

Treball final de grau

GRAU DE  
MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques  
Universitat de Barcelona

---

LOCALITZACIÓ ÒPTIMA I PLANIFICACIÓ  
DOCENT PER A UNA ACADÈMIA DE  
MATEMÀTIQUES A BARCELONA

---

Daniel Flores Cárdenas

Directors: Antoni Benseny i Olga Julià.

Realitzat a: Departaments de Probabilitat,  
Lògica i Estadística i de  
Matemàtica Aplicada i Anàlisi.  
UB

Barcelona, 27 de gener de 2014



# Abstract

The motivation for this work comes from looking for the best place to locate a Mathematics Academy for university students in Barcelona.

Each of the degrees in every faculty has a mark scale which is based on certain parameters.

The following parameters are taken from the net:

- The number of academies which offer courses for the degree.
- The number of mathematics subjects of the degree.
- Average number of students enrolled for each subject.
- Average number of students who fail each subject.

It would be necessary to carry out many surveys of the students to obtain the following parameters:

- Average number of times the students need to do the subject to pass.
- Average number of students who go to academies.
- Degree of knowledge of the existence of other academies.
- Degree of need for an mathematics academy.

To avoid carrying out such an extensive number of studies, Bayesian Statistics are used to estimate the parameters properly. Bayesian methods make it possible to incorporate scientific hypothesis in the analysis (by means of prior distribution). Statistical inference about a quantity of interest is described as the modification of the uncertainty about its value in the light of evidence, and Bayes' theorem precisely specifies how this modification should be made.

Using the degree's mark scheme and the distance between the center's location and each place in Barcelona, a grade or mark is assigned to each location. It is done by several mathematical models which use geographical and cartesian coordinates. In models in cartesian coordinates Newton's method is used to determine a suitable location for the academy.

The work includes a didactic programming of a subject from the degree which gets the most marks. It shows how the academy will help the students to understand the subject and to become great at studying maths.

# Índex

|          |                                              |           |
|----------|----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCCIÓ</b>                           | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>ESTADÍSTICA BAYESIANA</b>                 | <b>10</b> |
| 2.1      | Estimador de Bayes . . . . .                 | 10        |
| 2.2      | Estimació dels paràmetres . . . . .          | 13        |
| 2.2.1    | Observacions binomials . . . . .             | 13        |
| 2.2.2    | Observacions de Poisson . . . . .            | 16        |
| 2.2.3    | Observacions multinomials . . . . .          | 18        |
| <b>3</b> | <b>PROGRAMA INFORMÀTIC</b>                   | <b>20</b> |
| 3.1      | Plantejament . . . . .                       | 20        |
| 3.2      | Models utilitzats . . . . .                  | 22        |
| 3.2.1    | Puntuacions . . . . .                        | 22        |
| 3.2.2    | Distàncies . . . . .                         | 24        |
| 3.2.3    | Cerca del màxim . . . . .                    | 27        |
| 3.3      | Resultats . . . . .                          | 30        |
| <b>4</b> | <b>PROGRAMACIÓ DIDÀCTICA: MATEMÀTIQUES I</b> | <b>34</b> |
| 4.1      | Motivació . . . . .                          | 34        |
| 4.2      | Objectius generals i particulars . . . . .   | 35        |
| 4.3      | Continguts . . . . .                         | 36        |



---

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.4      | Contribució a l'assoliment de les competències bàsiques . . . . .  | 37        |
| 4.5      | Seqüència d'activitats . . . . .                                   | 38        |
| 4.6      | Aspectes generals de metodologia i situacions de treball . . . . . | 42        |
| 4.7      | Recursos didàctics . . . . .                                       | 43        |
| 4.8      | Models . . . . .                                                   | 44        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSIONS</b>                                                 | <b>48</b> |

# Capítol 1

## INTRODUCCIÓ

L'objectiu d'aquest treball és trobar el lloc idoni per muntar una acadèmia de matemàtiques dirigida a estudiants universitaris i decidir, en funció de quina sigui aquesta ubicació, a quins ensenyaments aniria destinada. A continuació es farà una programació didàctica d'una de les assignatures que s'hi impartirien.

En primer lloc, per a cadascuna de les universitats de Barcelona, necessitem un llistat on s'incloguin; les seves facultats o escoles, els seus graus, el seu àmbit, el nombre d'assignatures de matemàtiques que hi ha en cadascun dels ensenyaments, el nombre d'acadèmies que ofereixen l'ensenyament d'aquestes assignatures i, a més, la seva ubicació.

Dita informació es pot obtenir entrant a les pàgines web de cada universitat i de les acadèmies més importants. Cal remarcar que cap la possibilitat que hi hagi més acadèmies dirigides a algun ensenyament, però les que tenen més aflluència d'estudiants són les acadèmies SOL, Asses i CETEC. Aquestes són les úniques que tindrem en compte de cara a l'estudi.

A continuació, es mostra el resultat d'aquesta recollida de dades.

A la Universitat de Barcelona:

| CENTRE                        | ADREÇA                 | ENSENYAMENT          | ÀMBIT            | ASSIG | NºAC |
|-------------------------------|------------------------|----------------------|------------------|-------|------|
| Facultat de Biologia          | Diagonal, 643          | Biologia             | bc <sup>1</sup>  | 2     | 1    |
|                               |                        | Ciències Ambientals  | bc               | 2     | 1    |
|                               |                        | Bioquímica           | bc               | 2     | 1    |
|                               |                        | Biotecnologia        | bc               | 2     | 1    |
|                               |                        | Ciències biomèdiques | bc               | 2     | 1    |
| Facultat d'Economia i Empresa | Diagonal, 690-696      | ADE                  | csj <sup>2</sup> | 5     | 2    |
|                               |                        | Economia             | csj              | 4     | 2    |
|                               |                        | Estadística          | c <sup>3</sup>   | 15    | 1    |
|                               |                        | Sociologia           | csj              | 2     | 1    |
| Facultat de Física            | Martí i Franquès, 1    | Física               | c                | 6     | 2    |
|                               |                        | Eng. Electrònica     | et <sup>4</sup>  | 6     | 2    |
| Facultat de Geologia          | Martí i Franquès, s/n  | Eng. Geològica       | ec <sup>5</sup>  | 6     | 0    |
|                               |                        | Geologia             | c                | 5     | 0    |
| Facultat de Matemàtiques      | Gran Via 585           | Matemàtiques         | m <sup>6</sup>   | 24    | 0    |
|                               |                        | Eng. Informàtica     | et               | 4     | 0    |
| Facultat de Medicina          | Casanova, 143          | Ciències Biomèdiques | cs <sup>7</sup>  | 2     | 2    |
|                               |                        | Eng. Biomèdica       | ec               | 5     | 2    |
| Facultat de Química           | Martí i Franquès, 1-11 | Química              | c                | 2     | 2    |
|                               |                        | Eng. Química         | ec               | 4     | 1    |
|                               |                        | Eng. de Materials    | ec               | 4     | 1    |

A la Universitat Pompeu Fabra:

| CENTRE                                           | ADREÇA                    | ENSENYAMENT            | ÀMBIT | ASSIG | NºAC |
|--------------------------------------------------|---------------------------|------------------------|-------|-------|------|
| Escola Superior Politècnica                      | Roc Boronat, 138          | Eng. Biomèdica         | ec    | 3     | 0    |
|                                                  |                           | Eng. Informàtica       | et    | 5     | 0    |
|                                                  |                           | Eng. Telemàtica        | et    | 5     | 0    |
|                                                  |                           | Eng. de Sist. Audiov.  | et    | 5     | 0    |
| Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales | Ramon Trias Fargas, 25-27 | ADE                    | csj   | 5     | 1    |
|                                                  |                           | Economia               | csj   | 5     | 1    |
|                                                  |                           | Ciències Empresariales | csj   | 4     | 1    |
|                                                  |                           | IBE                    | csj   | 5     | 1    |

<sup>1</sup>bc: Biociències

<sup>2</sup>csj: Ciències Socials i Jurídiques

<sup>3</sup>c: Ciències

<sup>4</sup>et: Enginyeria Tècnica

<sup>5</sup>ec: Enginyeria Científica

<sup>6</sup>m: Matemàtiques

<sup>7</sup>cs: Ciències de la Salut

A la Universitat Politècnica de Catalunya:

| CENTRE   | ADREÇA               | ENSENYAMENT                           | ÀMBIT | ASSIG | NºAC |
|----------|----------------------|---------------------------------------|-------|-------|------|
| ETSETB   | Jordi Girona, 1-3    | Eng. de Telec.                        | et    | 5     | 1    |
|          |                      | Eng. de Sist. Audiov.                 | et    | 5     | 1    |
|          |                      | Eng. de Sistemes de Telecomunicacions | et    | 5     | 1    |
|          |                      | Eng. de Sistemes Electrònics          | et    | 5     | 1    |
|          |                      | Eng. Telemàtica                       | et    | 5     | 1    |
|          |                      | Eng. Física                           | et    | 8     | 1    |
| FIB      | Jordi Girona, 1-3    | Eng. Informàtica                      | et    | 4     | 2    |
| ETSECCPB | Jordi Girona, 1-3    | Eng. Civil                            | et    | 7     | 2    |
|          |                      | Eng. de Construcció                   | et    | 6     | 1    |
|          |                      | Eng. Geològica                        | ec    | 6     | 1    |
| ETSAB    | Diagonal, 649-651    | Arquitectura                          | et    | 2     | 2    |
| EPSEB    | Dr. Marañon, 44-50   | Eng. Geomàtica                        | et    | 4     | 0    |
|          |                      | Edificació                            | c     | 2     | 1    |
| ETSEIB   | Diagonal, 647        | Eng. de Materials                     | ec    | 6     | 2    |
|          |                      | Eng. de Tec. Ind.                     | et    | 7     | 2    |
|          |                      | Eng. Química                          | ec    | 6     | 2    |
| FME      | Pau Gargallo, 5      | Matemàtiques                          | m     | 21    | 0    |
|          |                      | Estadística                           | c     | 14    | 0    |
| FNB      | Plaça Pau Vila       | Eng. Naval                            | et    | 4     | 0    |
|          |                      | Eng. Marina                           | et    | 3     | 0    |
|          |                      | Eng. Nàutica                          | et    | 2     | 0    |
| EUETIB   | Compte d'Urgell, 187 | Eng. Biomèdica                        | ec    | 4     | 2    |
|          |                      | Eng. de l'Energia                     | et    | 4     | 2    |
|          |                      | Eng. Elèctrica                        | et    | 4     | 2    |
|          |                      | Eng. Electr. Ind.                     | et    | 4     | 2    |
|          |                      | Eng. Mecànica                         | et    | 4     | 2    |
|          |                      | Eng. Química                          | ec    | 4     | 2    |

Descartem els centres privats ja que l'obtenció de dades seria més complexa i la majoria d'elles tenen una acadèmia paral·lela.

Observem que, en total, hi ha 304 assignatures, de cadascuna d'elles necessitem la informació següent:

- Mitjana d'alumnes matriculats ( $n_{mat}$ ).
- Mitjana d'alumnes suspesos ( $n_{sus}$ ).
- Mitjana de convocatòries que necessiten els alumnes per aprovar ( $n_{conv}$ ).
- Mitjana d'alumnes que assisteixen a acadèmies o a professors particulars per millorar el seu rendiment ( $n_{assis}$ ).
- Grau de coneixement per part de l'alumnat de les acadèmies que ofereixen l'ensenyament de l'assignatura ( $gc$ ).
- Grau de necessitat d'una acadèmia que ofereixi l'ensenyament de l'assignatura ( $gn$ ).

Per obtenir aquestes dades necessitaríem, d'una banda, preguntar als 304 professors responsables de cada una de les assignatures el nombre d'estudiants matriculats i suspesos, i d'una altra banda, enquestar a un percentatge adequat d'estudiants que hagin cursat cada assignatura per obtenir la resta de dades. Aquesta última part implicaria la recopilació de milers d'enquestes que podrien trigar en realitzar-se diversos mesos. Per tant, hem de buscar una estratègia per reduir el nombre d'enquestes i optimitzar el treball realitzat.

En primer lloc, per tal de reduir el nombre d'enquestes, suposarem que les assignatures de matemàtiques d'un ensenyament tenen una dificultat similar i, per tant, els paràmetres que busquem no els assignarem a cada assignatura, sinó a cada ensenyament. Observem que en tenim 72 i, per tant, hem reduït el nombre d'enquestes a realitzar en més d'un 75%.

A més, utilitzarem l'Estimació de Bayes per tal d'optimitzar els resultats. Aquest mètode consisteix, a grans trets, en assignar una probabilitat a priori a cadascun dels paràmetres aprofitant els nostres coneixements previs del que volem estimar. Després, basant-nos en les observacions realitzades, que en el nostre cas seran les enquestes, obtindrem una distribució a posteriori i obtindrem la mitjana d'aquesta distribució, que serà el valor que farem servir com a estimador del paràmetre. A continuació veurem una explicació més detallada del procés i de com farem l'estimació dels diferents paràmetres.

Un cop establert com farem l'estimació dels paràmetres, implementarem un programa informàtic que farà les funcions següents:

- Calcular cadascun dels paràmetres per a cadascun dels ensenyaments.

- Assignar una puntuació a cadascun dels ensenyaments i a cadascuna de les facultats.
- Assignar una puntuació a cada punt del mapa en funció de la distància a cadascuna de les facultats i de les seves puntuacions.
- Trobar la localització òptima per a l'acadèmia.
- En funció del resultat, decidir a quins centres aniria destinada l'acadèmia.

