



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

**ALTES CAPACITATS MATEMÀTIQUES A
L'AULA DE SECUNDÀRIA**

Lidia Fos Rodríguez

Director: Sergi Muria Maldonado
Realitzat a: Departament de
Matemàtica Aplicada i
Anàlisi. UB

Barcelona, 24 de juny de 2013

Abstract

This final project represents the end of my studies in Mathematics and the beginning of my professional career which I would like to focus on teaching.

The title of the project is “Altes capacitats matemàtiques a l’aula de secundària” (High mathematic skills at the Secondary School). Its general objective is the creation of a proposal for action to enhance the mathematical talent of students with high mathematical skills.

This general objective can be divided into four other objectives which are more specific:

- To know all those laws related to the educational diversity of the students, especially according to high mathematical skills.
- To learn about programs and activities that currently exist to enhance the mathematical talent in Catalonia, Spain and other countries like France, Russia and the United States.
- To have a real view of the different situations found in a classroom, programs and activities listed above.
- To develop a proposal to give support to teachers with all the necessary material and resources that could be used in a classroom with students with high mathematical skills.

First, I wanted to know how it raises attention to diversity in respect of law, and how exactly are defined “high skills”

Second, I have made a comparative search of programs and activities that promote mathematical talent in Catalonia, Spain and other countries like France, Russia and the United States.

Third, I prepared some questionnaires which were addressed to people involved in the mathematical teaching in high schools. These questionnaires let me understand the real situation from the current practice with students with high mathematical skills.

Finally, I have developed a proposal for action to be applied in class and to enhance the mathematical talent of students with high mathematical skills.

I firmly consider that this project will be useful when dealing with high mathematical skills in Secondary Schools’ classrooms.

Índex

1. Introducció i antecedents	1
2. Definició d'objectius i motivació del problema	2
3. Metodologia, desenvolupament i resultats	3
3.1. Recerca	3
3.1.1. Lleis educatives i altes capacitats	3
3.1.2. Detecció de l'alumnat amb altes capacitats	4
3.1.3. Programes existents	5
3.1.3.1. Projectes a Catalunya	5
3.1.3.2. Projectes a Espanya	8
3.1.3.3. Projectes fora d'Espanya	8
3.2. La visió del professorat	10
3.3. Proposta d'actuació	21
3.3.1. Estructura inicial	22
3.3.2. Divulgació i promoció del projecte	23
3.3.3. Material i activitats	24
3.3.4. Recursos propis	25
4. Concordança de resultats i objectius	33
5. Conclusió	34
6. Bibliografia	35
7. Annexos	39

1. Introducció i antecedents

Sóc estudiant del Grau de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona i actualment estic cursant el darrer semestre, que inclou la confecció del Treball Final de Grau.

Des que tinc record, sempre he volgut ser professora de matemàtiques. A l'hora de triar quina carrera universitària volia fer, m'agradaven moltes, tenia clar a què em volia dedicar. Així doncs, pensant que m'agradaria ensenyar matemàtiques a secundària, vaig decidir estudiar Matemàtiques a la universitat, per intentar tenir una bona preparació per desenvolupar la meva futura carrera professional.

El semestre passat vaig cursar l'assignatura optativa de Didàctica de les Matemàtiques que s'ofereix a la Facultat. Després de veure com funciona el sistema educatiu a Catalunya, de conèixer part de la gran varietat de recursos i materials que hi ha per ensenyar matemàtiques i d'haver fet petits projectes enfocats a l'ensenyament d'algun/s concepte/s matemàtic/s; vaig tenir clar que m'agradaria fer un Treball Final de Grau sobre Didàctica de les Matemàtiques.

Sempre m'ha cridat l'atenció la gran diversitat d'alumnat que es troba en una aula. Els/les docents han d'ensenyar matemàtiques a la trentena d'adolescents que estan a l'aula. I la seva feina és que tothom pugui desenvolupar les seves capacitats. Ara bé, molt probablement, els recursos que hagi de fer servir per uns i altres variaran molt.

En aquests moments, trobem que el professorat es veu recolzat activament pels serveis psicopedagògics en el tractament de les matemàtiques amb els alumnes que tenen dificultats en l'aprenentatge. Però què passa amb els/les alumnes que tenen facilitat amb les matemàtiques? Com es poden potenciar les altes capacitats matemàtiques a l'aula de secundària? Què m'agradaria tenir al meu abast en un futur si en la meva tasca docent a l'aula hi ha alumnes amb altes capacitats matemàtiques? Quin suport m'agradaria tenir?

Per tant, pensant en aquesta situació, vaig decidir fer aquest Treball Final de Grau: "*Altes capacitats matemàtiques a l'aula de secundària*".

En primer lloc, he volgut conèixer com es planteja l'atenció a aquest tipus d'alumnat a nivell normatiu, i com es defineixen exactament les "altes capacitats".

En segon lloc, he fet una recerca per conèixer quins programes i activitats relacionats amb la potenciació del talent matemàtic existeixen a Catalunya, Espanya i en altres països com França, Rússia i els Estats Units.

En tercer lloc, persones vinculades al món de l'ensenyament de les matemàtiques a secundària han contestat un qüestionari per tal d'intentar copsar quina és la visió des de la pràctica de la situació actual del treball amb l'alumnat amb altes capacitats matemàtiques.

Finalment, he desenvolupat una proposta d'actuació per tal de donar suport al professorat per treballar amb l'alumnat d'altes capacitats matemàtiques, presentant una proposta d'activitats per dur a terme a l'aula i potenciant la proposta a llarg termini.

Un cop finalitzi els meus estudis del Grau de Matemàtiques, m'agradaria continuar els meus estudis cursant el Màster Universitari de Formació del Professorat d'Educació Secundària per tal de poder exercir com a professora d'educació secundària. I espero, quan ho aconsegueixi, poder fer servir tot el que he après en la realització d'aquest treball per atendre la diversitat de l'alumnat i, en concret, a l'alumnat amb altes capacitats matemàtiques.

2. Definició d'objectius i motivació del problema

L'objectiu general d'aquest treball és confeccionar una proposta d'actuació per potenciar el talent matemàtic dels alumnes amb altes capacitats matemàtiques.

Per tal d'assolir aquest objectiu general, el descompondrem en quatre objectius específics, que són:

- Conèixer les lleis educatives que fan referència a la diversitat de l'alumnat, especialment les que fan referència a l'alumnat amb altes capacitats.
- Conèixer quins programes i activitats existeixen actualment per potenciar el talent matemàtic a Catalunya, Espanya i altres països del món.
- Tenir una visió propera de la situació actual a les aules i als programes i activitats citats anteriorment.
- Desenvolupar una proposta d'actuació per donar suport al professorat amb materials i recursos que pugui fer servir a l'aula amb l'alumnat d'altres capacitats matemàtiques.

L'atenció a la diversitat en les aules de secundària està molt desenvolupada quan es tracta d'oferir ajuda a l'alumnat amb més dificultats (tant pel que fa a recursos humans com materials) però la situació no és equivalent quan es tracta de potenciar a l'alumnat que té altes capacitats.

En l'actualitat, existeixen diferents activitats en aquests sentit que es desenvolupen majoritàriament fora de l'aula.

En canvi, quan es tracta d'atendre a l'alumnat amb altes capacitats matemàtiques diàriament a l'aula, cada professor intenta donar atenció a aquest tipus d'alumnat de forma autònoma amb els recursos personals i del centre educatiu que té al seu abast, de vegades amb petites ampliacions del temari, amb treballs individuals, oferint crèdits d'ampliació, fomentant la participació d'aquests alumnes en les diferents activitats que ja existeixen en aquests sentit, etc... però no disposa de cap espai organitzat i estructurat que li faciliti aquesta feina.

L'atenció a aquest alumnat podria millorar si el professorat tingués un espai de referència on trobar materials, recursos i suport per millorar la seva atenció.

D'altra banda, aquest espai podria ser un bon lloc on posar en contacte l'alumnat amb altes capacitats d'arreu del territori, on poder compartir experiències i treballar conjuntament amb nois i noies que compartissin els mateixos interessos.

Finalment, també podria ser un bon lloc on professorat dels diferents nivells educatius (primària, secundària i universitat) pogués estar en contacte per consensuar accions i propostes coordinades i coherents que repercutissin positivament en la formació de l'alumnat participant.

En resum, la finalitat d'aquest Treball Final de Grau és conèixer la situació actual i real del treball amb alumnes d'altres capacitats matemàtiques i fer una proposta, complementària a les existents, que pugui donar suport als docents per tal que puguin treballar a l'aula amb alumnat d'altres capacitats matemàtiques i puguin avaluar el seu aprenentatge.

3. Metodologia, desenvolupament i resultats

3.1. Recerca

3.1.1. Lleis educatives i altes capacitats

Les lleis educatives actuals contempnen l'alumnat amb altes capacitats. A continuació, se citen els articles relacionats amb aquest tipus d'alumnat:

A la *Llei Catalana d'Educació 12/2009* del 10 de juliol, trobem a l'**article 83** "Criteris d'organització dels centres per atendre els alumnes amb altes capacitats": "1. *El projecte educatiu de cada centre ha d'incloure els elements metodològics i organitzatius necessaris per a atendre els alumnes amb altes capacitats, amb programes específics de formació i flexibilitat en la durada de cada etapa educativa.* 2. *L'Administració educativa ha d'establir, per mitjà dels serveis educatius, protocols per a la identificació de les altes capacitats i l'atenció metodològica adequada.*"

A la *Ley Orgánica de Educación 2/2006* del 3 de maig se cita a l'alumnat amb altes capacitats a l'**article 76** i a l'**article 77**: "Corresponde a las Administraciones educativas adoptar las medidas necesarias para identificar al alumnado con altas capacidades intelectuales y valorar de forma temprana sus necesidades. Asimismo, les corresponde adoptar planes de actuación adecuados a dichas necesidades" i "El Gobierno, previa consulta a las Comunidades Autónomas, establecerá las normas para flexibilizar la duración de cada una de las etapas del sistema educativo para los alumnos con altas capacidades intelectuales, con independencia de su edad".

Al *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, al *Decret 143/2007*, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria, podem llegir al capítol 4 corresponent a "Atenció a la diversitat" l'**article 13.7**: "L'escolarització de l'alumnat amb altes capacitats intel·lectuals podrà comportar tant l'adaptació curricular com la flexibilització de la permanència en un curs o en tota l'etapa. El Departament d'Educació establirà els requisits per a la detecció, l'avaluació i els informes per a la regulació dels expedients acadèmics en cada cas".

També al *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, al *Decret 143/2007*, de 26 de juny, es pot consultar al capítol 4 les adaptacions curriculars, aplicables a alumnes amb altes capacitats, a l'**article 13.2** i a l'**article 13.3**: "Entre les mesures d'atenció a la diversitat es preveuran agrupaments flexibles, el reforç en grups ordinaris, el desdoblament de grups per reduir la ratio quan faci falta, les adaptacions curriculars, la integració de matèries per àmbits, programes de diversificació curricular i altres programes personalitzats per aquells alumnes amb necessitats específiques de reforç educatiu" i "El Departament d'Educació, amb la finalitat de facilitar l'accessibilitat al currículum establirà els procediments adequats, quan sigui necessari realitzar adaptacions curriculars que s'allunyin significativament dels continguts i dels criteris d'avaluació. Aquestes adaptacions es realitzaran tenint present el desenvolupament de les competències bàsiques. Em aquests supòsits, l'avaluació i la promoció de l'alumnat amb adaptacions curriculars es farà d'acord amb els criteris d'avaluació fixats en les mateixes adaptacions".

3.1.2. Detecció de l'alumnat amb altes capacitats

Per poder treballar amb alumnes amb altes capacitats és important identificar-los.

El Departament d'Educació dels EEUU va proposar a l'any 1993 la següent definició d'altas capacitats: *“Els nens i adolescents amb altes capacitats demostren respostes notablement elevades, o el potencial necessari per a aconseguir-les, comparats amb altres individus de la mateixa edat, experiència o entorn. Tenen alts nivells de capacitat en les àrees cognitives, creatives i/o artístiques, mostren una capacitat excepcional de lideratge o destaquen en matèries acadèmiques específiques.*

A Catalunya s'ha desenvolupat un document de detecció i actuació en relació a les altes capacitats¹. En ell, s'explica que dintre de les altes capacitats es poden distingir tres perfils: la superdotació, el talent i la precocitat².

La superdotació és un fenomen cognoscitiu. Respon a un perfil on tots els recursos intel·lectuals presenten un nivell elevat tant de raonament lògic com de creativitat, una bona gestió de memòria i de captació de la informació. Així doncs, l'alumne/a superdotat/da pot ser eficaç en qualsevol àmbit o tasca i té estratègies complexes per solucionar problemes complexos.

El talent és un fenomen cognoscitiu. Respon a un perfil amb una elevada aptitud en un àmbit o tipus d'informació o en un tipus de processament. L'alumne/a amb talent pot presentar nivells discrets (i, fins i tot, deficitaris) en la resta d'àmbits o de formes de processament. Si únicament es destaca en una àrea concreta diem que el talent és simple. Si es combinen diferents aptituds específiques l'anomenem talent complex.

La precocitat és un fenomen evolutiu, no intel·lectual. Els/Les alumnes amb precocitat solen presentar un major nombre de recursos que els seus companys/es durant el procés de maduració. Un cop finalitzat, la seva capacitat intel·lectual es completament normal.

Com se cita al document, *“les altes capacitats es poden trobar en nens i adolescents de tots els grups culturals, en tots els nivells socials i en tots els àmbits de l'activitat humana”*.

Per tal de detectar l'alumnat amb altes capacitats, és a dir, aquells/es que compleixen la definició, s'ha de fer un estudi des de tres punts de vista claus: el professorat, la família i l'alumne/a.

El professorat

El/La professor/a és la persona més propera acadèmicament a l'alumne/a. El/La docent no ha de confondre les altes capacitats amb un rendiment acadèmic alt. De la mateixa manera, cal que no es deixi influenciar per estereotips i intenti donar una opinió el més objectiva possible. Ha d'observar a l'alumne/a en el seu treball a casa, l'actitud amb la resta dels/de les alumnes, professorat i altres treballadors/es del centre... i tot el que cregui que podria ser rellevant en el comportament i actes de l'alumne/a. Per exemple, a *Les altes capacitats: detecció i actuació en l'àmbit educatiu. Materials per a la atenció a la diversitat* publicat pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat Catalana es poden trobar graelles de valoració de diferents aspectes educatius i emocionals de l'alumne/a per tal de fer una primera valoració sobre si existeixen altes capacitats.

La família

La família té una visió molt més àmplia de l'evolució de l'alumne/a ja que pot recollir dades des de el seu naixement. És molt convenient que intentin recordar allò que els va cridar l'atenció en el seu moment, habilitats i fets que van creure que el/la seu/seva fill/a havia desenvolupat abans de l'edat

¹ Les altes capacitats: detecció i actuació en l'àmbit educatiu. Materials per a la atenció a la diversitat. Departament d'Ensenyament de la Generalitat Catalana

² Les definicions apareixen a “Les altes capacitats: detecció i actuació en l'àmbit educatiu. Materials per a la atenció a la diversitat” i són una adaptació de les proposades per Castelló i Martínez (1999)

que li correspondria. Tot i així, cal tenir present que és molt probable que la família sobrevalori o infravalori el/la fill/a. També seria important que emplenessin les graelles de valoració corresponents a l'edat del/de la fill/a.

L'alumne/a

És important conèixer la opinió de l'alumne/a, com se sent, com es veu dins la classe i quines habilitats creu que ha desenvolupat. Per resumir la seva visió, pot també emplenar els qüestionaris referents a la seva edat.

3.1.3. Programes existents

A continuació, se citen alguns dels programes que ja existeixen per potenciar les altes capacitats matemàtiques. Com es pot observar, cadascun d'ells té característiques especials: de participació lliure, s'ha de passar un procés de selecció, són individuals, s'ha de treballar en grup, competitiu, divulgatiu, regionals, internacionals...

3.1.3.1. Projectes a Catalunya

A Catalunya, trobem el projecte *ESTALMAT*, el *FEM Matemàtiques*, la *Marató de problemes*, *Anem x + Matemàtiques*, els *Problemes a l'esprint*, les proves *Cangur* (i sessions de preparació a aquestes proves) i les *Olimpiades Matemàtiques* (i sessions de preparació a aquestes proves). Així com activitats divulgatives proposades per les universitats: Xerrades-taller de la UB, Matefest, Dissabtes de les matemàtiques a la UAB, Activitats per a secundària de la FME (UPC) i Berenars Matemàtics (SEMG-APMCM). Enguany, per primer cop, s'ha dut a terme el Programa CiMs + CELLEX.

El projecte *ESTALMAT* (detecció i estímul precoç en matemàtiques) es va iniciar a Catalunya al curs 2003-2004. Tal i com es recull a la web del projecte, hi ha tres idees claus en la seva organització:

1. L'estructura de la prova de selecció i les idees per a la seva valoració, ben diferent d'un examen habitual, que ha d'acabar amb una entrevista de l'equip de professorat amb les famílies de l'alumnat pre-seleccionat.
2. El fet que les activitats es desenvolupin setmanalment, sense apartar el grup d'alumnes seleccionat del seu ambient habitual (família, escola).
3. La idea que les activitats han de ser complementàries dels currículums escolars i, de cap manera hi han d'interferir.

Així doncs, el projecte *ESTALMAT* selecciona alumnes de Catalunya perquè treballin fora de l'horari escolar activitats que es complementin amb el seu currículum escolar.

El *FEM Matemàtiques* és una activitat dirigida a l'alumnat de sisè de Primària i primer i segon d'ESO. Consta de tres fases:

- la primera es realitza per grups al centre.
- la segona és una prova individual que es realitza independentment en cada una de les 4 associacions que formen part de la FFEMMCAT: APMCM, ADEMG, APaMMs i ABEAM.
- la tercera fase és la fase final amb els millors de cada associació.

Al *FEM Matemàtiques* pot participar l'alumnat que ho desitgi (sempre que el centre s'inscriu).

La Marató de problemes és una activitat que té com a proposta principal la motivació per al treball individual a casa, com a complement d'altres activitats. Hi ha enunciats adreçats a donar respostes concretes als problemes i també propostes de treball reflexiu. Com en tota *Marató* els/les alumnes participants han de mantenir un ritme de treball adequat, pausat però constant.

A l'*Anem x + Matemàtiques* els/les alumnes de quart d'ESO amb bons resultats acadèmics treballen conceptes no curriculars en sessions-taller els dissabtes al matí.

Les proves *Cangur* es van iniciar a l'any 1998. Estan destinades a l'alumnat que cursa 3r i 4t d'ESO i 1r i 2n de Batxillerat. Es plantegen 30 enunciats en tres bloc de dificultat i s'han de respondre escollint una de les respostes oferides. Són proves individuals i el centre s'ha d'inscriure.

Els *Problemes a l'esprint* és una activitat que va començar l'any 2000. Dividida en diferents nivells, els/les alumnes han de col·laborar per resoldre les activitats proposades en el mínim de temps possible. Com en els dos programes anteriors, el centre s'ha d'inscriure a la prova.

Actualment, existeixen tres seus on qualsevol alumne/a interessat/da pot assistir per preparar les proves *Cangur*: a l'IES La Sedeta (Barcelona), a la Universitat Autònoma de Barcelona (al Campus de Bellaterra) i a la Universitat Politècnica de Catalunya (a la Facultat de Matemàtiques i Estadística).

Les *Olimpiades Matemàtiques* consisteixen en la resolució de problemes en dues sessions. Els classificats passen a disputar la fase espanyola. En aquesta prova pot participar qualsevol alumne/a interessat/da de Batxillerat i també alumnes de 4t d'ESO amb l'autorització del/de la seu/va professor/a.

Actualment, s'ofereixen sessions preparatòries a la Universitat Autònoma de Barcelona (al Campus de Bellaterra), a la Universitat Politècnica de Catalunya (a la Facultat de Matemàtiques i Estadística), a la Universitat de Barcelona (a la Facultat de Matemàtiques), a la Universitat de Girona (al Campus de Montilivi), a la Universitat Rovira i Virgili (a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria) i a l'institut Màrius Torres (Lleida).

Les Xerrades-taller de la UB, la Matefest, els Dissabtes de les matemàtiques a la UAB, les Activitats per a secundària de la FME (UPC) i els Berenars Matemàtics (organitzats per SEMG-APMCM) són xerrades divulgatives obertes a qui vulgui assistir on, en ocasions, els assistents poden dur a terme activitats pràctiques relacionades amb el que s'ha tractat a la xerrada.

