ELEMENTOS CRISIPIANOS EN ALGEBRAS D-COMPLETAS Y ALGEBRAS DE SALES.

Por Antonio Torrens Torrell. Departamento de Estadística Matemática de la Facultat de Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

RESUMEN:

El autor estudia los elementos de comportamiento clásico, o crisipianos, en álgebras d-completas (introducidas por el mismo como el sustrato algebraico de las lógicas completas) y en âlgebras de Sales (sustrato algebráico de las lógicas multivaloradas). Da caracterizaciones de estos elementos en ambos casos. Estudia la relación de dichos elementos con los espectros irreducible, primo i completamente irreducible. Además obtiene que el conjunto de elementos crisipianos de un álgebra de Sales es una subálgebra y es un álgebra de Abbott (o de implicación).

ELEMENTS CRISIPIANS EN ALGEBRES D-COMPLETES I ALGEBRES DE SALES

Per Antoni Torrens Torrell. Departament d'Estadística Matemàtica de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

En [11] s'introdueixen les àlgebres d-cmpletes com el sustracte algebraic de les lògiques que donen lloc els sistemes deductius complets [J Pla]. L'interes d'aquestes lògiques ve donat pel fet que inclouen a les lògiques clàssiques i a les lògiques multivaluades. Les àlgebres de Sales són les àlgebres d- completes amb un suprem que s'obté de la implicació.

El objecte d'aquest treball es l'estudi dels elements, d'aquestes àlgebres, que tenen un comportament clàssic, i els anomenem crisipians.

1.- Elementes crisipians en àlgebres d-completes.

En tot el treball per (A,.,u) entendrem un conjunt A, nobuit, amb una operació binària ., i un element distingit u de A.

Definició 1.-

Direm que (A,.u) és un àlgebra d-completa quan:

per tot $a,b,c \in A$, es satisfà:

1.- $a.a = u$

2.- $a.b = u$ i $b.a = u$, impliquen $a=b$

3.- $(a.b).((c.a).(c.b)) = u$

4.- $a.(b.c) = b.(a.c)$

La definició anterior és equivalent a que $\{u\}$ sigui un Sitema deductiu complet. (J.Pla [4]).

El caracter no clàssic de les àlgebres d-completes ve donat pel Principi de la Deducció Feble ([11] , J.Pla[4]). Si $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(A)$, és el conjunt de tots els sistemes deductius de (A,.,u)($D \in \mathcal{D}$, sii $a, a.b \in D$ implica $b \in D$, i $u \in D$), que és un sistema clausura de operador conseqüència asociat K, aleshores:

TEOREMA 1.- ([11])

Per tot $a,b \in A$ i $X \subseteq A$, és cumpleix:

$b \in K(X \cup \{a\})$ si, i només si, existeix $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tal que $a^n.b \in K(X)$.

On $a^n.b = a.(a.(\overset{n}{\ldots}.(a.b))$

Com que $(A,.,u)$ és un àlgebra implicativa, A esta ordenat(H.Rasiowa [6])segons la relació : $a \leq b$ sii $a.b = u$, i a més $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, on $\mathcal{F}$ representa al conjunt dels filtres d'order de $(A, \leq)$.

$\mathcal{F}$ es un sistema clausura d'operador consequència asociat F.

Propietats - [11]

En un àlgebra d-completa es satisfà:

1.- u és l'element màxim de $(A, \leq)$

2.- Si $a \leq b$, aleshores $a.c \geq b.c$ i $c.a \leq c.b$, per tot $c \in A$

3.- $a.(b.a) = u$

4.- $(a.b).((b.c).(a.c)) = u$

5.- Si $a.b = u$ per tot $b \in A$, aleshores $a = u$

7.- pertot $n \in \mathbb{N}$, $a^n.(b.c) = b.(a^n.c)$

8.- $F(\{a\}) = D(\{a\})$

Per tot $a,b,c \in A$.

Els elements de comportament clàssic de $(A,.,u)$ venen donats per:

TEOREMA 2.-

Si $a \in A$, les següents condicions són equivalents:

(i) per tot $b \in A$, $a.b = u$ si, i només si, $a^2.b = u$

(ii) per tot $b \in A$, $a.b = a^2.b$

(iii) $F(\{a\}) = K(\{a\})$

(iv) per tot b,c A, $a.(b.c) = (a.b).(a.c)$

En efecte:

(i) sii(iii), es obvi, donat que $a.b = u$, sii, $a \leq b$, sii $b \in F(\{a\})$

(i) implica (ii), $u = (a^2.b).(a^2.b) = a^2.((a^2.b).b)$ y aleshores

$u = a.((a^2.b).b)) = (a^2.b).(a.b)$, per tant $a^2.b \leq a.b$

l'altra desigualtat es satisfà sempre.

