  denota la classe de  $g$  en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Observem que, amb la nova definició, la funció traça està ben definida en el grup quocient  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

**2.1.2 Teorema.** *Les transformacions  $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , definides segons*

$$\begin{aligned} T: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ z &\mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

són homeomorfismes de  $\mathcal{H}$ .

DEMOSTRACIÓ. Primer mostrem que qualsevol transformació del grup projectiu especial lineal aplica  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{H}$ . Prenem  $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , i  $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Aleshores

$$w = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2};$$

per tant,

$$\Im(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i|cz+d|^2} = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}. \quad (2.1)$$

A més  $\Im(z) > 0$  implica que  $\Im(w) > 0$ . El teorema ara segueix de la continuïtat de  $T(z)$  i de la seva inversa.  $\square$

**2.1.3 Observació.** Notem que  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  conté totes les transformacions lineals de la forma  $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$  amb  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  i  $\Delta = ad - bc > 0$  atès que dividint el numerador i el denominador per  $\sqrt{\Delta}$  obtenim una nova matriu amb el seu determinant igual a 1. En particular,  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  conté totes les transformacions de la forma  $z \rightarrow az + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ ) i les transformacions de la forma  $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ .

**2.1.4 Definició.** Una transformació de l'espai  $\mathcal{H}$  s'anomena una isometria si preserva la distància hiperbòlica sobre  $\mathcal{H}$ .

És clar que el conjunt de les isometries de  $\mathcal{H}$  forma un grup, el qual denotem per  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ .

**2.1.5 Teorema.** *El conjunt  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  està inclòs dins del conjunt de les isometries de l'hiperplà de Poincaré:*

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \subseteq \text{Isom}(\mathcal{H}).$$



DEMOSTRACIÓ. Pel teorema (2.1.2) totes les transformacions de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  apliquem  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{H}$ .

Provarem que si  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  és un camí diferenciable a trossos, aleshores per a qualsevol  $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  tenim que  $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$ .

Suposem que  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  és descrit per  $z(t) = (x(t), y(t))$ , i que  $w(t) = T(z(t)) = u(t) + iv(t)$ . Tenim que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Per (2.1), tenim que  $v = \frac{y}{|cz + d|^2}$ , i per tant  $\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{v}{y}$ . D'aquesta manera

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right| dt}{v(t)} = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} \right| dt}{v(t)} = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right| dt}{y(t)} = h(\gamma)$$

La prova de què la distància hiperbòlica és invariant per l'acció de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  se segueix immediatament d'aquest fet.  $\square$

Per a acabar aquesta secció determinem les geodèsiques del pla hiperbòlic. Primer provarem un lema elemental.

**2.1.6 Lema.** *Qualsevol semicercle ortogonal o recta euclidiana ortogonal a l'eix real pot ser aplicat mitjançant una transformació de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  en la semirecta  $\{z \in \mathcal{H} \mid \Re(z) = 0\}$ .*

DEMOSTRACIÓ. Cas 1. Considerem  $L$  una recta euclidiana ortogonal a l'eix real. Sigui  $\alpha_1 \in \mathbb{R} \cap L$  que pertany a  $L$ . Considerem la transl·lació

$$T = z - \alpha_1.$$

Aleshores  $T(L)$  és l'eix imaginari.

Cas 2. Considerem un semicercle  $L$  ortogonal a l'eix real que talli la recta real en els punts  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Considerem l'aplicació que envia un dels dos punts a l'infinit, per exemple,

$$T = \frac{1}{z - \alpha_1}.$$

Atès aquestes les transformacions preserven angles,  $T(L)$  només pot ser una recta ortogonal a l'eix real. Per tant ens situem en el cas 1 i la demostració acaba.  $\square$

**2.1.7 Teorema.** *Les geodèsiques de  $\mathcal{H}$  són semicercles ortogonals o semirectes euclidianes ortogonals a l'eix real.*

DEMOSTRACIÓ. Siguin  $z_1$  i  $z_2$  dos punts en  $\mathcal{H}$ . Suposem primer que  $z_1 = ia$  i  $z_2 = ib$  amb  $b > a$ . Si  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  és un camí qualsevol diferenciable a trossos, que uneix  $ia$  i  $ib$ , amb  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , aleshores

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{v(t)} dt \geq \\ &\geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right| dt}{y(t)} \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

però el valor  $\ln \frac{b}{a}$  és exactament el valor de la distància hiperbòlica del segment que uneix els punts  $ia$  i  $ib$  en l'eix imaginari, és a dir  $\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$ . Per tant la geodèsica que uneix  $ia$  i  $ib$  és el segment de l'eix imaginari que els uneix. Per a  $z_1$  i  $z_2$  arbitraris, considerem la transformació que ens dóna el lema anterior i juntament amb el teorema 2.1.5 acaba la demostració.  $\square$

## 2.1.2 Topologia del grup $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

L'objectiu d'aquesta secció serà donar algunes propietats bàsiques referents a la topologia del grup  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  per tal que en

seccions futures puguem donar la definició i algunes propietats dels grups fuchsians.

Sigui  $T \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  una transformació de la forma

$$z \rightarrow T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Aquesta transformació  $T$  pot ser identificada amb el punt  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Més precisament, com a espai topològic, l'espai  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  pot ser identificat com un subconjunt de  $\mathbb{R}^4$  de la forma següent:

$$X = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1\}.$$

Definim ara l'aplicació  $-\text{Id}$ , pensada com a funció de  $\mathbb{R}^4$  com

$$\begin{aligned} -\text{Id} : X &\rightarrow X \\ (a, b, c, d) &\mapsto (-a, -b, -c, -d). \end{aligned}$$

Aleshores l'aplicació  $-\text{Id} : X \rightarrow X$  és un homeomorfisme i juntament amb la identitat forma un grup cíclic d'ordre 2 que actua sobre  $X$ . Així doncs, podem dotar d'una topologia a  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  mitjançant la topologia quocient de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm\text{Id}\}$ .

Podem definir la norma en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  com la norma induïda de  $\mathbb{R}^4$ , és a dir, sigui  $T$  una transformació del grup  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  de la forma  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  amb  $ad - bc = 1$ . Definim la norma en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  com

$$\|T\| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2}.$$

Notem que  $\|\cdot\|$  és una funció ben definida.

Amb això, el grup  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  esdevé un grup topològic amb la topologia definida per la mètrica anterior.

El grup de totes les isometries de  $\mathcal{H}$ ,  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ , es pot dotar d'una topologia de forma similar.

### 2.1.3 Grups discrets i pròpiament discontinus

**2.1.8 Definició.** Un subgrup  $\Gamma$  de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$  és discret si la topologia induïda sobre  $\Gamma$  per la topologia de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$  és la topologia discreta, és a dir, si  $\Gamma$  és un subespai discret de l'espai topològic  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ .

**2.1.9 Lema.** *Un subgrup  $\Gamma$  és discret si, i només si,  $T_n \rightarrow \text{Id}$ ,  $T_n \in \Gamma$  implica  $T_n = \text{Id}$  per a  $n$  suficientment gran.*  $\square$

Siguin  $X$  un espai topològic i  $G$  un grup d'homomorfismes que actua en  $X$ .

**2.1.10 Definició.** Una família  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  de subconjunts de  $X$ , indexats per elements d'un conjunt  $A$ , s'anomena localment finita si per a qualsevol subconjunt compacte  $K \subset X$ , se satisfà que  $M_\alpha \cap K \neq \emptyset$  únicament per a un nombre finit d'índexs  $\alpha \in A$ .

En el que segueix considerarem espais topològics  $X$  en els que hi opera un grup topològic  $G$  de forma contínua.

**2.1.11 Definició.** Sigui  $X$  un  $G$ -conjunt i  $x \in X$ . El conjunt

$$Gx := \{g(x) \mid g \in G\}$$

s'anomena l'òrbita de  $x$  per l'acció del grup  $G$ , o, també, la  $G$ -òrbita del punt  $x$ .

El subgrup  $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$  se l'anomena l'estabilitzador de  $x$  pel grup  $G$ .

Cal observar que  $Gx \subseteq X$  i  $G_x \subseteq G$ . De forma usual, s'assumeix que cada element de  $Gx$  està contingut amb una multiplicitat igual a l'ordre de  $G_x$ .

Observem que  $\{Gx \mid x \in X\}$  pot ser considerat com una família igual que en la definició (2.1.10), on cada subconjunt

indexat,  $x_g := \{g(x)\}$ , és un punt d'una  $G$ -òrbita de  $x$ . Amb això donem la definició següent.

**2.1.12 Definició.** Es diu que un grup  $G$  actua de forma pròpiament discontinua sobre un espai topològic  $X$  si la  $G$ -òrbita  $\{Gx \mid x \in X\}$ , entès com  $\{x_g \mid g \in G\}$ , de qualsevol punt és localment finita.

Amb això escrivim el lema següent.

**2.1.13 Lema.** *Un grup  $G$  actua de forma pròpiament discontinua sobre  $X$  si, i només si, cada òrbita és discreta i l'ordre de l'estabilitzador de cada punt és finit.  $\square$*

**2.1.14 Observació.** Podem observar que, de fet, la discreció de totes les òrbites ja implica la discreció del grup.

**2.1.15 Teorema.** *Un grup  $G$  actua de forma pròpiament discontinua en  $X$  si, i només si, cada punt de  $x \in X$  té un entorn  $V$  tal que  $T(V) \cap V \neq \emptyset$  únicament per a un nombre finit d'elements de  $T \in G$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Suposem que  $G$  actua de forma pròpiament discontinua sobre  $X$ . Aleshores cada òrbita  $Gx$  és discreta, i per a cada punt  $x$ ,  $G_x$  és finit. Això implica que, per a qualsevol punt  $x$ , existeix una bola  $B_\epsilon(x)$  centrada en  $x$  i de radi  $\epsilon$  que no conté cap altre punt de  $Gx$  diferent de  $x$ .

Sigui  $V \subseteq B_{\epsilon/2}$  un entorn de  $x$ , aleshores  $T(V) \cap V \neq \emptyset$  implica que  $T \in G_x$ , i això només és possible per a un nombre finit de transformacions  $T \in G$ .

Per a l'implicació inversa, si tenim que cada punt de  $x \in X$  té un entorn  $V$  tal que  $T(V) \cap V \neq \emptyset$  únicament per a un nombre finit de  $T \in G$ , aleshores tenim que demostrar que cada  $G$ -òrbita és discreta i que l'estabilitzador  $G_x$  de cada punt  $x$  és d'ordre finit. Si  $Gx$  no fos discreta, tindria un punt limit, denotem-lo

per  $x_0$ , i un entorn de  $x_0$  que reunirà infinites de les imatges sota  $G$ , amb contradicció amb la hipòtesis. De manera similar, si l'estabilitzador  $G_x$  de  $x$ , és infinit, és a dir, si  $T(x) = x$  per a infinits elements  $T \in G$ , aleshores qualsevol entorn  $V$  de  $x$  contindrà un nombre infinit d'imatges sota  $G$ .  $\square$

Abans de donar alguns exemples de grups fuchsians, identificarem els subgrups discrets dels grups de Lie de dimensió 1, és a dir, de  $\mathbb{R}$ , el grup additiu dels nombres reals, i de  $\mathbb{S}^1$ , el grup multiplicatiu dels nombres complexos de mòdul 1.

**2.1.16 Lema.** *Se satisfan les propietats següents:*

1. *Tot subgrup discret de  $\mathbb{R}$  és cíclic infinit.*
2. *Tot subgrup discret de  $\mathbb{S}^1$  és cíclic infinit.*

DEMOSTRACIÓ. Per a la part 1, sigui  $\Gamma$  un subgrup discret de  $\mathbb{R}$ . Per suposat  $0 \in \Gamma$  i existeix el nombre real més petit positiu  $x \in \Gamma$ , ja que altrament  $\Gamma$  no seria discret. Aleshores  $\{nx \mid n \in \mathbb{Z}\}$  és un subgrup de  $\Gamma$ . Suposem que hi ha un element  $y \in \Gamma$  que no compleix  $y \neq nx$ . Aleshores podem assumir que  $y > 0$ , si no prenem  $-y$  que també serà de  $\Gamma$ . Hi ha un enter  $k \geq 0$  tal que  $kx < y < (k+1)x$ , i per tant  $0 < y - kx < x$ , i en conseqüència el nombre  $(y - kx) \in \Gamma$ , la qual cosa contradia l'elecció de  $x$ .

Per a provar la part 2, sigui  $\Gamma$  un subgrup discret de  $\mathbb{S}^1$ . Per la discreció existeix  $z = e^{i\phi_0} \in \Gamma$ , amb l'argument més petit positiu i no nul,  $\phi_0$ . Ara podem procedir com en el cas anterior.  $\square$

## 2.2 Propietats dels grups fuchsians

En aquesta secció veurem les definicions i conceptes inicials de grups fuchsians, així com també algunes de les propietats que farem servir més endavant.

### 2.2.1 Elements especials del grup modular

Considerem el grup  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \left\{ z \rightarrow T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1, z \in \mathcal{H} \right\}. \quad (2.2)$$

Podem distingir tres classes d'elements segons el valor que prengui l'aplicació traça  $\text{Tr}(T) = |a + d|$ .

**2.2.1 Definició.** Direm que un element  $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  és el·líptic si  $\text{Tr}(T) < 2$ . Direm que  $T$  és parabòlic si  $\text{Tr}(T) = 2$ . Direm que  $T$  és hiperbòlic si  $\text{Tr}(T) > 2$ .

La següent qüestió que ens podem preguntar és com són els punts fixos segons el tipus de transformacions. Els punts fixos es calculen en resoldre

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \mid ad - bc = 1).$$

Es pot veure que una transformació hiperbòlica té dos punts fixos en la recta real, un repulsiu i un altre atractiu. Una transformació parabòlica (diferent de la identitat) té un únic punt fix en la recta real. En canvi una transformació el·líptica té un parell de punts fixos conjugats complexos (no reals) i, per tant, té un punt fix en el pla  $\mathcal{H}$ .

Una transformació  $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  fixa  $\infty$  si, i només si,  $c = 0$  i per tant és de la forma  $z \rightarrow az + b$ . Si  $a = 1$  és parabòlica; si  $a \neq 1$ , és hiperbòlica amb punt fix  $\frac{b}{1 - a}$ .

### 2.2.2 Propietats dels subgrups discrets

**2.2.2 Definició.** Un subgrup discret de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$  es diu que és un grup fuchsian si consta de transformacions que preserven l'orientació, és a dir, si és un subgrup discret de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Per a qualsevol grup discret  $\Gamma \subseteq \text{Isom}(\mathcal{H})$ , el subgrup  $\Gamma^+ \subseteq \Gamma$  format per les transformacions que preserven l'orientació és un grup fuchsian, es té que  $[\Gamma : \Gamma^+] \leq 2$ .

Una propietat important és que la acció de tot grup fuchsian sobre  $\mathbb{C}$  és discontinua en el sentit que cada punt de  $\mathbb{C}$  té un entorn en el qual ell n'és l'únic punt invariant per a qualsevol transformació diferent de la identitat. En general, els grups discrets d'isometries no tenen aquest comportament discontinu, ja que si alguns elements tenen punts fixos aquests punts poden no tenir cap entorn com a aquest.

**2.2.3 Definició.** El grup de les transformacions de  $\mathcal{H}$

$$\left\{ z \rightarrow T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \subseteq \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \quad (2.3)$$

s'anomena el grup modular i es denota per  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

**2.2.4 Observació.** El grup modular  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$  és clarament un grup fuchsian (atès que  $\mathbb{Z}$  és discret en  $\mathbb{R}$  i, per tant,  $\mathbb{Z}^2$  és discret en  $\mathbb{R}^2$ ).

La nostra tasca següent és demostrar que un subgrup  $\Gamma \subseteq \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  és un grup fuchsian si, i només si, actua de forma pròpiament discontinua sobre  $\mathcal{H}$ .

**2.2.5 Lema.** *Siguin  $z_0 \in \mathcal{H}$  i  $K$  un subconjunt compacte de  $\mathcal{H}$ . Aleshores el conjunt*

$$E = \{T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid T(z_0) \in K\}$$

*és compacte.*

**DEMOSTRACIÓ.** Per a la demostració només cal tenir en compte que  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  té la topologia quocient de l'espai  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  i que aquesta es pot identificar amb la topologia induïda per la de  $\mathbb{R}^4$  i que l'acció de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  en  $\mathcal{H}$  és contínua.  $\square$



**2.2.6 Lema.** *Sigui  $\Gamma$  un subgrup de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  que actua de forma pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$ , i  $p \in \mathcal{H}$  un punt fix per algun element de  $\Gamma$ . Aleshores hi ha un entorn  $W$  de  $p$  tal que cap altre punt de  $W$  és fix per un element de  $\Gamma$  que no sigui la identitat.  $\square$*

**2.2.7 Teorema.** *Sigui  $\Gamma$  un subgrup de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Aleshores  $\Gamma$  és un grup fuchsian si, i només si,  $\Gamma$  actua de forma pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$*

DEMOSTRACIÓ. Mostrem primer que un grup fuchsian actua de forma pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$ . Prenem  $z \in \mathcal{H}$  i  $K$  un subconjunt compacte de  $\mathcal{H}$ . Aleshores

$$\{T \in \Gamma \mid T(z) \in K\} = \{T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \mid T(z) \in K\} \cap \Gamma$$

és un conjunt finit (és la intersecció d'un compacte i un conjunt discret), i per tant  $\Gamma$  actua de forma pròpiament discontinua.

Inversament, suposem que  $\Gamma$  actua de forma pròpiament discontinua, però que no fos un subgrup discret de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Triem un punt  $s \in \mathcal{H}$  no fixat per cap element diferent de la identitat de  $\Gamma$ , que existeix pel lema 2.2.6. Com que el subgrup  $\Gamma$  no és discret, existeix una successió  $\{T_k\}$  d'elements diferents de  $\Gamma$  tals que  $T_k \rightarrow \text{Id}$  quan  $k \rightarrow \infty$ . Per tant, tenim que  $T_k(s) \rightarrow s$  quan  $k \rightarrow \infty$  i aleshores, atès que  $s$  no és fix per cap element diferent de la identitat de  $\Gamma$ , tenim que  $\{T_k(s)\}$  és una successió de punts diferents dos a dos i diferents de  $s$ . Per tant, cada disc hiperbòlic tancat centrat en  $s$  contindria infinits punts de la  $\Gamma$ -òrbita de  $s$ , i, en conseqüència,  $\Gamma$  no actuaria de forma pròpiament discontinua.  $\square$

**2.2.8 Corol·lari.** *Sigui  $\Gamma$  un subgrup de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Aleshores  $\Gamma$  actua de forma pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$  si, i només si, per a cada  $x \in \mathcal{H}$ , l'òrbita  $\Gamma x$  de  $x$  és un subconjunt discret de  $\mathcal{H}$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Suposem que  $\Gamma$  actua de forma pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$ ; aleshores cada  $\Gamma$ -òrbita és una família finita localment de punts; en particular, és un conjunt discret de  $\mathcal{H}$ .