Enguany, s'ha engegat el programa Programa CiMs + CELLEX³ als centres Aula Escola Europea (Barcelona) i IES Jaume Vicens Vives (Girona). Vint-i-quatre alumnes becats cursen un batxillerat que cobreix els programes i requisits de la LOE més els del Batxillerat Internacional. Aquests/es estudiants cursen les matèries Llengua i literatura catalanes, Matemàtiques i Física a un nivell superior. Una de les finalitats del projecte és no treballar des d'un enfocament memorístic: fer que l'alumne/a analitzi i potenciar el seu esperit crític.

³ <http://www.cims-cellex.cat/programa/>

A continuació, recollirem organitzades per nivells de forma resumida totes les activitats de secundària⁴:

	1r d'ESO	2n d'ESO	3r d'ESO	4t d'ESO	1r Batxillerat	2n Batxillerat	Organitza
Presencial	ESTALMAT						FEEMCAT SCM
1a fase (T) 2a i 3a fase (P)	Fem Matemàtiques						FEEMCAT
Presencial 10 sessions				Anem x+ matemàtiques			FEEMCAT
Telemàtic	Problemes a l'esprint		Problemes a l'esprint		Problemes a l'esprint		FEEMCAT
Telemàtic			Marató de problemes				SCM CREAMAT
Presencial			Proves Cangur Preparació proves Cangur		Proves Cangur Preparació proves Cangur		SCM
Presencial					Olimpiada matemàtica Preparació Olimpiada matemàtica		SCM
Presencial					Batxillerat internacional especialitzat en ciències i matemàtiques CiMs-Cellex		Fundació Privada Cellex

⁴ Llevat de les ombrejades en color, la resta són concursos matemàtics

3.1.3.2. Projectes a Espanya

A nivell de l'estat espanyol, trobem projectes comuns a totes les comunitats autònomes i d'altres que són específics d'alguna regió.

Alguns dels projectes, citats anteriorment, que es desenvolupen a tota Espanya són la *Olimpiada Matemática Española* (després de les fases a les comunitats autònomes, se celebra la fase final amb els millors de cada regió), el projecte ESTALMAT (també operatiu a Catalunya) i el *Ven x + Matemáticas* (que a Catalunya s'ha implementat amb el nom d'*Anem x + Matemàtiques*). A més, enguany, se celebra la *Olimpiada Estadística* amb motiu de l'Any Internacional de l'Estadística, que posa a prova els coneixements estadístics dels/de les alumnes de secundària i batxillerat.

A la comunitat autònoma d'Andalusia trobem dos projectes dirigits a la preparació de la *Olimpiada Matemática Española*. D'una banda, la *Olimpiada Matemática Thales*, que és una reproducció de la *Olimpiada Matemática* per alumnes que cursen 2n d'ESO a la comunitat autònoma d'Andalusia. I, a Sevilla, han elaborat un esdeveniment preparatori per la *Olimpiada Matemática Española* per tal de treballar amb els alumnes que han obtingut millor puntuació, el *Concurso de Otoño de Matemáticas*.

La comunitat autònoma de Madrid té diversos programes dirigits a l'alumnat de primària i secundària: el *Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid*, el *Concurso Puig Adam* i el *Concurso de Primavera de Matemáticas*. A més, a Madrid trobem el centre *Escuela de pensamiento matemático Miguel de Guzmán*, un centre on s'imparteixen xerrades y classes per alumnes amb altes capacitats matemàtiques, així com es proposen activitats per desenvolupar als centres educatius.

El *Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid* és un concurs on 6 alumnes d'un mateix centre (2 alumnes de 1r o 2n d'ESO, 2 alumnes de 3r o 4t d'ESO i 2 alumnes de Batxillerat) competeixen per equips, individualment i per relleus amb la finalitat d'aconseguir la màxima puntuació d'entre tots els equips de la comunitat autònoma de Madrid.

El *Concurso Puig Adam* es realitza també a Madrid i els/les alumnes (de 3r i 4t d'ESO i 1r de Batxillerat, dividits en els tres nivells) han de resoldre una col·lecció d'enunciats.

El *Concurso de Primavera de Matemáticas* està dirigit a alumnes des de 5è de Primària fins a 2n de Batxillerat de la comunitat autònoma de Madrid. Es realitza una primera fase als centre perquè aquests escullin fins a 4 alumnes per nivell (n'hi ha 4 nivells, un per cada dos cursos acadèmics consecutius). La segona fase es realitza a la Facultat de Matemàtiques de la Universidad Complutense de Madrid y els guanyadors són els que obtenen una millor puntuació després de resoldre 25 problemes tipus test.

3.1.3.3. Projectes fora d'Espanya

A nivell internacional trobem projectes interessants, com els que es desenvolupen als Estats Units, Rússia i França. Alguns d'ells són de participació mundial.

L'*American Mathematical Society* realitza diferents programes per treballar amb alumnes pre-universitaris: campus d'estiu a diferents ciutats de l'estat dirigits a alumnes de secundària per treballar d'una manera lúdica i intensiva les matemàtiques, publicació de desafiaments per motivar els/les alumnes, trobades per alumnes amb talent matemàtic i diferents concursos.

Una de les propostes més interessant que podem trobar és la de Rússia. Fa molts anys es van crear els anomenats *Cercles Matemàtics*⁵. Amb un educador com a referència, alumnes interessats en les matemàtiques es reuneixen en una seu a debatre, resoldre, proposar... problemes i reptes matemàtics. Els/les alumnes es troben en un ambient agradable i potencien les seves habilitats. Si observem els resultats de Rússia en els concursos matemàtics mundials, veiem que aquests/es estudiants que participen als *Cercles Matemàtics* acostumen a estar entre els primers classificats.

La *Société Mathématique de France* convoca cicles de conferències a diferents facultats perquè alumnes i docents de secundària assisteixin. L'*Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques*, l'*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* i l'*Académie de Strasbourg* organitzen els concursos *Mathématiques sans Frontières* i *Mathématiques sans Frontières Junior* que tenen com a objectius fomentar l'interès per les matemàtiques, el treball en equip, la iniciativa, motivació i recerca dels/de les alumnes i la pràctica d'una llengua estrangera. Hi participen centres de tot el món.

També a nivell mundial els/les alumnes poden participar a *Kangorou sans frontières* (el que a Catalunya es coneix com les proves *Cangur*) i a *World Math Day*, una competició online on alumnes d'arreu del món competeixen en diferents nivells (des dels 4 anys fins els 18). Trobem també una proposta als Estats Units, la *AwesomeMath*, que organitza estades d'estiu; així com el *Purple Comet! Math Meet*, un concurs de matemàtiques per equips (màxim, 6 alumnes) on més de quaranta països participen.

⁵ L'any 2012 es va publicar a Espanya "Círculos Matemáticos" de RSME i Ediciones SM escrit pels matemàtics Dmitiri Fomin, Sergey Genkin i Ilia Itenberg, una col·lecció de problemes confeccionada després d'anys d'experiències amb tècniques de resolució

3.2. La visió del professorat

Per tal de tenir una visió més àmplia en relació a l'alumnat d'altres capacitats matemàtiques a l'aula, s'ha demanat a un grup de persones vinculades amb l'ensenyament i divulgació de les Matemàtiques que contestessin un mateix qüestionari per poder fer una valoració i extreure conclusions sobre la situació.⁶

1.	Quina activitat professional desenvolupa actualment?
Bernat Ancochea	Director i professor de Matemàtiques de l'Institut Premià de Mar (Barcelona).
Anton Aubanell	Treballa en el CESIRE CREAMAT, Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques.
Marta Berini	Estic jubilada però he estat professora de Matemàtiques durant 33 anys a instituts d'ensenyament Secundari
Joan Josep Carmona	Professor de matemàtiques a la Universitat Autònoma de Barcelona
Teresa Cervelló	Sóc professora de matemàtiques a l'institut Angeleta Ferrer i Sensat de Sant Cugat.
Diego Díaz	Profesor de secundaria. I.E.S. Meléndez Valdés (Villafranca de los Barros) (11 años de experiencia)
Raül Fernández	Professor de matemàtiques a secundària. Curs MACS 2n de batxillerat. Tècnic docent en innovació i formació del professorat.
Antonio José García	Professor de matemàtiques (ESO i Batxillerat).
Iolanda Guevara	Professora de matemàtiques en un Institut i professora a temps parcial en el màster de formació del professorat de secundària en l'especialitat de matemàtiques
Javier Martín	Profesor de Matemáticas en Bachillerato, en un Instituto de Educación Secundaria
Magdalena Martínez	Profesora de Matemáticas en Bachillerato en un Instituto de Educación Secundaria
Fernando Merino	Profesor de Matemáticas en un I.E.S. y director del mismo.
Laura Morera	Estic acabant la tesi doctoral en Didàctica de la Matemàtica i complemento la jornada fent una classe de 1r d'ESO de Matemàtiques
David Obrador	Actualment estic treballant en comissió de serveis al Departament d'Ensenyament organitzant temes relacionats amb formació telemàtica del professorat. Suport tecnològic en Moodle, wikis
Bella Rojo	Maestra de Matemáticas en el primer ciclo de la ESO. (Años de trabajo: 14 años)
Juan María Ruiz	Profesor de secundaria en el área de Matemáticas. (9 años de experiencia)
Concepción Teresa Sierra	Soy profesora de secundaria de Matemáticas. Éste es mi 8º año de trabajo.
Manuel Vidal	Actualmente estoy jubilado. Hasta el año pasado he estado ejerciendo de profesor de matemáticas en la enseñanza secundaria durante 36 años. He sido también jefe de estudios y director.

⁶ Com alguns/es dels/de les entrevistats/des treballen a Catalunya i altres a fora de Catalunya, s'ha volgut respectar la llengua amb què s'han expressat. El blau indica que l'entrevistat/da desenvolupa la seva activitat laboral a Catalunya i el verd que la desenvolupa fora de Catalunya.

2.	Quines experiències ha viscut (o està vivint) relacionades amb les altes capacitats matemàtiques?
Bernat Ancochea	Una optativa a 1r d'ESO amb alumnat d'altres capacitats treballant amb el programa GeoGebra i com investigar en el món de les matemàtiques fent ús de les característiques dinàmiques del programa. Dues alumnes van promocionar de curs (de 2n a 4t d'ESO).
Anton Aubanell	La meua activitat al llarg de trenta anys com a professor m'ha posat en contacte amb alguns alumnes d'altres capacitats matemàtiques.
Marta Berini	Alguna vegada hem tingut a l'Institut algun alumne amb molta capacitat per a les matemàtiques.
Joan Josep Carmona	Preparació de classes especials de resolució de problemes de matemàtiques dirigides a alumnes de Batxillerat. Un dels objectius és la preparació per les olimpíades de matemàtiques.
Teresa Cervelló	Hi ha alumnes amb altes capacitats que se'ls intenta buscar activitats matemàtiques fora del centre tipus Cangur, algunes classes especials a l'autònoma. Intentes donar-los-hi motivació i parlar amb ells dels seus interessos.
Diego Díaz	Todos los años llevamos a los mejores alumnos a Olimpiadas Matemáticas.
Raül Fernández	Actualment sóc col·laborador en el programa Anem x + matemàtiques, adreçat a alumnat de 4t d'ESO amb altes capacitats per a les matemàtiques. http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/convocat%C3%B2ries-/793-inscripcio-als-tallers-qanem-x-matematiquessq He tingut en dues ocasions un alumne amb altes capacitats.
Antonio José García	---
Iolanda Guevara	Coordino el Taller d'Anemx+matemàtiques d'ABEAM. Com a presidenta de Feemcat promociono i dono suport a Estalmat, i tots els concursos que s'organitzen des de la SCM i des de Feemcat en relació a la resolució de problemes (Cangur, Problemes a l'Esprint, Marató de problemes i Fem Matemàtiques).
Javier Martín	Participo como profesor en el Proyecto Estalmat de Palencia. Son grupos de 12-13 alumnos de 1º, 2º y 3º de E.S.O. elegidos entre los mejores alumnos de la provincia, pero teniendo en cuenta que es voluntario y no todos los alumnos con altas capacidades quieren participar.
Magdalena Martínez	Participo como profesora en el Proyecto Estalmat de Palencia para alumnos con especial talento para las Matemáticas. Anteriormente he impartido clases de preparación para la Olimpiada Matemática de Bachillerato.
Fernando Merino	Ninguna, he tenido alumnos brillantes, pero ninguno diagnosticado.
Laura Morera	Alguns dels alumnes de l'escola on treballa tenen altes capacitats, però moltes vegades no són diagnosticades, simplement que per l'entorn familiar, social i escolar, han cuidat la seva educació. Podríem dir que a vegades es poden confondre les altes capacitats amb el fet d'estar ben preparat.
David Obrador	En els anys que porto sent docent de matemàtiques he tingut un parell d'alumnes amb especial talent per les matemàtiques. Un d'ells ha acabat fent la carrera de matemàtiques i ara està fent el doctorat.
Bella Rojo	No he vivido ninguna experiencia relacionada con las altas capacidades.
Juan María Ruiz	He observado algunos alumnos con altas capacidades, alguno de ellos con falta de motivación debido a la falta de adaptación de los contenidos a sus capacidades.
Concepción Teresa Sierra	Nunca he tenido alumnos con altas capacidades matemáticas, al menos que estuviera diagnosticado.

2.	Quines experiències ha viscut (o està vivint) relacionades amb les altes capacitats matemàtiques?
Manuel Vidal	A lo largo de más de 35 años (EGB, BUP, COU, ESO, BATX) me he encontrado con buenos alumnos en matemáticas (en actitud y resultados). Nunca me he visto envuelto en programas especiales dirigidos a alumnos con altas capacidades matemáticas.

Alguns dels entrevistats formen part de la organització d'algun dels programes que s'han citat anteriorment i hi treballen amb alumnes d'altres capacitats.

En Bernat Ancochea, per exemple, disposa d'una optativa a 1r d'ESO on l'alumnat amb altes capacitats treballa les matemàtiques amb el GeoGebra.

La Teresa Cervelló els proposa que assisteixin a alguns dels programes que s'ofereixen fora de l'horari lectiu i els intenta motivar perquè potenciïn el seu talent.

També es pot observar, a partir de les respostes, que els/les alumnes amb altes capacitats matemàtiques no solen estar diagnosticats, fet que dificulta el treball amb ells/elles.

3.	Ha tingut alumnes amb altes capacitats a l'aula? En cas afirmatiu, com ha enfocat el treball amb ells/elles?
Bernat Ancochea	Sí. Sovint m'he trobat amb grups classe on hi havia alumnat d'altres capacitats. Els he proposat exercicis d'aprofundiment així com treballs de recerca relacionats amb les matemàtiques.
Anton Aubanell	He tingut algun alumne especialment capacitat per a les matemàtiques (capacitat que no sempre concordava amb les altres matèries). Hem treballat posant-li algunes tasques "extres" i, a batxillerat, a través del treball de recerca.
Marta Berini	Li hem recomanat fer activitats extra, assistir a cursos a l'estiu i fer el treball de recerca de matemàtiques. Darrerament li recomanen presentar-se a la prova de selecció d'ESTALMAT.
Joan Josep Carmona	En algunes ocasions sí. Si el grup és nombrós, ben poca cosa podem fer, ja que moltes vegades descobrim la seva vàlua a final del curs al posar-li la nota. En grups petits sí que es detecten i llavors es posen alguns problemes més específics per ells.
Teresa Cervelló	He tingut alumnes molt capaços, però no sé ben bé què vol dir altes capacitats. N'hi havia un que era molt especial, treballava molt pel seu compte, tenia moltes habilitats musicals i el van canviar a un centre especial. No li donava classes però venia a trobar-nos per consultar-nos problemes matemàtics.
Diego Díaz	Sí, les he motivado con ejercicios e ideas acorde con sus capacidades.
Raül Fernández	En una ocasió, vaig preparar molt de material extra per tal que no avorri-lo amb la matèria curricular. El resultat no va ser satisfactori, seguia sense voler fer res. En una altra ocasió, un xinès de 3r d'ESO feia la matèria de 2n de batxillerat.
Antonio José García	He tingut alumnes d'"altres capacitats" matemàtiques i aquest curs, a primer de batxillerat, tinc un altre. Mai he fet una feina massa especial amb ells, l'únic que he fet ha estat proposar-los alguns "problemes per pensar". No he fet un treball sistemàtic i diferenciat amb ells.

3.	Ha tingut alumnes amb altes capacitats a l'aula? En cas afirmatiu, com ha enfocat el treball amb ells/elles?
Iolanda Guevara	He tingut alumnes amb bones capacitats a l'aula, no sé si altes o no. He procurat sempre que aquests alumnes no s'avorreixin a l'aula, bé perquè els he fet caps dels grups de treball a l'aula quan he organitzat el treball a l'aula en grups, bé perquè els he donat activitats específiques per ells o bé perquè els he animat a participar en activitats extres adreçades a alumnes amb altes capacitats (bàsicament els concursos de l'apartat anterior).
Javier Martín	He tenido alumnos diagnosticados superdotados, pero la superdotación no era en matemáticas en concreto, sino en general, con lo que en matemáticas eran buenos pero no tuve que hacerles una atención demasiado personalizada.
Magdalena Martínez	Sí, en una ocasió tuve una alumna diagnosticada con superdotación intelectual, pero en Matemáticas no era particularmente buena y no tuve que realizar ninguna acción especial. Varias veces sí que he detectado alumnos/as con unas capacidades especiales para Matemáticas, en esos casos les he propuesto actividades complementarias para realizar en casa y les he invitado a participar en los seminarios de problemas que he impartido algunos cursos (en horario no lectivo)
Fernando Merino	No. Sí, a los alumnos que claramente destacan les he dado ejercicios de mayor dificultad e incluso ampliado temario.
Laura Morera	Sí que he tingut algun alumne d'aquest tipus, però no he enfocat el treball de manera diferent, simplement a vegades els hi he donat més feina, o algun treball d'ampliació.
David Obrador	Amb aquest alumne que et comento i amb una altra noia vaig tenir la sort de poder treballar molt bé a les classes. Els dos els vaig tenir a 3r i 4t d'ESO. I la segona alumna també a 1r de Batxillerat. El grup -classe va ser excepcional. Tots plegats vam fer unes matemàtiques genials. A 4t d'ESO vam fer un crèdit de síntesi paral·lel al que podia fer la resta d'alumnat de 4t. Tots plegats vam animar a un grupet i uns 10 alumnes van fer aquest crèdit de síntesi especialment enfocats a detectar la presència de les matemàtiques a la vida quotidiana! UN èxit!
Bella Rojo	No, nunca. He tenido alumnos muy buenos, de sobresaliente en mi asignatura, pero no con alta capacidad.
Juan María Ruiz	Sí, adaptando los contenidos y las actividades a sus capacidades.
Concepción Teresa Sierra	He tenido dos alumnos, ambos chinos, que tenían altas capacidades matemáticas. No realicé actividades especiales con ellos.
Manuel Vidal	¿Qué es un alumno con altas capacidades matemáticas? ¿Se puede diagnosticar la alta capacidad en matemáticas? Suponiendo que tengo respuestas claras para esas preguntas diré que sí, que he tenido bastantes alumnos con altas capacidades, aunque no responden a un perfil determinado. El enfoque ha consistido en crearle una atmósfera agradable, de confianza, y estímulos en forma de retos matemáticos. Lo importante es llegar a conseguir un nivel de "conversación" estimulante.

Cap d'ells, si s'ha trobat amb alumnes d'altres capacitats, els ha adaptat el currículum, com podria ser una de les opcions. Els han proposat exercicis d'ampliació, fer el treball de recerca sobre un tema matemàtic, assistir als programes que existeixen, o activitats proposades per ells/elles mateixos/es, fora de l'horari lectiu, incentivar-lo amb responsabilitats dintre de les activitats de classe per tal que no s'avorriessin, desenvolupar un treball o realitzar un crèdit de síntesi. Tot i així,

ningú menciona que els hagi avaluat aquestes activitats, sinó que sembla que han estat un complement extra en la seva formació.

