



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

**EXPLORACIÓ D'UN FORMAT NOU
D'ACTIVITAT MATEMÀTICA A L'EDUCACIÓ
SECUNDÀRIA I CREACIÓ I EXPERIMENTACIÓ
D'UN RECURS MATERIAL**

Laia Fandos Ardite

Directors: Sergi del Moral Carmona
Anton Aubanell Pou
Realitzat a: Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi. UB
Barcelona, 27 de gener de 2014

ÍNDEX

1. RESUMS	4
1.1. RESUM EN CATALÀ.....	4
1.2. RESUM EN ANGLÈS.....	4
2. INTRODUCCIÓ I ANTECEDENTS.....	6
3. MOTIVACIÓ	8
4. OBJECTIUS	9
5. MARC GENERAL	10
5.1. REFLEXIONS ENTORN ALS SISTEMES EDUCATIUS	10
5.2. REPTES EN L'EDUCACIÓ MATEMÀTICA.....	12
5.3. DESPLEGAMENT DE COMPETÈNCIES	15
6. DUES LINIES DE FOCALITZACIÓ DEL NOSTRE CAMP D'INTERÉS.....	18
6.1. APRENDRE MATEMÀTIQUES A SECUNDÀRIA RESOLENT PROBLEMES.....	18
6.1.1. QUINS PROBLEMES?	20
6.1.2. REPTES EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES.....	22
6.1.3. COM RESOLEM PROBLEMES?.....	23
6.1.4. L'ACTIVITAT CONSCIENT I SUBCONSCIENT EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES	25
6.2. APRENDRE MATEMÀTIQUES A SECUNDÀRIA EMPRANT MATERIAL MANIPULATIU.....	27
7. ACTIVITATS MATEMÀTIQUES EN TRES ACTES (A3A)	29
7.1. QUÈ SÓN?.....	29
7.2. ESTRUCTURA.....	30
7.3. ANÀLISI METODOLÒGICA GENERAL DELS TRES ACTES.....	31
7.3.1. CARACTERÍSTIQUES	31
7.3.2. COMPARACIÓ AMB UN MODEL TRADICIONAL DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES	32
8. DISSENY I CREACIÓ DE MATERIALS I ACTIVITATS	34

8.1. MATERIAL PER TREBALLAR LA VISUALITZACIÓ A L'ESPAI	34
8.1.1. LA IDEA.....	34
8.1.2. LA CONSTRUCCIÓ.....	34
8.1.3. EL MATERIAL FINAL.....	36
8.1.4. CONTINGUTS QUE ES PODEN TREBALLAR	38
8.2. ACTIVITAT A3A. LA GESPA DEL CAMP NOU.....	38
8.2.1. LA IDEA.....	38
8.2.2. DESCRIPCIÓ DE L'A3A.....	39
8.2.3. ANÀLISI DE LES FASES I ANÀLISI COMPETENCIAL	40
8.3. ACTIVITAT A3A. L'ESCENARI D'UN CRIM	42
8.3.1. DESCRIPCIÓ DE L'A3A.....	42
8.3.2. ANÀLISI DE L'ACTIVITAT	43
9. EXPERIMENTACIÓ A L'AULA I ANÀLISI DE L'EXPERIÈNCIA.	45
9.1. OBSERVACIÓ D'UNA POSADA EN PRÀCTICA D'UNA A3A D'EN DAN MEYER (SOBRES DE SUCRE).....	45
9.2. EXPERIMENTACIÓ DE L'A3A (LA GESPA DEL CAMP NOU).....	46
9.3. EXPERIMENTACIÓ DE L'A3A (L'ESCENARI D'UN CRIM)	50
10. CONCLUSIONS	53
11. BIBLIOGRAFIA.....	54

1. RESUMS

1.1. RESUM EN CATALÀ

Aquesta treball pretén explorar un format nou d'activitat matemàtica a l'educació secundària i crear i experimentar un recurs material amb l'objectiu de compartir-los amb la comunitat educativa si aquests resulten ser de gran profit educatiu.

Es realitza una breu introducció per tal de situar al lector en el tema, i s'esmenten els antecedents, l'interès per l'educació matemàtica i per una activitat professional en la docència així com l'interès concret per la temàtica del treball i els objectius fixats. A continuació s'exposa el marc general en el que es troba el nostre sistema educatiu actual, els reptes en l'educació matemàtica i les línies de treball que es seguiran.

Tot seguit es mostra una proposta d'un nou format d'activitat, Les Activitats en Tres Actes, d'en Dan Meyer. I es presenta la creació del material manipulable. Per tal de veure si són recursos rics competencialment es farà recerca, creació, experimentació i anàlisi.

Finalment, s'exposen les conclusions, on s'expressa que aquests canvis metodològics poden contribuir a millorar l'educació matemàtica actual, i la bibliografia.

1.2. RESUM EN ANGLÈS

The aim of this Project is to explore a new system to teach mathematics in "secondary education" and to create and work with a material resource with the purpose of sharing them with the educational community if they happen to be useful.

A brief introduction is carried out, in order to place the reader in the subject. Personal motivations, the interest for mathematics education, so as the interest particularly for the project's topic and its goals are mentioned. A general framework where our education system is placed, the challenges in mathematics education and the guidelines of the project are featured below.

A suggestion of a new activity system; Dan Meyer's tasks in Three Acts is shown. And a manageable material is presented. In order to see if these are good resources in the existing education system, research, creation, experimentation and analysis are performed.

Finally, conclusions are exposed, where it is said that these methodological changes can contribute to improve nowadays mathematics education. And it finishes with the bibliography.

2. INTRODUCCIÓ I ANTECEDENTS

Des que vaig acabar l'ensenyament secundari, sento que el meu futur professional ha d'anar destinat a ensenyar matemàtiques a secundària. Vaig decidir estudiar Matemàtiques perquè penso que és molt important que el professor de secundària en l'àmbit de matemàtiques conegui bé la matèria. En un moment idoni, vaig cursar l'optativa de Didàctica de les Matemàtiques que em va animar a continuar en busca de l'objectiu que sempre havia tingut clar. Durant els anys de carrera, les meves ganes s'han anat incrementant doncs no hi ha res com posar en pràctica allò que creus que t'agrada i adonar-te que realment és així. A més, fent classes particulars, tan individual com en grups, he pogut observar que tot l'alumnat, en un moment o altre, ha sentit una satisfacció i interès en posar en pràctica les eines que se'ls ha proporcionat. Tothom és capaç, amb la nostra ajuda, d'arribar a poder fer servir les seves capacitats i sentir-se satisfet.

Aquest treball es proposa fer una aportació en una línia didàctica que dóna molt de valor a la resolució de problemes, a les activitats experimentals i a la visualització d'idees i conceptes matemàtics mitjançant materials manipulables. Una línia compartida per la majoria dels que es dediquen a la recerca en educació matemàtica.

Per tal de posar-nos en context, s'ha de parlar dels sistemes educatius europeus d'avui en dia, de l'educació matemàtica en particular i més concretament dels reptes a l'hora de treballar la resolució de problemes. Alhora, es presenta la resolució de problemes com a un camí d'avenç en educació matemàtica. El fet que tinguem problemes en la resolució de problemes no vol dir que la resolució de problemes sigui un problema, que aquesta no sigui un camí pel qual continuar. No està prou treballada i la solució és incidir més en ella per incorporar-la, de manera més decisiva, a l'aula. Per tal de treballar-la de la millor manera possible, hem de tenir present què és el que intervé a l'hora de resoldre un problema. A part d'una breu investigació bibliogràfica, s'ha fet una anàlisi exhaustiva d'una situació on s'ha col·locat a una noia davant d'un problema que ha resolt sense prèvia explicació.

Un cop estudiada la situació a nivell individual, s'ha realitzat la prova a nivell col·lectiu. S'ha portat a l'aula un nou format d'activitats, *Les Activitats en Tres Actes d'en Dan Meyer (A3A)*. Una creada pel mateix Dan Meyer i dos de creació pròpia. Més endavant s'explica tant la l'estructura i la metodologia com algun exemple.

Per tal de saber com millorar aquest tipus d'activitat, s'ha experimentat en dos centres diferents per poder veure diferències i mancances de l'experimentació de les A3A. D'aquesta manera és possible valorar millor si cal modificar la metodologia en alguna de les fases de l'activitat.

L'Institut Escola Les Vinyes de Castellbisbal ha deixat posar en pràctica una de les creacions de les A3A amb dos grups del seu centre de primer de l'ESO i s'ha comparat l'activitat amb un grup del centre de l'Institut Vacarisses. L'altra creació, s'ha experimentat en l'Institut La Mallola d'Esplugues de Llobregat amb els alumnes de segon de batxillerat tecnològic. Ja que la fase d'anàlisi del funcionament de l'activitat és importantíssima, s'ha enregistrat la posada en pràctica a l'aula i s'ha demanat l'opinió d'alguns alumnes.

L'objectiu que es desitja assolir treballant amb aquest tipus d'activitats és que tots els i les alumnes puguin experimentar el gaudi i l'èxit personal que comporta la comprensió i la resolució de reptes matemàtics. De vegades el tipus d'activitats que proposem a les aules de matemàtiques exclouen cert sector de l'alumnat. Aquestes A3A, per la seva estructura i metodologia afavoreixen la participació de tot tipus d'alumnat.

3. MOTIVACIÓ

Segons la meua opinió, cap persona hauria d'acabar l'etapa escolar sense haver experimentat formes de raonament matemàtic per poder sentir la satisfacció que produeix fer servir les matemàtiques. És aquesta idea la que vull reforçar i amb la que m'agradaria treballar.

Per a mi és molt important no perdre en cap moment el sentit de procedir a partir del que l'alumne sap sobre els conceptes i, a través de diferents materials i preguntes si s'escau, fer possible que aquests conceptes inicials es plasmin en accions i llenguatge. D'aquesta forma l'alumne anirà assimilant els diferents conceptes matemàtics per poder enfrontar-se a diverses situacions. Treballar la resolució de problemes oberts i la visualització són doncs eines essencials en el que jo entenc per educació matemàtica. És per això que he decidit fer el treball seguint aquesta línia i sense deixar de banda que trobo indispensable que tothom s'agafi del fil conductor de l'activitat i un cop enganxats, anar tirant d'ell. Cada un dels alumnes arribarà a diferents estadis, però tots hauran iniciat la marxa per un camí. Encara que no arribem a assolir el 100% del que ens proposem potser aconseguirem consolidar un 75%,... si ens posem en marxa. Sinó, ens quedarem on estàvem.

4. OBJECTIUS

Els objectius principals d'aquest treball són:

- Formular una proposta de tipus d'activitat per treballar la resolució de problemes a l'aula de matemàtiques de secundària, les Activitats en Tres Actes (A3A).
- Dissenyar, experimentar i avaluar Activitats matemàtiques en Tres Actes per a l'educació secundària.
- Crear un material manipulable per a la visualització en tres dimensions i incorporar-lo al desenvolupament d'una A3A que sigui ric des del punt de vista competencial.