Inversament, suposem que  $\Gamma$  no actués de forma pròpiament discontinua sobre  $\mathcal{H}$ , aleshores, pel teorema anterior no és un subgrup discret de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Repetim l'argument de la prova del teorema anterior i construïm una successió  $\{T_k(s)\}$  de punts diferents de  $s$  tals que  $T_k(s) \rightarrow s$ , amb la qual cosa la  $\Gamma$ -òrbita del punt  $s$  no seria discreta.  $\square$

**2.2.9 Corol·lari.** *Si  $\Gamma$  és un grup fuchsian, aleshores els punts fixos pels elements el·líptics no s'acumulen en  $\mathcal{H}$ .*  $\square$

El corol·lari 2.2.8 implica que donats  $z \in \mathcal{H}$  i una successió  $\{T_n\}$  d'elements diferents en  $\Gamma$ , aleshores si  $\{T_n(z)\}$  té un punt limit  $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  cal que  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

### 2.2.3 Grups de congruència

Si no diem el contrari, en aquest apartat  $q$  denotarà un nombre enter positiu.

**2.2.10 Definició.** El grup principal de congruència  $\Gamma(q)$  de nivell  $q$  es defineix segons

$$\Gamma(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}.$$

Observem que  $\Gamma(1) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . El que farem a continuació serà calcular l'índex  $[\Gamma(1) : \Gamma(q)]$ .

**2.2.11 Teorema.** *El subgrup de congruència de nivell  $q$  és un subgrup normal del grup modular d'índex*

$$[\Gamma(1) : \Gamma(q)] = q^3 \prod_{p|q} (1 - p^{-2}). \quad (2.4)$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió exacta

$$1 \rightarrow \Gamma(q) \rightarrow \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \rightarrow 1. \quad (2.5)$$

Només cal provar l'exhaustivitat de l'aplicació  $\pi$ , però, de fet, aquest és un resultat directe del teorema xinès del residu.

Per a provar la fórmula (2.4), tenim, per (2.5), que

$$[\Gamma(1) : \Gamma(q)] = |\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})|.$$

Per a qualssevol  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  tenim que  $\text{mcd}(c, d, q) = 1$ , i per a una fila inferior  $(c, d)$  podem trobar exactament  $q$  solucions  $(a, b)$  de la congruència  $ad - bc \equiv 1 \pmod{q}$ . Per tant, desenvolupant els càlculs obtenim que

$$\begin{aligned} |\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})| &= q \cdot |\{(c, d) \pmod{q} : \text{mcd}(c, d, q) = 1\}| \\ &= q \sum_{r|q} \mu(r) \left(\frac{q}{r}\right)^2 = q^3 \prod_{p|q} (1 - p^{-2}), \end{aligned}$$

on  $\mu$  denota la funció de Möebius.  $\square$

**2.2.12 Definició.** Donat un grup de congruència  $\Gamma(q)$ , s'anomenen vèrtexs de  $\Gamma(q)$ , als punts  $x \in \mathcal{H}$ , tals que el seu estabilitzador conté elements diferents de la identitat, és a dir,  $\Gamma_x \neq \{\pm \text{Id}\}$ .

**2.2.13 Definició.** Es diu que un punt  $x \in \mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  és parabòlic (respectivament, hiperbòlic o el·líptic) si la transformació  $\gamma$  tal que  $\gamma(x) = x$  és parabòlica i diferent de la identitat (respectivament, hiperbòlica o el·líptica).

Per abreviar, anomenarem puntes del grup  $\Gamma$  els punts parabòlics de  $\Gamma$ .

Notem que  $-\text{Id} \notin \Gamma(q)$  si  $q > 2$ . A més, si  $q > 2$  aleshores  $\Gamma(q)$  no té elements el·líptics i els elements parabòlics són de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + qt & -qv \\ qu & 1 - qt \end{pmatrix}$$

amb  $u, v, t$  enters tals que compleixen la relació  $uv = t^2$ . Atès que  $\Gamma(q)$  és un subgrup de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ , les puntes per a  $\Gamma(q)$  són els nombres racionals i  $\infty$ .

**2.2.14 Proposició.** *El nombre de puntes no equivalents d'un grup de congruència principal de nivell  $q$  és*

$$h = q^2 \prod_{p|q} (1 - p^{-2}).$$

DEMOSTRACIÓ. Escrivim els punts racionals de la forma  $p_1 = \frac{a}{c}$  amb  $\text{mcd}(a, c) = 1$  i  $p_2 = \frac{a'}{c'}$  amb  $\text{mcd}(a', c') = 1$ . Són equivalents si, i només si, existeix una transformació  $\gamma \in \Gamma(q)$  tal que  $p_2 = \gamma p_1$ , o, equivalentment,

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix} \pmod{q}.$$

Per tant, el nombre de puntes no equivalents per a  $\Gamma(q)$  és donat per la fórmula

$$h = |\{(c, d) \pmod{q} : \text{mcd}(c, d, q) = 1\}|$$

i en desenvolupar els càlculs s'obté el resultat enunciat.  $\square$

Més generalment, qualsevol subgrup del grup modular  $\Gamma$  que contingui  $\Gamma(q)$ , per a un cert  $q$ , s'anomena un subgrup de congruència de nivell  $q$ . Per exemple, tenim els dos subgrups clàssics següents:

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{q} \right\},$$

$$\Gamma_1(q) = \left\{ \gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}.$$

Es té que

$$\Gamma(q) \subseteq \Gamma_1(q) \subseteq \Gamma_0(q).$$

En general, els subgrups de congruència no són subgrups normals de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Aquests grups són emprats en aritmètica, i en aquest treball seran emprats en el càlcul de formes d'ona de Maass. Concretament farem que aquestes funcions siguin, a més, invariants per l'acció de grups de Hecke en  $\mathcal{H}$ .

**2.2.15 Proposició.** *Un conjunt de representants per a  $\Gamma_0(q) \backslash \Gamma_0(1)$  és donat pel conjunt de matrius*

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ u & v \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1) \text{ amb } v \mid q \text{ i } u \pmod{q/v} \right\}. \quad (2.6)$$

Per tant, l'índex és

$$\gamma_q = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(q)] = q \prod_{p \mid q} (1 + p^{-1}). \quad (2.7)$$

DEMOSTRACIÓ. Tenim que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Per tant,  $\text{mcd}(d, q) = \text{mcd}(\gamma b + \delta d, q)$ , atès que  $\gamma b \equiv 0 \pmod{q}$  i que  $\text{mcd}(\delta, q) = 1$ . Per tant  $\text{mcd}(d, q)$  és invariant per la multiplicació per l'esquerra d'elements de  $\Gamma_0(q)$ . A més, donada un matriu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1),$$

podem trobar una matriu de  $\Gamma_0(q)$  (no té perquè ser única) el producte per l'esquerra de la qual doni com a resultat una matriu

$$\begin{pmatrix} * & * \\ u & v \end{pmatrix}$$

amb  $v = \gamma b + \delta d = \text{mcd}(d, q)$ . Aquestes matrius sorgeixen de les solucions de l'equació lineal  $\gamma' b + \delta' d = v$  i formen una família uniparamètrica  $\gamma' = \gamma + dt$ ,  $\delta' = \delta - bt$  amb  $t$  recorrent lliurement els enters amb  $t \equiv 0 \pmod{q/v}$  (aquesta congruència ens assegura que  $\gamma' \equiv 0 \pmod{q}$ ). Aquestes solucions transformen el valor  $u$  en  $u' = u + t$ , per tant, podem variar lliurement aquest valor mòdul  $q/v$ . Si tenim fixats  $u, v$  en el rang preescrit, no hi ha espai per a canvis addicionals. Això prova la primera part de la proposició.

Per a obtenir l'índex de la fórmula hem de fer els càlculs següents:

$$\begin{aligned} [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(q)] &= \sum_{v|q} \left| \left\{ u \pmod{\frac{q}{v}} : \text{mcd}(u, v) = 1 \right\} \right| \\ &= \prod_{p^\alpha || q} (p^\alpha + p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2} + p^{\alpha-2} - \dots - p + p) \\ &= q \prod_{p|q} (1 + p^{-1}). \end{aligned}$$

□

**2.2.16 Proposició.** *Un conjunt de puntes no equivalents per a  $\Gamma_0(q)$  és donat per les següents:*

$$\frac{u}{v} \quad \text{amb } v|q, \quad \text{mcd}(u, v) = 1, \quad u \pmod{\text{mcd}(v, q/v)}. \quad (2.8)$$

Per tant, el nombre de puntes no equivalents és

$$h = \sum_{vu=q} \varphi(\text{mcd}(u, v)), \quad (2.9)$$

on  $\varphi$  és la funció d'Euler, definida per

$$\varphi(n) := \#\{j \in 1, \dots, n \mid (j, n) = 1\}.$$

DEMOSTRACIÓ. Totes les puntes són equivalents a nombres racionals ja que  $\Gamma_0(q) \subset \Gamma_0(1)$ . Si transformem els representants

$$\tau = \begin{pmatrix} * & * \\ u & v \end{pmatrix}$$

del tipus (2.6) en

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tau^{-1} = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix}$$

i els avaluem en l'infinit, obtenim punts racionals  $\frac{u}{v}$  amb  $v|q$  i  $\text{mcd}(u, v) = 1$ . Suposem que dos d'aquests punts són equivalents, és a dir,

$$\frac{u'}{v'} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \frac{u}{v} \quad \text{per a} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q).$$

Per tant  $v' = \gamma u + \delta v, v|v', v'|v, v' = v, \delta \equiv 1 \pmod{q/v}$  i  $u' = \alpha u + \beta v \equiv \alpha u \equiv \delta u \equiv u \pmod{\text{mcd}(v, q/v)}$ , tal i com havíem afirmat.  $\square$

**2.2.17 Exemple.** Per tal de clarificar els conceptes de les dues proposicions anteriors, farem alguns comentaris sobre el cas en què  $q$  sigui un nombre primer.

Per la fórmula (2.9), si  $q$  és primer

$$h = \varphi(\text{mcd}(1, q)) + \varphi(\text{mcd}(q, 1)) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2.$$

Clarament aquestes puntes són el punt 0 i el punt  $\infty$ .

Sigui  $p = \frac{u}{v}$ , amb  $\text{mcd}(u, v) = 1$ . Recordem que totes les puntes són equivalents a l'infinit sota l'acció del grup modular, ja que si triem

$$\tau_p = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}), \quad (2.10)$$

obtenim que

$$\tau_p \infty = p.$$

En aquest cas, si  $\tau_p^{-1} \in \Gamma_0(q)$ , tindrem que la nostra punta és equivalent a l'infinit. En cas contrari, és pot provar que existeix una transformació  $T \in \Gamma_0(q)$  que l'aplica en el zero.

## 2.2.4 Classes dobles definides per a grups de congruència

En aquesta secció ens ocuparem de donar un algorisme per tal de calcular d'una manera sistemàtica les classes dobles per a grups de congruència. La referència principal d'aquesta secció és [Las02].

Aquest algorisme ens serà de gran utilitat per a calcular el domini fonamental d'un grup de congruència, primer, i, després, per a calcular els coeficients de formes de Maass. Si no diem el contrari,  $q$  serà un nombre enter positiu. Comencem amb el lema següent:

**2.2.18 Lema.** *Sigui  $\Gamma_\infty$  el subgrup de les translacions; aleshores cada classe lateral doble descrita per*

$$\Gamma_0(q)V\Gamma_\infty, \quad V \in \Gamma_0(1),$$

*conté un element de la forma*

$$ST^nS, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**DEMOSTRACIÓ.** Donada una matriu  $V \in \Gamma_0(1)$  podem trobar una matriu  $U \in \Gamma_0(q)$ , per la qual

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

atès que els coeficients de la primera columna de  $V$  han de ser coprimers. Per tant, per a un  $n \in \mathbb{Z}$  adequat tindrem que

$$UVT^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$



Per tant, atès que les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

és poden escriure com  $ST^mS$ , obtenim que  $UVT^n = ST^mS \in \Gamma_0(q)V\Gamma_\infty$ . i això acaba la demostració.  $\square$

**2.2.19 Exemple.** Fem un exemple per a clarificar aquest lema. Considerem la matriu

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(1).$$

Per a aquesta matriu, una matriu  $U$  com la del lema és

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q).$$

Buscant un  $n$  tal com el que sorgeix del lema obtenim

$$UVT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

on  $T$  representa la translació. Per tant en aquest cas el valor de  $m$  esdevé  $-4$ .

**2.2.20 Lema.** *Els conjunts de classes dobles definit per  $ST^mS$  i  $ST^nS$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$  són iguals si, i només si, es donen les condicions següents:*

- $\text{mcd}(n, q) = \text{mcd}(m, q) = d$
- $\frac{n}{d} \equiv \frac{m}{d} \pmod{\text{mcd}(d, \frac{q}{d})}$ .

**DEMOSTRACIÓ.** Anem a comprovar que les condicions que fan que  $ST^nS \in \Gamma_0(q)ST^mS\Gamma_\infty$  són exactament les enunciades en el lema.

La condició anterior equival a

$$T^n S \Gamma_\infty S T^{-m} \in S \Gamma_0(q)$$

que es pot expressar de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S \Gamma_0(q) S.$$

Observem que això és equivalent a

$$x \in \mathbb{Z}, n - mmu \equiv 0 \pmod{q}.$$

Aquesta condició equival a  $\text{mcd}(n, q) = \text{mcd}(m, q)$ , i s'escriu  $\text{mcd}(n, q) = \text{mcd}(m, q) = t$ ,  $n = n't$ ,  $m = m't$ , s'obté que és equivalent a l'existència d'un  $x \in \mathbb{Z}$  tal que  $n' - m' + tm'n'x \equiv 0 \pmod{q/t}$ , és a dir,  $n' - m' \equiv 0 \pmod{\text{mcd}(t, q/t)}$  com volíem provar.  $\square$

Per a cada divisor propi  $d$  de  $q$ , prenem

$$A_d := \{m_{d,1}, \dots, m_{d,\varphi(\omega)}\}$$

un conjunt complet de representants de  $(\mathbb{Z}/\omega\mathbb{Z})^*$ , on  $\varphi$  la funció d'Euler i  $\omega = \text{mcd}(d, \frac{q}{d})$ .

Realitzem aquesta selecció de manera que  $0 < m_{d,j} < \frac{q}{d}$  i  $\text{mcd}(m_{d,j}, \frac{q}{d}) = 1$ , per a tot  $j \in \{1, 2, \dots, \varphi(\omega)\}$ . Aquesta tria és possible gràcies al teorema xinès del residu que implica que la projecció natural de  $(\mathbb{Z}/\frac{q}{d}\mathbb{Z})^*$  en  $(\mathbb{Z}/\omega\mathbb{Z})^*$  és exhaustiva.

**2.2.21 Exemple.** Ara farem un exemple de càlcul d'un conjunt  $A_d$ . Considerem  $q = 9000$  i  $d = 100$ . S'obté que  $\frac{q}{d} = 90$ ,  $\omega = \text{mcd}(100, 90) = 10$ , i  $\varphi(\omega) = 4$ . Podem triar aleshores

$$A_{100} = \{1, 13, 7, 19\}.$$

Un cop fixat els conjunts  $A_d$ , podem definir

$$M_d := \{d \cdot m_{d,j} \mid m_{d,j} \in A_d\}$$

i

$$\mathbf{M} := \bigcup_{\substack{d|q \\ 1 < d < q}} M_d.$$

**2.2.22 Proposició.** *El conjunt de transformacions*

$$\mathbf{F} := \{\text{Id}, S, ST^m S, m \in \mathbf{M}\}$$

*forma un conjunt complet de representants del conjunt de classes dobles*

$$\Gamma_0(q) \backslash \Gamma_0(1) / \Gamma_\infty.$$

**DEMOSTRACIÓ.** Aquest resultat és una conseqüència directa dels lemes previs i de la definició del conjunt  $\mathbf{M}$ .

Del lema 2.2.20 se segueix que

$$ST^{kq}S, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pertany a la classe identitat. El mateix lema també implica que

$$ST^kS, \quad \text{mcd}(k, q) = 1,$$

defineix la mateixa classe doble que

$$\Gamma_0(q)T\Gamma_\infty.$$

i, atès que,

$$STS = T^{-1}ST^{-1},$$

aquestes classes estan representades per  $S$ .

Clarament, totes les altres classes dobles estan determinades pels elements de  $\mathbf{M}$ .  $\square$

El pas següent és distribuir el conjunt de classes dobles en conjunts de classes per la dreta definides per  $\Gamma_0(q)$ . Observem que, per a un element  $U \in \mathbf{F}$  donat,

$$V_1UT^l \in \Gamma_0(q)U\Gamma_\infty, \quad V_1 \in \Gamma_0(q);$$

si podem escriure  $T^l$  com

$$(U^{-1}V_2U)T^j, \quad V_2 \in \Gamma_0(q),$$

aleshores tindrem

$$V_1UT^l = V_1V_2UT^j \in \Gamma_0(q)UT^j.$$

Per tant, la clau de la descomposició del conjunt de classes dobles seran els subgrups de translacions que pertanyen a

$$(U\Gamma_0(q)U^{-1}) \cap \Gamma_\infty.$$

Si  $U$  és de la forma  $ST^mS$ , es té que

$$UT^mU^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ mn^2 & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q),$$

d'on tenim que s'ha de complir  $mn^2 \equiv 0 \pmod{q}$ .

Per una altra banda, si tenim que  $U = S$ , aleshores

$$ST^nS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q),$$

quan  $n \equiv 0 \pmod{q}$ .

En el primer cas, si prenem el més petit dels enters  $n$  per als quals

$$mn^2 \equiv 0 \pmod{q},$$

aconsegim una descomposició de

$$\left( (U^{-1}\Gamma_0(q)U) \cap \Gamma_\infty \right) \setminus \Gamma_\infty$$

amb els representants

$$\text{Id}, T, T^2, \dots, T^{n(m)-1};$$

mentre que, en el segon cas, els representants són

$$\text{Id}, T, T^2, \dots, T^{q-1}.$$

Aquestes idees ens porten a la tria de representants de  $\Gamma_0(q) \setminus \Gamma$ , segons es descriuen en la proposició següent.

**2.2.23 Proposició.** *Un conjunt complet de representants del conjunt de classes laterals per la dreta en  $\Gamma_0(q) \setminus \Gamma_0(1)$  és donat pel conjunt següent de transformacions*

$$\mathbf{W}(q) := \{ \text{Id}, ST^k, \quad 0 \leq k \leq q-1, \quad ST^m ST^j, \\ m \in \mathbf{M}, \quad 0 \leq j \leq n(m)-1 \},$$

on  $n(m)$  és l'enter més petit per al qual se satisfà la congruència

$$n(m)m^2 \equiv 0 \pmod{q}.$$

□

Un exemple d'aquestes construccions es podrà veure al final de la secció següent.

## 2.3 Dominis fonamentals

En aquesta secció donarem la definició i conceptes inicials relatius a dominis fonamentals associats a grups fuchsians. També descriurem alguns dels dominis fonamentals més emprats.

### 2.3.1 Definicions i primeres propietats

Siguin  $\mathcal{H}$  el semiplà de Poincaré i  $G$  un grup d'homomorfismes que actua de forma contínua i pròpiament discontinua en  $\mathcal{H}$ . Sigui  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$  i denotem per  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$  l'interior de  $\mathcal{F}$ . Denotem per  $\partial\mathcal{F} := \mathcal{F} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{F}}$  la vora del conjunt  $\mathcal{F}$ . Recordem també que  $\mu$  denota la mesura hiperbòlica i  $\rho$  la distància hiperbòlica, ambdues explicades en la primera secció d'aquest capítol.