Un cop obtinguda aquesta localització, triarem l'ensenyament amb més puntuació d'entre les facultats properes. D'aquest ensenyament triarem l'assignatura amb més alumnes matriculats per fer una programació didàctica de com s'impartiria.

## Capítol 2

# ESTADÍSTICA BAYESIANA

### 2.1 Estimador de Bayes

En les diverses assignatures d'Estadística i Probabilitat hem après a estimar paràmetres que minimitzin el risc de cometre un error. Sempre ho hem fet restringint la classe dels estimadors, com per exemple, els estimadors sense biaix. Per trobar l'estimador de Bayes admetrem els estimadors que minimitzen

$$\int_{\Theta} R(\theta, \delta) d\Lambda(\theta)$$

$\Lambda$ : la probabilitat sobre  $\Theta$   
 $R(\theta, \delta)$ : la funció de risc.

Si existeix un estimador  $\delta$  que minimitza aquesta integral, direm que és l'Estimador de Bayes.

Una característica molt important de l'estimació de Bayes és que utilitza les experiències prèvies per adjudicar una distribució a priori  $\Lambda$ . Aquesta tria la farem combinant experiència i conveniència. Escollirem una distribució que s'ajusti a les experiències anteriors i que sigui matemàticament convenient.

Considerem una estructura estadística  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) = \{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$  tal que el conjunt dels paràmetres és un espai mesurable  $(\Theta, \mathcal{G})$ .

Suposarem que

$$\begin{aligned} P : \Theta \times \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ (\theta, \mathcal{A}) &\longmapsto P_{\theta}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

és una probabilitat de transició, això vol dir que:

- a)  $\forall A \in \mathcal{F}, P_*(A) : \Theta \longrightarrow [0, 1]$  és mesurable  
 b)  $\forall \theta \in \Theta, P_\theta$  és una probabilitat

Suposarem que existeix una versió mesurable de la funció de versemblança  $L(x, \theta)$  en l'espai producte  $(\Omega \times \Theta, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ . Això implica que  $\beta(\theta) = E_\theta(X)$  és mesurable si  $X$  ho és.

Anomenarem distribució a priori a tota probabilitat  $\Lambda$  en l'espai  $(\Theta, \mathcal{G})$ . La probabilitat  $\Lambda$  i la probabilitat de transició  $P$  defineixen una única probabilitat en l'espai producte de la forma:

$$\Pi(A \times G) = \int_G P_\theta(A) \Lambda d\theta \quad \forall G \in \mathcal{G}, \forall A \in \mathcal{F}$$

$$\Pi(A \times G) = \int_G \left[ \int_A L(x, \theta) \mu(dx) \right] \Lambda(d\theta) = \int_{G \times A} L(x, \theta) (\mu \times \Lambda)(dx, d\theta).$$

Arribats a aquest punt, tenim:

- Una probabilitat sobre  $\Theta$  que té densitat 1 respecte a la mesura  $\Lambda$ .
- Una probabilitat condicionada  $P_\theta$ , és la probabilitat de  $x$  sabent que es compleix  $\theta$ , que té per densitat  $L(x, \theta)$  respecte  $\mu$ .

Per tant, la densitat conjunta de  $x$  i  $\theta$  respecte a  $\mu \times \Lambda$  és el producte  $1 \times L(x, \theta)$ . Fem la projecció de  $\Pi$  en  $(\Omega, \mathcal{F})$ , és a dir:

$$\Lambda^*(A) = \Pi(A \times \Theta) = \int_A \left[ \int_\Theta L(x, \theta) \Lambda(d\theta) \right] d\mu(x) = \int_A f_X(x) d\mu(x) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Observem que  $\Lambda^* \ll \mu$  i té per densitat la marginal de  $x$ ,  $f_X(x)$ .

Volem trobar la llei de  $\Theta$  condicionada a  $x$ , per tant, considerem l'aplicació:

$$\begin{aligned} q : \Omega \times \mathcal{G} &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, G) &\longmapsto q(x, G) = P_x(G) = \frac{\int_G L(x, \theta) d\Lambda(\theta)}{\int_\Theta L(x, \theta) d\Lambda(\theta)} \end{aligned}$$

Si no s'anul·la el denominador,  $q$  és una probabilitat de transició ja que  $\forall G, P_*(G)$  és mesurable i  $\forall x, P_x(\cdot)$  és una probabilitat.



Observem que  $P_x$  i  $\Lambda^*$  generen  $\Pi$ :

$$\begin{aligned}\Pi(A \times G) &= \int_{A \times G} L(x, \theta) \Lambda(d\theta) \mu(dx) = \int_A \left[ \int_G L(x, \theta) \Lambda(d\theta) \right] \frac{\int_{\Theta} L(x, \theta) d\Lambda(\theta)}{\int_{\Theta} L(x, \theta) d\Lambda(\theta)} \mu(dx) = \\ &= \int_A P_x(G) f_X(x) \mu(dx) = \int_A P_x(G) \Lambda^*(dx).\end{aligned}$$

No considerem els punts en què  $\int_{\Theta} L(x, \theta) d\Lambda(\theta) = 0$  ja que, en aquest cas,  $\int_G L(x, \theta) \Lambda(d\theta) = 0$  i això fa que no es modifiqui el valor de la integral.

$$\text{Llavors } P_x \text{ té densitat} \quad \frac{L(x, \theta)}{\int_{\Theta} L(x, \theta) d\Lambda(\theta)} \quad (2.1)$$

respecte a  $\Lambda$ , per tant,  $P_x \ll \Lambda$ .

Anomenarem a  $P_x$  la distribució a posteriori i representa la probabilitat sobre el paràmetre  $\theta$  sabent que  $X = x$ .

A l'hora de fer l'estimació, considerarem  $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  la funció del paràmetre que volem estimar i fixarem la funció de pèrdua quadràtica  $W(\theta, t)$  mesurable:

$$\begin{aligned}W : \Theta \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\theta, t) &\longmapsto (\theta - t)^2.\end{aligned}$$

Abans de l'experiència prenem com a estimació de  $g(\theta)$  al nombre real  $t$  que fa mínim el risc  $\int_G W(\theta, t) \Lambda(\theta)$ .

Després de l'experiència:

- Considerem  $T$  l'estimador de  $g(\theta)$  i  $R(T, \theta) = E_{\theta}[W(\theta, T(x))]$ , la funció de risc.

- Anomenem risc de Bayes al valor mig de  $R(T, \theta)$  segons  $\Lambda$ , és a dir:

$$\begin{aligned}r_T &= \int_{\Theta} R(T, \theta) \Lambda(d\theta) = \int_{\Theta} \left[ \int_{\Omega} W(\theta, T(x)) P_{\theta}(dx) \right] \Lambda(d\theta) = \int_{\Theta \times \Omega} W(\theta, T(x)) \Pi(dx, d\theta) = \\ &= \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} W(\theta, T(x)) P_x(d\theta) \right] \Lambda^*(dx) = \int_{\Omega} R_T(x) \Lambda^*(dx)\end{aligned}$$

on  $R_T(x) = \int_{\Theta} W(\theta, T(x)) P_x(d\theta) = \int_{\Theta} (\theta - T(x))^2 P_x(d\theta)$  és el risc a posteriori.

- Observem que el risc de Bayes també és el valor mig del risc a posteriori segons  $\Lambda^*$ .

L'estimació de Bayes és el que minimitza  $r_T$ , per tant, volem trobar el valor de  $T(x)$  que minimitza  $R_T(x)$ . Com  $R_T(x) = \int_{\Theta} (\theta - T(x))^2 P_x(d\theta)$ , l'estimador de Bayes serà la mitjana de la distribució a posteriori  $T_{P_x}(\theta)$ .

## 2.2 Estimació dels paràmetres

En el cas que ens ocupa, volem obtenir la informació següent de cadascun dels ensenyaments de grau:

- *nconv*: mitjana del nombre de convocatòries que els alumnes han necessitat per a superar les assignatures de matemàtiques.
- *assis*: tant per cent d'estudiants que han assistit a alguna acadèmia per tal de superar alguna assignatura.
- *gn*: grau de necessitat d'una acadèmia.
- *gc*: tant per cent d'alumnes que coneixen cadascuna de les acadèmies dirigides al ensenyament en qüestió.

És normal agrupar els paràmetres *gc* i *assis* ja que s'obtenen de preguntar als alumnes si coneixen una acadèmia dedicada al seu ensenyament i si hi han assistit alguna vegada, respectivament. Ambdues es responen amb un sí o un no, i per tant, podem considerar que aquestes observacions segueixen una distribució binomial. D'altra banda, considerarem que les observacions obtingudes pels paràmetres *Nconv* i *Gn* segueixen distribucions de Poisson i Multinomial respectivament.

### 2.2.1 Observacions binomials

Com hem dit a la introducció, la distribució a priori s'escull combinant experiència i conveniència. En el cas d'observacions que segueixen una binomial, la distribució més convenient és la  $\text{beta}(a, b)$ , ja que, són conjugades. Això vol dir que prenent una  $\text{beta}(a, b)$  com a priori sobre observacions que segueixen una binomial, la distribució a posteriori resultant serà una  $\text{beta}(a', b')$ . A continuació veurem la justificació d'aquest fet.

En l'estimació dels paràmetres *assis* i *gc*, estem comptant el nombre total d'èxits en  $n$  observacions independents, cadascuna d'elles té dues opcions, èxit quan la resposta és afirmativa i fracàs quan la resposta és negativa. La probabilitat d'èxit en una observació qualsevol és la proporció de la mostra a estudiar que contestaria afirmativament, l'anomenarem  $\pi$ .

Sigui un conjunt d'observacions  $Y$ , llavors el nombre d'èxits en  $n$  observacions donat el paràmetre  $\pi$ , és una  $Bn(n, \pi)$ . La funció de la probabilitat de  $y$  condicionada per  $\pi$  ve donada per

$$L(y; \pi) = \binom{n}{y} \pi^y (1 - \pi)^{n-y} \quad y \in 1, \dots, n .$$

Aquí, estem fixant  $\pi$  i trobant la probabilitat sobre els possibles valors de  $y$ .

Per utilitzar el Teorema de Bayes, necessitem la distribució a priori  $g(\pi)$  que mostra la nostra creença sobre el paràmetre  $\pi$  abans de recollir les dades. Considerem una distribució  $\Lambda$  sobre  $[0,1]$  amb densitat  $g(\pi)$ . És molt important que la distribució a priori escollida no sigui construïda a partir de les dades, ja que la multiplicació en el Teorema de Bayes només és justificada si la distribució a priori és independent de la probabilitat de  $y$  condicionada de  $\pi$ . La densitat de la distribució a posteriori obtinguda serà (2.1):

$$g(\pi|y) = \frac{L(y; \pi)g(\pi)}{\int_{\Theta} L(y; \pi)g(\pi) d\pi} .$$

Observem que la densitat a posteriori és proporcional a la distribució a priori multiplicada per la probabilitat condicionada:

$$g(\pi|y) \propto g(\pi)L(y; \pi) .$$

Aquest fet permet, a la pràctica, treballar sense les constants i afegir posteriorment la constant necessària per tal que la integral de la densitat sobre tots els possibles valors de  $y$  sigui 1.

Depenent de la distribució a priori escollida, no serà necessari el càlcul de la integral del denominador. És el que succeeix quan triem una  $beta(a, b)$  com a funció que estima a priori el valor de  $\pi$ . La funció densitat d'una  $beta(a, b)$  és:

$$g(\pi; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1} \text{ per } 0 \leq \pi \leq 1 .$$

Com hem vist amb anterioritat, podem descartar les constants, llavors:

$$g(\pi|y) \propto \pi^{a+y-1}(1-\pi)^{b+n-y-1}$$

que és de la mateixa forma que la distribució a priori. Observem que torna a ser una distribució beta amb paràmetres  $a' = a + y$  i  $b' = b + n - y$ . Això vol dir que sumem el nombre d'èxits en les observacions al paràmetre  $a$  i el nombre de fracassos al paràmetre  $b$ .

L'estimador de Bayes serà la mitjana de la distribució a posteriori, com és una  $beta(a', b')$ , la seva mitjana és

$$m' = \frac{a'}{a' + b'} .$$

L'elecció dels paràmetres  $a$  i  $b$  per la nostra distribució es pot fer de dues formes:

- Considerant una mitjana i una desviació típica que considerem en funció dels nostres coneixements del paràmetre a estimar. La mitjana d'una  $beta(a, b)$  és  $m = \frac{a}{a+b}$ . La desviació típica és  $s = \frac{m(1-m)}{a+b+1}$ . Per tant, substituint, podem obtenir els valors d' $a$  i  $b$  de la nostra distribució a priori.
- Assignant directament uns valors als paràmetres  $a$  i  $b$ .

L'elecció d' $a$  i  $b$  no tindrà molta influència en la probabilitat a posteriori. Ho veiem en l'exemple següent en què agafarem dues probabilitats a priori clarament diferents.