5. MARC GENERAL

5.1. REFLEXIONS ENTORN ALS SISTEMES EDUCATIUS

Des de fa dècades, l'educació europea està vivint transformacions constants degut a la universalització de l'escolarització, els canvis socials, demogràfics, culturals i tecnològics.

Si fins a temps recents, la columna vertebral de la política educativa europea es dirigia principalment cap a la igualtat d'oportunitats, la integració i la cohesió social, sembla que en el moment actual s'orienta més cap a noves finalitats polítiques, bàsicament dirigides cap a la competitivitat i la competència econòmica (coincidint amb la globalització de l'economia), també una major integració europea i avenços en el camp de les noves tecnologies de la informació i la comunicació.

Es viu amb preocupació el desajust entre el sistema educatiu i els resultats obtinguts (avaluats per la OCDE mitjançant les proves PISA[1]) a l'etapa de secundària obligatòria així com l'alta taxa de fracàs escolar inclús en països com Holanda que obtenen bons resultats. En el cas de l'Estat Espanyol, a part dels baixos resultats, es té un 25% d'alumnes que no superen l'etapa de secundària obligatòria.

Els pocs recursos econòmics que es dediquen a determinats sistemes educatius, la insuficient incorporació de noves tecnologies de la informació a l'activitat didàctica del professorat, l'elevat moviment migratori, la conducta negativa de determinats alumnes, el malestar d'una gran part del professorat, sobretot el de secundària, pel procés de desprofessionalització que estan vivint, la dèbil connexió entre el sistema educatiu i el sistema productiu... són alguns dels principals problemes de l'educació.

Hi ha llocs en què s'han trobat vies de solució i formes d'organització que resisteixen millor els continus canvis i exigències que fan trontollar els fonaments tradicionals de l'educació reglada. Ara bé, copiar altres models educatius, per bé que funcionin, no resulta eficient. El que s'ha de fer és aprendre d'ells i estudiar-los per trobar les millors solucions possibles tenint en compte la pròpia realitat social, la història i la tradició de cada sistema educatiu i la cultura professional del professorat.

Avui, totes les reformes estructurals de la UE pretenen promoure la formació per a tota la vida, atès que les economies només seran competitives si la seva mà d'obra es recicla i posa al dia les seves capacitats. La idea que es té és intensificar i aconseguir una millor relació entre les empreses i les institucions formatives en la flexibilització del ús de les noves tecnologies, en els processos de formació i, per últim, la diversificació i adaptació de les titulacions a un sistema productiu molt canviant. Això no obstant, caldria reflexionar a fons sobre els riscos que comporta sotmetre i relegar l'educació al mercat laboral.

Al llarg dels darrers anys, les noves reglamentacions de la UE han aconsellat descentralitzar la gestió educativa de l'àmbit nacional al regional o autonòmic, i d'aquest al local o municipal, i sobretot als centres docents, a fi d'augmentar la participació de la comunitat educativa en la presa de decisions. Això significa donar resposta a preguntes com: qui determina els nivells i etapes del sistema educatiu?; qui decideix els objectius, els continguts, els mètodes i els criteris d'avaluació?; qui contracta el professorat i el personal no docent?; qui decideix les tasques que han de dur a terme?; quines són les fonts de finançament?; qui té la responsabilitat de gestionar els recursos?, etc.

En quant al model escolar, hi ha sistemes educatius que mantenen itineraris diferenciats, des dels dotze anys d'edat, amb titulacions diferents. En d'altres, els estudiants cursen l'etapa obligatòria, fins els setze anys, en les mateixes aules i amb la mateixa titulació al final de l'etapa. Seguint aquest model es va crear la LOGSE (1990). Aquest tipus de model, que alguns anomenen escola comprensiva, defèn que d'aquesta manera es garanteix la igualtat d'oportunitats i permet que tota la població acabi obtenint els nivells bàsics d'educació.

A principis de la dècada dels noranta, alguns investigadors suecs van plantejar que els sistemes educatius haurien de ser menys rígids i funcionar com l'anomenat "*tren de l'educació*" [2]: un tren que ja no transita pel seu recorregut una sola vegada, i si a l'usuari se li escapa, el perd i el condemna a una exclusió personal i social, sinó una xarxa àmplia de trens que circulen i es comuniquen, en els quals ingresseu i en baixem quan ens convingui o quan les circumstàncies ens hi obliguin.

Davant les dificultats afegides derivades de la incorporació massiva de la població immigrant al sistema escolar, es tendeix a fomentar la integració i alhora el tractament de les diferents minories en relació a la seva cultura, la seva llengua, etc. Tampoc hi ha solucions úniques.

Hi ha d'altres indicadors com són el nombre d'hores lectives, l'inici de l'edat real d'escolarització, els salaris i la formació inicial del professorat que permeten diferenciar el tipus de sistema de cada país. Tanmateix cap dels indicadors citats és, per si sol, prou significatiu respecte de la major o menor eficàcia educativa o el grau d'equitat dels sistemes educatius.

Si bé es cert que el sistema amb més recursos econòmics no té perquè ser el millor en resultats (a Dinamarca es dediquen més recursos econòmics que a Finlàndia i aquest últim té millors resultats) *“Una educació cara pot no ser bona, però una bona educació no és mai barata” com ha indicat diverses vegades* Philip H. Coombs [3], un destacat expert en reformes educatives. El cert és que l'educació és cada vegada més cara i els recursos no són il·limitats, però també el cert és que es pot fer molt més del que es fa, només s'ha de prioritzar a l'hora d'invertir els recursos econòmics que es tenen. A la major part de països d'Europa, el pes de l'educació pública és preponderant, no és el cas d'Espanya.

“En educació, només amb els nombres, les xifres i els indicadors no es resolten els problemes; sovint necessitem idees i, sobretot, idees noves.”

Joaquim Prats Cuevas [4]

Un dels camins de millora que es consideren imprescindibles passa per canvis metodològics profunds que impliquin nous tipus d'activitats d'aula. En aquesta línia s'emmarca l'interès del present Treball Final de Grau.

Al llarg de la història sempre hi ha hagut canvis; el que succeeix ara és que el canvi ha de ser necessàriament el nou eix vertebrador de qualsevol procés educatiu. Tot un repte que ha de ser abordat i superat doncs el futur depèn, en gran part, del que avui és l'educació.

5.2. REPTES EN L'EDUCACIÓ MATEMÀTICA

“La matemàtica ha constituït, tradicionalment, la tortura de molts dels escolars del món sencer, i la humanitat ha tolerat aquesta tortura pels seus fills com un patiment inevitable per adquirir un coneixement necessari; però l'ensenyament no pot ser una tortura, i no serem bons professors si no procuréssim, per tots els mitjans,

transformar aquest patiment en gaudiment, que no significa absència d'esforç, sinó, al contrari, un punt de partida d'estímuls i d'esforços desitjats i eficaços”.

Puig Adam [5]

A més a més dels reptes propis de l'educació, dins de cada àrea en tenim d'altres afegits. En l'àrea de les matemàtiques, un dels principals problemes és la dificultat que la gent en general i els alumnes en particular tenen per comprendre les matemàtiques. Sovint les idees matemàtiques requereixen un nivell d'abstracció que pot dificultar la seva comprensió. Aquest fet és un repte tant apassionant com específic de l'educació matemàtica.

“És costós convèncer a la gent no ja de la necessitat sinó de la bellesa de les matemàtiques. Una discussió polèmica és la discussió entre veure les matemàtiques com a ciència i no exclusivament com una disciplina lògica-deductiva. Un enfocament científic és possible però s'ha de prendre cura de no confondre doncs el que compta no és tant el més típic de la ciència, com el mètode experimental, sinó l'ús del raonament i d'estàndards d'evidència, emprant una àmplia varietat de mètodes. Aquí és on distingim entre rigor (a seques) i rigor matemàtic.

El més comú en la visió de les matemàtiques és veure-ho com un tot acabat on els teoremes, producte de l'activitat matemàtica, ja van ser obtinguts seguint rigoroses regles i no es pot fer massa més que utilitzar-los. El que falta en aquesta visió és la noció de matematització, la interpretació matemàtica de fenòmens no matemàtics, el plantejament d'un problema matemàtic a partir d'aquesta interpretació, la seva solució matemàtica i la interpretació de la solució com solució possible del fenomen inicial.”

Humberto Alagia [6]

L'abstracció, la representació i la manipulació simbòlica són eines que adquireixen un sentit quan s'utilitzen. De vegades, es posa l'accent en aquestes eines i en res més. La importància de la manipulació simbòlica tendeix a exagerar-se i tendeix a confondre's amb la matemàtica. La identificació de la matemàtica amb el càlcul, amb les operacions, és una conseqüència.

La seva important presència en tots els nivells d'escolaritat, fa que la preocupació per les matemàtiques sigui molt difosa. L'ensenyament de les matemàtiques per a no-matemàtics

és una de les qüestions centrals que preocupen a qui investiga en Didàctica de les Matemàtiques. Convé anotar que gran part de l'ensenyança de la matemàtica està dirigida a individus que no seran matemàtics professionals. *“El que preocupa a la majoria dels professionals és la “continuació de l'espècie”: l'educació i la producció de matemàtics de primer nivell, persones que, des del començament són molt talentosos en la matèria”* [7]. Una segona preocupació que pot ser fonamental per a educadors matemàtics és la de l'alfabetització matemàtica (l'augment de la comprensió matemàtica entre la població).

“Aprendre a pensar matemàticament significa, en primer lloc, desenvolupar un punt de vista matemàtic, es a dir, valorar els processos de matematització i abstracció i tendir a aplicar-los. En segon lloc, aprendre a utilitzar les eines de l'ofici per a entendre l'estructura (la recerca i construcció del sentit matemàtic). El que ens interessa d'això és que abasta tant l'anomenada matemàtica pura com la matemàtica aplicada. En un cas es tracta d'estudiar sistemes definits axiomàticament, tractar de determinar per l'observació i l'experimentació principis i regularitats; en l'altre cas es tracta del que descrivim com a matematització: models de sistemes abstracts del món real.”

Humberto Alagia [8]

La investigació en educació matemàtica té dos propòsits: comprendre la naturalesa del pensament i usar aquesta comprensió per millorar la instrucció matemàtica. És important entendre aquests propòsits duals. Sovint sembla que l'únic propòsit que s'atribueix a l'Educació Matemàtica és el segon citat. *“ Molts educadors matemàtics es contesten a la pregunta: “Què és el que funciona a l'aula?” I en canvi una pregunta diferent és: “Com funciona un saber a l'aula?” ”* [9]. És un error pensar que les aplicacions directes són la qüestió fonamental de la investigació en Educació Matemàtica. L'elecció d'un llibre de text, la confecció d'un conjunt d'exercicis és important però no ho és tot.

Els resultats obtinguts per diverses aproximacions per tal d'afrontar els reptes educatius exposats estan donant lloc a noves propostes en les que es posa en discussió el pes que hauria de tenir l'educació matemàtica. Els esforços per adaptar els coneixements, els valors i les actituds pròpies de la matemàtica a les necessitats educatives actuals (un procés de transposició didàctica) produeixen canvis que poden arribar a desvirtuar “la naturalesa pròpia de les matemàtiques”.

