



Treball Final de Grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

**FONAMENTS DE
LA GEOMETRIA**

Elisabet Pino Morató

Director: Vicenç Navarro Aznar
Realitzat a: Departament d'Àlgebra
i Geometria. UB
Barcelona, 21 de juny de 2013

Índex

Introducció	iii
1 Presentació històrica d'alguns sistemes axiomàtics	1
1.1 Els axiomes d'Euclides	1
1.2 La Geometria de Descartes	2
1.3 La Geometria de Riemann	4
1.4 La Geometria de Klein	7
1.5 Els axiomes de Hilbert	10
2 Els <i>Elements</i>	13
2.1 La metodologia dels <i>Elements</i>	14
2.1.1 Les definicions	14
2.1.2 Els axiomes	15
2.1.3 Les nocions comunes	15
2.1.4 Les proposicions	16
2.2 El contingut dels <i>Elements</i>	18
2.3 La problemàtica dels <i>Elements</i>	22
3 El pla hiperbòlic	24
3.1 El model del semiplà de Poincaré	24
3.2 Els axiomes d'Euclides en el model del semiplà de Poincaré	30
3.3 Altres models de geometria hiperbòlica	33
4 Els axiomes de la geometria plana	35
4.1 Els axiomes de Hilbert	35
4.2 Resultats en diferents geometries	39
5 Les geometries el·líptica, parabòlica i hiperbòlica	46
5.1 El cinquè postulat	46
5.2 La geometria el·líptica	47
5.3 La geometria parabòlica	50
5.4 La geometria hiperbòlica	52
6 La geometria de Riemann	54
6.1 La curvatura seccional	57
6.2 Els espais de curvatura constant	59

Annex 1	66
Annex 2	69
Conclusions	74
Bibliografia	75

Introducció

La geometria que coneixem a l'actualitat és una branca de la matemàtica molt versàtil i canviant, segons quin tipus de geometria tractem. Pot aplicar-se a objectes quotidians i també a d'altres que la nostra ment no seria capaç de donar forma. Tot i això, segueix unes pautes i uns criteris pels quals es poden enunciar i demostrar resultats en qualsevol de les geometries. Per saber com s'han arribat a determinar aquests criteris i entendre com una mateixa branca pot comprendre temes en aparença tan diferents, fins i tot operar en ells i obtenir-ne resultats, cal remuntar-se en el temps. Així, es pot arribar a veure quins pioners van mostrar les seves idees innovadores, que tard o d'hora van ser acceptades, i com van anar transformant la geometria al llarg de la història fins a la que tenim avui en dia.

Des del meu punt de vista, la geometria té la capacitat de tractar de manera aparentment simple, els problemes més diversos. De vegades, problemes que en un principi m'han semblat intractables, només requerien un enfoc diferent per a convertir-se en assequibles, amb una resolució considerablement simple i ràpida. Aquest nou enfoc sovint l'aporta la geometria, i vaig veure en aquest treball una oportunitat d'entendre millor aquesta part de la matemàtica, d'aprofundir-hi tant com em fos possible en el temps del que disposava i de relacionar les geometries que ja coneixia, i que de vegades m'havien semblat tan diferents.

Aquest treball es desenvolupa a partir del sistema axiomàtic fonamentat per Euclides en la seva obra més coneguda, els *Elements*, que va aportar els primers criteris que van limitar la geometria i també les directrius que, des de la seva publicació, es van imposar a l'hora d'enunciar resultats matemàtics i demostrar-los.

Després d'Euclides, altres matemàtics van contribuir a millorar la geometria que ell mateix havia configurat i a ampliar-la, desenvolupant noves geometries sovint molt diferents i nous criteris per a relacionar-les totes sota el concepte global de geometria.

Resum

This Final Degree Project consists of six chapters. In the first chapter, we introduce the history of geometry starting from the lives and contributions of five mathematicians who transformed the way the geometry was understood with their researches. Chronologically arranged, they are Euclides, Descartes, Riemann, Klein and finally Hilbert. In each case, we've realized a short biography intending to contextualize

the period and the environment in which they all lived. Then, by focusing on the most transcendental work of each one, we explain which contributions they made to geometry and how they transformed the interpretation of mathematics.

The second chapter is dedicated to the most famous Euclid's work, the *Elements*, which is considered the basis on which modern mathematics were constructed. We first explain the methodology used by Euclid writing his work from characterizing the four types of statements in which the content can be classified and by delving into the method he devised to prove propositions, exemplified by the demonstration of the *Pythagorean theorem*. Then, we explain the content of the thirteen books that conform the Euclid's *Elements*. Finally, we briefly comment which work parts generated controversy.

In Chapter 3, we develop two-dimensional hyperbolic geometry from the Poincaré half-plane model. Then, we introduce the *inversion* and we prove that hyperbolic plane verifies the first four axioms, but not the fifth, thus proving the consistency of hyperbolic geometry.

In the fourth chapter, we present Hilbert's axiom system in plane geometry and we define absolute, Euclidean and hyperbolic geometry according to the criteria determined by Hilbert. Then we compare these geometries, showing some results that are validated in each geometry and finally, we prove in three ways a result that is verified in all three cases by using in each demonstration only the tools each geometry provides us.

Chapter 5 is about comparing elliptic, parabolic and hyperbolic geometry from the projective geometry. We first comment which postulates are verified in each case and then we give a projective model of each geometry, briefly commenting some characteristics.

The last chapter is about Riemannian geometry. We first give some basic definitions and then we introduce the homogeneity and isotropy concepts. After that, we comment the Riemannian interpretation of the first and second Euclid's axioms and finally, we conclude with Cartan-Hadamard theorem's demonstration, which determines the space forms in some kind of homogeneous isotropic Riemannian manifold.

Agraïments

En primer lloc, vull agrair al professor que ha dirigit aquest projecte, el Vicenç Navarro, per el temps que hi ha dedicat i per la orientació i els consells que m'ha proporcionat, que han fet possible que aquest treball anés millorant gradualment.

També agraeixo a la meva mare, al meu germà i als meus amics, per la seva paciència i les seves opinions inestimables, que han ajudat a millorar alguns aspectes d'aquest escrit i m'han animat a seguir endavant.

Capítol 1

Presentació històrica d'alguns sistemes axiomàtics

Una infinitat de matemàtics han col·laborat al llarg de la història en el desenvolupament de la geometria i, gràcies a les seves idees o aportacions diverses, les matemàtiques en general han anat evolucionant i millorant.

A continuació, es fa una introducció històrica de la geometria a partir de cinc matemàtics que visqueren en èpoques diferents i que van representar canvis transcendents en aquesta ciència: Euclides, Descartes, Riemann, Klein i Hilbert.

1.1 Els axiomes d'Euclides

Els coneixements que es tenen a l'actualitat tant de la vida com de les obres d'Euclides han estat transmesos a partir de papirs i manuscrits diversos i, en conseqüència, han patit múltiples traduccions, interpretacions i modificacions. Fins i tot s'han realitzat estudis en profunditat de la seva obra, per tal de diferenciar els fragments afegits dels originals.

Malauradament, no es coneix pràcticament res de la vida d'Euclides, només s'han trobat alguns comentaris d'altres autors fent referència al gran matemàtic en obres escrites segles després de la seva mort.

El més probable és que Euclides visqués després de Plató (428-347 a.C.), ja que mostra influències del filòsof, però abans que Apoloni (260-190 a.C. aproximadament) i segurament també que Arquímedes (287-212 a.C.), doncs es creu que aquest últim va mencionar l'obra d'Euclides en un dels seus escrits. Aquests fets situen la vida del matemàtic entorn a l'any 300 a.C. a Alexandria (actual Egipte).



Figura 1.1: *Retrat d'Euclides*

L'obra més coneguda d'Euclides és els *Elements* ([10]), on es recopila gran part del coneixement matemàtic grec de l'època i es considera que és el text més famós a la història de les matemàtiques. En el següent capítol es veurà més detalladament el contingut i la rellevància dels *Elements*, però tot seguit comentarem breument alguns aspectes que van propiciar l'èxit d'aquesta obra.

Per una banda, els *Elements* es fonamenten en només cinc axiomes, els anomenats *axiomes d'Euclides*, i a partir d'aquests es demostren els conceptes que s'exposen a l'obra de manera ordenada i seguint un raonament lògic. D'aquesta manera, Euclides no només va desenvolupar una geometria a partir dels seus axiomes, sinó que també va contribuir a determinar un model de procedir a l'hora de presentar i demostrar teories matemàtiques, i la seva obra representava a la vegada un compendi de resultats acceptats que podien utilitzar-se en el desenvolupament d'altres.

Un altre factor important dels *Elements* resideix en la manera de procedir a les demostracions, condicionades per els coneixements de l'època. A la Grècia antiga, com a conseqüència de l'aparició dels incommensurables, no es reconeixia l'existència dels nombres irracionals i això va dificultar un tractament numèric de les magnituds. A aquesta limitació s'hi afegia que el sistema de numeració de l'època utilitzava lletres de l'abecedari per a representar els nombres enters, augmentant així la dificultat a l'hora de realitzar operacions i impossibilitant assignar nombres per a mesurar longituds, àrees, volums i angles en les figures geomètriques, de manera que els grecs havien de tractar amb les mateixes figures com a magnituds.

Així doncs, la diferència més important entre el punt de vista grec i el modern es troba en que actualment podem representar magnituds a partir de símbols que es corresponen amb nombres, coneguts o desconeguts, amb els quals operem emprant les regles algorítmiques de l'àlgebra. El paper essencial dels *Elements* en la geometria grega va ser, justament, el de proporcionar una àlgebra geomètrica que complia les funcions de l'àlgebra simbòlica actual. Euclides va aconseguir geometritzar els mètodes algebraics practicats pels babilonis emprant segments de recta en lloc de nombres i operant entre aquests amb diversos mètodes, sempre obeint els axiomes i teoremes de la seva geometria.

1.2 La Geometria de Descartes

René Descartes (1596-1650) va ser un matemàtic, físic i filòsof francès, considerat el creador de la geometria analítica.

Va néixer a La Haye (França) a casa de la seva àvia materna i en absència del seu pare, que vivia a Rennes degut al seu treball com a conseller del Parlament de Bretanya. Poc més d'un any després, la seva mare va morir durant un part, motiu pel qual Descartes va créixer amb la seva àvia fins que al 1606 va ser internat, juntament amb el seu germà gran, al *Collège de la Flèche* durant els vuit anys següents.

El 1614, Descartes va deixar *La Flèche* a l'edat de divuit anys per a estudiar dret civil i canònic a Poitiers, graduant-se dos anys més tard. Va adquirir també algunes nocions en medicina i es va traslladar a Breda (Holanda) per a allistar-se a l'exèrcit de Maurici de Nassau el 1618, però l'any següent decidí allistar-se a l'exèrcit de Maximilià de Baviera. Durant aquest període va contactar amb Isaac Beeckman, amb qui debatia sovint per correspondència qüestions que relacionaven la física i les matemàtiques. En aquestes cartes, també van abordar el tema de l'anàlisi dels intervals musicals i el resultat va ser el *Compendi de la música*, una petita obra publicada per Descartes l'any 1619, on descriu els intervals de consonància com a proporcions geomètriques entre segments.



Figura 1.2: *Retrat de Descartes realitzat per el pintor holandés Frans Hals*

Aquell mateix any, Descartes va comentar a Beeckman alguns problemes geomètrics en els quals estava treballant i que vint anys després foren desenvolupats en afegir a la seva gran obra, el *Discurs del Mètode*, tres assajos coneguts com *La diòptrica*, *Els meteors* i *La geometria* ([7]). És en aquest últim assaig on Descartes realitza la seva major aportació a les matemàtiques confeccionant la geometria analítica.

A mitjans del 1619, l'exèrcit es traslladà a Alemanya i va ser a la ciutat de Ulm on Descartes tingué els somnis que van inspirar-lo a buscar un “mètode per a construir coneixement” i editar l'any 1637 el *Discurs del Mètode*.

Més endavant, Descartes va tornar a França i va viure a París un parell d'anys, establint contacte amb Marin Mersenne. Tot seguit, va passar un temps viatjant per Itàlia, però degut a les intervencions de la Inquisició va decidir tornar a París fins el 1628, quan va instal·lar-se a viure a Holanda durant els vint anys següents.

L'estiu de l'any 1647 va passar-lo a França, on conegué a Blaise Pascal, i després va tornar a Holanda amb la intenció de traslladar-se a Suècia. Finalment, l'any 1649 va arribar a Estocolm per impartir classes de filosofia a la reina Cristina. La seva salut es va veure molt malmesa per les baixes temperatures del territori, va caure malalt de pulmonia a principis de febrer i, als pocs dies, va morir. L'any 1666 el seu cos va ser exhumat i traslladat a París.

Mentre la geometria grega només utilitzava l'esmentada àlgebra geomètrica, Descartes va unir coordenades i àlgebra per a donar lloc a la *geometria cartesiana* o *analítica*, que estableix la relació entre l'àlgebra i la geometria a partir de l'anàlisi àlgebraic. Així doncs, es considera que la geometria analítica és l'aplicació de l'àlgebra

simbòlica a l'estudi de problemes geomètrics mitjançant l'associació de corbes i equacions indeterminades en un sistema de coordenades. Aquesta nova geometria va ser desenvolupada en profunditat a la seva obra *La Geometria*, aplicant els seus recursos innovadors per a la resolució d'una gran varietat de problemes.

L'àlgebra geomètrica dels grecs va limitar gairebé tota la matemàtica de l'època amb una rigidesa que obligava al tractament sintètic dels problemes, a dependre de la naturalesa geomètrica de les figures, de manera que cada problema exigia un tractament local i precisava construccions geomètriques particulars en cada cas. En canvi, la geometria de Descartes va cercar nous procediments més simples, operatius i sobre tot més generals, és a dir, buscava la metodologia.

En *La Geometria* també es fixen els convenis notacionals d'una de les eines fonamentals per a resoldre problemes de manera més eficaç: la notació cartesiana.

Per a Descartes, l'àlgebra mecanitza les matemàtiques, simplificant el raonament, i és l'instrument fonamental per a discutir les qüestions geomètriques amb claredat i generalitat.

L'àlgebra simbòlica aporta incògnites, variables i paràmetres, alliberant la necessitat de tractar casos específics. A més, permet realitzar formulacions generals i desenvolupar mètodes de resolució independents de l'estructura geomètrica particular, possibilitant l'aplicació de les mateixes tècniques en situacions similars.

La geometria cartesiana constitueix un poderós instrument de resolució de problemes, utilitzant com a eina bàsica l'àlgebra. L'essència de la seva aplicació resideix en l'establiment d'una correspondència entre punts del pla i parells ordenats de nombres reals, és a dir, d'un sistema de coordenades. Aquest fet possibilita una associació entre corbes del pla i equacions en dues variables, de manera que cada corba del pla es correspon amb una equació de la forma $f(x, y) = 0$ i a l'inrevés, per a cada equació de dues variables està definida una corba, que determina un conjunt de punts del pla respecte el sistema de coordenades.

La geometria de Descartes també va esdevenir un instrument decisiu en la investigació infinitesimal, ja que permet traslladar els problemes infinitesimals de la geometria a l'àlgebra i aquesta, pel seu caràcter operacional, en facilita la resolució. El mateix procediment és aplicable a la demostració de teoremes de caire infinitesimal, de manera que la geometria cartesiana no sols proporciona una potent tècnica de resolució de problemes, sinó que alhora és un eficient instrument d'investigació geomètrica en l'àmbit infinitesimal.

1.3 La Geometria de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) va ser un matemàtic alemany a qui s'atribueix la plena integració de les geometries no euclidianes al desenvolupament

de les matemàtiques.

Riemann va néixer a Breselenz, al regne de Hannover (Alemanya), i va ser el segon dels sis fills d'un pastor luterà. L'any 1833 la família es va traslladar a una nova parròquia, prop de Dannenberg. Al principi va ser el pare qui s'encarregà del seu ensenyament primari però, en vistes de les avançades aptituds que mostrava, va delegar l'educació posterior en un professor.

Als catorze anys va ser enviat a Hannover amb la seva àvia per a assistir al Liceu, però dos anys més tard ella morí i Riemann va traslladar-se a Lüneburg, a casa del professor Seffer, per tal de poder començar els seus estudis a l'institut Johanneum.

L'any 1843 el director de l'institut va morir i el seu càrrec va passar a ocupar-lo el professor Schmalfluss, matemàtic de professió. Aquest últim va adonar-se de les facultats de Riemann i va incentivar els seus estudis en matemàtiques.

El 1845, Riemann va començar els seus estudis de filosofia i teologia a la Universitat de Gotinga, assistint també a alguns cursos impartits per Friedrich Gauss. Poc després demanà permís al seu pare per a canviar els seus estudis per els de matemàtiques i aquest va acceptar.

Seguidament va viatjar a Berlin l'any 1847, on es trobaven matemàtics del nivell de Jacobi, Dirichlet i Einstein col·laborant amb moviments revolucionaris. Riemann va participar breument en les revoltes, però el 1849 va decidir tornar a Gotinga seguint els consells del seu pare.

L'any 1851 va presentar una tesi doctoral sobre les funcions de variable complexa que va impressionar Gauss, realitzant aquest un informe favorable sobre Riemann. L'any 1854 va donar una conferència sobre geometria a la Universitat de Gotinga titulada *Sobre les hipòtesis que es troben subjacents a la geometria* ([20]) i esdevingué una de les més transcendents de la història de les matemàtiques.

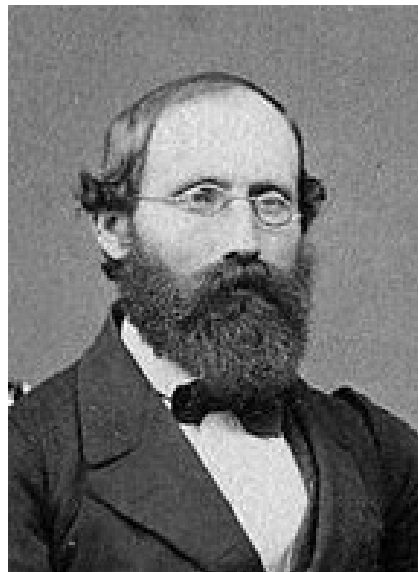


Figura 1.3: *Bernhard Riemann*

Un any més tard va morir el seu mentor Gauss, i Dirichlet va ocupar la càtedra creada en honor d'aquest a Gotinga. Durant els tres anys següents, després de patir també la pèrdua del seu pare i de tres germans, Riemann va decidir fer-se càrrec de les seves germanes.

Després de la mort de Dirichlet l'any 1859, Riemann va ser nomenat el seu successor i també es convertí en membre de l'Acadèmia de Ciències de Berlín. Durant aquest període va conèixer Weierstrass a Berlín i Hermite a París, entre altres.

El juny de 1862 es va casar amb Elise, amiga d'una de les seves germanes. Mesos després va contraure tuberculosi i aconsellat pels metges, s'establí a Itàlia, degut al clima més càlid. Un any després va tornar a Gotinga però la seva salut va empitjorar, així que decidí retornar a Itàlia. En aquest període va néixer la seva única filla Ida i va morir una de les seves dues germanes.

Va viatjar per últim cop a Alemanya l'any 1865, però la seva salut el va obligar a tornar a Itàlia el 1866 i va morir un mes després de la seva tornada.

Riemann, com Gauss, associava geometria amb mecànica i va intentar provar que els axiomes d'Euclides eren empírics, en lloc d'autoevidents i necessaris al marge de l'experiència. Es va proposar buscar el que era realment a priori en la geometria de l'espai i estudiar-ne les conseqüències, així les propietats que no formessin part d'aquest conjunt només podrien tenir una procedència empírica. Riemann va concloure que l'espai havia d'estudiar-se localment, és a dir, s'havia d'analitzar per parts i no com un tot.

En la primera part de la conferència *Sobre les hipòtesis que es troben subjacentes a la geometria*, va introduir la possibilitat de considerar espais de dimensió major que 3 juntament amb la noció de *varietat diferencial*, un nou concepte matemàtic que fonamentaria la geometria riemanniana.

La varietat diferencial es defineix com la generalització del concepte de superfície a una dimensió n (on n és un nombre natural) qualsevol, és a dir, formada per un conjunt de punts amb n coordenades $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Així, l'espai es pot dividir en varietats, que són el concepte més general i tenen certes propietats aplicables a qualsevol varietat. Aquestes propietats són les necessàries i autoevidents que Riemann buscava.

Va demostrar que l'espai físic és un cas específic de varietat i va concloure, per tant, que la geometria d'aquest espai no pot deduir-se del conjunt de propietats generals de les varietats. Aquestes propietats que distingeixen l'espai físic d'altres varietats de 3 dimensions han de ser obtingudes per mitjà de l'experiència, és a dir, l'experiència decidirà si les propietats específiques que conformen la geometria euclidiana es corresponen amb la realitat.

Un altre concepte transcendental introduït per Riemann a la primera part de la conferència va ser el de *curvatura d'una varietat*, que generalitza a les varietats el mateix concepte que Gauss va estudiar en les superfícies.

Riemann va centrar la segona part de la conferència a la qüestió de quin model segueix l'espai físic on ens movem i a quina és la seva geometria. Va determinar que en aquest espai la curvatura varia d'un lloc a un altre i, degut al moviment de la matèria, també varia en temps diferents. D'aquesta manera, va considerar impossible que les lleis de la geometria euclidiana es poguessin aplicar a un espai

així concebut. Aquesta relació entre l'espai físic i la matèria va ser utilitzada per a la creació de la *teoria de la relativitat*.

De la mateixa manera que Gauss, Bolyai i Lobachevsky, Riemann va assumir un postulat contrari al cinquè d'Euclides, però en lloc de suposar que existeix un nombre infinit de rectes paral·leles que passen per un punt exterior a una recta donada, va assumir que no n'hi passava cap. Creia que si dues rectes paral·leles s'estenien suficientment, sempre acabarien tallant-se.

Posant en dubte el segon axioma d'Euclides, el qual afirma que d'un segment rectilini es pot obtenir una recta infinita, Riemann va establir una diferència subtil entre els conceptes d'infinit i il·limitat. No creia que es pogués garantir una recta infinita, sinó que el procés d'allargar un segment és il·limitat. Així, Riemann considerava que les rectes no eren infinites, sinó il·limitades.

A partir de la reformulació d'aquests dos postulats i mantenint els altres, va generar una nova geometria no euclidiana. Obtingué alguns resultats euclidians, com el criteri de convergència de triangles, però també n'obtingué de no euclidians. Per exemple, que la suma dels angles d'un triangle és sempre major que 180 graus, i que aquesta suma varia d'acord amb les dimensions del triangle. D'aquesta manera, les geometries no euclidianes van situar-se en un marc teòric més general.

La geometria riemanniana es valida i es visualitza en el mateix espai físic que ens envolta, doncs es basa en el model de l'esfera, forma similar a la que té el planeta Terra, així que també serveix de model per a aquesta geometria. En la geometria riemanniana van substituir-se les rectes que es consideraven a la geometria euclidiana per un nou concepte de recta, la anomenada *geodèsica*: la corba més petita que uneix dos punts de l'esfera de manera que la seva distància sigui mínima, és a dir, l'arc de la circumferència màxima que passa per aquests punts i té per centre el mateix centre de l'esfera.

Per tant, aquesta geometria dóna resposta a problemes pràctics i científics relacionats amb la geometria de la superfície de l'esfera, també aplicables al nostre espai físic.