Suposem que volem estimar el paràmetre *assis* del grau de matemàtiques de la UB. Utilitzant el nostre coneixement, podríem assignar com a probabilitat a priori una  $beta(0.5, 1)$ , ja que sabem que pocs alumnes del grau en matemàtiques assisteixen a acadèmies. En canvi, una persona que no hagi viscut la nostra experiència, podria suposar que un 35% dels alumnes han assistit a una acadèmia amb una desviació típica del 8%. Utilitzant les fórmules anteriors obtenim  $a = 12.09$  i  $b = 22.46$ . Les dues distribucions a priori que en resulten són:

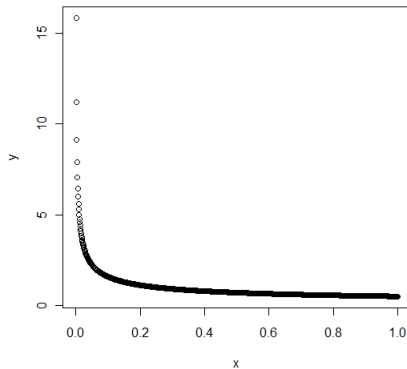


Figura 2.1: beta (.5, 1)

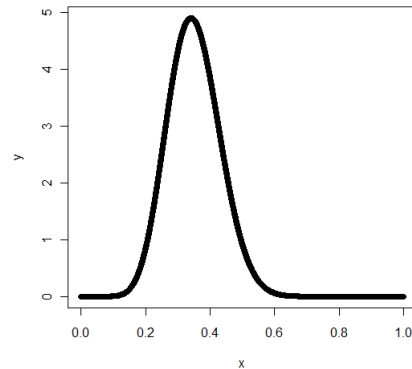


Figura 2.2: beta (12.09, 22.46)

Observem que les dues distribucions a priori són molt diferents. Ara suposem que hem fet 100 observacions, de les quals 12 han contestat afirmativament i la resta no. Les distribucions a posteriori obtingudes després d'aquestes observacions són, en el primer cas,  $a' = 0.5 + 12$  i  $b' = 1 + 88$ , per tant segueix una  $beta(12.5, 89)$ , i en el segon cas,  $a' = 12.09 + 12$  i  $b' = 22.46 + 88$  i obtenim una  $beta(24.09, 110.46)$ . Com mostra la figura 2.3, tot i haver escollit dues distribucions a priori completament diferents, les dues distribucions a posteriori són força semblants.

És a dir, no és necessari tenir un gran coneixement sobre el paràmetre a estimar, només tenint una lleugera idea ja aconseguim optimitzar l'estimació.

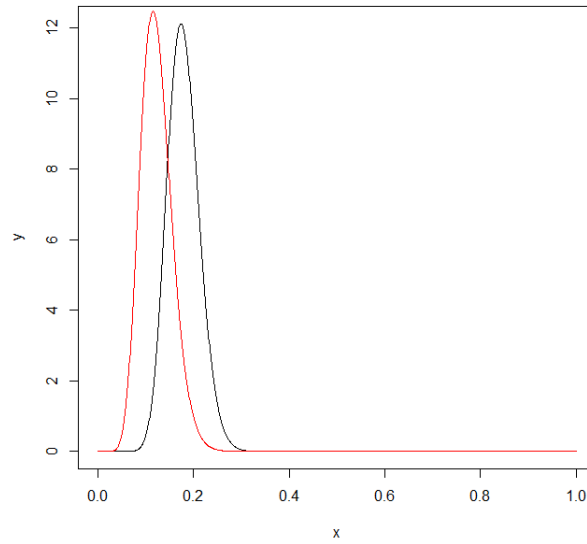


Figura 2.3: Comparació de distribucions a posteriori

Per decidir quina distribució a priori triarem, adjudicarem una mitjana i una desviació típica en funció de l'àmbit de l'ensenyament i el programa s'encarregarà de calcular els valors d' $a$  i  $b$ . A continuació obtindrà els valors  $a'$  i  $b'$  de la distribució a posteriori i en calcularà la mitjana, que serà l'estimador de Bayes.

En l'exemple, al primer cas obtenim un estimador de Bayes de 0.123 i, en el segon cas, 0.179.

### 2.2.2 Observacions de Poisson

El paràmetre  $nconv$  s'obté de preguntar als estudiants quantes convocatòries han necessitat per superar cadascuna de les assignatures de matemàtiques. Suposarem que les observacions segueixen una distribució de poisson ja que sembla la més adient per a representar-les. Pendrem una distribució  $gamma(r, v)$  com a distribució a priori, obtindrem com a posteriori una distribució  $gamma(r', v')$  ja que són famílies conjugades. Es pot comprovar de la mateixa forma que ho hem fet amb les distribucions binomial i beta.

Igual que s'ha fet per estimar els dos paràmetres anteriors, escollim la mitjana i la desviació que creiem adients pel paràmetre, substituïrem aquests dos valors en les fórmules següents per obtenir els valors de  $r$  i  $v$  de la nostra probabilitat a priori:

$$m = \frac{r}{v} \quad , \quad s = \frac{r}{v^2} \quad .$$

En aquest cas hem de tenir en compte un detall més, la mida de la mostra equivalent de la distribució a priori, aquesta no es pot apropar al nombre d'observacions realitzades ja que, en aquest cas, tindria un pes equivalent a les observacions realitzades i això tindria un efecte perturbador en la distribució a posteriori.

En una  $gamma(r, v)$ ,  $v$  representa el nombre d'observacions i  $r$  el sumatori de dites observacions, per tant  $n_{eq} = v$ . Sempre intentarem que  $n_{eq} < \frac{n}{2}$  per tal de no donar un excés d'informació amb la distribució a priori.

Un cop fetes les  $n$  observacions, la distribució a posteriori serà una  $gamma(r', v')$  on  $r' = r + \sum_{i=1}^n (y_i)$  i  $v' = v + n$ .

Veiem un exemple, considerem que volem estimar el nombre de convocatòries que necessiten de mitjana els estudiants de informàtica de la UB per superar les assignatures de matemàtiques que es troben durant els seus estudis. Com estem considerant que les observacions segueixen una distribució de Poisson, i aquesta accepta valors naturals inclòs el 0, estudiarem el nombre de vegades que repeteixen l'assignatura. Suposarem que hem fet 40 observacions i agafarem dos possibles probabilitats a priori per veure que, en aquest cas, l'elecció tampoc tindrà una gran influència si obtenim un  $n_{eq}$  adequat.

Per una banda elegim una mitjana de 0.8 i una desviació de 0.15, aplicant les fórmules anteriors obtenim  $r = 28.44$  i  $v = 35.55$ , veiem la distribució a la figura 2.4 en negre. D'altra banda escollim una mitjana de 1.1 i una desviació de 0.6, pensant que hi ha molta diferència entre els diferents estudiants. En aquest cas obtenim  $r = 3.36$  i  $v = 3.06$ , veiem la distribució a la figura 2.4 en vermell. Com podem observar, la primera de les opcions no és adequada ja que  $n_{eq} = 35.55$  i  $n = 40$ . Comprovem que això provoca que les distribucions a posteriori siguin força diferents.

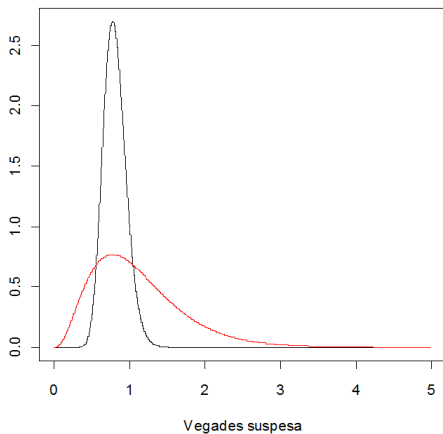


Figura 2.4: Comparació a priori

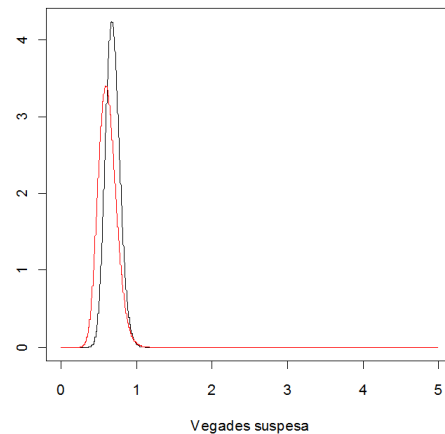


Figura 2.5: Comparació a posteriori

Suposem que les 40 observacions són: 22 estudiants no han suspès cap vegada, 14 estudiants han suspès una vegada, 3 han suspès dues vegades i 1 estudiant ha suspès tres vegades. Obtenim, en el primer cas,  $r' = 51.44$  i  $v' = 75.55$ , i en el segon,  $r' = 26.36$  i  $v' = 43.06$ . La representació d'aquestes distribucions la veiem en la figura 2.5. Com podem observar, l'elevat valor que hem obtingut per a  $n_{eq}$  en la primera opció fa que les distribucions a posteriori siguin diferents tot i que les a priori són força similars.

Per evitar-ho, augmentem al doble la desviació típica, considerem  $m = 0.8$  i  $s = 0.3$ . Llavors  $r = 7.11$  i  $v = 8.89$ , per tant ara obtenim una  $n_{eq}$  adient. A posteriori,  $r' = 30.11$  i  $v' = 48.89$ . I ara, com podem comprovar a la figura 2.6, les distribucions a posteriori són pràcticament idèntiques.

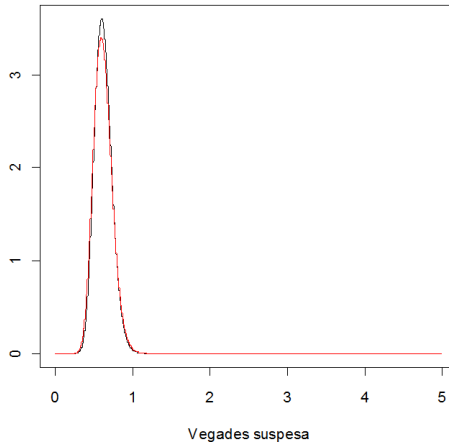


Figura 2.6: Comparació de distribucions a posteriori

### 2.2.3 Observacions multinomials

El paràmetre  $gn$  s'obté de preguntar als estudiants si creuen que seria necessària una acadèmia de matemàtiques dirigida al seu ensenyament, les possibles respostes són 'Molt', 'Força', 'Poc' i 'Gens'. Suposarem que les observacions segueixen una distribució de multinomial ja que és la més adequada per a representar aquesta situació. Com passava amb les distribucions beta i poisson, existeix una distribució conjugada a la multinomial, és la distribució Dirichlet.

Quan les nostres mostres segueixen una multinomial amb quatre possibles respostes, adjudiquem unes probabilitats  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  i  $\theta_4$  a cadascuna d'elles, amb  $\sum_{i=1}^4 \theta_i = 1$ . Llavors, la distribució a priori serà una  $Dirichlet(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  on  $\alpha_i = k\theta_i$ ,  $k$  serà un valor pro-

porcional al nombre d'observacions realitzades, segons el pes que vulguem donar-li a la distribució a priori.

Al realitzar les observacions, si considerem que  $n_1, n_2, n_3$  i  $n_4$  són la quantitat de respostes de cada tipus, obtenim una *Dirichlet*( $\alpha_1 + n_1, \alpha_2 + n_2, \alpha_3 + n_3, \alpha_4 + n_4$ ) com a distribució a posteriori. Es pot comprovar de la mateixa forma que s'ha fet amb les observacions binomials.

Igual que en els casos anteriors, l'elecció de les probabilitats a priori no tindrà molta influència en la distribució a posteriori resultant i els adjudicarem en funció del nombre d'acadèmies que ofereixen cursos per l'ensenyament.

A l'hora d'introduir aquesta dada al programa, necessitem un número entre 0 i 1, on 0 representa que la necessitat de l'acadèmia és mínima i 1 que és màxima. Per obtenir aquest valor, necessitem la probabilitat a posteriori de cada resposta, per calcular-les farem servir la fórmula següent:

$$P_{\Lambda}^i(x) = \frac{\alpha_i + n_i}{\sum_{i=1}^4 (\alpha_i + n_i)} = \frac{\alpha_i + n_i}{\sum_{i=1}^4 \alpha_i + n} .$$

Llavors,

$$gc = \sum_{i=1}^4 \frac{(i-1)P_{\Lambda}^i(x)}{3} .$$



## Capítol 3

# PROGRAMA INFORMÀTIC

A l'hora d'implementar el programa informàtic que ens permetrà saber quin ensenyament té més necessitat d'una acadèmia i quina seria la localització d'aquesta, farem servir Java. Aquest llenguatge de programació ens permet la creació de classes d'una forma senzilla, la utilització d'aquestes ens facilitarà l'elaboració del codi.

### 3.1 Plantejament

Les tres classes que es faran servir són les classes Grau, Facultat i Posicio.

La classe Grau està formada pels constructors, els mètodes per obtenir les estimacions dels paràmetres i la puntuació, i les dades següents:

- Tres enters que determinen el nombre d'assignatures de matemàtiques que hi ha a l'ensenyament, el nombre d'acadèmies que les imparteixen i el nombre d'observacions que s'han realitzat per estimar els paràmetres.
- Dos nombres reals que mostren la mitjana d'alumnes matriculats i suspesos en les assignatures de matemàtiques de l'ensenyament.
- Dos enters que determinen el nombre de respostes afirmatives obtingudes a l'hora d'estimar l'assistència a acadèmies (assis) i el grau de coneixement de les acadèmies existents (gn).
- Quatre enters amb el nombre de respostes 'gens', 'poc', 'força' i 'molt' de les observacions fetes per estimar el grau de necessitat d'una acadèmia de matemàtiques (gn).

- Un enter amb el resultat de la suma de les observacions fetes per estimar el nombre de convocatòries (nconv).
- Una cadena de caràcters que simbolitza el tipus de ensenyament que és.