4.	Ha detectat alumnes amb altes capacitats a l'aula? En cas afirmatiu, com els/les ha detectats/detectades?
Bernat Ancochea	Com he dit a la pregunta anterior he detectat alumnat amb altes capacitats a l'aula. No sempre són alumnat que fa bé els exercicis, sovint massa rutinaris, que els proposem habitualment a Matemàtiques sinó que dona respostes molt acurades a preguntes que tenen més a veure amb entendre bé la matèria i no saber treballar-la sense aprofundir en el sentit que té.
Anton Aubanell	Recordo dos casos molt especials: una alumna que era rapidíssima en càlcul mental i una altra alumna que era molt bona en el maneig dels pentominós (i de la distribució de formes en el pla). Eren dues situacions sorprenents! Cap de les dues destacava en altres camps de la matemàtica i, de fet, aprovaven molt justes.
Marta Berini	He tingut pocs però es detecten per les preguntes que fan a classe, per la manera de contestar les preguntes de les proves (jo sempre posava preguntes de raonament, d'opinió i no només de procediments) .
Joan Josep Carmona	Amb els anys de docència que ja porto he detectat molts casos. Es detecten quan surten a fer un problema a la pissarra o en la realització d'una prova d'avaluació.
Teresa Cervelló	No.
Diego Díaz	Quando un alumno parece aburrido y sabe contestar preguntas complicadas.
Raül Fernández	Quan són els primers en entendre un concepte, acabar els deures, o anar més allà amb preguntes prou interessant que demostrin que arriben a la profunditat del concepte.
Antonio José García	Sí que he detectat alguns. Primer he sospitat que podrien ser "especials" a matemàtiques veient la manera de resoldre els exercicis i/o problemes que es fan habitualment a l'aula. Una vegada detectats, els he posat a prova amb algunes activitats més "especials".
Iolanda Guevara	No tinc la certesa d'haver tingut alumnes amb altes capacitats.
Javier Martín	No, los alumnos que he tenido con altas capacidades ya venían diagnosticados por los equipos psico-pedagógicos.
Magdalena Martínez	Sí, como las clases son bastante participativas, en el día a día, haciendo constantemente preguntas es fácil darse cuenta cuando un/a alumno/a tiene una capacidad de razonamiento superior al resto de compañeros/as. Cuando me ha pasado eso, le planteo alguna cuestión de nivel un poco más alto y observo si es capaz de resolverla y así, poco a poco me voy dando cuenta hasta dónde puede llegar.
Fernando Merino	No. Lo comentado anteriormente.
Laura Morera	No, normalment a l'escola els que ho són, els han tractat des del principi. Suposo que una característica de les famílies de l'escola és que es preocupen per l'educació dels seus fills i llavors no passa que un alumne estigui deixat de la mà de Déu.
David Obrador	No calia fer cap detecció, era un evidència, i no només en matemàtiques. Premis extraordinaris de Batxillerat de tota Catalunya!
Bella Rojo	No.

4.	Ha detectat alumnes amb altes capacitats a l'aula? En cas afirmatiu, com els/les ha detectats/detectades?
Juan María Ruiz	Sí, los he detectado observando su capacidad de razonamiento y comprensión.
Concepción Teresa Sierra	Como dije en la pregunta anterior, sí, y los detecté fácilmente lo sencillo que les resultaban las actividades y las notas que obtenían en los exámenes.
Manuel Vidal	En ocasiones los alumnos con estas capacidades no las manifiestan (timidez, miedo, sentimiento de quedar marginado del grupo,...). Este aislamiento al que se someten debe ser roto. Es la primera y más importante tarea: superar el aislamiento a base de afecto y seguridad. Y una vez ganada su confianza, el aspecto "matemático" de la cuestión es menor.

Probablement, un dels punts clau en el treball d'alumnes amb altes capacitats matemàtiques és la seva detecció. Si els equips psico-pedagògics han treballat amb l'alumne/a i han elaborat un informe, la tasca del professor s'agilitza ja que pot començar a treballar amb ell/ella des de principi de curs.

Si l'alumne/a no ha estat detectat fins aleshores, la majoria coincideix que un dels aspectes que dona més informació és observar el tipus de preguntes que fa a classe. D'altres ítems que poden aportar informació és com responen a les proves, la rapidesa amb que entenen un concepte o finalitzen el deures, o si son capaços de respondre qüestions d'un nivell més elevat.

En Manuel Vidal fa notar que per detectar les altes capacitats pot ser molt important haver establert una relació de confiança, perquè aquest es pugui expressar i, a través de les seves intervencions, potenciar el seu talent.

5.	Creu que els programes existents a Catalunya per treballar amb alumnes d'altres capacitats són suficients? Si coneix experiències fora de Catalunya, creu que es podrien implementar aquí? ⁷
Bernat Ancochea	Creo que no es suficiente i que cal implantar-ne d'altres. Al meu centre hem introduït optatives per aquest alumnat a 1r d'ESO i la idea seria continuar-les en cursos successius. Aquest alumnat fa també una 2a llengua estrangera com francès o alemany.
Anton Aubanell	Creo que hi ha dos nivells sobre els que caldria actuar: - El nivell directe d'aula que està a càrrec del professor/a al qual cal sensibilitzar per tal que detecti i cuidi aquests casos. - El nivell de fora de l'aula, activitats tipus Estalmat, Anem x + Matemàtiques o el treball amb alumnes becats per la fundació CELLEX a l'Institut Vicens Vives de Girona i a l'Aula Escola Europea de Barcelona. Creo que estaria bé que establissis contacte amb aquestes iniciatives.
Marta Berini	Pel que jo sé per les altes capacitats de matemàtiques a Catalunya només existeix ESTALMAT i els nois i noies que seleccionem no tenen tots altes capacitats però estan entre els 25 alumnes que han superat la prova i amb tots ells fem les classes que els serveixen per aprendre a raonar i a resoldre un cert tipus de problemes que no sabrien si només seguissin el currículum establert.

⁷ En el cas dels entrevistats de fora de Catalunya, la pregunta ha estat: ¿Cree que los programas existentes en España para trabajar con alumnos/as de altas capacidades son suficientes?

5.	Creu que els programes existents a Catalunya per treballar amb alumnes d'altres capacitats són suficients? Si coneix experiències fora de Catalunya, creu que es podrien implementar aquí? ⁷
Joan Josep Carmona	Des de l'any 2003 es fa el projecte Estalmat, dirigit per la SCM i realitzat a la UPC. La professora que ho coordina és la Marta Berini. En sembla suficient, donades les dades de participació i l'extensió de Catalunya. Té un programa d'activitats molt complet i una comissió estudia i el millora any a any. A Madrid es fa una cosa similar.
Teresa Cervelló	Crec que haurien de tenir un tractament especial, desconec si hi ha assessorament o algun tipus de programa a seguir.
Diego Díaz	Debería haber más programas y con profesores preparados.
Raül Fernández	Crec que encara no són prou eficaços, ni amb la detecció ni molt menys amb l'actuació. Fora de Catalunya crec que el tractament és similar. Fora d'Espanya sí que hi ha programes específics i de promoció de cursos, que crec que s'haurien d'estudiar per veure la viabilitat de fer-los a Catalunya.
Antonio José García	No conec gaire aquests programes, però tinc la sensació que no són suficients.
Iolanda Guevara	Els programes per treballar amb alumnes amb altes capacitats a Catalunya segurament són insuficients perquè fins ara s'han esmerçat la majoria de recursos a aconseguir tenir l'alumnat escolaritzat i amb un rendiment mínim (atenció a la diversitat per baix). L'atenció a la diversitat per dalt està força endarrerida.
Javier Martín	Sí.
Magdalena Martínez	No los conozco a fondo.
Fernando Merino	No, debería trabajarse más en la detección precoz, en secundaria puede ser tarde.
Laura Morera	No conec gaire bé les oportunitats que hi ha aquí. No conec del tema.
David Obrador	Està clar que sempre es pot fer més! Els docents als centres, i les famílies no sempre saben quins suports hi ha ... El projecte Estalmat que et cito al final és molt interessant!
Bella Rojo	Creo que no, pero simplemente por las informaciones y noticias que tengo del tema, fundamentalmente a nivel de la detección.
Juan María Ruiz	No existen programas específicos para tratar con este tipo de alumnos.
Concepción Teresa Sierra	No conozco mucho sobre este tema.
Manuel Vidal	Creo que los verdaderos programas deberían ser más próximos a los alumnos. Están como muy descontextualizados, lejos de sus entornos cotidianos. Con esto no quiero decir que no sirvan, todo lo contrario, serían un complemento idóneo de otros que se pudieran establecer a nivel de centro o de municipio. Por ejemplo: la creación de círculos matemáticos a nivel de centros o de municipios.

En general, la sensació que tenen els entrevistats és que no són suficients, o es podria millorar.

En Joan Josep Carmona sí que creu que amb el projecte ESTALMAT és suficient.

No obstant això, la Marta Berini, que coordina el projecte, ens fa notar que no tots els que participen tenen altes capacitats matemàtiques, però són els que han passat les proves.

En David Obrador també cita el projecte i el qualifica de molt interessant, tot i que fa notar que els docents i les famílies poden no conèixer tots els suports que tenen al seu abast.

La Iolanda Guevara destaca els pocs recursos que s'han destinat a l'atenció a la diversitat per dalt.

En Raül Fernández pensa que fora d'Espanya sí que hi ha recursos que es podrien estudiar i veure si es podrien implantar a Catalunya.

En Bernat Ancochea pensa que són insuficients, així que al seu centre han introduït optatives a 1r d'ESO i volen ampliar-les a la resta de cursos, per tal de donar suport a aquest tipus d'alumnat.

6.	Té alguna idea o proposta per dur a terme amb alumnes d'altres capacitats? (dintre o fora de l'aula)
Bernat Ancochea	Fora de l'aula fóra bo animar-los a assistir a activitats relacionades amb les matèries que més els interessin o inscriure's en concursos i premis. En el centre, a banda de la iniciativa endegada aquest curs, crec que caldria aprofitar la jornada contínua per tal de proposar activitats complementàries per aquest alumnat en un curs de moodle preparat per a ells.
Anton Aubanell	En el punt anterior ja n'he citat alguna. En tot cas crec que aquests alumnes haurien de cuidar-se de manera molt especial procurant almenys tres coses: - Continuar desenvolupant dels seves capacitats i, per tant, augmentant el seu coneixement matemàtic. - Aconseguir crear comunitat entre ells, per tal que no se sentin com "estranyos" en el seu entorn i que es reforcin mútuament (trobades, estades...) - Posant-los en contacte amb el món de les matemàtiques avançades per que veiessin models de treball matemàtic i s'hi sentissin implicats (centre de recerca, universitats...)
Marta Berini	Caldria un esforç del Departament d'Educació per implantar un projecte que permetés a aquests nois i noies amb altes capacitats, de manera que sense treure'ls de la seva aula poguessin fer, en horari extraescolar, activitats per desenvolupar les capacitats que tenen juntament amb altres nois i noies en la mateixa situació.
Joan Josep Carmona	No.
Teresa Cervelló	Crec que les persones amb altes capacitats haurien de ser tractades en la seva singularitat, fomentant el desenvolupament de les seves capacitats. Són persones que ho poden passar molt malament si no estan ben ateses. No sé concretar de quina manera s' hauria de fer. Una cosa important seria la relació entre ells.
Diego Díaz	Si les motivamos lo suficiente siempre encontramos una respuesta positiva, pues con poco esfuerzo tienen mucho resultado.
Raül Fernández	L'incentiu de promocionar-los de curs serviria com a element motivador per tal d'exercitar i desenvolupar aquestes altes capacitats.
Antonio José García	Crec que haurien d'haver-hi programes molt més a prop d'ells. Per exemple: A cada municipi, amb un mínim de població, hauria d'haver algun conjunt d'activitats pensades per a aquest tipus d'alumnat, i els que destaquessin molt, haurien d'anar a les universitats (EsTalMat, preparació de les Olimpíades,...).

6.	Té alguna idea o proposta per dur a terme amb alumnes d'altres capacitats? (dintre o fora de l'aula)
Iolanda Guevara	Estalmat és un bon recurs per alumnes amb altes capacitats però insuficient perquè només cobreix dos cursos de l'ESO i només ofereix 25 places per nivell a tot Catalunya. Caldrien més grups i cobrir tots els nivells. Actualment els Tallers d'Anem x + matemàtiques volen omplir aquest buit però només cobreixen els alumnes de 4t i no s'estan fent en tot l'àmbit català.
Javier Martín	Si son alumnos de altas capacidades en matemáticas, clases fuera del horario lectivo de ampliación.
Magdalena Martínez	Concreta no. Al dar clase en un pueblo y no tener apoyo, en los casos en los que me he encontrado en esa situación he resuelto el problema yo sola, a mi modo, pero no tengo nada concreto que proponer.
Fernando Merino	Si la detección es previa, hay que trabajar con ellos dentro del aula y recomendar horario extraescolar para obtener rendimiento óptimo.
Laura Morera	Ara estem muntant una associació de lleure científic (E_xplorium, al facebook o al twitter) i seria un bon lloc on alumnes amb altes capacitats podrien trobar activitats interessants. Tot i que no ho volem enfocar només a alumnes d'aquestes característiques.
David Obrador	El crèdit de síntesi que et deia va ser la meva proposta...
Bella Rojo	No.
Juan María Ruiz	Tratamiento especializado basado en: <ul style="list-style-type: none"> • Adaptaciones de los contenidos a sus capacidades. • Promoción automática a cursos adaptados a sus capacidades.
Concepción Teresa Sierra	Lo ideal sería que salieran del aula a unas clases de ampliación, aunque entiendo la problemática del centro para llevar a cabo este proyecto.
Manuel Vidal	Crearles las mejores condiciones para el desarrollo de estas capacidades. <u>De tipo objetivo</u> : lograr establecer un ambiente idóneo en clase basado en la seguridad y el reconocimiento de sus aptitudes (cuando hablo de seguridad me refiero a liberarlo de intimidaciones que menoscaben sus posibilidades). Posibilitar encuentros con otros alumnos del centro y/o del municipio en forma de círculos matemáticos. Complementar estos con los programas "externos" como estalmat. Visitas de matemáticos a estos círculos. Estos encuentros a buen seguro estimularán su interés. Estas lecciones podrían culminar en una revista matemática editada por ellos mismos.

La resposta general és proposar-los assistir a activitats fora de l'horari escolar.

En Bernat Ancochea creu que fer jornada contínua afavoriria la formació d'aquest alumnat.

No obstant això, la Marta Berini demana un esforç del Departament d'Educació per tal d'implantar un projecte que poguessin aprofitar els/les alumnes amb altes capacitats Matemàtiques.

I la Iolanda Guevara pensa que no tots els nivells estan coberts amb el que s'ofereix en aquests moments.

La Magdalena Martínez i en David Obrador han proposat activitats als seus centres per treballar amb alumnes d'altres capacitats.

En Juan María Ruiz proposa que els/les alumnes puguin promocionar de curs adaptats a les seves capacitats.

D'altra banda, també hem realitzat dues entrevistes: amb l'Anton Aubanell, director del *creamat*, i amb la Carme Cascante, degana de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

El *creamat* (centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques) té com a finalitat facilitar recursos al professorat o als centres educatius per tal d'aconseguir un millor assoliment i desenvolupament de les competències que ha d'adquirir l'alumnat en l'àmbit matemàtic. Com a director del *creamat*, l'Anton Aubanell ens va oferir l'ajuda de l'entitat per desenvolupar un projecte que potencii les altes capacitats matemàtiques, aportant la seva experiència i els recursos dels que disposen.

La degana de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, la Carme Cascante, ens va parlar sobre la situació actual de la facultat envers la col·laboració amb els programes d'altres capacitats matemàtiques. Com hem vist anteriorment, la Universitat de Barcelona desenvolupa activitats per a alumnes de secundària interessats en potencia el seu talent matemàtic. De la mateixa manera, ens va informar que ocasionalment també cedeixen l'espai físic de la Facultat per organitzar esdeveniments matemàtics.

Per tant, després de llegir les respostes del/de les entrevistats/des, es pot observar com, si l'alumnat no té un diagnòstic de l'equip psico-pedagògic, els/les professors/es tenen dificultats per detectar-los. Els ofereixen participar en programes fora de l'horari lectiu, organitzats pel/per la professor/a o d'entre els que ja existeixen, que no són avaluats.

Així doncs, la situació que actualment tenim referent a l'alumnat amb altes capacitats és que les lleis educatives permeten adaptar els continguts curriculars i flexibilitzar la permanència en un curs o en una etapa a l'alumnat amb altes capacitats intel·lectuals. En el cas de les altes capacitats matemàtiques, el professorat pot proposar a l'alumnat amb talent matemàtic adaptar el seu currículum en aquesta matèria.

Ara bé, per poder plantejar aquesta situació, l'alumne/a ha d'estar detectat. Com hem vist anteriorment, la detecció de les altes capacitats, siguin del tipus que siguin, és una tasca complicada. Si l'equip psico-pedagògic no pot diagnosticar a l'alumne/a amb altes capacitats matemàtiques, el professor/a pot parlar amb el tutor/a per decidir si realitzen els tests referents a les altes capacitats (només n'existeixen fins els 14 anys). Tot i que, com hem vist, aquests estan basats en les respostes del professorat i família de l'alumne/a, així com les del/de la propi/pròpia alumne/a.

Les experiències viscudes pels/per les nostres entrevistats/des ens indiquen que, usualment, és el/la professor/a qui, a partir de les preguntes que realitza l'alumne/a (així com d'altres indicadors com la velocitat a la que realitza les tasques, el nivell d'avorriment que transmet o les estratègies que utilitza al resoldre els problemes), intueix que té altes capacitats matemàtiques.

Per tant, és important que el/la professor/a disposi de materials, recursos i estratègies per tal de poder potenciar les altes capacitats matemàtiques de l'alumne/a. D'una banda, l'alumne/a ha de rebre reptes per superar-se i augmentar la seva curiositat matemàtica. D'altra banda, ha de sentir-se recolzat i ha de notar que la seva feina està sent reconeguda.

Com hem vist, a Catalunya disposem de diferents activitats matemàtiques on l'alumne/a pot participar (recordem que en algunes ha de ser seleccionat) però és difícil pel/per la professor/a fer un seguiment i reconèixer la feina de l'alumne/a.

Però a l'hora de tractar l'alumnat amb altes capacitats a l'aula cada docent intenta atendre'ls de la millor manera possible, en funció de la disponibilitat personal i les possibilitats que li ofereix el centre educatiu, però sense cap espai de referència que el pugui orientar i ajudar en aquesta tasca, que acaba enfocant de forma autònoma.

Així doncs, la finalitat d'aquest treball és fer una proposta que pugui donar suport als docents per tal que puguin treballar a l'aula amb alumnat d'altres capacitats matemàtiques i puguin avaluar el seu aprenentatge. La proposta que donarem és la creació d'un entorn amb una estructura possible i real, amb pressupost mínim, i on el professorat comparteixi materials, recursos i experiències.

3.3. Proposta d'actuació

Una vegada analitzades les respostes del professorat, podem constatar que totes les propostes existents es desenvolupen i es plantegen fora de l'horari escolar. No obstant això, potser seria bo que s'habilitessin eines i espais per poder donar suport al professorat que té alumnes amb altes capacitats matemàtiques dintre de l'aula.

Tots els centres de secundària disposen d'una estructura de suport per a alumant amb més dificultats. Però l'atenció als alumnes d'altres capacitats recau íntegrament en el professorat d'aula que, a la vegada, ha d'atendre també a l'alumnat amb més dificultats d'aprenentatge.

Aquesta situació pot comportar que el professorat, amb una trentena d'alumnes per aula, només pugui atendre puntualment a aquest tipus d'alumnat. I això pot implicar que, aquest alumnat, al no tenir la possibilitat de treballar i utilitzar tota la seva capacitat no pugui desenvolupar tot el potencial del que realment disposa.

A més a més, aquest tipus d'alumnat acostuma a aparèixer de forma puntual. Així doncs, potser estaria bé posar en contacte el professorat i l'alumnat d'altres capacitats matemàtiques de tot el territori, oferint i potenciant la possibilitat de fer treball compartit.

Estaria també bé que professorat de primària, secundària i universitari poguessin treballar conjuntament per tal de poder decidir i consensuar les accions que es desenvoluparan a partir del moment de la detecció d'un alumne/a amb altes capacitats matemàtiques.

És evident que, en aquest cas, les TIC (tecnologies de la informació i la comunicació) han de desenvolupar un paper important, ja que permeten col·laborar i posar en contacte professorat i alumnat de centres de diferents àrees territorials de forma quasi instantània i eficient.

La proposta que es planteja hauria de ser complementària a les activitats i programes ja implantats actualment que potencien el talent matemàtic, però fent un tractament de proximitat amb els/les docents que tenen contacte diari amb aquest alumnat.

La idea principal d'aquesta proposta seria facilitar la feina del/del professor/a a d'aula amb l'objectiu d'atendre l'alumnat amb altes capacitats matemàtiques. Així doncs, es podria generar un espai on fos possible:

- Conèixer totes les activitats existents a Catalunya fora de l'horari escolar per l'alumnat amb altes capacitats matemàtiques.
- Trobar material i recursos adaptats a aquest tipus d'alumnat, organitzat per blocs de continguts i nivell educatiu.
- Relacionar-se amb professorat que comparteix la mateixa situació, amb l'objectiu de crear una xarxa de suport i ajuda on es comparteixin experiències.