5.3. DESPLEGAMENT DE COMPETÈNCIES

Conèixer la part referent a competències generals a l'ESO i al Batxillerat i les específiques de cada matèria és essencial doncs des del 2007, el sistema educatiu català treballa per competències. Bona part del professorat de secundària no utilitza, encara, aquest model. Com tot canvi, necessita un període d'adaptació. El nou professorat cal que aprengui que és treballar per competències. Es pot observar, a la pàgina 17 del present treball, un esquema on es detallen quines són les competències a l'ESO [10] i, tot just a continuació, es fa el desplegament de competències al Batxillerat [11]

Les competències del batxillerat continuen el desenvolupament de les competències bàsiques de l'etapa educativa anterior i preparen per a la vida activa i per actuar de manera eficient en els estudis superiors. Per al Batxillerat s'identifiquen com a competències generals i comunes les sis competències següents:

1. **Competència comunicativa**
2. **Competència en la gestió i el tractament de la informació**
3. **Competència digital**
4. **Competència en recerca**
5. **Competència personal i interpersonal**
6. **Competència en el coneixement i la interacció amb el món**

Ser competent en matemàtiques requereix tenir uns coneixements, capacitats i habilitats que han de facilitar que l'alumne/a pugui i vulgui afrontar els reptes que se li plantegin. Amb el tipus de treball exposat, centrat en la resolució de problemes, es desenvolupen i són objectius d'atenció del treball docent a l'aula els cinc vessants següents de l'activitat matemàtica: resoldre problemes matemàtics, comunicar-se matemàticament, raonar matemàticament, valorar la matemàtica i la seva construcció i tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica. Aquests vessants conformen els processos que caldrà desenvolupar de manera general al llarg de tot l'etapa.

Competència matemàtica és l'habilitat per desenvolupar i aplicar el raonament matemàtic amb la finalitat de resoldre problemes en situacions diverses. Ser matemàticament competent requereix, entre altres coses, l'assoliment gradual de la capacitat i la voluntat per pensar en la recta, el pla i l'espai (analogia), cercar arguments que aportin solidesa als patrons descoberts, representar construccions, gràfics o diagrames, construir, interpretar i

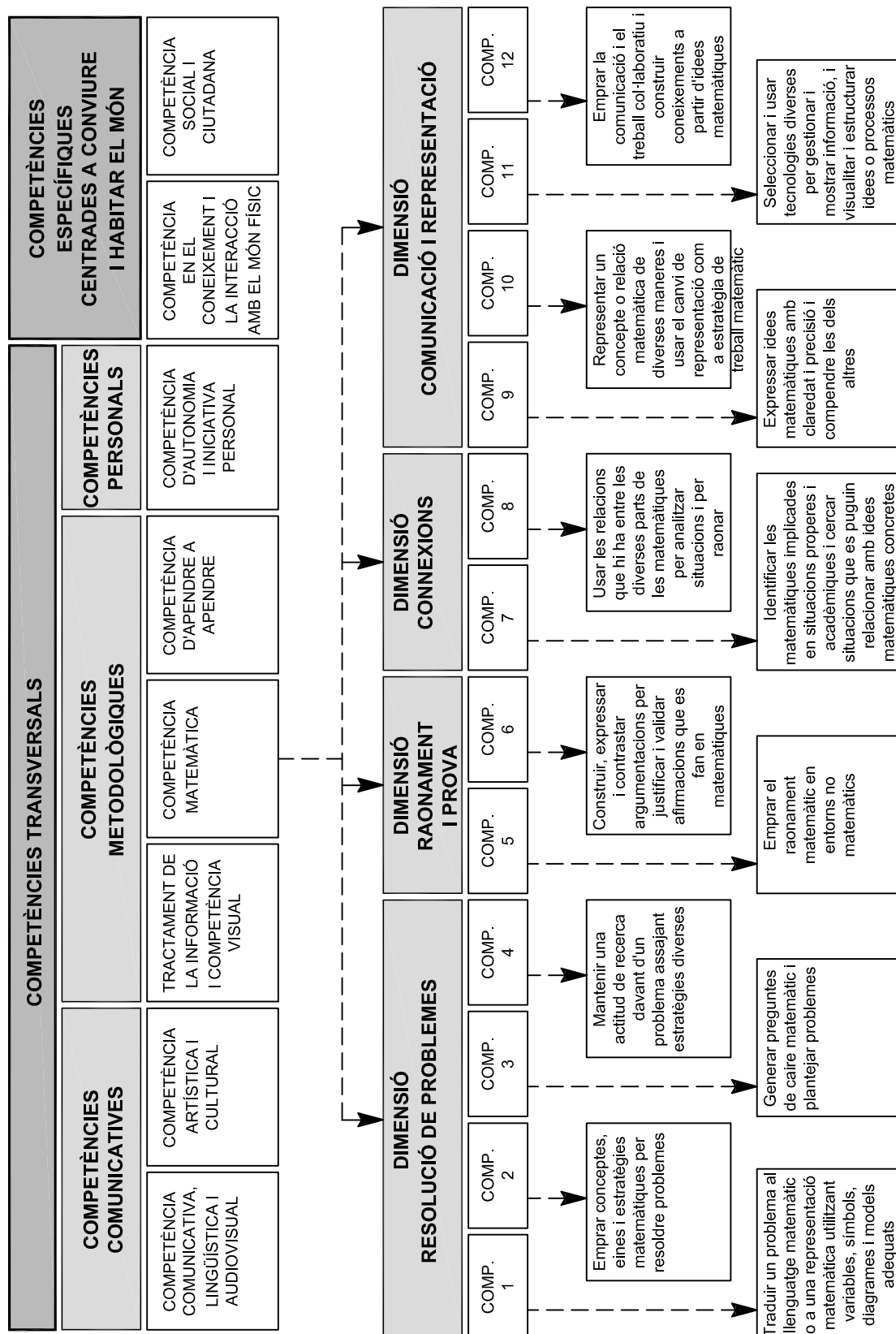
emprar adequadament fórmules. En resum, copsar la naturalesa de la matemàtica i dels objectes amb que treballa aquesta ciència.

Competència en modelització matemàtica s'entén com el procés pel qual s'interpreta matemàticament una determinada situació per tal de conèixer el seu comportament i controlar-la. La comprensió del món real està lligada, en gran mesura, al coneixement de la matemàtica. S'entén gràcies a les matemàtiques i a models matemàtics de la ciència que en fan ús. La matemàtica facilita la creació de models simplificats del món real que permeten una interpretació acotada d'aquest i alhora generen problemes adequats al moment educatiu de l'alumne/a tot facilitant el seu esperit crític i despertant la seva creativitat.

Competència en contextualització és consubstancial al treball matemàtic en el batxillerat. La contextualització de les situacions-problema participa en la motivació de l'estudiant i alhora és un instrument que permet validar el coneixement après. També facilita la interpretació de la realitat física i social a partir del coneixement matemàtic propi, ajudant a entendre i explicar aquestes realitats. Cal que l'ensenyament al batxillerat no caigui en una simplificació empírica de la matemàtica i del seu ensenyament. De manera progressiva i sota entorns d'aprenentatge que parteixen de situacions-problema contextualitzades, l'alumnat obtindrà coneixement matemàtic més general que li facilita donar resposta a situacions que van més enllà de cada model concret i contextualitzat emprat.

La competència en experimentació impregna tot el treball científic. Si l'alumne/a no crea no genera coneixement. En aquest cas hi pot haver assimilació de continguts però no necessàriament evolució intel·lectual. Ser competent en experimentació requereix acceptar-la com a punt de partença de la construcció de coneixement i alhora requereix l'extracció d'informació que, tractada adequadament condueix, a la construcció de coneixement matemàtic curricular.

El sistema educatiu, com tots els éssers vius (i el sistema educatiu ho és!) necessita adaptar-se constantment a les necessitats de l'entorn al que serveix. Els nous perfils d'alumnat, les noves eines disponible i els nous camps d'aplicació de la matemàtica fan necessaris canvis metodològics profunds en l'educació matemàtica. En aquest treball s'han dissenyat activitats que són riques competencialment i la idea és compartir-les amb la comunitat educativa.



6. DUES LINIES DE FOCALITZACIÓ DEL NOSTRE CAMP D'INTERÉS

El nostre camp d'interès es focalitza en dues línies: per una banda, els recursos materials i, per l'altra, un tipus d'activitats experimentals, les A3A, en les aules de matemàtiques de secundària.

Tenen molt en comú en el que pretenen aconseguir de l'alumne. Rarament generen bloqueig, tot alumne participa. Alguns aniran més enllà del que s'esperava, altres sorprendran al professor amb les seves idees, d'altres es quedaran amb algun dels conceptes molt concrets, però tots s'hauran agafat del fil conductor de l'activitat.

Cal tenir en compte que un mateix material o una mateixa activitat experimental, adequant les lectures que se'n fan, poden ser usats per treballar continguts diferents en cursos diferents.

6.1. APRENDRE MATEMÀTIQUES A SECUNDÀRIA RESOLENT PROBLEMES

“Ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudiar matemàtiques no ha de ser res més que pensar en la solució de problemes.”

Lluís Santaló [12]

La cita de Lluís Santaló situa la idea d'ensenyar matemàtiques per a resoldre problemes però cal també ensenyar matemàtiques a través de la resolució de problemes i a partir de la resolució de problemes. Així doncs la resolució de problemes no és una tasca tan sols per realitzar al final d'un trajecte d'aprenentatge, sinó que pot ser útil a l'inici, com a detonant de l'interès de l'alumnat i durant el procés d'aprenentatge com a fil conductor que justifica els continguts que es treballen i els posa en joc. La resolució de problemes no representa doncs únicament l'estació final de la via de l'aprenentatge, sinó que pot representar l'estació inicial, de partida, o la cadena d'estacions intermèdies!

“Una metodologia centrada en la resolució de problemes dóna l'oportunitat de desvetllar en l'alumnat el gust per enfrontar-se a un repte, lluitar-hi de manera tenaç, experimentar, cercar ajut adequat, si cal, assaborir l'èxit i adquirir confiança en les

pròpies capacitats. Aquestes arriben a la seva culminació quan l'alumne/a és capaç de generar els seus propis problemes matemàtics a partir de la realitat que l'envolta."

Document d'identificació i desplegament de la competència matemàtica a l'ESO [13]

Matemàtiques és la única assignatura que s'estudia en tots els països del món i en tots els nivells educatius, és un pilar de l'educació. La causa, les matemàtiques constitueixen un idioma *"poderós, concís i sense ambigüïtat"* segons la formulació de l'Informe Cockroft [14] . Aquest llenguatge es pretén que sigui après pels nostres alumnes, fins a aconseguir que ho "parlin". En general, per mitjà de la contemplació de com ho fan uns altres, els professors, i per la seva aplicació a situacions molt senzilles i alienes a les seves vivències, els exercicis. La utilització d'un llenguatge requereix d'uns coneixements mínims per poder desenvolupar-se es clar però sobretot es necessiten situacions que inviten a comunicar-se per mitjà d'aquest llenguatge, a esforçar-se en aconseguir-ho, i, per suposat, d'unes tècniques per a fer-ho.