**2.3.1 Definició.** Una regió tancada  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$  és diu que és un domini fonamental per al grup  $G$  si

1.  $\bigcup_{T \in G} T(\mathcal{F}) = \mathcal{H}$ .
2.  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \cap T(\overset{\circ}{\mathcal{F}}) = \emptyset$ , per a tot  $T \in G \setminus \{\text{Id}\}$ .

**2.3.2 Definició.** La família  $\{T(\mathcal{F}) \mid T \in G\}$  s'anomena una tessellació de  $\mathcal{H}$ .

De la definició anterior deduïm que si  $\mathcal{F}$  és un domini fonamental aleshores les teselles definides per aquest conjunt omplen tot l'espai  $\mathcal{H}$ .

**2.3.3 Teorema.** Sigui  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$  dos dominis fonamentals de  $\mathcal{H}$  per a un grup fuchsian  $\Gamma$ , tal que  $\mu(\mathcal{F}_1) < \infty$ . Suposem que les vores de  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$  tenen àrea hiperbòlica zero. Aleshores  $\mu(\mathcal{F}_1) = \mu(\mathcal{F}_2)$ .

DEMOSTRACIÓ. Tenim  $\mu(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_i) = \mu(\mathcal{F}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , atès que l'àrea de la vora és zero. Ara

$$\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_1 \cap \left( \bigcup_{T \in \Gamma} T(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) \right) = \bigcup_{T \in \Gamma} (\mathcal{F}_1 \cap T(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2)).$$

Ja que  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$  és l'interior del domini fonamental, en particular els conjunts  $\mathcal{F}_1 \cap T(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2)$ ,  $T \in \Gamma$ , són disjunts dos a dos i, per tant,

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F}_1) &> \sum_{T \in \Gamma} \mu(\mathcal{F}_1 \cap T(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2)) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T^{-1}(\mathcal{F}_1) \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) \\ &= \sum_{T \in \Gamma} \mu(T(\mathcal{F}_1) \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2). \end{aligned}$$

Atès que  $\mathcal{F}_1$  és un domini fonamental

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{F}_1) = \mathcal{H},$$

això implica que

$$\bigcup_{T \in \Gamma} (T(\mathcal{F}_1) \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) = \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2.$$

Per tant

$$\sum_{T \in \Gamma} \mu(T(\mathcal{F}_1) \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) \geq \mu\left(\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{F}_1) \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2\right) = \mu(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) = \mu(\mathcal{F}_2).$$

Intercanviant  $\mathcal{F}_1$  per  $\mathcal{F}_2$ , obtenim el resultat invers, és a dir,  $\mu(\mathcal{F}_2) \geq \mu(\mathcal{F}_1)$ . En conseqüència  $\mu(\mathcal{F}_2) = \mu(\mathcal{F}_1)$ .  $\square$

D'aquesta manera hem provat que l'àrea d'un domini fonamental, quan és finita, és un invariant del grup. A continuació mostrem un resultat que serà necessari a l'hora de representar gràficament els dominis fonamentals.

**2.3.4 Teorema.** *Sigui  $\Gamma$  un grup discret d'isometries del semi-plà superior  $\mathcal{H}$ , i sigui  $\Lambda$  un subgrup de  $\Gamma$  d'índex  $n$ . Si*

$$\Gamma = \Lambda T_1 \cup \Lambda T_2 \cup \dots \cup \Lambda T_n$$

*és una descomposició de  $\Gamma$  en  $\Lambda$ -classes per la dreta i si  $\mathcal{F}$  és un domini fonamental per a  $\Gamma$ , aleshores*

1.  $\mathcal{F}_1 = T_1(\mathcal{F}) \cup T_2(\mathcal{F}) \cup \dots \cup T_n(\mathcal{F})$  és un domini fonamental per a  $\Lambda$ .
2. Si  $\mu(\mathcal{F})$  és finita i l'àrea hiperbòlica de  $\partial\mathcal{F}$  és zero, aleshores  $\mu(\mathcal{F}_1) = n\mu(\mathcal{F})$ .

DEMOSTRACIÓ. Sigui  $z \in \mathcal{H}$ . Atès que  $\mathcal{F}$  és un domini fonamental per a  $\Gamma$ , existeixen  $w \in \mathcal{F}$  i  $T \in \Gamma$  tal que  $z = T(w)$ . Per tant, hem de tenir  $T = ST_i$ , per a algun  $S \in \Lambda$  i algun  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . En conseqüència tenim que

$$z = ST_i(w) = S(T_i(w)).$$

Ja que  $T_i(w) \in \mathcal{F}_1$ ,  $z$  és en la  $\Lambda$ -òrbita d'algun punt de  $\mathcal{F}_1$ , la unió de les  $\Lambda$ -imatges de  $\mathcal{F}_1$  és  $\mathcal{H}$ .

Ara suposem que  $z \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$  i que  $S(z) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$ , per a  $S \in \Lambda$ . Hem de provar que  $S = \text{Id}$ . Sigui  $\epsilon > 0$  suficientment petit per a que la bola de centre  $z$  i radi  $\epsilon$ , definida com

$$B_\epsilon(z) = \{x \in \mathcal{H} \mid \rho(z, x) < \epsilon\},$$

estigui continguda en  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$ . Suposem que  $B_\epsilon(z)$  té una intersecció no buida amb exactament  $k$  de les imatges de  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$  per les accions  $T_1, \dots, T_n$ . Suposem que aquestes imatges siguin  $T_{i_1}(\overset{\circ}{\mathcal{F}}), \dots, T_{i_k}(\overset{\circ}{\mathcal{F}})$ . Aleshores tindrem que  $B_\epsilon(S(z)) = S(B_\epsilon(z))$  interseca amb  $T_j(\overset{\circ}{\mathcal{F}})$  amb  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Se segueix que  $B_\epsilon(z)$  té una intersecció no buida amb  $S^{-1}T_j(\overset{\circ}{\mathcal{F}})$  i implica que  $S^{-1}T_j = T_{i_s}$  on  $s \in \{1, \dots, k\}$ . Per tant,

$$\Lambda T_j = \Lambda S^{-1}T_j = \Lambda T_{i_s},$$

així que  $T_j = T_{i_s}$  es té que  $S = \text{Id}$ . Aleshores,  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$  conté precisament un punt de cada  $\Gamma$ -òrbita. Això acaba la primera part.

La segona part se segueix immediatament del fet que  $\mu(T(\mathcal{F})) = \mu(\mathcal{F})$ , per a tot  $T \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , i  $\mu(T_i(\mathcal{F}) \cap T_j(\mathcal{F})) = 0$  per  $i \neq j$ .  
□



**2.3.5 Observació.** La descomposició donada en la proposició 2.2.23 serà emprada en seccions posteriors per a representar dominis fonamentals.

### 2.3.2 Amplada i altura

En aquest apartat donarem els conceptes d'amplada d'un punt i altura d'una punta. Aquestes conceptes seran emprats més endavant.

**2.3.6 Definició.** Direm que un element  $\sigma_p$  del grup modular és una funció normalitzadora associada a una punta  $p$  de  $\Gamma_0(q)$  si satisfà que

1.  $\sigma_p(\infty) = p$ ,
2.  $\sigma_p^{-1}T\sigma_p = T_p$ ,

on  $T_p$  denota un generador del grup estabilitzador  $\Gamma_p$  de la punta  $p$  en  $\Gamma_0(q)$ .

**2.3.7 Exemple.** Escrivim ara les aplicacions normalitzadores de les puntes no equivalents de  $\Gamma_0(6)$ . A  $\Gamma_0(6)$  hi ha quatre puntes que són  $\{0, \infty, -1/3, -1/2\}$ , i les seves aplicacions normalitzadores

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{-1/2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{-1/3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'aplicació  $T_p$  es pot determinar únicament llevat de translacions, com segueix. Considerem la matriu  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Atès que  $\sigma_p^{-1}\Gamma_p\sigma_p \subset \Gamma_\infty$ , tenim que qualsevol element de  $\sigma_p^{-1}\Gamma_p\sigma_p$  fixa  $\infty$ . Per tant s'obté que tant  $\Gamma_p$  com  $\Gamma_\infty$  són grups cíclics, de manera que obtenim

$$\sigma_p^{-1}\Gamma_p\sigma_p = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & bm_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\},$$

per a algun enter positiu  $m_p$ . Per a calcular  $m_p$  considerem la relació

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \sigma_p\Gamma_\infty\sigma_p^{-1} \cap \Gamma_0(q) \\ &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} u & * \\ v & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ -v & u \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q) \right\} \\ &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 - muv & mu^2 \\ -mv^2 & 1 + muv \end{pmatrix} : mv^2 \equiv 0 \pmod{q} \right\}. \end{aligned}$$

Aquí  $m$  recorre tots els enters divisibles per  $q/\text{mcd}(q, v^2)$ , i, per tant,

$$m_p = \frac{q}{\text{mcd}(q, v^2)}.$$

Ara la fórmula del nombre de puntes no equivalents de  $\Gamma_0(q)$  es pot escriure de la següent manera:

$$\gamma_q \sum_p m_p = \sum_{v|q} \frac{q}{\text{mcd}(q, v^2)} \varphi(\text{mcd}(v, \frac{q}{v})).$$

**2.3.8 Definició.** L'enter  $m_p$  s'anomena l'amplada del vertex parabòlic  $p$ .

La matriu de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  que redueix l'amplada de la punta al valor 1, s'anomena matriu escadadora i ve donada per l'expressió

$$\tau_p = \sigma_p \varrho_p$$

on

$$\varrho_p = \begin{pmatrix} \sqrt{m_p} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_p} \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}).$$

A continuació enunciem un fet sobre  $\mathcal{F}_q$  que serà útil més endavant. Notarem per  $h_q^0$  el nombre de puntes que pertanyen al domini fonamental del grup fuchsian i que no són necessàriament equivalents. Sigui, com abans,  $h_q$  el nombre de puntes no equivalents ( $h_q^0 \geq h_q$ ).

Per a cada punta  $p$  sigui  $U_p$  la transformació que compleix

$$U_p(p) = \mathfrak{p}_p,$$

on  $U_p \in \Gamma_0(q)$  i  $\mathfrak{p}_p$  és la punta de  $\mathcal{F}_q$  que representa la classe de  $p$ .

**2.3.9 Exemple.** Sigui  $q$  un nombre primer. Aleshores  $\gamma_q^0 = \gamma_q = 2$ . Per tant

$$U_0 = \text{Id}; \quad U_\infty = \text{Id}.$$

Sigui  $q = 6$ . El conjunt

$$\left\{ 0, \infty, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

consta de les puntes que pertanyen al domini fonamental.

En aquest cas tenim que

$$U_0 = U_\infty = U_{-\frac{1}{2}} = U_{-\frac{1}{3}} = \text{Id},$$

$$U_{\frac{1}{2}} = T^{-1}.$$

Sigui  $w \in \mathcal{F}_q$ . Aleshores, per a cada vèrtex parabòlic  $\ell \in \{1, \dots, h_p^0\}$ , definim

$$g_\ell(w) := \mathfrak{S}(\sigma_{j(\ell)}^{-1} U_\ell w),$$

on  $j(\ell)$  denota el subíndex que correspon del seu representant.

**2.3.10 Definició.** Donat un punt  $w \in \mathcal{F}_q$ , la punta més propera a  $w$  és la punta d'índex

$$I(w) = \mathfrak{J}$$

on

$$g_{\mathfrak{J}}(w) = \max_{\ell \in \{1, \dots, \gamma_q^0\}} g_{\ell}(w).$$

El valor

$$h(w) := g_{I(w)} = \mathfrak{S}(\sigma_{I(w)}^{-1} U_{I(w)}(w))$$

s'anomena altura del punt  $w$ .

**2.3.11 Definició.** L'altura minimal del domini fonamental  $\mathcal{F}_q$ , de  $\Gamma_0(q)$  és

$$Y_0(q) = \inf_{w \in \mathcal{F}_q} h(w) = \inf_{w \in \mathcal{F}_q} \mathfrak{S}(\sigma_{I(w)}^{-1} U_w(w)).$$

És clar que  $Y_0(q)$  depèn només del domini fonamental  $\mathcal{F}_q$  (i.e. de la tria del conjunt de representants  $\{V_k\}$  i no de la tria de les puntes representatives. Amb un argument estàndard de compactificació es pot deduir també que  $Y_0(q)$  és estrictament positiu i més gran que una quantitat fixada, que només depèn del domini fonamental. El teorema següent ens dóna una expressió explícita d'aquesta fita.

**2.3.12 Teorema.** *Per a tot enter positiu  $q > 2$ , l'altura minimal de  $\mathcal{F}_q$  satisfà la desigualtat següent*

$$Y_0(q) \geq \frac{\sqrt{3}}{2q}.$$

### 2.3.3 Domini fonamental de Dirichlet

Denoten per  $\rho$  la distància definida en el semipla superior. Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian de primera espècie, és a dir  $\Gamma \setminus \mathcal{H}$  de mesura

finita, i sigui  $p \in \mathcal{H}$  un element no fixat per cap element de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ . Aquest punts existeixen pel lema 2.2.6.

**2.3.13 Definició.** Es defineix el domini de Dirichlet per a  $\Gamma$  centrat en  $p$  com el conjunt

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)) \text{ per a tot } T \in \Gamma\}. \quad (2.11)$$

Per la invariància de la mètrica hiperbòlica pel grup modular, aquesta regió també es pot definir com

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(T(z), p) \text{ per a tot } T \in \Gamma\}. \quad (2.12)$$

Per a cada element fixat  $T_1 \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , el conjunt

$$\{z \in \mathcal{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T_1(p))\} \quad (2.13)$$

són els punts  $z$  que són més propers a  $p$  que a  $T_1(p)$  sota la mètrica hiperbòlica. Clarament,  $p \in D_p(\Gamma)$  i com la  $\Gamma$ -òrbita de  $p$  és discreta, pel lema 2.1.13,  $D_p(\Gamma)$  conté un entorn de  $p$ . Per tal de descriure el conjunt (2.13), unirem els punts de  $p$  i  $T_1(p)$  mitjançant un segment geodèsic, és a dir, el segment que uneix els punts i que està sobre la geodèsica que els conté, i construirem el segment donat per l'equació  $\rho(z, p) = \rho(z, T_1(p))$ .

**2.3.14 Definició.** Un bisector perpendicular d'un segment geodèsic  $[z_1, z_2]$  és la única geodèsica que passa pel punt mig de  $[z_1, z_2]$ , que denotem  $w$ , i que és ortogonal a  $[z_1, z_2]$ .

**2.3.15 Lema.** *Siguin  $z, z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ . La recta donada per l'equació*

$$\rho(z, z_1) = \rho(z, z_2) \quad (2.14)$$

*és el bisector perpendicular al segment geodèsic  $[z_1, z_2]$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Suposarem que  $z_1 = i$ ,  $z_2 = ir^2$  amb  $r > 0$ , d'aquesta manera  $w = ir$  i el bisector perpendicular és el donat

per l'equació  $|z| = r$ . D'una altra banda, es pot provar amb un càlcul senzill amb la mètrica hiperbòlica que l'equació (2.14) és equivalent a

$$\frac{|z - z_1|^2}{y} = \frac{|z - z_2|^2}{r^2 y}$$

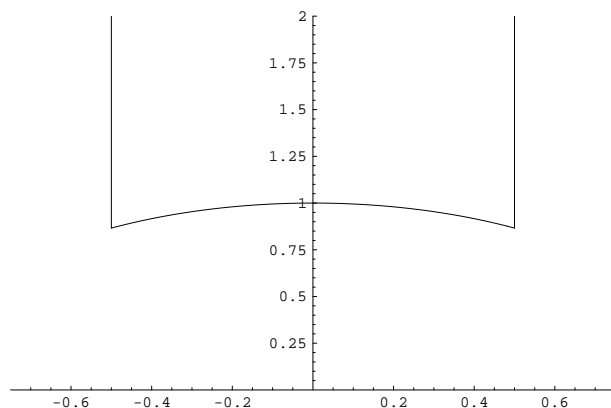
i, mitjançant simplificacions, obtenim que  $|z| = r$ .  $\square$

Denotem el bisector del segment geodèsic  $[p, T_1(p)]$  per  $L_p(T_1)$ , i el semiplà hiperbòlic que conté  $p$  descrit per (2.13) per  $H_p(T_1)$ . D'aquesta manera  $D_p(\Gamma) = \bigcap_{T \in \Gamma, T \neq \text{Id}} H_p(T)$ , és una regió convexa hiperbòlica.

**2.3.16 Teorema.** *Si  $p$  és un punt que no és fix per cap element de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ , aleshores  $D_p(\Gamma)$  és un domini fonamental connex per a  $\Gamma$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Siguin  $z \in \mathcal{H}$ , i  $\Gamma z$  la seva  $\Gamma$ -òrbita. Atès que  $\Gamma z$  és un conjunt discret, existeix  $z_0 \in \Gamma z$  amb el valor més petit de  $\rho(z_0, p)$ . Aleshores  $\rho(z_0, p) \leq \rho(T(z_0), p)$  per a tot  $T \in \Gamma$ , i tal com s'ha definit (2.12) tenim que  $z_0 \in D_p(\Gamma)$ . D'aquesta manera  $D_p(\Gamma)$  conté almenys un punt de cada  $\Gamma$ -òrbita.

Provem a continuació que si  $z_1$  i  $z_2$  són de la mateixa òrbita i pertanyen a l'interior de  $D_p(\Gamma)$  aleshores són el mateix punt. Si  $\rho(z, p) = \rho(T(z), p)$  per a algun  $T \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ , aleshores  $\rho(z, p) = \rho(z, T^{-1}p)$  i, per tant,  $z \in L_p(T^{-1})$ . Per tant, es dona o bé  $z \notin D_p(\Gamma)$  o bé  $z$  està en la vora de  $D_p(\Gamma)$ . En el primer cas ja ho tenim. Si estem en el segon, tenim que en l'interior de  $D_p(\Gamma)$ ,  $\rho(z, p) < \rho(T(z), p)$  per a tot  $T \in \Gamma \setminus \text{Id}$ . Si dos punts  $z_1, z_2$  estan en la mateixa  $\Gamma$ -òrbita, això implica que  $\rho(z_1, p) < \rho(z_2, p)$  i  $\rho(z_2, p) < \rho(z_1, p)$ , cosa que és una contradicció i acaba aquest cas. D'aquesta manera, l'interior de  $D_p(\Gamma)$  conté com a molt un punt de cada  $\Gamma$ -òrbita. Com que és una intersecció de semiplans tancats,  $D_p(\Gamma)$  és tancada i convexa. Per tant  $D_p(\Gamma)$  és connexa.  $\square$

Figura 2.1: Domini fonamental de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 

**2.3.17 Exemple.** Calculem quin és el domini fonamental per a  $\Gamma_0(1) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Es pot verificar que  $ki$  ( $k > 1$ ) no és fix per cap element diferent de la identitat. Per tant, fixem un punt  $p = ki$ . Provem que el conjunt

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} \mid |z| > 1, |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}\},$$

és la regió de Dirichlet de  $\Gamma_0(1)$  centrada en  $p$ .