La classe Facultat consta, a banda dels constructors i del mètode per obtenir la puntuació, de 4 dades:

- Dos nombres reals que defineixen la posició exacta en el mapa.
- Un enter que mostra el nombre de graus que s'hi imparteixen.
- Un vector amb tots els graus que s'hi imparteixen.

La classe Posicio consta dels constructors, el mètode per trobar la distància entre una facultat i un punt del mapa, el mètode per trobar la puntuació de cada ubicació i de 4 dades:

- Dos nombres reals per determinar la posició.
- Un enter que mostra el nombre de facultats que hi ha.
- Un vector amb totes les facultats.

## 3.2 Models utilitzats

En el capítol anterior ja hem vist com estimar els paràmetres *assis*, *gc*, *gn* i *nconv*. Per obtenir la mitjana d'alumnes matriculats i suspesos en les assignatures de matemàtiques de cada grau, *nmat* i *nsus*, es va enviar un e-mail als diferents degans i directors de cada centre demanant dita informació. Aproximadament un 50% van facilitar les dades sol·licitades. La resta de facultats es van negar a donar-les o, simplement, no van contestar l'e-mail. Per tal d'estimar els paràmetres d'aquestes últimes, busquem dades que ens puguin ajudar a la xarxa. Ens trobem dues situacions diferents:

- a) A la pàgina web de la Universitat de Barcelona, fent la identificació, es pot accedir a una base de dades on es pot seleccionar curs, ensenyament i assignatura, i així es van poder obtenir els paràmetres *nmat* i *nsus* per a tots els ensenyaments de la UB, excepte l'Enginyeria Geològica, que no apareixia en la base de dades perquè la seva docència és compartida amb la UPC, així que s'ha d'eliminar aquest Grau d'una de les dues Universitats. El mateix passa amb el Grau d'Estadística, així que procedim de la mateixa forma.
- b) A la pàgina web de la Universitat Politècnica de Catalunya, no vam poder accedir a cap base de dades del mateix estil. Vam poder consultar les memòries dels cursos anteriors i allà vam trobar dues dades que es podien utilitzar per obtenir una aproximació dels paràmetres. Tenint el nombre d'estudiants nous de cada curs i la taxa d'èxit de la fase selectiva, on se solen trobar la gran majoria de les assignatures de matemàtiques, resollem el sistema següent per obtenir l'aproximació:

$$\begin{cases} \frac{\%exit}{100} nmat = nsus \\ nmat = nsus + nous \end{cases}$$

El resultat es mostra en la figura 3.1. Les dades marcades en color groc corresponen a les dades estimades.

### 3.2.1 Puntuacions

Els paràmetres seran utilitzats per obtenir la puntuació de cada ensenyament, de cada facultat i de cada posició del mapa de Barcelona.

- La puntuació dels ensenyaments s'obté d'una forma diferent en funció del nombre d'acadèmies, ja que si un ensenyament no té acadèmies que ofereixin els seus cursos,

| UB                                         | nmat   | nsus     | nas |
|--------------------------------------------|--------|----------|-----|
| <b>FISICA</b>                              |        |          |     |
| Física                                     | 307.0  | 136.5    | 6   |
| Electrònica de Telecomunicacions           | 41.71  | 25.66    | 6   |
| <b>ECONOMIA I EMPRESA</b>                  |        |          |     |
| Sociologia                                 | 167.67 | 52.33    | 2   |
| ADE                                        | 1516.5 | 569.17   | 5   |
| Economia                                   | 436    | 164.17   | 4   |
| Estadística                                | 41.3   | 17.67    | 15  |
| <b>MATEMÀTIQUES</b>                        |        |          |     |
| Matemàtiques                               | 90.95  | 36.9     | 27  |
| Informàtica                                | 84.875 | 43       | 4   |
| <b>BIOLOGIA</b>                            |        |          |     |
| Biologia                                   | 271    | 119.8333 | 2   |
| Ciències ambientals                        | 137    | 57.875   | 2   |
| Bioquímica                                 | 73.125 | 17.5     | 2   |
| Bioteχνologia                              | 96.375 | 22       | 2   |
| <b>GEOLOGIA</b>                            |        |          |     |
| Geologia                                   | 79.75  | 30.75    | 1   |
| <b>QUÍMICA</b>                             |        |          |     |
| Química                                    | 322.5  | 132.25   | 1   |
| Enginyeria Química                         | 82.57  | 40.03    | 4   |
| Enginyeria de Materials                    | 49.83  | 28.83    | 4   |
| <b>MEDICINA HC</b>                         |        |          |     |
| Enginyeria Biomèdica                       | 63.55  | 26.42    | 4   |
| Ciències biomèdiques                       | 69.75  | 6.5      | 2   |
| <b>UPF</b>                                 |        |          |     |
| <b>CIÈNCIES ECONÒMIQUES I EMPRESARIALS</b> |        |          |     |
| ADE                                        | 194.08 | 14.67    | 5   |
| CCEE-Management                            | 192.8  | 35.96    | 4   |
| Economia                                   | 162.38 | 19.85    | 5   |
| IBE                                        | 94.11  | 9.50     | 5   |
| <b>POLITÉCNICA</b>                         |        |          |     |
| Informàtica                                | 91.27  | 55.91    | 5   |
| Telemàtica                                 | 68.82  | 40.45    | 5   |
| Sistemes audiovisuals                      | 76.31  | 37.08    | 5   |
| Enginyeria Biomèdica                       | 57.66  | 17       | 3   |

| UPC                                                  | nmat   | nsus   | nas |
|------------------------------------------------------|--------|--------|-----|
| <b>ETSAB</b>                                         |        |        |     |
| Arquitectura                                         | 395.05 | 112.2  | 2   |
| <b>EPSEB</b>                                         |        |        |     |
| Enginyeria en Ciències i Tecnologies de l'Edificació | 543.62 | 221.37 | 2   |
| Enginyeria Geomàtica i Topogràfica                   | 67.33  | 27.60  | 4   |
| <b>FIB</b>                                           |        |        |     |
| Enginyeria Informàtica                               | 456.33 | 224.92 | 4   |
| <b>MATEMÀTIQUES</b>                                  |        |        |     |
| Matemàtiques                                         | 48.64  | 11.38  | 21  |
| <b>ETSECCPB</b>                                      |        |        |     |
| Enginyeria Civil                                     | 231.16 | 96.16  | 7   |
| Enginyeria de la Construcció                         | 281.77 | 113.27 | 6   |
| Enginyeria Geològica                                 | 133.43 | 85.93  | 6   |
| <b>ETSETB</b>                                        |        |        |     |
| Enginyeria en Tecnologies de les Telecomunicacions   | 138.70 | 55.20  | 5   |
| Enginyeria de Sistemes Audiovisuals                  | 103.29 | 59.29  | 5   |
| Enginyeria de Sistemes de Telecomunicacions          | 154.14 | 72.14  | 5   |
| Enginyeria de Sistemes Electrònics                   | 146.32 | 70.82  | 5   |
| Enginyeria Telemàtica                                | 128.90 | 66.90  | 5   |
| Enginyeria Física                                    | 59.64  | 16.64  | 8   |
| <b>ETSEIB</b>                                        |        |        |     |
| Enginyeria de Materials                              | 43.11  | 24.22  | 6   |
| Enginyeria Tecnologia Industrial                     | 585.45 | 103.1  | 7   |
| Enginyeria Química                                   | 83.63  | 36.1   | 6   |
| <b>EUETIB</b>                                        |        |        |     |
| Biomèdica                                            | 80.98  | 25.98  | 4   |
| De l'energia                                         | 78.79  | 16.79  | 4   |
| Elèctrica                                            | 193.65 | 85.65  | 4   |
| Electrònica Industrial i automàtica                  | 196.55 | 66.55  | 4   |
| Mecànica                                             | 309.96 | 88.96  | 4   |
| Química                                              | 88.2   | 25.20  | 4   |
| <b>NAUTICA</b>                                       |        |        |     |
| Enginyeria en Sistemes Navals                        | 102.80 | 40.30  | 4   |
| Enginyeria Marina                                    | 70.96  | 38.46  | 3   |
| Enginyeria Nautica i de Transports Marítims          | 54.10  | 8.60   | 2   |

Figura 3.1: Resultats de les mitjanes del nombre d'alumnes suspesos i matriculats a les assignatures de matemàtiques de cada Grau

no té sentit tenir en compte els seus paràmetres assis i gc. Això crea la necessitat de l'elaboració d'un nou mètode que calculi la mitjana d'assistència a acadèmies de la resta d'ensenyaments, l'anomenem  $a$ . Llavors la funció puntuació per a cada grau  $G$  serà:

$$P_G = \begin{cases} \frac{nas * nsus * assis * gn * nconv}{1 + nac * gc} & \text{si } nac \neq 0 \\ nas * nsus * a * gn * nconv & \text{si } nac = 0 \end{cases}$$

Aquesta funció és adequada per al nostre estudi. El fet que hi hagi més acadèmies i un coneixement més elevat de les mateixes fa disminuir la puntuació. Els paràmetres  $a$ ,  $assis$  i  $gn$  prenen valors entre 0 i 1, i com més propers siguin a 1, proporcionen una puntuació més elevada a l'ensenyament. El paràmetre  $nconv$  és un valor real més gran o igual que 1 i és directament proporcional al valor de la puntuació.

- Cada facultat disposarà d'un vector amb els graus que s'hi imparteixen. La puntuació de la facultat s'obté amb el sumatori de les puntuacions de cadascun d'ells, és a dir, per a cada  $k = 1, \dots, nfac$

$$P_F(k) = \sum_{i=1}^{n_{\text{graus}}(k)} P_G(i)$$

- La puntuació de cada ubicació del mapa s'obté a partir de les puntuacions de cada facultat i de la distància entre la ubicació i cadascuna d'elles

$$Punt(Pos) = \sum_{k=1}^{n_{\text{fac}}} \frac{P_F(k)}{1 + \text{Dist}(Pos_F(k), Pos)}$$

on  $P_F(k)$  i  $Pos_F(k)$  són la puntuació i les coordenades de la k-èsima facultat i  $Pos$  són les cordenades del punt del mapa. En el denominador del sumatori incrementem en 1 la distància per evitar que, en les ubicacions molt properes a les universitats, el denominador sigui menor que 1, cosa que provocaria un augment no desitjat de la puntuació de dita facultat en el sumatori.

El model que s'utilitzarà per a calcular la distància entre la facultat i cada punt del mapa el veurem en l'apartat següent.

### 3.2.2 Distàncies

Aquest és un dels punts més crítics a l'hora d'establir el model. És per això que, a partir d'aquest moment el treball es dividirà en dues parts.

D'una banda utilitzarem les coordenades geogràfiques. Aquestes coordenades ens facilitaran ubicar més exactament les facultats en el mapa i, gràcies a elles podrem calcular amb exactitud la distància entre dos punts de la Terra. Serien les coordenades a utilitzar si l'objectiu fos determinar la ubicació idònia per a l'acadèmia en una regió més gran, com per exemple, a Espanya o a Europa.

D'altra banda, ho farem utilitzant les coordenades cartesianes, recolzant-nos en les coordenades geogràfiques per establir la nostra referència. D'aquesta forma no hi haurà diferència al calcular la distància entre dos punts d'una forma o d'una altra.

#### Coordenades geogràfiques

La latitud i la longitud de cada facultat s'obtenen a través d'una pàgina web on, introduint una direcció, retorna les coordenades geogràfiques utilitzant Google Maps. Seleccionem una àrea que contingui la ciutat de Barcelona i determinem quines són la latitud i la longitud màximes i mínimes. Observant la figura 3.2 extreta de Google Earth, sembla adequat considerar  $lat_m = 41.37^\circ$ ,  $lat_M = 41.43^\circ$ ,  $long_m = 2.1^\circ$  i  $long_M = 2.2^\circ$ .

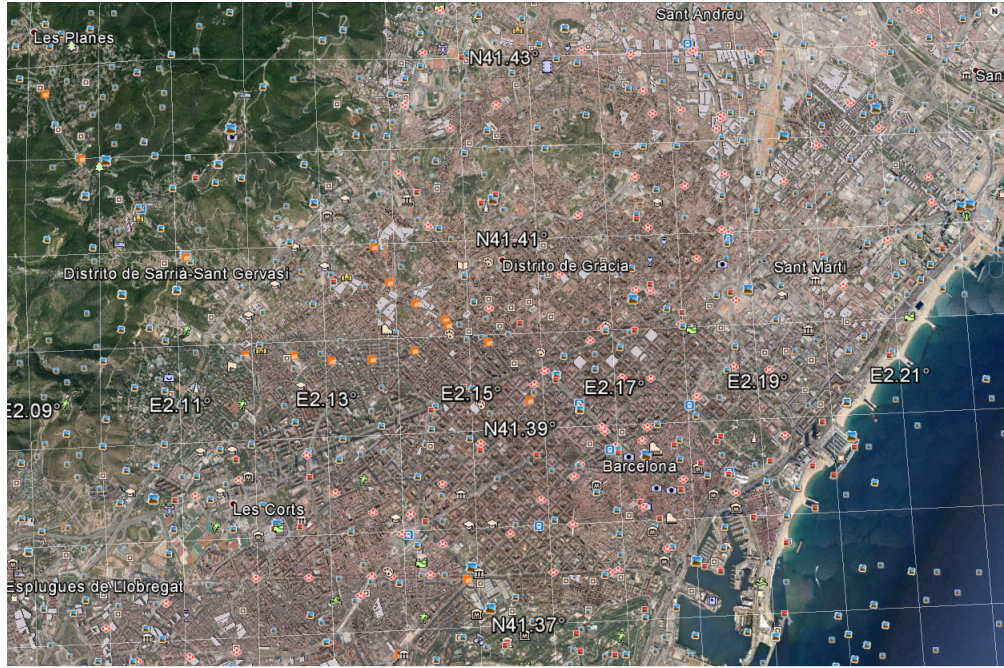


Figura 3.2: Coordenades geogràfiques de la ciutat de Barcelona

Dividirem aquesta àrea de la forma més uniforme possible, l'objectiu és que la distància entre una ubicació on calculem la Puntuació i la següent sigui sempre la mateixa. Per tant, prendrem 600 latituds i 1000 longituds possibles, així la diferència entre ubicacions confrontants serà de  $0.0001^\circ$ .