Alhora que les matemàtiques són un idioma també són una eina per analitzar i preveure el món que ens envolta. Un dels àmbits més clars on es posa en joc tant el llenguatge matemàtic com les eines matemàtiques és en la resolució de problemes. És per això que la resolució de problemes és considerada en l'actualitat la part més essencial de l'educació matemàtica:

"L'ensenyament de les Matemàtiques ha de considerar la resolució de problemes, incloent l'aplicació de les mateixes situacions de la vida diària".

Informe Cockroft [15]

"L'objectiu fonamental de l'ensenyament de les Matemàtiques no deuria ser un altre que el de la resolució de problemes"

El N.C.T.M. d'Estats Units [16]

"Les capacitats bàsiques de la intel·ligència s'afavoreixen des de les Matemàtiques a partir de la resolució de problemes, sempre i quan aquests no siguin vists com situacions que requereixen una resposta única (coneguda pel professor que encamina cap a ella), sinó com un procés en el que l'alumne estima, fa conjectures i suggereix explicacions".

Llibre de Hofstadter, Gödel, Escher y Bach [17]

“Està ben justificat que tots els textos de matemàtiques, continguin problemes. Els problemes poden inclús considerar-se com la part més essencial de l'educació matemàtica”.

George Polya [18]

“El que sobretot hauríem de proporcionar als nostres alumnes a través de les matemàtiques és la possibilitat de fer-se amb hàbits de pensament adequats per a la resolució de problemes matemàtics i no matemàtics. ¿De què els pot servir fer un forat en la seva ment en que càpiguen uns quants teoremes i propietats relatives a ens amb poc significat si després van a deixar-los allà hermèticament tancats? A la resolució de problemes se l'anomena, amb raó, el cor de les matemàtiques doncs és aquí on es pot adquirir el vertader sabor que ha atret i atreu als matemàtics de totes les èpoques. De l'enfrontament amb problemes adequats és d'on poden resultar motivacions, actituds, hàbits, idees per al desenvolupament d'eines, en una paraula, la vida pròpia de les matemàtiques”.

M. De Guzmán [19]

6.1.1. QUINS PROBLEMES?

Es pot definir problema com a una proposta d'enfrontament amb una situació desconeguda que es planteja a través d'un conjunt d'informació dins d'un context, per a la qual, en principi, no disposem d'una resposta immediata i que requerirà reflexionar, prendre decisions i dissenyar estratègies.

També podem caracteritzar els “problemes” per oposició als exercicis. En els exercicis es pot determinar amb rapidesa si se saben resoldre o no; es tracta d'aplicar un algorisme que es pot o no conèixer. Però, una vegada localitzat, s'aplica i prou. En els problemes no és evident el camí a seguir; inclús pot haver-n'hi diferents; i per suposat, no està codificat i ensenyat prèviament. Cal relacionar sabers procedents de camps diferents, cal posar a punt relacions noves.

Els problemes els originem nosaltres. Passen a aquest estatus quan els assumim com un repte personal i decidim en conseqüència dedicar temps i esforç a procurar resoldre'ls. Els problemes aporten creativitat, porten dins una certa “història”, que es pot contar, obren les finestres de l'aula i fan un pont (encara que sigui fràgil) entre les matemàtiques i la vida.

Però a més, han de tractar una qüestió que ens interressi, que ens provoqui les ganes de resoldre-la, una feina a la que estem disposats a dedicar-li temps i esforç. Com a conseqüència de tot això, un cop resolta ens proporciona una sensació de satisfacció. Inclús, sense acabar el procés, sense aconseguir la solució, també en el procés de resolució, en els avenços que anem realitzant, trobarem un component de plaer.

Els bons problemes per portar a una aula de secundària:

- **No són qüestions amb trampa.**

És el que els alumnes sovint es plantegen quan no troben un algorisme per resoldre el problema, és aquesta percepció la que s'ha de fer que canviï i la manera és la pràctica sistemàtica de resolució de problemes.

- **Poden o no tenir aplicacions, però tenen interès per ells mateixos.**

L'aplicació de la matemàtica pot actuar com a factor motivador, però no és l'única font de motivació. Sovint el propi repte que presenta un problema (si és un bon problema!) ja té la virtut de posar en marxa l'interès de l'alumne/a.

- **Un cop resolts, ve de gust proposar-los o explicar-los a unes altres persones.**

Els bons problemes són petits regals que ens podem fer, invitacions a assolir reptes, desitjos de compartir l'èxit de la resolució.

- **Semblen, a primera vista, abordables, no deixen lloc al bloqueig, sense capacitat de reacció.**

Des d'un punt de vista psicològic, només ens plantegem aquells problemes que creiem ser capaços de resoldre.

- **Proporcionen al resoldre'ls un tipus de plaer difícil d'explicar però agradable d'experimentar.**

La component de plaer és fonamental, si volem que sigui assumit amb gust i de que l'interès es mantingui en el temps. La incorporació d'aquests factors a la pràctica diària poden prefigurar la inclinació dels estudis futurs.

“Quan es tracta de problemes per a adults, no s'ha de seguir enfocant situacions de fantasia on no hi hagi referència a dades reals o a processos reals”

Claudi Alsina [20]

6.1.2. REPTES EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

“Només els grans descobriments permeten resoldre els grans problemes, hi ha, en la solució de tot problema una mica de descobriment.” I afegeix que si es resol un problema i arriba a excitar la nostra curiositat, *“aquest gènere d'experiència, a una determinada edat, pot determinar el gust del treball intel·lectual i deixa, tant en l'esperit com en el caràcter, una marca que durarà tota una vida”*.

Polya [21]

Sabent la importància que té la resolució de problemes en l'educació matemàtica, per què no està del tot integrada a les aules? Què té de difícil aquest procés?

Té un fort component de compromís personal per part dels alumnes. Alhora requereix molta autonomia. Tots dos són aspectes que s'han d'anar treballant contínuament per tal que l'alumne els vagi adquirint. Treballar en aquesta línia pot no donar resultats a curt termini i, malauradament, estem més acostumats a practicar més allò que ens dóna resultats finals de manera immediata. Es pensa en la satisfacció com a un sentiment que es té quan arribes al final d'un procés. Segons els diccionari, satisfacció és el compliment d'un desig. El desig tant de l'alumne com del professor podria ser acabar la sessió amb curiositat per seguir resolent el problema, haver tingut la motivació i l'estímul suficient per estar durant la sessió pensant en el problema a resoldre, encara que a curt termini no s'arribi a assolir l'èxit!

Són difícils de presentar. És molta la importància que té la manera en que se'ns presenten per a assumir-los com a tals. Tot això és de particular interès en l'ensenyament perquè el com es planteja la qüestió, el context en que se situa i de la tecnologia expositiva utilitzada depèn, en un percentatge alt, el que un problema passi a ser considerat com a tal pels nostres alumnes.

Sovint és complicat saber com estimular els alumnes. I s'afegeix que és molta més la dificultat d'ensenyar o ja no d'ensenyar sinó de fer entendre, de fer que l'alumne interioritzi, els processos de resolució de problemes que ensenyar uns algorismes per resoldre exercicis. Els algorismes que s'expliquen a classe, o que apareixen en els llibres de text, resolen grups sencers de problemes. El que passa és que si no situem prèviament els problemes als que responen, estem donant la resposta abans de que existeixi la pregunta. I en aquest context és difícil que hi hagi interès en resoldre la pregunta.

Potser aquesta situació, en la línia del que dèiem a l'apartat 5.3 requereix explorar camins de canvi metodològic sempre amb la prudència que aconsella el dubte sobre si es tracta de propostes utòpiques o si es poden portar a la realitat. És cert, de vegades no és fàcil. No trec cap mèrit a aquells que dia rere dia es troben davant d'una classe amb 3 alumnes i amb un currículum que s'ha de seguir. Sóc conscient que hi ha moltes dificultats afegides a l'aula a l'hora de la veritat, és per això que el nou format d'activitats que proposo portar a l'aula, les Activitats en Tres Actes d'en Dan Meyer, no el presento com “La Solució” però estic segura que pot ser una mesura molt efectiva. Per veure si aquest format d'activitats és ric competencialment s'ha fet recerca, creació, experimentació i anàlisi.

Les Activitats en Tres Actes (A3A) es proposen com a actuacions d'aula que complementen a d'altres però amb les que ens hem de quedar amb l'estil (ja no tant amb la forma) per a canviar el plantejament metodològic general. Per què no començar el tema posant davant un problema i deixar un temps per a llegir-lo, formular preguntes i que siguin els alumnes els que li donin resposta amb les eines que ja tenen? Només aquest petit canvi ja té conseqüències. Si això es practica sovint, pot donar canvis en la actitud d'un alumne envers un problema. No ens interessa només la solució, ens interessa el raonament i l'actitud. No ens interessa fer molts exercicis repetits, ens interessa que s'entengui el que fem. En tot cas les A3A encara van més enllà: si abans ens preguntàvem per què no començar el tema amb un problema, ara podríem ser més agosarats i preguntar-nos per què no començar un problema aconseguint que l'alumnat es planteji una pregunta que el motivi, la formuli bé, estableixi possibles estratègies per esbrinar la resposta que l'intriga, demani dades i les utilitzi per portar a terme la seva estratègia.

6.1.3. COM RESOLEM PROBLEMES?

Una apreciació àmpliament difosa en la societat és que la única manera de resoldre un problema és per “idees lluminoses”, que es tenen o no es tenen. És evident que hi ha persones que tenen més capacitat per a resoldre problemes que altres d'edat i formació semblant. Però el cert és que existeixen uns processos que es diuen “heurístics” que són un conjunt de procediments o mètodes que solen resultar especialment indicats per a abordar els problemes però que no necessàriament porten a la solució. El coneixement i la pràctica d'aquests és justament l'objecte de la resolució de problemes, és una facultat que es pot millorar amb la pràctica. Però per a això cal conèixer els processos i aplicar-los d'una forma planificada, amb mètode.