1.4 La Geometria de Klein

Felix Christian Klein (1849 - 1925) va ser un matemàtic alemany. És habitualment conegut per demostrar que la geometria euclidiana i les no euclidianes poden ser considerades com a casos particulars de la geometria d'una superfície projectiva amb una secció cònica adjunta. Aquest resultat va implicar aleshores que la geometria euclidiana i les no euclidianes eren casos particulars de la geometria projectiva i, a més, que la geometria euclidiana és consistent si, i sols si, ho són les geometries no euclidianes.

Klein va néixer a Düsseldorf, antiga Prússia (actual Alemanya), fill del secretari del cap de govern prussià. Va assistir al *Gymnasium* de Düsseldorf fins al 1865, quan va començar a estudiar matemàtiques i física a la Universitat de Bonn amb l'objectiu d'esdevenir físic.

L'any 1866, Klein va ser ajudant de Julius Plücker, que ocupava la càtedra de matemàtiques i física experimental a la universitat però, en aquell període, estava particularment interessat en el camp de la geometria.

El 1868 va obtenir el doctorat a la Universitat de Bonn amb una tesi sobre geometria i aplicacions a la mecànica, sota la supervisió de Plücker.



Figura 1.4: *Felix Klein*

Aquell mateix any, Plücker va morir deixant inacabada una obra sobre els fonaments de la geometria lineal i Klein va decidir completar-la. Per aquest motiu va contactar amb Alfred Clebsch i el va visitar a Gotinga durant l'any següent, com també va realitzar viatges a Berlin i Paris. En esclatar la guerra franco-prussiana el 1870, Klein es trobava a París i es va veure obligat a abandonar el país. Va col·laborar breument amb l'exèrcit prussià al servei mèdic, fins que el 1871 va ser nomenat lector a la Universitat de Gotinga.

L'any següent, amb només 23 anys, Klein va aconseguir una càtedra de professor a Erlangen amb el suport de Clebsch, exposant a la conferència amb que va prendre possessió el *Programa d'Erlangen* ([14]), on unifica les diferents geometries.

El 1875 va acceptar una càtedra al *Technische Hochschule* de Munich, on va impartir cursos avançats a alumnes de la talla de Hurwitz, Runge, Planck o Bianchi, entre d'altres. Aquell mateix any es va casar amb Anne Hegel, néta del filòsof Georg Wilhelm Friedrich Hegel.

L'any 1880 el nomenaren catedràtic de geometria a Leipzig, però aquí va començar el període més dur de la seva vida; passats dos anys va emmalaltir i, seguidament, caigué en una depressió que va perdurar fins al 1884.

Dos anys més tard però, va acceptar una càtedra a la Universitat de Gotinga, on va ensenyar fins que es va retirar l'any 1913, després d'haver convertit Gotinga en un centre d'investigació matemàtica de renom mundial. En aquest període va impartir una gran varietat de matèries entre els camps de la física i la matemàtica. També va fundar un centre d'investigació que serviria de model arreu del món i l'any 1895 va aconseguir una plaça per a Hilbert a la universitat. A més, va encarregar-se de que la revista *Mathematische Annalen*, fundada originalment per Clebsch i Neumann,

fos considerada la millor publicació de caire matemàtic arreu del món.

Un cop retirat per motius de salut, va seguir impartint classes de matemàtiques durant alguns anys més a casa seva. Finalment, l'any 1925 Klein va morir a Gotinga i va ser sepultat al cementiri de la mateixa ciutat.

L'aportació principal de Klein a la geometria, i a les matemàtiques en general, va ser el programa d'investigació que va publicar l'any 1872 conegut com *Programa d'Erlangen*. L'objectiu de l'escrit va ser essencialment donar una definició formal de la geometria, més enllà de la idea intuïtiva que pugui tenir-se d'aquesta.

Aquesta qüestió sorgeix després de l'aparició de noves geometries no euclidianes i de que, fins i tot la geometria euclidiana, hagi estat modificada amb els nous mètodes algebraics i analítics.

Tampoc estaven clars quins eren els elements als quals es limitava la geometria, doncs semblava reduir-se a l'estudi de punts, línies i superfícies, però aquests objectes també s'estudiaven a l'anàlisi matemàtic. D'altra banda, els nous mètodes algebraics i analítics podien aplicar-se també a les geometries no euclidianes.

Klein va redefinir la geometria introduint un nou concepte de caire algebraic: el *grup*. Tot i que aquesta noció no va ser ideada per Klein, ell va ser qui descobrí que cada geometria és en realitat l'estudi de certes propietats que es mantenen invariants quan se'ls apliquen certes transformacions, fet fonamental que relaciona la noció de grup amb les diferents geometries. Aquestes propietats que no canvien van ser anomenades *invariants* i es va observar que les operacions que mantenen sense canvis un invariant tenen estructura de grup amb la operació de composició.

D'aquesta manera, Klein va definir una geometria com un subgrup de les bijeccions d'un conjunt en sí mateix, anomenat *grup principal*. Aquestes bijeccions són les transformacions; les definicions o conceptes són els invariants; i els teoremes estableixen relacions entre els conceptes.

Per exemple, segons Klein la geometria euclidiana és l'estudi dels invariants mitjançant el grup de moviments rígids, com les simetries, els girs i les translacions; la geometria afí es limita a les translacions; i la geometria projectiva és l'estudi dels invariants mitjançant el grup de les projectivitats.

Klein afirmava que realment és a partir del grup principal d'on s'obté la geometria, i no a l'inrevés, doncs a priori hom determina quin tipus de transformacions s'admeten, definint així el grup principal, i a partir d'aquestes pot construir-se tota la geometria. Va demostrar també que, si es pren un subgrup de bijeccions d'un conjunt en sí mateix i aquest és isomorf a un grup clàssic de transformacions, com són les simetries, les translacions o les projectivitats, aleshores tots els teoremes de la geometria construïda a partir de les bijeccions donades són vàlids en el subgrup triat inicialment.

El descobriment de Klein és fonamental en l'estudi de les matemàtiques, doncs permet classificar les geometries de manera que es compregui quina conté o es troba continguda en una altra. També ha permès entendre què és la geometria com a disciplina matemàtica i, per últim, confirma que el mètode sintètic i l'algebraic estudien en realitat una mateixa geometria, acabant així amb la distinció entre els dos mètodes.

1.5 Els axiomes de Hilbert

David Hilbert (1862 - 1943) va ser un matemàtic i científic d'origen alemany, autor d'una nova axiomatització de la geometria que va substituir els tradicionals axiomes d'Euclides.

Hilbert va néixer a Königsberg, capital de Prússia Oriental (actual ciutat de Kaliningrad, Rússia). El seu pare era jutge i la seva mare tenia coneixements en camps tan diversos com l'astronomia, la filosofia o les matemàtiques. Va tenir una única germana menor, Elise.

L'escolarització de Hilbert va començar el 1870, dos anys més tard de l'edat usual en aquell moment, i el 1872 va ingressar al *Royal Friedrichskolleg*. L'últim any d'institut però, va cursar-lo al *Gymnasium Wilhelm*, on es prioritzava l'ensenyança de les matemàtiques, i les qualificacions de Hilbert van millorar notablement.



Figura 1.5: *David Hilbert*

L'any 1880 es va matricular en matemàtiques a la Universitat de Königsberg, on impartia classes Carl Jacobi, i més tard també Franz Neumann i Heinrich Weber, entre d'altres. Durant aquest període va conèixer Hermann Minkowski i, l'any 1884, va ingressar a la universitat com a professor titular Adolf Hurwitz. Entre els tres matemàtics ràpidament es va consolidar una amistat que duraria de per vida.

A finals de 1884, Hilbert va defensar amb èxit la seva tesi doctoral proposada per Ferdinand Lindemann, però encara necessitava desenvolupar un nou treball per a obtenir el títol de *Privatdozent* a la universitat.

L'any següent va viatjar a Leipzig, va assistir a classes impartides per Klein, al qual va causar una bona impressió, i va viatjar a París per recomanació seva amb motiu de contactar amb altres grans matemàtics.

A París, Hilbert va relacionar-se amb Hermite, que el va animar i orientar en el seu treball amb els invariants, i en tornar a Königsberg va acabar de redactar el treball

que l'any 1886 l'habilitava com a *Privatdozent* per a poder impartir classes. Aquest treball també el va portar al 1888 a la resolució del problema més important en teoria d'invariants: el *problema de Gordan*.

L'any 1892, Hurwitz va abandonar la universitat i es va proposar a Hilbert ocupar la seva plaça de titular. Poc després, va contraure matrimoni amb Käthe Jerosch i un any després va néixer el seu únic fill, Franz Hilbert.

Poc després, al 1894, Felix Klein va proposar a Hilbert per a ocupar la plaça que Weber deixava lliure a Gotinga. L'any següent, la família va traslladar-se a Gotinga i Hilbert va prendre possessió de la càtedra de manera definitiva.

L'any 1899, Hilbert va publicar l'obra *Fonaments de la Geometria* ([11]), que consisteix en un sistema formal de 21 axiomes on s'eviten les debilitats identificades en els postulats d'Euclides.

A l'agost de 1900 es celebrava a París el II Congrés Internacional de Matemàtics, i Poincaré va proposar a Hilbert que impartís una conferència durant l'esdeveniment. Aquest va acceptar i durant setmanes, tant Minkowski com Hurwitz van ajudar-lo a realitzar correccions i millores. Com a resultat, Hilbert va concloure la conferència enunciant 23 problemes que comprenien diversos camps de les matemàtiques i van determinar-ne la seva evolució.

Entre els anys 1901 i 1912, Hilbert va treballar en les equacions diferencials dirigint un mínim de catorze tesis sobre aquest tema. A partir del 1910 però, va començar a interessar-se en estudis de física, impartint entre 1916 i 1924 classes sobre la relativitat general.

L'any 1925 a Hilbert se li va detectar anèmia perniciosa, una malaltia mortal per l'època, però que va acabar superant gràcies a un tractament innovador. Així doncs, va continuar impartint classes a Gotinga fins al 1932.

Els anys posteriors van ser difícils, sobre tot per al seu entorn, doncs el govern nazi va començar a expandir-se i es va obligar a molts matemàtics d'ascendència jueva a retirar-se.

A finals de 1941, Hilbert va patir una caiguda en la que es va fracturar el braç, la seva salut va empitjorar des de llavors i va morir el febrer de 1943.

El nou enfocament desenvolupat per Hilbert va determinar el canvi cap al sistema axiomàtic modern, en el qual no es prenen els axiomes com a veritats evidents i la geometria pot tractar coses que no han estat definides explícitament, però sobre les que tenim poderoses intuïcions. Per a Hilbert, el que cal discutir i desenvolupar són les relacions definides entre els elements.

Durant el segle XIX, els treballs realitzats per Bolyai i Lobachevsky sobre el cinquè

postulat d'Euclides van portar-los a la conclusió que aquest no era conseqüència dels altres quatre. També durant aquest període es van formalitzar les geometries no euclidianes, però el rigor que durant segles havia aportat *Els Elements* resultava insuficient per a demostrar la consistència d'aquestes noves geometries. Aquests fets van impulsar la necessitat de fonamentar la geometria, que va concloure amb els *Fonaments de la Geometria* de Hilbert.

Una diferència evident entre *Els Elements* i l'obra de Hilbert és que, en aquesta última, no es defineixen els elements geomètrics amb els que es treballa ni les relacions que s'estableixen entre ells. Aquesta generalització a l'hora de prendre els elements geomètrics que fonamentaran la geometria ve justificada pel fet que aquests elements han de ser aplicables a tots els casos possibles. Mentre que la geometria euclidiana respon a la idea intuïtiva de l'espai, d'altres geometries (com la de Riemann) contradiuen aquesta intuïció directa. És per això que la fonamentació global de la geometria ha de partir d'un concepte suficientment generalitzat dels objectes geomètrics.

Es pot dir que l'espai geomètric determinat per un conjunt donat d'axiomes és el conjunt d'elements geomètrics, entre els quals s'estableixen certes relacions, que verifiquen les condicions del sistema axiomàtic fixat. D'aquesta manera, es poden determinar diferents espais (euclidià, riemannian, ...) que prenen infinites formes segons quins elements geomètrics es fixen.

Entre altres coses, Hilbert demostra la compatibilitat dels axiomes, és a dir, prova que ni es contradiuen entre ells, ni poden portar a conclusions contradictòries. A més, es demostra la independència de l'axioma de les paral·leles respecte dels altres, posant de manifest així la consistència de les geometries no euclidianes si, i sols si, la geometria euclidiana és consistent.

Hilbert va dur a terme una construcció lògica de la geometria eliminant qualsevol lligam a la clara evidència, i aquesta estructura abstracta afavoreix la possibilitat d'ampliacions geomètriques.

En conseqüència, el nou mètode axiomàtic va estendre's a altres branques de les matemàtiques i a la física, i va conduir a la creació dels espais abstractes moderns, que tenen per elements a conjunts, funcions, transformacions,...

Capítol 2

Els *Elements*

Els *Elements* és el tractat matemàtic més divulgat de la història, amb més d'un miler d'edicions, des del segle III a. C. fins l'actualitat. Certament, durant molts segles l'obra d'Euclides va ser un requisit imprescindible per a estudiants universitaris i, a dia d'avui, segueix essent un referent en alguns camps de les matemàtiques, com per exemple la geometria, la teoria de nombres o la lògica.

No és tan sols el contingut d'aquesta obra el que li concedeix tal importància, i tampoc s'atribueixen al seu autor tots els resultats que hi apareixen. En els *Elements* Euclides recopila gran part del coneixement matemàtic de la seva època, però la seva motivació no era la de crear un compendi de tota la geometria del moment. Alguns temes que eren coneguts aleshores no apareixen en el tractat, com és el cas de les còniques, sobre les quals el propi Euclides va escriure'n un llibre. El propòsit de l'autor era exposar de manera clara i ordenada els fonaments de la matemàtica elemental.

L'èxit de l'obra resideix especialment en la simplicitat i eficàcia amb les que va ser elaborada. A partir d'un reduït nombre d'axiomes enunciats al començament, es dedueixen de manera lògica noves proposicions que alhora s'utilitzen per a demostrar-ne d'altres. Els resultats van ser presentats amb un ordre i una coherència molt superiors a les d'escrits previs, fins tal punt que es van deixar de realitzar còpies dels altres i actualment no se'n conserva cap.

Degut a que els *Elements* sigui un text tan antic, no només va sobreviure al pas dels segles, sinó que també va resistir l'evolució del suport de l'escriptura. Malauradament, a l'època d'Euclides s'acostumava a escriure en papirs, un material poc resistent a les inclemències del temps i, per aquest motiu, va ser necessari realitzar freqüentment noves còpies del text original fins la introducció del pergamí. La còpia completa més antiga conservada actualment data de l'any 888, però es poden trobar fragments encara més antics.



Figura 2.1: Fragment dels *Elements* datat entorn l'any 100 a. C.

L'obra d'Euclides va patir modificacions al llarg de les seves múltiples edicions; alguns autors hi van introduir aclariments, comentaris o correccions. Efectivament, en els *Elements* s'hi poden detectar algunes febleses i errors, però cal destacar que conté resultats transcendents de les matemàtiques, que va facilitar el camí cap a l'ampliació de coneixement i que la seva utilitat preval 2300 anys després d'haver estat creat.

2.1 La metodologia dels *Elements*

Els *Elements* es divideix en tretze llibres classificables segons el seu contingut:

- Els llibres I, II, III, IV, V i VI tracten la geometria plana.
- Els llibres VII, VIII i IX estudien la teoria de nombres.
- El llibre X analitza els incommensurables.
- Els llibres XI, XII i XIII tracten la geometria de l'espai.

Aquests llibres van ser redactats sintèticament seguint un ordre lògic, de manera que cada nou resultat obtingut deriva d'anteriors i no s'utilitza en el raonament de la prova cap altre resultat que no hagi estat prèviament demostrat, seguint aquest mateix criteri. A més, en les demostracions només es fan servir elements l'existència dels quals s'ha provat mitjançant una construcció geomètrica. D'aquesta manera, la construcció que realitza Euclides requereix uns conceptes per a fonamentar-se, tan evidents i intuïtius que no necessitin ser demostrats, i també el coneixement d'algunes construccions bàsiques. Aquest conjunt elemental el constitueixen les definicions, els axiomes i les nocions comunes, i s'utilitzaran per a demostrar les proposicions.

2.1.1 Les definicions

Les definicions serveixen per a introduir els conceptes matemàtics que més endavant s'utilitzaran. Acostumen a elaborar-se establint relacions entre elements que ja han estat definits, però les primeres definicions no segueixen aquest criteri ja que no poden utilitzar-ne d'altres.

Per exemple, la primera definició que es dona en els *Elements* és:

“Un *punt* és allò que no té parts”;

mentre que la definició 10 del llibre I dicta:

“Quan una línia recta que està sobre una altra fa que els angles adjacents siguin iguals, cadascun dels angles és recte, i la recta que està sobre l'altra es diu *perpendicular* a l'altra recta”,

utilitzant les definicions prèvies de línia recta i d'angle juntament amb el concepte d'igualtat d'angles.

Generalment, les definicions apareixen a l'obra d'Euclides al començament dels llibres, exceptuant alguns llibres que no en tenen i el desè llibre, on s'hi troben al llarg de l'escrit. En total, els *Elements* conté unes 130 definicions aproximadament.

2.1.2 Els axiomes

Els axiomes són cinc sentències que s'accepten sense demostració com a veritats inqüestionables. Apareixen en el llibre I després de 23 definicions inicials, algunes de les quals són necessàries per a enunciar-los, i es coneixen com els *axiomes* o *postulats d'Euclides*:

1. Per dos punts diferents hi passa una única recta.
2. Un segment rectilini sempre pot ser allargat.
3. Hi ha una única circumferència amb un centre i un radi donats.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. Si una línia recta talla dues altres rectes formant amb aquestes a un costat angles interiors la suma dels quals és menor que dos angles rectes, les dues rectes suficientment allargades es tallen en el mateix costat.

El primer dels axiomes, a més de garantir l'existència de la línia recta, assegura que se'n poden crear tantes com siguin necessàries.

El segon, diu que les rectes no estan acotades, que es poden prolongar sense límit. També es pot deduir d'aquest axioma que dues línies rectes diferents no poden tenir un segment en comú, és a dir, un segment només pot determinar una única recta.

L'axioma tercer, de manera similar al primer, ens garanteix l'existència de circumferències de tots els radis possibles, sense límit i en qualsevol localització.

El quart axioma afirma que els angles rectes sempre tenen el mateix valor, sigui quina sigui la seva ubicació.

A simple vista s'observa una diferència entre el cinquè axioma i els altres, doncs l'últim és considerablement més llarg i difícil d'entendre en comparació de la resta d'axiomes, que són curts i simples. La polèmica generada envers el cinquè postulat, també anomenat *postulat de les paral·leles*, es desenvolupa més endavant.

2.1.3 Les nocions comunes

Euclides va considerar com a nocions comunes aquelles afirmacions generals que es verificaven en totes les ciències, i no sols en la matemàtica. Aquestes nocions apareixen en el llibre I, a continuació dels axiomes, i es consideren tan evidents que

no requereixen demostració per a ser acceptades. Les que apareixen en els *Elements* són cinc:

1. Coses iguals a una tercera són iguals entre sí.
2. Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals, els totals són iguals.
3. Si a coses iguals es resten coses iguals, les diferències són iguals.
4. Si dues coses coincideixen amb una tercera, aleshores són iguals.
5. El tot és major que les parts.

2.1.4 Les proposicions

Les proposicions són aquells enunciats que es demostren a partir dels axiomes i les nocions comunes, utilitzant definicions que hagin estat donades abans i, freqüentment, també altres proposicions que ja s'hagin demostrat prèviament.

En total, apareixen 465 proposicions en els *Elements*, ocupant la major part de l'obra. Sovint es diferencien dos tipus de proposicions segons el tipus d'informació que aporten:

- S'anomenen *teoremes* les proposicions que enuncien propietats dels elements matemàtics.
- S'anomenen *problemes* aquelles que expliquen com realitzar la construcció d'objectes matemàtics.

Els problemes són menys nombrosos que els teoremes, ja que només n'hi ha 93, però tot i així, els dos tipus de proposicions acostumen a estar repartides de manera uniforme entre els tretze llibres.

A les demostracions, Euclides s'esmera en justificar tots els passos seguits, però no sempre anomena quins resultats previs aplica en particular, com quan utilitza els axiomes o les nocions comunes, que a partir del llibre I ja dona per coneguts. El mètode utilitzat per a demostrar les proposicions crea una mena de xarxa en la qual una petita modificació pot fer trontollar l'estructura de molts altres resultats, és a dir, si s'elimina una sola proposició, es deixen inacabades totes les demostracions en les quals aquesta hagi estat utilitzada, i en conseqüència totes aquelles proposicions deixen de ser vàlides, de manera que la cadena pot estendre's catastròficament.

Per a entendre el mètode de treball d'Euclides, es pot consultar una demostració dels *Elements*. Per exemple, la de la proposició 47 del llibre I, que es correspon amb el cèlebre *Teorema de Pitàgores*:

Proposició I.47. *En els triangles rectangles, el quadrat del costat oposat a l'angle recte és igual a la suma dels quadrats dels costats que comprenen a l'angle recte.*

En la demostració d'aquesta proposició (que es pot consultar a [16]), Euclides fa ús dels següents resultats obtinguts prèviament:

- Construcció d'un quadrat sobre un segment donat (I.46)¹.
- Els angles adjacents sumen dos rectes (I.14).
- Si dos triangles tenen dos costats respectius iguals, i tenen els angles compresos iguals, aleshores també tindran les bases iguals, els triangles seran iguals, i els angles restants seran iguals, concretament els oposats als costats iguals (I.4).
- Els paral·lelograms que tenen les bases iguals i estan continguts entre les mateixes paral·leles, són iguals (I.36).
- Si un paral·lelogram té la mateixa base que un triangle i està contingut entre les mateixes paral·leles, aleshores el paral·lelogram és el doble que el triangle (I.41).

A partir d'aquests elements, sigui ABC un triangle rectangle qualsevol, on hi suposem l'angle $\angle BAC$ recte, podem construir un quadrat sobre cada segment del triangle, i obtenir així una construcció com la de la **Figura 2.2**. Observem que:

- Els triangles DCB i ABI són iguals, ja que $AB = BD$, $BI = BC$ i $\angle DBC = \angle ABI$.
- L'àrea del quadrat $ABDE$ és el doble de l'àrea del triangle DCB , ja que les dues figures tenen la mateixa base i es troben entre les mateixes paral·leles.
- L'àrea del rectangle $BIJK$ és el doble de l'àrea del triangle ABI , ja que passa el mateix que amb el quadrat.

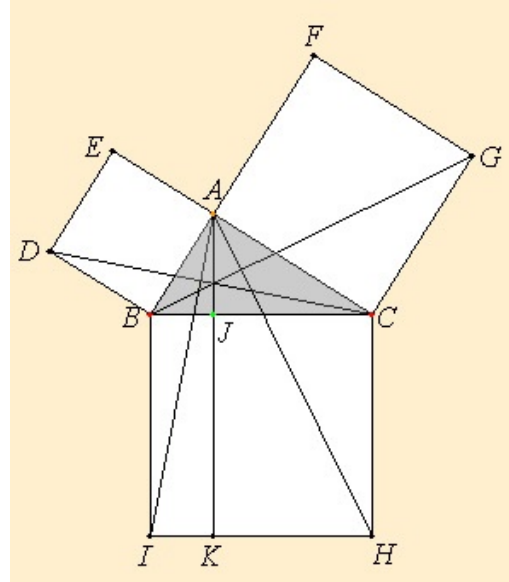


Figura 2.2

Combinant aquests resultats, obtenim que l'àrea del rectangle $BIJK$ és igual que l'àrea del quadrat $ABDE$.