A la vegada aquest espai ens permetria :

- Posar en contacte l'alumnat amb altes capacitats de tot el territori per treballar conjuntament i crear comunitat.
- Fer d'enllaç per posar en contacte el professorat i l'alumnat amb els centres de matemàtica avançada (centres de recerca, universitats, etc...)

La proposta s'hauria d'estructurar de manera que es pogués adaptar a les diferents formes de treball i situacions de cada alumne, és a dir, entenent d'una banda que l'alumne/a pot treballar dintre de l'aula paral·lelament als/a les seus/seves companys/es i, d'altra banda, realitzant les activitats proposades com una ampliació a la feina que es duu a terme a l'aula. El/La professor/a seria l'encarregat/da d'escollir els materials i recursos més adients i de fer el seguiment i avaluació d'aquestes activitats i si es considera adient fer un pla individualitzat a l'alumne.

Amb aquesta proposta, després que l'alumne/a hagi estat detectat i participi en aquest procés d'atenció de les seves altes capacitats matemàtiques, seria fàcil fer el seguiment de l'alumne/a per part del professorat dels següents nivells educatius.

Per tal de potenciar aquest projecte, caldria que les diferents institucions educatives s'impliquessin en el projecte. En aquest sentit, seria importantíssim el paper que podrien desenvolupar tant el Departament d'Ensenyament, com institució que ha d'atendre les necessitats dels alumnes, i les diferents universitats catalanes que són les futures receptores de l'alumnat, ja sigui en tasques de suport com de coordinació.

Amb la idea de plantejar des del primer moment un projecte obert es podria convidar a totes les entitats que actualment ja coordinen activitats per alumnat amb altes capacitats a participar-hi i/o col·laborar-hi en funció de les seves possibilitats: *creamat*, SCM, membres de les diferents entitats de professors de matemàtiques que formen part de la FEEMCAT (ADEMGI, APMCM, APaMMs i ABEAM), etc...

La creació d'un espai d'aquest tipus requereix de tota una estructura que en els temps actuals pot resultar complexa, però la idea bàsica és proposar una estructura inicial que es pugui anar desenvolupant de forma col·laborativa, que es pugui mantenir en el temps i que sigui una eina d'ajut per al professorat implicat.

D'inici, caldria crear un nucli de professor/es que coordinés i gestionés els primers passos del projecte. Possiblement, seria bo començar amb una prova pilot amb un nombre reduït d'alumnes amb l'objectiu de validar la proposta inicial.

3.3.1. Estructura inicial

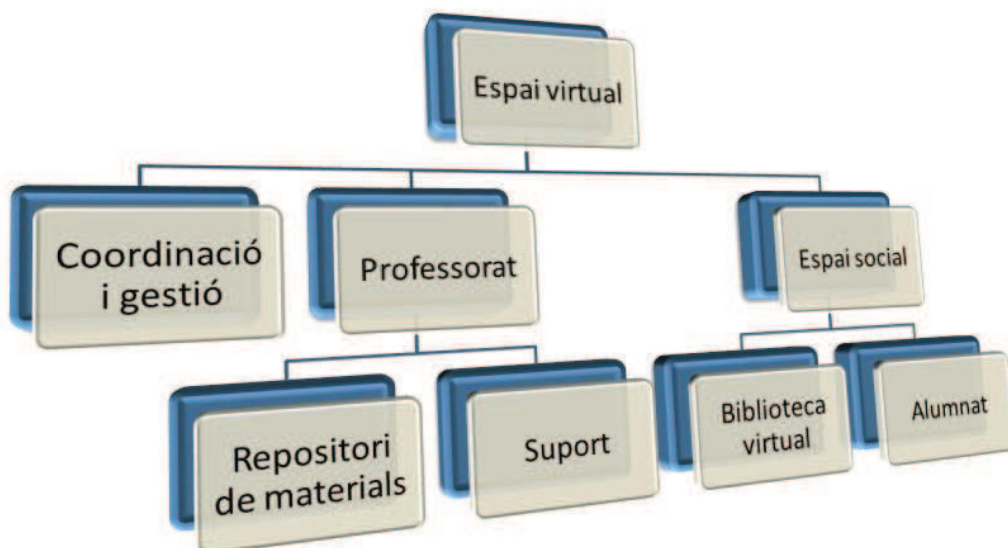
La majoria de centres d'educació secundària (així com les diferents universitat catalanes) disposen d'entorns virtuals propis que podrien allotjar el projecte. Per exemple, el Departament d'Ensenyament disposa de la Plataforma Àgora (basada en la plataforma moodle) que dóna allotjament als centres educatius i serveis educatius que ho necessiten. O, també es podria allotjar en els entorns virtuals (majoritàriament, també es basen en la plataforma moodle) d'alguna de les universitats de Catalunya que puguin participar.

Fer servir un entorn virtual d'aquest tipus facilitaria la tasca del professorat i de l'alumnat, ja que ja estarien familiaritzats amb aquest entorn al utilitzar-lo freqüentment.

Dintre de l'entorn es podrien generar diferents espais i aules virtuals:

- Espai de coordinació del projecte
- Espai de coordinació i suport del professorat

- Espai social per crear comunitat
- Aules de treball amb alumnat segons el seu nivell educatiu o centres d'interès
- Aules amb activitat obertes a tot el professorat i alumnat de Catalunya



Aquestes aules i espais podrien tenir un/a coordinador/a, que podria ser un dels professors participants al projecte. També caldria comptar amb professorat que coordinés i gestionés l'entorn virtual.

A les aules per l'alumnat es podrien proposar diferents tipus d'activitats que es podrien realitzar telemàticament i de forma voluntària per part dels/de les alumnes participants: tallers, seminaris, conferències, debats virtuals, concursos, activitats per preparar proves específiques, propostes de problemes presentades pels participants, suport a projectes i treballs de recerca, experiències, etc...

Aquesta estructura inicial es podria anar desenvolupant en funció de les necessitats i propostes dels usuaris.

A més, per tal de posar en contacte de manera directa al professorat i alumnat, es podrien fer dues jornades presencials: una a l'inici de curs i una altra al finalitzar l'any acadèmic. D'aquesta manera, el professorat i l'alumnat es podria conèixer i compartir les seves vivències.

A nivell de temporització podem pensar en el curs acadèmic 2013-2014 per conformar el nucli de professorat inicial del projecte, la creació de l'entorn virtual i dels materials inicials i la divulgació del projecte. Durant el curs 2014-2015 es duria a terme a la primera prova pilot, recollint les valoracions de les propostes dels participants, tant alumnat com professorat, per passar a ser completament operatiu durant el curs acadèmic 2015-2016

3.3.2 Divulgació i promoció del projecte

Amb l'objectiu de divulgar, promocionar i donar a conèixer el projecte es podrien aprofitar els diferents programes, activitats i jornades que es realitzen al territori, tant a nivell de professorat de primària i secundària com universitari.

En una primera fase, es podria presentar el projecte i els materials i recursos inicials, intentant captar professorat voluntari que estigués interessat en participar-hi.

En cada any acadèmic es faria la promoció d'aquest entorn virtual en les diferents entitats i organitzacions participants en el projecte, amb l'objectiu de donar-se a conèixer al professorat i alumnat nou que pugui ser-ne usuari.

3.3.3. Material i activitats

Inicialment, el professorat que formés part del nucli seria l'encarregat de fer una primera proposta de continguts per a cada nivell que s'aniria ampliant de forma gradual amb les aportacions de materials i recursos per part del professorat que anés utilitzant l'espai virtual.

En una primera prova pilot, es podria oferir un primer curs per alumnat de cicle superior de primària, un per alumnat de 1r i 2n d'ESO, un per alumnat de 3r i 4t d'ESO i un per alumnat de Batxillerat. Aquesta proposta tindria en compte els continguts del currículum oficial dels diferents nivells educatius de cada curs.

El professorat participant podria triar les activitats que considerés més adients pels/per les seus/seves alumnes. Podria treballar algun bloc de contingut específic, amb activitats relacionades amb el que s'està treballant a l'aula amb la classe, o bé, treballant per projectes amb activitats lligades als interessos de l'alumne/a.

Aquests materials podrien ser confeccionats i proposats pel professorat participant dels diferents nivells educatius i, també, podria col·laborar alumnat i professorat universitari de les facultats implicades, ja sigui elaborant nous materials o desenvolupant tasques de suport i tutorització.

Es podrien utilitzar materials propis del professorat participant o, amb els corresponents permisos, materials publicats de totes les activitats que ja es duen terme actualment així com dels diferents repositoris existents, com per exemple propostes de l'Aplicatiu de Recobriment Curricular (ARC) del Departament d'Ensenyament. També es podrien adjuntar activitats amb llicència Creative Commons per treballar alguns dels continguts del currículum educatiu, que són d'utilització lliure sempre i quan es notifiqui l'autoria. De la mateixa manera, es podria dedicar un espai per proposar la realització d'algunes de les activitats que es poden trobar entre d'altres a la pàgina web del Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (FISME) o de la Web Illuminations – Resources for teaching maths del National Council of Teachers of Mathematics.

A més, s'hi podrien integrar algunes de les activitats que actualment ofereixen les diferents universitats. A tall d'exemple podríem destacar les activitats que ja ofereix la nostra facultat de matemàtiques per als seus futurs estudiants: les xerrades - taller, els tallers d'intel·ligència artificial, la matefest - infofest, el suport als treballs de recerca o connectes amb les matemàtiques.

També es podrien aprofitar les trobades que s'organitzen específicament per al professorat de secundària.

3.3.4. Recursos propis

A continuació, proposarem algunes activitats d'exemple per cada bloc de secundària creat al Campus Virtual que podrien formar part de la proposta inicial a desenvolupar en la prova pilot. La resta d'activitats proposades es poden consultar als annexos.

Bloc 1r i 2n d'ESO

Proposta activitat 1

En aquesta activitat, l'alumne/a s'iniciaria al món de la programació.

Scratch és un entorn de programació creat al *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) com a resultat de la recerca duta a terme en el *Lifelong Kindergarten Group*. Hereu directe dels esforços construccionistes (basats en el constructivisme de Piaget) de Seymour Papert amb el LOGO dels anys setanta i vuitanta, aprofita els canvis tecnològics succeïts des d'aleshores per millorar substancialment la interfície de l'entorn per facilitar i fer més atractiva i llaminera la programació d'ordinadors. L'*Scratch* permet programar de manera visual i intuïtiva activitats amb un ventall molt ampli de recursos.

Es proporcionaria a l'alumne/a una presentació de l'*Scratch* i se li donaria llibertat perquè investigui i faci creacions de manera autònoma.

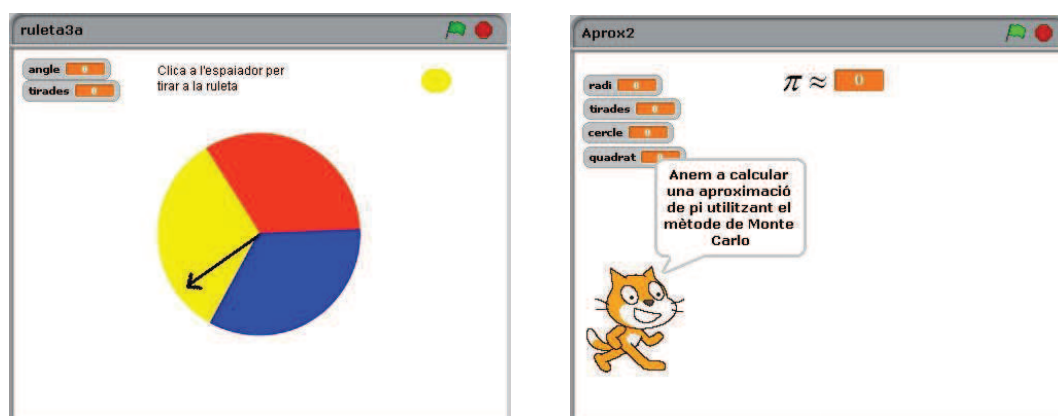
A l'alumne/a se li demanaria fer un programa mitjançant l'*Scratch* amb 3 activitats matemàtiques relacionades amb el/s tema/es que vulgui o que s'estigui/n treballant a l'aula.

A més, per tal que treballi la programació, se li demanaria que en algunes de les activitats i/o projectes incloguessin:

- Canvis d'escenari
- Moviments del personatge principal
- Ús de sons
- Utilització d'imatges (existents al programa, pròpies i/o buscades a internet)
- Interacció de l'activitat amb l'usuari (pregunta-resposta)
- Ús de les respostes de l'usuari com a dades
- Diferents continuacions en funció de la resposta de l'usuari
- Utilització de nombres aleatoris per confeccionar dades o nombres d'alguna de les activitats

El resultat final es podria presentar als seus companys d'aula, incorporar-se al repositori oficial del projecte *Scratch* i també a l'entorn virtual es podria habilitar un fòrum on els alumnes participants hi podrien enllaçar les seves creacions.

Exemples:



En el primer exemple podem veure una recreació d'una de les ruletes que formen part de la Caixa de Varga (caixa que conté un plegat de jocs per treballar l'estadística i la probabilitat. Ve acompanyada de diversos tipus de daus, baldufes, monedes, boles i urnes). I, en el segon, podem veure un exemple d'aproximació de π utilitzant el mètode de Monte Carlo.

Aquesta tipus d'activitat tenen un llarg recorregut iniciant-se amb el programes més senzills i poden arribar a propostes molt més complexes, amb el que permet un treball transversal durant tota l'educació secundària.

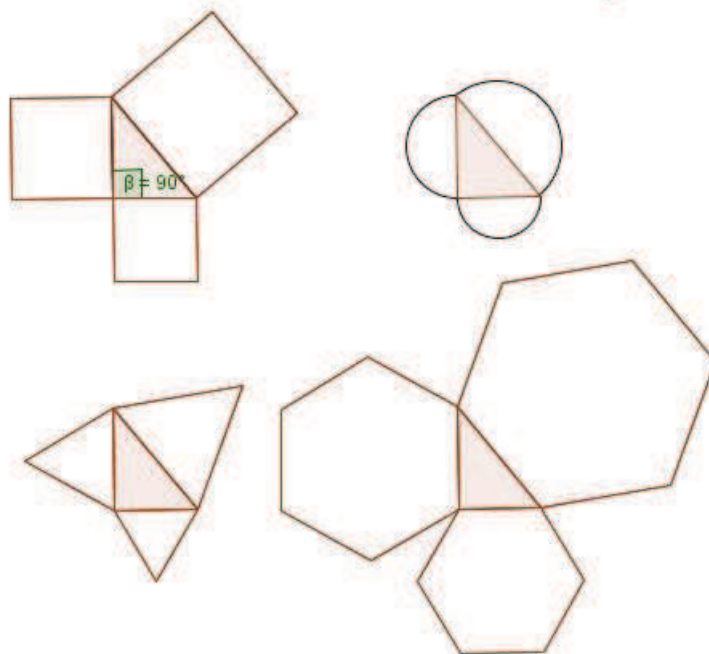
Tal com deia l'Anton Aubanell en la seva presentació *Programació a l'educació bàsica? Sí* a la II Jornada Catalana de l'Ensenyament de la Programació a Primària i ESO, que es va dur a terme al Citilab de Cornellà (22/05/2010), la programació és un instrument per ensenyar matemàtiques que permet posar en joc conceptes (angles, coordenades, polígons, variables i expressions algebraiques, etc.), realitzar algorismes, construir processos i conceptes matemàtics de fons (raonament i lògica, iteració, sentit de les variables i els operadors, codificació, etc.) i educa actituds (curiositat, gust per la millora, exploració i recerca, gestió positiva de l'error, etc.)

Aquest tipus de feina pot ser la porta d'entrada a altres llenguatges de programació que es treballaran posteriorment a batxillerat i estudis universitaris.

Proposta d'activitat 2

Extensions del Teorema de Pitàgores⁸

1. Demuestra que el triangle equilàter construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és equivalent a la suma dels triangles equilàters construïts sobre els catets.
2. És veritat que l'hexàgon regular construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és equivalent a la suma dels hexàgons regulars construïts sobre els catets? És cert també si construïm pentàgons regulars?
3. És veritat que el semicercle construït externament sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és equivalent a la suma dels dos semicercles construïts sobre els catets?



⁸ Activitats extretes del llibre *La Matemàtica. La Geometria* d'Emma Castelnuovo

Bloc 3r i 4t d'ESO

Proposta d'activitat 1

A 3r d'ESO es podria proposar una activitat⁹ per desenvolupar al llarg de tot el curs. Es plantejaria a l'alumnat que llegeixi el llibre *El dimoni dels nombres* de Hans Magnus Enzensberger (editorial Siruela). Hem escollit aquest llibre, però es podria treballar sobre títols com: *Expediciones matemáticas* de Frank J. Swetz (editorial La esfera de los libros), *Un problema de conills* de Emily Gravett (editorial Cruïlla), *El contable hindú* de David Leavitt (editorial Anagrama) o *El señor del cero* de María Isabel Molina (editorial Alfaguara juvenil).

El dimoni dels nombres està dividit en 12 capítols (nits). Tot seguit, es farà una breu descripció d'alguns continguts matemàtiques que apareixen en els diferents capítols del llibre i que es podrien treballar amb l'alumne/a.

Primera nit: construcció dels nombres naturals a partir de l'1, la infinitud dels nombres naturals, el límit de la successió $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$.

Segona nit: el zero i el sistema posicional de numeració, potències de nombres naturals.

Tercera nit: nombres primers, criba d'Eratòstenes, conjectura de Goldbach (tot nombre parell superior a 2 es pot escriure com a suma de dos nombres primers, o equivalentment, qualsevol nombre natural superior a 5 pot representar-se com a suma de 3 nombres primers), el teorema de Bertrand (entre un nombre natural $n \geq 2$ i el seu doble $2n$, hi ha sempre un nombre primer p).

Quarta nit: representació decimal de nombre (nombres irracionals, nombres amb part decimal periòdica, a partir de fraccions), densitat dels nombres irracionals.

Cinquena nit: propietats dels nombres triangulars, dels nombres quadrats.

Sisena nit: els nombres de Fibonacci.

Setena nit: el triangle de Pascal (o de Tartaglia).

Vuitena nit: els nombres factorials, les permutacions i la relació amb el triangle de Pascal.

Novena nit: infinitud dels nombres senars, dels nombres primers, dels nombres de Fibonacci, dels nombres triangulars, dels nombres factorials i de les potències enteres de 2; la divergència de la sèrie harmònica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, la convergència de la sèrie geomètrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Desena nit: el límit de la successió $\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\}_{n \geq 1}$, essent $\{u_n\}_{n \geq 1}$ la successió dels nombres de Fibonacci (convergeix a la raó àuria $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), fractals (amb el pentàgon i els flocs de neu), teorema dels poliedres convexos d'Euler (característica d'Euler-Poincaré).

Onzena nit: els Elements d'Euclides, els Axiomes de Dedekind-Peano sobre la construcció axiomàtica dels nombres naturals, problemes matemàtics no resolts.

Dotzena nit: matemàtics il·lustres: Klein, Cantor, Euler, Gauss, Fibonacci, Pitàgores.

⁹ Adaptació del treball realitzat a l'assignatura optativa *Didàctica de les Matemàtiques* a la Universitat de Barcelona al curs 2012-2013, presentat pels alumnes Joan Duran, Lúcia Fos i Albert Villalgorido

Cada capítol ofereix una gran varietat d'activitats per a realitzar. El que es demanaria és que un/a alumne/a o un grup d'alumnes s'encarreguessin de crear una activitat que estigui relacionada amb el capítol que tinguin assignat.