Primer, les isometries  $T(z) = z + 1$ ,  $S(z) = -1/z$  generen  $\Gamma_0(1)$ ; i, per tant, els tres costats geodèsics de  $\mathcal{F}$  són  $L_p(T)$ ,  $L_p(T^{-1})$  i  $L_p(S)$ .

Això mostra que  $D_p(\Gamma_0(1)) \subset \mathcal{F}$ . Si  $D_p(\Gamma_0(1)) \neq \mathcal{F}$ , aleshores existirien  $z \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ ,  $h \in \Gamma_0(1)$  tal que  $h(z) \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ . Mostrem que això no pot ocórrer. Suposem que

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= c^2|z|^2 + \Re(z)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| \\ &= (|c| - |d|)^2 + |cd|, \end{aligned}$$

atès que  $|z| > 1$  i  $\Re(z) > -\frac{1}{2}$ . Aquesta fita inferior és un enter positiu. A més, almenys pren el valor 1 i, per tant,  $|cz + d| > 1$ . Per tant,

$$\Im(h(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz + d|^2} < \Im(z).$$

Exactament el mateix argument preval amb  $z$ ,  $h$  reemplaçada per  $h(z)$ ,  $h^{-1}$  i assolim una contradicció. Per tant, tenim que  $D_p(\Gamma_0(1)) = \mathcal{H}$ .

**2.3.18 Exemple.** Tal i com hem vist en la proposició 2.2.23 podem descompondre els grups de congruència de la forma  $\Gamma_0(q)$  d'una manera en què puguem aplicar el teorema 2.3.4. D'aquesta manera, podem representar gràficament els seus dominis fonamentals per a tot  $q$  enter a partir del grup de congruència de l'exemple anterior.

Per a  $q = 5$ , calculem el conjunt de representants proposat en la proposició 2.2.23. En general, si  $q$  és primer el conjunt  $\mathbf{M}$  és buit atès que s'ha de definir a partir de divisors no trivials de  $q$ . Per tant, ens queda

$$\mathbf{W}(5) = \{ \text{Id}, S, ST, ST^2, ST^3, ST^4 \}.$$

Per al cas  $q = 6$ , tenim

$$A_2 = \{1\}; \quad M_2 = \{2\}; \quad 3 \cdot 4^2 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow n(m) = 3,$$

$$A_3 = \{1\}; \quad M_3 = \{3\}; \quad 2 \cdot 3^2 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow n(m) = 2.$$

Per tant, en aquest cas obtenim el conjunt següent

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(6) = & \{ \text{Id}, S, ST, ST^2, ST^3, ST^4, ST^5, \\ & ST^2S, ST^2ST, ST^2ST^2, \\ & ST^3S, ST^3ST \} \end{aligned}$$



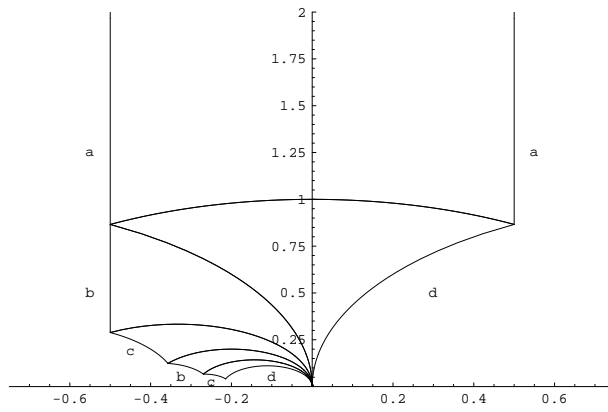


Figura 2.2: Domini fonamental de  $\Gamma_0(5)$

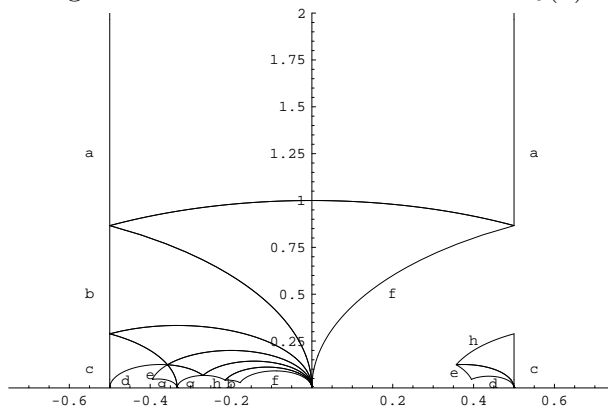


Figura 2.3: Domini fonamental de  $\Gamma_0(6)$



# Capítol 3

## Formes d'ona de Maass

En aquest punt del treball estem en disposició de poder definir les formes d'ona de Maass, dites, també, formes de Maass. L'objectiu d'aquest capítol serà, a banda de definir aquests objectes, donar propietats necessàries per a poder portar a terme el seu càlcul.

Les referències principals d'aquest capítol són [Hej83], [Str00] i [Str05]. També destaquem [Iwa02] on podem trobar les proves d'alguns dels resultats exposats a continuació.

### 3.1 Definicions generals i notacions

Començarem amb les definicions i propietats generals dels caràcters de Dirichlet.

#### 3.1.1 Caràcters de Dirichlet

En aquest apartat considerarem, llevat que es digui el contrari, que  $q$  és un enter positiu no nul.

**3.1.1 Definició.** Un caràcter de Dirichlet mòdul  $q$ , que denotarem per  $\chi$ , és un homomorfisme

$$\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

on  $\mathbb{S}^1$  denota el grup multiplicatiu del cercle unitat.

Els caràcters de Dirichlet es poden interpretar com a funcions sobre  $\mathbb{Z}$  en considerar l'aplicació que projecta  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . Des d'aquest punt de vista, podem veure aquestes funcions com a funcions periòdiques, de període  $q$ , assignant  $\chi(n) = 0$  si  $\text{mcd}(n, q) > 1$ .

**3.1.2 Definició.** Si  $\chi$  és de període exactament  $q$ , és a dir,  $q$  és el valor mínim del seus períodes, aleshores es diu que  $\chi$  és un caràcter primitiu mòdul  $q$ .

**3.1.3 Observació.** El caràcter trivial mòdul  $q$ ,  $\chi(n) \equiv 1$  no és primitiu mòdul  $q$  quan  $q \geq 2$ .

A continuació, ens interessarà estendre els caràcters als elements del grup modular.

**3.1.4 Definició.** Donat un caràcter de Dirichlet  $\chi$ , definim l'aplicació

$$\chi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := \chi(d),$$

per a  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

**3.1.5 Proposició.** Un caràcter  $\chi$  mòdul  $q$  restringit a  $\Gamma_0(q)$  és un homomorfisme de grups.

**DEMOSTRACIÓ.** Provem que l'aplicació  $\chi : \Gamma_0(q) \rightarrow \mathbb{S}^1$  és un homomorfisme de grups. Siguin  $\gamma, \gamma' \in \Gamma_0(q)$ , amb

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

aleshores

$$\begin{aligned}\chi(\gamma\gamma') &= \chi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \equiv_{(\text{mod } q)} \chi\left(\begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}\right) \\ &= dd' = \chi(\gamma)\chi(\gamma').\end{aligned}$$

□

**3.1.6 Definició.** Es diu que un caràcter  $\chi$  és parell si

$$\chi(-1) = \chi(1) = 1,$$

i senar si

$$\chi(-1) = -\chi(1) = -1.$$

**3.1.7 Definició.** Es diu que un caràcter és real quan només pren valors reals (és a dir, 1 o -1).

Atès que sempre ens referirem a  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$  o als seus subgrups necessitarem que la igualtat  $\chi(\gamma) = \chi(-\gamma)$  sigui vàlida per a qualsevol  $\gamma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Per tant, atès a aquesta condició, ens hem de restringir a l'ús de caràcters parells.

**3.1.8 Teorema.** *Tot caràcter de Dirichlet real i primitiu té per conductor un discriminant fonamental, és a dir, un enter de la forma*

$$m = n_1, 4n_2, 4n_3,$$

on  $n_1 \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $n_2 \equiv 2 \pmod{4}$  i  $n_3 \equiv 3 \pmod{4}$  i  $n_1$ ,  $n_2$  i  $n_3$  lliures de quadrats.

**3.1.9 Proposició.** *El nombre de caràcters de Dirichlet mòdul  $q$  és  $\varphi(q)$ , on  $\varphi$  és la funció d'Euler.* □

**3.1.10 Exemple.** Anem a escriure quin són els caràcters mòdul 5. Segons hem vist abans, el nombre d'aquests caràcters és  $\varphi(5) = 4$ . Els descrivim a continuació.

$$\begin{aligned}\chi_1 : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ k &\mapsto 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto -1 \\ 3 &\mapsto -1 \\ 4 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_3 : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto -i \\ 3 &\mapsto i \\ 4 &\mapsto -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_4 : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto i \\ 3 &\mapsto -i \\ 4 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Observem que en aquest cas tots els caràcters són primitius llevat de  $\chi_1$ . Els caràcters  $\chi_3$  i  $\chi_4$  són senars. Com s'observa, el caràcter  $\chi_2$  és un caràcter real. Això es dona ja que 5 és un discriminant fonamental.

Atès que els caràcters són multiplicatius, són avaluables fàcilment en productes d'enters, però pot ser que els enters siguin difícils de descompondre com a producte de nombres més petits. Un truc útil per a avaluar caràcters consisteix en factoritzar-los prèviament. Això ho podem fer en alguns casos gràcies al resultat següent:

**3.1.11 Proposició.** *Siguin  $q_1$  i  $q_2$  discriminants fonamentals tals que  $\text{mcd}(q_1, q_2) = 1$ . Aleshores, podem descompondre un caràcter de Dirichlet  $\chi_{q_1 q_2}$  de la manera següent:*

$$\chi_{q_1 q_2} = \chi_{q_1} \chi_{q_2},$$

on  $\chi_q$  denota un caràcter de Dirichlet mòdul  $q$ .

**3.1.12 Exemple.** Siguin  $\chi_q$  un caràcter real mòdul  $q$  i  $s \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $s|q$  i  $\text{mcd}(s, \frac{q}{s}) = 1$ . Prenem

$$t = sn_1 + \frac{q}{s}n_2$$

per a algun  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \chi_q(t) &= \chi_s(t)\chi_{\frac{q}{s}}(t) = \chi_s\left(sn_1 + \frac{q}{s}n_2\right)\chi_{\frac{q}{s}}\left(sn_1 + \frac{q}{s}n_2\right) \\ &= \chi_s\left(\frac{q}{s}n_2\right)\chi_{\frac{q}{s}}(sn_1). \end{aligned}$$

**3.1.13 Definició.** Un caràcter  $\chi$  definit sobre  $\Gamma_0(q)$  deixa la punta  $p_j$  oberta si actua trivialment sobre el grup estabilitzador  $\Gamma_{p_j}$ , i.e. si  $\chi(T_j) = 1$ , on  $T_j$  és el generador de  $\Gamma_{p_j}$ . En cas contrari, es diu que deixa la punta tancada.

**3.1.14 Definició.** Un caràcter es diu que és regular per a un grup  $\Gamma_0(q)$  si deixa totes les puntes de  $\Gamma_0(q)$  obertes.

Observem que la punta  $\infty$  és fixada per  $T : z \mapsto z + 1$ . Per tant,  $\chi(T) = 1$  per a qualsevol caràcter de Dirichlet la punta  $\infty$  sempre és una punta oberta.

Des d'ara suposarem que els caràcters són caràcters de Dirichlet reals i parells.

## 3.1.2 Formes de Maass

En aquesta secció definirem el concepte de forma d'ona de Maass i en donarem alguns exemples elementals.

**3.1.15 Definició.** Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian. Donada una funció  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , definim l'operador

$$f_{|[k, \gamma]}(z) := \left( \frac{cz + d}{|cz + d|} \right)^{-k} f(\gamma z), \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma, z \in \mathcal{H}.$$

En aquest treball només emprarem el valor  $k = 0$ . Per tant, per tal de abreujar, escriurem  $f|_\gamma = f_{[0,\gamma]} = f(\gamma z)$ .

**3.1.16 Definició.** Sigui  $\Gamma$  un grup fuchsian de primera espècie. Una aplicació

$$f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C},$$

infinítament diferenciable es diu que és una funció d'ona de Maass, respecte del grup  $\Gamma$  si se satisfan les tres condicions següents:

1. La funció  $f$  és una funció pròpia de l'operador de Laplace-Beltrami; és a dir, existeix una constant  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ , tal que

$$\Delta f = \lambda f.$$

2. La funció  $f$  és invariant per l'acció de  $\Gamma$ , és a dir, se satisfà que

$$f(\gamma z) = f(z) \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma.$$

3. La funció  $f$  és de quadrat integrable en  $\mathcal{F} = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ ; és a dir,

$$\int_{\mathcal{F}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty,$$

on la integral s'estén sobre un domini fonamental  $\mathcal{F}$  de  $\Gamma$ .

Tal com hem vist en el teorema 1.3.2, la funció

$$f(x + iy) := y^{1/2} K_{s-1/2}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}$$

satisfà les condicions 1 i 3 de la definició.

Tot i així, aquest tipus de funcions, individualment, no són formes d'ona de Maass (llevat del cas trivial  $\Gamma = \{\text{Id}\}$ ). Ara bé, si considerem sèries d'aquestes funcions podem imposar que se satisfaci la condició 2 (o 2' que veurem més endavant segons el



cas) en triar els coeficients adequadament. És a dir, donades les funcions

$$\kappa_n(y) := y^{1/2} K_{iR}(2\pi|n|y),$$

amb  $z = x + iy$ , aleshores es poden cercar sèries de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}$$

amb  $z = x + iy$ , que compleixin la propietat de ser invariants pel grup fuchsian.

En cas que vulguem considerar caràcters, com els estudiats en l'apartat anterior, haurem de canviar la condició 2 de la definició per la condició següent:

$$2'. f(\gamma z) = \chi(\gamma) f(z), \text{ per tot } \gamma \in \Gamma.$$

## 3.2 Espais de formes de Maass

Per a facilitar el càlcul de formes de Maass necessitarem tanta informació com sigui possible sobre les simetries que poden ser usades.

Primer veurem que en el cas d'un caràcter real podem suposar que les nostres funcions prenen valors reals. Després considerarem la translació simètrica que fa possible l'expansió de Fourier, i una simetria de reflexió, la qual la simplifica. Posteriorment descriurem les simetries menys òbvies: els operadors de Hecke i les involucions, amb les quals refinarem, a més, el possible espectre dels valors propis.

### 3.2.1 Els espais $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$

Les formes de Maass formen un espai vectorial que denotarem per  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  (si compleix 1, 2' i 3).

**3.2.1 Teorema.** *Els espais  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \lambda)$ ,  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , són de dimensió finita.*

DEMOSTRACIÓ. La prova d'aquest teorema es pot trobar al capítol 6 de [Hej83].  $\square$

**3.2.2 Teorema.** *Les formes de Maass generen la part discreta de l'espectre de l'operador  $\Delta$ , i la part continua està generada per les series d'Eisenstein.*

DEMOSTRACIÓ. La prova d'aquest teorema es pot trobar al capítol 7 de [Hej83] o bé, també, en el capítol 4 de [Iwa02].  $\square$

**3.2.3 Teorema.** *Cada forma de Maass  $f$  de  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  amb  $\lambda > 0$  és una forma cuspidal, és a dir, que tendeix a zero ràpidament en cada punta.*

DEMOSTRACIÓ. La prova d'aquest teorema es pot trobar en el capítol 6 de [Hej83].  $\square$

**3.2.4 Corol·lari.** *Els espais  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  es poden dotar del producte escalar de Petersson,*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{F}_q} f \bar{g} d\mu,$$

*on la integral pot ser presa sobre qualsevol domini fonamental  $\mathcal{F}_q$  de  $\Gamma$ . Amb aquest producte escalar, l'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  és un espai de Hilbert de dimensió finita.  $\square$*

Si sigui  $\chi$  és el caràcter trivial sobre  $\Gamma(q)$ , els valors propis  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , comptats amb multiplicitats, formen una successió discreta i es coneix una llei de Weyl general. En particular, per als subgrups  $\Gamma_0(q)$  i el caràcter trivial, tenim

$$N_{\Gamma_0(q)}(t) = \frac{\mu(\mathcal{F}_q)}{4\pi} t - \frac{2h}{\pi} \sqrt{t} \ln \sqrt{t} + a\sqrt{t} + O\left(\frac{\sqrt{t}}{\ln \sqrt{t}}\right),$$

on  $N_{\Gamma_0(q)}(t)$  denota el nombre de valors propis per sota de la cota  $t$ ,  $a$  és una certa constant que depèn del nivell  $q$  i  $h$  és el nombre de puntes de  $\Gamma_0(q)$ .

Les formes d'ona de Maass també són més misterioses que les funcions holomòrfiques automorfes, ja que es coneixen molt pocs exemples de fórmules explícites per a construir-les, mentre que es coneixen nombrosos exemples de fórmules explícites per al cas de funcions modulars holomorfes.

### 3.2.2 L'operador de conjugació

Sigui  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  i considerem l'operador  $K$  conjugació  $Kf := \bar{f}$ . Com que  $K$  commuta amb el Laplaciana,  $Kf$  és també una funció pròpia de  $\Delta$  amb el mateix valor propi  $\lambda$ . També veiem que, per a  $\gamma \in \Gamma$ , tenim

$$\begin{aligned} (Kf)|_{\gamma}(z) &= Kf(\gamma z) = \overline{f(\gamma z)} \\ &= \overline{\chi(\gamma)f(z)} \\ &= \chi(\gamma)(Kf)(z). \end{aligned}$$

Per tant,  $K$  és un automorfisme respecte de la conjugació de  $\chi$ , i.e.,  $Kf \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \bar{\chi}, \lambda)$ . En particular, si  $\chi$  és un caràcter real, llavors  $\bar{f} = Kf \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ . En aquesta direcció remarquem el resultat següent.

**3.2.5 Proposició.** *Si  $\chi$  és un caràcter real, aleshores l'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  té una base  $\mathbb{C}$ -lineal formada per funcions reals.*

DEMOSTRACIÓ. Considerant les funcions

$$\frac{1}{2}(f + Kf), \quad \frac{1}{2i}(f - Kf),$$

que prenen valors reals, queda provada la proposició.  $\square$

### 3.2.3 Series de Fourier

En relació amb les series de fourier en  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , i per tal d'abreujar, usarem la notació següent

$$\kappa_n(y) := \kappa_n(R, y) = \sqrt{y}K_{iR}(2\pi|n|y),$$

on  $K_{iR}$  és la funció de Bessel corresponent en prendre  $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ .

**3.2.6 Observació.** Es té la igualtat següent segons la notació anterior:

$$\kappa_{-n}(y) = \kappa_n(y).$$

Sigui  $\{p_1, \dots, p_\kappa\}$  el conjunt de puntes de  $\Gamma$  i  $\sigma_j$  denoti la funció normalitzadora de la punta  $p_j$ . Sigui una funció  $f \in \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$ . Notem  $f|_{\sigma_j}(z) := f(\sigma_j z)$ , i sabem que si el caràcter deixa la punta  $p_j$  oberta, aleshores

$$f|_{\sigma_j}(z+1) := f_j(z+1) = f(\sigma_j Tz) = f(T_j \sigma_j z) = \chi(T_j) f_j(z) = f_j(z).$$

**3.2.7 Proposició.** Si  $\chi$  és regular per a  $\Gamma$  aleshores una funció  $f \in \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$  admet una expansió de Fourier en cada punta de  $\Gamma$ , i aquestes expansions són donades per les funcions  $f_j$ . En la punta  $p_j$  tenim una expressió de la forma :

$$f_j = f|_{\sigma_j} = \sum_{n \neq 0} c_j(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}, \quad j = 1, \dots, \kappa.$$

□

### 3.2.4 Involucions i normalitzadors

**3.2.8 Definició.** Per a  $\Gamma \subseteq \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , es diu que  $g \in \mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$  normalitza  $\Gamma$  en  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$  si

$$g\Gamma g^{-1} = \Gamma.$$

Això significa en particular que si  $\gamma_1 \in \Gamma$  aleshores existeix  $\gamma_2 \in \Gamma$  tal que  $g\gamma_1 = \gamma_2g$ . Per al cas que tinguem un caràcter tenim la definició següent:

**3.2.9 Definició.** Direm que  $g$  normalitza  $(\Gamma, \chi)$  si  $g$  normalitza  $\Gamma$  i per a tot  $\gamma \in \Gamma$ :

$$\chi(g\gamma g^{-1}) = \chi(\gamma).$$

**3.2.10 Observació.** El conjunt de tots els elements que normalitzen  $\Gamma$  en  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$  forma un grup, anomenat el normalitzador del subgrup  $\Gamma$  en  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$ .

En la definició anterior es considera

$$\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R}) = \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})/C,$$

on  $C = \mathbb{R}^* \cdot \text{Id}$  és el centre de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ , que consisteix en totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

amb  $a \neq 0$ .

Definim una acció de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$  sobre  $\mathcal{H}$  com segueix: donats un element  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  i  $z \in \mathcal{H}$ :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{si } ad - bc > 0, \\ \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, & \text{si } ad - bc < 0. \end{cases}$$

Notem que tot el centre  $C$  actua trivialment en  $\mathcal{H}$ , i, per tant, també tenim ben definida una acció de  $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$  sobre  $\mathcal{H}$ . D'aquest fet sorgeix el resultat següent:

**3.2.11 Proposició.** Si  $g$  normalitza  $(\Gamma, \chi)$  i  $f \in \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$ , aleshores  $f|_g \in \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$ .

DEMOSTRACIÓ. Aquest resultat és un enunciat equivalent al del lema 1 de [Atl70].  $\square$

Una involució sobre un espai vectorial és una aplicació lineal tal que  $T^2 = \text{Id}$  (o equivalentment  $T^{-1} = T$ ). Ara anem a donar una un anàleg per als nostres espais.

**3.2.12 Definició.** Una aplicació lineal

$$T : \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda) \rightarrow \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$$

es diu que és una  $(\Gamma, \chi)$ -involució si  $T^2$  és l'operador identitat, és a dir, si

$$T^2 f = f$$

per a qualsevol funció  $f \in \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$ .

**3.2.13 Exemple.** Destaquem ara un parell d'exemples que s'empraran més endavant.

- Tota matriu  $W \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$  normalitzadora de  $(\Gamma, \chi)$  i que satisfaci  $W^2 \in \Gamma$  i  $\chi(W^2) = 1$  defineix una involució per a  $(\Gamma, \chi)$  quan actua via  $f \rightarrow f|_W$ . En particular, usarem  $w_n : z \mapsto -1/nz$ , que es pot representar per

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{q} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

- En particular, si prenem

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

es té una involució tal i com veurem en la secció següent.

### 3.2.5 L'operador de reflexió

Un simple cop d'ull a un domini fonamental de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$  posa de manifest que hi ha una simetria òbvia: les reflexions sobre l'eix imaginari. Aquesta simetria ens proveeix d'una partició de l'espectre en funcions parelles i funcions senars.

L'operador de reflexió es representa mitjançant la matriu

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a una matriu

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

definim

$$\gamma^* = J\gamma J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

**3.2.14 Lema.** *Per a qualsevol caràcter de Dirichlet es té la igualtat següent:*

$$\chi(\gamma^*) = \chi(\gamma) \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma_0(q).$$

DEMOSTRACIÓ. Aquest fet és clar perquè

$$\chi(\gamma^*) = \chi(d) = \chi(\gamma).$$

□

Suposem ara que  $J$  és una  $(\Gamma, \chi)$ -involució. Podem diagonalitzar  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  respecte de  $J$  i els valors propis seran 1 o  $-1$ . Aleshores  $f \in \mathcal{M}(\Gamma, \chi, \lambda)$  és anomenada parella o senar, respectivament si,  $f|_J = f$  o bé  $f|_J = -f$ . Cada funció parella o senar es pot desenvolupar mitjançant series de Fourier amb cosinus o bé amb sinus, respectivament, és a dir, sigui

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} c(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}$$

amb  $\kappa_n(y)$  seguin la notació d'abans. Aleshores

$$\begin{aligned} f|_J(z) &= \sum_{n \neq 0} c(n) \kappa_n(y) e^{-2\pi i n x} \\ &= \sum_{n \neq 0} c(-n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}. \end{aligned}$$

Si  $f|_j = f(-\bar{z}) = \varepsilon f$ , aleshores obtenim que  $c(-n) = \varepsilon c(n)$  per tant

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \neq 0} c(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n(y) (c(n) e^{2\pi i n x} + c(-n) e^{-2\pi i n x}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c(n) \kappa_n(y) (e^{2\pi i n x} + \varepsilon e^{-2\pi i n x}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c(n) \kappa_n(y) \begin{cases} 2 \cos(2\pi n x), & \varepsilon = 1, \\ 2i \sin(2\pi n x), & \varepsilon = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Posem  $a(n) = 2c(n)$  i  $b(n) = 2ic(n)$ , aleshores  $f$  tindrà una sèrie de Fourier de cosinus o bé de sinus amb coeficients  $a(n)$  o  $b(n)$  respectivament, i.e.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \kappa_n(y) \cos(2\pi n x),$$

o

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \kappa_n(y) \sin(2\pi n x).$$

Els desenvolupaments de Fourier a l'entorn de la punta  $p = 0$  són funcions pròpies de  $J$ ; però això no és necessàriament així en la resta de puntes. En la secció següent donarem una condició per la qual puguem diagonalitzar totes les  $f_j$  simultàniament respecte de l'operador  $J$ .



### 3.2.6 Simetrizació completa

Atès que usualment és preferible treballar amb sèries de Fourier simetritzades, és a dir, que contenen només sinus o cosinus, en lloc de funcions exponencials, a continuació es fa un estudi per a saber quan això és possible.

**3.2.15 Teorema.** *Sigui  $p_j = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$  una punta del grup  $\Gamma_0(q)$ , equivalent a  $-p_j$ . Sigui  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  tal que  $f|_J = \varepsilon f$ .*

*Aleshores existeix una aplicació normalitzadora  $\sigma_j$  de la punta  $p_j$  tal que*

$$f_j|_J = \chi(d)\varepsilon f_j$$

*amb  $d \equiv 1 \pmod{v}$ ,  $d \equiv -1 \pmod{\frac{q}{v}}$  i  $f_j := f_{\sigma_j}$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Per la proposició 2.2.16, la punta  $p_j$  ha de complir que  $\text{mcd}(u, v) = 1$ .

La condició que  $p_j \equiv -p_j$  en  $\Gamma_0(q)$  és equivalent a  $\text{mcd}(v, \frac{q}{v}) = 1$  o  $\text{mcd}(v, \frac{q}{v}) = 2$ .

Suposem que estem en el cas  $\text{mcd}(v, \frac{q}{v}) = 1$  i fixem la matriu  $\gamma \in \Gamma_0(q)$  tal que  $\gamma p_j = -p_j$  de la forma següent

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ qc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q).$$

Aleshores es pot comprovar que

$$d = a = -1 - \frac{q}{v} \cdot cu, \quad b = \frac{u(1-d)}{v},$$

i, per tant, de l'expressió de  $b$  tenim que

$$\left(\frac{q}{v}\right) cu \equiv -2 \pmod{v}.$$

Amb això,  $c$  queda unívocament determinat mòdul  $v$  si  $\text{mcd}(v, \frac{q}{v}) = 1$  (mòdul  $\frac{v}{2}$  si  $\text{mcd}(v, \frac{q}{v}) = 2$ ).

Tal i com hem vist en la secció anterior, l'operador de reflexió  $T^*$  compleix  $f|_T|J = f|_J|T^*$ . En el nostre cas tenim que

$$f_{j|J} = f_{|_{\sigma_j|J}} = f_{|_{J\sigma_j^*}} = \varepsilon f_{|\sigma_j^*},$$

sent

$$\sigma_j^* = J\sigma_j J^{-1}$$

Observem que  $\sigma_j^*$  és l'aplicació normalitzadora de la punta  $-p_j$  ja que

$$\begin{aligned} \sigma_j^*(-p_j) &= J\sigma_j J^{-1}(p_j) = J\sigma_j(p_j) = \\ &= J\infty = \infty \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} J\sigma_j J^{-1} T J^{-1} \sigma_j^{-1} J(-p_j) &= J\sigma_j J^{-1} T J^{-1} \sigma_j^{-1}(p_j) \\ &= J\sigma_j J^{-1} T J^{-1}(\infty) = J\sigma_j(\infty) \\ &= J(p_j) = -p_j \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \sigma_j^*(-p_j) &= J\sigma_j J^{-1}(p_j) = J\sigma_j(p_j) = \\ &= J\infty = \infty \end{aligned}$$

però observem que l'aplicació  $\gamma\sigma_j$  també és una aplicació normalitzadora atès que

$$\gamma\sigma_j(\infty) = \gamma p_j = -p_j$$

i

$$\begin{aligned} \gamma\sigma_j T \sigma_j^{-1} \gamma^{-1}(-p_j) &= \gamma\sigma_j T \sigma_j^{-1}(p_j) \\ &= \gamma\sigma_j T \infty = \gamma p_j = -p_j. \end{aligned}$$

Per tant

$$f_{j|J} = \varepsilon f_{|\sigma_j^*} = \varepsilon f_{|\gamma\sigma_j} = \varepsilon \chi(d) f_j,$$

atès que  $\gamma \in \Gamma_0(q)$  i  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ .  $\square$

**3.2.16 Corol·lari.** *Suposem que  $q = 2^r p_1 \dots p_m$ , amb  $0 \leq r \leq 3$ , i  $m > 0$ , i on  $p_1, \dots, p_m$  són primers senars diferents. Suposem també que en cada descomposició  $\chi = \chi_v \chi_{\frac{q}{v}}$ ,  $v|q$ , el caràcter  $\chi_{\frac{q}{v}}$  és parell. Aleshores podem prendre tots els  $f_j$  simultàniament com a funcions pròpies de  $J$  amb el mateix valor propi.*

Notem que si no tenim funcions pròpies simultànies de  $J$  hem de treballar amb exponencials en lloc de sinus i cosinus, i coeficients de Fourier complexos en lloc de coeficients de Fourier reals.

### 3.2.7 Operadors de Hecke

La teoria clàssica dels operadors de Hecke es pot transportar del cas modular holomorf al cas de la teoria de les formes d'ona de Maass. Aquesta secció proporcionarà un resum de la teoria de Hecke en aquest nou cas, i també servirà com a recopilació de fets fonamentals i per a unificar notacions.

Els operadors de Hecke considerats aquí són operadors que actuen sobre espais de funcions modulars, és a dir, funcions automorfes respecte de subgrups de congruència.

Definim l'operador de Hecke de forma similar a la de l'article [Atl70]. Sigui  $q \in \mathbb{Z}^+$ . Per a un primer  $p$  hi ha un subgrup d'índex finit en  $\Gamma_0(q)$ ,

$$\Gamma_0(q, p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q) \mid b \equiv 0 \pmod{p} \right\}.$$

Per a algun  $d \in \mathbb{Z}^+$ , definim l'aplicació  $A_d : z \mapsto dz$  en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Per a  $d = p$  primer aleshores tenim que

$$A_p^{-1} \Gamma_0(q, p) A_p = \Gamma_0(qp) \subseteq \Gamma_0(q)$$

i es té que  $\chi(A_p^{-1} B A_p) = \chi(\beta)$ . D'aquí deduïm el resultat següent.

**3.2.17 Proposició.** *L'aplicació  $A_p$ , amb  $p$  primer, proporciona una aplicació entre espais de formes d'ona de Maass de la forma següent:*

$$\begin{aligned} A_p^{-1} : \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda) &\rightarrow \mathcal{M}(\Gamma_0(q, p), \chi, \lambda) \\ f &\rightarrow f_p := f|_{A_p^{-1}}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. L'únic que cal provar és que, efectivament,  $f_p \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q, p), \chi, \lambda)$ .

Observem primer que

$$\chi(A_p^{-1}\beta A_p) = \chi(\beta),$$

per a  $\beta \in \Gamma_0(q, p)$ . Ara volem veure que  $f_p \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q, p), \chi, \lambda)$ . Sigui  $\beta \in A_p^{-1}\Gamma_0(q, p)A_p$ , i  $\gamma = A_p\beta A_p^{-1}$ :

$$\begin{aligned} f_p(\beta z) &= f_p(A_p^{-1}\gamma A_p) = f(\gamma A_p z) = \\ &= \chi(\gamma)f(A_p z) = \chi(A_p^{-1}\beta A_p)f(A_p z) = \chi(\beta)f_p(z) \end{aligned}$$

i això prova el que volíem.  $\square$

El que fem a continuació és construir una aplicació que vagi de  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q, p), \chi, \lambda)$  a  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  però d'una manera no trivial (i.e no via  $A_p$ ).

Sigui  $\{R_j\}_{j=1}^{\mu}$  un conjunt de representants per la dreta de  $\Gamma_0(q, p)$  en  $\Gamma_0(q)$ . Aleshores les matrius  $R_j$  tindran el terme inferior de la dreta  $d \equiv 1 \pmod{q}$ .

Per a qualsevol  $V \in \Gamma_0(q)$ , aleshores per a cada  $j$  existeix un únic  $i$  tal que  $R_j V = g R_i$  per a algun  $g \in \Gamma_0(q, p)$  i diferents  $j$ -s i donen diferents  $i$ -s. Usant la nostra elecció especial de  $R_j$  es pot comprovar que  $\chi(V) = \chi(g)$ . D'aquesta manera, per a qualsevol funció  $h \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q, p), \chi, \lambda)$  es clar que la funció

$\sum_{j=1}^{\mu} h_{|R_j}$  pertany a  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ . Per tant, podem definir l'operador,  $T_p : \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda) \rightarrow \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  com segueix:

$$T_p f := \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=1}^{\mu} f_{p|R_j}.$$

El factor  $\frac{1}{\sqrt{p}}$  és per a una normalització convenient.

Treballant amb un conjunt de representants explícits s'obté la fórmula següent per a un enter primer  $p$  amb  $\text{mcd}(q, p) = 1$ :

$$T_p f(z) := \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{p}\right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \chi(p) f(pz),$$

i, per a un primer  $p$ , amb  $p|q$ :

$$T_q(f) = U_p f(z) := \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{z+j}{q}\right).$$

En principi, atès a la naturalesa multiplicativa dels operadors de Hecke per a primers, i usant la multiplicitat juntament amb altres resultats, es defineix  $T_n$  per a qualsevol enter positiu  $n$  amb  $\text{mcd}(n, q) = 1$ . Aquestes construccions es poden trobar a [Shi67], i sorgeix la definició següent:

**3.2.18 Definició.** Per a cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  i  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  es defineix l'operador de Hecke  $T_n$  per la fórmula

$$T_n(f(z)) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n, d>0} \chi(a) \sum_{j=0}^{d-1} f\left(\frac{az+j}{d}\right). \quad (3.1)$$

**3.2.19 Teorema.** *Els operadors de Hecke  $T_n$  amb  $\text{mcd}(n, q) = 1$  són endomorfismes de l'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  que satisfan les propietats següents:*

$$T_n T_m = \sum_{ad=n, d>0} \chi(d) T_{\frac{mn}{d^2}}, \quad (3.2)$$

per a enters  $n$  i  $m$  amb  $\text{mcd}(n, q) = \text{mcd}(m, q) = 1$ , i

$$T_n^* = \overline{\chi(n)} T_n, \quad (3.3)$$

on  $T_n^*$  denota l'operador adjunt de  $T_n$ . En particular, el conjunt  $\{T_n \mid \text{mcd}(n, q) = 1\}$  és una família commutativa d'operadors normals que commuten amb l'operador de Laplace-Beltrami i de reflexió  $J$ .

DEMOSTRACIÓ. Per a provar la propietat multiplicativa cal mirar l'acció dels  $T_n$  sobre els coeficients de Fourier de les formes d'ona de Maass  $f$ . Suposem que  $c(k)$  i  $b(k)$  són els coeficients de  $f$  i dels  $T_n$ -s respectivament, aleshores es té la següent relació

$$b(k) = \sum_{n,a,d>0} \chi(a) c\left(\frac{kd}{a}\right), \quad (3.4)$$

amb la convenció usual que  $c(r) = 0$  si  $r \notin \mathbb{Z}$ .

Per a provar (3.2) es compara l'acció sobre els coeficients de Fourier als dos costats. Ara per a provar (3.3) és suficient tractar el cas  $n = p$  primer. Usem la relació següent entre el producte escalar de Petersson sobre els dos grups:

$$\langle T_p f, g \rangle_{\Gamma_0(q)} = \frac{1}{\sqrt{p}} \langle f_p, g \rangle_{\Gamma_0(q,p)},$$

i obtenim el que volíem.  $\square$

Per a  $p|q$  es té que

$$U_q T_n = T_n U_q,$$

quan  $\text{mcd}(n, q) = 1$  però en general els operadors  $U_p$  no són normals respecte del producte vectorial de Petersson. Aquest no seran considerat fins a la secció següent on introduïrem els espais de les formes noves.

**3.2.20 Teorema.** *Existeix una base ortogonal  $\{\phi_j\}$  en l'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  formada per funcions pròpies per a tots els operadors de Hecke  $T_n$  amb  $\text{mcd}(n, q) = 1$ .*

DEMOSTRACIÓ. Observem que  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  és un espai vectorial de dimensió finita. Per tant, podem triar una base  $\{f_j\}_{j=1}^m$  i representem els operadors  $T_n$  per matrius  $m \times m$   $\Lambda(n)$  en aquesta base. Pel teorema 3.2.19 és clar que  $\{\Lambda(n) \mid \text{mcd}(n, q) = 1\}$  és una família de matrius normals  $m \times m$  que commuten dos a dos. Per raonaments d'àlgebra lineal se sap que hi ha bases  $\{\phi_j\}_{j=1}^m$  on cada  $\phi_j$  és una funció pròpia de tots els  $\Lambda(n)$ , i això és el que volem.  $\square$

### 3.2.8 Formes noves i formes velles

De la fórmula (3.4) deduïm que si  $f$  té coeficients  $c(n)$  i  $T_n f = \lambda(n)f$ , aleshores

$$c(n) = \lambda(n)c(1).$$

Voldríem assegurar-nos que  $c(1) \neq 1$ , però desafortunadament com veurem més endavant podrem tenir que  $c(1) = 0$ .