De manera anàloga s'obté que l'àrea del rectangle $CHKJ$ és igual que l'àrea del quadrat $ACGF$. Així, com l'àrea del quadrat $BIHC$ és igual a la suma de les àrees dels rectangles $BIKJ$ i $CHKJ$, per les igualtats demostrades tenim que l'àrea del quadrat de catet oposat a l'angle recte, $BIHC$, és igual a la suma de les àrees dels quadrats que tenen per catets els segments que comprenen l'angle recte, $ABDE$ i $ACGF$.

□

¹Fent ús de la notació habitual amb la que es fa referència al contingut dels *Elements*, I.46 és la proposició 46 del llibre I.

2.2 El contingut dels *Elements*

En cada llibre dels *Elements* es tracten temes diferents, però sempre es manté un ordre lògic que facilita la comprensió global de l'obra.

Llibre I

Al començament del llibre I es donen 23 definicions de conceptes fonamentals de la geometria plana. Primer es defineixen els elements més bàsics que la componen (punt, recta,...) i després s'introdueixen els conceptes de perpendicularitat, els tipus d'angles, el cercle i els seus elements. A continuació es tracten els polígons: es defineixen els triangles i els diferents tipus, depenent del nombre de costats iguals o del tipus d'angles que tinguin; també s'introdueixen els quadrilàters i les diferències entre quadrats, rectangles, rombes i romboïdes. Per últim, es defineixen les rectes paral·leles.

Després de les definicions, s'enuncien els cinc axiomes i, tot seguit, el mateix nombre de nocions comunes.

Les 48 proposicions que segueixen es poden classificar en tres grups: les primeres 26 tracten de les propietats dels angles i els costats dels triangles, així com també de la seva construcció; de la 27 a la 33 constitueixen la teoria de les paral·leles i demostren que la suma dels angles d'un triangle és igual a dos angles rectes, i de la 33 a la 48 tracten les àrees dels paral·lelograms i dels triangles, acabant amb el Teorema de Pitàgores i el seu invers.

Llibre II

Aquest llibre només conté dues definicions que apareixen al començament, són les de rectangle i de "gnomon", una figura que s'obté en treure-li a un rectangle un altre més petit des d'un dels vèrtexs.

Les primeres onze proposicions que s'enuncien tracten de relacionar transformacions d'àrees i àlgebra geomètrica grega. Les proposicions 12 i 13 equivalen a una generalització del Teorema de Pitàgores coneguda com el *teorema del cosinus*. Finalment, a l'última proposició s'introdueix el desenvolupament elemental del mètode d'aplicació de les àrees.

Llibre III

En aquest apartat s'estudien els teoremes relatius a la circumferència, a les seves cordes, tangents, segments i sectors, com també als angles que es poden definir sobre ella. Hi apareixen 11 definicions, que expliquen en què consisteixen els objectes matemàtics abans esmentats, i 37 proposicions, 5 de les quals són problemes.

Les primeres proposicions expliquen com trobar el centre d'una circumferència i algunes propietats de cordes i diàmetres. A partir de la cinquena, fan referència a propietats dels cercles tangents i secants. Després es troben relacions entre les cordes d'una circumferència, entre cordes i arcs, i s'explica com dibuixar una circumferència a partir d'un arc donat. A la 30, s'explica com fer la bisectriu d'un arc, i les últimes estudien la potència d'un punt respecte una circumferència.

Llibre IV

Aquest quart llibre conté 7 definicions, relatives a figures inscrites i circumscrites en un cercle, i 16 proposicions que són totes elles problemes. En la primera d'aquestes, Euclides mostra com inscriure un segment en un cercle i aleshores, fins la cinquena proposició, exposa la manera d'inscriure i circumscriure triangles en cercles i a l'inrevés.

De la 6 a la 9, fa el mateix que abans amb quadrats i a la 10, explica la manera de construir un triangle isòsceles els angles iguals del qual siguin el doble que el tercer, inscrit en una circumferència. Aquest triangle és especialment important, ja que l'utilitza entre les proposicions 11 i 14 per a inscriure i circumscriure pentàgons en cercles i a l'inrevés. A les dues últimes, inscriu un hexàgon i un pentadecàgon regulars en un cercle, respectivament, fent ús del mètode de la duplicació de costats.

Llibre V

En aquest volum s'introdueix la proporcionalitat entre segments, que serà necessària a l'hora de definir figures semblants més endavant. Hi apareixen 18 definicions, algunes sobre el concepte de la raó, i no s'exclouen les magnituds incommensurables, acceptant així les fraccions irracionals.

Les proposicions que constitueixen aquest llibre són un total de 24, on es generalitzen les propietats de les fraccions numèriques als diferents tipus de raons, es demostren propietats d'aquestes últimes i es relacionen les raons amb altre conceptes prèviament definits.

Llibre VI

S'estudien en aquest llibre la proporcionalitat entre segments i la semblança entre figures planes. Conté només 4 definicions, entre les quals apareixen els conceptes de figures semblants i inversament relacionades, tallar una recta en extrema i mitja raó, i l'alçada d'una figura.

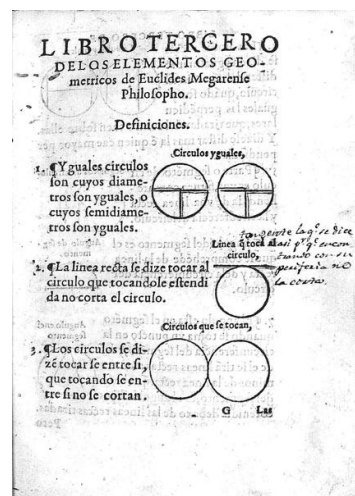


Figura 2.3: Detall de la primera versió al castellà dels *Elements* realitzada per Rodrigo Camorano l'any 1576

El sisè llibre recull 31 proposicions on les primeres tracten de la proporcionalitat en els triangles. A partir de la 9, s'explica com dividir una línia en parts proporcionals i com trobar la mitja proporcional de dos segments. De la 18 a la 23 tracten de la construcció de les figures semblants i les seves propietats. La proposició 30 explica com trobar la raó àuria i per últim, la 31 representa una generalització del teorema de Pitàgores.

Llibre VII

Els llibres VII, VIII i IX constitueixen un conjunt de diferent estructura que la dels llibres previs i estan dedicats a tractar l'aritmètica. El primer dels llibres és el que conté les definicions, en total 22, on s'introdueixen conceptes com la unitat i els nombres. També es defineix el que ara entenem per divisor o no divisor d'un nombre, i els nombres parells i senars. A més, a partir de la definició del producte de dos nombres, s'introdueixen els nombres plans, quadrats, sòlids i cubs.

A les proposicions s'explica la manera de trobar el màxim comú divisor de dos o més nombres, i es proposa també el que coneixem com a *mètode d'Euclides*. A més, es donen propietats de la proporcionalitat dels nombres, bastant similars a les del llibre V per a segments. S'estudien també els nombres primers i composts, i a les últimes proposicions s'explica com trobar el mínim comú múltiple de nombres donats.

Llibre VIII

En aquest volum hi ha exclusivament proposicions, són un total de 27 i tracten principalment de series de nombres en “proporció continuada”, que és el que ara coneixem com a progressió geomètrica. S'estudien les propietats de les progressions depenent de la naturalesa del terme general i també segons com sigui la raó entre els nombres.

Llibre IX

El llibre IX conforma una mena de miscel·lània aritmètica. Igual que el llibre anterior no conté definicions, però hi apareixen 36 proposicions. Les primeres fan referència a nombres plans i sòlids, després de la 8 s'estudien les progressions geomètriques iniciades amb la unitat i, a la 14, es demostra la unicitat de la descomposició d'un nombre en els seus factors primers. Tot seguit, passant per la proporcionalitat entre nombres, es tracten les operacions de suma, resta, multiplicació i divisió entre nombres parells i senars. Finalment, les dues últimes proposicions expliquen la manera de sumar els termes d'una progressió geomètrica i un mètode per a obtenir nombres perfectes, respectivament.

Llibre X

Aquest volum, on s'estudien els nombres irracionals, consta de 16 definicions repartides en 3 grups i 115 proposicions. Es tracta del més extens dels llibres dels *Elements* i és considerat un dels més complexos. S'atribueix la major part del seu

contingut al treball de Theaetetus, tot i que Euclides el va completar i editar.

Entre les definicions, hi apareixen les de nombres racionals i irracionals, és a dir, els segments que són commensurables o incommensurables respecte un segment rectilini donat, respectivament. També s'introdueixen les quantitats “commensurables en quadrat” com les que, elevades al quadrat, són commensurables entre sí.

Les proposicions tracten les propietats i les relacions de les magnituds commensurables, incommensurables i commensurables en quadrat.

Llibre XI

Els últims tres llibres parlen de la geometria de l'espai, només apareixen definicions al primer i en total sumen 75 proposicions, 12 de les quals són problemes.

Les definicions del llibre XI són 28, on es precisen elements i relacions de la geometria de l'espai, com rectes, plans i sòlids (figures de l'espai), paral·lelisme i ortogonalitat, angles sòlids i semblança de sòlids. També es defineixen algunes figures de l'espai: la piràmide, el prisma, l'esfera, el con, el cilindre, el cub, l'octaedre, l'icosaedre i el dodecaedre.

Les proposicions tracten propietats de rectes i plans, així com de les seves interseccions i també s'estudien els conceptes de paral·lelisme i ortogonalitat entre els elements de l'espai. A partir de la proposició 20, s'estudien els angles sòlids, els paral·lelepípedes i els prismes.

Llibre XII

Aquest llibre constitueix una base per al desenvolupament del darrer. Conté 18 proposicions en les que es desenvolupa l'obtenció de l'àrea del cercle i els volums d'alguns sòlids. Les primeres proposicions demostren la proporcionalitat dels cercles amb el quadrat dels seus diàmetres i a continuació s'estudia el volum de piràmides, prismes, cons i cilindres. Per últim, la proposició 18 dona el volum de l'esfera.

En les demostracions es fa servir el *mètode d'exhaució*, utilitzat anteriorment per Arquímedes.

Llibre XIII

En aquest últim volum, constituït per 18 proposicions, s'inclou la construcció dels 5 sòlids regulars o platònics: el tetraedre, l'hexaedre, l'octaedre, el dodecaedre i l'icosaedre.

Les 12 primeres proposicions tracten de com tallar segments segons el tipus de raó, algunes propietats dels pentàgons regulars, les relacions entre els costats de pentàgons, hexàgons i decàgons regulars inscrits en una mateixa circumferència i la

raó entre el diàmetre d'aquesta i els costats. De la proposició 13 a la 17, es mostra com inscriure cada sòlid platònic en una esfera, i a la última, es comparen els costats d'aquests sòlids i es demostra que no existeix cap altre sòlid regular.

2.3 La problemàtica dels *Elements*

L'obra d'Euclides ha estat llargament discutida des de la seva creació, ja sigui per la feblesa d'algunes definicions, pels criteris que van conduir a l'autor a determinar certes nocions comunes, etc.

Un dels temes que més crítiques ha rebut és la selecció dels axiomes que introdueixen la geometria euclidiana. Fins el segle XIX es van proposar alternatives a aquest reduït conjunt d'axiomes, que es considerava insuficient, però cap dels nous sistemes suposava una millora tal com per a desbancar el d'Euclides. El canvi es va produir amb el sistema axiomàtic presentat per Hilbert a la seva obra *Fonaments de la Geometria*, el 1899. Cal destacar però, que l'extens període de vigència dels axiomes d'Euclides és una prova més del bon criteri d'aquest matemàtic.

Sens dubte, del conjunt d'axiomes dels *Elements*, el que més problemàtica va suposar és el cinquè, també anomenat *axioma de les paral·leles*. Com s'ha comentat abans, aquest postulat és visiblement diferent dels altres quatre. No sols és més llarg, sinó que també la seva comprensió implica una major dificultat que en els altres, simples i directes.

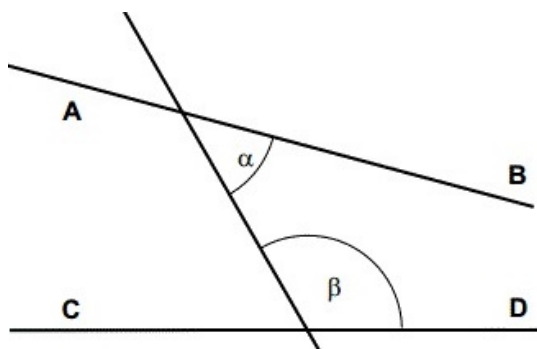


Figura 2.4

L'axioma de les paral·leles afirma que (observant la **Figura 2.4**) si una recta talla les rectes AB i CD , i la suma dels angles α i β és menor que dos angles rectes, aleshores aquestes dues rectes es tallen en prolongar-les per B i D .

Degut a la naturalesa d'aquest axioma, molts entesos van creure que havia de ser possible demostrar-lo a partir dels altres i que no requeria ser un postulat, sinó una proposició. D'aquesta manera, van

proposar-se nombroses demostracions de l'axioma de les paral·leles, fins que els treballs realitzats per Bolyai i Lobachevsky demostraren que és impossible deduir el cinquè axioma a partir dels altres quatre. Entre les demostracions que s'havien presentat, la majoria van ser invalidades per suposar l'axioma de les paral·leles en una forma diferent, o alguna conseqüència d'aquest. Per a mostrar la subtilesa d'aquestes interpretacions errònies, alguns exemples són:

- Si tres dels angles d'un quadrilàter són rectes, també ho és el quart.
- Una línia equidistant d'una línia recta és una recta.

- *Per tres punts no alineats hi passa una circumferència.*

L'intricat enunciat de l'últim axioma pot atribuir-se al fet de que tot principi relacionat amb el paral·lelisme afecta de manera inevitable a qüestions de l'infinit, tema fortament eludit pels matemàtics grecs. Però davant la necessitat d'utilitzar paral·leles en la seva obra, Euclides va enunciar el cinquè axioma establint les condicions que verificaven dues rectes que es tallaven en un punt a distància finita, resignant la noció d'infinit a un segon pla.

Capítol 3

El pla hiperbòlic

La geometria hiperbòlica és la primera geometria no euclidiana consistent de la història, i verifica els primers quatre postulats d'Euclides. Va ser descoberta per Bolyai i Lobachevsky quan, intentant deduir el cinquè postulat a partir dels altres quatre, van demostrar l'existència d'una geometria que, tot i no verificar l'axioma de les paral·leles, era consistent. D'aquesta manera, van provar l'independència del cinquè postulat respecte els altres.

Aquesta geometria no euclidiana estudia les propietats dels objectes geomètrics que es mantenen invariants per a cert tipus de projectivitats. A continuació, veurem un model de geometria hiperbòlica de dues dimensions i més endavant, concretarem com són aquelles transformacions.¹

3.1 El model del semiplà de Poincaré

Un dels models més coneguts del pla hiperbòlic és el *model del semiplà de Poincaré*, i es denota per $\mathbb{H}$.

Els objectes geomètrics que es consideren en aquest model són:

- i. Com a conjunt de *punts*, es pren el semiplà $y > 0$, és a dir, el subconjunt de punts $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y > 0\}$.
- ii. Com a conjunt de *rectes*, es prenen les semicircumferències euclidianes centrades a la recta $y = 0$ contingudes al semiplà $y > 0$ i les rectes verticals, és a dir, aquelles que tenen l'equació de la forma $x = c$, on $c \in \mathbb{R}$, i poden ser considerades també com a semicircumferències de radi infinit (veure **Figura 3.1**).

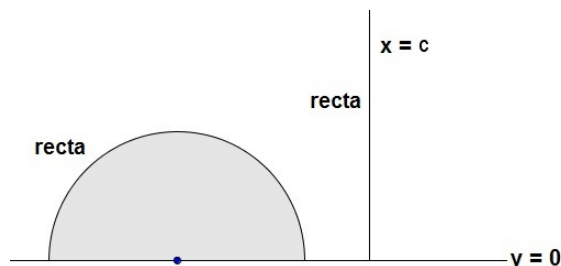


Figura 3.1

¹Totes les figures dels capítols 3 i 4, excepte la 3.9, són dibuixos realitzats amb GeoGebra.

Per a demostrar la consistència de la geometria hiperbòlica, comprovarem que en el model de Poincaré es verifiquen tots els axiomes de la geometria euclidiana a excepció del cinquè i aleshores, com la geometria euclidiana és consistent, la hiperbòlica també ho serà.

Abans de treballar en el semiplà de Poincaré hem de conèixer un tipus de transformació anomenada *inversió* que serà una de les eines que utilitzarem en la demostració.

La inversió

Una *inversió* és un tipus de transformació bijectiva i continua del pla euclidià en ell mateix que es pot definir de la següent manera:

Definició 3.1.1. Si considerem C una circumferència de centre O i radi r (com a la **Figura 3.2**), una *inversió* respecte C és la transformació del pla euclidià que envia cada punt A diferent de O , a un únic punt A' situat sobre la semirecta d'origen O que passa per A tal que

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

Es diu aleshores que A' és *l'invers* de A respecte la circumferència considerada i O és el *centre d'inversió*.

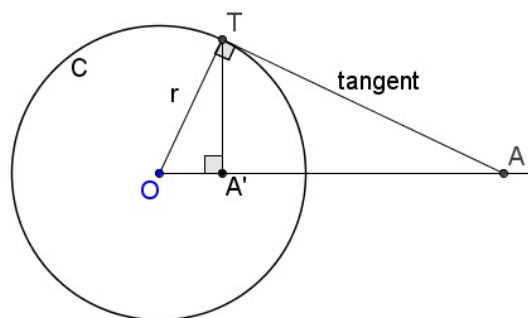


Figura 3.2

Cal observar que tot punt interior de la circumferència té per imatge un punt exterior a aquesta i recíprocament. A més, els punts de la circumferència són fixos, és a dir, cada punt de la circumferència coincideix amb el seu invers.

Construcció de l'invers

Segons la posició del punt A , del qual volem trobar-ne l'invers, hi ha dues construccions possibles:

- Sigui A un punt exterior a C (com a la **Figura 3.2**), es pot traçar una recta tangent a la circumferència des d'aquest punt que interseca C en el punt T i, a continuació, construir la perpendicular a la recta OA que passa per T , intersecant OA en A' .
- Sigui A un punt interior a C , es pot trobar A' fent la construcció anterior en ordre invers. En primer lloc, cal traçar la perpendicular a la recta OA des de A , que talla C en el punt T , i aleshores, A' serà el punt on s'interseca la recta OA amb la recta tangent a C en T .

Els triangles OAT i OTA' són rectangles i tenen un angle en comú, així que són semblants (veure **Figura 3.3**) i verifiquen:

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} \longrightarrow \frac{OA}{r} = \frac{r}{OA'},$$

d'on s'obté $OA \cdot OA' = r^2$. Per tant, A' és el punt invers de A respecte C .

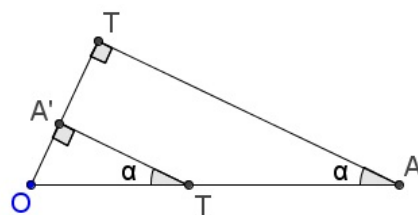


Figura 3.3

Propietats de la inversió

Algunes de les propietats de les inversions són:

1. Tota inversió coincideix amb la seva aplicació inversa, és a dir, les inversions són involutives.
2. Siguin A i A' punts inversos respecte C , i sigui C' una circumferència qualsevol que passa per A i A' , aleshores C i C' són ortogonals.
3. Sigui A' el punt invers de A , i sigui B' el punt invers de B , ambdós casos respecte una circumferència C de centre O , aleshores

$$\angle OAB = \angle OB'A'$$

$$\text{i } \angle OBA = \angle OA'B'$$

A més, els punts A , B , A' i B' són concíclics, és a dir, es troben sobre una mateixa circumferència (veure **Figura 3.4**).

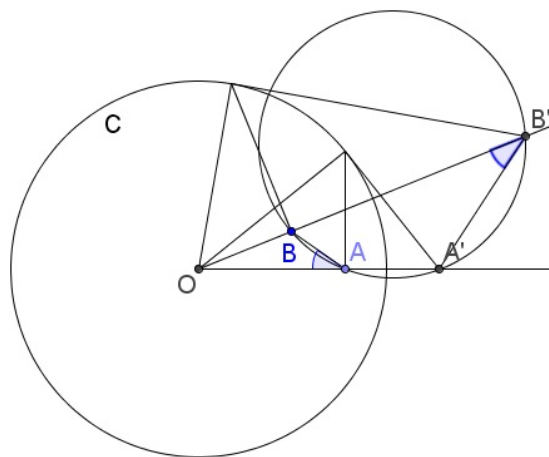


Figura 3.4

4. Les inversions transformen:
 - Una recta que no passa pel centre d'inversió en una circumferència que sí que passa per aquest centre.
 - Una recta que passa pel centre d'inversió en ella mateixa.
 - Una circumferència que no passa pel centre d'inversió en una circumferència que tampoc hi passa.
 - Una circumferència que passa pel centre d'inversió en una recta que no hi passa.
5. Les inversions són aplicacions conformes, és a dir, conserven els angles.

Definició 3.1.2. Siguin A, B, C i D quatre punts qualssevol del pla, la *raó doble generalitzada* és

$$[A, B, C, D] = \frac{AC/BC}{AD/BD}.$$

Si els punts estan alineats, aquesta raó coincideix amb la raó doble, excepte pel signe.

6. Les inversions conserven la raó doble generalitzada.

Representació analítica de la inversió

Es pot obtenir una representació analítica de les inversions considerant en el pla euclidià un sistema de coordenades ortogonal. Identificarem cada punt A , que té coordenades (x, y) , amb el nombre complex $z = x + iy$, que té per conjugat $\bar{z} = x - iy$ i per norma $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Considerem la inversió de A respecte la circumferència C , centrada en l'origen i de radi r , és a dir, que verifica l'equació

$$OA \cdot OA' = r^2.$$

Sigui el punt z abans considerat, identificant A' amb $z' = x' + iy'$, on x' i y' són les coordenades de A' , podem escriure l'equació anterior com

$$\|z\| \cdot \|z'\| = r^2.$$

Expressant ara z i z' en coordenades polars:

$$\begin{aligned} z &= pe^{i\alpha} & \bar{z} &= pe^{-i\alpha} \\ z' &= p'e^{i\alpha} & \bar{z}' &= p'e^{-i\alpha} \end{aligned} \longrightarrow z' \cdot \bar{z} = pp' = \|z\| \cdot \|z'\| = r^2.$$

Així que l'invers de z és

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}} = \frac{r^2}{x - iy} = \frac{r^2 \cdot (x + iy)}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} + i \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} = x' + iy'.$$

Trobarem ara l'expressió analítica d'una inversió respecte una circumferència de centre arbitrari P i radi r . Cal introduir però un nou sistema de coordenades similar a l'anterior, amb origen al punt P i amb eixos paral·lels als antics.

Siguen Q i Q' les noves coordenades d'un punt qualsevol A i del seu invers A' respectivament, l'invers ve determinat per

$$Q' = \frac{r^2}{\bar{Q}} \quad (3.1.1)$$

La relació entre les coordenades de A i A' en els dos sistemes és $\begin{aligned} z &= Q + P \\ z' &= Q' + P \end{aligned}$ i substituint en 3.1.1, arribem a l'equació

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{P}} + P = \frac{r^2 + P\bar{z} - P\bar{P}}{\bar{z} - \bar{P}} \quad (3.1.2)$$

En les inversions respecte rectes, que són considerades circumferències de radi infinit, s'obté un tipus diferent d'equació. Si la inversió es fa respecte l'eix de les x 's, l'equació és $z' = \bar{z}$. Si es fa respecte una recta que passa per l'origen de coordenades formant un angle θ amb l'eix de les x 's, tindrem $e^{i\theta}z' = e^{i\theta}z \implies z' = e^{-2i\theta}\bar{z}$. Així que, si la inversió es fa respecte una recta arbitrària que forma un angle θ amb l'eix de les x 's, tindrem $z' = e^{-2i\theta}\bar{z} + a$, on a és un nombre complex.