Les quatre etapes essencials per a la resolució d'un problema, segons la formulació de Polya [22], són les següents:

a) Comprendre el problema

Sembla, a vegades, innecessari, sobretot en contextos escolars, però és de gran importància, sobretot quan els problemes a resoldre no són de formulació estrictament matemàtica. Per tal de comprendre el problema cal:

- llegir l'enunciat a poc a poc.
- diferenciar quines són les dades.
- diferenciar quines són les incògnites
- tractar de trobar la relació entre les dades i les incògnites.
- fer un esquema o dibuix de la situació.

b) Dissenyar un pla per a resoldre'l

Experimentar, estimar, temptejar, conjecturar... recordant problemes semblants que puguin resultar més familiars i idees matemàtiques que puguin ser útils. En aquesta fase pot ajudar tenir en compte el següent:

- es pot plantejar el problema d'una altra forma?
- cal imaginar un problema semblant però més senzill
- cal suposar que el problema ja està resolt;
- com es relaciona la situació d'arribada amb la de partida?
- s'utilitzen totes les dades en el pla?

c) Posar en pràctica el pla

Tenir en compte que el pensament no és lineal que hi ha salts continus entre el disseny del pla i la posada en pràctica. En aquesta fase pot ajudar tenir en compte el següent:

- abans de fer alguna cosa s'ha de pensar: què s'aconsegueix amb això?
- cal acompanyar cada operació matemàtica d'una explicació contant el que es fa i per a què es fa.
- quan s'ensopega amb alguna dificultat que ens deixa bloquejats, cal tornar al principi, reordenar les idees i provar de nou.

d) Comprovar els resultats

És la part més important en la vida diària, perquè suposa la confrontació amb el context del resultat obtingut pel model del problema que hem realitzat, i el seu contrast amb la realitat que volíem resoldre. En aquesta fase pot ajudar tenir en compte el següent:

- cal llegir de nou l'enunciat i comprovar que el que es demanava és el que s'ha trobat.
- cal fixar-nos en la solució. sembla lògicament possible?
- es pot comprovar la solució?
- hi ha alguna altra manera de resoldre el problema?
- es pot trobar alguna altra solució?
- cal utilitzar el resultat obtingut i el procés seguit per formular i plantejar nous problemes.
- cal prendre consciència del procés seguit i incorporar-lo al bagatge d'estratègies resolutives.

Són una referència clàssica però molt vigent. Estudis posteriors parteixen de la formulació de Polya però adaptada als nous formats de problema.

Generalment, es parteix de la suposició que l'alumne/a vol resoldre el problema. S'obvia la motivació dels alumnes. L'estructura de les A3A afegeix una fase inicial amb l'objectiu de captivar, d'aconseguir que els alumnes s'apropiïn de la pregunta (del problema), la visquin, i fins i tot se la facin seva.

6.1.4. L'ACTIVITAT CONSCIENT I SUBCONSCIENT EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

La resolució de problemes és un procés personal, en el qual no tan sols es posa en joc allò que sabem, sinó també allò que creiem i allò que sentim. L'adquisició de l'actitud adequada, la manca de motivació, les fòbies, les pors, el bloqueig afectiu, perceptiu, cultural, ambiental..., són aspectes fonamentals que cal neutralitzar per aconseguir una manera de procedir mental, una forma de raonar, que ens ajudi en la resolució de problemes. L'actitud adequada, la manca de motivació, les fòbies, les pors, el bloqueig afectiu, perceptiu, cultural, ambiental..., són aspectes fonamentals que cal neutralitzar per aconseguir una manera de procedir mental, una forma de raonar, que ens ajudi en la resolució de problemes.

En la redacció de tot aquest apartat ha tingut especial rellevància l'ús del seu llibre “Para pensar mejor” de Miguel de Guzman.

És clar que el que ajuda de manera més eficaç no és un saber d'arxiu sinó un saber ben estructurat i activament coordinat. El pensament eficaç inclou també molts d'altres aspectes com la memòria, l'agudesesa i capacitat d'observació, la percepció psicològica de matisos, la capacitat de síntesis, la confiança, la tranquil·litat, la disposició d'aprenentatge, la curiositat, el gust pel repte (no s'ha de tractar un problema com si fos un sever examinador que busca calibrar les capacitats de cada un sinó com a una ocasió per aprendre). També cal tenir en compte el paper que té en la resolució de problemes la il·luminació o inspiració que venen propiciades per la incubació activa.

En el nostre complicat mecanisme mental conflueixen simultàniament i de manera natural i espontània activitats de molts diversos tipus. Els dinamismes del coneixement són molts i molt variats: sensacions, imatges subjacents, memòries, solcs de inferència, patrons de reconeixement... des de la plena atenció conscient a un aspecte determinat fins la percepció difosa que quasi desapareix o que perdura en la total penombra, encara així, influint fortament en la marxa del pensament.

Per una altra part, la coloració afectiva de la nostra ment proporciona un profund impacte sobre el nostre pensament i sobre la seva possible eficàcia o ineficàcia. Els desitjos, les ansietats, repugnàncies, pors..., són intenses forces que també condicionen de manera decisiva la nostra actuació mental a l'hora de resoldre un problema.

Calibrar exactament el grau d'importància en la part creativa, de resolució de problemes, dels moviments subconscients i inconscients és una feina complicada, doncs implica tractar d'endinsar-se en el més recondit i misteriós de la ment. Les paraules de Guzman són molt clares en aquest aspecte:

“Per a molts matemàtics de gran èxit creatiu la influència de l'activitat subconscient en els seus processos mentals apareix com a un factor totalment patent i decisiu. És interessant observar que l'oposició més forta a aquesta convicció provingui precisament d'alguns psicòlegs que opinen que els matemàtics i altres científics, així com molts artistes, s'enganyen en la interpretació ingènua de les seves experiències. És versemblant que els que neguen la realitat d'una activitat subconscient important

en la resolució de problemes vulguin amb això expressar la seva convicció de la impossibilitat de parlar del tema amb un mínim de rigor científic.”

M. de Guzman [23]

Sovint, el professor de matemàtiques es troba amb alumnes que estan bloquejats. Revertir, a nivell individual, el bloqueig és més fàcil que a nivell col·lectiu. Cal tractar de fer prevenció en comptes de cura. Quan un alumne se sent bloquejat respecte de les matemàtiques (amb raons reals o sense) és complicat aconseguir que torni a agafar confiança, que recuperi la creença que pot fer coses en matemàtiques. I per revertir aquesta situació hi ha un camí privilegiat: aconseguir que vagi assolint progressivament petits èxits, que vagi rebent estímuls positius. Les A3A són un camp especialment adequat per contribuir a recuperar aquesta confiança.

6.2. APRENDRE MATEMÀTIQUES A SECUNDÀRIA EMPRANT MATERIAL MANIPULATIU

“El nen té la intel·ligència a les mans”

Maria Montessori [24]

De vegades, quan un alumne no entén els conceptes que se li expliquen és perquè el professor, inconscientment, no fa de guia per a l'aprenentatge de l'alumne i dona per fet que el que per ell no és un solc mental, per l'alumne tampoc ho és. El no trasllat del professor fa que de vegades es faci més complicat per a l'alumne l'assimilació de conceptes. Un bon material manipulable pot resultar molt encertat doncs pot fer de traductor del professor per a que el missatge que es vol transmetre sigui rebut amb la màxima comprensió possible, un material manipulable complementa la guia per a l'aprenentatge de l'alumne.

La importància dels materials manipulables en l'educació matemàtica és fonamental per generar conceptes, per consolidar-los, per aplicar-los, per fer demostracions, per mostrar propietats... A continuació cerquem les paraules de grans mestres per justificar aquesta afirmació:

“Aquest material, estructurat en forma de models, té no sols la funció de traduir ocasionalment idees matemàtiques, sinó també d'originar-les, de suggerir-les. Hem

d'estudiar la manera pedagògicament més encertada d'aconseguir-ho i també els materials més dúctils per a la seva realització."

Puig Adam [25]

"Els materials manipulables poden obrir finestres a solucions creatives que són impossible usant eines tradicionals.

(...)

Les imatges i els materials manipulables poden ser necessaris si el problema en qüestió requereix una solució pràctica explícita.

(...)

Els materials manipulables poden facilitar el pensament visual i representar un pas més important que la realització de representacions planes o de càlculs formals.

(...)

Les imatges i els materials manipulables poden ser l'únic camí factible per mostrar exemples o solucions de problemes plans o espacials."

Claudi Alsina i de Roger B. Nelsen [26]

"El coneixement ha de començar a través dels sentits. Per què doncs començar amb una exposició verbal de les coses i no amb una observació real d'aquestes coses?"

Janos Comenius [27]

"Només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors."

Henri Poincaré [28]

7. ACTIVITATS MATEMÀTIQUES EN TRES ACTES (A3A)

“Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions, i finalitza amb idees”

Kant [29]

En aquest treball s'ha presentat la resolució de problemes com a un camí d'avenç en l'educació matemàtica. Ara es vol destacar la importància de la resolució d'un nou format de problemes, les Activitats en Tres Actes (A3A). Són activitats que no es vol que siguin vistes com situacions que requereixen una resposta única de començament sinó com un procés en el que l'alumne estima, fa conjectures i suggereix explicacions. Les A3A són unes activitats estimulants que tracten de no donar la resposta abans de que existeixi la pregunta en cada un dels alumnes presents a l'aula.

“La feina del dramaturg és que l'audiència es pregunti què està a punt de succeir. No explicar que passarà, o suggerir que passarà després.”

David Mamet [30]

“Sovint els contes, les pel·lícules o les novel·les es divideixen en tres actes de tal manera que aquesta estructura ajuda a captivar l'interès de l'audiència. El primer acte sol presentar un conflicte impactant, visceral, capaç d'emocionar. En el segon els protagonistes superen obstacles, busquen recursos i desenvolupen noves eines i habilitats. Al tercer i últim es resol el conflicte principal recompensant les expectatives generades als actes anteriors.

Existeix un paral·lelisme evident entre aquesta seqüència i processos que seria desitjable que esdevinguessin en la resolució de problemes matemàtics?”

Dan Meyer [31]

7.1. QUÈ SÓN?

Una A3A és una activitat que introdueix el conflicte de la història (entès com a curiositat, detonant de la motivació, ganes de saber alguna cosa...) que volem explicar de manera clara, visual i visceral, emprant tan poques paraules com sigui possible. Es tracta de que la persona encarregada de resoldre'l superi obstacles, busqui recursos i desenvolupi noves eines que el portaran a resoldre el conflicte, es a dir, arribar a conèixer allò que ens ha

encuriosit al principi. Després de realitzar repetides vegades aquest tipus de tasca, pot ser l'alumne/a és capaç de generar els seus propis problemes matemàtics a partir de la realitat que l'envolta o, si més no, crear extensions dels problemes que se l'han plantejat que és una de les competències més importants en l'àmbit de les matemàtiques.

7.2. ESTRUCTURA

Els fragments de text següents són del mateix Dan Meyer, creador de la metodologia A3A i estan extrets d'una entrevista realitzada per en Sergi del Moral, l'Anton Aubanell, la Sílvia Margelí, en Josep Rey i l'Andrea Richter a la trobada anual del 2013 del National Council of Teachers of Mathematics:

“Les tasques en tres actes tenen una estructura que té molt sentit per a mi, potser no el té per a qualsevol professor, però a mi em funciona molt bé i l'he compartida amb altra gent. És de la següent manera:

El primer acte d'una activitat té alguna mena d'estímul visual, sense gaires paraules, l'idioma no és una barrera, els alumnes amb un nivell baix d'alfabetització no queden exclosos, i crea una pregunta al cap dels alumnes, estan veient una cosa i l'estan relacionant amb una pregunta aquesta és la idea. S'haurien de poder fer conjectures sobre la resposta a la pregunta. Això és el primer acte, s'ha de tractar que tots els estudiants entrin en el problema, a un nivell accessible.