Per tal de calcular la puntuació de cada posició del mapa necessitem la distància amb cadascuna de les facultats, per tant necessitem un mètode que calculi la distància entre dos punts expressats en coordenades geogràfiques, l'anomenarem *Dist*. En primer lloc veiem com es realitza aquest càlcul.

Fem el canvi de coordenades següent per a  $i = 1, 2$ :

$$\begin{cases} x_i = r \cos \theta_i \cos \varphi_i \\ y_i = r \cos \theta_i \sin \varphi_i \\ z_i = r \sin \theta_i \end{cases} .$$

Per tal de calcular la longitud d'arc, necessitem l'angle que formen els dos punts des de l'origen, per tant, si considerem els punts  $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , podem calcular l'angle utilitzant que

$$\cos \Phi = \frac{p_1 \cdot p_2}{|p_1| \cdot |p_2|} .$$

Observem que,

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= r^2 (\cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 + \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r^2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2) . \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\cos \Phi &= \frac{r^2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{r^2} \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 .\end{aligned}$$

Llavors,

$$Dist(p_1, p_2) = r \cdot \arccos(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)$$

on  $r$  és el radi de la Terra.

### Coordenades cartesianes

Per tal d'establir una referència en el nostre mapa en coordenades cartesianes, utilitzem les coordenades geogràfiques i la funció de càlcul de distància vista en l'apartat anterior. És a dir, prenem com a origen (0,0) el punt on s'ha considerat la latitud i longitud mínimes. Per tal de determinar la posició  $(x_k, y_k)$  de cada facultat,  $x_k$  és la distància en l'eix de les X entre l'origen i la facultat, i  $y_k$  és la distància en l'eix Y entre l'origen i la facultat. Així mateix, determinem els valors de  $x_{max}$  i  $y_{max}$ . Un resultat aproximat de la referència presa es mostra en la figura 3.3.

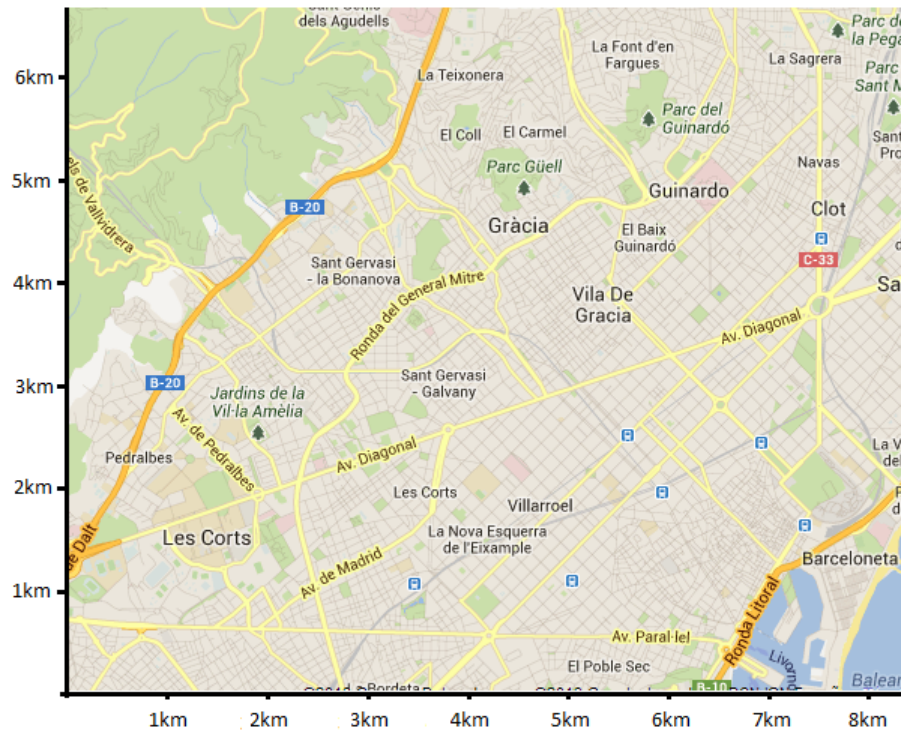


Figura 3.3: Coordenades cartesianes de la ciutat de Barcelona

Un cop obtingudes les coordenades cartesianes, la distància entre un punt del mapa i una facultat és la distància euclidiana entre els dos punts.

Com hem comentat amb anterioritat, en el cas que ens ocupa, el fet de treballar amb coordenades cartesianes no afectarà en excés al resultat obtingut. A més, ens permeten utilitzar amb més facilitat el mètode de Newton, per trobar el màxim de la funció amb més exactitud.

### 3.2.3 Cerca del màxim

Utilitzem el mètode de Newton per trobar amb exactitud la ubicació amb més puntuació. Per això, definim la funció  $Punt$  que depèn de les coordenades  $x$  i  $y$  de la posició:

$$Punt(x, y) = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{P_F(k)}{1 + \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}} .$$

Les derivades parcials de la qual són:

$$Punt_x(x, y) = \frac{\partial Punt(x, y)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{-P_F(k)(x - x_k)}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} (1 + \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2})^2}$$

$$Punt_y(x, y) = \frac{\partial Punt(x, y)}{\partial y} = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{-P_F(k)(y - y_k)}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} (1 + \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2})^2} .$$

Observem que els denominadors de les derivades respecte  $x$  i  $y$  s'anul·len en les ubicacions de les facultats i, per tant, hem d'estudiar què passa en aquests punts. Com que tots els termes del sumatori són similars llevat de constants, veiem que, en la derivada respecte a  $x$  quan  $x$  tendeix a  $x_k$  i  $y$  tendeix a  $y_k$  per a un  $k$  qualsevol, el terme  $k$ -èssim del sumatori

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_k \\ y \rightarrow y_k}} \frac{-P_F(k)(x - x_k)}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} (1 + \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2})^2}$$

té una indeterminació ja que quan  $x$  tendeix a  $x_k$  s'anul·len el numerador i el denominador. El càlcul d'aquest límit és equivalent al càlcul de

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{-P_F(k)(x - x_k)}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} (1 + \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2})^2} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{-P_F(k)(x - x_k)}{(x - x_k)(1 + (x - x_k)^2)} = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{-P_F(k)}{(1 + (x - x_k)^2)} .$$

Es té,



$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_k \\ y \rightarrow y_k}} \frac{-P_F(k)(x - x_k)}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}(1 + \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2})^2} = -P_F(k) .$$

Aquest fet serà anàleg  $\forall k = 1, \dots, nfac$ .

Per tant, la funció que estem estudiant és continua i derivable  $\forall x \in \mathbb{R}$  i  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Tot i això, el que volem trobar són zeros de les derivades respecte  $x$  i respecte  $y$ . Per tal d'aplicar el mètode de Newton necessitem que les segones derivades siguin contínues. Comprovem que no és el cas:

$$P_{unt_{xx}}(x, y) = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{-P_F(k)}{D(x, y)(1 + D(x, y))^2} + \frac{P_F(k)(x - x_k)^2(3D(x, y) + 4 + \frac{1}{D(x, y)})}{[D(x, y)(1 + D(x, y)^2)]^2}$$

on  $D(x, y) = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$ .

El denominador de la primera part del sumatori s'anul·la quan  $x = x_k$  i  $y = y_k$ . Això ens obliga a considerar una funció alternativa per al càlcul de la distància per poder aplicar el mètode de Newton.

D'una banda, sembla lògic fer ús de la distància al quadrat per tal d'aconseguir que la funció sigui  $\mathcal{C}^\infty$ . El principal avantatge de l'ús d'aquesta distància és que podem comparar els resultats amb els obtinguts amb coordenades cartesianes, ja que també podem adaptar el programa i treballar amb la distància al quadrat. D'altra banda, la utilització d'aquest model també té un inconvenient important, l'increment del pes de la distància en comparació al model inicial.

Una altra possible solució al problema de la diferenciabilitat, és introduir l'1 del denominador dins de l'arrel, això també garanteix que la funció sigui  $\mathcal{C}^\infty$  i a més no s'incrementa el pes de la distància. Tot i això, aquesta modificació també té un inconvenient, no es poden contrastar els resultats amb el model en coordenades geogràfiques.

Com que cadascuna de les opcions té pros i contres, es faran servir diversos models, i en compararem els resultats. Seran utilitzats quatre models diferents, segons les coordenades utilitzades i el càlcul de la puntuació de cada ubicació.

- La distància euclidiana en coordenades geogràfiques

$$P_{unt_1}(Pos) = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{P_F(k)}{1 + Dist(Pos_F(k), Pos)} .$$

- La distància euclidean al quadrat en coordenades cartesianes i geogràfiques

$$P_{unt_2}(Pos) = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{P_F(k)}{1 + [Dist(Pos_F(k), Pos)]^2} .$$

- La funció alternativa de distància en coordenades cartesianes

$$Punt_3(Pos) = \sum_{k=1}^{nfac} \frac{P_F(k)}{\sqrt{1 + [Dist(Pos_F(k), Pos)]^2}}.$$

### Mètode de Newton

El programa ens dona el punt  $(x_0, y_0)$  amb més puntuació dels 600.000 on avaluem la funció. Aquest és el punt que utilitzarem com a aproximació inicial per aplicar el mètode de Newton.

L'objectiu és trobar un punt on  $F_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq 0$  i  $F_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \simeq 0$ . Aplicarem el mètode fins a aconseguir-ho:

$$\begin{pmatrix} F_{xx}(x_i, y_i) & F_{xy}(x_i, y_i) \\ F_{xy}(x_i, y_i) & F_{yy}(x_i, y_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_i, y_i) \\ F_y(x_i, y_i) \end{pmatrix}.$$

A l'hora d'introduir-ho al programa necessitem una forma directa d'obtenir  $x_{i+1}$  i  $y_{i+1}$  a partir de  $x_i, y_i$  i les derivades corresponents. Fent els càlculs pertinents obtenim:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{F_x(x_i, y_i)F_{yy}(x_i, y_i) - F_y(x_i, y_i)F_{xy}(x_i, y_i)}{F_{xy}(x_i, y_i)^2 + F_{xx}(x_i, y_i)F_{yy}(x_i, y_i)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{F_y(x_i, y_i)F_{xx}(x_i, y_i) - F_x(x_i, y_i)F_{xy}(x_i, y_i)}{F_{xy}(x_i, y_i)^2 + F_{xx}(x_i, y_i)F_{yy}(x_i, y_i)}.$$

El programa utilitzarà aquest mètode fins a trobar un punt  $(x_k, y_k)$  on  $F_x(x_k, y_k) < 10^{-10}$  i  $F_y(x_k, y_k) < 10^{-10}$  per a cadascun dels models en coordenades cartesianes.

### 3.3 Resultats

La taula següent mostra les puntuacions obtingudes de cada centre i la seva ubicació:

| CENTRE                                   | PUNTUACIÓ  | X      | Y      |
|------------------------------------------|------------|--------|--------|
| Economia i Empresa UB                    | 305.023010 | 0.9721 | 1.6770 |
| ETSETB                                   | 299.373518 | 0.9931 | 2.0367 |
| ETSECCPB                                 | 171.934870 | 0.8884 | 2.0196 |
| Matemàtiques UB                          | 149.052591 | 5.3343 | 1.8529 |
| Escola Superior Politècnica UPF          | 86.285391  | 7.8652 | 3.6658 |
| EPSEB                                    | 56.190189  | 1.0625 | 1.5283 |
| FIB                                      | 50.307810  | 1.1118 | 2.1587 |
| ETSEIB                                   | 46.628181  | 1.2723 | 1.6539 |
| Química UB                               | 45.435367  | 1.5479 | 1.6023 |
| EUETIB                                   | 45.106285  | 4.1851 | 2.0514 |
| Geologia UB                              | 43.206983  | 1.5793 | 1.5118 |
| Física UB                                | 42.8956    | 1.2848 | 1.6371 |
| FNB                                      | 36.915228  | 7.0235 | 1.3518 |
| Biologia UB                              | 34.850691  | 1.6486 | 1.7845 |
| FME                                      | 23.7363    | 1.3198 | 1.4978 |
| Ciències Econòmiques i Empresariales UPF | 15.574088  | 7.6273 | 2.1777 |
| ETSAB                                    | 8.673525   | 1.1715 | 1.5640 |
| Medicina UB                              | 3.624213   | 4.4444 | 2.2388 |

Per tal de representar d'alguna forma el total dels resultats obtinguts utilitzem el *gnuplot*. Aquest programa ens permet representar funcions de dues variables, en el nostre cas les variables són les coordenades  $x$  i  $y$  de cada posició. Introduïm les funcions de puntuació que utilitzen coordenades cartesianes usant els valors de les puntuacions i les coordenades  $x$  i  $y$  de cada facultat que ens ha retornat el programa. El *gnuplot* ens retorna la representació de la funció en l'interval desitjat en una escala de colors. Aquesta representació la sobreposem al mapa de coordenades cartesianes de la Figura 3.3 i el resultat es mostra en les Figures 3.4 i 3.5.