De les dues expressions obtingudes, en deduïm que l'expressió analítica general de les inversions és de la forma

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad (3.1.3)$$

on α, β, γ i δ són nombres complexos. Escollint aquests nombres de manera correcta, podem obtenir l'expressió de qualsevol inversió.

Definició 3.1.3. El *discriminant* d'una inversió de la forma anterior és $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$.

La inversió respecte una circumferència (de radi finit) té per nombres $\alpha = P$, $\beta = r^2 - PP$, $\gamma = 1$ i $\delta = -P$, mentre que respecte una recta són $\alpha = e^{-2i\theta}$, $\beta = a$, $\gamma = 0$ i $\delta = 1$.

Observem que el discriminant en aquests dos casos sempre és diferent de zero. Les funcions de la forma 3.1.3 que verifiquen aquesta propietat s'anomenen *transformacions de Moebius* i són projectivitats de la recta projectiva complexa. Per tant, les inversions són, en particular, un tipus de transformacions de Moebius.

Suposem ara que apliquem dues inversions successives respecte a circumferències arbitràries tals que la primera aplica z a z' , per tant és de la forma $z' = \frac{\alpha_1\bar{z} + \beta_1}{\gamma_1\bar{z} + \delta_1}$, i la segona aplica z' a z'' , així que és de la forma $z'' = \frac{\alpha_2\bar{z}' + \beta_2}{\gamma_2\bar{z}' + \delta_2}$. Composant les aplicacions, obtenim

$$z'' = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_2\beta_1)z + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2)}{(\alpha_2\gamma_1 + \delta_1\gamma_2)z + (\gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2)}.$$

Es pot comprovar que el discriminant de l'aplicació producte d'inversions coincideix amb el producte dels determinants de cadascuna, així que el producte d'inversions (que hem dit que són un tipus de transformacions de Moebius), són també transformacions de Moebius perquè com els discriminants de les inversions són diferents de zero, el seu producte serà diferent de zero.

També podem deduir que, si una aplicació és producte d'un nombre parell d'inversions, es pot escriure com

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

i si és producte d'un nombre imparell d'inversions, aleshores és de la forma

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$$

on α, β, γ i δ són nombres complexos. Observem que el producte d'un nombre parell d'inversions no és mai una inversió i que el producte d'un nombre senar d'inversions no és necessàriament una inversió.

L'expressió analítica de les inversions donada, pot facilitar considerablement tant el treball amb aquestes aplicacions com la demostració de resultats teòrics. Alguns resultats importants són:

Proposició 3.1.1. *La inversió d'una circumferència o una recta sempre és una circumferència o una recta.*

Proposició 3.1.2. *Si una aplicació que és producte d'un nombre parell d'inversions deixa tres punts fixos, aleshores és la identitat.*

Demostració:

Per hipòtesi, considerem una aplicació que abans hem vist que es pot escriure com

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

per a determinats nombres complexos α, β, γ i δ .

Els punts fixos verifiquen l'equació $z' = z$, així que, substituint-la a l'anterior tenim que

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \iff (\gamma z + \delta) z - \alpha z - \beta = 0 \iff \gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0.$$

Com els tres punts fixos han de ser arrels del polinomi de segon grau obtingut, aquest és idènticament nul. Per tant, $\delta = \alpha$ i $\gamma = \beta = 0$, on $\alpha \neq 0$, ja que el determinant de la inversió no pot ser nul. Així, la inversió té la forma $z' = z$ per a tot z , i aquesta aplicació és la identitat.

□

Proposició 3.1.3. *Si una aplicació que és producte d'un nombre imparell d'inversions deixa tres punts fixos, aleshores és la inversió respecte la circumferència que passa per aquests punts fixos.*

Les propietats de les inversions aporten nova informació sobre aquest model de geometria, com que les aplicacions considerades transformen el semiplà $y > 0$ en ell mateix i que la imatge de les rectes hiperbòliques són també rectes hiperbòliques. A més, com les inversions conserven angles, sabem que els angles congruents en el sentit de la geometria euclidiana també ho són en el model de geometria hiperbòlica que estem tractant. Per contra, cal esmentar que la congruència de segments generalment no es manté d'una geometria a l'altra.

La mètrica del model del semiplà de Poincaré

La distància hiperbòlica entre dos punts A i B del semiplà de Poincaré està determinada per

$$d(A, B) = R |\ln [A, B, P, Q]|$$

on R és una constant positiva que quedarà determinada en escollir la unitat de mesura i P i Q són els punts d'intersecció amb la recta $y = 0$ de la recta hiperbòlica que passa per A i B (veure **Figura 3.5**).

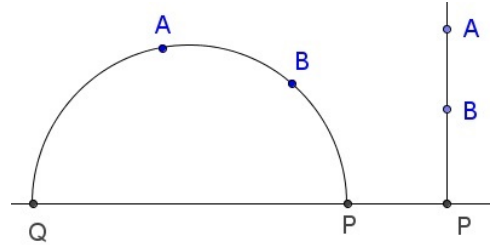


Figura 3.5

Si A i B pertanyen a una recta $x = c$ que talla $y = 0$ en P , aleshores

$$d(A, B) = R |\ln [A, B, P, \infty]| = R |\ln [A, B, P]| = R \left| \ln \frac{AP}{BP} \right|.$$

Per les propietats de la inversió, sabem que la raó doble generalitzada és invariant per inversions, així que la distància també ho és. Per tant, les inversions són moviments del pla hiperbòlic que conserven les distàncies, és a dir, són isometries del pla hiperbòlic.

A més, sigui C un punt que es troba entre A i B contingut en la recta hiperbòlica que passa per A i B , aleshores $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$. Suposarem també que $d(A, A) = 0$.

La mètrica induïda en el model del semiplà, és a dir, en $\mathbb{H}$, pot expressar-se com $g_{\mathbb{H}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Observem que aquesta mètrica és “proporcional” a l’euclidiana, doncs $g_{\mathbb{H}} = \frac{1}{y^2} g_e$ (on considerem g_e la mètrica euclidiana), aleshores es diu que aquestes mètriques són *conformement equivalents* i això implica que la mesura dels angles en aquest model $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ sigui la mateixa que en la mètrica euclidiana, com havíem deduït abans.

3.2 Els axiomes d’Euclides en el model del semiplà de Poincaré

Els conceptes que s’han facilitat al llarg d’aquest capítol constitueixen les eines necessàries per a comprovar la validesa dels axiomes d’Euclides en el semiplà de Poincaré:

- Axioma 1

Per a veure que es verifica el primer, prenem dos punts del semiplà diferents A i B . Si les seves coordenades tenen la mateixa abscissa, la denotem per c i aleshores la recta euclidiana que determinen és $x = c$.

Si tenen abscisses diferents (veure **Figura 3.6**), aleshores podem traçar la perpendicular del segment AB pel punt mig, de manera que talli la recta $y = 0$ en un punt P , que és el centre de la semicircumferència euclidiana que passa per A i B .

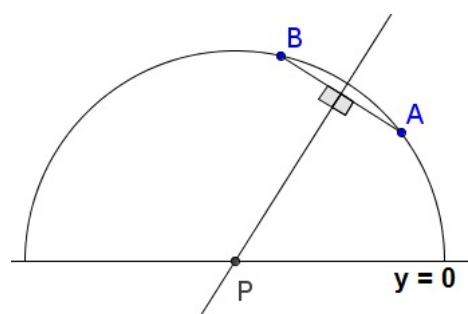


Figura 3.6

Per tant, en qualsevol cas tenim que per dos punts diferents hi passa una única recta hiperbòlica.

- Axioma 2

Per a veure que es verifica el segon axioma, haurem de comprovar si un segment de recta hiperbòlica es pot allargar indefinidament en qualsevol sentit. Distingirem dos casos segons el tipus de recta hiperbòlica a la que pertany el segment:

- (a) La recta hiperbòlica és una semicircumferència euclidiana amb el centre sobre la recta $y = 0$.
- (b) La recta hiperbòlica és una semirecta euclidiana perpendicular a la recta $y = 0$.

En el cas (a), suposem un segment qualssevol sobre la semicircumferència C , delimitat pels punts A i B . Veiem a la **Figura 3.7** que es pot duplicar aquest segment en qualsevol sentit. En particular, es mostra com es duplica cap a la dreta: només cal trobar el punt simètric de A respecte la circumferència ortogonal a C en el punt B , és a dir, trobant l'invers de A respecte la nova circumferència. Així s'obté A' i, seguint el mateix procediment, es pot duplicar el segment BA' i obtenir B' .

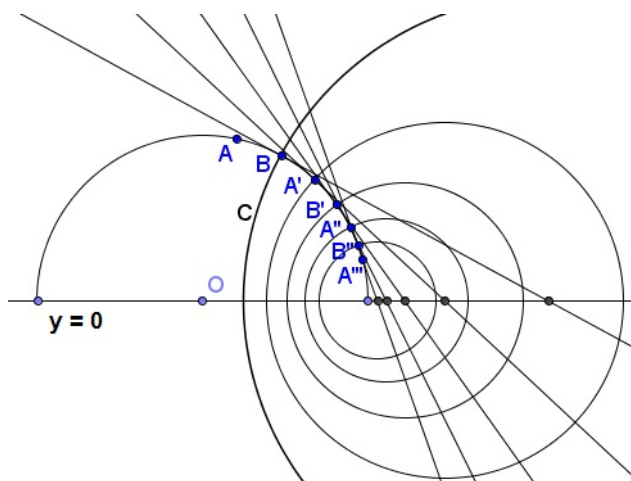


Figura 3.7

Observem que, a mesura que els segments duplicats s'acosten a $y = 0$, semblen més petits fins arribar a ser inapreciables en el límit. Així, aquests segments es poden duplicar indefinidament i de manera anàloga es procedeix duplicant per l'esquerra.

En el cas (b), si prenem un segment AB sobre una semirecta $x = c$, es pot duplicar aquest segment utilitzant el mateix raonament anterior: existeix una única circumferència de centre $(c, 0)$ que passi per B , i com és orthogonal a la recta $x = c$ en el punt B , aleshores l'invers de A respecte aquesta serà A' , BA' serà el segment simètric i

AA' serà el doble de llarg que AB . En cas que es dupliqui en direcció $y = 0$, l'efecte serà el mateix que el descrit en el cas (a), i si es duplica cap a la part superior del semiplà, l'efecte serà el contrari (els segments duplicats cada vegada seran majors) i es podrà repetir el procés indefinidament ja que el model del semiplà no està acotat superiorment.

Per tant, en qualsevol cas es pot allargar un segment indefinidament en les dues direccions, així que es verifica el segon axioma.

- Axioma 3

Com sabem, les circumferències són els conjunts de punts situats a la mateixa distància d'un punt anomenat centre, així que en el model de semiplà de Poincaré les circumferències tindran la mateixa aparença que les euclidianes però amb el centre desplaçat en comparació d'aquestes (veure **Figura 3.8**) i aleshores el tercer axioma es verifica directament.

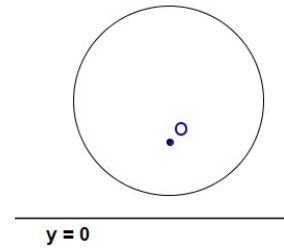


Figura 3.8

El fet que el centre de les circumferències hiperbòliques estigui desplaçat en el model del semiplà es deu a que la funció logaritme genera magnituds majors en els punts situats prop de l'eix $y = 0$, associant majors distàncies a punts que semblen més propers des de la perspectiva exterior (més similar a la geometria euclidiana). Es pot d'observar com afecta aquest procés a tot el semiplà a la **Figura 3.9**, on totes les imatges tenen idèntiques proporcions hiperbòliques.



Figura 3.9

- Axioma 4

En aquest model, els angles tenen la mateixa mesura que en la geometria euclidiana. Per tant, tots els angles rectes mesuren igual, verificant-se així el quart axioma.

- Axioma 5

Per últim, veiem que no es verifica el cinquè axioma, ja que donada una semicircumferència del semiplà $y > 0$ i un punt que no pertanyi a aquesta, existeixen infinites semicircumferències que passen pel punt sense tallar la semicircumferència donada.

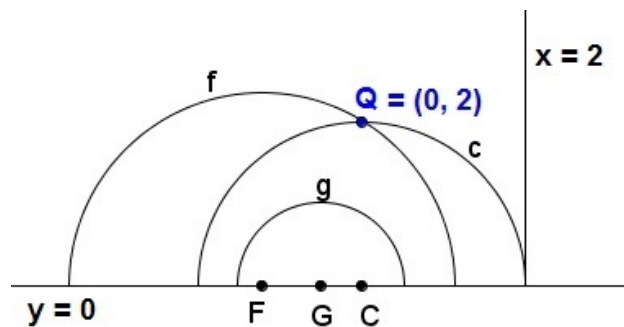


Figura 3.10

Per exemple, com es pot observar a la **Figura 3.10**, si considerem la recta hi-

perbòlica $x = 2$ i el punt $Q = (0, 2)$, qualsevol circumferència de centre $A = (a, 0)$ amb $a \leq 2$ que passi per Q és una recta hiperbòlica que no talla la recta donada. En aquest cas, veiem que c i f no tallen a $x = 2$ i passen per Q . Per tant, c i f són dues de les possibles paral·leles a la recta donada passant per el punt escollit.

Com hem construït un model de geometria hiperbòlica a partir de la geometria euclidiana, per la consistència de la geometria euclidiana queda demostrat aleshores que la geometria hiperbòlica també és consistent.

Cal mencionar també que en el pla hiperbòlic dues rectes poden tenir tres posicions relatives ja que, a més de les secants, hi ha dos tipus de rectes que no s'intersequen en aquest pla:

Definició 3.2.1. Les rectes que no es tallen al pla hiperbòlic però sí que es tallen a l'infinit són *hiperparal·leles* o *paral·leles*, i les rectes que no es tallen ni al pla hiperbòlic ni a l'infinit són *ultraparal·leles*.

Prenent com a referència la mateixa figura que abans i identificant la recta $y = 0$ amb l'infinit, observem que la recta c talla a $x = 2$ en el punt $(0, 0)$, però aquest punt no forma part del semiplà $y > 0$. Així doncs, aquestes rectes són paral·leles. En canvi, f és ultraparal·lela a $x = 2$, com també ho és g a les altres rectes de la figura, i f i c són secants.

3.3 Altres models de geometria hiperbòlica

Veurem dos models més del pla hiperbòlic: el model del disc de Poincaré i el model del disc de Klein.

Un segon model estudiat també per Poincaré és el *model del disc de Poincaré*, que denotarem per D_P , i es pot aconseguir aplicant una transformació de Moebius al model anterior.

Els objectes geomètrics que es consideren en aquest model són:

- i. Com a conjunt de *punts*, es pren l'interior d'un disc, per exemple del disc unitat, és a dir, el subconjunt de punts

$$D_P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\cong \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}.$$

- ii. Com a conjunt de *rectes*, es prenen els arcs de circumferències euclidianes continguts en el disc i ortogonals a la frontera d'aquest, i els diàmetres del disc (veure **Figura 3.11**).

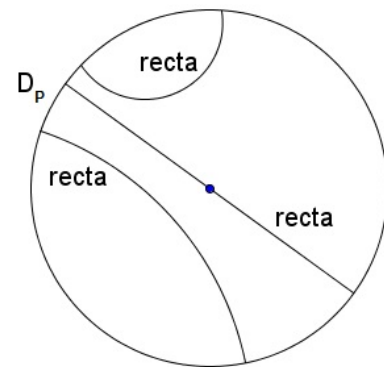


Figura 3.11

La aplicació que transforma el model del semiplà en l'actual és la transformació de Cayley $f_C : \mathbb{C}^+ \rightarrow D_P$, i ve definida per $f_C(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

La mètrica de $\mathbb{H}$ en el model D_P és $g_{D_P} = \frac{16(dx^2+dy^2)}{(4-x^2-y^2)^2}$.

De la mateixa manera que en el cas anterior, es tracta d'una mètrica conformement equivalent a la mètrica euclidiana i per tant, la mesura dels angles en (D_P, g_{D_P}) és la mateixa que en la mètrica euclidiana.

El *model del disc de Klein*, també anomenat model de Beltrami-Klein, considera els elements geomètrics següents:

- i. Com a conjunt de *punts*, es pren igual que abans l'interior d'un disc, per exemple del disc unitat, és a dir, el subconjunt de punts

$$\begin{aligned} D_K &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 < 1\} \\ &\cong \{z \in \mathbb{C} | \|z\| < 1\}. \end{aligned}$$

- ii. Com a conjunt de *rectes*, es prenen els segments que s'obtenen en intersecar rectes euclidianes amb el disc, és a dir, es prenen les cordes del cercle anterior (veure **Figura 3.12**).

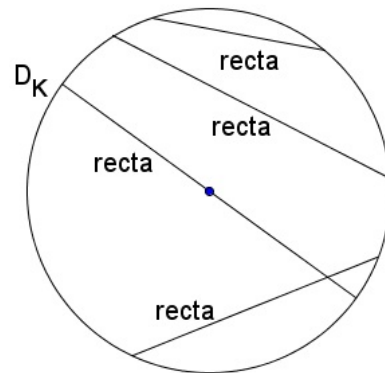


Figura 3.12

En aquest cas, la mètrica és $g_{D_K} = \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xydx dy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$ i observem que, contràriament als altres models vistos, la mètrica del model de Klein no és conformement equivalent a la mètrica euclidiana. Per tant, la mesura dels angles d'aquest model no és la mateixa que en la mètrica euclidiana.

Cal comentar que existeixen més models del pla hiperbòlic a part dels tres que s'han presentat en aquest capítol, com també existeixen aplicacions que permeten passar d'un model a un altre.

Capítol 4

Els axiomes de la geometria plana

4.1 Els axiomes de Hilbert

Amb l'objectiu de presentar unes bases sòlides i generals sobre les quals establir la geometria, l'any 1899 Hilbert va introduir el sistema axiomàtic modern amb la publicació de l'obra *Fonaments de la Geometria*, on partia de 21 axiomes que substituïen els d'Euclides.

En el sistema axiomàtic de Hilbert no es defineixen explícitament els objectes geomètrics considerats ni les relacions que s'estableixen entre ells, però els mateixos axiomes determinen algunes propietats que han de verificar aquestes relacions. A més, es pot apreciar en els enunciats com el sistema va ser construït seguint un raonament lògic, en lloc de l'intuïtiu adoptat en els *Elements*. Així, de manera similar a com va fer Descartes en introduir l'àlgebra a la geometria, Hilbert va presentar les bases de la geometria dins del marc de la teoria de conjunts quan aquesta encara no estava completament assentada com a tal. Doncs recordem que la teoria de conjunts va emergir de la mà de Georg Cantor ben entrada la segona meitat del s. XIX.

Els conceptes que s'esmenten als axiomes de Hilbert, es formalitzen a partir de les següents 9 nocions primitives:

- 3 conjunts d'elements primitius: punts, línies rectes i plans;
- 6 relacions primitives:
 1. *Ordre*: una relació ternària entre punts;
 2. *Pertinença*: una relació binària entre un punt i una recta, una altra entre un punt i un pla, i una altra entre una recta i un pla.
 3. *Congruència*: una relació binària entre dos segments i una altra entre dos angles, denotades per $\cong$.

Es poden agrupar els axiomes en cinc blocs diferents segons la temàtica:

I. Axiomes de combinació

1. Dos punts diferents A i B determinen una única recta a . Es denotarà $AB = a$ o també $BA = a$.
2. Dos punts qualssevol d'una recta la determinen completament, és a dir, si $AB = a$ i $AC = a$, on $B \neq C$, aleshores també $BC = a$.
3. Tres punts A , B i C no alineats determinen un pla α . Es denotarà $ABC = \alpha$.
4. Tres punts qualssevol A , B i C del pla α no situats en una mateixa recta, determinen α completament.
5. Si dos punts A i B de la recta a es troben situats en el pla α , aleshores tots els punts de a estan en α .
6. Si dos plans α i β tenen un punt A en comú, aleshores tenen com a mínim un altre punt B en comú.
7. A cada recta hi ha com a mínim dos punts diferents; a cada pla hi ha com a mínim tres punts no situats en la mateixa recta; i existeixen com a mínim quatre punts no situats en el mateix pla.

II. Axiomes d'ordre

1. Si un punt B està entre els punts A i C , aleshores també està entre C i A , i existeix una única recta que conté els tres punts.
2. Si A i C són dos punts d'una recta, existeix com a mínim un altre punt B entre A i C , i com a mínim un punt D de manera que C està entre A i D (veure **Figura 4.1**).



Figura 4.1

3. Donats tres punts diferents d'una recta, només un d'ells es troba entre els altres dos.
Donats dos punts A i B , pot considerar-se el *segment* AB . Els punts d'aquest segment són tots els que es troben entre A i B , que són els *extrems* del segment.

4. *Axioma de Pasch*: Siguin A , B i C tres punts que no es troben a la mateixa recta i sigui a una recta que no passi per cap d'aquests punts i que estigui continguda en el pla ABC . Aleshores, si a passa per algun punt del segment AB , aleshores també passarà per algun punt o bé del segment BC , o bé del segment AC (veure **Figura 4.2**).

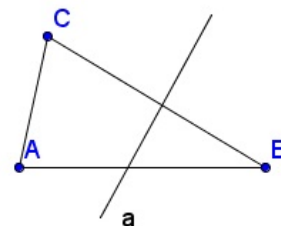


Figura 4.2

Es pot demostrar que donades una recta a i un punt A d'aquesta, la recta es pot dividir en dos *semirajos*, disjunts entre sí, que *emanen* de A , tals que la seva unió constitueix tota la recta excepte A . De manera semblant, donats un pla α i una recta a dins aquest, es pot dividir el pla en dues parts disjunctes, anomenades els dos *costats* de α respecte de a , tals que la seva unió constitueix tot el pla excepte a .

III. Axiomes de congruència

Anomenem *angle* a una parella de semirajos h i k situats en el pla α que emanen del mateix punt O . Es denotarà $\angle(h, k)$, on h i k són els *costats* de l'angle i O n'és el *vèrtex*. El segment que determinin dos punts qualssevol de l'interior estarà contingut dins la regió de l'angle, però això no es verifica per a qualsevol parella de punts de l'exterior.

Un *triangle* es defineix per tres segments de la forma AB , BC i CA . Aquests segments són els *costats* del triangle, i els punts A , B i C en són els *vèrtexs*. Es conserven les mateixes propietats que en els angles, considerant l'interior i l'exterior en la regió delimitada pels segments. L'angle que defineixen els dos semirajos que surten de A i passen per B i C es denota per $\angle BAC$, i conté a tots els punts de l'interior del triangle ABC .