(ii) implica (iv), $a.(b.c) \leq a((a.b).(a.c)) = a.(a.((a.b).c)) =$

$= a.((a.b).c) = (a.b).(a.c) \leq b.(a.c) = a.(b.c)$

(iv) implica (i), $u = a^2.b = a.(a.b) = (a.a).(a.b) = u.(a.b)$
$= a.b$

Anomenem <u>element crisipià</u> de $(A,.,u)$ a tot element de A que satisfà una de les condicions del Teorema anterior. $\mathscr{C}(A)$ representa al conjunt de tots els elements crisipians de$(A,.,u)$. Es clar que si $\mathscr{C}(A) = A$, $(A,.,u)$,en virtut de (iv), es un àlgebra de Hilbert(A.Diego [1], Monteiro [3], J.Plà [5], F.A.Sales [7] [8] B.Verdu [12]), i reciprocament, un algebra de Hilbert es un àlgebra d-completa , tal que $\mathscr{C}(A) = A$.

En un àlgebra d-completa el conjunt dels sistemes deductius s'identifica amb el conjunt de les congruencies de $(A,.,u)$ ([11] H.Rasiowa [6]). Si $D \in \mathscr{D}$, la congruencia que defineix D ve donada per: $a \sim_D b$, sii $a.b \in D$ i $b.a \in D$.

El comportament de tot crisipià respecte al espectre irreductible (Spi(A)), o conjunt de sistemes deductius irreductibles per la intesecció en $\mathscr{D}$, ve donat pel següent resultat:

<u>TEOREMA</u> 3.-

Si $a \in A$ es tal que per tot $D \in Spi(A)$, $a \notin D$ implica que en A/D la classe de representat a $(\bar{a})$ es mínima, aleshores $a \in \mathscr{C}(A)$.

En efecte:

Sigui $D \in Spi(A)$:

-si $a \in D$, ales_hores per tot $b \in A$ $a \leq (a^2.b).(a.b)$, per tant $(a^2.b).(a.b) \leq D$

- si $a \notin D$, aleshores per tot $b \in A$ $\bar{a}.\bar{b} = u$, per tant $a.b \in D$ i com que $a.b \leq (a^2.b).(a.b)$, tenim $(a^2.b).(a.b) \in D$.

Aixi doncs en tot cas i pertot $b \in A$ $(a^2.b).(a.b) \in D$,per tot D de Spi(A), això es $(a^2.b),(a.b) \in \bigcap_{D\ Spi(A)} D$.

Com que K es finitari, Spi(A) es una base de $\mathscr{D}$,(B.Verdu [12] Brown-Suszko [13]), tenim $\bigcap_{D\ Spi(A)} D = K(\emptyset) = \{u\}$, pertant $(a^2.b).(a.b) = u$

El reciproc en general no és cert, ja que és conegut que en un àlgebra de Hilbert tot element és crisipià, en canvi no tot quocient per un sistema deductiu irreductible dona dues classes. Un reciproc parcial ve donat per:

TEORAMA 4.-

Si $a \in \mathscr{C}(A)$, i $a \neq u$, es satisfà:

Per tot $M \in \mathscr{D}$, M màximal en $\mathscr{D}$ i propi, i $a \notin M$, en A/M la classe de representant a ($\bar{a}$) es mínima.

En efecte:

Si M és màximal i $a \notin M$, per tot $b \notin M$, $b \in K(M \cup \{a\})$, aleshores, pel Teorema 2, existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n.b \in M$ i com que $a \in \mathscr{C}(A)$, $a.b \in M$, per tant $\bar{a}.\bar{b} = u$ en A/M.

Es clar que $u \in \mathscr{C}(A)$ i que si $(A, \leq)$ te minim 0, aleshores $0 \in \mathscr{C}(A)$

2.- Elements crisipians en àlgebres de Sales.

Definició 2.-([11] [10])

Direm que (A,.,u) es un <u>àlgebra de Sales</u> quan:

1.- (A,.,u) és un àlgebra d-completa

2,- Per tot $a,b \in A$, $(ab).b = (b.a).a$

Es demostra (cf [11], A.Rodriguez [10]) que un àlgebra de Sales és un supra-recticle d-complet, amb $a \vee b = \sup(a,b) = (a.b).b$, respecte a l'ordre que induceix l'operació.

En aquestes algebres en el Teorema 2 poden afegirse condicions

TEOREMA 5.-

En un algebra de Sales (A,.,u), si $a \in A$, les següents condicions són equivalents:

(v) $a \in \mathscr{C}(A)$

(vi) per tot $b \in A$, $(a.b).a = a$

(vii) per tot $b \in A$, $a \vee (a.b) = u$

En efecte:

(v) implica (vi), Si $a \in \mathscr{C}(A)$ i $b \in A$, aleshores $u = (a.(a.b)).(a.b)$ per tant $u = ((a.b).a).a$, per tant $((a.b).a \leq a$.