A continuació presentarem algunes propostes d'activitats per alguns dels capítols:

Cinquè capítol:

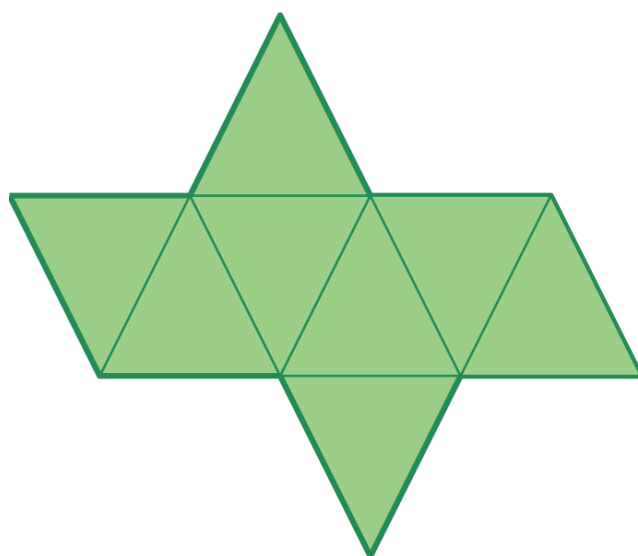
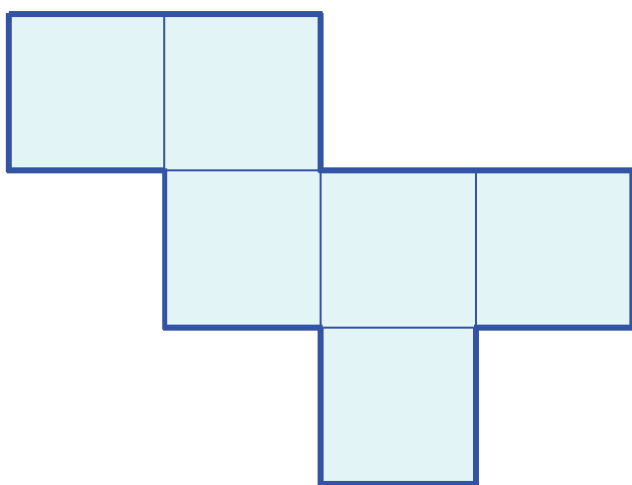
Es demanarà a l'alumne/a que defineixi els nombres triangulars, argumenti per què s'anomenen així i descriu les quatre propietats que apareixen al capítol. També es demanarà que defineixi els nombres quadrats, argumenti per què s'anomenen així i descriu les dues propietats que apareixen al capítol.

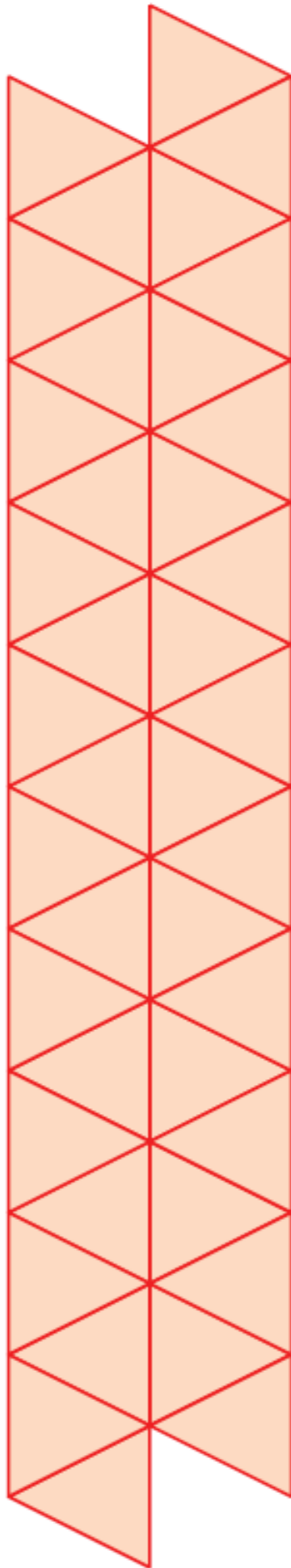
A continuació, es demanarà la realització d'un treball on s'expliqui com resoldre les següents cinc qüestions:

1. La suma dels m primers nombres senars.
2. La suma de m nombres senars consecutius qualssevol (suma desplaçada).
3. La suma dels m primers nombres parells, també a partir de la suma dels m primers nombres senars.
4. La suma desplaçada de nombres parells consecutius a partir del punt anterior.
5. La suma de nombres naturals consecutius a partir de la suma de nombres senars i nombres parells consecutius.

Desè capítol:

Es donarà a l'alumne/a 3 patrons per construir poliedres. S'haurà d'encarregar de calcular la característica d'Euler, col·locar les pestanyes adequadament, construir-los i verificar que els càlculs que havia fet són correctes:





Onzè capítol:

Es proposarà a l'alumne/a que busqui 3 Proposicions concretes que apareixen als Elements d'Euclides i les realitzi amb els coneixements geomètrics que ha adquirit en els anteriors cursos.

Les Proposicions demanades seran la 1, 2 i 41.

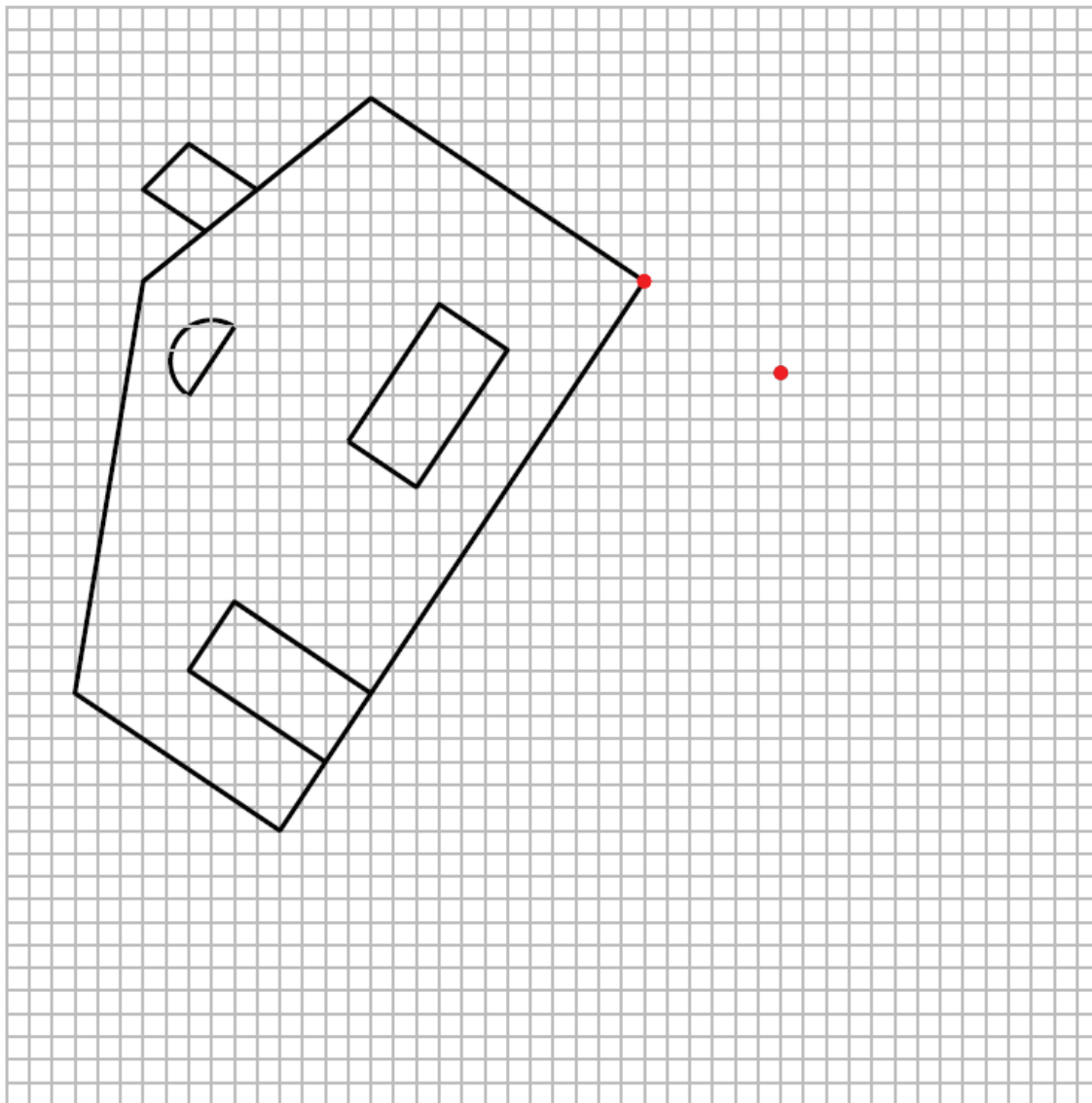
Proposició 1: Construeix un triangle equilàter sobre el segment $[AB]$ donat.

Proposició 2: Posa un punt donat com a extrem d'un segment igual a un segment donat.

Proposició 41: Demostra que, si un paral·lelogram té la mateixa base que un triangle i està entre les mateixes paral·leles, aleshores el paral·lelogram és el doble del triangle.

Les Proposicions 1 i 41 les haurà de demostrar amb regle i compàs, i les propietats dels paral·lelograms i les fórmules de l'àrea d'un triangle i d'un paral·lelogram.

A la Proposició 2 rebrà una figura i haurà de trobar l'eix de simetria a partir d'un punt i haurà de fer la simetria axial.



Dotzè capítol:

Es demanarà a l'alumne/a un petit treball d'història sobre els matemàtics que apareixen en aquest capítol: quan van néixer, com va ser la seva vida i què van aportar al món de les matemàtiques.

Bloc 1r i 2n de Batxillerat

Proposta d'activitat 1

En aquesta activitat, es proposaria a l'alumnat investigar sobre la història dels nombres. A partir de les indicacions donades, l'alumne/a hauria de confeccionar un treball on expliqui amb les seves paraules la història dels nombres escrits i haurà de confeccionar un eix cronològic. A més, hauria d'incloure algun dels exemples i relacionar-los amb la matemàtica actual.

Les indicacions que es donarien perquè l'alumnat investigui:

- Mesopotàmia
- El naixement dels nombres escrits
- Xifres elamites
- Xifres cuneïformes
- Bossa del palau de Nuzi
- La base 12
- El zero babilònic
- Tauletes babilòniques
- Tauleta Plimpton 322
- Aritmètica, geometria i àlgebra babilòniques
- Aritmètica, geometria i àlgebra egípcies
- Xifres hieràtiques
- Ull d'Horus
- Papir Rhind i papir de Lahun
- Civilització grega
- Tales de Milet, Pitàgores de Samos, comunitat pitagòrica
- Tres problemes clàssics
- Euclides

Proposta d'activitat 2

En aquesta activitat proposaríem a l'alumnat desenvolupar demostracions a partir del mètode de reducció a l'absurd i del mètode d'inducció completa.

Al Campus Virtual trobarien què és el mètode de reducció a l'absurd i de mètode d'inducció completa, així com tres problemes per demostrar.

Mètode de reducció a l'absurd: La implicació $A \Rightarrow B$ és equivalent a la implicació $no A \Rightarrow no B$. Si demostrem la segona implicació, haurem demostrat la primera.

Mètode d'inducció completa: Volem demostrar que una propietat $P(n)$ és vàlida per a qualsevol nombre natural n . Per veure-ho:

- Provem que es verifica per a $n=1$: $P(1)$ és certa.
- Provem que, si suposem que és vertadera per a un cert valor n , llavors també és vertadera per la següent, $n+1$: si $P(n)$ és certa $\Rightarrow P(n+1)$ és certa.

Tres problemes per demostrar:

1. Demostra que $\sqrt{3}$ és irracional
2. Demostra que $n^3 - n$ és múltiple de 6 per a qualsevol valor natural de n .
3. Demostra que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Projectes de recerca

Seria interessant poder oferir suport al professorat per tal d'enfocar petits treballs d'investigació amb l'alumnat dels primers cursos de l'educació secundària. Aquest treballs podrien tractar temes relacionats amb els interessos de l'alumnat.

Així entenem que, ja que en aquests moments els parcs estan plens de nens i nenes que juguen amb baldufes, podria ser interessant analitzar-ho al detall amb l'alumnat, conjuntament amb el professor de física del centre escolar.

Amb l'alumnat que ha començat a programar amb l'*Scratch* es podria iniciar en la programació de petits robots que formen part de la dotació de molts centres de secundària. Aquesta seria una bona introducció per la programació amb altres tipus de llenguatges que s'utilitzen posteriorment a nivell universitari. Aquest treball es podria fer conjuntament amb professorat de tecnologia.

Pensant en un treball de tipus més formal, es podria presentar a l'alumnat els nombres metàl·lics. S'anomenen nombres metàl·lics a un conjunt infinit de nombres irracionals quadràtics positius que són les solucions positives de les equacions quadràtiques del tipus $x^2 - px - q = 0$, on p i q són nombres naturals. A les seves solucions positives se les coneix per nombres metàl·lics.

També es podrien abordar recerques coordinades en forma paral·lela o de treball en grup de forma conjunta amb alumnes de diferents centres, arribant a una proposta final conjunta. El treball en paral·lel permetria avançar d'una forma més ràpida i eficient i l'alumnat desenvoluparia un treball de col·laboració i cooperació.

Per exemple es podrien treballar els anamorfismes: un anamorfisme és la deformació d'una imatge feta mitjançant un procediment òptic o a través d'un procediment matemàtic. És un efecte de perspectiva utilitzat per obligar a l'observador a mirar l'obra des d'un punt de vista òptic, des del qual l'element agafa una forma proporcionada i clara. Actualment els anamorfisme s'utilitzen molt en publicitat.

Les diferents construccions realitzades en els diferents centres podrien confeccionar un treball que podria ser presentat en una de les jornades presencials.

El suport per part de l'alumnat i el professorat universitari seria cabdal en aquesta sentit, ja que podrien posar a l'abast de l'alumnat tota l'experiència acumulada en els diferents projectes de recerca en que han participat o que en aquells moments estan desenvolupant.

4. Concordança de resultats i objectius

A continuació, valorarem si s'han assolit els objectius presentats al punt 2 d'aquest treball i els resultats que s'han extret durant el desenvolupament del treball.

Recordem que l'objectiu general d'aquest treball era el de confeccionar una proposta d'actuació per potenciar el talent matemàtic dels alumnes amb altes capacitats matemàtiques. I que, per tal d'assolir-lo, el vam dividir en quatre objectius específics:

- *Conèixer les lleis educatives que fan referència a la diversitat de l'alumnat, especialment les que fan referència a l'alumnat amb altes capacitats:*

Aquest objectiu s'ha assolit en el punt 3.1.1. i ha estat imprescindible per saber què es pot fer i com es pot actuar amb el currículum educatiu de l'alumnat amb altes capacitats. Això ha permès confeccionar de manera adient la proposta presentada al punt 3.3.

- *Conèixer quins programes i activitats existeixen actualment per potenciar el talent matemàtic a Catalunya, Espanya i altres països del món:*

Aquest objectiu s'ha assolit en el punt 3.1.2. Ha estat molt valuós tenir aquesta informació per tal de crear una proposta al punt 3.3. complementària a tots els programes i activitats que actualment existeixen i que desenvolupen un important paper en la potencialització del talent matemàtic a Catalunya.

- *Tenir una visió propera de la situació actual a les aules i als programes i activitats citats anteriorment:*

Aquest objectiu s'ha assolit en el punt 3.2. La conclusió extreta de les respostes donades per professorat de Catalunya i la resta d'Espanya referent al treball a les aules amb alumnes d'altas capacitats matemàtiques i als programes i activitats existents, ha permès conèixer la situació real i enfocar la proposta presentada al punt 3.3. a desenvolupar material i recursos per treballar amb aquest tipus d'alumnat a l'aula, ja sigui amb activitats d'ampliació o amb treball paral·lel.

- *Desenvolupar una proposta d'actuació per donar suport al professorat amb materials i recursos que pugui fer servir a l'aula amb l'alumnat d'altas capacitats matemàtiques:*

Aquest objectiu s'ha assolit en la seva totalitat al punt 3.3. A partir de l'assoliment dels objectius anteriors, s'ha proposat la creació d'un entorn virtual que permeti conèixer totes les activitats existents a Catalunya fora de l'horari escolar per l'alumnat amb altes capacitats matemàtiques, trobar material i recursos adaptats a aquest tipus d'alumnat, organitzat per blocs de continguts i nivell educatiu i relacionar-se amb professorat que comparteix la mateixa situació, amb l'objectiu de crear una xarxa de suport i ajuda on es comparteixin experiències.

5. Conclusió

Per finalitzar aquest Treball Final de Grau, m'agradaria fer una síntesi de la situació actual respecte al treball amb alumnat amb altes capacitats matemàtiques.

D'una banda, les lleis educatives permeten als centres fer adaptacions curriculars i flexibilitzar la duració de cada etapa educativa de l'alumnat amb altes capacitats intel·lectuals. En el cas de les altes capacitats matemàtiques, el professorat pot proposar a l'alumnat amb talent matemàtic adaptar el seu currículum en aquesta matèria.

D'altra banda, a l'hora de tractar l'alumnat amb altes capacitats a l'aula cada docent intenta atendre'ls de la millor manera possible, en funció de la seva disponibilitat i de les facilitats que li ofereix el centre educatiu, però sense cap espai de referència que el pugui orientar i ajudar en aquesta tasca, la qual, finalment, acaba enfocant de forma autònoma.

Així doncs, la proposta de crear un entorn virtual permetria trobar material i recursos adaptats a aquest tipus d'alumnat, organitzat per blocs de continguts i nivell educatiu i relacionar-se amb professorat que es troba a la mateixa situació, amb l'objectiu de crear una xarxa de suport i ajuda, i on es poden posar en comú totes les experiències viscudes.

La següent acció que es podria dur a terme és la de buscar un nucli de docents interessats en coordinar i gestionar un entorn virtual. A partir d'aquí, amb aquesta estructura inicial, el projecte es podria desenvolupar de manera col·laborativa a partir de les aportacions del professorat que es vagi afegint, creant nous recursos i materials i compartint experiències.

Pel que fa al meu aprenentatge personal, crec que aquest Treball Final de Grau m'ha ratificat que vull ser professora. El cursar el Grau en Matemàtiques, m'ha ajudat a que aquesta ciència m'agradi encara més i a conèixer, i a saber descobrir, conceptes que, com a professora, hauré de transmetre. L'assignatura optativa de Didàctica de les Matemàtiques em va introduir al món de l'educació i em va fer plantejar-me la idea d'intentar aconseguir que tots els/les alumnes puguin desenvolupar les seves capacitats. Dintre de la diversitat d'alumnat, em va cridar l'atenció la situació amb l'alumnat d'altes capacitats. Així doncs, espero, en la meua vida professional, poder aplicar els coneixements que he adquirit al llarg de la carrera i en aquest Treball Final de Grau per ser capaç d'atendre, també, a l'alumnat amb altes capacitats.

Per últim, però no menys important, m'agradaria agrair al Bernat Ancochea, l'Anton Aubanell, la Marta Berini, en Joan Josep Carmona, la Carme Cascante, la Teresa Cervelló, en Diego Díaz, en Raül Fernández, l'Antonio José García, la Iolanda Guevara, en Javier Martín, la Magdalena Martínez, en Fernando Merino, la Laura Morera, en David Obrador, la Bella Rojo, en Juan María Ruiz, la Concepción Teresa Sierra i en Manuel Vidal el haver-me aportat el seu punt de vista sobre les altes capacitats matemàtiques i haver-me ofert la seva ajuda en el transcurs d'aquest Treball Final de Grau.

6. Bibliografia

Llibres

- CALLEJO DE LA VEGA, M^a Luz. *La resolución de problemas en un club matemático*. Madrid: Narcea, S. A. de ediciones, 1990. 63 p. (apuntes I.E.P.S.; 53)
- CASTELNUOVO, Emma. *La Matemática. La Geometría*. Ketres Editora S.A. Barcelona.1981.
- FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. *Círculos Matemáticos*. Madrid: RSME y Ediciones SM. Colección Biblioteca estímulos matemáticos , 2012. 353 p.