Suposem que  $\chi$  és un caràcter no primitiu (mod  $q$ ) de conductor  $k$ . Si  $k|n$  i  $nd|q$  per a alguns enters positius  $q, d$ , prenem  $\chi_n$  el caràcter induït per  $\chi$  sobre  $\Gamma_0(n)$ . Aleshores

$$f(x) \in \mathcal{M}(\Gamma_0(n), \chi_n, \lambda) \Rightarrow f(z), f|_{A_d}(z) \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$$

(amb  $A_d$  com en la secció anterior.), la qual cosa resulta del fet que  $A_d \Gamma_0(q) A_d^{-1} = \Gamma(\frac{q}{d}, d) \subseteq \Gamma(\frac{q}{d}) \subseteq \Gamma_0(n)$ , i  $\chi(A_d \beta A_d^{-1}) = \chi(\beta)$ , amb  $\beta \in \Gamma_0(q)$ .

**3.2.21 Definició.** Sigui  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ . Es diu que  $f$  és una forma vella si existeixen enters positius  $n$  i  $d$  tals que  $nd|q$ , un caràcter  $\chi$  mòdul  $n$  i una funció  $f_1 \in \mathcal{M}(\Gamma_0(n), \chi, \lambda)$  tal que  $f = f_1|_{A_d}$ .

Suposem ara que  $f$  és una forma vella amb coeficients de Fourier donats per

$$f(z) = \sum_{m \neq 0} c(m) \sqrt{y} K_{iR}(2\pi|m|y) e^{2\pi imx}.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} f|_{A_d} = f(dz) &= \sum_{m \neq 0} c(m) \sqrt{dy} K_{iR}(2\pi|m|dy) e^{2\pi imdy} \\ &= \sqrt{d} \sum_{n \equiv 0 \pmod{d}} c\left(\frac{n}{d}\right) \sqrt{y} K_{iR}(2\pi|n|y) e^{2\pi inx}. \end{aligned}$$

Per tant si  $d > 1$  aleshores el primer coeficient de Fourier de  $f(dz)$  és zero. Això és un exemple dels inconvenients de les formes velles.

Sigui  $\mathcal{M}^{old}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  l'espai lineal generat per les formes velles i definim  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  com el complement ortogonal respecte del producte escalar de Petersson. Aleshores tenim que

$$\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda) = \mathcal{M}^{old}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda) \oplus \mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda).$$

És fàcil veure que ambdós subespais són estables pels operadors de Hecke  $T_n$  amb  $\text{mcd}(n, q) = 1$ , atès que  $T_n^* = \chi(n)T_n$ .

**3.2.22 Definició.** Una funció  $f \in \mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  s'anomena una forma nova normalitzada de nivell  $q$  si  $f$  és una funció pròpia de  $J$  i tots els operadors de Hecke  $T_n$ ,  $\text{mcd}(n, q) = 1$ , i el primer coeficient de  $f$  és 1, és a dir,  $c(1) = 1$ .

**3.2.23 Proposició.** Si  $\chi$  és un caràcter primitiu  $(\text{mod } q)$  i  $p|q$ , aleshores l'operador  $U_p$  és unitari sobre  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ ; i.e.

$$U_p^* = U_p^{-1}.$$

**DEMOSTRACIÓ.** En el cas de  $q$  primer, funciona si es prova que  $U_p^* = \omega_q U_p \omega_q^{-1}$  i aleshores usant les propietats de producte escalar de Petersson.  $\square$



El teorema següent és crucial en la teoria de les formes noves i formes vells.

**3.2.24 Teorema.** *Sigui  $\chi$  un caràcter de Dirichlet de conductor  $k$ . L'espai de formes noves té les propietats següents.*

(i) *Per a cada multiple  $n$  de  $k$ , les formes normalitzades de nivell  $q$  i caràcter  $\chi$ ,  $\{F_j^{(q,\chi)}\}_{j=1}^{m_q}$  formen una base ortogonal en el espai  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ . Aquest conjunt s'anomena la bases de Hecke de  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ .*

(ii) *Cada  $F_j$  és una funció pròpia de tot  $T_n$  amb  $n \in \mathbb{Z}^+$ .*

(iii) *Una base en l'espai  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  és donada per*

$$\left\{ F_i^{(m,\chi)} \mid d, m \in \mathbb{Z}^+, k \mid m, dm \mid q, 1 \leq i \leq m_q \right\}.$$

(iv) *(Multiplicitat 1) Sigui  $\chi'$  un caràcter de Dirichlet (mod  $q'$ ). Donades les funcions  $f \in \mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  i  $g \in \mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q'), \chi', \lambda)$  amb  $\lambda, \mu > 0$ , aleshores o bé existeixen un nombre infinit de primers  $p$  per als quals els valors propis de  $T_p$  són diferents per a  $f$  i  $g$ , o bé  $q = q'$ ,  $\lambda = \mu$ ,  $\chi' = \chi$  i  $f \equiv g$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** La demostració d'aquest teorema segueix el mateix camí que per al cas holomorf que es pot trobar a [Miy76]. Però en el nostre cas hi ha tres diferències que cal destacar que són, sense entrar en més detall, les següents:

- (i) Hem de anar amb compte si estem tractant funcions parelles o senars.
- (ii) L'equació funcional per a les funcions  $L$  és diferent.
- (iii) L'anàlog de la conjectura de Ramanujan-Petersson (una estimació dels coeficients de la serie de Fourier) no està provada en aquest cas. Tot hi així les propietats analítiques de les funcions de Bessel fan que aquests coeficients siguin prou bons.

Una demostració completa per al nostre cas pot trobar a [Str00].  $\square$

**3.2.25 Observació.** Notem que  $U_p$  no és normal sobre l'espai sencer  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  (a menys que sigui  $\chi$  primitiu, ja que en aquest cas no hi ha formes velles). Per tant, no tindrem teorema de multiplicitat 1 si intentem diagonalitzar l'espai sencer respecte de tots els operadors de Hecke.

**3.2.26 Teorema.** *Sigui  $f$  una forma nova amb  $T_n f = \lambda(n)f$  i  $f|_J = \varepsilon f$ . Si el desenvolupament de Fourier de  $f$  és*

$$f(z) = \sum_{|m| \geq 1} c(m) \sqrt{y} K_{iR}(2\pi m y) e^{2\pi i m x}$$

(on  $c(1) = 1$ ), aleshores

$$c(m) = \lambda(m), \quad i$$

$$c(-m) = \varepsilon \lambda(m),$$

per a tot  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Tenim també les relacions multiplicatives següents

$$\begin{aligned} c(m)c(n) &= \sum_{d|(m,n), d>0} \chi(d) c\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad \text{mcd}(n, q) = 1, m \in \mathbb{Z}, \\ c(m)c(p) &= c(mp), \quad p|q, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

**DEMOSTRACIÓ.** La primera part se segueix per addició de  $f$  i  $f|_J$  i reordenant la suma. La segona part se segueix de cada una de les propietats multiplicatives del teorema 3.2.19, que apliquem al valors propis de Hecke  $\lambda(n)$ , i quan prenem  $c(1) = 1$  en la relació  $c(n) = \lambda(n)c(1)$  ja hem acabat.  $\square$

**3.2.27 Proposició.** *Suposem que  $f \in \mathcal{M}^{\text{new}}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  és una forma nova normalitzada, i que  $p$  és un primer tal que  $p|q$ . Aleshores se satisfà el resultat següent:*

- (i) Si  $\chi$  és primitiu,  $|c(p)| = 1$ .
- (ii) Si  $\chi$  és trivial i  $p^2 \nmid q$  aleshores  $c(p) = \frac{\lambda_p}{\sqrt{p}}$ , on  $\lambda_p = \pm 1$ , (de fet  $\lambda_p$  és el valor propi d'un operador que estudiarem en la secció següent).
- (iii) Si  $\chi$  és trivial i  $p^2|q$ , aleshores  $c(p) = 0$ .

Recordem que pel teorema 3.2.24 podem triar sempre una base pròpia de Hecke en l'espai  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  on les funcions estan normalitzades per  $c(1) = 1$ .

Destaquem que si el caràcter  $\chi$  és no trivial, en general no es pot suposar que les bases de Hecke estiguin formades per funcions reals. Pel teorema 3.2.19 tenim que  $T^* = \overline{\chi(n)}T_n$  quan  $\text{mcd}(n, q)$ . D'aquesta manera,

$$\overline{\lambda(n)} = \overline{\chi(n)}\lambda(n), \quad (3.6)$$

i  $\overline{c(n)} = \overline{\chi(n)}c(n)$ . Per tant, en particular, si  $\chi(n) = -1$  aleshores  $c(n)$  és purament imaginari. En canvi si  $\chi(n) = 1$ , aleshores  $c(n)$  és real.

**3.2.28 Observació.** Suposem que  $\chi$  és real i que  $f$  és una forma nova normalitzada de l'espai  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  amb  $f|_J = \varepsilon f$  i els valors propis de Hecke  $\lambda(n)$ . Aleshores  $\varepsilon \overline{f}$  és també una forma nova normalitzada de  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , però amb valors propis de Hecke  $\overline{\lambda(n)}$ . Ara bé, en general  $f$  i  $\varepsilon \overline{f}$  són linealment independents, atès que  $\lambda(n) \neq \overline{\lambda(n)}$  sempre que  $\chi(n) \neq 1$  i  $\lambda(n) \neq 0$ . D'aquesta manera el nou espai  $\mathcal{M}^{new}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  és en general de dimensió més gran que 1.

Una excepció al cas anterior són les formes de tipus CM que va construir originàriament Maass. Aquestes formes són reals i, per tant, tenen  $c(n) = 0$  per a tot enter positiu  $n$  tal que  $\text{mcd}(n, q) = 1$  i  $\chi(n) \neq 1$ .

### 3.2.9 Les aplicacions normalitzadores de les puntes com a normalitzadors de $(\Gamma_0(q), \chi)$

Suposem que  $n|q$  i que  $\text{mcd}(n, \frac{q}{n}) = 1$ . Aleshores podem associar a  $n$  un normalitzador de  $\Gamma_0(q)$ , que anomenem  $W_n$ . La matriu  $W_n$  es pot prendre de la forma

$$W_n = \begin{pmatrix} nx & y \\ qz & nw \end{pmatrix},$$

on  $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$  amb  $x \equiv 1 \pmod{\frac{q}{n}}$ ,  $y \equiv 1 \pmod{n}$  i  $n^2xw - qzy = n$ . Es pot també verificar que  $W_n$  és un normalitzador de  $(\Gamma_0(q), \chi)$  per a cert  $\chi$ .

Un fet remarcable sobre  $W_n$  és que com a operador sobre  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  és independent de les tries de  $x, y, z$  i  $w$ . De fet, si

$$W'_n = \begin{pmatrix} nx' & y' \\ qz' & nw' \end{pmatrix},$$

per a algun  $x', y', z', w' \in \mathbb{Z}$  i  $\det W'_n = n$ , aleshores (com a operadors) es té que  $W'_n = \chi_n(y')\chi_{\frac{q}{n}}(x')W_n$ . En particular, això implica que per a algun  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$

$$f|_J|_{W_n} = \overline{\chi_n(-1)}f|_{W_n|_J}.$$

Per a nosaltres, el normalitzador  $W_n$  serà el més útil per a caràcters reals, atesa la proposició següent:

**3.2.29 Proposició.** *Suposem que  $n|q$  i  $\text{mcd}(n, \frac{q}{n}) = 1$ , i prenem  $\chi = \chi_n\chi_{\frac{q}{n}}$ . Aleshores per a algun  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  tenim que*

$$W_n f = f|_{W_n} \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi_q\chi_{\frac{q}{n}}, \lambda), \quad W_n^2 f = \chi_n(-1)\overline{\chi_{\frac{q}{n}}(n)}f.$$

*En particular, si  $\chi_n$  és real i  $\chi_n(-1)\overline{\chi_{\frac{q}{n}}(n)} = 1$ , aleshores  $W_n$  és una aplicació de  $\mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  en ell mateix i  $W_n$  és una  $(\Gamma, \chi)$ -involució.  $\square$*

El normalitzador  $W_n$  serà molt útil en els casos en què puguem considerar-lo com a una aplicació normalitzadora, tal i com com s'explica en la proposició següent.

**3.2.30 Proposició.** *Suposem que  $n|q$  i  $\text{mcd}(n, \frac{q}{n}) = 1$ . Aleshores podem triar  $W_n$  com a aplicació normalitzadora de la punta  $\frac{n}{q}$ .*

DEMOSTRACIÓ. Podem triar  $x = z = 1$  en la fórmula per a  $W_n$ , això és

$$W_n = \begin{pmatrix} n & y \\ q & nw \end{pmatrix},$$

on  $y, w \in \mathbb{Z}$ , i  $nw - \frac{q}{n} = 1$ . Notem que l'amplada de la punta  $\frac{n}{q}$  és

$$\frac{q}{\text{mcd}\left(q, \left(\frac{n}{q}\right)^2\right)} = \frac{q}{\frac{q}{n}\text{mcd}\left(q, \left(\frac{q}{n}\right)\right)} = n.$$

Sabem que l'aplicació normalitzadora de la punta  $\frac{q}{n}$  pot ser escrita de manera única llevat translacions com  $\tau = \varrho\sigma$ , on  $\varrho \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$  aplica  $\infty$  a  $\frac{q}{n}$ , i  $\varrho$  és la matriu que escala per l'amplada de la punta. Per tant, escrivint  $W_n$  com

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & y \\ \frac{q}{n} & wn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

veiem que  $W_n$  és una aplicació normalitzadora per a  $\frac{n}{q}$ .  $\square$

Una altra propietat de  $W_n$  és la següent:

**3.2.31 Proposició.** *Sigui  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $n|q$  i  $\text{mcd}(n, \frac{q}{n}) = 1$ , i siguin  $p_1$  i  $p_2$  primers amb  $\text{mcd}(p_1, q) = 1$ ,  $p_2|q$  i  $\text{mcd}(p_2, n) = 1$ . Aleshores,*

$$T_{p_1} W_n f = \overline{\chi_n(p_1)} W_n T_{p_1} f,$$

$$U_{p_2} W_n f = \overline{\chi_n(p_2)} W_n U_{p_2} f,$$

per a  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , on  $\chi_n$  és el caràcter (mod  $n$ ) induït per  $\chi$  (i.e.  $\chi = \chi_n \chi_n^{\frac{q}{n}}$ ).

Observem que per a funcions pròpies  $f$  s'aconsegueix

$$T_p(W_n f) = \overline{\chi_n(p)} W_n T_p f = \overline{\chi_n(p)} \lambda_p W_n f$$

on  $\lambda_p$  és el valor propi de  $f$  per a  $T_p$ . En altres paraules,  $W_n f$  és també una funció pròpia de  $T_p$  de valor propi  $\lambda_p \overline{\chi_n(p)}$ . En vista de la multiplicitat 1, si  $\chi_n$  és el caràcter trivial i  $f$  és una forma nova, aleshores  $W_n f$  ha de ser múltiple de  $f$ , i.e.  $W_n f = \mu_n f$ , on  $\mu_n^2 = \overline{\chi_n^{\frac{q}{n}}(n)}$ . Ara si triem el normalitzador  $\sigma_j$  de la punta  $\frac{n}{q}$  com  $\sigma_j = W_n$ , aleshores tenim  $f_j = \mu_j f_1$ , i en termes de les diferents expansions de Fourier, això significa que (per a tot  $k$ )

$$c_j(k) = \mu_j c_1(k), \quad (3.7)$$

on  $\mu_j^2 = \overline{\chi_n^{\frac{q}{n}}(n)}$ .

De totes maneres, és important observar que la fórmula (3.7) no ens permet en general reduir els coeficients de Fourier de totes les puntes als de la punta  $i\infty$ .

# Capítol 4

## Aspectes computacionals

El que farem en aquest capítol serà descriure algoritmes necessaris per tal de calcular funcions d'ona de Maass. Aquest objectiu es redueix a calcular un valor propi  $\lambda = \frac{1}{4} + R^2$ , al qual ens referirem a  $R$  per estalviar notació, i un conjunt de coeficients de Bessel-Fourier  $\{c_j(n) \mid 1 \leq j \leq \kappa, |n| \geq 1\}$ . A excepció de les formes de tipus CM, no hi ha fórmules conegudes per a calcular cap dels valors propis o dels coeficients i només en podem obtenir aproximacions numèriques.

### 4.1 Introducció

Sabem que les formes d'ona de Maass  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$ , amb  $\lambda > 0$  estan completament descrites pels seus desenvolupaments de Fourier a l'infinit, però per a assegurar l'estabilitat del mètode numèric necessitem conèixer les sèries de Fourier en totes les puntes de  $\mathcal{F}_q$ , i.e., per a tot  $1 \leq j \leq \kappa$ ,

$$f_j(z) = \sum_{|n| \geq 1} c_j(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}.$$

La idea és, donat un nombre real  $R$ , emprar l'àlgebra lineal per a calcular un conjunt de nombres que siguin propers als valors reals dels coeficients de Bessel-Fourier si  $R$  és un valor proper a un valor propi exacte d'una forma de Maass.

## 4.2 Remarques numèriques

Primer introduïrem un zero efectiu. La precisió aritmètica habitual sabem que és  $x + 10^{-16}x \simeq x$ . Per tant, si fixem  $\varepsilon < 10^{-16}$  aleshores considerarem que qualsevol valor per sota de  $\varepsilon$ , és negligible. Emprarem  $[[\varepsilon]]$  per a denotar una quantitat amb valor absolut menor que  $\varepsilon$ .

Suposem que  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  amb expansions de Fourier a les puntes,

$$f_j(z) = \sum_{|n| \geq 1} c_j(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}, \quad 1 \leq j \leq \kappa. \quad (4.1)$$

**4.2.1 Lema.** *Una cota trivial dels coeficients és*

$$c_j(n) = O(\sqrt{|n|}).$$

DEMOSTRACIÓ. Aquest resultat es pot trobar en el capítol 11 de [Hej83], o bé, en el capítol 3 de [Iwa02].  $\square$

Combinant el lema anterior amb

$$\kappa_n(y) := \sqrt{|y|} K_{iR}(2\pi |n| y),$$

i el fet que

$$K_{iR}(y) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y},$$



quan  $y \rightarrow \infty$  (per a  $R$  fixat), es veu que el residu de la suma (4.1) satisfà

$$\sum_{|n| \geq M} c_j(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x} = O(e^{-2\pi y M}), \quad M \rightarrow \infty,$$

amb la  $O$ -constant depenent de  $R$  i de  $y$ .

Per tant, per a un  $y$  i  $R$  donats, podem prendre  $M = M(y)$  de manera que

$$f_j(z) = \sum_{1 \leq |n| \leq M(y)} c_j(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x} + [[\varepsilon]], \quad (4.2)$$

per a  $1 \geq j \geq \kappa$ .