1. Si A i B són dos punts de la recta a , i A' és un punt de la recta a' (sigui, o no, igual que a), aleshores d'un costat qualsevol de A' en a' existeix un únic B' tal que el segment AB és congruent amb el segment $A'B'$, és a dir, tal que $AB \cong A'B'$. Tot segment és congruent amb sí mateix.
2. La congruència entre segments és transitiva, és a dir, si un segment AB és congruent amb el segment $A'B'$ i amb el segment $A''B''$, aleshores els dos últims també són congruents entre sí.
3. Siguin AB i BC dos segments de la recta a sense més punts en comú a part de B , i siguin $A'B'$ i $B'C'$ dos segments de la recta a' (igual o no a a) sense més punts en comú que B' . Si $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$, aleshores $AC \cong A'C'$.
4. Sigui un angle $\angle(h, k)$ en el pla α , una recta a' en el pla α' , i suposem que es tria un dels costats d'aquest pla respecte a' . Si h' és un semiraig de a' que emana d'un punt O' d'aquesta recta, aleshores en el pla α' existeix un únic semiraig k' emanant de O' de manera que $\angle(h, k)$ és congruent amb $\angle(h', k')$ i, a més, tots els punts de l'interior de $\angle(h', k')$ són dins del costat escollit de α' . Es denota $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$. Tot angle és congruent amb sí mateix.

5. La congruència entre angles és transitiva, és a dir, si l'angle $\angle(h, k)$ és congruent amb l'angle $\angle(h', k')$ i amb l'angle $\angle(h'', k'')$, aleshores aquests dos últims són també congruents entre ells.
6. Siguin dos triangles ABC i $A'B'C'$. Si $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, aleshores $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ i $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ (veure **Figura 4.3**).

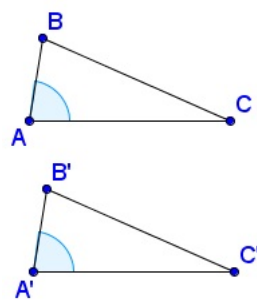


Figura 4.3

IV. Axioma de les paral·leles

En un pla α es pot trobar una única recta b que passi per un punt donat A , que no pertanyi a una recta donada a , de manera que a i b no tinguin cap punt en comú. Es diu aleshores que la recta b és la paral·lela a a que passa per A .

V. Axiomes de continuïtat

1. *Axioma d'Arquímedes*: Siguin AB i CD segments qualssevol, existeix sempre sobre la recta AB un conjunt de punts $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, de manera que A_1 estigui entre A i A_2 , A_2 estigui entre A_1 i A_3 , etc., els segments $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ són tots congruents amb el CD , i el punt B està entre A i A_n (veure **Figura 4.4**).



Figura 4.4

2. *Axioma de completitud*: Els elements de la geometria (punts, rectes i plans) formen un sistema que no admet cap possible extensió, és a dir, que no se li poden afegir elements nous de manera que el sistema resultant formi una nova geometria verificant els altres cinc grups d'axiomes.

L'axioma 21 és l'anomenat *Teorema de Pasch*: poden escollir-se quatre punts A, B, C i D d'una recta qualsevol de manera que B estigui entre A i C i entre A i D , i que C estigui entre A i D i entre B i D .¹

Un cop enunciat els axiomes, Hilbert va demostrar la coherència dels cinc grups formant un sistema que satisfés tots els axiomes a partir dels nombres reals. Per mitjà d'això, va concloure que en la geometria plana cartesiana es validaven tots els axiomes lineals i plans, i que aquest argument era ampliable a l'hora de tractar la geometria de l'espai.

¹Aquest teorema va ser considerat un axioma en la primera edició, però E. H. Moore va deduir-lo com una conseqüència dels axiomes de combinació i ordre l'any 1902.

A continuació, va justificar la independència dels grups d'axiomes raonant que no és possible obtenir cap part essencial d'un dels grups a partir dels conjunts d'axiomes precedents. En particular, explica que només és necessari demostrar la independència dels grups III, IV i V perquè els grups I i II fonamenten les posteriors representacions.

La independència del tercer conjunt es veu a partir de la dels propis axiomes de congruència entre ells i respecte els altres grups. En particular, demostra que no és possible deduir l'axioma III.5 a partir dels altres 20, i considera un cas de geometria que verifica tots els axiomes a excepció del III.5.

En el cas de l'axioma de les paral·leles, demostra la possibilitat d'una geometria consistent que verifiqui tots els axiomes menys aquest, és a dir, la geometria no euclidiana.

Seguint el mateix raonament, Hilbert demostra la independència de l'axioma d'Arquímedes veient la consistència de la geometria no arquimediana, que verifica tots els axiomes menys el mencionat. També veu de manera semblant la independència de l'axioma de completitud.

Per tant, dels *Fonaments de la Geometria* s'obté un mètode general per a l'elaboració de les diferents geometries que es coneixen, segons el qual només és necessari determinar quins objectes es correspondran amb els elements primitius esmentats (punts, rectes i plans) i quins grups d'axiomes hauran de verificar els objectes geomètrics.

4.2 Resultats en diferents geometries

Geometria absoluta

A partir del criteri determinat per Hilbert, podem definir la geometria absoluta com l'estudi de les conseqüències que es poden deduir imposant la validesa dels axiomes de combinació, ordre i congruència. Alguns resultats en geometria absoluta plana (i algunes definicions necessàries) són:

Definició 4.2.1. Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles, direm que són *congruents* (i escriurem $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) si i només si $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ i $\hat{C} \cong \hat{C}'$ (on $\hat{A}$ es correspon amb $\hat{BAC}$, $\hat{B}$ amb $\hat{ABC}$, etc.).

Teorema 4.2.1 (Criteri del triangle isòsceles). Si en el triangle ABC es compleix $CA \cong CB$, llavors $\hat{A} \cong \hat{B}$ (veure **Figura 4.5**).

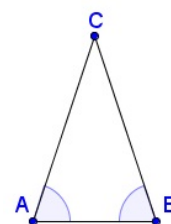


Figura 4.5

Teorema 4.2.2 (Criteri C.A.C., costat-angle-costat). Si en els triangles ABC i $A'B'C'$ es compleix $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$, llavors $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Teorema 4.2.3 (Criteri A.C.A., angle-costat-angle). Si en els triangles ABC i $A'B'C'$ es compleix $AB \cong A'B'$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ i $\hat{B} \cong \hat{B}'$, llavors $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Teorema 4.2.4 (Criteri C.C.C., costat-costat-costat). Si en els triangles ABC i $A'B'C'$ es compleix $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ i $BC \cong B'C'$, llavors $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Definició 4.2.2. Dos angles amb vèrtex comú, un costat comú i amb els altres dos costats formant una mateixa línia recta es diuen adjacents. Dos angles amb vèrtex comú i amb els costats alineats dos a dos formant dues línies rectes, es diuen *oposats pel vèrtex* (veure **Figura 4.6**, on α i β són adjacents, mentre que α i γ són oposats pel vèrtex).

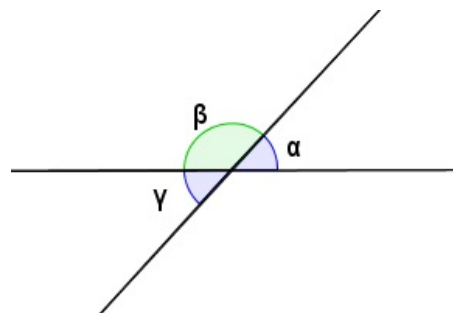


Figura 4.6

Teorema 4.2.5. Dos angles oposats pel vèrtex són congruents.

Definició 4.2.3. Un angle congruent amb el seu adjacent es diu *recte*.

Teorema 4.2.6. Tots els angles rectes són congruents.

Definició 4.2.4. Un punt O de la recta determinada per dos punts A i B tal que $AO \cong OB$ és el *punt mig* del segment AB .

Teorema 4.2.7. Per a cada segment existeix un únic punt mig, i és interior del segment.

Teorema 4.2.8. Des de cada punt sobre una recta donada es pot aixecar una única perpendicular.

Definició 4.2.5. Dues rectes sense punts comuns es diuen *paral·leles*.

Teorema 4.2.9. Si la recta t talla les rectes r i s formant angles alterns interns iguals, llavors r i s són paral·leles (veure **Figura 4.7**).

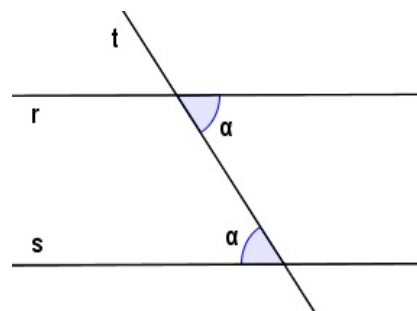


Figura 4.7

Teorema 4.2.10. Per cada punt exterior a una recta hi passa almenys una recta paral·lela a aquesta.

Teorema 4.2.11. La suma dels angles interiors d'un triangle és menor o igual que dos rectes.

Geometria Euclidiana

La geometria euclidiana és la que s'obté en afegir als tres primers grups d'axiomes el cinquè postulat d'Euclides, que és equivalent a l'axioma de les paral·leles del sistema ideat per Hilbert. Alguns dels resultats específics de la geometria euclidiana són:

Teorema 4.2.12 (recíproc del teorema 4.9). *Si dues rectes paral·leles són tallades per una tercera recta, els angles alterns interns que es formen són iguals.*

Teorema 4.2.13. *La suma dels angles interns d'un triangle és sempre igual a dos rectes.*

Teorema 4.2.14 (Teorema de Tales). *Una recta paral·lela a un costat d'un triangle divideix els altres dos costats en segments proporcionals (veure **Figura 4.8**).*

Teorema 4.2.15. *Si dos triangles tenen dos angles iguals, aleshores tenen tots els angles iguals i els costats corresponents proporcionals.*

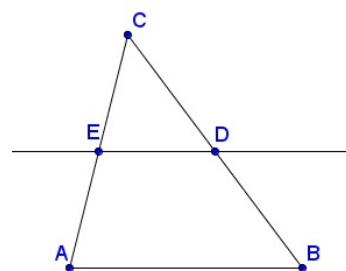


Figura 4.8

Geometria Hiperbòlica

La geometria hiperbòlica és la que s'obté en afegir als tres primers conjunts d'axiomes l'axioma de Lobachevsky, que constitueix una de les possibles negacions del cinquè postulat d'Euclides:

Axioma de Lobachevsky. Existeixen una recta r i un punt P , que no pertany a la recta, tals que per P passen al menys dues rectes que no tallen r .

Alguns resultats de la geometria hiperbòlica són:

Teorema 4.2.16. *Si l'axioma de Lobachevsky es compleix per a algun punt i alguna recta, llavors es compleix que per a tot punt exterior a tota recta hi passen infinites rectes que no tallen la recta donada.*

Teorema 4.2.17. *Si una recta k és paral·lela a una altra recta r des d'un punt P , llavors per a qualsevol punt Q de k , la recta k és paral·lela a r des de Q , és a dir, k és frontera del conjunt de rectes que passen per Q i no tallen r .*

Teorema 4.2.18. *La suma dels angles interns d'un triangle (hiperbòlic) és sempre menor que dos rectes.*

Teorema 4.2.19. *Siguin ABC i $A'B'C'$ dos triangles, llavors $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ si, i només si, $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ i $\hat{C} \cong \hat{C}'$.*

Teorema 4.2.20. *Si dos triangles ABC i $A'B'C'$ tenen els costats proporcionals, aleshores $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Validesa de resultats

Per la manera com han estat definides les tres geometries anteriors, podem afirmar que els resultats de la geometria absoluta es verificaran tant en la geometria euclidiana com en la hiperbòlica.

En canvi, no tots els resultats euclidians es verifiquen en geometria hiperbòlica, ni a l'inrevés. En particular, encara que alguns resultats euclidians no siguin certs en la geometria hiperbòlica, no es pot afirmar que tots siguin falsos.

Per exemple, la afirmació “si dos triangles tenen tots els costats congruents entre ells, aleshores els triangles són congruents” és certa en ambdues geometries. En canvi, la mesura de la suma dels angles interns d'un triangle no és la mateixa en la geometria euclidiana que en la hiperbòlica, com veiem a continuació:

Teorema 4.2.21. *En geometria euclidiana, la suma dels angles interns d'un triangle és igual a dos rectes.*

Demostració:

Donat un triangle qualsevol ABC , traçem la semirecta paral·lela al costat AB d'origen C , situada en el semiplà de BC que conté el punt A (veure **Figura 4.9**).

Siguin α i β els angles que forma aquesta semirecta amb el segment AC i amb la semirecta oposada a CB respectivament. Pel teorema 4.2.9, una recta que talla dues paral·leles forma angles alterns interns iguals, així que $\hat{A} = \alpha$ i $\hat{B} = \beta$. Per tant, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \alpha + \beta + \hat{C} = 2d$, on d és la mesura d'un angle recte.

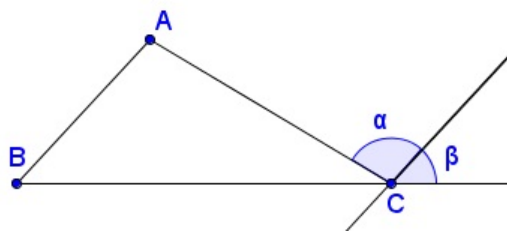


Figura 4.9

□

Teorema 4.2.22. *En geometria hiperbòlica, la suma dels angles interns d'un triangle és menor que dos rectes.*

Demostració:

Sigui ABC un triangle rectangle hiperbòlic on l'angle recte és $\hat{C} = \angle ACB = d$. Sigui a , b i c , respectivament, la semirecta perpendicular a $y = 0$ en el punt N , la semicircumferència de centre N i la semicircumferència de centre M (veure **Figura 4.10**).

L'angle $\angle BAC$ és igual a l'angle entre les rectes tangents a les semicircumferències b i c en el punt A o, el que és el mateix, l'angle entre els radis NA i MA . A més, $\hat{B} = \angle CBA = \angle BMN$.

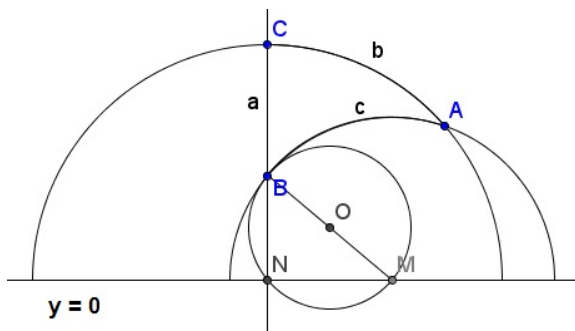


Figura 4.10

Construïm el segment BM de punt mig O i la circumferència de centre O que talla c només en el punt B . Aleshores, el punt A queda fora i es verifica

$$\hat{A} = \angle CAB = \angle MAN < \angle NBM.$$

Així, com $\angle MBN + \angle BMN = d$, tenim que $\hat{A} + \hat{B} < d$. Aleshores, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2d$, com volíem veure.

Observem que a partir de les transformacions hiperbòliques corresponents, qualsevol triangle rectangle es pot transformar de manera que un dels catets sigui una recta perpendicular a $y = 0$ i ens trobem en el cas que acabem de demostrar.

En cas que no es tracti d'un triangle rectangle, qualsevol triangle es pot dividir en dos rectangles i tornem a estar en els casos que hem provat.

□

Un exemple de resultat vàlid en geometria absoluta, euclidiana i hiperbòlica

Amb l'objectiu de comprendre millor les diferents geometries presentades, demostrarem ara des de cada punt de vista un mateix resultat que es verifica en les tres:

Teorema 4.2.23. *Des de cada punt exterior a una recta donada es pot traçar una única perpendicular.*

Demostració en geometria absoluta:

Sigui C un punt que no pertany a la recta r i sigui A un punt qualsevol de r , existeix un únic punt C' situat en el costat determinat per r que no conté C , tal que $AC \cong AC'$ i tal que l'angle entre les rectes AC i r és congruent amb l'angle entre les rectes r i AC' .

Sigui B el punt d'intersecció entre r i el segment CC' , aplicant el criteri C.A.C. (teorema 4.2.2) als triangles ACM i $AC'M$, s'obté que $\angle AMC \cong \angle AMC'$.

Per tant, la recta CC' és la perpendicular buscada (veure **Figura 4.11**).

Per a demostrar la unicitat, suposem que des del punt C hem traçat dues perpendiculars a la recta r , CA i CB , amb $A, B \in r$. Existeix C' sobre la recta CA a l'altre costat determinat per r tal que $CA \cong AC'$ (veure **Figura 4.12**).

Aplicant ara el criteri C.A.C. als triangles ABC i ABC' , obtenim $\angle CAB \cong \angle ABC'$. Com $\angle CAB$ és recte, per la definició 4.2.3 tenim que és congruent amb el seu adjacent, així que $\angle ABC'$ ha de ser el seu adjacent. Per tant, les rectes CB i $C'A$ coincideixen, i com C i C' determinen una única recta, tenim que $A = B$.

□

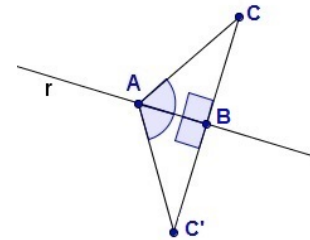


Figura 4.11

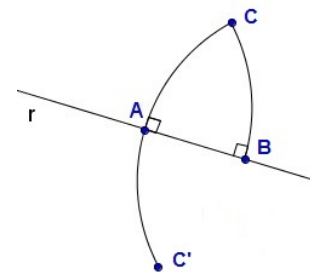


Figura 4.12

Demostració en geometria euclidiana (Proposició I.12 dels *Elements*):

Sigui r la recta donada i sigui C un punt que no està sobre r . Sabem que C es troba a un dels costats determinats per r , i prenem un punt qualsevol D a l'altre costat. Construïm la circumferència de centre C i radi CD , que talla r en els punts A i B . Per el teorema 4.2.7, podem trobar el punt mig del segment AB , que anomenem M (veure **Figura 4.13**). Considerant els triangles AMC i CMB , tenim per definició del punt mig M que $AM = MB$. A més, CM és un costat comú i $CA = CB$ per ser radis de la circumferència prèviament construïda. Podem deduir doncs, que els dos triangles són iguals: $AMC = CMB$. Així, $\angle CMA$ i $\angle CMB$ són iguals i adjacents. Per la definició 4.2.3, són angles rectes. Per tant, la recta determinada per C i M és perpendicular a la recta donada r que passa per C .

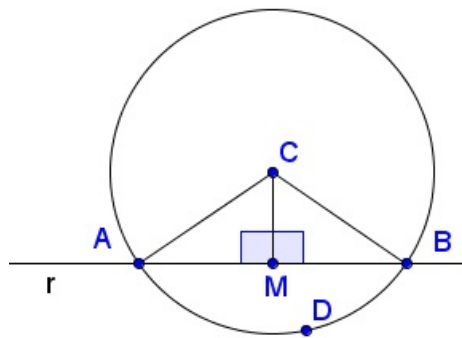


Figura 4.13

En aquest cas, la construcció utilitzada ja determina la unicitat.

□

Demostració en geometria hiperbòlica:

Veurem la demostració en el model del semiplà de Poincaré introduït al capítol anterior.

Distingim dos casos:

- a) La recta hiperbòlica donada r és una semicircumferència de radi infinit, és a dir, és una recta euclidiana perpendicular a la recta $y = 0$.

Sigui C un punt exterior a r , i sigui A el punt d'intersecció entre la recta r i $y = 0$, aleshores la semicircumferència de centre A i radi AC és la recta hiperbòlica perpendicular a r (veure **Figura 4.14**).

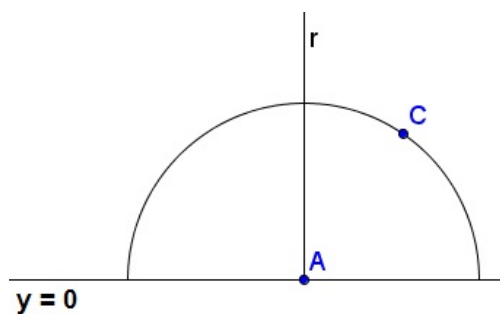


Figura 4.14

Per provar que la recta determinada és la perpendicular, només cal veure que r constitueix una elongació del radi d'aquesta semicircumferència, i com la tangent a una circumferència és perpendicular al radi, tenim que la tangent en el punt d'intersecció amb r serà perpendicular a r .

- b) La recta hiperbòlica donada r és una semicircumferència de radi finit amb el centre situat sobre la recta $y = 0$.

Sigui C un punt exterior a r , si construïm l'invers de C respecte r , C' , aleshores per la propietat 2 del capítol 3 sabem que qualsevol circumferència que

Capítol 5

Les geometries el·líptica, parabòlica i hiperbòlica

5.1 El cinquè postulat

Com s'ha comentat en capítols previs, la geometria euclidiana (o parabòlica) és aquella que verifica tots els axiomes d'Euclides, entre els quals es troba el cinquè postulat o *axioma de les paral·leles*. Considerem un enunciat equivalent d'aquest, de més directa comprensió, que pot resultar més tractable:

Axioma 5. Donada una recta r i un punt P exterior a ella, existeix una única recta que passa per aquest punt P i és paral·lela a la recta r donada.

D'altra banda, la geometria hiperbòlica és la que verifica tots els postulats d'Euclides a excepció d'aquest últim. En lloc d'això, valida una negació de l'axioma de les paral·leles, l'anomenat *axioma de Lobachevsky*:

Axioma de Lobachevsky. Donada una recta r i un punt P exterior a ella, existeixen al menys dues rectes que passen per aquest punt P i que no tallen la recta r donada.

Observem que, mentre l'axioma de les paral·leles afirma la existència i unicitat d'una paral·lela que passi per cada punt exterior a una recta donada, la negació realitzada per Lobachevsky consisteix en contradir la unicitat, proposant un mínim de dues paral·leles passant per cadascun dels punts exteriors a la recta donada. Per tant, encara existeix una opció alternativa per a negar el cinquè postulat d'Euclides afirmant la inexistència de rectes paral·leles. Aquest nou enunciat és el que dona lloc a la *geometria el·líptica*, que és la geometria que verifica els quatre primers axiomes euclidians i una negació de l'axioma de les paral·leles diferent del que es verifica en la geometria hiperbòlica. Un enunciat possible per a aquesta negació és:

Axioma E. Donada una recta r i un punt P exterior a ella, no existeix cap recta paral·lela que no talli la recta r donada.

Cal comentar que tant l'axioma de Lobachevsky com l'axioma E no són estrictament negacions de l'axioma 5, doncs la negació hauria de dir que existeix una recta r i un

punt P tal que hi ha infinites paral·leles a r que passen per P o que existeix una recta r i un punt P tal que no hi ha cap paral·lela a r que passi per P . Però les geometries que tractem són homogènies i isòtropes, és a dir, que en particular totes les rectes es poden transformar en qualsevol altra recta a partir de les transformacions pròpies de cada geometria. Per tant, si per la negació de l'axioma “existeix una recta” que verifica una condició o altra (segons la geometria), aleshores totes les rectes la verifiquen.

Des de la publicació del *Programa d'Erlangen* de Klein l'any 1872, sabem que les geometries euclidiana (anomenada parabòlica per Klein), hiperbòlica i el·líptica esmentades són particularitzacions de la geometria projectiva, segons com sigui la cònica adjunta a la superfície projectiva en cada cas.

5.2 La geometria el·líptica

La geometria el·líptica és la geometria del pla projectiu complet i la cònica considerada en aquest cas és una cònica imaginària, de manera que no es produeix cap divisió entre els punts del pla. En el pla projectiu no existeixen les rectes paral·leles, doncs totes es tallen en algun punt ja sigui finit o infinit, per tant es verifica l'axioma E característic de la geometria el·líptica enunciat abans.

Ens centrarem en l'estudi de la geometria el·líptica de dues dimensions, és a dir, el pla el·líptic:

Definició 5.2.1. Un *pla el·líptic* és un pla projectiu on s'ha seleccionat com a cònica infinita una cònica imaginària.