El segon acte consisteix a donar als estudiants les eines, la informació i els recursos per resoldre aquest problema, per respondre la seva pròpia pregunta. L'estudiant té una pregunta, per exemple, imagineu que estan veient un dipòsit d'aigua omplint-se molt lentament. Probablement es preguntaran, quant trigarà en omplir-se? En el segon acte, ells han de disposar d'informació sobre el dipòsit d'aigua, necessiten recursos matemàtics, com el volum, la pressió o vocabulari específic, i eines, com per exemple el professor, per ajudar-los a comprendre i resoldre el problema. Així doncs, disposem d'informació, recursos i eines en el segon acte, i és important no anticipar aquesta part abans de que els alumnes es facin algun tipus de pregunta. Sovint els problemes matemàtics donen tota aquesta informació abans de que l'estudiant sàpiga per què.

Finalment, al tercer acte, després de tota aquesta feina, l'estudiant ha arribat a una resposta, té la seva resposta, el dipòsit trigarà 8 minuts i 1 segon en omplir-se. I l'estudiant vol saber si ha resolt el problema. És correcta la meua resposta? Funcionen les matemàtiques en el món real? Aquí als Estats Units, sovint anem al solucionari del final de llibre i mirem si la resposta és correcta. Això no és gaire satisfactori comparat amb si mostrem com el dipòsit sencer s'omple d'aigua a càmera ràpida i observem el comptador que marca 8 minuts i 1 segon. És una sensació molt emocionant per a ells.

En 140 caràcters podria dir: preguntes desconcertants, estímul visual, informació després de la pregunta i gran recompensa visual."

7.3. ANÀLISI METODOLÒGICA GENERAL DELS TRES ACTES

7.3.1. CARACTERÍSTIQUES

El món pedagògic i acadèmic que hem muntat en la nostra civilització actual atén poc al valor global de les realitzacions de les persones, prevalent en excés la absència d'equivocacions. Però això no és just, n'hi ha prou amb no dir ni fer casi res del que un no està segur i així segur que no s'equivoca. Amb aquests problemes es tracta de que tothom parli, es posi en marxa i s'equivoqui, com dèiem, l'important no és tant la resposta com el raonament, es tracta d'aprendre formes de raonament.

A part, es pretén augmentar la participació a l'aula doncs són problemes que per les seves característiques requereixen que els alumnes es facin moltes preguntes que han de ser contestades. El que no pregunta entén a mitges, es queda en la penombra passivament i la idea se li escapa com a través d'un colador. La pregunta és l'ham per a extraure idees originals. Implica a la vegada un cert escepticisme, curiositat, consciència de un coneixement parcial i el reconeixement de certa ignorància il·lustrada. L'esforç conscient per preguntar-se i preguntar genera aquesta actitud inquisitiva, que és la base de tot progrés en el coneixement.

A més, s'invita a l'alumne a que faci una llista d'idees per apropar-nos al nostre problema. Es tracta de fer un ajornament de judici d'aquestes idees, no està permès avaluar-les al

moment. El moderador ha d'estimular a que es proposin tota classe d'idees (encara que semblin descabellades). Quantitat d'idees, contrastades i argumentades, condueix a qualitat. I sobre tot, tenir clar que les idees no són propietat de ningú, són del grup i el moderador les perfeccionarà.

7.3.2. COMPARACIÓ AMB UN MODEL TRADICIONAL DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

12. Una piràmide de monedes està feta de piles de penics com mostra la figura, de manera que en cada capa hi ha una fila menys per cada costat. Cada pila conté 13 penics.

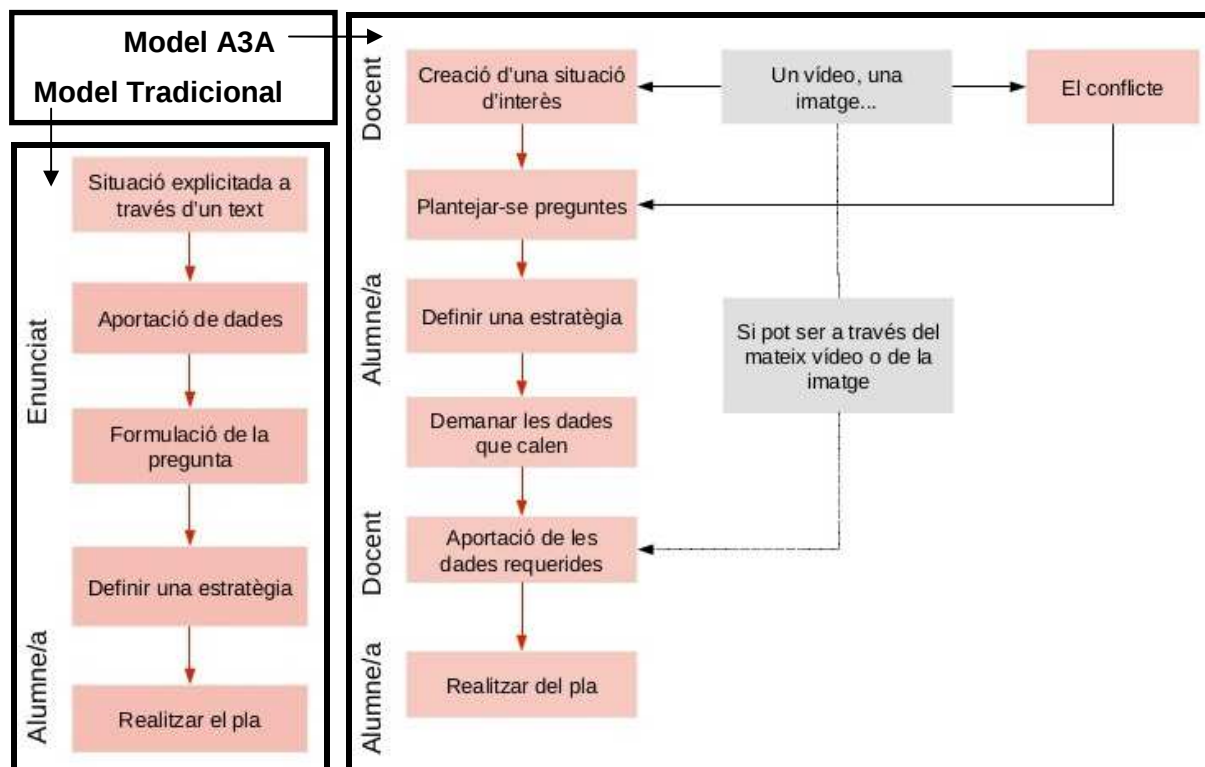
Quants penics hi ha a la piràmide?



Un exemple de model tradicional de problema



Fotografies extretes d'un vídeo on es veu com es va construint la piràmide de l'exercici anterior (als alumnes se'ls mostra el vídeo).



Dues diapositives de la presentació “Sense Conflicte no hi ha matemàtiques” a la XVI Jornada Didàctica Matemàtica d’ABEAM a càrrec d’Anton Aubanell, Sergi del Moral i Andrea Ricther [32]

8. DISSENY I CREACIÓ DE MATERIALS I ACTIVITATS

8.1. MATERIAL PER TREBALLAR LA VISUALITZACIÓ A L'ESPAI

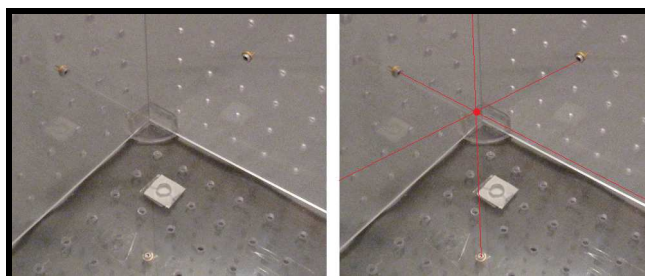
8.1.1. LA IDEA

La idea sorgeix al treballar contínuament amb alumnes de batxillerat la geometria a l'espai. Te n'adones que el que per a tu és una idea quasi palpable, per a ells són tot un seguit de conceptes abstractes. Hi ha conceptes que són difícils de transmetre mitjançant la visualització però les rectes, els plans, les interseccions entre ells, les distàncies... són "objectes" que, d'alguna manera, poden ser fàcilment representables però s'ha de tenir un material que ens ho permeti. És per això que s'ha provat de construir un geoespai (però amb la idea de poder treballar amb làsers per simular aquests "objectes").

8.1.2. LA CONSTRUCCIÓ

Inicialment, la idea era crear un geoespai on es visualitzessin, mitjançant làsers, els eixos de coordenades així com tot un seguit de rectes perpendiculars a cada un dels plans coordenats que permetessin situar diferents punts a l'espai. Per tal d'aconseguir-ho, necessitava d'un gran nombre de làsers i fum per veure el feix de llum que emetia cada un dels làsers. Treballar amb làsers és molt còmode doncs fan la funció que necessitem i no obstaculitzen l'interior del geoespai. Donat l'elevat preu que podia suposar la compra d'una quantitat de làsers considerable, es va decidir una solució mixta que ha donat molts bons resultats. Amb tres làsers podem situar punts a l'interior de la caixa.

Exemple: Es vol visualitzar el punt $(5, 3, 4)$. Els alumnes han de col·locar un làser sobre cada un dels plans coordenats. Un en el punt $(5, 4)$, l'altre en el punt $(3, 4)$ d'un altre pla coordenat i l'altre en el $(4, 3)$. Veure fotografia següent:



Làsers fixats a les parets del geoespai simulant un punt

Així mateix, amb altres làsers i cordes que es poden anar fixant amb ganxos a les parets de la caixa, simulem rectes a l'espai.