**4.2.2 Lema.** *Per a un  $R$  suficientment gran el nombre de coeficients que podem prendre per tal de garantir que l'algoritme de càlcul estigui ben condicionat és*

$$M(y) = \left\lfloor \frac{R + AR^{\frac{1}{3}}}{2\pi y} \right\rfloor \quad (4.3)$$

per a alguna constant  $A \in [12, 15]$ .

DEMOSTRACIÓ. Una prova d'això es pot trobar a [Hej99].  $\square$

## 4.3 El sistema lineal

Tal i com hem dit, per tal de dissenyar un algoritme estable necessitem usar els coeficients de Bessel-Fourier de totes les puntes, la qual cosa significa que hem d'usar expansions en regions diferents d'una forma adequada.

Considerem  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$  com a una reunió de sèries de Fourier en totes les puntes; és a dir, usarem la notació  $f_j$

per tal de representar l'expansió de la nostra forma de Maass en la punta  $p_j$  corresponent. Per tant, donat  $w \in \mathcal{F}_q$  usarem la identitat

$$f(w) = \chi(U_w^{-1})f_{I(w)}(\sigma_{I(w)}^{-1}U_w w). \quad (4.4)$$

Donat un punt qualsevol  $z \in \mathcal{H}$  i un índex  $j \in \{1, \dots, h\}$ , prenem  $w_j$  com el punt equivalent a  $z_j = \sigma_j z$  dintre del domini fonamental  $\mathcal{F}_q$ , és a dir,  $w_j = T_j(z_j) \in \mathcal{F}_q$  amb  $T_j \in \Gamma_0(q)$ , i prenem  $z_j^* = \sigma_{I(j)}^{-1}U_{w_j}w_j$  (on  $I(j) := I(w_j)$ ). Aleshores,

$$z_j^* = \sigma_{I(j)}^{-1}U_{w_j}T_j\sigma_j z,$$

per tant

$$\begin{aligned} f_j(z) &= f(\sigma_j z) = f(T_j^{-1}U_{w_j}^{-1}\sigma_{I(j)}z_j^*) \\ &= \chi(T_j^{-1}U_{w_j}^{-1})f_{I(j)}(z_j^*). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aquesta relació entre  $f_j(z)$  i  $f_{I(j)}(z_j^*)$  és la que ens permetrà aconseguir totes les series de Fourier. Considerem les series truncades

$$f_j(z) = \sum_{1 \leq |n| \leq M(y)} c_j(n) \kappa_n(y) e^{2\pi i n x}.$$

Una manera de veure aquesta serie és com una transformada discreta de Fourier. Podem muntar una serie transformada inversa sobre el següent conjunt de punts situats sobre una recta

$$\left\{ z_m = x_m + iY \mid x_m = \frac{1}{2s} \left(m - \frac{1}{2}\right), 1 - s \leq m \leq s \right\},$$

per a algun  $Y < Y_0$ , i  $s > M(Y)$ . La transformada discreta inversa de Fourier l'hem de considerar fent un canvi de variables i hem de tenir en compte que no considerem el zero.

La transformada inversa ens dóna que per a  $1 \leq |n| \leq M(Y) <$

s, es té que

$$\begin{aligned} c_j(n)\kappa_n(Y) &= \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s}^s \widehat{f}_j(z_m) e^{-2\pi i n x_m} \\ &= \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s}^s f_j(z_m) e^{-2\pi i n x_m} + [[\varepsilon]], \end{aligned}$$

on en l'últim pas usem (4.2). Aquest sistema ve a ser una tautologia, però podem usar l'automorfia (4.5) per aconseguir una bona mescla de coeficients de Fourier i evitar així estar resolent un sistema trivial.

Imitant la discussió que ens ha portat a (4.4) prenem  $T_{mj} \in \Gamma_0(q)$  com l'aplicació de reducció de  $\sigma_j z_m$  a  $\mathcal{F}_q$  i considerem les igualtats següents

$$w_{mj} = T_{mj}(\sigma_j z_m) \in \mathcal{F}_q,$$

$$I(m, j) = I(w_{mj}),$$

$$U_{mj} = U_{w_{mj}} \in \Gamma_0(q),$$

$$z_{mj}^* = \sigma_{I(m,j)}^{-1} U_{mj} w_{mj},$$

$$\chi_{mj} = \chi(T_{mj}^{-1} U_{mj}^{-1}).$$

Usant l'anàleg de l'equació (4.5) obtenim que

$$c_j(n)\kappa_n(Y) = \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s}^s \chi_{mj} f_{I(j,m)}(z_{mj}^*) e^{-2\pi i n x_m} + [[\varepsilon]],$$

i ara volem substituir l'expansió de Fourier truncada per a  $f_{I(j,m)}$ . Atès que sabem que  $\Im(z_{mj}^*) = \Im(\sigma_{I(j,m)}^{-1} U_{mj} T_{mj} \sigma_j(z_{mj})) \geq Y_0$ , podem usar el mateix punt de truncament  $M_0 = M(Y_0)$  per a totes les series. Intercanviant l'ordre de sumació aconseguim l'expressió, vàlida per a  $M(Y) < Q$  i  $1 \leq j \leq \kappa$ :

$$c_j(n)\kappa_n(Y) = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{1 \leq |k| \leq M_0} c_i(k) V_{nk}^{ji} + 2[[\varepsilon]], \quad (4.6)$$

on

$$V_{nk}^{ji} = \frac{1}{2s} \sum_{m=1-s, I(j,m)=i}^s \chi_{mj} \kappa_k(y_{mj}^*) e^{2\pi i k x_{mj}^*} e^{-2\pi i n x_m}. \quad (4.7)$$

**4.3.1 Observació.** Sembla clar que per a que el sistema (4.6) sigui útil, necessitem una relació d'automorfia no trivial. En la pràctica trobarem que una condició necessària, i de fet suficient, per a un comportament numèric bo és que  $z_{mj}^* \neq z_m$  per a tot  $j, m$ .

Aquesta condició queda assegurada si aconseguim que es satisfaci  $\Im(z_{mj}^*) > Y$  per a tot  $j, m$ . Però això és un fet automàtic si triem  $Y < Y_0$  com abans, però en molts casos és possible verificar que la desigualtat també val per a certes tries de  $Y$  més grans que  $Y_0$ . Això significa que serem capaços d'usar un  $Y > Y_0$  i un corresponent  $M(Y) < M_0$ .

Tenim ara un sistema lineal que pot ser usat per al càlcul dels coeficients. Notem que els  $V_{nk}^{ij}$  poden ser petits degut a que les funcions de Bessel decauen ràpidament. Aquest fet, juntament amb la falta de coeficients, pot comportar un mal condicionament de la matriu del sistema.

Es pot evitar una mala mescla dels coeficients disminuint  $Y$ . El sistema (4.6) pot ser expressat com

$$0 = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{|k| \leq M_Y} c_i(k) \tilde{V}_{nk}^{ij} \quad (4.8)$$

on  $\tilde{V}_{nk}^{ij} = V_{nk}^{ji} - \delta_{nk} \delta_{ji} c_j \kappa_n(Y)$ . El terme  $-\kappa_n(Y)$  que apareix en totes les entrades de la diagonal ens dóna una bona raó per a esperar que aquest sistema resulti ben condicionat, encara que per a valors propis petits pot no ser suficient.

Ara tenim un sistema lineal la solució del qual són els coeficients de Bessel-Fourier de les formes de Maass  $f \in \mathcal{M}(\Gamma_0(q), \chi, \lambda)$

(llevat de l'error  $2[[\varepsilon]]$ ). Si prenem per  $V$  la matriu  $(\kappa M_0 \times \kappa M_0)$   $\tilde{V}_{nk}^{ji}$  i  $C$  denota el vector  $\kappa M_0$  de coeficients de Bessel-Fourier  $c_j(k)$ , aleshores podem escriure el sistema lineal com

$$VC = 0. \quad (4.9)$$

Observem que l'espai de les solucions d'aquest sistema per a un valor propi exacte de  $R$  és, al menys, un espai lineal de dimensió 1, per tant, per a aconseguir una solució única necessitem algun tipus de normalització.

## 4.4 Un algoritme de reducció

Atès que l'automorfia (4.5) té un paper important en l'algoritme, és crucial tenir una manera eficient de calcular els punts equivalents  $z^* \in \mathcal{F}_q$  d'un punt  $z \in \mathcal{H}$ .

Recordem que en el cas del grup modular  $\Gamma_0(1)$ , és fàcil fer l'algoritme de reducció al domini fonamental,

$$\mathcal{F}_1 = \{z = x + iy \in \mathcal{H} \mid |x| \geq \frac{1}{2}, |z| \leq 1\},$$

usant una seqüència alternada dels generadors  $S$  i  $T$ .

En lloc d'estendre aquest algoritme al cas de  $\Gamma_0(q)$ , usarem el fet que  $\Gamma_0(q)$  és un subgrup d'índex finit en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , tal com hem vist en 2.2.15.

Prenem  $\{V_j\}_{j=1}^{\nu_q}$  i  $\mathcal{F}_q = \bigcup V_j(\mathcal{F}_1)$  tal i com hem vist en la secció 2.2.4. Donat  $z \notin \mathcal{F}_q$  apliquem l'algoritme de reducció en  $\mathcal{F}_1$ ;  $\tilde{z} = T(z) \in \mathcal{F}_1$  amb  $T \in \Gamma_0(1)$ . Aleshores busquem l'índex  $j$  que fa  $T^{-1} \in \Gamma_0(q)V_j$ , i notem que  $V_jT \in \Gamma_0(q)$ . Per tant, l'algoritme de reducció a  $\Gamma_0(q)$  és donat per

$$z^* = V_jT(z) \in \mathcal{F}_q.$$

Això dona un algoritme de reducció per a  $\Gamma_0(q)$ .



# Formes d'ona de Maass. Implementació dels càlculs

---

## Càlcul de formes d'ona de Maass mitjançant l'algoritme de Hejhal.

### ■ Inicialització de parametres

Aquesta secció s'ha realitzat amb Mathematica 7.0. En aquest primer punt del fitxer hi ha les variables que que s'utilitzen en el programa. Aquí estan definides la simetria i la transl·lació. També hi ha definida una funció que defineix les homografies.

```
In[1]:= S = {{0, -1}, {1, 0}};
        T = {{1, 1}, {0, 1}};

In[3]:= ParametreLocalv0[z_] := 2 * Pi * Im[z] / (7 Abs[z]);
        ParametreLocalv1[z_] := 2 * Pi * Im[z];
        Homografia[G_, z_] := (G[[1]] * z + G[[2]]) / (G[[3]] * z + G[[4]]);
        kappa[z_, R_, m_] := Sqrt[Im[z]] * BesselK[I * R, ParametreLocalv1[z] * Abs[m]];
```

### ■ Calcul de classes laterals

Aquest algoritme esta compostat per tres parts. La primera usa els resultats de [Las02], que correspon a l'algoritme per a aconseguir conjunts de representants. Aquest algoritme està explicat en [Rem09].

```
In[7]:= Ms[q_] := (
  Omega = Table[GCD[q / Divisors[q], Divisors[q]]];
  EulerOmega = EulerPhi[Omega];
  As = Table[{1}, {i, 2, Length[Divisors[q]] - 1}];
  For[i = 2, i < Length[Divisors[q]] - 1,
    k = 1;
    While[
      Length[As[[i]]] < EulerOmega[[i]],
      k++;
      If[GCD[k, q / (Divisors[q][[i]])] == 1, As[[i]] = Union[As[[i]], {k}]];
    ];
    i++;
  MAS = Table[
    Divisors[q][[j]] * As[[j - 1]],
    {j, 2, Length[Divisors[q]] - 1};
  M = {};
  For[
    i = 1, i < Length[Divisors[q]] - 1,
    M = Union[M, MAS[[i]]];
    i++;
  ];
  Return[M];
)

In[8]:= Ns = {};
n[m_] := (k = 1;
  While[Mod[k * m^2, q] != 0,
    k++;
  Return[k]);
```

```

In[10]:= Wl[q_] := (
  T = {{1, 1}, {0, 1}};
  S = {{0, -1}, {1, 0}};
  M = S.Inverse[T];
  W = Union[{{1, 0}, {0, 1}}, Table[M = M.T, {j, 1, q}]];
  If[! PrimeQ[q],
    Waux1 = {};
    Waux2 = {};
    Msq = Ms[q];
    For[s = 1, s <= Length[Msq],
      Waux2 = {};
      Tn = {{1, Msq[[s]]}, {0, 1}};
      Aux = S.Tn.S;
      Waux2 = {Aux};
      For[l = 1, l < n[q],
        Aux = Aux.T;
        Waux2 = Union[Waux2, {Aux}];
        l++;
      ];
      Waux1 = Union[Waux1, Waux2];
      s++;
    ];
  ];
  W = Union[W, Waux1];
  Return[W]
)

In[11]:= Cosets = Wl[6];

```

## ■ Funcions de càlcul d' amplades

En aquesta secció definim les funcions que ens donen el càlcul de les amplades. La funció troba màxim i ens retorna l'índex del valor maxim d'un vector de valors. Aleshores, la funció TrobaColor coloreja el dibuix. Tas, és la funció principal que fa tot el proces.

```

In[12]:= Tas[p_, v_] := (
  Valors = Table [N[Im[Homografia[Flatten[v[[i]]], p]], {i, 1, Length[v]}];
  Return[TrobaMaxim[Valors, Max[Valors]]];
)

In[13]:= TrobaMaxim[v_, x_] := (
  aux = 0;
  For[i = 1, i <= Length[v], i++,
    If
      [v[[i]] == x,
        Return[i]];
  )

In[14]:= TrobaColor[n_] := (
  If[n == 1, Return[{1, 0, 0}]];
  If[n == 2, Return[{0, 1, 0}]];
  If[n == 3, Return[{0, 0, 1}]];
  If[n == 4, Return[{1, 1, 0}]];
  If[n == 5, Return[{1, 0, 1}]];
  If[n == 6, Return[{1, 1, 1}]];
)

```



## Reducció de punts al domini fonamental del grup $\Gamma_0(q)$

PosaDomini[x,m] és un procediment que el que fa és posar el punt x en el domini fonamental del grup  $\Gamma_0(1)$ . El paràmetre m és d'entrada la matriu identitat i de sortida és la matriu del grup modular que hem emprat per tal de portar el punt dintre. IndexarPoint[m] emprà la informació de la matriu m sortida de per tal de dir a quin conjunt de corepresentants pertany la matriu, i per tant en quina regió del domini fonamental caurà el punt que la creat. Finalment PosaDominiP[x,m] posa el punt dintre del domini fonamental corresponent.

```
In[15]:= PosaDomini[x_, m_] := (p = x; mm = m;
  While[ (
    (Abs[p] < 1)
    ||
    (Abs[Re[p]] > 1 / 2)
  ),
    If[Re[p] ≥ 1 / 2,
      p = p - 1; mm = Inverse[T].mm;];
    If[Re[p] ≤ -1 / 2,
      p = p + 1; mm = T.mm;];
    If[Abs[p] < 1,
      p = -1 / p; mm = S.mm;];];
  IndexarPoint[m_] := (
    j = n + 1;
    If[Mod[Flatten[m][[3]], n] != 0,
      j = 0;
      L = m;
      K = L;
      While[(Mod[Flatten[K][[3]], n] != 0),
        j++;
        K = Cosets[[j]].L;
      ]
    ];
    Return[j];
  )

In[17]:= PosaDominiP[x_, m_] :=
  (
    PosaDomini[x, m];
    IndexarPoint[mm];
    pestrella = Homografia[Flatten[Cosets[[j]]], p];
    Return[pestrella];
  )
```

### ■ Exemples de dominis fonamentals

Ara farem dos exemples de dominis fonamentals per a grups fuchsians del tipus  $\Gamma_0(n)$  amb  $n = 6$  i  $n = 7$ .

```
In[18]:= Q = 1000; n = 6;
  Cosets = {{{-1, -1}, {3, 2}}, {{-1, 0}, {2, -1}}, {{-1, 0}, {3, -1}}, {{0, -1}, {1, 0}},
    {{0, -1}, {1, 1}}, {{0, -1}, {1, 2}}, {{0, -1}, {1, 3}}, {{0, -1}, {1, 4}},
    {{0, -1}, {1, 5}}, {{1, 0}, {0, 1}}, {{1, 0}, {2, 1}}, {{1, 1}, {2, 3}}};

In[20]:= Serie = Table[(m - 1 / 2) * (1 / (2 * Q)) + I * 1 / 4, {m, 1 - Q, Q}];
  ZZetal = Serie;
  ZZetalTilde = Serie;

In[23]:= IdSerie = Table[{{1, 0}, {0, 1}}, {i, 1, Length[ZZetal1]};
  MapPoint = IdSerie;
```

```

In[25]:= For[i = 1, i <= Length[ZZeta1],
  PosadominiP[ZZeta1[[i]], IdSerie[[i]]];
  ZZeta1Tilde[[i]] = pestrella; MapPoint[[i]] = mm; i++]

In[26]:= ZZeta2 = Homografia[Flatten[S], Serie];
ZZeta2Tilde = Serie;
MapPoint2 = IdSerie;

In[29]:= For[i = 1, i <= Length[ZZeta2],
  PosadominiP[ZZeta2[[i]], IdSerie[[i]]];
  ZZeta2Tilde[[i]] = pestrella; MapPoint2[[i]] = mm; i++]

In[30]:= H = Table[{RGBColor[1 - i / Length[ZZeta2Tilde], i / Length[ZZeta2Tilde], 0],
  PointSize[0.003], Point[{Re[ZZeta2Tilde[[i]]], Im[ZZeta2Tilde[[i]]]}]},
  {i, 1, Length[ZZeta2Tilde] - 1}];
J = Table[{RGBColor[1 - i / Length[ZZeta1Tilde], i / Length[ZZeta1Tilde], 0],
  PointSize[0.003], Point[{Re[ZZeta1Tilde[[i]]], Im[ZZeta1Tilde[[i]]]}]},
  {i, 1, Length[ZZeta1Tilde] - 1}];

In[32]:= HorusH = Show[Graphics[H], PlotRange -> All];
HorusJ = Show[Graphics[J], PlotRange -> All];

In[34]:= MD = Table[0, {i, 1, 3}];

In[35]:= MD = {
  Table[1 / 2 + (Cos[Pi / 6] + k / 10) * I, {k, 0, 1500}],
  Table[-1 / 2 + (Cos[Pi / 6] + k / 10) * I, {k, 0, 1500}],
  Table[Sin[-Pi / 6 + k * Pi / 150] + I * Cos[-Pi / 6 + k * Pi / 150], {k, 0, 50}];

In[36]:= MS = Table[Homografia[Flatten[Cosets[[j]]], MD[[i]],
  {j, 1, Length[Cosets]}, {i, 1, Length[MD]}];

In[37]:= Llistes = Table[{Re[MS[[j]][[k]][[i]]], Im[MS[[j]][[k]][[i]]]},
  {j, 1, Length[Cosets]}, {k, 1, Length[MD]}, {i, 1, Length[MS[[j]][[k]]]}];

In[38]:= Bores6 = Table[
  ListPlot[Llistes[[i]][[j]], PlotRange -> {{-0.75, 0.75}, {0, 2}}, PlotJoined -> True,
  PlotStyle -> {PointSize[0.001]}, {i, 1, Length[Cosets]}, {j, 1, Length[MD]}];

In[39]:= Show[Bores6, Graphics[HorusJ]];

In[40]:= MD = Table[0, {i, 1, 3}];
n = 7;

In[42]:= M = S.Inverse[T].Inverse[T].Inverse[T].Inverse[T];

In[43]:= Clear[Cosets]

In[44]:= Cosets = Union[{{1, 0}, {0, 1}}, Table[M = M.T, {j, 1, n}]];

In[45]:= Cosets

Out[45]= {{{0, -1}, {1, -3}}, {{0, -1}, {1, -2}}, {{0, -1}, {1, -1}}, {{0, -1}, {1, 0}},
  {{0, -1}, {1, 1}}, {{0, -1}, {1, 2}}, {{0, -1}, {1, 3}}, {{1, 0}, {0, 1}}}

In[46]:= MD = {
  Table[1 / 2 + (Cos[Pi / 6] + k / 10) * I, {k, 0, 1500}],
  Table[-1 / 2 + (Cos[Pi / 6] + k / 10) * I, {k, 0, 1500}],
  Table[Sin[-Pi / 6 + k * Pi / 150] + I * Cos[-Pi / 6 + k * Pi / 150], {k, 0, 50}];

In[47]:= MS = Table[Homografia[Flatten[Cosets[[j]]], MD[[i]],
  {j, 1, Length[Cosets]}, {i, 1, Length[MD]}];

In[48]:= Llistes = Table[{Re[MS[[j]][[k]][[i]]], Im[MS[[j]][[k]][[i]]]},
  {j, 1, Length[Cosets]}, {k, 1, Length[MD]}, {i, 1, Length[MS[[j]][[k]]]}];