Per a cadascun dels models utilitzats hem trobat una ubicació idònia diferent, però totes són molt properes, això és degut, molt probablement, a la gran quantitat de facultats ubicades a Zona Universitària.

La taula següent mostra els resultats de dites ubicacions per a cadascun dels models, les coordenades de la ubicació estan passades a coordenades geogràfiques amb el sistema de referència vist en l'apartat 3.2.2 per tal de poder comparar els resultats:

|              | DISTÀNCIA                                  | LAT      | LONG     | PUNTUACIÓ |
|--------------|--------------------------------------------|----------|----------|-----------|
| Coordenades  | Euclidiana                                 | 41.388   | 2.112    | 982.716   |
| Geogràfiques | Euclidiana al quadrat                      | 41.386   | 2.113    | 1084.066  |
| Coordenades  | Euclidiana al quadrat                      | 41.38651 | 2.112625 | 1058.692  |
| Cartesianes  | $\sqrt{1 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ | 41.38649 | 2.112848 | 1153.549  |

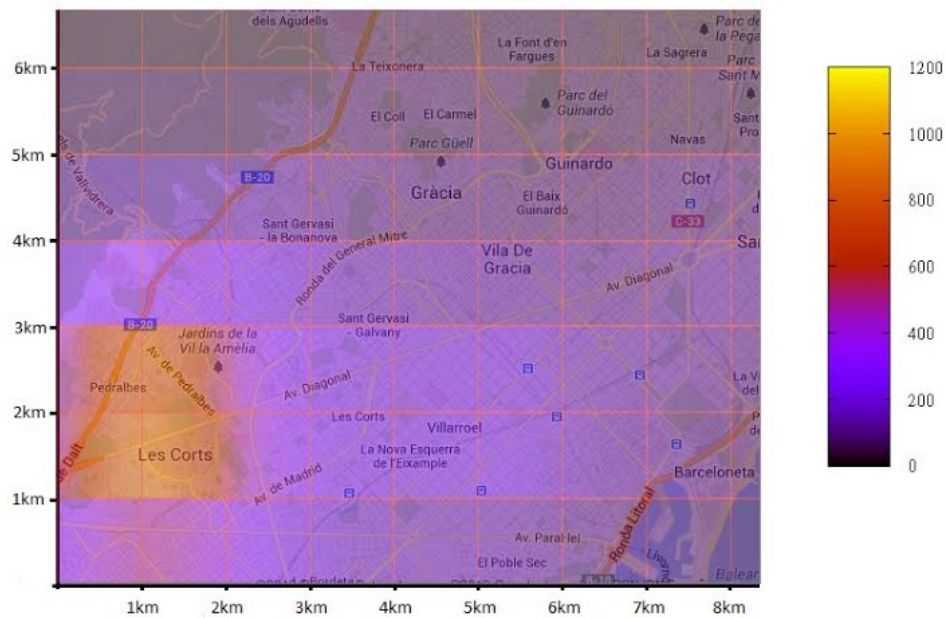


Figura 3.4: Distància euclidiana al quadrat



Figura 3.5: Distància alternativa

La Figura 3.6 mostra, en una imatge extreta de Google Earth, la zona de Barcelona on es troben les ubicacions obtingudes en cadascun dels models. Aquesta ubicació es troba just al mig de Zona Universitària, i, en aquesta zona, és on està situada l'acadèmia Sol, la més exitosa de les acadèmies que hem tingut en compte en el treball.

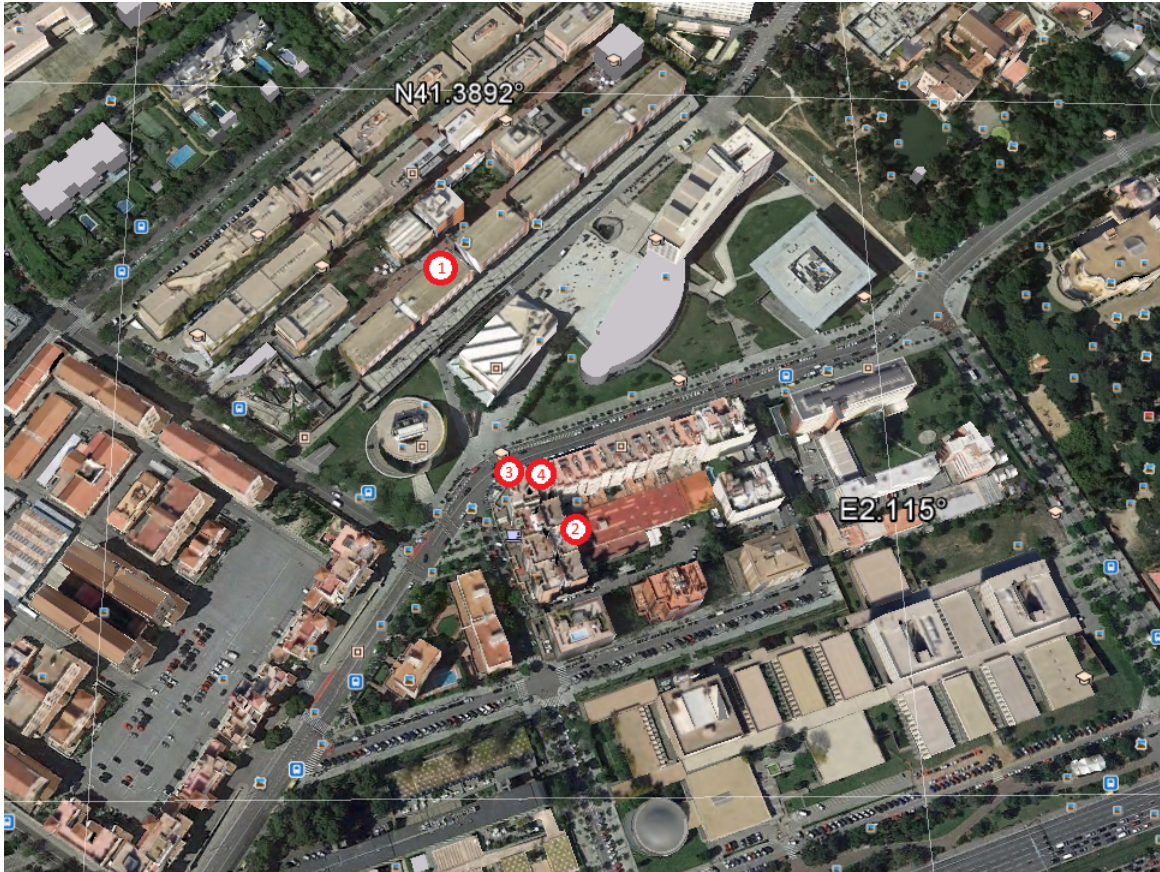


Figura 3.6: Ubicació òptima

Ara suposem que trobem dos locals on podem ubicar l'acadèmia. El primer d'ells està situat en un punt molt proper a la localització idònia de l'acadèmia (latitud 41.3885 i longitud 2.1132). L'altre està situat a latitud 41.3812 i longitud 2.1391, a la zona de Sants. Per decidir a quines facultats aniria dirigida l'acadèmia en cadascun dels dos casos, introduïm les ubicacions al programa i li demanem que ens retorni la puntuació desglossada per facultats. Ho fem utilitzant el model que utilitza coordenades geogràfiques i la distància euclidiana. El resultat es mostra en la taula següent:



| FACULTAT                                | PUNTUACIÓ 1    | PUNTUACIÓ 2   |
|-----------------------------------------|----------------|---------------|
| Economia i Empresa UB                   | <b>217.647</b> | <b>91.584</b> |
| ETSETB                                  | <b>269.635</b> | <b>87.968</b> |
| ETSECCPB                                | <b>141.362</b> | <b>49.168</b> |
| Matemàtiques UB                         | 28.464         | <b>47.193</b> |
| Escola Superior Politècnica UPF         | 10.854         | 13.920        |
| EPSEB                                   | <b>36.719</b>  | 17.461        |
| FIB                                     | <b>45.645</b>  | 15.078        |
| ETSEIB                                  | 32.428         | 15.381        |
| Química UB                              | 27.752         | 16.514        |
| EUETIB                                  | 11.048         | <b>20.275</b> |
| Geologia UB                             | 25.048         | 15.978        |
| Física UB                               | 29.416         | 14.223        |
| FNB                                     | 22.547         | 13.417        |
| Biologia UB                             | 21.632         | 12.901        |
| FME                                     | 14.831         | 8.022         |
| Ciències Econòmiques i Empresarials UPF | 2.069          | 2.851         |
| ETSAB                                   | 5.790          | 2.784         |
| Medicina UB                             | 0.834          | 1.424         |

A l'hora de decidir de quina assignatura farem la programació didàctica, utilitzem el programa per obtenir l'ensenyament amb més puntuació. El resultat és Administració i Direcció d'Empreses de la facultat d'Economia i Empresa de la Universitat de Barcelona amb 237.7949 punts. I, per tant, es farà la programació didàctica sobre una de les assignatures de matemàtiques d'aquest ensenyament.

## Capítol 4

# PROGRAMACIÓ DIDÀCTICA: MATEMÀTIQUES I

### 4.1 Motivació

L'elecció de Matemàtiques I del Grau d'Administració i Direcció d'Empreses de la Universitat de Barcelona per a fer la programació didàctica ha vingut motivada per part del treball realitzat prèviament. Aquest és l'ensenyament en què es matriculen més alumnes i, a més, és un dels estudis on hi ha més dificultats per superar les assignatures de Matemàtiques.

Consultant la memòria del curs 2011-12 de l'ensenyament, observem que hi ha 1.055 nous estudiants. En referència a la via d'accés, la memòria reflecteix el següent: *"Pel que fa al perfil dels estudiants de nou accés un 72% provenen de batxillerat, mentre que un 21% són estudiants de cicles formatius de Grau Superior o FP II, un 3% accedeixen per majors de 25 anys, un 4% per estudiants de segona carrera i un 0,10% per la via d'estudiants de majors de 40 anys.* Per tant, és molt probable que, un de cada quatre estudiants no tinguin els conceptes previs necessaris per afrontar l'assignatura amb garanties d'èxit, de manera que el curs que s'ofereix va dirigit, principalment, a aquests alumnes.

## 4.2 Objectius generals i particulars

### Objectius generals

Qualsevol disciplina que vulgui utilitzar models formals en el camp de l'aplicació, necessita l'instrumental i el rigor que el llenguatge matemàtic proporcionen. Així, és necessari conèixer les línies bàsiques del llenguatge amb l'objectiu de desenvolupar la part científica dels estudis. D'acord amb això, els objectius generals que es proposen en aquesta programació són:

- Proporcionar a l'alumnat els instruments matemàtics bàsics de la seva formació científica, per tal que pugui entendre el formalisme matemàtic i, alhora, pugui expressar-se en aquest llenguatge.
- Aconseguir que l'alumnat sigui capaç de plantejar i resoldre, en llenguatge matemàtic, els problemes de naturalesa econòmica adequats al seu nivell de formació, amb la idea que aquest nivell millori progressivament.
- Proporcionar l'instrumental matemàtic que l'alumnat requereix al llarg de la resta dels estudis.

### Objectius particulars

En finalitzar el curs, l'alumnat haurà de ser capaç de:

- Saber operar amb els objectes de l'àlgebra lineal, cosa que permet, en temes posteriors, representar relacions en què intervé més d'una variable i expressar-les ordenadament a través de vectors; també aporta instruments d'anàlisi necessaris per a l'estudi dels problemes d'optimització.
- Conèixer els conceptes fonamentals de les funcions reals i les seves propietats. L'alumnat ha de saber utilitzar les propietats de les funcions per entendre les relacions entre les variables econòmiques.
- Saber plantejar problemes en llenguatge matemàtic, saber detectar quins conceptes matemàtics intervenen en un problema, saber escollir el camí de resolució i saber interpretar-ne el resultat, distingint entre interpretació matemàtica i econòmica.