L'ús de làsers té moltes avantatges però donat que el fum podia ser un inconvenient, es van estar buscant làsers que no necessitessin partícules de fum per tal de veure el feix que emetien, en definitiva, làsers amb més potència. Un cop aconseguit, tot just surt una notícia al diari:



Noticia del diari La Vanguardia del dia 13 de Novembre del 2013

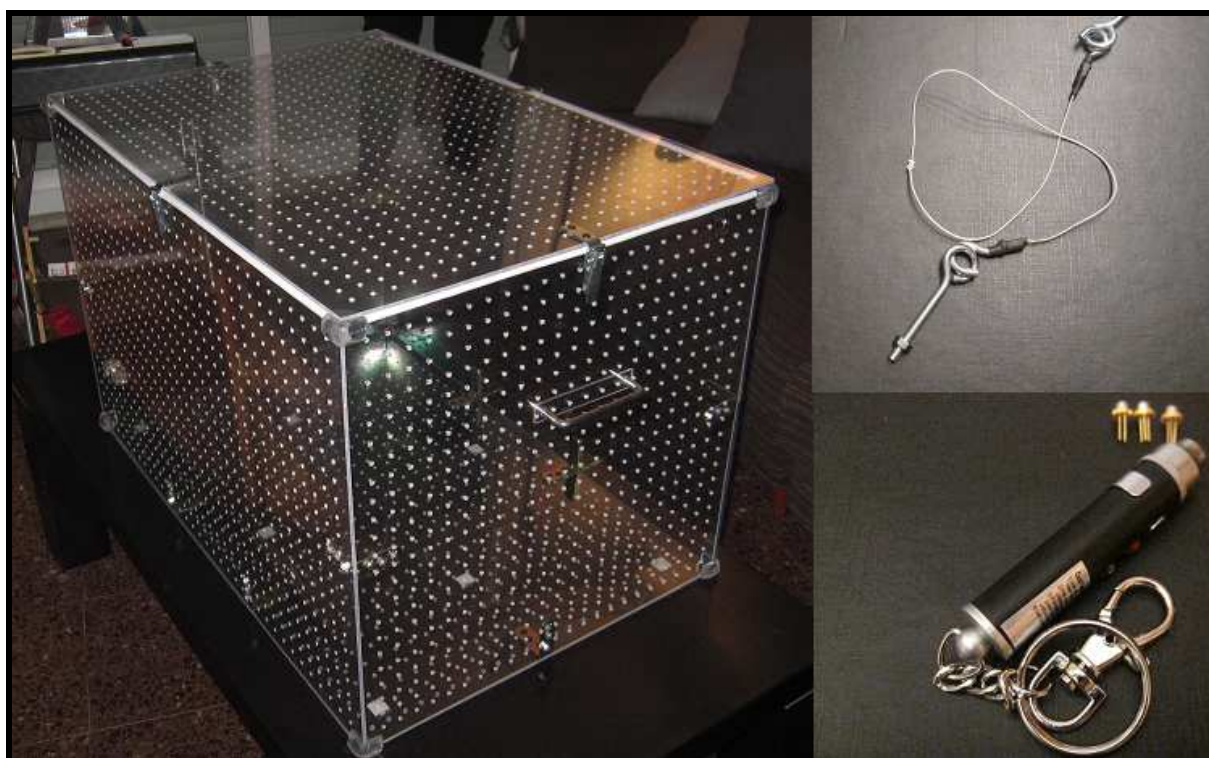
Així que es va tornar a la idea inicial, làsers amb menys potència i fum. Es necessitava doncs d'una capsula tancada però que les parets permetessin veure l'interior. Es per això que es va optar pel metacrilat. Aquest tenia que està foradat per que el feix de llum del làser, al passar a l'interior de la capsula, no es refractés o reflectís. Els forats es van fer amb una fresadora per control numèric.

La capsula té unes dimensions de 725 mm d'amplada, 485 mm d'alçada i 485 mm de fondària. Estan totalment foradades les dues bases, una de les parets laterals de la capsula i una frontal. Els forats estan separats una distància de 20 mm i de radi el mateix que els làsers petits per tal que els làser es quedin fixes quan ens interressi.

S'han afegit més tard petites peces per tal de millorar la funcionalitat del material així com potes, nanses, un forat on poder acoblar un tub per a l'entrada directe de fum des de la màquina...

8.1.3. EL MATERIAL FINAL

Per tal que aquest recurs sigui ric des del punt de vista competencial, s'ha fet primer recerca del material més oportú per a la construcció. En segon lloc, creació i disseny d'aquest material i reflexió i avaluació del seu funcionament a l'aula.



Geoespai (preparat per treballar amb cordes, làsers...)

Per analitzar el nivell de qualitat didàctica dels recursos creats s'han tingut en compte els indicadors de qualitat i avaluació de Recursos Materials i Activitats Experimentals (RMAE) que defineix Anton Aubanell en la seva llicència d'estudis [33]. És una adaptació de la norma ISO/IEC 9126 als recursos didàctics materials:

Característica: Funcionalitat

- Aporta clarament els conceptes que desitgem treballar i al nivell que els desitgem treballar.

- Ofereix un alt grau d'ajustament respecte el model ideal que es vol treballar ("doncs a on no han pogut arribar els làsers, arriben les cordes"). I el nivell de precisió és suficient.
- S'ha de tenir cura si es treballa amb làsers i fum per tal de que el material no presenti cap risc.

Característica: Usabilitat

- És senzill d'aprendre com funciona i de manipular.
- Es compren fàcilment la idea que el recurs vol transmetre.

Característica: Fiabilitat i eficàcia

- Atrau l'atenció de l'alumnat
- Es tracta d'un recurs ja creat, el geoespai, amb la diferència que aquest se li pot incorporar l'ús de làsers.
- Té capacitat per interaccionar fluidament amb l'alumnat
- Donat que veuen que estan entenen molts dels conceptes i eines que els han ensenyar a aplicar, l'interès de l'alumnat és gran i es genera poca dispersió en la seva atenció.

Característica: Eficiència

- Requereix poc temps per a que el recurs faci la seva funció.
- El que si es necessita és temps per a la seva construcció.

Característica: Portabilitat

- El material és fàcil d'aconseguir, el muntatge, com s'ha dit en el punt anterior, no ho és tant.
- Amb unes anses que se li han incorporat al material, és més fàcil de portar doncs és bastant lleuger. Això sí, és voluminós i, per tant, dificulta de vegades la portabilitat.

Característica: Manteniment

- És fàcil de reparar si es produeix algun desperfecte (a les juntes, cantoneres, potes, anses...). Si el desperfecte es produís en el metacrilat, costaria més de reparar.
- No és fràgil.

8.1.4. CONTINGUTS QUE ES PODEN TREBALLAR

En termes generals es poden treballar tots els continguts de geometria a l'espai propis del batxillerat:

- Situar un punt a l'espai.
- Simular rectes i plans a l'espai. Estudiar la seva posició relativa.
- Calcular distàncies entre punts, rectes i plans a l'espai.
- Calcular angles entre rectes, entre plans i entre rectes i plans.
- Idea de projecció ortogonal.
- Còniques.
- Continguts de geometria al pla.

Malgrat que la majoria d'aquests continguts corresponen a batxillerat, la potència visual del recurs que s'ha creat permet avançar a l'ESO al treball entorn a alguns d'aquests temes.

8.2. ACTIVITAT A3A. LA GESPA DEL CAMP NOU

8.2.1. LA IDEA

Els conceptes d'àrea i de volum, encara que es tracti de nocions corrents a la vida diària, no són senzills. Hi ha una tendència natural a confondre perímetres amb àrees i superfícies amb volums.

Emma Castelnuovo en un dels seus llibres [34], invitava a fer la pregunta següent als alumnes més joves: *“D'un quadrat en sabem l'àrea; com podem determinar-ne la longitud del costat?”*. Molts alumnes responen que cal dividir per quatre el nombre que dóna l'àrea per tal d'obtenir el costat.

En el cas dels volums es pot fer un experiment revelador que ja proposava Galileu: *“Agafeu un full de paper rectangular i pregunteu als vostres alumnes si generarà el mateix volum en girar al voltant de l'un i de l'altre costat, comprovareu que molts estan convençuts que el resultat ha de ser el mateix”* [35]

La mesura d'àrees i volums es tracta d'un tema molt important, però no ha de monopolitzar tota l'atenció geomètrica. Ha tingut, tradicionalment, una forta presència en els programes de secundària. Avui en dia, adquireix una nova dimensió: és un context idoni per al treball

del llenguatge i dels procediments geomètrics, afegits al seu valor intrínsec com a contingut i és que cal combinar la mesura directa i la mesura indirecta si es vol assolir un aprenentatge significatiu de l'alumnat. Actualment es tendeix a passar d'un plantejament geomètric més descriptiu i algorísmic (que insisteix en fórmules de càlcul d'àrees i volums) a un plantejament més constructiu i experimental.

8.2.2. DESCRIPCIÓ DE L'A3A

Tot seguit es descriurà cada una de les fases de l'activitat.

El primer acte, l'estímul visual: Es pot observar una fotografia del camp nou projectada a la pissarra digital i un quadre de col·leccionista d'un tros de gespa del Camp Nou. En ell, apareixen els noms dels jugadors que han jugat sobre aquesta gespa així com els títols guanyats. Es demana als alumnes que escriguin i expressin la pregunta que es fan en veure aquesta relació d'objectes i conjeturin una resposta.



Fotografia del Camp Nou i quadre de col·leccionista d'un tros de gespa del Camp Nou

En aquest moment tenim ja als alumnes motivats per la situació que es presenta, implicats personalment, amb ganes de fer-se preguntes i de respondre-les. Durant el segon acte, es donen les eines que els alumnes creuen necessitar per tal de donar solució a la pregunta que s'han plantejat (quants trossos de gespa com aquest es poden fer amb la gespa del Camp Nou) Són els alumnes els que demanen les dades. Se'ls proporciona la mesura de

llargada i amplada del Camp Nou en metres i la mesura del tros de gespa en centímetres així com qualsevol altra dada que els sigui d'interès.

En el tercer acte es tracta de posar en comú les respostes dels alumnes i se'ls demana el resum en la seva fitxa d'allò que s'ha fet, s'ha dit, i sobretot allò que s'ha après. Ajudar a formular conclusions i possibles extensions. La solució es pot fer de manera gràfica a escala doncs la preparació de l'alumnat per a la vida quotidiana fa del tot necessari l'ús sistemàtic de representacions a escala per al càlcul d'àrees i volums.

8.2.3. ANÀLISI DE LES FASES I ANÀLISI COMPETENCIAL

Mitjançant la resolució de problemes, la matemàtica ensenya a saber actuar quan ens equivoquem, i a no mantenir una postura inflexible a causa de no voler assumir els errors comesos. Ensenyar una fórmula o un algorisme i resoldre exercicis que són aplicació immediata hauria de requerir poc temps. Ara bé, experimentar, plantejar problemes, comprendre'ls, establir plans de treball, conjecturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjecturar de nou fins a obtenir-ne una que sigui plausible, proposar la solució, redactar les conclusions i exposar-les en públic requereix temps per al qual cal una bona planificació.

Aquesta activitat contribueix a l'assoliment de les competències generals de l'ESO però concretament, contribueix a les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic en la dimensió de resolució de problemes (Veure esquema pàgina 17).

La comprensió de les magnituds i de la mesura són claus per a l'assoliment de la competència 1. L'alumne ha de traduir i donar sentit a problemes formulats de maneres diverses (textos, imatges, objectes...) al llenguatge matemàtic tenint en compte el significat de les dades. És important que en tota aquesta part, el professor/a sigui conscient de la dificultat que, per a l'alumnat, pot representar aquest pas i que hi dediqui temps i atenció, evitant de passar, de manera prematura, a l'aplicació de tècniques.

El raonament proporcional i les relacions mètriques i el càlcul de mesures en figures contribueix a l'assoliment de la competència 2. S'han de posar en joc estratègies resolutives a partir d'experiències prèvies en resolució de problemes però adaptant-les al cas plantejat.

Cal que el professor/a motivi i acompanyi aquest camí mantenint-se en una posició atenta i, alhora, discreta.