Documents en línia

- Les altes capacitats: detecció i actuació en l'àmbit educatiu
http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Material_s_atencio_diversitat/Altes_capacitats/Altes_capacitats.pdf
(Febrer 2013)
- Ley Orgánica de Educación 2006
<http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
(Març 2013)
- Llei Catalana d'Educació 2009
<http://www.parlament.cat/activitat/cataleg/TL94In.pdf>
(Març 2013)

Pàgines web

- *American Mathematical Society*
<http://www.ams.org/home/page>
(Abril 2013)
- *Anem x+mates (APaMMs)*
<http://venxmates-epamms.wikispaces.com/>
(Juny 2013)
- *AwesomeMath*
<https://www.awesomemath.org/>
(Abril 2013)

- *Campus científicos*
<http://www.campuscientificos.es/>
(Juny 2013)
- *CiMs + CELLEX*
<http://www.cims-cellex.cat>
(Maig 2013)
- *Creamat*
<http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/inici>
(Febrer - Juny 2013)
- *Escuela de pensamiento matemático Miguel de Guzmán:*
<http://www.escuelapensamientomatematico.org/index.html>
(Juny 2013)
- *ESTALMAT*
<http://www.xtec.cat/~mberini/infogeneral.htm>
(Març 2013)
- *Facultat de Matemàtiques de la Universitat De Barcelona*
<http://www.mat.ub.edu>
(Maig 2013)
- *FEM Matemàtiques*
http://phobos.xtec.cat/edumatcat/fem_mates/moodle/
(Març 2013)
- *Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education*
<http://www.fisme.science.uu.nl/rekenweb/en/>
(Juny 2013)
- *Illuminations – Resources for teaching maths del Natioal Council of Teachers of Mathematics*
<http://illuminations.nctm.org/>
(Juny 2013)
- *Le Kangourou des Mathématiques*
<http://www.mathkang.org/default.html>
(Abril 2013)

- *Mathématiques sans Frontières*
<http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/PresGen.htm>
 (Abril 2013)
- *Olimpiades de Matemàtiques*
<http://www.xtec.cat/~cromero/aqui/olimp.htm>
 (Juny 2013)
- *Purple Comet! Math Meet*
<http://purplecomet.org/home/home>
 (Abril 2013)
- *Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*
http://www.sociedadpuigadam.es/puig/index1.php?id_pagina=10000
 (Març 2013)
- *Societat Catalana de Matemàtiques*
<http://www.cangur.org/web-nova/>
 (Març – Juny 2013)
- *Société Mathématique de France*
<http://smf.emath.fr/content/programme-2013-un-texte-un-math%C3%A9maticien>
 (Abril 2013)
- *Wiris*
<http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/index.html>
 (Juny 2013)



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

ANNEXOS DEL TREBALL

**ALTES CAPACITATS MATEMÀTIQUES A
L'AULA DE SECUNDÀRIA**

Lídia Fos Rodríguez

Director: Sergi Muria Maldonado
Realitzat a: Departament de
Matemàtica Aplicada i
Anàlisi. UB
Barcelona, 24 de juny de 2013

7. ANNEXOS

ANNEX 1: Graella de valoració per detectar alumnes amb altes capacitats de 9 a 14 anys, extreta de la Guia per a mestres i professors editada al gener de 2013 pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya *Les altes capacitats: detecció i actuació en l'àmbit educatiu*.

1 = mai 2 = gairebé mai 3 = sovint 4 = gairebé sempre 5 = sempre

INDICADORS		VALORACIÓ				
1	És espavilat/ada en situacions quotidianes i actua amb una facilitat inusual i admirable.	1	2	3	4	5
2	Té sentit de l'humor.	1	2	3	4	5
3	Demostra un esperit observador, agut i despert.	1	2	3	4	5
4	És atent/a, detallista i de tracte exquisit.	1	2	3	4	5
5	Considera les situacions problemàtiques com un repte.	1	2	3	4	5
6	Demostra curiositat per saber de tot, encara que no s'hagi explicat a classe.	1	2	3	4	5
7	És molt sensible davant els fracassos, les injustícies i la incomprensió.	1	2	3	4	5
8	És persistent i perfeccionista en les tasques que emprèn.	1	2	3	4	5
9	Els seus interessos són múltiples i variats.	1	2	3	4	5
10	Sobresurt entre els companys perquè comprèn les explicacions i les assimila ràpidament.	1	2	3	4	5
11	Prefereix relacionar-se amb companys més grans.	1	2	3	4	5
12	Freqüentment viu abstret en el seu món interior, com distret.	1	2	3	4	5
13	Sobresurt per la seva disponibilitat i responsabilitat en les tasques de grup.	1	2	3	4	5
14	Té una comprensió global i diferencia amb facilitat el que és principal del que és secundari.	1	2	3	4	5
15	Resol problemes encertant ràpidament el resultat.	1	2	3	4	5
16	Utilitza i organitza moltes estratègies per estudiar i aprendre.	1	2	3	4	5
17	S'organitza de forma que té temps per a tot.	1	2	3	4	5
18	El seu vocabulari i la seva fluïdesa verbal són rics i elaborats per a la seva edat.	1	2	3	4	5
19	L'apassiona la lectura i devora llibres i contes.	1	2	3	4	5
20	Les seves preguntes són incisives.	1	2	3	4	5
21	Té una imaginació desbordant i creativa.	1	2	3	4	5
22	S'avorreix i mostra desgana en classes rutinàries.	1	2	3	4	5
23	És molt madur/a per a la seva edat.	1	2	3	4	5
24	Si està concentrat/ada es molesta si l'interrompen.	1	2	3	4	5
25	Transfereix amb facilitat els coneixements i les estratègies apreses a altres continguts i situacions.	1	2	3	4	5
26	Capta les motivacions de la gent, els seus punts dèbils, les seves necessitats i comprèn els seus problemes.	1	2	3	4	5
27	Reprodueix amb exactitud els continguts apresos.	1	2	3	4	5
28	Posseeix àmplia informació sobre temes que no són propis de la seva edat.	1	2	3	4	5
29	No està satisfet/a del ritme del seu treball. Sempre creu que cal millorar-lo.	1	2	3	4	5
30	És autosuficient i autodidacte/a. Demana poca ajuda al professor per a les seves tasques.	1	2	3	4	5
Puntuació total						

Extret d'*Estratègies d'intervenció amb alumnat de necessitats educatives especials per altes capacitats, dins l'escola inclusiva*, treball elaborat per M. Teresa Gómez Masdevall en el marc de la llicència d'estudis retribuïda concedida pel Departament d'Ensenyament el curs 2008-09. L'autora d'aquesta taula és Luz Pérez (2005).

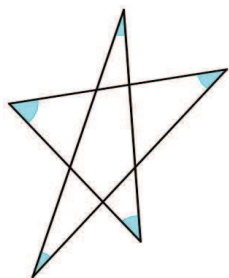
ANNEX 2: Recull d'activitats dels programes catalans que potencien el talent matemàtic

ESTALMAT: El tercer problema d'ESTALMAT-3, plantejat a la sessió del 22 d'abril de 2006

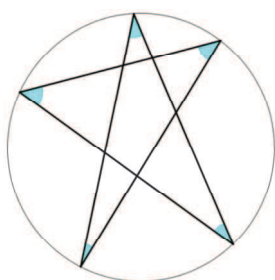
El tercer problema d'Estalmat-3: angles, polígons i estrelles

Ja us havíem anunciat quin seria el leit-motiv del tercer problema d'aquestes trobades del tercer any d'Estalmat. Ànim i a treballar i enviar les solucions comentades dels apartats 1, 2, 3, 4a), 4b) i 4c).

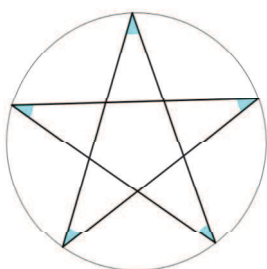
1. Quant sumen els angles marcats a la figura?



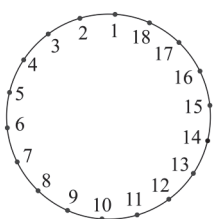
2. Creieu que si penséssim que el polígon estrellat està inscrit en una circumferència el problema seria més fàcil? Se t'acut així algun camí alternatiu per trobar la solució del problema?



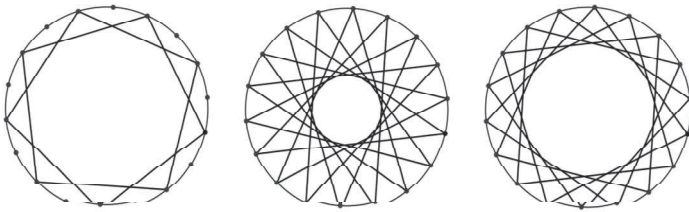
3. I si es tractés d'un polígon estrellat regular (és a dir que els vèrtexs del polígon estan igualment espaiats sobre la circumferència), quant valdria cadascun dels angles assenyalats?



4. Ara dividim una circumferència en 18 parts iguals



i formem polígons regulars o polígons estrellats regulars dibuixant els segments que uneixen aquests punts d'1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, ..., de 17 en 17. Els designarem amb aquests codis (18, 1), (18,2), (18, 3), ..., (18, 17). Tot seguit teniu tres exemples (els polígons (18,4), (18,7), (18,13))



4. a) Sense dibuixar tots els altres, intenta esbrinar si cadascun dels polígons designats amb els codis $(18, 1)$, $(18, 2)$, $(18, 3)$, ..., $(18, 17)$ donen com a resultat un polígon regular o un polígon estrellat.

4. b) Per al polígon $(18, 4)$ es veuen, de fet, 9 vèrtexs i 9 costats. Estudia quants vèrtexs i quants costats té efectivament cadascun dels polígons $(18, n)$.

4. c) Quants polígons diferents creus que apareixerien si es dibuixen els 17 polígons $(18, n)$? Per cada valor de n de l'1 al 17, calcula l'angle en el vèrtex del polígon estrellat $(18, n)$.

5. Aquesta feina la deixem per a la trobada:

- generalitza l'estudi anterior per al cas de polígons (m, n)
- pensa quins canvis s'observarien si els m punts no estiguessin igualment espaiats sobre la circumferència
- com es podria generalitzar l'apartat 1. a un polígon estrellat no regular ni inscrit en una circumferència?

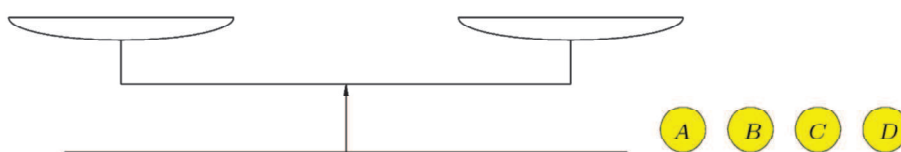
FEM Matemàtiques: Problemes de la 1a fase de 2n d'ESO de 2013

Problemes 1a fase 2n d'ESO (Nivell 3)



1. Amb el mínim de pesades

Tenim un conjunt de boles de la mateixa mida que estan marcades amb les lletres A, B, C, \dots Cada bola té un pes diferent de la resta i volem ordenar les boles en ordre creixent de pesos (de més lleugera a més pesada), però com que les diferències entre els pesos són petites, hem d'utilitzar una balança de plats per comparar els pesos.



a) En el cas que hi hagi 4 boles A , B , C , i D , busqueu un mètode per a ordenar-les pel pes fent servir la balança. Heu de mostrar quines serien les pesades en qualsevol dels casos que es puguin presentar al llarg del procediment.

Quin és el mínim de pesades que calen per tal de garantir que arribarem a ordenar-les correctament en tots els casos?

b) En el cas que hi hagi 5 boles A , B , C , D i E , quin és el mínim de pesades que calen per tal de garantir que arribarem a ordenar-les correctament en tots els casos?

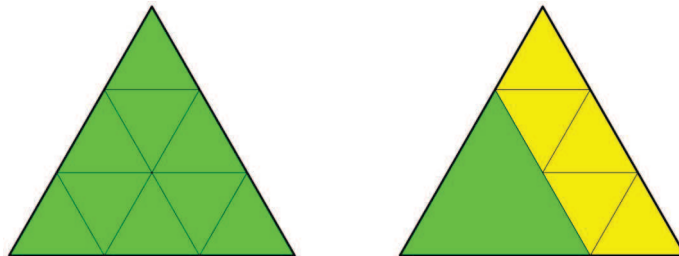
c) I si n'hi hagués 6, 7 ó 8 boles?

d) En el cas que siguin 4 boles de les quals coneixem que la diferència de pes entre dues boles de pesos consecutius és de 10 g (és a dir, que hi ha tres boles que pesen respectivament 10 g, 20 g i 30 g més que la més lleugera), el nombre mínim de pesades necessàries per a garantir que puguem ordenar-les pels pesos és més petit que en el cas general.

Trobeu un procediment amb el qual es disminueixi el nombre mínim de pesades que garanteixin l'ordenació.

2. Molts equilàters

Tots els triangles equilàters on la longitud del costat és un nombre enter es poden descompondre, de diverses maneres, en triangles equilàters també de costat enter i no necessàriament iguals. Per exemple, un triangle equilàter de costat 3, es pot dividir en nou triangles equilàters de costat 1, tal com podeu veure a la figura de l'esquerra, o en cinc triangles de costat 1 i un de costat 2 com a la figura de la dreta.



En el primer cas el triangle ha quedat dividit en nou peces i en el segon en sis.

Us proposem que exploreu les maneres de dividir un triangle equilàter de costat enter n en triangles equilàters també de costat enter i de manera que el nombre de triangles en què queda descompost sigui el més petit possible.

a) Mostreu la descomposició en el nombre mínim de peces de tots els triangles equilàters de costat enter n amb $n \leq 15$. Expliqueu les estratègies que heu fet servir per a trobar-les.

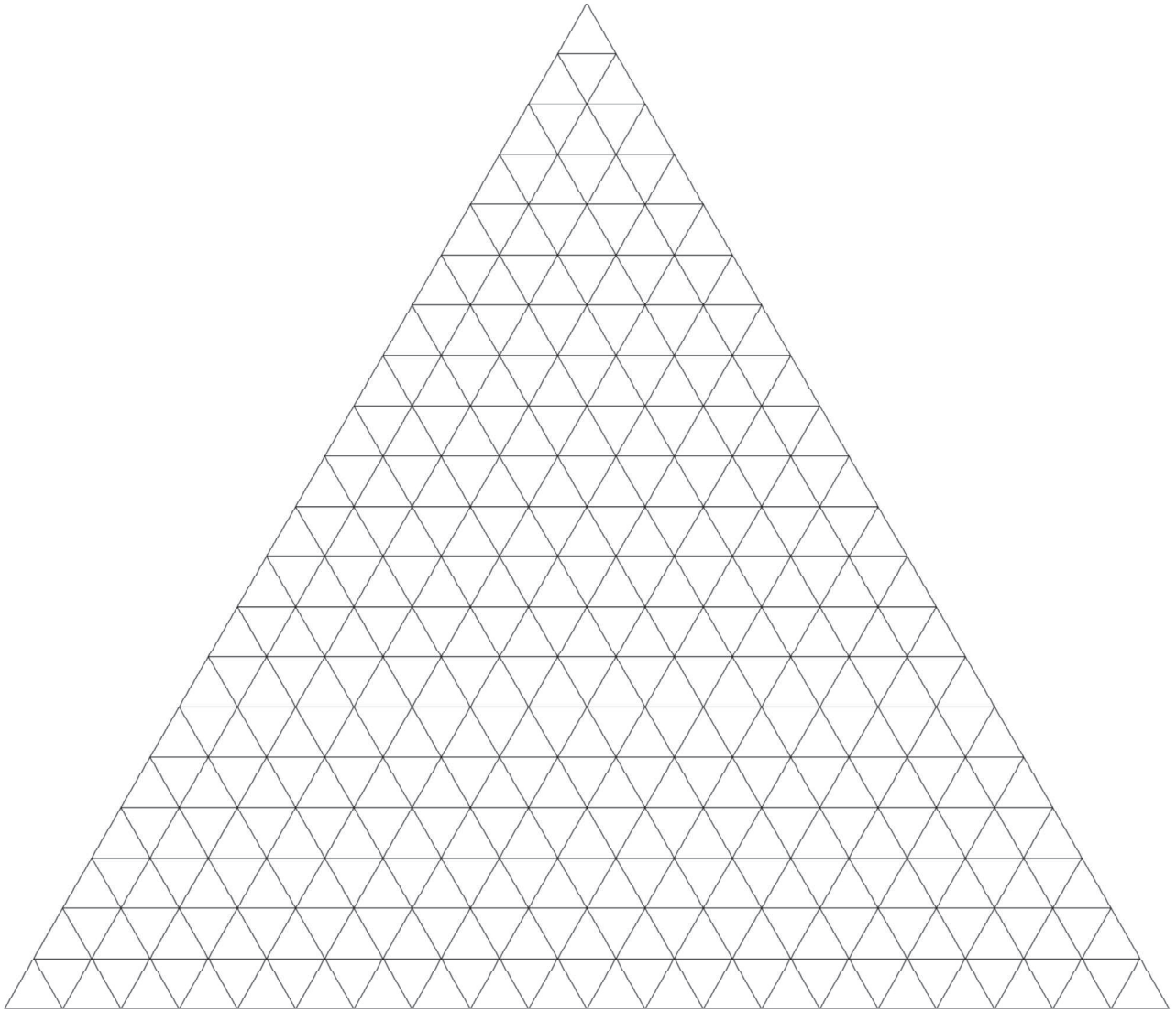
b) Mostreu la descomposició en el nombre mínim de peces dels triangles de costat $n = 21$ i $n = 39$ i fixeu-vos en el nombre de peces que us surten. Podeu esbrinar quin és el nombre mínim de triangles equilàters en què es podrà dividir un triangle equilàter de costat $n = 75$ sense fer la descomposició?

c) Mostreu la descomposició en el nombre mínim de peces dels triangles de costat $n = 25$ i $n = 35$ i observeu en el nombre de peces que us surten. Podeu esbrinar quin és el nombre mínim de

triangles equilàters en què es podrà dividir un triangle equilàter de costat $n = 115$ sense fer la descomposició?

d) Podeu esbrinar quin és el nombre mínim de triangles equilàters en què es podrà dividir un triangle equilàter de costat $n = 203$ sense fer la descomposició?

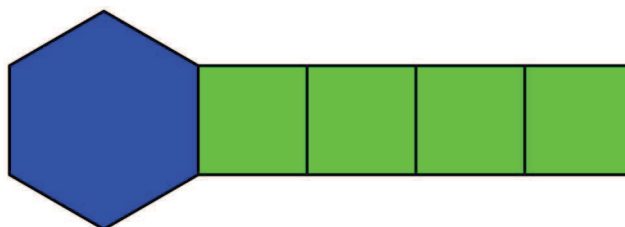
Material complementari per al problema 2



3. Emmagatzemant les fitxes

Es tracta d'un joc per a una sola persona. Al tauler de joc hi ha una sèrie de caselles iguals i una de més gran que anomenem *magatzem*. Inicialment, a cada una de les caselles iguals hi ha el mateix nombre de fitxes i al magatzem no n'hi ha cap.

La figura següent mostra un tauler amb quatre caselles i el magatzem.



L'objectiu del joc és reunir totes les fitxes al magatzem, respectant les regles següents:

Per començar el joc, el jugador tria una de les caselles i agafa les fitxes que hi ha. Després en deixa una a cada una de les caselles següents en direcció cap al magatzem. Si arriba a col·locar una fitxa al magatzem i encara li queden fitxes a la mà, continua repartint per la casella de més a la dreta. En acabar aquest procés poden haver succeït tres coses, que donen lloc a tres maneres diferents de continuar:

1. Que l'última fitxa repartida hagi caigut al magatzem. En aquest cas, el jugador tria una de les caselles que encara contenen fitxes, les agafa totes i repeteix el procés inicial.
2. Que l'última fitxa repartida hagi caigut en una casella que contenia altres fitxes. En aquest cas, el jugador agafa totes les fitxes d'aquesta casella i repeteix el procés inicial.
3. Que l'última fitxa repartida hagi caigut en una casella que havia quedat buida. En aquest cas, el jugador no pot continuar el joc i, per tant, no pot aconseguir el seu objectiu.

Contesteu les preguntes següents:

- a) Si al tauler, a més del magatzem, hi ha una única casella amb n fitxes, per a quins valors de n el jugador aconseguirà el seu objectiu? Expliqueu la vostra resposta.
- b) Si al tauler, a més del magatzem, hi ha dues caselles amb n fitxes cadascuna, quin és el valor més petit possible de n per al qual el jugador podrà aconseguir el seu objectiu? Expliqueu la vostra resposta i mostreu els repartiments necessaris per aconseguir-lo.
- c) Si al tauler, a més del magatzem, hi ha quatre caselles amb n fitxes cadascuna, quin és el valor més petit possible de n per al qual el jugador podrà aconseguir el seu objectiu? Expliqueu la vostra resposta i mostreu els repartiments que condueixen a aconseguir l'objectiu de la forma més ràpida possible.

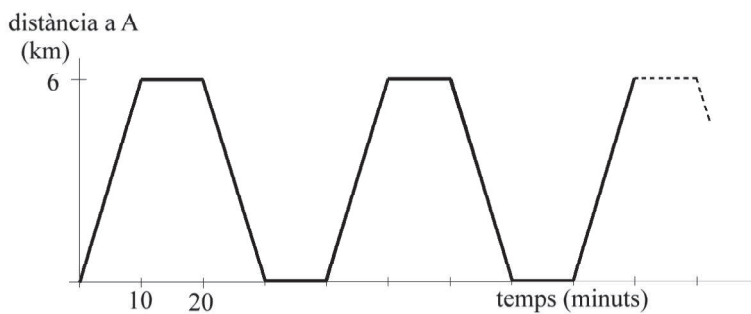
Aclariment de les instruccions del problema:

Que l'última fitxa no es pot posar en *una casella que anteriorment havia quedat buida* vol dir que l'última fitxa no es pot posar en una casella que està buida en el moment que toca posar allà l'última.