Sigui V un espai vectorial real de tres dimensions, el pla projectiu real es denota per $P(V)$, i existeix una base de V que determina un sistema de referència projectiu respecte el qual la cònica infinita té per equació $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Fixem en V el producte escalar que tingui per matriu en la base escollida la identitat, així que la base serà ortonormal.

Es pot considerar V com l'espai euclidià amb el sistema de referència ortonormal fixat tal que els punts del pla projectiu es corresponen amb les rectes de l'espai que passen per l'origen de coordenades O . Les coordenades homogènies d'un punt projectiu seran les coordenades d'un dels punts (diferent de O) de la recta que el contingui, en el sistema de referència determinat.

Sigui $(x, y, z) \in V \subseteq \mathbb{R}^3$, observem que $P(V)$ és l'espai quocient de $V - \{0\}$ per la relació d'equivalència:

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Per tant, com les rectes projectives són conjunts de punts i cada punt és una recta de l'espai V que passa per O , les rectes projectives es corresponen amb els plans de V que passen per O , és a dir, estan formades per els punts que verifiquen una equació de la forma $ax + by + cz = 0$.

Definició 5.2.2. Direm que dos punts de coordenades X i Y són *conjugats* respecte la cònica infinita si, i sols si, $XY^t = 0$, és a dir, si les seves rectes corresponents de l'espai V són ortogonals. A més, un punt i una recta del pla projectiu són conjugats si, i només si, la recta i el pla respectius de l'espai euclidià són perpendiculars.

Si dues rectes projectives són conjugades respecte la cònica infinita, aleshores direm que són perpendiculars en el pla projectiu.

Tenim ara les bases per a modificar un model de geometria esfèrica, que és l'anomenada *esfera de Riemann*, i arribar així al *model esfèric* de geometria el·líptica.

Sigui $\mathbb{S} \subset V$ l'esfera de centre O i radi 1, aleshores cada punt projectiu abans considerat és aquí una recta que passa per O i talla $\mathbb{S}$ en dos punts antípodes, és a dir, cada punt projectiu es correspon amb dos punts de V de coordenades tals que verifiquen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Per tant, tot el pla projectiu s'identifica amb el conjunt de parelles de punts antípodes de l'esfera unitat $\mathbb{S}$. Podem definir doncs el pla projectiu $P(V)$ també com l'espai quocient de l'esfera $\mathbb{S}$ per la relació d'equivalència que identifica cada punt $(x, y, z) \in \mathbb{S}$ amb el seu antipodal, $(-x, -y, -z)$.

Les rectes projectives doncs, són les interseccions dels plans que passen per el centre de l'esfera, O , amb la mateixa esfera (veure **Figura 5.1**). Per tant, es corresponen amb els anomenats *cercles maximals*, que són aquells cercles les circumferències dels quals tenen el mateix radi que l'esfera.

Definició 5.2.3. Direm que dues circumferències són *ortogonals* en geometria el·líptica, si la recta perpendicular des de l'origen al pla que en conté una, interseca l'altra. En particular, notem que les perpendiculars a l'equador de l'esfera són les circumferències que contenen els dos pols.

Així doncs, el model esfèric de la geometria el·líptica és el conjunt $\mathbb{S}$ que té per punts els parells de punts antípodes d'una esfera euclidiana, i per rectes el·líptiques els cercles màxims.

Notem que, en prendre per punts els parells de punts antípodes, estem seguint un procediment equivalent a identificar els punts antípodes de la part inferior de l'equador de l'esfera amb els de la part superior i aleshores prendre per punts els de la semiesfera superior. Aquesta modificació en l'estructura de l'esfera de Riemann també té com a espai resultant el pla projectiu, i la geometria sobre aquest és la geometria el·líptica.

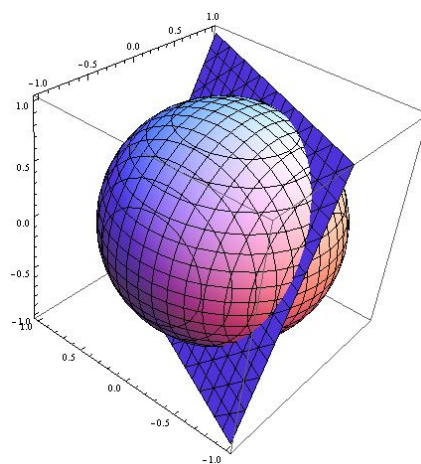


Figura 5.1: Esfera $\mathbb{S}$ interseccionada amb el pla $2x - y - z = 0$. Dibuix fet amb Mathematica.

A més, observem que si no s'identifiquen les parelles de punts antípodes, no es satisfà el primer axioma d'Euclides ja que dos punts diferents no sempre determinen una única recta. Per exemple, si prenem dos punts antípodes, en geometria esfèrica podem determinar infinites rectes, doncs qualsevol circumferència que passi per aquests punts serà maximal.

La mètrica el·líptica

Considerem la distància el·líptica entre dos punts P i Q com l'angle $P\hat{O}Q$, i l'angle el·líptic entre dues rectes r_1 i r_2 com l'angle que formen els plans que contenen cadascuna de les rectes i passen per O , de la mateixa manera que en trigonometria esfèrica es mesuren les distàncies i els angles.

Definició 5.2.4. La *distància el·líptica* entre dos punts P i Q ve determinada per

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} |\arg [P, Q, P_\infty, Q_\infty]|,$$

on P_∞ i Q_∞ són els punts de tall de la recta determinada per P i Q amb la cònica infinita.

De manera semblant, l'*angle el·líptic* entre dues rectes r_1 i r_2 és

$$r_1 \hat{r}_2 = \frac{1}{2} |\arg [r_1, r_2, I_1, I_2]|,$$

on I_1 i I_2 són les rectes tangents a la cònica infinita que passen pel punt $r_1 \cap r_2$. En els dos casos l'argument pren valors en $(-\pi, \pi)$, així que les dues magnituds es troben dins de l'interval $[0, \frac{\pi}{2})$.

Definició 5.2.5. Direm que dues parelles de punts o de rectes són *congruents* si, i només si, els separen les mateixes distàncies o els mateixos angles.

Com sabem, cadascun dels punts del pla el·líptic es correspon amb dos punts de l'esfera unitat, que té àrea total 4π . Podem deduir així que l'àrea total del pla el·líptic serà 2π i, seguint el mateix raonament, la longitud total d'una recta del pla el·líptic és π . Veurem aquesta conclusió més profundament.

En la geometria el·líptica dos punts diferents determinen una única recta, però degut a la naturalesa circular de les rectes del model esfèric, dos punts no determinen un únic segment sinó dos de complementaris.

Considerant les magnituds abans definides i els intervals de valors que prenen, notem que un segment només pot ser congruent amb el seu complementari si la distància entre els extrems que els determinen és $\frac{\pi}{2}$. Aleshores, no podem definir la longitud d'un segment donat com la distància entre els seus extrems, ja que assignaríem la mateixa longitud als segments complementaris no congruents. Necessitem utilitzar el concepte euclidià de punt mig aplicat al pla el·líptic:

Definició 5.2.6. Cada segment el·líptic d'extrems A i B conté un únic punt C tal que $d(A, C) = d(B, C)$, anomenat *punt mig* del segment.

Ara podem definir la longitud de manera correcta i sense ambigüitats:

Definició 5.2.7. La *longitud* d'un segment és el doble de la distància dels extrems que el determinen al seu punt mig.

Per tant, podem afirmar que dos segments són congruents si, i només si, tenen la mateixa longitud. A més, amb el que hem observat prèviament també podem assegurar que la longitud d'un segment més la del seu complementari és π , d'on obtenim que la longitud total d'una recta del pla el·líptic és π , com ja havíem comentat.

5.3 La geometria parabòlica

Ens proposem en aquest apartat realitzar una introducció al pla euclidià des d'un punt de vista projectiu, però per això començarem introduint una geometria més general que la euclidiana, la geometria parabòlica.

Definició 5.3.1. El *pla parabòlic* és un pla projectiu X en el qual ha estat determinada una recta r com la recta infinita, i s'ha especificat sobre aquesta recta una involució I que anomenem *involució ortogonal*, és a dir, una aplicació que intercanvia parells de punts. Direm que dues rectes (no infinites) són *ortogonals* si els seus punts infinits són conjugats respecte I .

Un pla parabòlic és en particular un pla afí, i direm que una semblança és una afinitat que conserva la perpendicularitat de rectes.

Teorema 5.3.1. *En un pla parabòlic X per cada punt hi passa una única perpendicular a una recta donada. A més, dues rectes són paral·leles si tenen les mateixes perpendiculars i dues rectes amb una perpendicular comuna són paral·leles.*

Definició 5.3.2. Anomenem *punts circulars* de X als punts fixos de I . Les rectes que passen per els punts circulars s'anomenen *rectes isòtropes* i són perpendiculars a sí mateixes.

Diem que la involució ortogonal I és hiperbòlica si existeixen punts circulars, i diem que és el·líptica en cas contrari.

Definició 5.3.3. Diem que una *circumferència* en el pla parabòlic és qualsevol cònica que indueix la involució ortogonal en la recta infinita.

Considerant els punts O i P del pla parabòlic, si la recta OP no és isòtropa, com en el cas euclidià, aleshores existeix una única circumferència de centre O que passa per P . A més, podem afirmar que en el pla euclidià les circumferències seran el·lipses i no hipèrboles per ser el·líptica la involució ortogonal.

Definició 5.3.4. Una *reflexió* en el pla parabòlic és una simetria respecte una recta. El grup d'*isometries* de X és el grup generat per les reflexions i aquestes són un subconjunt de les semblances. Direm doncs, que dues figures en el pla hiperbòlic són *congruents* si existeix una isometria que transformi l'una en l'altra.

Teorema 5.3.2. *Una semblança que transforma una circumferència en una altra de congruent és una isometria.*

En el pla parabòlic no estem suposant l'existència d'un ordre entre els elements, així que no podrem parlar de congruència de segments però sí de la congruència entre vectors. Diem que dos vectors $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ són congruents si els punts (A, B) i (C, D) que els determinen també ho són, i ho expressarem com $\vec{AB} \cong \vec{CD}$. Així, podem tornar a definir una circumferència de centre O que passa per P com el conjunt de punts Q tals que $\vec{OP} \cong \vec{OQ}$, juntament amb els punts circulars si existeixen.

El pla euclidià

La geometria parabòlica que té la involució ortogonal el·líptica, és a dir, sense punts circulars, es correspon amb la geometria euclidiana. Notem que en l'altre cas no és possible la geometria euclidiana, doncs existirien rectes perpendiculars a sí mateixes.

Si partim d'un espai euclidià E , donada una circumferència qualsevol existeixen dues rectes tangents a la circumferència que alhora són paral·leles entre sí. Aleshores, la recta que uneix els punts de tangència és perpendicular a ambdues i tota recta paral·lela a aquesta última serà perpendicular a les dues primeres. De manera que totes aquestes rectes paral·leles determinaran un feix que tallarà la recta infinita r en un mateix punt Q , i les dues primeres paral·leles considerades tallaran r en un mateix punt anomenat $I(Q)$. En aquest cas la aplicació I és la involució ortogonal de X . Podem deduir aleshores que qualsevol circumferència en el pla euclidià induïx la involució ortogonal en la recta infinita r .

D'altra banda, com el pla euclidià si que disposem d'unes relacions d'ordre establertes, podrem afirmar que dos vectors són congruents si, i només si, els punts que els determinen també determinen segments congruents.

Definició 5.3.5. Siguin AB i CD dos segments determinats per els punts diferents A, B, C i D , definim la *raó* entre els segments com l'únic valor real $\alpha > 0$ tal que $\vec{AB} \cong \pm \alpha \vec{CD}$.

Fixant un segment unitat, es pot definir la longitud de cada segment AB com la seva raó respecte la unitat establerta, i aquesta serà també la distància entre els punts A i B . Les isometries conserven les raons entre segments i per tant, també conserven distàncies.

Observem que una circumferència de centre O estarà formada per tots els punts situats a una distància constant de O , que anomenarem *radi* de la circumferència. A més, a partir del que hem vist en el pla parabòlic, podem afirmar que cada punt O i cada radi $r > 0$ determinaran una única circumferència de centre O i radi r .

Per tant, ara sabem que les isometries transformaran qualsevol circumferència en una altra del mateix radi, així que podem afirmar que una bijecció afí en el pla euclidià és una isometria si, i només si, conserva les distàncies entre punts.

El pla de Lorentz

Per últim, només farem un breu comentari del pla parabòlic amb involució ortogonal hiperbòlica. El pla parabòlic *real* d'aquest tipus s'anomena *pla de Lorentz* i és un exemple de geometria no euclidiana. Però el tret més interessant d'aquesta geometria resideix en l'espai de 4 dimensions, anomenat *espai de Minkowski*, on es desenvolupa la geometria de la teoria de la relativitat.

5.4 La geometria hiperbòlica

En els apartats anteriors hem obtingut el pla el·líptic i el parabòlic a partir del pla projectiu. Seguint un procediment assembletat podem obtenir també el pla hiperbòlic, però en lloc de seleccionar una recta com a recta infinita o una cònica imaginària, en el cas hiperbòlic triarem una cònica real. Aquest fet dividirà el pla projectiu, de manera que hi podem trobar tres classes de punts:

- Els punts *finites* són els que estan situats a l'interior de la cònica;
- Els punts *infinites* són els que es troben sobre la cònica;
- Els punts *ultrainfinites* són els punts exteriors a la cònica.

Definició 5.4.1. Un *pla hiperbòlic* és un pla projectiu real on s'ha seleccionat una cònica real, que anomenem *cònica infinita*. El conjunt de les homografies que fixen la cònica s'anomena *grup hiperbòlic*. Anomenem *rectes finites* a les rectes que contenen punts finits, considerarem com a *punts* del pla hiperbòlic els punts finits determinats per la cònica, i les *rectes* del pla hiperbòlic seran les rectes finites.

Notem que tota recta hiperbòlica ha de contenir exactament dos punts infinits, que determinen alhora un segment format per punts finits i un segon segment format per punts ultrafinits.

En el capítol 3, vam diferenciar tres posicions relatives per a les rectes del pla hiperbòlic, que vam anomenar *secants*, *paral·leles* o *hiperparal·leles*, i *ultraparal·leles*. En el model projectiu en que ens trobem, direm que dues rectes són secants si tenen un punt finit en comú, són paral·leles si es tallen en un punt infinit, i ultraparal·leles si es tallen en un punt ultrainfinit.

Per tant, per un punt exterior a una recta del pla hiperbòlic hi passen exactament dues rectes paral·leles a la recta considerada i infinites ultraparal·leles.

La perpendicularitat ve donada com en el cas el·líptic per la cònica infinita seleccionada, doncs direm que dues rectes són *perpendiculars* si són conjugades respecte la cònica infinita.

Teorema 5.4.1. *Per cada punt exterior a una recta hi passa una única perpendicular a la recta donada. Dues rectes són ultraparal·leles si, i sols si, tenen una perpendicular comuna. A més, en aquest cas és única.*

Així doncs, les rectes perpendiculars a una altra recta donada formaran un *feix* de rectes ultraparal·leles i, a més, aquestes es correspondran amb els punts ultrainfinit segons cada feix.

Fins ara hem determinat un model del pla hiperbòlic com a subconjunt del pla projectiu. Si ara donem una estructura euclidiana al pla projectiu de manera similar a com hem fet en el cas de la geometria parabòlica, aleshores tindrem una representació del pla hiperbòlic com a subconjunt del pla euclidià.

Sigui O un punt qualsevol del pla hiperbòlic, considerem la polar d'aquest punt respecte la cònica infinita escollida per a determinar el pla, que serà una recta ultrainfinita r . Seguint el mateix procediment que en l'apartat de geometria parabòlica, si ara prenem r com a recta infinita i considerem la involució ortogonal el·líptica induïda per la cònica infinita sobre aquesta recta, aleshores tenim determinada l'estructura del pla euclidià. Així, la cònica infinita passa a ser una circumferència C centrada en O , les rectes hiperbòliques es corresponen amb els segments euclidians que tenen els extrems en C i podem establir com a relacions d'ordre hiperbòliques les del pla euclidià.

Hem arribat així a un altre model del pla hiperbòlic, l'anomenat *model de Beltrami-Klein* que havíem vist al capítol 3. Cal esmentar també que Klein va relacionar aquest últim model amb un altre model del pla hiperbòlic que també es va comentar anteriorment: el *model del disc de Poincaré*.

Partint del model de Beltrami, escollint com abans una circumferència C d'origen O . Suposem el disc inclòs en un pla i considerem una esfera S sobre el pla del mateix radi que C que només toca el pla en el punt O . Aleshores, una projecció vertical del disc de Beltrami sobre l'esfera envia cada punt del disc a dos punts de S (un en cada hemisferi) i envia C a l'equador de l'esfera, ω .

Així, les rectes del model de Beltrami (que són cordes de C) es corresponen amb circumferències verticals de S , és a dir, circumferències ortogonals a ω .

Si es realitza ara una projecció estereogràfica de l'hemisferi inferior de l'esfera sobre el pla, ω passa a ser una nova circumferència de radi major Ω i totes les rectes del disc de Beltrami, que en l'hemisferi inferior de l'esfera s'han projectat com semicircumferències ortogonals a ω , es corresponen amb semicircumferències ortogonals a Ω ja que la projecció estereogràfica conserva angles i cercles. Aquestes últimes semicircumferències són les rectes del model del disc de Poincaré, i hem obtingut aquest model a partir del disc de Beltrami-Klein.

Capítol 6

La geometria de Riemann

En aquest nou capítol desenvoluparem alguns aspectes de la geometria de Riemann que afecten particularment a les formes de l'espai i veurem com, sota certes condicions, les possibles formes de l'espai es redueixen a sols tres casos. Alhora, veurem com aquesta geometria conserva relacions amb la geometria axiomàtica tot i les evidents diferències. Un dels aspectes més interessants de la geometria riemanniana és que, a diferència de les geometries tractades anteriorment, de caràcter purament global, en aquesta es poden diferenciar fins a tres nivells de generalitat: l'infinitesimal, el local i el global.

Es pot consultar un resum de geometria riemanniana a l'annex 1 (pàg. 66).

D'ara endavant, suposarem M com una varietat diferenciable de dimensió n i classe C^∞ a menys que s'especifiqui d'altra manera. A més, els espais vectorials considerats seran sempre sobre $\mathbb{R}$ i els suposarem de dimensió finita.

Sigui K un camp tensorial diferenciable de tipus $(2, 0)$, sabem que per a cada $p \in M$, K_p és una aplicació bilineal de $T_p M \times T_p M$ en $\mathbb{R}$.

Direm que K és *simètric* si $\forall p \in M$, K_p és simètrica, és a dir,

$$K_p(u_p, v_p) = K_p(v_p, u_p),$$

$\forall u_p, v_p \in T_p M$.

D'altra banda, direm que K és *definit positiu* si $\forall p \in M$,

$$K_p(v_p, v_p) > 0,$$

$\forall v_p \in T_p M$ amb $v_p \neq 0$.

Definició 6.0.2. Una *mètrica de Riemann* en una varietat diferenciable M ve donada per un camp tensorial diferenciable g de tipus $(2, 0)$ simètric i definit positiu, és a dir, una aplicació diferenciable que associa cada punt $p \in M$ un tensor de tipus $(2, 0)$ definit en $T_p M \times T_p M$ al que anomenem *producte escalar* i denotem com $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Aquesta aplicació, varia diferenciablement en el sentit següent:

Si (U, x) , on $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, és un sistema de coordenades al voltant de p amb

$x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ i $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, aleshores

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

és una funció diferenciable en U .

Una varietat diferenciable M amb una mètrica riemanniana g donada és una *varietat de Riemann*, i sovint es denota com (M, g) .

La restricció de g a U s'anomena *expressió local de la mètrica de Riemann*. S'escriu en la base local escollida com

$$g_U = g_{ij} dx_i dx_j = ds^2$$

i sovint s'expressa en forma de matriu com

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Podem expressar els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita ∇ a partir de la mètrica g considerant l'obert de coordenades anterior i, utilitzant la matriu inversa de (g_{ij}) , que denotem (g^{ij}) , obtenim

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right\} g^{rk}. \quad (6.0.1)$$

Els símbols de Christoffel ens permeten definir el *tensor de curvatura* de ∇ com el camp tensorial de tipus $(3, 1)$ donat per $R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$, on

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l. \quad (6.0.2)$$

A partir de la mètrica podem també introduir el concepte de longitud d'una corba, i així definir la distància entre dos punts.

Definició 6.0.3. Donada una corba diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$, es defineix la *longitud del segment de corba* γ des de a fins a b , $\forall a, b \in I$ tals que $a < b$ com

$$L[\gamma]_a^b = \int_a^b \|\gamma'\| dt,$$

on $\|\gamma'\| = (g(\gamma', \gamma'))^{\frac{1}{2}}$.

Així, direm que la *distància entre dos punts* p i q d'una varietat de Riemann és l'ínm de les longituds dels arcs de corba diferenciables a trossos que uneixin els punts, i la denotarem per $d(p, q)$.

La mètrica de la varietat de Riemann també ens permet definir un morfisme

$$\varphi_p : T_p M \longrightarrow T_p^* M,$$

tal que $\langle \varphi_p(u_p), v_p \rangle_p = g(u_p, v_p)$. Com g és no degenerada, φ_p és un isomorfisme que anomenem *isomorfisme de contracció interna*. A partir d'aquest isomorfisme, podem definir un producte escalar a $T_p^* M$ com

$$g_p^*(\omega_p, \tau_p) = g(\varphi_p^{-1}(\omega_p), \varphi_p^{-1}(\tau_p)).$$

Considerant g_p^* , per a cada punt $p \in M$, tenim un nou camp tensorial diferenciable de tipus $(0, 2)$, que és simètric i definit positiu per definició, i el denotem com g^* .

Definició 6.0.4. Siguin (M, g) , $(N, \bar{g})$ dues varietats riemannianes, una *isometria* és un difeomorfisme $f : M \longrightarrow N$ que verifica $f^* \bar{g} = g$, és a dir,

$$g_p(v, w) = \bar{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)), \forall v, w \in T_p M$$

.

El conjunt de totes les isometries d'una varietat (M, g) formen un grup anomenat *grup d'isometria* de la varietat. El denotarem per $G_{iso}(M, g)$.

Les isometries són aplicacions que conserven les distàncies entre els punts de les varietats sobre les que actuen. Així, veiem que la congruència entre elements geomètrics d'una varietat ve determinada per el grup d'isometria.

Considerant el grup d'isometries que actuen sobre (M, g) , podem definir l'aplicació

$$G_{iso}(M, g) \times M \longrightarrow M$$

$$(f, p) \longrightarrow f(p)$$

Direm que la varietat M és *homogènia* si $\forall p, q \in M$, $\exists f \in G_{iso}(M, g)$ tal que $f(p) = q$. La homogeneïtat en una varietat de Riemann permet traslladar els elements geomètrics de la varietat conservant les distàncies, de manera que no es veu afectada la congruència dels elements de la varietat.

Diem que una varietat M és *isòtropa* si $\forall p \in M$ i $\forall v, w \in T_p M$ amb $\|v\| = \|w\| \neq 0$, $\exists f \in G_{iso}(M, g)$ tal que $f(p) = p$ i, a més, es verifica que

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_p M$$

$$v \longrightarrow df_p(v) = w$$

és a dir, donats un punt i dos vectors (que són dues direccions tangents al punt) del mateix mòdul, existeix una isometria que transforma un vector en l'altre.