## 4.3 Continguts

### 1 Àlgebra

#### 1.1 Espai vectorial $\mathbb{R}^n$

##### 1.1.0 Conceptes previs

##### 1.1.1 Concepte

##### 1.1.2 Combinació lineal de vectors

##### 1.1.3 Dependència i independència lineal de vectors

##### 1.1.4 Sistema de generadors

##### 1.1.5 Base de l'espai vectorial. Components d'un vector en una base

##### 1.1.6 Subespai vectorial

#### 1.2 Espai euclidià. Formes quadràtiques

##### 1.2.1 Producte escalar: definició i propietats

##### 1.2.2 Norma d'un vector: definició i propietats

##### 1.2.3 Distància: definició i propietats

##### 1.2.4 Nocions topològiques bàsiques

##### 1.2.5 Formes quadràtiques: definició i classificació

### 2 Càlcul

#### 2.1 Funcions reals de $n$ variables

##### 2.1.0 Conceptes previs

##### 2.1.1 Concepte, domini i corbes de nivell

##### 2.1.2 Derivades parcials i direccionals. Vector gradient. Marginalitat

##### 2.1.3 Funció diferenciable. Hiperplà tangent

##### 2.1.4 Derivació de funcions compostes i implícites

##### 2.1.5 Derivació successiva. Matriu hessiana

##### 2.1.6 Funcions homogènies

#### 2.2 Optimització sense restriccions

##### 2.2.1 Concepte d'òptim local i global. Teorema de Weierstrass

##### 2.2.2 Condició necessària i suficient d'optimitat local

##### 2.2.3 Optimització convexa

##### 2.2.4 Aplicacions econòmiques: problemes d'optimització

## 4.4 Contribució a l'assoliment de les competències bàsiques

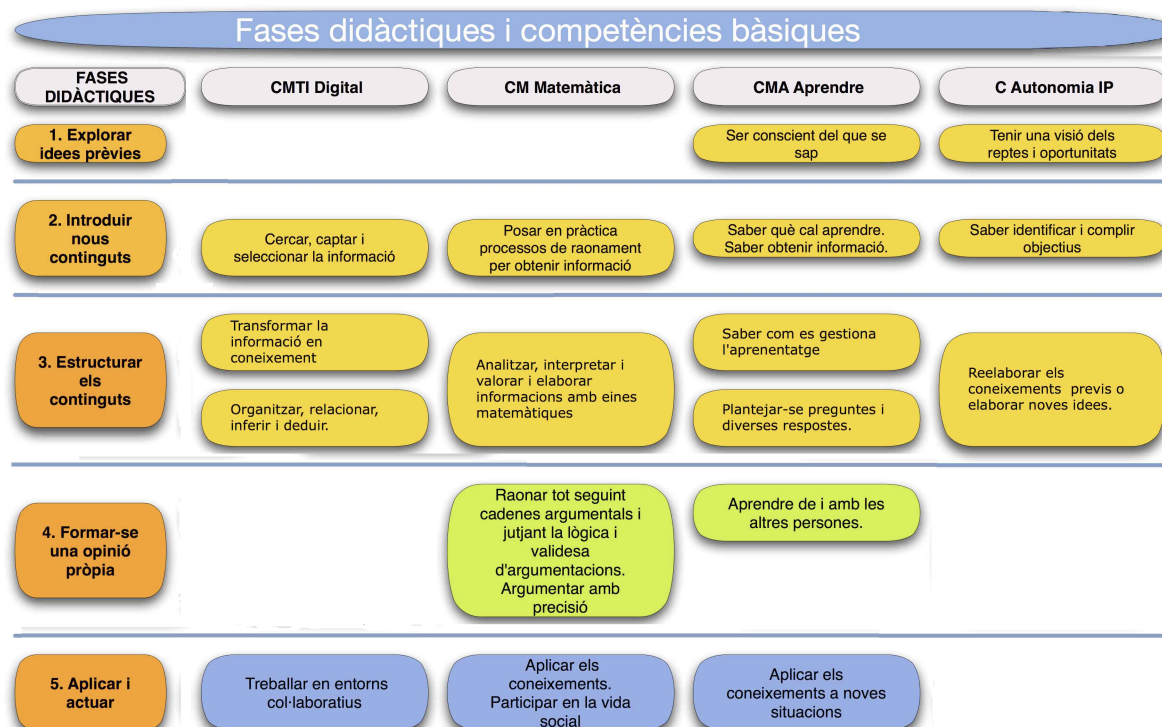


Figura 4.1: Competències bàsiques

## 4.5 Seqüència d'activitats

Aquest curs té una durada de tretze setmanes, amb tres hores de classe cadascuna dividides en dues sessions d'una hora i mitja, és a dir, en total disposem de trenta-nou hores. L'assignatura s'estructura en quatre temes, dividits en dos blocs.

Com hem esmentat anteriorment, la majoria dels alumnes que realitzin aquest curs són alumnes amb dificultats per entendre les matemàtiques, ja sigui per una falta d'assoliment dels coneixements previs, o bé perquè han accedit a la universitat a través d'una via alternativa a la usual i, per tant, no tenen els coneixements necessaris per superar l'assignatura.

Així doncs, abans de cada tema, es dedicarà el temps necessari a assegurar que s'han obtingut els aquests coneixements i es faran canvis en la planificació de la seqüència d'activitats en funció del coneixement de la matèria que el professor observi en l'alumnat.

### Tipus de sessions

- Repàs de coneixements previs: s'observarà el grau de coneixement que tenen els alumnes sobre la matèria, i a partir d'aquests, s'explicaran els conceptes bàsics necessaris per afrontar els continguts del curs. Als alumnes que presentin dificultats per assolir aquests previs en una única sessió, se'ls oferirà la possibilitat d'assistir a una segona sessió extraordinària de repàs de coneixements.
- Teòriques: s'explicaran els conceptes del curs utilitzant els exemples i recursos didàctics necessaris. A més, es proposaran alguns exercicis a resoldre per part de l'alumnat.
- Pràctiques: la majoria d'aquestes sessions aniran destinades a la resolució d'un full d'activitats entregat a la sessió anterior als alumnes. En altres ocasions el professor resoldrà directament problemes a la pissarra o proposarà problemes perquè els alumnes els resolguin en petits grups.
- Proves: es realitzaran proves per comprovar que els alumnes estan adquirint els coneixements necessaris per superar l'assignatura. La durada de la Prova 1 serà d'una hora aproximadament i la mitja hora restant es dedicarà a la seva resolució. La durada de la Prova 2 serà d'una hora i mitja i es resoldrà a la sessió següent.

Sessió 1: Sessió de repàs de coneixements previs, començant pels espais vectorials  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ , explicant les propietats bàsiques dels vectors, el concepte de combinació lineal, la dependència i independència lineal entre vectors, els sistemes de generadors, el concepte de base d'un espai vectorial i els components d'un vector en una base.

Per tal d'exemplificar els espais vectorials  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ , el professor posarà exemples reals utilitzant objectes com a vectors per aconseguir que els alumnes entenguin amb claredat els conceptes anteriors.

Sessió 2: Sessió pràctica sobre la sessió 1 per tal de veure si s'han adquirit els coneixements, i es començarà a relacionar el concepte d'independència lineal amb el de rang d'una matriu.

Sessió 3: Sessió teòrica destinada a generalitzar els conceptes vistos en els espais vectorials  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$  a l'espai vectorial  $\mathbb{R}^n$ . Es donarà el full de problemes 1 (Model 1) i es proposarà als alumnes que el resolguin abans de la classe següent.

Sessió 4: Sessió pràctica sobre el full de problemes 1.

Sessió 5: Sessió teòrica sobre subespais vectorials. És un concepte que la majoria d'alumnes no haurà vist mai, per tant s'explicarà detalladament. El professor proposarà alguns exercicis a resoldre per part dels estudiants.

Sessió 6: Sessió pràctica en què el professor resoldrà a la pissarra algun problema d'algun examen anterior. També en proposarà d'altres per tal que els alumnes el resolguin en grups.

Sessió 7: Classe de repàs sobre el producte escalar i vectorial, mòdul, angle i distància entre dos vectors i bases ortogonals i ortonormals. Es començarà a introduir el concepte de norma, relacionant-la amb la del mòdul d'un vector d' $\mathbb{R}^2$ .

Sessió 8 Sessió teòrica per introduir la topologia de l'espai euclidià, donant les definicions de bola oberta, punt interior, exterior i frontera. Es faran exemples en  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ .

Sessió 9: Sessió teòrica on es repassaran els conceptes de bola i dels diferents tipus de punt. A continuació es donarà la definició de conjunt obert i tancat, i de conjunt acotat i compacte. Per tal que els alumnes entenguin bé aquests conceptes, el professor proposarà exemples de diversos conjunts a la pissarra i els demanarà que diguin de quin tipus són. Al final de la classe es donarà el full de problemes 2 (Model 2) i es proposaran alguns problemes a resoldre.

Sessió 10: Sessió pràctica sobre el full de problemes 2.

Sessió 11: Sessió teòrica sobre formes quadràtiques. Es resoldrà un problema de formes quadràtiques d'algun examen anterior.

Sessió 12: Prova 1 (Model 3).

Sessió 13: Classe de repàs de funcions d'una variable: domini, asímptotes, extrems relatius, representació de funcions d'una variable, continuïtat i derivabilitat.

Sessió 14: Sessió teòrica dedicada a donar tots els conceptes necessaris per poder treballar amb funcions escalars: definició, domini, càlcul de límits i continuïtat. Per tal de poder representar les corbes de nivell d'una funció, el professor recordarà com s'expressa una circumferència de radi  $r$  i centre  $(a, b, c)$  de forma matemàtica. A continuació dibuixarà les corbes de nivell d'una funció  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . El professor repartirà el full de problemes 3 (Model 4) i en proposarà alguns d'ells als alumnes.

Sessió 15: Sessió pràctica sobre la primera part del full de problemes 3.

Sessió 16: Sessió teòrica en què el professor escriurà a la pissarra la definició de derivada d'una funció d'una variable i n'explicarà la seva interpretació geomètrica. A continuació hi haurà una breu explicació que justifiqui perquè no es pot fer de la mateixa forma quan el conjunt d'entrada no és  $\mathbb{R}$ . La resta de la sessió es dedicarà a donar la definició i explicar com es calculen les derivades parcials i direccionals, donant la seva interpretació geomètrica.

Sessió 17: Sessió teòrica amb exemples sobre les aplicacions econòmiques de les derivades parcials: la marginalitat i l'elasticitat. També es donarà la definició del vector gradient.

Sessió 18: Sessió pràctica en què el professor resoldrà a la pissarra algun problema d'algun examen anterior. També en proposarà d'altres relacionats amb l'àmbit econòmic per tal que els alumnes els resolguin en grups.

Sessió 19: Sessió teòrica sobre funcions diferenciables i hiperplans tangents d'una funció en un punt. S'utilitzaran paral·lelismes amb la recta tangent per tal de facilitar-ne l'aprenentatge. Es resoldrà algun problema relacionat d'algun examen anterior.

Sessió 20: Sessió teòrica sobre derivació de funcions compostes i implícites, matriu hessiana i funcions homogènies, amb els Teoremes d'Schwarz i d'Euler. Es proposaran alguns problemes del full de problemes 3.

Sessió 21: Sessió pràctica sobre la segona part del full de problemes 3.

Sessió 22: Sessió teòrica on es començarà a treballar l'últim tema del curs, optimització. El principal objectiu d'aquest tema és la resolució de problemes utilitzant els conceptes adquirits en el tema anterior. Es treballaran els conceptes de màxim i mínim local i absolut d'una funció i el Teorema de Weierstrass.

Sessió 23: Sessió teòrica sobre punts crítics, punts de sella, condicions suficients i necessàries de segon ordre per a l'existència d'òptims locals, funcions convexes, còncaves, la relació amb la matriu hessiana i el Teorema local-global. Es repartirà el full de problemes 4 (Model 5) i es proposarà als alumnes la seva resolució.

Sessió 24: Classe de problemes sobre el full de problemes 4 i resolució de dubtes de cara a la prova de la sessió següent.

Sessió 25 Prova 2 (Model 6).

Sessió 26: Sessió dedicada a la resolució de la prova i d'alguns problemes d'exàmens d'anys anteriors.

## 4.6 Aspectes generals de metodologia i situacions de treball

Durant aquest curs, el professor de l'acadèmia intentarà, en tot moment, avançar de forma paral·lela a la que ho fa el professor de l'assignatura. Al principi de cada sessió el professor preguntarà als alumnes pel temari que han fet a classe, quines parts s'han entès i quines no, i es dedicarà més temps en aquestes, explicant els conceptes previs quan sigui necessari per tal d'assegurar que els alumnes són capaços de seguir el fil de l'assignatura. És importantíssim que cap alumne es quedi endarrerit i, per això, s'oferirà la possibilitat d'assistir a classes extraordinàries.

En les sessions pràctiques, el professor preguntarà als alumnes si no han entès algun dels problemes que han fet a classe, per tal d'explicar-lo amb detall de forma que no quedi cap tipus de dubte.

En algunes situacions, el professor pot proposar la resolució de problemes en petits grups de 2 o 3. D'aquesta manera s'aconsegueix un doble efecte. D'una banda, els alumnes amb més dificultats poden rebre explicacions des del punt de vista d'un company, això pot ajudar-lo pel simple fet que és un punt de vista diferent al del professor. D'altra banda, l'alumne que ajuda al seu company, consolida els seus coneixements explicant-los de la forma més clara possible.

En les classes de problemes sobre un full d'activitats, el professor proposarà que els alumnes surtin a la pissarra per explicar-los. En cas que algun dels problemes hagi presentat moltes dificultats als alumnes, es parlarà de les complicacions que han tingut i, a partir d'aquí, s'aclariran els conceptes que no han acabat d'entendre en la seva resolució.

És molt important crear un vincle de confiança entre el professor i els estudiants, amb l'objectiu que cap alumne tingui cap inconvenient a l'hora de preguntar qualsevol concepte que no s'hagi entès.

Per tal de motivar l'alumnat, al principi de cada tema, el professor explicarà quina serà la utilitat dels conceptes que es treballaran en l'àmbit de l'Administració i Direcció d'Empreses.

## 4.7 Recursos didàctics

En primer lloc, és important que alguns dels alumnes del curs facilitin al professor material al qual tinguin accés a través del campus virtual de l'assignatura, com per exemple, els exàmens anteriors i els fulls de problemes de l'assignatura per tal que el professor pugui preparar els alumnes de la millor forma possible.

A més, el professor farà us dels recursos següents:

### Fulls resum d'elaboració pròpia

En algunes sessions teòriques, el professor facilitarà als alumnes un resum del temari que s'explicarà, de manera que ells podran centrar la seva atenció en les explicacions sense la necessitat d'estar prenent apunts de la pissarra.

En algunes ocasions també es dissenyaran fulls resum adaptats a les necessitats dels alumnes que mai hagin treballat amb aquells conceptes.