Marató de problemes: 3 problemes de l'edició de 2012 de diferent puntuació màxima (2, 3, i 4 punts, respectivament)

Problema 10:

Un autobús fa el recorregut **A-B-A-B-...** on **A** i **B** representen dues poblacions situades a 6 km l'una de l'altra. L'autobús no fa cap més parada que a **A** i **B**. La gràfica següent ens dona la distància que està prevista entre l'origen **A** del trajecte i l'autobús en qualsevol moment, amb el temps expressat en minuts a partir del moment que comença el servei.



Avui l'autobús ha començat el servei a les 5 del matí i no hi ha hagut cap impediment per seguir exactament l'horari previst. A quina distància de A es troba a mig quart d'onze del matí?

A més haureu de dir si està parat, si està circulant des d'A cap a B o si està circulant des de B cap a A.

Problema 9:

Trobeu el nombre natural N , que sigui el més petit de tres xifres, totes diferents de 0, amb la propietat que **la mitjana** dels nombres que es poden formar per reordenació de les xifres de N (inclòs també N) sigui un nombre acabat en 0.

Problema 12:

Escrivim tots els nombres de sis xifres (és a dir compresos entre 100000 i 999999) formats només per dues xifres diferents, que una apareix quatre vegades i l'altra dues. Per exemple 767677 o bé 999944 o bé 770770,...

Quants dels nombres que hem escrit són múltiples de 11?

Anem x+ matemàtiques: 2 activitats de les que hi ha al wiki d'aquet projecte

Disseny lineal

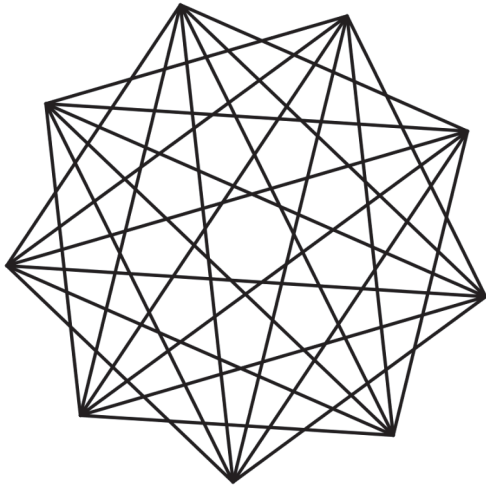
Aquest model es va elaborar col·locant nou punts en un cercle i unint cada punt amb tots els altres, llevat dels dos més propers.

El model es compon doncs de 27 línies.

Quantes línies necessitarien per fer un model similar amb 16 punts?

I si ens agradés un model similar amb 100 punts, quantes línies s'haurien de traçar?

Pots explicar una solució per a qualsevol nombre de punts?



Els jugadors van agafant monedes alternativament. Cada jugador al seu torn agafa totes les monedes que vol d'una sola pila. L'objectiu és deixar la "taula neta" ja que qui agafa l'última moneda és qui guanya.

Aquest és un joc d'estratègia guanyadora, per a quin jugador? Com ha de jugar?

Es pot variar el joc canviant el nombre inicial de pilons i el nombre de monedes de cadascun.

També hi ha algunes variants que fa que perdi el que agafa l'última moneda. Les tàctiques i estratègies no varien gaire. Es tracta de jugar com per deixar la taula "neta" però deixant la moneda final.

Les mil cares dels políedres

L'estètica de la sencilleça

Antonio Hernández Hernández



Construcció de políedres amb furgadents i gominoles

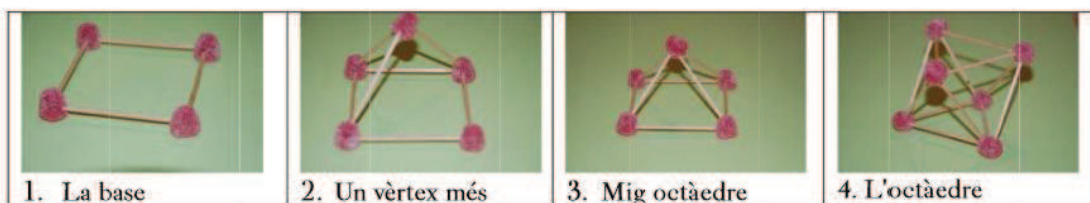
Construcció dels 5 políedres regulars clàssics

Organitzat en grups de quatre alumnes. Cada grup construirà els cinc políedres regulars amb furgadents de doble punta i gominoles d'1cm (aproximadament) de diàmetre. Tres dels cinc políedres (tetraèdre, octaèdre, icosaèdre) tenen les seues cares triangulars, en el cub les cares són quadrades i en el dodecaèdre pentagonals.

El procés de construcció és senzill. Per al tetraèdre regular (el més simple), formem un triangle prenent tres gominoles i tres furgadents tractant de que el triangle siga el més equilàter possible. Després amb una quarta gominola completem el tetraèdre, de forma que en cadascuna de les gominoles concorren tres furgadents.



L'octaèdre regular és una doble piràmide regular quadrangular. Per a representar-lo amb el nostre material, formem un quadrat amb quatre gominoles i quatre furgadents. Després amb una quinta gominola i quatre furgadents més, formem la piràmide regular quadrangular (mig octaèdre). Per a completar l'octaèdre és prou amb alçar l'altra piràmide afegint una gominola i quatre furgadents més.



Per a materialitzar el cub, construïm un quadrat amb quatre furgadents i quatre gominoles. Alcem a continuació una aresta més en cada vèrtex i completem amb altre quadrat.



Les mil cares dels políedres

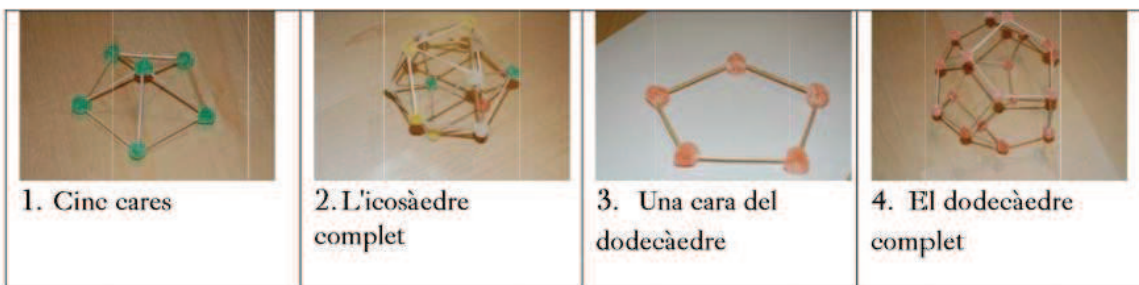
L'estètica de la sencilleça

Antonio Hernández Hernández



En cadascun dels vèrtex d'un icosaèdre concorren cinc arestes. Podem començar alçant una piràmide regular pentagonal, i després completar l'icosaèdre tenint en compte que en cada gominola concorren cinc furgadents. (fotografies 1 i 2 de la taula següent).

Per al dodecàedre (el més inestable), partim d'una forma pentagonal (fotografia 3), per a després completar el dodecàedre, tenint en compte que en cada gominola han de concórrer 3 furgadents.



Qüestions a resoldre amb els políedres construïts

1. Completa el quadre que figura a continuació fent un recompte del número d'elements de cadascun dels políedres. Per a cada políedre, compta el seu número de cares C , el seu número d'arestes A i el seu número de vèrtex V .

Políedre	C	V	A	$C+V-A$
Tetràedre				
Cub				
Octàedre				
Dodecàedre				
Icosaèdre				

2. Existeix alguna regla senzilla que relacione C , V i A en un políedre? Determina si es verifica esta regla per a un prisma regular hexagonal.

3. Reben el nom de políedres conjugats aquells que, tenint el mateix número d'arestes, el número de cares d'un és igual al número de vèrtex de l'altre. Indica a partir del quadre de l'apartat anterior quins políedres regulars són conjugats uns d'altres. Quin és el políedre conjugat del tetràedre?

4. Els políedres regulars són figures simètriques que posseeixen un determinat número de plans de simetria (que divideixen a la figura en dos parts exactament iguals). Els plans de simetria d'un octàedre són de diferents tipus i determinen seccions distintes. Dibuixa la forma de les seues seccions.

5. Si la aresta d'un octàedre mesura a , demostra que el volum V de l'octàedre és

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$



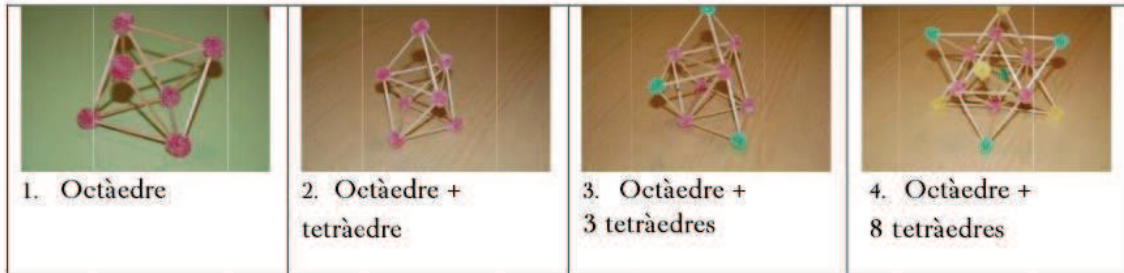
Elaborado por:
 Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
 DIRECCIÓN GENERAL DE FORMACIÓN PROFESIONAL

Políedre estrellat

Construeix altre octaedre (pren les gominoles del mateix color). Sobre cadascuna de les vuit cares alça un tetràedre, utilitzant una gominola i tres furgadents, fins completar altre políedre, com s'indica en la seqüència de fotografies.



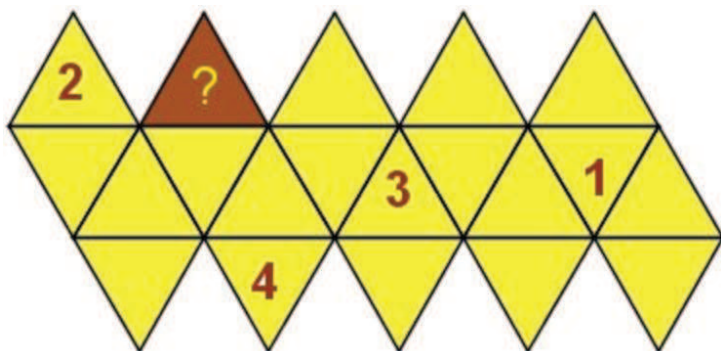
Qüestions a resoldre sobre la figura obtinguda

1. El cos geomètric final (octaedre + 8 tetràedres) és la intersecció de dos políedres regulars idèntics. Tracta de descobrir quins són.
2. Si el volum de cadascun dels tetràedres xicotets fora 10 cm^3 , quin seria el volum de cadascun d'estos dos políedres regulars? I el volum de l'octaedre?
3. Amb el que has descobert en l'apartat anterior, dedueix el volum d'un tetràedre regular l'aresta del qual mesura a .

Problemes a l'esprint: 3 problemes de l'edició de 2011 per a grups de batxillerat

Problema 1 de la branca de l'olivera

La figura mostra el desplegament d'un icosaèdre, on hi ha quatre cares numerades.



Volem numerar totes les cares de manera que, una vegada confegit l'icosaèdre, les cinc cares que concorren en cada vèrtex estiguin numerades amb els números 1, 2, 3, 4, i 5. És a dir, en cada vèrtex, una cara amb cada número.



Quin nombre ha d'anar a la cara marcada amb el signe d'interrogació?

Problema 5 del colom de la pau

Quatre nombres enters positius a, b, c, d compleixen

$$abcd + abc + bcd + cda + dab + ab + bc + cd + da + ac + bd + a + b + c + d = 209$$

Quin és el valor de $a + b + c + d$?

Repte del mussol

La Paula tira un dau, successivament, quatre vegades i amb els punts que marca el dau cada vegada, traduïts a xifres, escriu un nombre de quatre xifres.

Per exemple pot obtenir 5612 ó 1234 ó 3333.

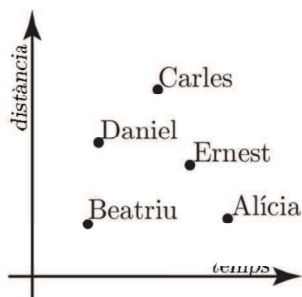
Calculeu quants dels nombres que pot obtenir la Paula tenen la propietat que cada xifra és més gran o igual que l'anterior, com per exemple succeeix en 1234 ó 1125 ó 4446.

Proves Cangur: 3 problemes de l'edició de 2010 del nivell 3 (1r de batxillerat)

9. En el centre històric d'una certa ciutat hi ha cinc ponts, més o menys paral·lels, sobre el riu que creua aquesta ciutat. La Brigitte hi arriba de vacances i vol passar, almenys una vegada, per aquests cinc ponts. Comença a caminar des de l'estació del tren i, quan hi torna, ha creuat aquests cinc ponts i cap més. Durant el passeig ha travessat el riu n vegades. D'entre els nombres següents, quin és l'únic que és un valor possible per a n ?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. El gràfic de dispersió següent mostra les distàncies recorregudes i els temps emprats en una prova de velocitat cronometrada de cinc alumnes. Qui va ser el més ràpid?



- A) Alicia B) Beatriu C) Carles D) Daniel E) Ernest

30. Un codi de barres com el que es mostra està format per franges alternades en negre i blanc, que sempre comencen i acaben per una franja negra. Cada franja de cada color té amplada 1 ó 2, i l'amplada total del codi de barres és 12. Quants codis de barres diferents són possibles, sempre començant a llegir d'esquerra a dreta?

- A) 124 B) 132 C) 66 D) 128 E) 116



Olimpiada matemàtica: els 3 primers problemes de la primera fase (Catalunya) de la XLV Olimpiada matemàtica (2008)

Problema 1

Dues circumferències són tangents interiorment en T . Sigui AB una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior en el punt P . Demostreu que \overline{TP} biseca \overline{ATB} .

Problema 2

Caracteritzeu tots els nombres enters positius N que **no** es poden escriure de cap de les dues maneres següents:

$$ab + a + b, \quad cd + c - d c$$

amb a, b, c, d enters positius tals que $c \geq d$.

Problema 3

Sigui $\{a_n\}$ la successió en la qual a_n es defineix com el nombre natural més proper a \sqrt{n} . Quin és el valor de

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2008}}?$$

ANNEX 3: Recursos propis que es podrien afegir com a material al Campus Virtual perquè l'alumnat treballés a l'aula:

Bloc 1r i 2n d'ESO

Activitat 1

Com s'ha presentat anteriorment, aquest curs l'alumnat podria participar al concurs *Fem Matemàtiques* a través del seu centre de secundària.

La proposta que presentem consisteix en donar setmanalment una de les proves d'anys anteriors del *FEM Matemàtiques* i que l'alumne/a l'hagi d'intentar resoldre i redactar la resposta. El/La professor/a corregiria el problema i l'alumne/a, si s'escau, l'hauria de tornar a redactar, i penjar-lo al fòrum que es crearia al Campus Virtual per aquesta activitat. D'aquesta manera, tot l'alumnat participant es beneficiaria de les respostes oferides per cada un d'ells.

Un exemple de problema podria ser el que trobem a l'Annex 2, a l'apartat del FEM Matemàtiques.

Activitat 2

La següent proposta tindria com a finalitat treballar amb equacions i incògnites. A més, s'introduiria a l'alumne/a a les matrius i a la suma, resta i multiplicació d'aquestes. L'alumnat trobaria un dossier al Campus Virtual amb sumes, restes i multiplicacions de matrius i hauria de deduir com s'opera. El dossier també inclouria exercicis amb matrius, en algunes de les quals alguns dels nombres seran incògnites (recordem que la introducció a l'àlgebra es fa a segon, així que l'objectiu principal d'aquesta activitat és que l'alumne/a practiqui amb les equacions i, a més, mecanitzi les operacions amb matrius perquè pugui aprofundir en el concepte quan aquest s'expliqui a classe en cursos posteriors).

Proposta de dossier:

Suma de matrius:	Conclusions:
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 11 & 7 & 9 \\ 13 & 12 & 14 \end{pmatrix}$	

Resta de matrius:	Conclusions:
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	
$(3 \ 5) - (7 \ 1) = (-4 \ 4)$	
$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	

Multiplicació de matrius:	Conclusions:
$(3 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (13)$	
$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (11)$	
$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} (2 \ 7) = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 10 & 35 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 13 & 16 \\ 94 & 37 & 52 \\ 166 & 61 & 88 \end{pmatrix}$	

Exercicis:
Troba x i y: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x \ 0) + (-3 \ y) = (4 \ 1)$ $\begin{pmatrix} x & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ y & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$
Troba x i y: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x \ 7) - (-3 \ y) = (4 \ 2)$

$$\begin{pmatrix} 10 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ y & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Troba x, y i z:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (x)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z & 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (-4)$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} (x \ 7) = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 5 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & y & z \\ 20 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & z \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 2 \\ 3 & x & 5 \\ -y & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ x & -x & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & x & 16 \\ 22 & -2 & z \\ -2 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

Bloc 3r i 4t d'ESO

Activitat 1

En aquesta activitat es proposaria a l'alumnat que treballés la geometria amb el GeoGebra. L'alumnat trobaria al campus tres exercicis que hauria de plantejar amb el *GeoGebra* i resoldre'ls analíticament (no amb el *GeoGebra*).

En aquest cas, hem escollit tres exercicis relacionats amb el futbol:

Penal:

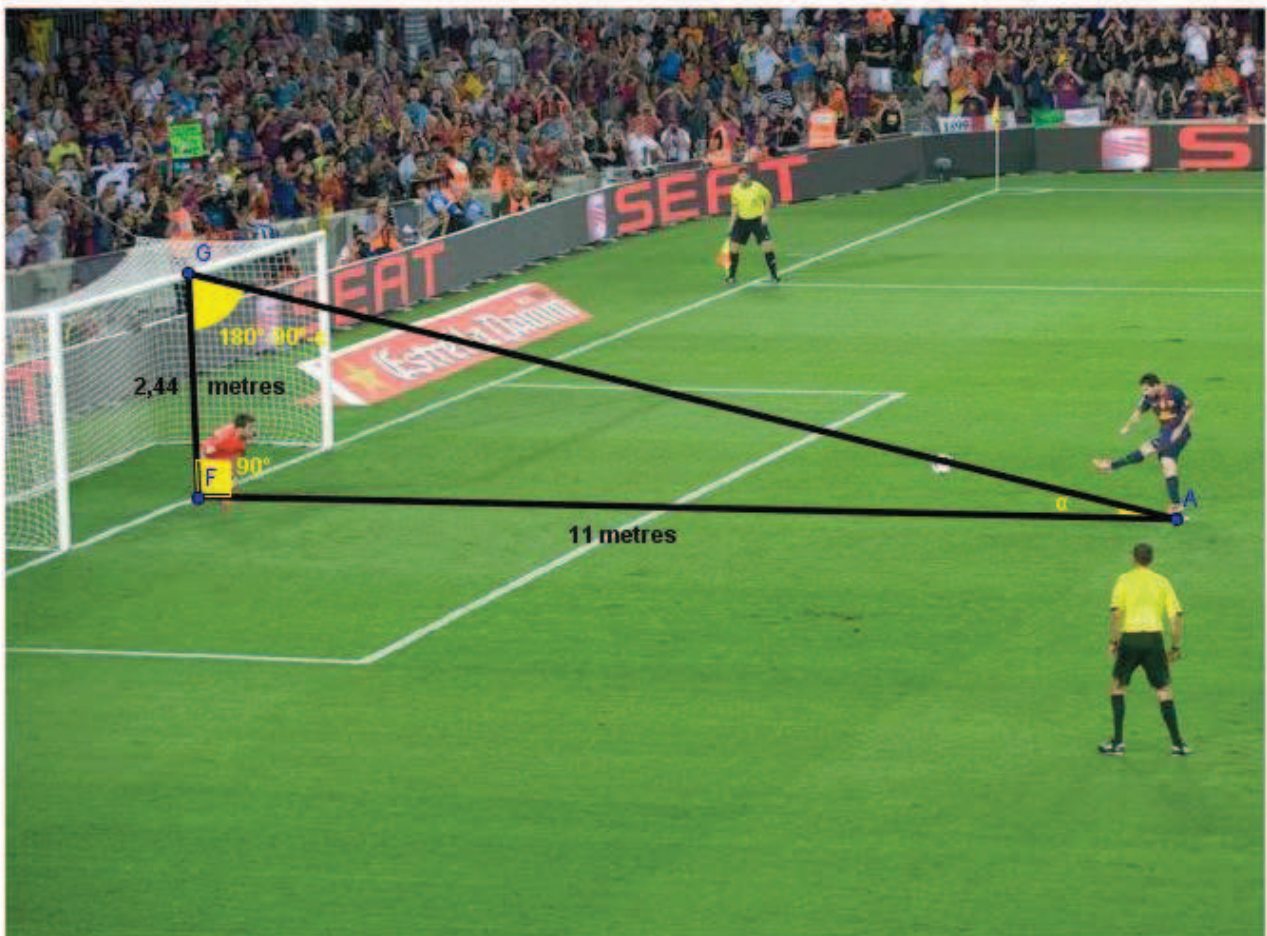
Si en Messi fa un llançament de penal rectilini i aquest impacta al travesser, amb quin angle respecte al terra ha fet el llançament?