Notem que les propietats d'homogeneïtat i isotropia en varietats riemannianes es corresponen amb els axiomes de congruència vistos en capítols anteriors. Per tant, les varietats que verifiquen aquestes propietats són les que permeten determinar una axiomatització.

Teorema 6.0.2. *Sigui M una varietat riemanniana homogènia. Aleshores, M és difeomorfa a G_{iso}/G_p , on G_{iso} és el conjunt de totes les isometries de M i $G_p = \{f \in G_{iso}; f(p) = p\}$ és el subgrup d'isotropia de G_{iso} en un punt arbitrari $p \in M$.*

Demostració:

El conjunt de les isometries de M és en particular un grup de Lie amb la operació de composició, doncs verifica:

1. la aplicació producte de grups amb la operació de composició

$$\mu : G_{iso} \times G_{iso} \longrightarrow G_{iso}$$

que ve donada per $\mu(f, g) = f \circ g$ és de classe C^∞ , $\forall f, g \in G_{iso}$,

2. i la aplicació $\iota : G_{iso} \longrightarrow G_{iso}$ on $\iota(f) = f^{-1}$ també és de classe C^∞ , $\forall f \in G_{iso}$.

D'altra banda, sabem que el grup de totes les isometries d'una varietat riemanniana és transitiu. Per tant, aplicant el teorema 3 de l'annex 2 (3), podem concloure que M és difeomorfa a G_{iso}/G_p .

□

6.1 La curvatura seccional

Definició 6.1.1. Es defineix el *tensor de curvatura de Riemann* com el camp tensorial de tipus $(4, 0)$ donat per $\bar{R}(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$.

Definició 6.1.2. Sigui p un punt de la varietat riemanniana (M, g) , P un subespai vectorial de dimensió 2 de $T_p M$ i siguin $u, v \in P$ dos vectors linealment independents, diem que la *curvatura seccional* de M en el punt p , corresponent al subespai P , és

$$K_p(P) = \frac{\bar{R}(u, v, v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}.$$

Definició 6.1.3. Diem que una varietat (M, g) té *curvatura seccional constant* k , si $K_p(P) = k \in \mathbb{R}$, $\forall p \in M$ i per a tot subespai de dimensió 2 de $T_p M$, P .

En particular, les varietats de Riemann homogènies i isòtropes tenen curvatura constant.

Definició 6.1.4. Sigui $\gamma : I \longrightarrow M$ una corba parametritzada en una varietat riemanniana (M, g) i ∇ la connexió de Levi-Civita, direm que γ és una *geodèsica* si $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ en tots els punts de la corba.

Observem que aquesta definició de geodèsica és en realitat un enunciat del primer axioma d'Euclides, doncs donats dos punts diferents, només existeix una corba γ que verifiqui $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ en tots els punts de la corba. L'existència i la unicitat provenen de la teoria d'equacions diferencials, i la connexió de Levi-Civita està determinada per l'expressió local de la mètrica.

Una geodèsica és la línia de menor longitud que uneix dos punts en una varietat de Riemann. Seguint el criteri utilitzat per al tractament de diferents geometries en els capítols anteriors, diem que en geometria riemanniana els objectes geomètrics considerats en una varietat (M, g) són: com a *punts*, els punts de M i com a *rectes*, les geodèsiques de la varietat.

Com hem dit, en geometria riemanniana es poden diferenciar tres nivells de generalitat. Veiem ara les versions local i global del primer postulat d'Euclides, que són respectivament:

Proposició 6.1.1. *Per a tot punt $p \in M$, existeix un entorn V de p , $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ i una aplicació diferenciable $\gamma : (-\delta, \delta) \times \Omega \rightarrow M$, on $\Omega = \{(q, v) \in TV \mid \|v\| < \epsilon\}$, tal que la corba $\gamma(t, q, v)$ és l'única geodèsica que per a $t = 0$ passa per q amb velocitat v .*

Teorema 6.1.1 (Teorema de Hopf-Rinow). *Si M és una varietat riemanniana i sigui $p \in M$, aleshores són equivalents:*

- a) $\exp_p$ està definida a tot $T_p M$.
- b) Els subconjunts tancats i acotats de M són compactes.
- c) M és un espai mètric complet.
- d) M és geodèsicament complet.
- e) Existeix una successió de subconjunts compactes $K_n \subset M$, $K_n \subset K_{n+1}$ i $\bigcup_n K_n = M$, tal que si $q_n \notin K_n$ aleshores $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.
A més, qualsevol d'aquests enunciats implica que
- f) Per a qualsevol $q \in M$ existeix una geodèsica γ que uneix p i q amb $l(\gamma) = d(p, q)$.

És a dir, donats dos punts podem determinar una única recta en geometria riemanniana.

Definició 6.1.5. Si Ω l'obert de TM anterior, definim l'*aplicació exponencial* en Ω com $\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|})$.

La restricció d'aquesta aplicació en alguns subconjunts determinats de l'espai tangent en cada punt $p \in M$ es defineix com $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_p M \rightarrow M$, on $\exp_p(v) = \exp(p, v)$.

Observem que $\exp_p$ és diferenciable (doncs $\exp$ és diferenciable) i $\exp_p(0) = p$. D'aquesta manera, obtenim sobre el punt $\exp_p(v)$ la geodèsica que passa per p amb velocitat $\frac{v}{\|v\|}$ quan $t = \|v\|$.

Donarem ara una interpretació geomètrica del concepte de curvatura seccional:

Si M és una varietat riemanniana i sigui $p \in M$, considerem $B \subset T_p M$ una bola oberta de $T_p M$ en la qual $\exp_p$ és un difeomorfisme, i $P \subset T_p M$ un subespai de dimensió 2. Aleshores, $\exp_p(B \cap P) = S$ és una subvarietat de dimensió 2 de M que

passa per p . Podem entendre S com la superfície formada per arcs de geodèsiques que tenen inici en p i són tangents a P en p .

A més, com a subvarietat de M , S té induïda la mètrica de Riemann que té per *curvatura de Gauss* en p el que denotem com $K_S(p) = K_p(P)$, és a dir, la curvatura seccional definida per Riemann és exactament la curvatura gaussiana en el punt p d'una petita superfície formada per les geodèsiques de M que són tangents a P i tenen inici en p .

A continuació, recordem el concepte de conjunt simplement connex, que juntament amb el de completitud seran necessaris per a enunciar alguns resultats importants.

Definició 6.1.6. Diem que una varietat M és *simplement connexa* si qualsevol corba tancada simple continguda en M pot transformar-se diferenciablement (per homotopia) en un punt, és a dir, si es pot encongir contínuament fins arribar a ser un punt sense sortir en cap moment de M .

Definició 6.1.7. Una varietat de Riemann (M, g) és *completa* si $\forall p \in M$, l'aplicació $\exp_p$ està definida $\forall v \in T_p M$, és a dir, si qualsevol geodèsica $\gamma(t)$ amb inici en p està definida per a tots els valors del paràmetre $t \in \mathbb{R}$.

Observem que el concepte de completitud d'una varietat de Riemann és equivalent al segon postulat d'Euclides, que afirma que una recta de l'espai euclidià pot ser allargada indefinidament, ja que en geometria riemanniana les rectes són les geodèsiques i la completitud es dóna quan aquestes estan definides $\forall t \in \mathbb{R}$, és a dir, quan poden ser indefinidament allargades.

6.2 Els espais de curvatura constant

Entre les varietats riemannianes, les de curvatura seccional constant són aquelles que verifiquen les propietats d'homogeneïtat i isotropia. En distingim tres tipus, segons si la curvatura és positiva, negativa o zero. Alguns exemples d'espais de curvatura seccional constant k són:

- Per a $k = 0$, l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica estàndard.
- Per a $k > 0$, la hipersuperfície esfèrica de radi $\frac{1}{\sqrt{k}}$ $\mathbb{S}(k) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ amb la mètrica induïda per la seva inclusió a $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Per a $k < 0$, l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}^n(k) \subset \mathbb{R}^n$ amb la mètrica

$$\frac{-k}{(x^n)^2} ((dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2).$$

El Teorema de Cartan-Hadamard conclou que tot espai de curvatura constant, complet i simplement connex és isomètric a un dels tres models que acabem de comentar. Abans d'enunciar-lo, necessitem conèixer els resultats que seran utilitzats en la demostració.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Hadamard). *Sigui M una varietat riemanniana completa amb curvatura seccional $k \leq 0$. Aleshores, $\forall p \in M$, $(T_p M, \exp_p)$ és un espai recobridor de M .*

El següent resultat requereix introduir alguns elements de notació per a poder ser formulat. Sigui M i $\bar{M}$ dues varietats riemannianes de dimensió n i sigui $p \in M$ i $\bar{p} \in \bar{M}$. Considerem una isometria lineal $i : T_p M \rightarrow T_{\bar{p}} \bar{M}$. Sigui $B_r(p)$ la bola normal en M de centre p i radi $r > 0$, definim l'aplicació diferenciable $f : B_r(p) \rightarrow B_r(\bar{p})$ com

$$f(q) = \exp_{\bar{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q).$$

Per a tot punt $q \in B_r(p)$ existeix una única geodèsica normalitzada $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(t) = q$. Així, podem considerar també la geodèsica normalitzada $\bar{\gamma} : [0, t] \rightarrow \bar{M}$ que verifica $\bar{\gamma}(0) = \bar{p}$ i $\bar{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Denotem per P_t i $\bar{P}_t$ transports paral·lels al llarg de γ i $\bar{\gamma}$, respectivament, des de l'origen al punt final de cada geodèsica. Definim ara $\phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \bar{M}$ com

$$\phi_t(v) = \bar{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v), \quad v \in T_q M.$$

Per últim, denotem com R i $\bar{R}$ les curvatures de M i $\bar{M}$, respectivament.

Teorema 6.2.2 (Teorema de Cartan). *Amb la notació anterior, si per a tot $q \in B_r(p)$ i per a tot $x, y, u, v \in T_q M$ es compleix*

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \bar{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle,$$

aleshores $f : B_r(p) \rightarrow f(B_r(p)) \subset \bar{M}$ és una isometria local i $df_p = i$.

Teorema 6.2.3. *Sigui M i $\bar{M}$ dues varietats riemannianes de la mateixa dimensió i $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ una isometria local. Si M és completa, aleshores (M, π) és un espai recobridor i $\bar{M}$ és una varietat completa.*

Lema 6.2.4. *Sigui M una varietat de Riemann connexa i $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ dues isometries locals de M en N . Si existeix un punt $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ i $d_p f_1 = d_p f_2$, llavors $f_1 \equiv f_2$.*

Teorema 6.2.5 (Teorema de Cartan-Hadamard). *Sigui M una varietat riemanniana de curvatura seccional constant k , completa i simplement connexa, aleshores M és isomètrica a*

- $\mathbb{H}^n(k)$, si $k < 0$,
- $\mathbb{R}^n$, si $k = 0$,
- $\mathbb{S}^n(k)$, si $k > 0$.

Les varietats completes amb curvatura seccional constant s'anomenen *formes de l'espai*.

Demostració:

Primer comprovarem que les tres varietats anteriors tenen curvatura seccional constant, són completes i simplement connexes. Després veurem la implicació contrària, és a dir, que una varietat que verifica les condicions anteriors és isomètrica a una de les tres varietats esmentades.

Sigui $\mathbb{R}^n$ l'espai euclidià, considerem en aquesta varietat la mètrica riemanniana

$$g = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2.$$

Aleshores, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Per a calcular la curvatura seccional de $\mathbb{R}^n$ primer necessitem conèixer els símbols de Christoffel. Els calcularem utilitzant la fórmula 6.0.1, i obtenim que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r \left\{ \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right\} g^{rk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} = 0.$$

Ara calcularem els coeficients del tensor de curvatura de Riemann utilitzant la fórmula 6.0.2. Observem que

$$\begin{aligned} \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= R_{ijji} = \sum_l g(R_{ijj}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_l R_{ijj}^l g_{li} \\ &= R_{ijj}^i g_{ii} = \frac{\partial \Gamma_{jj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^j} + \sum_s \Gamma_{jj}^s \Gamma_{is}^i - \sum_s \Gamma_{ij}^s \Gamma_{js}^i = 0. \end{aligned}$$

Considerem els vectors $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}$, i observem que són ortogonals, és a dir, $g_{ij} = 0$. Per tant, si calculem la curvatura seccional respecte el subespai generat per aquests vectors, que denotem per E , tenim

$$K_p(E) = \frac{R_{ijji}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijji} = 0.$$

I qualsevol subespai generat per dos vectors diferents de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ tindrà la mateixa curvatura seccional. Podem concloure així que la curvatura seccional de $\mathbb{R}^n$ és constant igual a 0.

A més, les geodèsiques de $\mathbb{R}^n$ són les rectes de l'espai, així que la varietat és completa. També sabem que és simplement connexa.

Observem que, en multiplicar una mètrica de Riemann per una constant positiva c , la seva curvatura seccional es multiplica per $\frac{1}{c}$. Podem considerar doncs, que els valors que pot prendre la curvatura seccional constant en una varietat de Riemann són 1, 0, o bé -1.

Calcularem la curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ per a demostrar que efectivament és igual a -1.

Sigui l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n > 0\}$, on hi considerem la mètrica de Riemann

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} ((dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2).$$

Sabem doncs que $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Com abans, primer calculem els símbols de Christoffel utilitzant la fórmula 6.0.1:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r \left\{ \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right\} g^{rk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} x_n^2.$$

Veiem que quan els tres índexs són diferents, $\Gamma_{ij}^k = 0$. Els altres casos possibles es redueixen a

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^n &= \frac{1}{x_n^2}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \Gamma_{in}^i &= \Gamma_{ni}^i = -\frac{1}{x_n^2}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ \Gamma_{nn}^n &= -\frac{1}{x_n^2}. \end{aligned}$$

Calculem ara els coeficients del tensor de curvatura de Riemann utilitzant la fórmula 6.0.2. Observem que

$$\begin{aligned} \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= R_{ijji} = \sum_l g(R_{ijj}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_l R_{ijj}^l g_{li} \\ &= R_{ijj}^i g_{ii} = \frac{1}{x_n^2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^j} + \sum_s \Gamma_{jj}^s \Gamma_{is}^i - \sum_s \Gamma_{ij}^s \Gamma_{js}^i \right\} \end{aligned}$$

A partir d'això, podem distingir els casos:

- $R_{inni} = \frac{1}{x_n^2} \left\{ -\frac{\partial \Gamma_{in}^i}{\partial x^n} + \Gamma_{nn}^n \Gamma_{in}^i - \Gamma_{in}^n \Gamma_{ni}^i \right\} = \frac{-1}{x_n^4}$, si $j \neq n$
- $R_{njjn} = \frac{1}{x_n^2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jj}^n}{\partial x^n} + \Gamma_{jj}^n \Gamma_{nn}^n - \Gamma_{nj}^j \Gamma_{jj}^n \right\} = \frac{-1}{x_n^4}$, si $i \neq n$
- $R_{ijji} = \frac{1}{x_n^2} \left\{ \Gamma_{jj}^n \Gamma_{in}^i \right\} = \frac{-1}{x_n^4}$, si $i, j \neq n$

Considerem els vectors $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}$, que són ortogonals. Calculant la curvatura seccional respecte el subespai generat per aquests vectors, que denotem per H , tenim

$$K_p(H) = \frac{R_{ijji}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijji}x_n^4 = -1.$$

I qualsevol subespai generat per dos vectors diferents de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ té la mateixa curvatura seccional. Per tant, la curvatura seccional de $\mathbb{H}^n$ és constant igual a -1. Sabem que $\mathbb{H}^n$ és simplement connex, així que només ens falta veure la completitud: Si intersequem $\mathbb{H}^n$ amb un pla ortogonal a l'hiperplà d'equació $x_n = 0$, obtenim un semiplà de $\mathbb{H}^n$.

Podem suposar sense pèrdua de generalitat que el pla escollit passa per l'origen,

doncs les translacions són isometries de $\mathbb{H}^n$. Aleshores, suposem també que el semiplà resultant és de la forma

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \in \mathbb{H}^n | x_n > 0\}.$$

Observem que $\mathbb{H}^2$ es correspon amb el model del semiplà de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\},$$

que es va tractar al Capítol 3. Les rectes d'aquest model són les semicircumferències euclidianes centrades a la recta $y = 0$ contingudes en $\mathbb{H}$ i les rectes euclidianes perpendiculars a $y = 0$ (les d'equació $x = c$, on $c \in \mathbb{R}$).

Així, en $\mathbb{H}^2$ les geodèsiques són les semicircumferències centrades en $x_n = 0$ contingudes en $\mathbb{H}^2$ i les rectes euclidianes perpendiculars a $x_n = 0$. Per tant, les línies rectes perpendiculars a l'hiperplà $x_n = 0$ i les semicircumferències de $\mathbb{H}^n$ situades en plans ortogonals a $x_n = 0$ centrades en aquest hiperplà, són geodèsiques a $\mathbb{H}^n$. Per unicitat de les geodèsiques, aquestes són totes les geodèsiques de $\mathbb{H}^n$.

Com sabem que $\mathbb{H}$ és complet, tots els plans ortogonals a $x_n = 0$ també ho són, així que $\mathbb{H}^n$ és complet.

Per a la curvatura de l'esfera $\mathbb{S}^n$ necessitem abans calcular la curvatura de $\mathbb{S}^2$: Considerem la següent parametrització de l'esfera de radi 1 centrada a l'origen:

$$\varphi : [0, 2\pi) \times [0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida com $\varphi(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$. Prenent $(x_1, x_2) = (\theta, \phi)$, considerem la mètrica riemanniana

$$g = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 = (dx_1)^2 + \sin^2 x_1 (dx_2)^2.$$

Calculem els símbols de Christoffel utilitzant la fórmula (6.2.1):

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r \left\{ \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right\} g^{rk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\} g^{kk}.$$

Com els tres índexs no poden ser diferents, distingim entre els casos

- $i = j = k \Rightarrow \Gamma_{kk}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left\{ \frac{\partial g_{kk}}{\partial x_k} \right\} = 0$

- $i = j \neq k \Rightarrow \Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2} g^{kk} \left\{ \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \right\}$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(\sin^2 x_1)}{\partial x_1} \right\} = -\sin x_1 \cos x_1$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0$$

- $i = k \neq j \Rightarrow \Gamma_{kj}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left\{ \frac{\partial g_{kk}}{\partial x_j} \right\}$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x_1} \left\{ \frac{\partial(\sin^2 x_1)}{\partial x_1} \right\} = \frac{\cos x_1}{\sin x_1}$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0$$

$$\bullet \quad j = k \neq i \Rightarrow \Gamma_{ik}^k = \Gamma_{ki}^k$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\cos x_1}{\sin x_1}$$

$$\Gamma_{21}^1 = 0$$

Calculem ara els coeficients del tensor de curvatura de Riemann utilitzant la fórmula 6.0.2. Observem que

$$\begin{aligned} \bar{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= R_{ijji} = \sum_l g(R_{ijj}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_l R_{ijj}^l g_{li} \\ &= R_{ijj}^i g_{ii} = \frac{1}{x_1^2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^j} + \sum_s \Gamma_{jj}^s \Gamma_{is}^i - \sum_s \Gamma_{ij}^s \Gamma_{js}^i \right\} \end{aligned}$$

A partir d'això, podem distingir els casos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad R_{1221} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 = \frac{\partial(-\sin x_1 \cos x_1)}{\partial x^1} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} (-\sin x_1 \cos x_1) = \sin^2 x_1 \\ \bullet \quad R_{2112} &= (\sin^2 x_1) \left\{ -\frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x^1} - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right\} = (\sin^2 x_1) \left\{ -\frac{(-\sin^2 x_1 - \cos^2 x_1)}{\sin^2 x_1} - \frac{\cos^2 x_1}{\sin^2 x_1} \right\} = \\ &1 - \cos^2 x_1 = \sin^2 x_1 \end{aligned}$$

Per tant, $R_{ijji} = \sin^2 x_1$, $\forall i, j \in \{1, 2\}$. Considerem els vectors $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$, que són ortogonals. Calculant la curvatura seccional respecte el subespai generat per aquests vectors, que denotem per S , tenim

$$K_p(S) = \frac{R_{ijji}}{g_{ii}g_{jj}} = \frac{R_{ijji}}{\sin^2 x_1} = 1.$$

Per tant, la curvatura seccional de $\mathbb{S}^2$ és igual a 1.

Considerant ara la hipersuperfície esfèrica $\mathbb{S}^n$, per a conèixer la seva curvatura seccional necessitem calcular la curvatura del pla $P \subset T_p \mathbb{S}^n$ generat per dos vectors diferents de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ al punt $p \in \mathbb{S}^n$.

Sigui $V \subset T_p \mathbb{S}^n$ un entorn de 0 on $\exp_p$ és un difeomorfisme, aleshores $S_p = \exp_p(P \cap V)$ és una subvarietat de dimensió 2 que conté p , i notem que està determinada per les geodèsiques amb vector de velocitat inicial tangent a P . Així, S_p és isomètric a $\mathbb{S}^2$, que té curvatura 1. El mateix passa per a tot $p \in \mathbb{S}^n$. Per tant, $\mathbb{S}^n$ té curvatura seccional constant 1, i com les geodèsiques són els cercles màxims dins la varietat, és completa. A més, sabem que $\mathbb{S}^n$ és simplement connexa.

Per a demostrar la implicació contrària distingirem dos casos: $k \leq 0$ i $k > 0$. Suposem $k \leq 0$ i considerem la varietat $E = \mathbb{H}^n(k)$ o $E = \mathbb{R}^n$ segons si $k < 0$ o $k = 0$, respectivament. Fixem un punt $\bar{p} \in E$ i un punt $p \in M$.

Pel teorema de Hadamard, sabem que $\exp_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}E \rightarrow E$ és una aplicació recobridora de E , i com E és simplement connexa aleshores $\exp_{\bar{p}}$ és un difeomorfisme (Veure [8] 5.6).

Definim doncs $f : E \rightarrow M$ com

$$f = \exp_p \circ i \circ (\exp_{\bar{p}})^{-1},$$

on i és una isometria qualsevol de $T_{\bar{p}}E$ en T_pM .

Observem que, com M és completa, aleshores f està ben definida. A més, com M i E tenen la mateixa curvatura constant, pel teorema de Cartan tenim que f és una isometria local.

Pel teorema 6.2.3, com E és completa (en els dos casos possibles), aleshores (E, f) és un espai recobridor de M , és a dir, f és una aplicació recobridora. A més, com M és simplement connex, aleshores f és un difeomorfisme.

Per tant, f és una isometria.

En el cas $k > 0$, prenem un punt $\bar{p} \in \mathbb{S}^n(k)$, un punt $p \in M$ i una isometria lineal $i : T_{\bar{p}}\mathbb{S}^n(k) \rightarrow T_pM$. Sigui $\bar{q}$ el punt antipodal de $\bar{p}$, l'aplicació $\exp_{\bar{p}}$ induïx un difeomorfisme entre una bola oberta centrada a l'origen i de radi r en $T_{\bar{p}}\mathbb{S}^n(k)$ i $\mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}\}$. Aleshores definim $f_1 : \mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}\} \rightarrow M$ com

$$f_1 = \exp_p \circ i \circ (\exp_{\bar{p}})^{-1}.$$

Pel teorema de Cartan, f_1 és una isometria local.