(vi)implica (vii), ja que $(((a.b).a).a) = (a.b) \vee a$

(vii) implica (v), $u = ((a.b).a).a = (a.(a.b)).(a.b) = (a^2.b).(a.b)$

Les condicions anteriors ens permeten demostrar el següent Teorema, que generalitza un resultat ja conegut(A.Rodriguez [10])

TEOREMA 6.-

Si $(A,.,u)$ es un àlgebra de Sales,

- $(\mathscr{C}(A),.,u)$ es una subàlgebra de $(A,.,u)$
- $(\mathscr{C}(A),.,u)$ es un àlgebra de Abbott (o d'implicació)

En efecte:

- Per veure que $(\mathscr{C}(A),.,u)$ es una subàlgebra, donat que $u \in \mathscr{C}(A)$ n'hi ha prou en demostrar que $\mathscr{C}(A)$ és tancat per l'operació.

  Si $a,b \in \mathscr{C}(A)$, i $c \in A$, aleshores

  $$((a.b).c).(a.b) = a.(((a.b).c).b) = (a.((a.b).c)).(a.b) =$$
  $$= ((a^2.b).(a.c)).(a.b) = ((a.b).(a.c)).(a.b) =$$
  $$= (a.(b.c)).(a.b) = a.((b.c).b) = a.b\ ,$$

  segons el Teorema 6 $a.b \in \mathscr{C}(A)$.
- Donat que $(\mathscr{C}(A),.,u)$ és un àlgebra d-completa i que $\mathscr{C}(\mathscr{C}(A)) = \mathscr{C}(A)$ aleshores $(\mathscr{C}(A),.,u)$ és un àlgebra de Hilbert, i com que per tot $a,b \in \mathscr{C}(A)$ $(a.b).a = a$, és un àlgebra de Abbott.

Es conegut que en tot supra-reticle d-complet l'espectre irreductible i l'espectre primer coincideixen (cf [11]).El comportament de tot element crisipià respecta al espectre primer ve donat per la següent caracterització

TEOREMA 7.-

En un àlgebra de Sales $(A,.,u)$, es satisfà:

$a \in \mathscr{C}(A)$ si, i només si, per tot $D \in Spi(A)$, $a \notin D$ implica que en A/D la classe de representant a $(\bar{a})$ es mínima.

En efecte:

- Si $a \in \mathscr{C}(A)$ i $a \notin D \in Spi(A)$, aleshores $a \vee a.b = u \in D$, per tant $a.b \in D$, això es $\bar{a}.\bar{b} = \bar{u}$ en A/D.

- El reciproc ve donat pel Teorema 3.-

Per esser un sitema clausura fortament inductiu, la base mes petita de $\mathcal{D}$ ve donada pel espectre completament irreductible(Spci(A)), o conjunt de sistemes deductius completament irreductibles respecte la intersecció en $\mathcal{D}$, Es conegut que un element de $\mathcal{D}$, D, es de Spci(A) si, i només si, existeix un $x \in A$, tal que D es maximal entre els sitemes deductius que no contenen a x.

El comportament de un element crisipia respecte al Spci(A) ve donat per:

TEORAMA 8.-

Si $a \in \mathcal{C}(A)$, $a \neq u$ aleshores tot sistema deductiu màximal entre els que no contenen a a, es màximal en $\mathcal{D}$.

En efecte:

Sigui Ma un màximal entre els que no contenen a a, si $b \notin$ Ma, aleshores $a \in K(Ma \cup \{b\})$. D'altra banda com que Ma és irreductible pel Teorema 7 $a.b \in$ Ma, aleshoers $b \in K(Ma \cup \{a\})$ per tot $b \in$ Ma, aleshores $K(Ma \cup \{a\}) \subset K(Ma \cup \{a\})$ $K(Ma \cup \{b\}) \subset K(Ma \cup \{a\})$, per l'arbitrarietat de b tenim que si $b, c \notin$ Ma, aleshores $K(Ma \cup b) = K(Ma \cup c)$ i per tant Ma es màximal.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.Diego, Sur les algébres de Hilbert. Gauthier-Villars.Pa Paris. 1966.

[2] J.M.Font. Estudi d'algunes propietats de les funcions coneCtives sobre un sistema formal. Tesi de licenciatura Universitat de Barcelona. 1977.

[3] A.Monteiro. Sur le calcul propotionel implicatif positif. 1960

[4] J.Pla. Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes logics deductius=Tesi Doctoral. Barcelona.

[5] J.Pla Sobre àlgebrae de Hilbert. Cursos monografics de doctorat. Universitat de Barcelona. 1976-77-78.

[6] H.Rasiowa. An Algebraic Aproach to non clasical logics. North-Holland.1974.

[7] F.A.Salses. Operaciones ordenadoras y àlgebras de Hilbert R.A.M.E. 1971.

[8] F.A.Sales. Algebras de Hilbert. Curs monografic de doctorat. Universitat de Barcelona 1973.

[9] F.A.Sales. Sistemas deductivos. Ibid.1974

[10] A.Rodriguez. Tesi doctoral en elaboració.Universitat de Barcelona

[11] A.Torrens. Tesi Doctoral en elaboració. Universitat de Barcelona.

[12] B.Verdu.Contribució a l'estudi de certs tipus de lògiques abstractes. Tesi doctoral.Universitat de Barcelona 1978.