L'alumne/a hauria de buscar les dades que necessita per fer la construcció. A més, per resoldre el problema analíticament potser necessitaria investigar per trobar els conceptes que necessita.

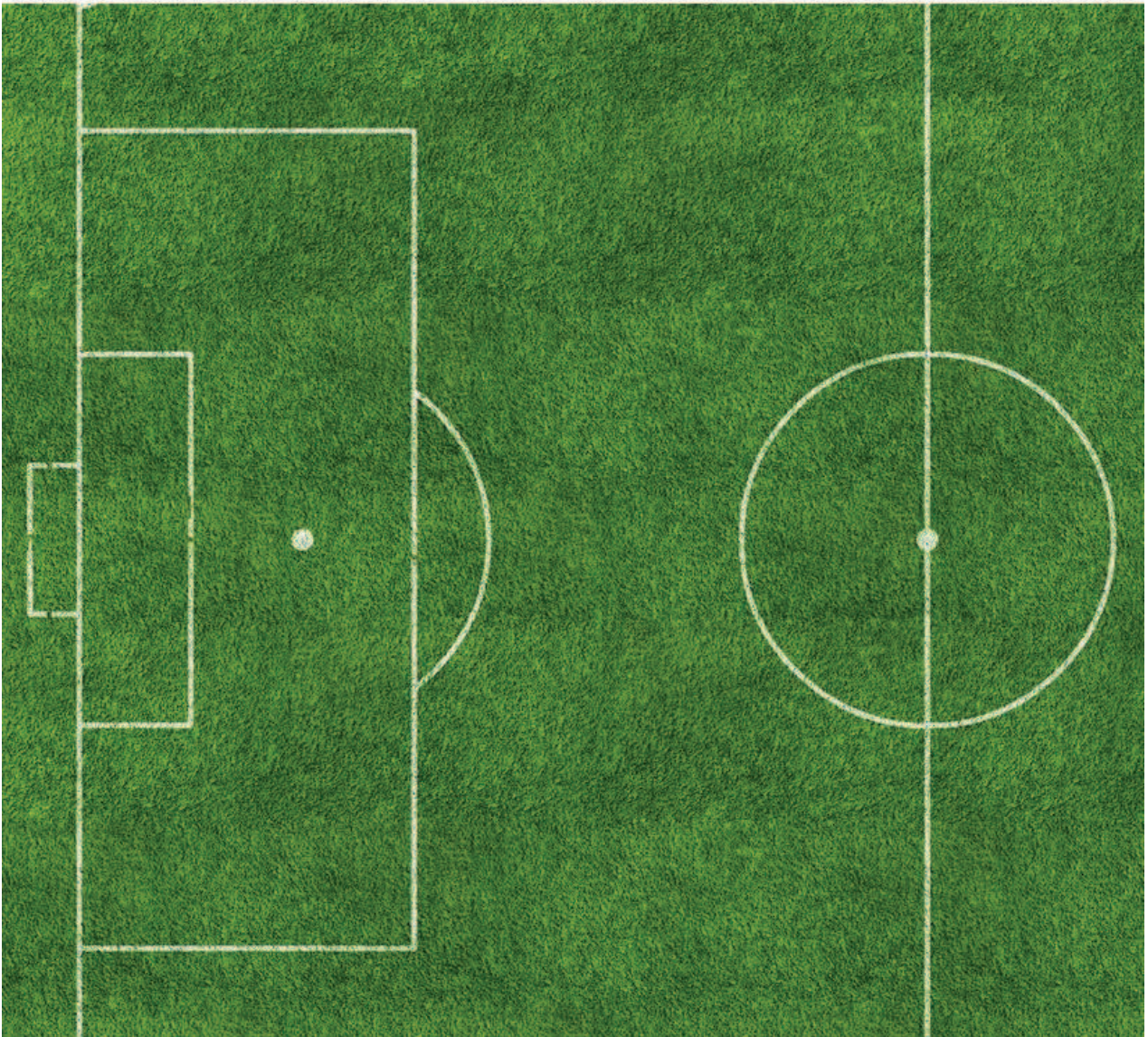
L'alumnat hauria de fer una construcció semblant a la següent:

Si en Messi fa un llançament de penal rectilini i aquest impacta al travesser, amb quin angle respecte al terra ha fet el llançament?



Arc circular:

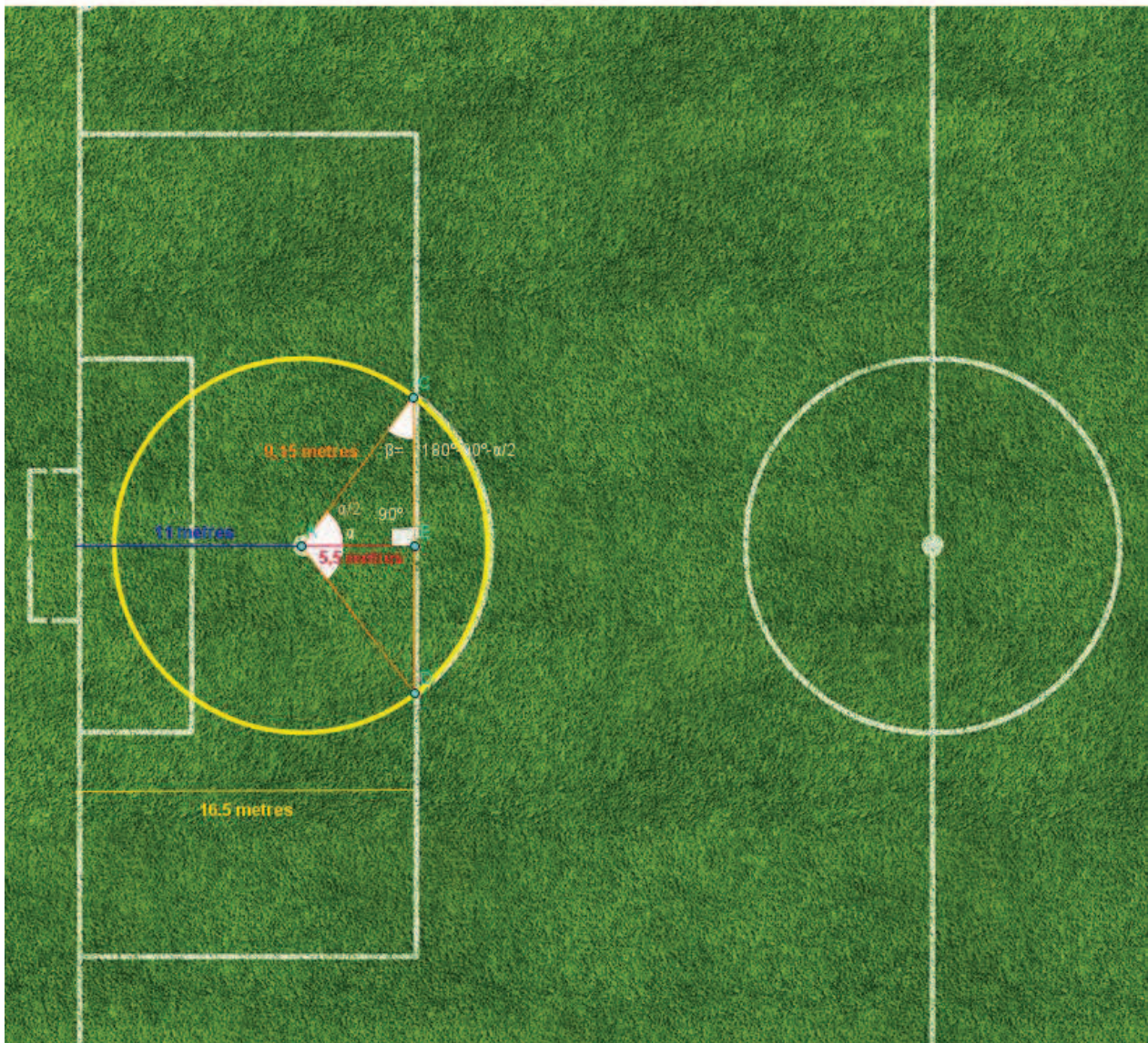
La mitja-lluna de l'àrea de futbol és l'arc de la circumferència centrada al punt de penal que no està dins de l'àrea.
Quin és l'angle d'aquest arc de circumferència?



L'alumne/a hauria de buscar les dades que necessita per fer la construcció. A més, per resoldre el problema analíticament potser seria necessària investigar per trobar els conceptes que necessita.

L'alumnat hauria de fer una construcció semblant a la següent:

La mitja-luna de l'àrea de futbol és l'arc de la circumferència centrada al punt de penal que no està dins de l'àrea.
Quin és l'angle d'aquest arc de circumferència?



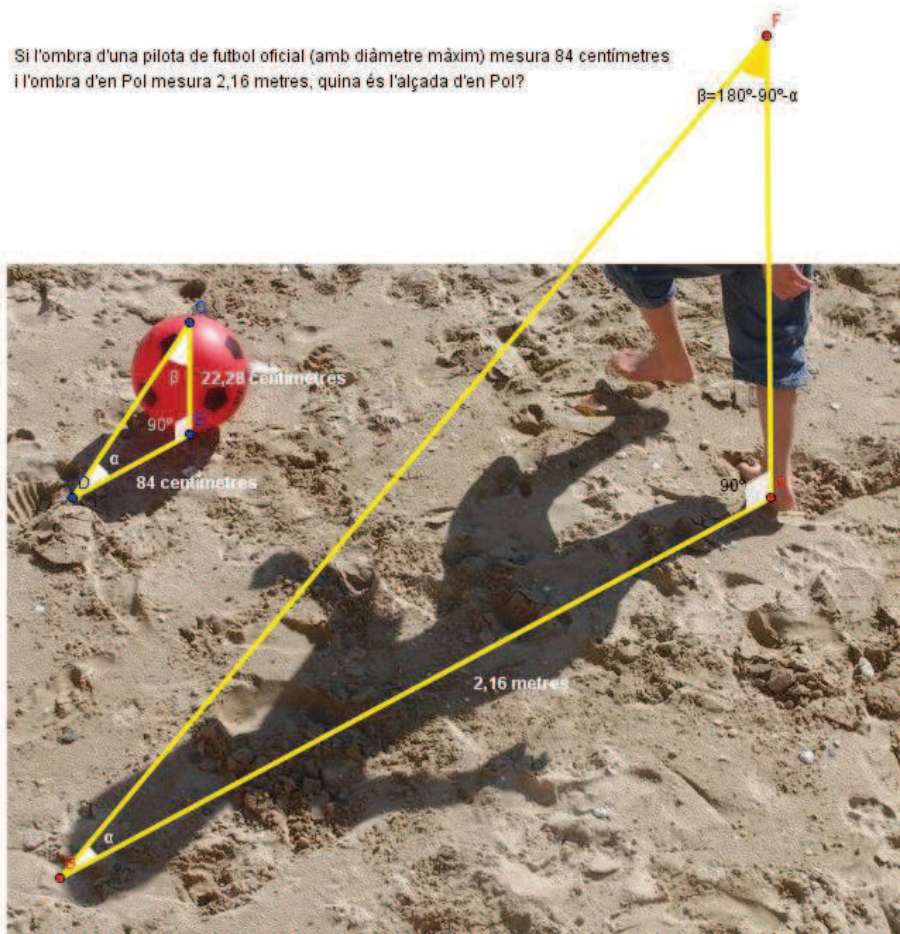
Si l'ombra d'una pilota de futbol oficial (amb diàmetre màxim) mesura 84 centímetres i l'ombra d'en Pol mesura 2,16 metres, quina és l'alçada d'en Pol?

Ombra:



L'alumne/a hauria de buscar les dades que necessita per fer la construcció. A més, per resoldre el problema analíticament potser necessitaria investigar per trobar els conceptes que necessita.

L'alumnat hauria de fer una construcció semblant a la següent:



Activitat 2

En aquesta activitat es proposaria a l'alumnat investigar sobre com obtenir la funció derivada a partir d'una funció (derivable).

L'alumnat trobaria un dossier amb diferents funcions i les seves respectives funcions derivades. L'alumne/a hauria d'intentar esbrinar com es deriven les funcions i tindria una petita col·lecció de funcions que hauria de derivar. Amb aquesta activitat es pretén que l'alumne/a mecanitzi com es deriva perquè pugui aprofundir en el concepte quan aquest s'expliqui a classe en cursos posteriors.

Dossier de derivades:

Funció	Funció derivada	Conclusions
$f(x) = 8$	$f'(x) = 0$	
$g(x) = 15$	$g'(x) = 0$	
$h(x) = 0$	$h'(x) = 0$	
$f(x) = -2$	$f'(x) = 0$	
$y = \frac{2}{3}$	$y'(x) = 0$	
$g(x) = x$	$g'(x) = 1$	
$h(x) = x^2$	$h'(x) = 2x$	
$y = x^5$	$y' = 5x^4$	
$f(x) = x^{10}$	$f'(x) = 10x^9$	
$g(x) = 4x$	$g'(x) = 4$	
$h(x) = 7x^2$	$h'(x) = 14x$	
$y = 2x^5$	$y' = 10x^4$	
$f(x) = 3x^{10}$	$f'(x) = 30x^9$	
$g(x) = x + 8$	$g'(x) = 1$	
$h(x) = x^2 + 7$	$h'(x) = 2x$	
$y = x^2 + x$	$y' = 2x + 1$	
$f(x) = x^6 + x^3$	$f'(x) = 6x^5 + 3x^2$	
$g(x) = 5x^4 - x$	$g'(x) = 20x^3 - 1$	
$h(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5x$	$h'(x) = 16x^3 + 6x^2 - 5$	
$y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 9$	$y' = 3x^2 + 5x - 1$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	
$g(x) = \cos x$	$g'(x) = -\sin x$	
$h(x) = 3^x$	$h'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$	
$y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$	$y' = \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right)$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$g(x) = 5 + e^x$	$g'(x) = e^x$	
$h(x) = x + e^x$	$h'(x) = 1 + e^x$	
$y = x^2 - 3^x$	$y' = 2x - 3^x \cdot \ln(3)$	
$f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$	$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$	
$g(x) = x + \cos x$	$g'(x) = 1 - \sin x$	
$h(x) = x^4 - \sin x + \cos x$	$h'(x) = 4x^3 - \cos x - \sin x$	
$y = 5^x - 4^x$	$y' = 5^x \ln(5) - 4^x \ln(4)$	
$f(x) = 2 \cdot \sin x$	$f'(x) = 2 \cdot \cos x$	
$g(x) = x \cdot \sin x$	$g'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$	
$y = 4^x \cdot \sin x$	$y' = 4^x \cdot \ln(4) \cdot \sin x + 4^x \cdot \cos x$	
$y = x^2 \cdot \cos x$	$y' = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\cos x)$	
$y = e^x \cdot 2^x$	$y' = e^x \cdot 2^x + e^x \cdot 2^x \ln(2)$	

Funció	Funció derivada	Conclusions
$y = 3^x \cdot 2^x$	$y' = 3^x \cdot \ln(3) \cdot 2^x + 3^x \cdot 2^x \cdot \ln(2)$	
$y = \frac{x^2+1}{x}$	$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$	
$y = \frac{\sin x}{x}$	$y' = \frac{(\cos x) \cdot x - \sin x}{x^2}$	
$y = \frac{\sin x}{3^x}$	$y' = \frac{(\cos x) \cdot 3^x - (\sin x) \cdot 3^x \cdot \ln(3)}{(3^x)^2}$ $= \frac{\cos x - \sin x \cdot \ln(3)}{3^x}$	

Calcula la funció derivada de les funcions següents:

Funció	Funció derivada
$y = \frac{5}{4}$	
$g(x) = x^3$	
$h(x) = 6x^2$	
$y = \frac{5}{4}x^2 - 3x$	
$f(x) = 3x^7 + 9x^3 - x^{-2}$	
$g(x) = x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x + 8$	
$h(x) = -2x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x$	
$y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 9$	
$f(x) = 3\sin x$	
$g(x) = \frac{1}{2}\cos x$	
$h(x) = 2^x$	
$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$	
$g(x) = x^2 + \frac{5}{6}x^3 + e^x$	
$h(x) = x + 3e^x$	
$y = -x^3 + 2^x$	
$f(x) = 7x^3 + \frac{1}{2}\sin x$	
$h(x) = -3x^4 - 2x^3 + 4\sin x - 3\cos x$	
$y = 4^x + 3^x$	
$f(x) = 2x \cdot \sin x$	
$g(x) = x^2 \cdot \sin x$	
$y = 4^x \cdot \sin x$	
$y = \frac{1}{3}x^3 \cdot 3\cos x$	
$y = 4e^x \cdot 3^x$	
$y = 7^x \cdot 4^x$	
$y = \sin x \cdot \cos x$	
$y = \operatorname{tg} x$	
$y = \frac{\cos x}{2^x}$	

Bloc 1r i 2n de Batxillerat

Activitat 1

En aquesta activitat es proposaria a l'alumnat que conegués el concepte de funció de distribució de variables aleatòries absolutament contínues.

En primer lloc, haurien d'investigar per trobar quines condicions ha de satisfer una funció per ser funció de distribució.

A continuació, se'ls proporcionaria un dossier amb problemes relacionats amb el concepte de funció de distribució de variables aleatòries absolutament contínues.

Proposta de dossier:

1. Sigui X una variable aleatòria que té per funció de distribució:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \frac{1+x}{9} & 1 \leq x < 0, \\ \frac{2+x^2}{9} & 0 \leq x < 2, \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Calculeu $P(X = 2)$, $P(X \in (-1, 2] \cap (1, 3))$ i $P\left(X \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)\right)$

2. Considereu la funció

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - e^{-1x} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Per a quins valors de a aquesta funció és funció de distribució?

3. Considereu la funció següent:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & 1 \leq x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 & 0 \leq x < 1, \\ c & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Comproveu que F sigui una funció de distribució

4. Considereu la funció següent:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ b(x+1)^2 & 1 \leq x < 1, \\ ax^2 & 1 \leq x < 2, \\ c & x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Determineu les condicions que han de satisfer a , b i c perquè F sigui una funció de distribució.
- b) Calculeu els valors de a , b i c perquè la funció de distribució F sigui contínua.
- c) Amb els valors de a , b i c obtinguts a l'apartat anterior, calculeu:

$$P(X \geq 1), P(X = 1), P\left(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2}\right) \text{ i } P(2 < X < 3)$$

Activitat 2

La següent activitat proposa conèixer i treballar amb els valors i vectors propis d'una matriu. Es demanaria intentar arribar a donar una definició de valor i vector propi, així com d'investigar què són, per a què serveixen i com es calculen.

A més, per tal que l'alumnat practiqui en trobar els valors i vectors propis d'una matriu, es proposarien algunes matrius per fer els càlcul:

Trobeu els valors i vectors propis de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Activitat 3

En aquesta activitat proposaríem a l'alumnat fer una recerca sobre estadística. Es demanaria que investiguessin els conceptes variable aleatòria discreta, variable aleatòria absolutament contínua, esperança d'una variable aleatòria, variància d'una variable aleatòria i distribució normal.

Al Teatre Nacional de Catalunya es preparen les invitacions per un concurs de monòlegs matemàtics. Es decideix enviar una invitació a 79 persones. A la invitació s'indica que el convidat pot anar acompanyat per una o dues persones. Basant-se en l'experiència d'altres ciutats, se sap que el 50% va acompanyat d'una persona, el 15% de dues persones, el 30% assisteix sol i la resta no assisteix.

Si sabem que la variable aleatòria $Y = \text{nombre de persones que assisteixen al concert}$ segueix una llei normal, podries determinar el comportament aproximat de la distribució?