```

```
In[49]:= Bores7 = Table[
  ListPlot[Llistes[[i]][[j]], PlotRange -> {{-0.75, 0.75}, {0, 2}}, PlotJoined -> True,
  PlotStyle -> {PointSize[0.001]}, {i, 1, Length[Cosets]}, {j, 1, Length[MD]};
In[50]:= Show[Bores7];
```

### ■ Exemples de càlcul de pròximitat de les puntes

Per tal de clarificar que vol dir pròximitat en les puntes, en aquest apartat dibuixarem un conjunt de regions de colors, on cada valor representarà els conjunts propers per a cada punta. Començarem amb el cas d' un conjunt de puntes de Gamma0 (6).

```
In[51]:= S1 = {{1, 0}, {0, 1}};
S2 = {{0, -1 / Sqrt[6]}, {Sqrt[6], 0}};
S3 = {{-Sqrt[2], -1 / Sqrt[2]}, {3 Sqrt[2], -2 / Sqrt[2]}};
S4 = {{-Sqrt[3], -1 / Sqrt[3]}, {2 Sqrt[3], -1 / Sqrt[3]}};
In[55]:= Sigma = {S1, S2, S3, S4};
In[56]:= SigmaInverse = Table[Inverse[Sigma[[i]]], {i, 1, Length[Sigma]};
In[57]:= PuntaNE = Inverse[Sigma[[4]].{1, -1}, {0, 1}];
In[58]:= Sigma6 = Union[{PuntaNE}, SigmaInverse];
In[59]:= VertexProper = Table[
  {p = -1 / 2 + j / 100 + I * (k / 50), Tas[p, Sigma6]}, {j, 1, 100}, {k, 1, 100}};
In[60]:= VP = Flatten[VertexProper, 1];
In[61]:= VPPlot6 = Table[{RGBColor[TrobaColor[VP[[i]][[2]]],
  Point[{Re[VP[[i]][[1]]], Im[VP[[i]][[1]]]}]}, {i, 1, Length[VP]};
In[62]:= Show[Bores6, Graphics[VPPlot6];
```

El dibuix corresponent esta més endavant. Ara considerarem el grup fuchsà Gamma0 (7), que també té el seu dibuix més endavant.

```
In[63]:= Sigma7 = {{{1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1 / Sqrt[7]}, {Sqrt[7], 0}}}
Out[63]= {{{{1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1 / Sqrt[7]}, {Sqrt[7], 0}}}}
In[64]:= VertexProper = Table[
  {p = -1 / 2 + j / 100 + I * (k / 50), Tas[p, Sigma7]}, {j, 1, 100}, {k, 1, 100}};
In[65]:= VP = Flatten[VertexProper, 1];
In[66]:= VPPlot7 = Table[{RGBColor[TrobaColor[VP[[i]][[2]]],
  Point[{Re[VP[[i]][[1]]], Im[VP[[i]][[1]]]}]}, {i, 1, Length[VP]};
In[67]:= Show[Bores7, Graphics[VPPlot7];
```

### ■ Càlcul de punts per al sistema lineal (cas q = 7)

Inicialització de la serie. Considerarem com abans, que  $Y = 1/25$ , i que el nombre de punts a considerar és, per dir un número  $s = 30$ .

```
In[68]:= Y = 1 / 25;
s = 30;
In[70]:= Z = Table[(m - 1 / 2) * (1 / (2 * s)) + I * Y, {m, 1 - s, s};
```

```
In[71]:= ZPunts = Table[{RGBColor[1, 0, 0], Point[{Re[Z[[i]]], Im[Z[[i]]]}]}, {i, 1, Length[Z]}];
```

Series on s'aplicat les funcions normalitzadores de les puntes.

```
In[72]:= ZId = Homografia[Flatten[Sigma7[[1]]], Z];
ZSm = Homografia[Flatten[Sigma7[[2]]], Z];
```

```
In[74]:= SerieSmPunts =
Table[{RGBColor[0, 0, 0], Point[{Re[ZSm[[i]]], Im[ZSm[[i]]]}]}, {i, 1, Length[Z]}];
```

Inicialitzacions auxiliar per a posar els punts dintre del domini fonamental i aplicar l'algorisme de reducció.

```
In[75]:= IdSerie = Table[{{1, 0}, {0, 1}}, {i, 1, Length[Z]}];
MapPoint = IdSerie;
```

```
In[77]:= ZIdDomini = PosadominiP[ZId, IdSerie];
ZSmDomini = PosadominiP[ZSm, MapPoint];
```

```
In[79]:= For[i = 1, i <= Length[ZId],
PosadominiP[ZId[[i]], IdSerie[[i]]];
ZIdDomini[[i]] = pestrella; MapPoint[[i]] = mm; i++];
For[i = 1, i <= Length[ZSm],
PosadominiP[ZSm[[i]], IdSerie[[i]]];
ZSmDomini[[i]] = pestrella; MapPoint[[i]] = mm; i++];
```

```
In[81]:= ZIdDmPunts = Table[{RGBColor[0, 0, 0],
Point[{Re[ZIdDomini[[i]]], Im[ZIdDomini[[i]]]}]}, {i, 1, Length[Z]}];
ZSmDmPunts = Table[{RGBColor[0, 0, 0], Point[{Re[ZSmDomini[[i]]], Im[ZSmDomini[[i]]]}]},
{i, 1, Length[Z]}];
Show[Bores7, Graphics[ZIdDmPunts], Graphics[VPPlot7]];
Show[Bores7, Graphics[ZSmDmPunts], Graphics[VPPlot7]];
```

```
In[85]:= ProximIdDm = Table[Tas[ZIdDomini[[i]], Sigma7], {i, 1, Length[ZIdDomini]]}
```

```
Out[85]= {2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2}
```

```
In[86]:= ProximSmDm = Table[Tas[ZSmDomini[[i]], Sigma7], {i, 1, Length[ZIdDomini]]}
```

```
Out[86]= {1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1}
```

Fins aquí, segons les notacions anteriors, el nombre 2 correspon a la punta 0 i el nombre 1 correspon a la punta de l'infinit.

```
In[87]:= II[m_, j_] := If[j == 1, ProximIdDm[m], ProximSmDm[m]];
```

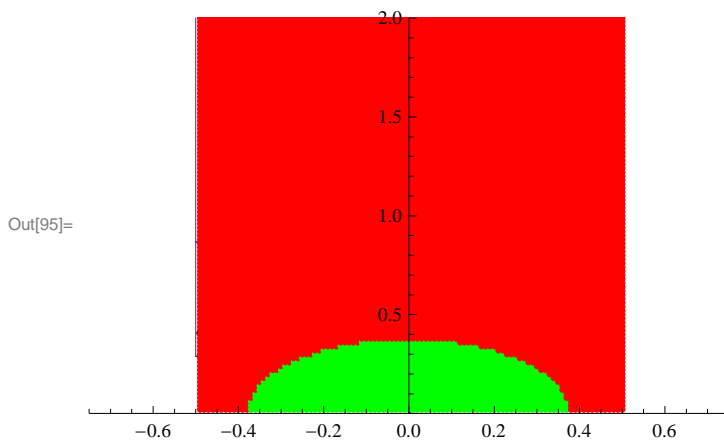
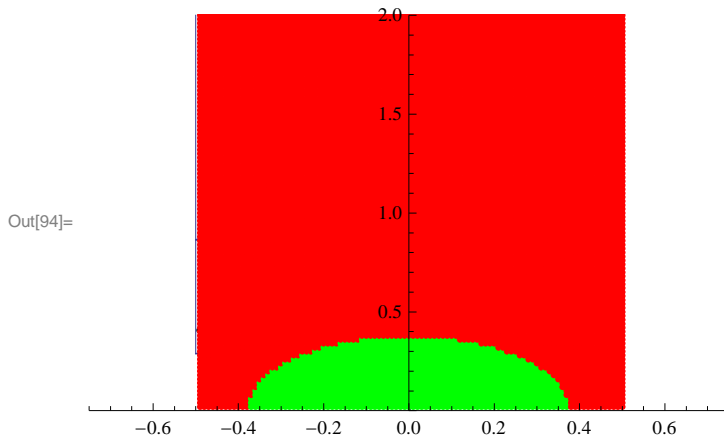
```
In[88]:= ZetaStarId = Table[Homografia[Flatten[Inverse[Sigma7[[II[i, 1]]]]], ZIdDomini[[i]],
{i, 1, Length[ZIdDomini]}];
```

```
In[89]:= ZetaStarSm = Table[Homografia[Flatten[Inverse[Sigma7[[II[i, 2]]]]], ZSmDomini[[i]],
{i, 1, Length[ZSmDomini]}];
```

```

In[90]:= ZIdStarPuntsFlatten = Flatten[ZetaStarId, 1];
ZSmStarPuntsFlatten = Flatten[ZetaStarSm, 1];
ZIdEstrellaPunts = Table[{RGBColor[0, 0, 0],
  Point[{Re[ZIdStarPuntsFlatten[[i]]], Im[ZIdStarPuntsFlatten[[i]]]}],
  {i, 1, Length[ZIdStarPuntsFlatten]}}];
ZSmEstrellaPunts = Table[{RGBColor[0, 0, 0],
  Point[{Re[ZSmStarPuntsFlatten[[i]]], Im[ZSmStarPuntsFlatten[[i]]]}],
  {i, 1, Length[ZSmStarPuntsFlatten]}}];
Show[Bores7, Graphics[ZIdEstrellaPunts], Graphics[VPPlot7]]
Show[Bores7, Graphics[ZSmEstrellaPunts], Graphics[VPPlot7]]

```



## ■ Plantejament i resolució del sistema lineal (cas $q = 7$ )

```
In[96]:= ? kappa
```

Global`kappa

```
kappa[z_, R_, m_] :=  $\sqrt{\text{Im}[z]}$  BesselK[i R, ParametreLocalv1[z] Abs[m]]
```

```
In[97]:= R = 1.92464430511;
M0 = s;
```

```
In[99]:= CoeficientsEsquerraIgualtatAux = Table[kappa[I + Y, R, n], {n, -M0, M0}];
CoeficientsEsquerraIgualtat =
  DeleteCases[CoeficientsEsquerraIgualtatAux, Indeterminate];
CoeficientsEsquerraAux = {CoeficientsEsquerraIgualtat, CoeficientsEsquerraIgualtat};
CoefEsquerraF = Flatten[CoeficientsEsquerraAux];
MatrixCE = IdentityMatrix[4 * M0] * CoefEsquerraF;
```

```

In[104]:= XX[m_, j_] := Re[ If[j == 1, ZetaStarId[m], ZetaStarSm[m]]];
YY[m_, j_] := Im[If[j == 1, ZetaStarId[m], ZetaStarSm[m]]];
ZZ[m_, j_] := If[j == 1, ZetaStarId[m], ZetaStarSm[m]];
X[m_] := Re[Z[m]];

In[108]:= SumantAux[j_, m_, k_, n_] :=
  kappa[ZZ[m, j], R, k] * Exp[2 * Pi * I * k * XX[m, j]] * Exp[-2 * Pi * I * n * X[m]];

In[109]:= ProximPunta = {ProximIdDm, ProximSmDm};

In[110]:= SumantF[i_, j_, m_, k_, n_] := If[ProximPunta[[j]][[m]] == i, SumantAux[j, m, k, n], 0]

In[111]:= VSNormalitzar[j_, i_, n_, k_] := Sum[SumantF[i, j, m, k, n], {m, 1, Length[Z]}]

In[112]:= V[j_, i_, n_, k_] := (1 / (2 * M0)) * VSNormalitzar[j, i, n, k];

In[113]:= IndexosAux = Table[i, {i, -M0, M0}];
Indexos = DeleteCases[IndexosAux, 0];

In[115]:= MatrixSistema = Table[
  V[
    IntegerPart[(k - 1) / (Length[Indexos])] + 1,
    IntegerPart[(n - 1) / (Length[Indexos])] + 1,
    If[Mod[k, Length[Indexos]] == 0,
      Length[Indexos] / 2, Indexos[[Mod[k, Length[Indexos]]]],
    If[Mod[n, Length[Indexos]] == 0, Length[Indexos] / 2,
      Indexos[[Mod[n, Length[Indexos]]]]
  ],
  {k, 1, 2 * Length[Indexos]},
  {n, 1, 2 * Length[Indexos]}
];

In[116]:= MatrixForm[MatrixSistema];

In[117]:= MatrixHomogenia = MatrixSistema - MatrixCE;

In[118]:= MatrixHomogeniaTallada = Table[MatrixHomogenia[[i + 1]][[j + 1]],
  {i, 1, 2 * Length[Indexos] - 1}, {j, 1, 2 * Length[Indexos] - 1}];

In[119]:= TermesIndependents = Table[MatrixHomogenia[[j + 1]][[1]], {j, 1, 2 * Length[Indexos] - 1}];

In[120]:= Solus7 = LinearSolve[MatrixHomogeniaTallada, -TermesIndependents];

In[121]:= SolusR7 = Re[Solus7];

In[122]:= MatrixForm[SolusR7 / SolusR7[[M0]]]

```

Out[122]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.146037 \\ -0.749243 \\ 1.15158 \\ 1.01446 \end{pmatrix}$$

```
0.93693
-0.211901
-1.16236
-0.503115
-0.306087
0.209731
-0.548793
-0.49341
0.421522
1.1671
0.210794
0.505834
-0.811312
-0.625829
0.384721
-0.355133
0.369563
-0.283111
-0.37796
1.06179
0.265533
-0.788296
-0.794005
1.33727
-0.999999
1.
-1.33727
0.794005
0.788296
-0.265533
-1.06179
0.37796
0.283112
-0.369564
0.355132
-0.384718
0.625826
0.811312
-0.505834
-0.210795
-1.16709
-0.421526
0.493402
0.548804
-0.209733
0.306089
0.50311
1.16233
0.211955
```

```
-0.936949  
-1.01447  
-1.15158  
0.749172  
-0.145872  
0.563902  
0.563939  
-0.145323  
0.749281  
-1.15188  
-1.01463  
-0.936797  
0.212087  
1.16228  
0.503012  
0.306106  
-0.209678  
0.548808  
0.493372  
-0.421541  
-1.16707  
-0.210781  
-0.505841  
0.811302  
0.625828  
-0.384712  
0.355133  
-0.369568  
0.283111  
0.377962  
-1.06179  
-0.265534  
0.788294  
0.794006  
-1.33726  
1.  
-0.999999  
1.33727  
-0.794004  
-0.788298  
0.265532  
1.06179  
-0.377958  
-0.283112  
0.369559  
-0.355132  
0.384726  
-0.625827  
-0.81132
```



```
0.505826  
0.210807  
1.16712  
0.421505  
-0.493438  
-0.548787  
0.209783  
-0.306072  
-0.503206  
-1.16241  
-0.211771  
0.937069  
1.01429  
1.15128  
-0.749104  
0.1466  
-0.563939
```

# Bibliografia

- [Atl70] Atkin, A.O.L., Lehner, J.; Hecke operators on  $\Gamma_0(m)$ . *Math. Ann.*, 185(1970), 134–160.
- [Bay09] Bayer, P.: Funcions període per a formes d'ona de Maass. p. 105 - 140. *Monogràfic sobre treballs de Don Zagier*. Notes del STNB 18, 2009. ISBN: 978-84-934244-8-0.
- [Hej83] Hejhal, D. A.: *The Selberg Trace Formula for  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$* , Vol. 2. Lecture Notes in Mathematics, vol 1001, Springer-Verlag, 1983.
- [Hej99] Hejhal, D. A.: *On eigenfunctions of the Laplacian for Hecke triangle groups*, Emergin applications of number theory (D. Hejhal, J. Friedman, et al., eds.), IMA Vol. Math. Appl., vol. 109, Springer, New York, 1999, pp. 291-325.
- [Hej01] Hejhal, D. A., Strömbergsson, A.; On quantum chaos and Maass waveform of CM-Type. *Foundations of Physics*, 31(2001), no 3, 519-533.
- [Iwa02] Iwaniec, H.: *Spectral methods of automorphic forms*. Graduate Studies in Mathematics, 53, 1997. ISBN: 0-8218-3160-7.

- [Iwa97] Iwaniec, H.: *Topics in classical automorphic forms*. Graduate Studies in Mathematics, 17, 1997. ISBN: 0-8218-0777-3.
- [Kat92] Katok, S.; *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press, USA 1992. ISBN: 0-226-42583-5.
- [Las02] Lascurain, A.: Some presentations for  $\bar{\Gamma}_0(N)$ . *Conformal Geometry and Dynamics* 6(2002), 33–60.
- [Miy76] Miyake, T.; *Modular Forms*. Springer-Verlag. Berlin, 1976. ISBN: 3-540-50268-8.
- [Ora88] Oram Brigham, E.: *The Fast Fourier Transform and its applications*. Prentice Hall Signal Processing Series, USA, 1988. ISBN: 0-13-307505-2.
- [Shi67] Shimura, G.; *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Princeton University Press, Princeton 1967. ISBN: 0-691-08092-5.
- [Str05] Strömberg, F.: *Computational aspects of Maass Waveforms*. Uppsala Dissertations in Mathematics 39. Uppsala. ISBN: 91-506-1794-X.
- [Str00] Strömbergsson, A.: *An application of an explicit trace formula to a well-know spectral correspondence on quaternion groups*, April 2000, preprint.
- [Wat66] Watson, G.N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press. Cambridge, 1966. ISBN: 0-521-06743-X.
- [Whi46] Whittaker, E.T; Watson, G.N: *A course of Modern Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge, 1946. ISBN: 0-521-58807-3.