Siguin $\bar{p}' \in \mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{p}, \bar{q}\}$ i $\bar{q}'$ el seu antipodal, considerem la isometria lineal $i' = d_{\bar{p}'}f_1 : T_{\bar{p}'}\mathbb{S}^n(k) \rightarrow T_{f_1(\bar{p}')}M$. Definim ara $f_2 : \mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}'\} \rightarrow M$ com

$$f_2 = \exp_{f_1(\bar{p}')} \circ i' \circ (\exp_{\bar{p}'})^{-1}.$$

De la mateixa manera que abans, veiem que f_2 és una isometria local pel teorema de Cartan.

Les isometries locals f_1 i f_2 estan definides a $\mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}, \bar{q}'\}$, que és una varietat connexa, i verifiquen $f_1(p) = f_2(p)$ i $d_p f_1 = d_p f_2$. Aleshores, aplicant el lema 6.3.4, tenim que $f_1 = f_2$ sobre $\mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}, \bar{q}'\}$.

Podem definir doncs la aplicació $f : \mathbb{S}^n(k) \rightarrow M$ com

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in \mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}\} \\ f_2(x), & \text{si } x \in \mathbb{S}^n(k) \setminus \{\bar{q}'\} \end{cases},$$

que és una isometria local. Com $\mathbb{S}^n(k)$ és una varietat completa, llavors $(\mathbb{S}^n(k), f)$ és un espai recobridor de M , i com M és simplement connexa, aleshores f és un difeomorfisme.

Per tant, f és una isometria.

□

Annex 1: Repàs de geometria riemanniana

En aquest annex recordarem alguns conceptes bàsics propis de la geometria de Riemann que són utilitzats al capítol 6.

Definició 1. Una *varietat diferenciable* de dimensió n és un espai topològic M i una família d'aplicacions injectives $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ tals que:

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. $\forall \alpha, \beta$, amb $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, els conjunts $x_\alpha^{-1}(W)$ i $x_\beta^{-1}(W)$ són oberts en $\mathbb{R}^n$ i les aplicacions $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ són diferenciables;
3. $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ és la família maximal que verifica 1 i 2.

Cada parella (U_α, x_α) amb $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ s'anomena *sistema de coordenades* de M al voltant de p , i $x_\alpha(U_\alpha)$ és l'*entorn coordinat* a p .

La classe d'equivalència determinada per les famílies que verifiquen 1 i 2 amb les aplicacions diferenciables de classe C^∞ , s'anomena *estructura diferenciable* C^∞ de dimensió n sobre M .

Direm que una *varietat diferenciable* de dimensió n i classe C^∞ és un espai topològic M , Hausdorff, que satisfà l'axioma II de numerabilitat, amb una estructura diferenciable de dimensió n sobre M i classe C^∞ .

D'ara endavant, considerarem M com una varietat diferenciable de dimensió n i classe C^∞ a menys que s'especifiqui d'altra manera.

Definició 2. Una funció diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, on $\epsilon > 0$, s'anomena *corba* en M . Suposant que $\alpha(0) = p \in M$, i considerant $\mathcal{D}$ el conjunt de funcions en M que són diferenciables en p , el *vector tangent a la corba* α en $t = 0$ és una funció $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \text{ on } f \in \mathcal{D}.$$

Diem que un *vector tangent* a $p \in M$ és el vector tangent en $t = 0$ a una corba α en M tal que $\alpha(0) = p$. Aleshores el conjunt dels vectors tangents a M en p coincideix amb l'espai vectorial de les derivacions en $\mathcal{D}$, que té estructura d'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. Anomenem aquest conjunt *espai tangent* a M en p , i el denotem $T_p M$.

Definició 3. Un *camp vectorial* X sobre M és una aplicació diferenciable de M a $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$, que assigna a cada punt $p \in M$ un vector $X_p \in T_p M$. Denotarem el conjunt de camps vectorials sobre M com $\Xi(M)$.

A continuació, anem a comentar alguns elements utilitzats per realitzar operacions a partir de camps vectorials.

Sigui $\mathcal{F}(M)$ el conjunt de funcions diferenciables en M ,

Definició 4. Donats $X, Y \in \Xi(M)$, l'acció dels camps com a derivació sobre $\mathcal{F}(M)$ defineix un nou camp diferenciable que és $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ i s'anomena *claudàtor de Lie* de X, Y .

Definició 5. Diem que una aplicació de la forma

$$\nabla : \Xi(M) \times \Xi(M) \rightarrow \Xi(M),$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y,$$

és una *connexió*, o un operador de derivació covariant, si compleix:

1. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,
2. $\nabla_{X_1 + X_2}(Y) = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$,
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$, $f \in \mathcal{F}(M)$,
4. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$.

Sigui U un obert de M amb coordenades $(x_1, \dots, x_n)$, una base de TU és $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$. Així, podem expressar qualsevol camp de $\Xi(U)$ com a combinació lineal d'elements de la base i per tant, el camp $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ s'expressa com

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

A partir d'ara farem ús del criteri de sumació d'Einstein, de manera que aquesta última expressió queda de la forma

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Els coeficients Γ_{ij}^k són funcions diferenciables a l'obert de coordenades, i s'anomenen *símbols de Christoffel* de ∇ en $(U, (x_i))$.

Comentarem ara els elements bàsics de l'àlgebra tensorial, necessaris per a introduir la mètrica riemanniana que apareix més endavant.

Els espais vectorials considerats en les definicions següents seran sempre sobre $\mathbb{R}$ i els suposarem de dimensió finita.

Definició 6. Sigui E un espai vectorial, diem que un *tensor* K de tipus (k, l) és una aplicació multilinear de la forma

$$K : \overbrace{E \times \cdots \times E}^k \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^l \longrightarrow \mathbb{R},$$

on E^* és l'espai dual de E .

El conjunt de tensors de tipus (k, l) té estructura d'espai vectorial sobre $\mathbb{R}$, i el denotarem com $T_{(k,l)}(E)$.

Definició 7. Un *camp tensorial* K de tipus (k, l) és una aplicació diferenciable de M a $T_{(k,l)}(TM)$ que assigna a cada punt $p \in M$ un tensor $K_p \in T_{(k,l)}(T_p M)$.

Definició 8. Definim el *tensor de curvatura* de ∇ com el camp tensorial de tipus $(3, 1)$ donat per

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Donat un obert U de M , considerem el sistema de coordenades $(U, (x_i))$ i a partir de les propietats de la connexió i del claudàtor de Lie donades anteriorment, podem expressar $R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$, on

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l.$$

Annex 2 : Repàs de grups de Lie

En aquest annex es faciliten unes definicions bàsiques de la teoria de grups de Lie que permeten enunciar alguns resultats. Els últims teoremes que es presenten són els utilitzats en el capítol 6 per a demostrar el teorema 6.0.2.

Definició 1. Un *grup de Lie* sobre el cos K és un grup G que té l'estructura d'una varietat diferenciable sobre K tal que:

1. la aplicació producte de grups $\mu : G \times G \longrightarrow G$ donada per $\mu(a, b) = ab$ és de classe C^∞ ,
2. i la aplicació $\iota : G \longrightarrow G$ on $\iota(a) = a^{-1}$ també és de classe C^∞ .

Denotem per L_a (respectivament R_a) la translació per l'esquerra (resp. per la dreta) de G donat un element $a \in G$, i es defineix com $L_a b = ab$ (resp. $R_a b = ba$), $\forall b \in G$.

Definició 2. Donat camp vectorial X en G , diem que X és *invariant per l'esquerra* (resp. *invariant per la dreta*) si és invariant per a totes les translacions per l'esquerra (resp. per la dreta), és a dir, si $d(L_a)_b(X(b)) = X(L_a(b)) = X(ab)$, $\forall a, b \in G$. Un camp vectorial invariant per la dreta o per l'esquerra sempre és diferenciable.

Definició 3. Definim *l'àlgebra de Lie del grup de Lie G* com el conjunt $\mathfrak{g}$ format per tots els camps vectorials invariants per l'esquerra en G amb l'aplicació additiva, la multiplicació per un escalar i el claudàtor de Lie.

Com a espai vectorial, $\mathfrak{g}$ és isomorf a l'espai tangent en la identitat, $T_e(G)$, i l'isomorfisme ve donat per l'aplicació que envia $X \in \mathfrak{g}$ a X_e , el valor de X en e . Així, $\mathfrak{g}$ és una subàlgebra de dimensió n (on $n = \dim(G)$) de l'àlgebra de Lie dels camps vectorials $\Xi(M)$.

Definició 4. Anomenem *subgrup de Lie* d'un grup de Lie G a un subgrup H de G tal que (H, φ) és una subvarietat de G i H és un grup de Lie respecte aquesta estructura diferencial.

Diem que H és un *subgrup tancat* de G si, a més, $\varphi(H)$ és un subconjunt tancat de G .

Definició 5. Sigui $\mathfrak{g}$ una àlgebra de Lie, un subespai $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ és una *subàlgebra* si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{h}$.

Teorema 1. Sigui (H, φ) un subgrup de Lie de G . Aleshores φ és un *embedding* (i.e., φ és un homeomorfisme de H amb $\varphi(H)$ amb la topologia relativa) si, i sols si, (H, φ) és un subgrup tancat de G (i.e., $\varphi(H)$ és tancat en G).

Teorema 2. *Sigui G un grup de Lie i sigui A un subgrup tancat de G , aleshores existeix una única estructura de varietat en A tal que A sigui un subgrup de Lie de G .*

Observem que del teorema 2 en podem deduir que la topologia en aquesta estructura de varietat en A haurà de ser la topologia relativa o induïda per G en A . Per tant, tot subgrup tancat d'un grup de Lie és un grup de Lie.

Definició 6. Sigui G un grup de Lie i M una varietat, aleshores diem que G és un *grup de transformacions de Lie* sobre M , o bé que G *actua* (diferenciament) sobre M si es satisfan les següents condicions:

1. La aplicació $\mu : G \times M \longrightarrow M$ definida com $\mu(a, m) = am$ tal que $\mu(ab, m) = \mu(a, \mu(b, m))$ i $\mu(e, m) = m$, per a tot $a, b \in G$ i $m \in M$ és de classe C^∞ ;
2. Fixat un element $a \in G$, μ induïx una transformació de M (difeomorfisme de M en M) que denotarem com μ_a .

En aquest cas, μ és una *acció de G sobre M per l'esquerra*. De manera semblant, si es defineix $\mu : M \times G \longrightarrow M$ com $\mu(m, a) = ma$ tal que $\mu(m, ab) = \mu(\mu(m, a), b)$ i $\mu(m, e) = m$, per a tot $a, b \in G$ i $m \in M$, aleshores es diu que μ és una *acció de G sobre M per la dreta*.

Observem que μ_e és l'aplicació identitat en M .

Definició 7. Sigui $\mu : G \times M \longrightarrow M$ una acció de G sobre M per l'esquerra que denotem com $\mu(a, m) = \mu_a(m)$,

- l'acció s'anomena *efectiva* si e és l'únic element de G pel qual μ_e és l'aplicació identitat en M ;
- l'acció s'anomena *transitiva* si $\forall m, n \in M, \exists a \in G$ tal que $\mu_a(m) = n$;
- fixat un $p \in M$, anomenem *subgrup d'isotropia en p* a $G_p = \{a \in G; \mu_a(p) = p\}$, que és un subgrup tancat de G .

Teorema 3. *Sigui G un grup de Lie, M una varietat i $\mu : G \times M \longrightarrow M$ una acció transitiva de G sobre M per l'esquerra. Donat un $p \in M$, considerem G_p el subgrup d'isotropia en p . Aleshores, l'aplicació $f_p : G/G_p \longrightarrow M$ definida per $f_p(aG_p) = \mu_a(p) = ap$, $\forall a \in G$, és un difeomorfisme.*

Demostració:

Observem primer que f_p està ben definida, doncs $\mu_{ab}(p) = \mu_a(\mu_b(p)) = \mu_a(p)$, $\forall b \in G_p$.

Sabem que la aplicació f_p és exhaustiva, doncs és transitiva per hipòtesi. Veiem que és injectiva perquè

$$f_p(aG_p) = f_p(bG_p) \Leftrightarrow \mu_a(p) = \mu_b(p) \Leftrightarrow \mu_{b^{-1}a}(p) = p \Leftrightarrow b^{-1}a \in G_p,$$

és a dir, $aG_p = bG_p$. Per tant, f_p és bijectiva.

A més, com la aplicació $\mu_a : G \longrightarrow M$ és diferenciable, aleshores també ho és f_p .

Rest a demostrar que f_p és una immersió (és a dir, que la diferencial de f_p en cada

punt és injectiva), doncs una immersió bijectiva de varietats diferenciables és un difeomorfisme. Observem que l'aplicació f_p verifica que $f_p(am) = af_p(m)$, $\forall a \in G$ i $m \in G/G_p$ (es diu que és una aplicació equivariant), aleshores té rang constant. Com f_p és en particular injectiva, i el rang de f_p en un punt coincideix amb el rang de la diferencial de f_p en el mateix punt, aquesta ha de ser una immersió. $\square$

Exemples de grups de Lie

A continuació, comentarem breument les característiques d'alguns dels grups de Lie més importants, que són anomenats *grups clàssics de Lie*:

El **grup general lineal**, denotat com $GL(n, \mathbb{R})$, és el conjunt format per les matrius invertibles $n \times n$ de nombres reals, és a dir, $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det(A) \neq 0\}$, on $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és el conjunt de totes les matrius $n \times n$ de nombres reals. Aquest conjunt forma un grup de Lie amb la operació de producte de matrius, doncs el producte de matrius és una aplicació diferenciable i la inversa també és diferenciable, ja que les matrius de $GL(n, \mathbb{R})$ són totes invertibles.

El conjunt $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ de totes les matrius reals $n \times n$ forma una àlgebra de Lie n^2 -dimensional amb la operació del claudàtor de Lie definida com $[A, B] = AB - BA$. Per tant, aquest grup de Lie té dimensió n^2 .

Una altra manera de veure que aquesta és la dimensió del grup de Lie és identificar els punts de l'espai $\mathbb{R}^{n^2}$ amb matrius reals $n \times n$, així que el determinant es correspon amb una funció contínua de $\mathbb{R}^{n^2}$. D'aquesta manera, es dona a $GL(n, \mathbb{R})$ una estructura de varietat com el subconjunt obert de $\mathbb{R}^{n^2}$ on la funció determinant no s'anul·la.

Per a tractar els següents exemples utilitzarem l'aplicació

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

, que actuarà com l'exponencial sobre matrius.

El **grup especial lineal** és $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \det(A) = 1\}$, és a dir, és el subconjunt de $GL(n, \mathbb{R})$ format per les matrius d'aquest grup amb determinant igual a 1. Identificant com abans els punts de l'espai $\mathbb{R}^{n^2}$ amb matrius reals $n \times n$ de manera que el determinant es correspon amb una funció contínua de $\mathbb{R}^{n^2}$, obtenim en aquest cas que és una funció igual a 1 i veiem així que $SL(n, \mathbb{R})$ és un subgrup tancat del grup de Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Per tant, aplicant el teorema 2 tenim que també és un grup de Lie.

Sigui $X \in SL(n, \mathbb{R})$, aleshores $X = \exp(x)$, per a algun $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Com $X \in SL(n, \mathbb{R})$, aleshores tenim que $\det(X) = 1$ i així també $\det(\exp(x)) = 1$. Per les propietats de l'exponencial, $\det(\exp(x)) = \exp(\operatorname{tr}(x))$, així que $X = \exp(x) \in SL(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(x) = 0$. D'aquesta manera, tenim que l'àlgebra de $SL(n, \mathbb{R})$ és $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}); \operatorname{tr}(x) = 0\}$ i que aquest grup de Lie és de dimensió $n^2 - 1$.

El **grup ortogonal** és $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AA^t = A^t A = Id\}$, i té dues components connexes.

El **grup ortogonal especial** es denota com

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AA^t = A^t A = Id, \det(A) = 1\}$$

i només té una component connexa, que és la que conté la matriu identitat. Aquests dos grups són subgrups tancats de $GL(n, \mathbb{R})$, doncs identificant l'espai $\mathbb{R}^{n^2}$ com en els casos anteriors es poden representar per una funció contínua igual a 1. Per tant, es tracta de dos grups de Lie i tenen dimensió $n(n-1)/2$.

Observem que $X \in O(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow XX^t = Id$, així que si prenem $X = \exp(x)$ i $X^t = \exp(x^t)$, s'ha de verificar la igualtat $\exp(x)\exp(x^t) = \exp(x + x^t) = 1 \Leftrightarrow x + x^t = 0$. Per tant, podem concloure que l'àlgebra de $O(n, \mathbb{R})$ és $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}); x + x^t = 0\}$, és a dir, l'espai de les matrius antisimètriques. Per a trobar l'àlgebra de $SO(n, \mathbb{R})$ només cal afegir la condició $\det(X) = 1$ al raonament anterior, així que $\text{tr}(x) = 0$, però les matrius antisimètriques sempre verifiquen aquesta propietat. Per tant, l'àlgebra és la mateixa que abans, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$.

El **grup unitari** és $U(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); A\bar{A}^t = \bar{A}^t A = Id\}$. Identificant els punts de l'espai $\mathbb{C}^{n^2}$ amb matrius de nombres complexos $n \times n$, podem determinar el conjunt a partir d'una funció contínua de $\mathbb{C}^{n^2}$ igualada a 1. Per tant, $U(n)$ és un subgrup tancat de $GL(n, \mathbb{C})$, així que és un grup de Lie i té dimensió n^2 .

El **grup unitari especial** és $SU(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); A\bar{A}^t = \bar{A}^t A = Id, \det(A) = 1\}$, i com és un subgrup tancat de $U(n)$, podem afirmar que també és un grup de Lie i té dimensió $n^2 - 1$.

Amb els arguments utilitzats anteriorment, podem afirmar que $X = \exp(x) \in U(n) \Leftrightarrow x + \bar{x}^t = 0$, i que $X = \exp(x) \in SU(n) \Leftrightarrow x + \bar{x}^t = 0$ i $\text{tr}(x) = 0$. Però observem que en aquest cas $x + \bar{x}^t = 0$ no implica que la traça de x sigui nul·la, sino que ha de ser imaginària. Per tant, les àlgebres d'aquests espais seran diferents, $\mathfrak{u}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}); x + \bar{x}^t = 0\}$ i $\mathfrak{su}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}); x + \bar{x}^t = 0, \text{tr}(x) = 0\}$.

L'últim grup que es tractarà és el **grup simplèctic**, que pot fer referència a dos grups diferents, $Sp(2n, \mathbb{R})$ o $Sp(n, \mathbb{R})$.

$Sp(2n, \mathbb{R})$ és el grup format per les matrius $2n \times 2n$ simplèctiques reals, és a dir, $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}); A^t J A = J\}$, on J és una matriu antisimètrica invertible. Es pot veure que $\det(A) = 1$, així que $Sp(2n, \mathbb{R})$ és un subgrup tancat de $SL(2n, \mathbb{R})$. Per tant, és un grup de Lie.

$Sp(n, \mathbb{R})$ és el grup de matrius de quaternions quadrades A tals que $A = -\bar{A}^t$. Es pot observar que $Sp(n, \mathbb{R})$ és un subgrup tancat de $U(n)$, així que també és un grup de Lie.

Els dos grups són de dimensió $n(2n+1)$.

La teoria de grups de Lie està estretament relacionada amb la geometria de Klein, doncs aquest matemàtic considerava que cada geometria està constituïda per un grup de transformacions que deixen invariants certes propietats de les figures de l'espai sobre el que actuen. Precisament, en el *Programa d'Erlangen* Klein determina que el grup de transformacions considerat és en particular un grup de Lie que actua de

manera transitiva sobre un espai que és una varietat diferenciable homogènia.

D'aquesta manera, Klein classifica les geometries segons els seus grups de transformacions, unificant així el concepte de geometria.

Conclusions

Una vegada ha estat finalitzat el treball, puc concloure que he aconseguit comprendre una mica més la profunditat de la geometria, la seva evolució al llarg del temps i els canvis que ha experimentat fins a la geometria moderna. A més, he arribat a entendre noves geometries que abans desconeixia i també he pogut veure com s'utilitzen conceptes d'altres branques de la matemàtica per a relacionar les diverses geometries o per a arribar d'uns models a d'altres.

M'hagués agradat estudiar més detingudament alguns temes i arribar-ne a tractar d'altres, però en general estic satisfeta amb la tasca realitzada i amb la quantitat i qualitat dels nous coneixements assolits.

Per últim, considero que aquest treball també m'ha servit com a preparació en cas que realitzi nous projectes en un futur, i he après a trobar la informació que busco de manera més eficient, triant la que em pot resultar útil d'entre tota la que tinc a l'abast.

Bibliografia

- [1] ALMIRA, J.M. i SABINA DE LIS, J.C., *Hilbert. Matemático fundamental*. Madrid: Nivola, 2007.
- [2] AZNAR, E.R., *Biografías de algunos matemáticos* [en línea]: Universidad de Granada: Facultad de Ciencias, Departamento de Álgebra, 2007. <http://www.ugr.es/eaznar/matematicos.htm> [Consulta: 16 de juny de 2013].
- [3] BRÖCKER, T. i TOM DIECK, T., *Representations of Compact Lie Groups*. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [4] CHICA, A., *Descartes. Geometría y método*. Madrid: Nivola, 2001.
- [5] COXETER, H. S. M., *Fundamentos de geometría*. Mexico: Limusa-Wiley, 1971.
- [6] CURRÀS BOSCH, C., *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*. Barcelona: Edicions de la Universitat de Barcelona, 2003.
- [7] DESCARTES, R., *La Geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans: Eumo: Pòrtic, 1999.
- [8] DO CARMO, M. P., *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [9] DO CARMO, M. P., *Riemannian Geometry*. Boston: Birkhäuser, 1992.
- [10] EUCLIDES, *Los Elementos*. Madrid: Gredos, 1991-1996.
- [11] HILBERT, D., *Fundamentos de la geometría*. Madrid: Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1953.
- [12] IVORRA, C., *Geometría* [en línea]: Valencia, 2010. <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm> [Consulta: 26 de maig de 2013].
- [13] JOYCE, D.E., *Los Elementos de Euclides* [en línea]: Clark University, 1997. http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm [Consulta: 20 d'abril de 2013].
- [14] KLEIN, F., *Erlangen Program* [en línea]: Bull. New York Math. Soc.2: New York, 1893. http://math.ucr.edu/home/baez/erlangen/erlangen_ex.pdf [Consulta: 20 d'abril de 2013].

-
- [15] KOBAYASHI, S i NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry, vol.I*. New York: Interscience Publishers, 1963-1969.
- [16] LINARES, M.J., *Geometría Interactiva: Libro I de Los Elementos de Euclides* [en línea]: Universidad Nacional Autónoma de México, 2008. [⟨http : //132.248.17.238/geometria/menulibro_m.html⟩](http://132.248.17.238/geometria/menulibro_m.html) [Consulta: 20 d'abril de 2013].
- [17] MILLÁN, A., *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid: Nivola, 2004.
- [18] MUÑOZ, J.L., *Riemann. Una visión nueva de la geometría*. Madrid: Nivola, 2006.
- [19] REVENTÓS, A., *Geometria axiomàtica*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, 1993.
- [20] RIEMANN, B., *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry* [en línea]: 1998. [⟨http : //www.cs.jhu.edu/ misha/ReadingSeminar/Papers/Riemann54.pdf⟩](http://www.cs.jhu.edu/~misha/ReadingSeminar/Papers/Riemann54.pdf) [Consulta: 10 d'abril de 2013].
- [21] SOMMERVILLE, D.M.Y., *An Introduction to the Geometry of N Dimensions*. London: Methuen, 1929.
- [22] WARNER, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer-Verlag, 1983.