### Fulls de Problemes

A les sessions pràctiques es treballarà amb fulls de problemes, ja siguin els elaborats pel professor o els oficials de l'assignatura.

### Software

S'explicarà als alumnes com utilitzar algun software com pot ser el *gnuplot* per representar funcions de dues variables i poder contrastar els resultats obtinguts. Per exemple, quan cerquem punts crítics.

### Webs

El professor facilitarà algunes pàgines web on els alumnes poden practicar els continguts de la sessió, ja sigui per ampliació o per reforç.



## 4.8 Models

A continuació es mostren els models a partir dels quals es dissenyaran els fulls de problemes i les proves que es facilitaran als alumnes. La quantitat de feina que tingui l'alumnat i el temps del que disposi, determinarà el nombre de problemes que tindrà cadascun dels models.

### Model 1: Full de problemes 1

1. Troba els valors de  $a$  per als quals els vectors  $(a, 3, -2)$ ,  $(1, -a, -3)$  i  $(0, -7, -4)$  són linealment independents. Per a  $a = 1$ , formen un sistema de generadors? I una base d'  $\mathbb{R}^3$ ? Per què?
2. Prova que  $\{(-1, 0, 4, 3), (6, 5, 0, 3), (0, -2, 1, 0)\}$  és un conjunt de vectors linealment independents i troba un vector que, juntament a ells, doni lloc a una base d'  $\mathbb{R}^4$ .
3. Per a quins valors de  $k$  el conjunt  $\{(k, 0, 3), (2, -k, 5), (0, 1, k)\}$  forma una base d'  $\mathbb{R}^3$  i determina les components del punt  $(2, 1, 2)$  en aquesta base per a  $k = 0$ .
4. Demuestra que si  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  és una base d'  $\mathbb{R}^n$ , llavors  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n\}$  també ho és.

### Model 2: Full de problemes 2

1. Determina la dimensió i dona una base dels subespais vectorials següents:
  - 1)  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$
  - 2)  $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 0, 3x - t = 0, -2x + 2y + t = 0\}$
2. Determina una base, la dimensió i l'expressió analítica del subespai vectorial generat pels vectors  $(-1, 1, -1, 1)$ ,  $(0, 2, 3, 1)$ ,  $(-1, 3, 2, 2)$  i  $(-2, 4, 1, 3)$
3. Per a quins valors de  $k$  el conjunt  $\{(k, -1, 3), (0, -2k, 3), (k, 3, 0)\}$  forma una base d'  $\mathbb{R}^3$  i determina les components del punt  $(4, 4, 6)$  en aquesta base per a  $k = 1$ .
4. Siguin els vectors  $\vec{u} = (-3, 0, 4)$  i  $\vec{v} = (-1, 2, -2)$ , determina:
  - 1)  $\|\vec{u}\|$  i  $\|\vec{v}\|$
  - 2)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$
  - 3) La distància entre ells
  - 4) L'angle que formen
  - 5) Els vectors unitaris associats

5. Determina, gràficament, els punts interiors, els punts frontera i els punts exteriors de  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ . És un conjunt obert o tancat? Per què?
6. Demostra que dos vectors ortogonals són sempre linealment independents, i determina una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  en la què formin part els vectors unitaris associats als vectors ortogonals  $(-1, 3, 2)$  i  $(1, -3, 5)$ .
7. Estudia gràficament si el conjunt  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq -2, 2y - x \leq 4\}$  és obert, tancat, acotat, compacte i/o convex.

#### Model 3: Prova 1

1. Determina la dimensió i dona una base dels subespais vectorials següents:
  - a)  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x = z\}$
  - b)  $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0, 3x - 2t = 0, -x - y + t = 0\}$
2. Siguin els vectors  $(1, a, 2)$  i  $(1, 3, 4)$ :
  - a) Determina el valor de  $a$  pel qual aquests dos vectors són ortogonals.
  - b) Per a aquest valor de  $a$ , troba una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  en la què formin part els vectors unitaris associats als vectors ortogonals.
3. Sigui l'aplicació definida per  $f(x, y, z) = -5x^2 - 2y^2 - 3z^3 + 6xy + 2xz$ , troba la seva matriu associada i classifica-la segons el seu signe.
4. Determina gràficament si el conjunt  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0\}$  és acotat i compacte.

#### Model 4: Full de problemes 3

1. Determina el domini de les funcions següents:
  - a)  $f(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
  - b)  $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 - y - 1}$
2. Troba, si existeix, el límit de les funcions escalars següents:
  - a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(x^2 - y^2 - 3)$
  - b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - 3x - y + x^2 - y^2}{1 - x - y}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x - y^2}{x - 2y}$

3. Determina gràficament el domini i les corbes de nivell de la funció  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y}{x^2 - y}}$
4. Calcula les derivades parcials en el punt (0,3) de la funció

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x + y^2} & \text{si } x + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y^2 = 0 \end{cases}$$

5. Sigui  $B(x, y) = -2x^2 - 2.5y^2 + 1100x + 1300y - 70000$ , la funció de beneficis associada a la producció i venda de dos articles A i B en les quantitats de 250 i de 220 unitats calcula, de forma aproximada:
- a) L'increment dels beneficis si la producció i venda de B augmenta en 1 unitat.
  - b) L'increment percentual dels beneficis si la producció de l'article A experimenta un augment del 2% al nivell de producció i venda.
6. Troba la equació del pla tangent en (2, -1) a la funció  $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$
7. Sigui  $Q(K, L)$  una funció de producció diferenciable que té rendiments a escala constants. Calcula el nivell de producció quan  $K = 2$  i  $L = 4$  sabent que les productivitats marginals a aquest nivell són ?1 i 3.
8. Troba la derivada direccional màxima de  $f(x, y) = +\sqrt{x^2 - y^2 - 2x}$  en el punt (3, 2).
9. Donada la funció escalar  $z = 2xy + y^2x$ , amb  $x = u^2 + v$  i  $y = 2u - v^2$ , calcula el gradient de la funció composta  $z(u, v)$  en el punt  $(u, v) = (1, 1)$ .
10. Donada l'equació  $2xz^2 - 3xy + 5yz = 4$  que defineix  $z = z(x, y)$  com a funció implícita de x i y:
- a) Calcula el seu gradient en el punt (0.5, 0) sabent que  $z(0.5, 0) = 2$ .
  - b) Troba l'equació del pla tangent a la funció implícita en aquest punt.
11. Calcula la matriu hessiana en (1, 1, 1) de la funció  $f(x, y, z) = x^2y - yz$ .

#### Model 5: Full de problemes 4

1. Prova que la funció:  $f(x, y) = +\sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(3 - x^2 - y^2)}$  té màxim i mínim.

2. Calcula els punts crítics de:

a)  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 + x^2 + 4x - 6$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$

3. Optimitza les funcions:

a)  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 + x^2 + 4x - 6$

b)  $f(x, y) = 3xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

4. Estudia la convexitat i/o concavitat de les funcions

a)  $f(x, y, z) = z^2 - y^2 + x^2 + 4x - 6$

b)  $f(x, y) = 2x^{0,5}y^{0,5}$

5. Un empresari que fabrica dos productes sap que, a un preu de 25 euros, pot vendre 175 unitats del primer i que per cada euro d'augment ven 5 unitats menys. Si el preu de venda del segon és de 30 euros i  $C = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + 1925$  és la funció de costos, on  $x$  i  $y$  denoten les unitats produïdes d'ambdós productes, determina la producció que maximitza els beneficis.

#### Model 6: Prova 2

1. Estudia, per  $a, b < 0$ , la concavitat de la funció  $f(x, y) = 2xy - ax^2 - by$ .
2. Troba l'equació del pla tangent de la funció  $f(x, y) = e^{x-3y}$  en el punt  $(0, 1)$ .
3. Una fàbrica produeix samarretes i pantalons. Se sap que si venen les samarretes a 15 euros, en poden vendre 1200 unitats i que, per a cada euro d'augment, ven 25 unitats menys. Si el preu de venda dels pantalons és de 40 euros i  $C = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 1500$  és la funció de costos, on  $x$  i  $y$  denoten les unitats produïdes de samarretes i pantalons respectivament, determina la producció que maximitza els beneficis.

# Capítol 5

## CONCLUSIONS

En aquest treball s'han aconseguit complir tots els objectius fixats en l'inici del mateix:

- S'ha utilitzat l'Estadística Bayesiana per estimar els paràmetres necessaris per obtenir la ubicació idònia de l'acadèmia sense la necessitat de realitzar un nombre molt elevat d'enquestes.
- S'ha aconseguit trobar la localització òptima de l'acadèmia utilitzant quatre models diferents, dos d'ells utilitzen coordenades geogràfiques, amb els quals només s'ha trobat una zona aproximada, i els altres dos ho fan utilitzant coordenades cartesianes, amb aquests s'ha fet servir el mètode de Newton per trobar amb total exactitud quin és el màxim de la funció de puntuació. Els quatre models fan servir tres tipus diferents de distància.
- El programa permet, en funció de quina sigui la ubicació definitiva de l'acadèmia, obtenir quines són les facultats amb més puntuació, a les quals anirien dirigits els cursos de l'acadèmia.
- S'ha fet una programació didàctica d'una de les assignatures de l'ensenyament amb més puntuació: Matemàtiques I del Grau d'Administració i Direcció d'Empreses de la facultat d'Economia i Empresa de la UB.

En referència als resultats obtinguts, tot i que dues de les tres acadèmies que s'han tingut en compte en l'estudi estan situades a Zona Universitària, ha tingut més pes el fet que dotze de les divuit facultats que s'han tingut en compte, també ho estiguin. La proporció és la mateixa, però el nombre d'estudiants de les facultats ubicades a Zona Universitària és molt superior al nombre d'estudiants de la resta de facultats i això ha provocat que, amb els models utilitzats, la ubicació idònia per a l'acadèmia, amb molta diferència, es trobi a Zona Universitària.

Un cop decidida la ubicació de l'acadèmia, es podrien considerar diverses extensions per tal de complementar el treball:

- Si finalment es decideix col·locar l'acadèmia en aquesta ubicació, caldrà tenir en compte que hi haurà una gran competència. Per tant, s'haurà de fer molta bona publicitat, amb preus molt competitius i amb bones ofertes de llançament. Tenir un gran nombre de clients, amb alt grau de satisfacció, és la millor publicitat que pot tenir un negoci. Per aconseguir-ho, caldrà fer un estudi del nombre d'estudiants que assisteixen a cadascuna de les acadèmies, els seus preus, i la qualitat del servei que ofereixen. Amb aquestes dades, es podran determinar els preus de cada tipus de curs per tal d'aconseguir tenir el nombre més elevat possible de clients amb un benefici adequat.
- Un altre factor a tenir en compte és el cost del lloguer del local a les diferents ubicacions. Per decidir entre locals diferents es poden utilitzar les puntuacions de cadascuna de les ubicacions i, en funció del preu de cadascun i de les seves dimensions, determinar quin és el més òptim.

Aquest mateix model, fent les adaptacions necessàries, es podria fer servir per a trobar la ubicació idònia d'altres tipus de negoci. Això sí, aquest hauria de ser un negoci similar, enfocat a un públic situat en llocs molt concrets, ja que en el treball s'han considerat les facultats com a ubicació dels clients.

# Fonts d'informació

## Bibliografia

- 1 WILLIAM M. BOLSTAD, *Introduction to Bayesian Statistics, Second Edition*, Wiley-Interscience 2007.
- 2 PETER M. LEE, *Bayesian Statistics: An introduction*,

## Webgrafia

- 1 *Universitat de Barcelona*. Recuperat 16 setembre 2013 des de <http://www.ub.edu>
- 2 *Universitat Politècnica de Catalunya*. Recuperat 16 setembre 2013 des de <http://www.upc.edu>
- 3 *Universitat Pompeu Fabra*. Recuperat 16 setembre 2013 des de <http://www.upf.edu>
- 4 *Acadèmia SOL*. Recuperat 18 setembre 2013 des de <http://www.academiasol.com>
- 5 *Academia ASES*. Recuperat 18 setembre 2013 des de <http://www.asesacademia.com>
- 6 *CETEC - L'acadèmia de la Pompeu*. Recuperat 18 setembre 2013 des de <http://cetecbcn.com>
- 7 *Manual de Java*. Recuperat 29 setembre 2013 des de <http://www.manual-java.com>
- 8 *Latitud y longitud Google Map*. Recuperat 6 octubre 2013 des de <http://www.opcion5.com/soporte-hosting/latitud-y-logitud>
- 9 *Calcular distancia entre dos puntos de la Tierra*. Recuperat 17 octubre 2013 des de [http://www.tutiempo.net/p/distancias/calcular\\_distancias.html](http://www.tutiempo.net/p/distancias/calcular_distancias.html)
- 10 *Memòries*. Recuperat 19 octubre 2013 des de <http://www.etseib.upc.edu/ca/lescola/2507-memories>
- 11 *Portal de dades i indicadors de la UPC*. Recuperat 21 octubre 2013 des de [http://www.upc.edu/portaldades/dades\\_estadistiques](http://www.upc.edu/portaldades/dades_estadistiques)
- 12 *Qualificació d'actes a la UB*. Recuperat 25 octubre 2013 des de [http://www.ub.edu/dades\\_academiques/actesqua\\_r/index.php](http://www.ub.edu/dades_academiques/actesqua_r/index.php)

13 *gnuplot homepage*. Recuperat 28 novembre 2013 des de <http://www.gnuplot.info/>

14 *Dipòsit digital de la UB*. Recuperat 15 desembre 2013 des de  
<http://diposit.ub.edu/dspace/>