Són continguts claus per l'assoliment de la competència 3 el càlcul estimatiu i el sentit espacial entre d'altres. Aquesta competència està directament relacionada amb la competència bàsica Autonomia i iniciativa personal ja que té un component essencial d'autogestió del coneixement combinat amb la confiança en les pròpies possibilitats. Però per assolir-la no n'hi ha prou amb mantenir l'actitud de no rendir-se davant dels obstacles i de practicar un treball metòdic, cal ser conscient que sempre hi ha diversos mètodes correctes de resolució dels problemes, que el camí cap a la solució no és únic, i que la majoria de situacions que ens trobem en la vida permeten una gran diversitat d'abordatges. L'alumnat ha de treballar de forma activa diferents tipus de problemes matemàtics amb diferents enfocaments, propis o aliens. Si no hi ha una actitud de recerca davant d'un problema, no es considera assolida la competència.

El sentit de l'estadística (moment en que en els tres actes es vota l'interès per les preguntes que han anat sorgint) és clau per l'assoliment entre d'altres de la competència 4. En la gradació dels nivells d'assoliment d'aquesta competència es tenen en compte dos criteris. En primer lloc, la complexitat matemàtica del problema o pregunta proposats i, en segon lloc, la coherència entre el problema i el context en què es planteja, és a dir, si les característiques del context es tenen en compte en el problema (quantitat, aproximació, tipus de nombres...), o també si la pregunta proporciona informació rellevant pel context.

En realitat tant la comprensió de les magnituds i mesures, el sentit espacial, el sentit de l'estadística... són continguts claus per l'assoliment de totes 4 competències de la dimensió de resolució de problemes.

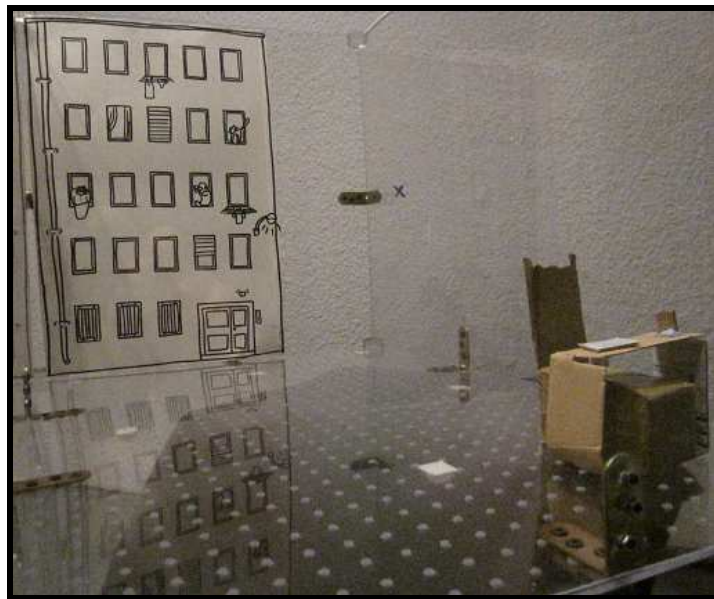
Com reunir aquests continguts en una sola activitat? Les Activitats en Tres Actes en són un exemple per la seva estructura i la seva metodologia.

8.3. ACTIVITAT A3A. L'ESCENARI D'UN CRIM

8.3.1. DESCRIPCIÓ DE L'A3A

Les activitats que hi ha al blog d'en Dan Meyer estan més destinades a un alumnat de secundària però aquesta posa en pràctica coneixements del currículum de segon de batxillerat. De totes formes, l'estructura i metodologia seguides en la creació d'aquesta activitat han estat les mateixes.

Primer acte: Els alumnes observen una maqueta de l'escenari d'un crim situat dins del geoespai. Hi ha una cadira amb una marca negra per la part de darrere del respall de la cadira. Uns centímetres enrere hi ha una làmina transparent que fa de vidre, de l'habitacle on es troba la cadira, amb una altra marca negra. A una de les parets del geoespai paral·lela al vidre de l'habitacle hi ha dibuixat un edifici. Se'ls demana amb quina pregunta relacionen el que estan observant i la conjectura de manera individual d'una resposta.



Maqueta de l'escenari d'un crim (material per a la A3A)

Segon acte: S'arriba a l'acord de prendre un mateix sistema de referència per a tots. Són els mateixos alumnes qui s'aixequen a veure quin és el lloc geomètric tant de la marca de la cadira com la del vidre. Un cop obtinguts els punts, es senten i calculen la trajectòria de la bala que, raonant tots a l'aula, suposem recta. Després amb ajuda, determinen quines són les equacions del pla, en la referència presa. I se'ls indica com fer la intersecció del pla i la

recta. Tots aquests conceptes se solen donar al començament de la unitat de geometria a l'espai però d'aquesta manera s'aprenen durant la resolució d'un problema, como una necessitat per donar resposta a la situació plantejada.

Última fase de l'activitat, el tercer acte: Un cop calculat el punt d'intersecció, el situem d'acord amb el sistema de referència pres i veiem quina és la finestra des d'on han disparat.

Un bon moment per a crear extensions del problema. S'inicia el problema amb un nou sistema de referència per tal de que els alumnes vegin que la solució és diferent però que el lloc geomètric, la finestra, és la mateixa indistintament del sistema de referència utilitzat.

8.3.2. ANÀLISI DE L'ACTIVITAT

Arribat a aquest punt, es pot veure com, per la seva estructura i metodologia, les A3A poden ser eines molt potents per a l'educació matemàtica. Si a més es fa ús de material manipulable, com és en el cas d'aquesta activitat experimental, resulta una activitat totalment competencial.

El com es dur a terme una activitat experimental com aquesta no és una novetat. La Maria Antonia Canals, en el seu decàleg per treballar amb els materials manipulables [36], ja donava importància a tots aquests aspectes que es desenvolupen al llarg d'una Activitat en Tres Actes o quan es treballa amb material manipulable i que nosaltres creiem de gran rellevància per tal que els alumnes assoleixin les competències pròpies de cada etapa educativa.

1. Presentar una proposta de treball, si pot ser en forma d'una petita "investigació".
2. Convidar a l'acció, deixant ben clar què és el que es tracta de fer.
3. Observar els nens i nenes, les seves reaccions, els seus interessos i acollir les possibles idees i iniciatives.
4. Estar disposat a canviar el camí previst per a seguir-les, acceptant l'imprevist.
5. Demanar l'estimació de resultats en les mesures i el càlcul (base del càlcul mental) i l'anticipació de fenòmens geomètrics en l'espai.
6. Provocar i acompanyar la descoberta d'alguna cosa nova. Quan l'han feta, meravellar-se'n i felicitar-los calorosament.

7. Potenciar el diàleg, invitant els alumnes a què expressin allò que han fet i que han vist. Demanar-los una explicació oral coherent.
8. Resumir allò que s'ha fet, s'ha dit, i sobretot allò que s'ha après. Ajudar a formular conclusions.
9. Relacionar-ho amb coses que s'han treballat anteriorment i, a vegades, amb altres activitats (calculadora, estadística...).
10. Opcionalment passar alguna cosa a llenguatge escrit, primer col·loquial i després matemàtic (amb xifres i signes).

Per tal d'analitzar l'activitat, tindrem en compte aquest decàleg.

- La nostra activitat és una investigació com a tal, és una investigació d'un crim.
- No cal explicar massa que es tracta de fer doncs el "conflicte" ja convida a l'acció.
- Sempre és l'acció dels alumnes qui modula el desenvolupament de l'activitat.
- Les A3A constantment accepten l'imprevist.
- Al final del primer acte se'ls demana que conjeturin.
- Tota l'A3A consisteix a provocar i acompanyar una descoberta que respon a unes preguntes que el propi alumne genera en l'inici del primer acte quan apareix l'anomenat "conflicte" amb el seu efecte motivador.
- La A3A constantment convida a que els alumnes s'expressin. Sempre es procura que expressin correctament el que volen dir, demanant acords sobre terminologia, assenyalant relacions entre preguntes...
- És bo procurar que emergeixin conclusions conjuntes clares que responguin al conflicte inicial.
- Concretament aquesta activitat posa en joc conceptes i procediments que s'han treballat al batxillerat sobre geometria a l'espai.
- En aquestes activitats, al final del tercer acte, se'ls demana que facin una descripció global de l'activitat.

El problema és que moltes vegades es sap què s'ha de fer però no com s'ha de fer. Són aquests tipus de recursos els que poden donar la solució a molts dels problemes de l'educació matemàtica.

9. EXPERIMENTACIÓ A L'AULA I ANÀLISI DE L'EXPERIÈNCIA

"Podem entendre experiència matemàtica com qualsevol element o vivència educativa que ens ajuda a recrear i recrear-nos en el saber matemàtic"

Anton Aubanell Pou[37]

9.1. OBSERVACIÓ D'UNA POSADA EN PRÀCTICA D'UNA A3A D'EN DAN MEYER (SOBRES DE SUCRE)

L'A3A dels sobres de sucre dirigida per en Sergi del Moral, professor de matemàtiques de l'Institut Escola Les Vinyes de Castellbisbal, s'ha fet dues vegades, en dues sessions diferents d'una hora. La primera amb el G1 de 1r d'ESO i la segona amb el G4 de 1r d'ESO. Tots dos grups tenen 20 alumnes i s'han agrupats en equips de 4 persones.

De l'observació de l'activitat s'han extret reflexions sobre la metodologia que és convenient tenir presents per posar-la en pràctica:

- **Cal dedicar el temps necessari per recollir totes les preguntes que sorgeixin.**
És important donar-hi pes, personalitat. Tot tenint present que hi ha un punt en el que s'ha de saber tallar.
- **En la mesura del possible és important no jutjar l'interès o la idoneïtat de les preguntes.**
És un bon moment per recollir opinions i estirar les preguntes dels alumnes per tal de compartir significats i aprendre a descriure amb rigor. És la seva pregunta, només seva, i volen fer-se entendre. És un moment molt ric per parar atenció sobre el vocabulari.
- **És important que els alumnes puguin distingir quines parts són de reflexió individual i quines són de debat i treball en equip.**
No estan acostumats a treballar en grup i els costa entendre que el professor/a no estarà darrera d'ells per tal de veure on són. Per això la importància de dir: "Agafeu un paper i escriviu les preguntes que tingueu en relació al que veieu".
- **S'ha de veure la importància de l'ús del rigor en matemàtiques per entendre's entre els alumnes o amb el professor.**

Una alumna ha demanat entendre l'enunciat d'una pregunta i se l'ha reconduït, se l'ha dit que li preguntés a l'alumne que havia formulat l'enunciat

- **On no s'ha de limitar el temps és en el moment de fer estimacions, ni en el moment de realitzar els càlculs.**

Això, s'ha de tenir molt present. Una bona estimació individual és important doncs d'aquesta manera l'alumne està més pendent de l'activitat, no vol fallar. Quan conjecturem ens comprometem amb l'activitat, fem una aposta, la nostra aposta.

9.2. EXPERIMENTACIÓ DE L'A3A (LA GESPA DEL CAMP NOU)

L'activitat ha estat experimentada a L'institut Escola Les Vinyes de Castellbisbal i a l'Institut de Vacarisses.

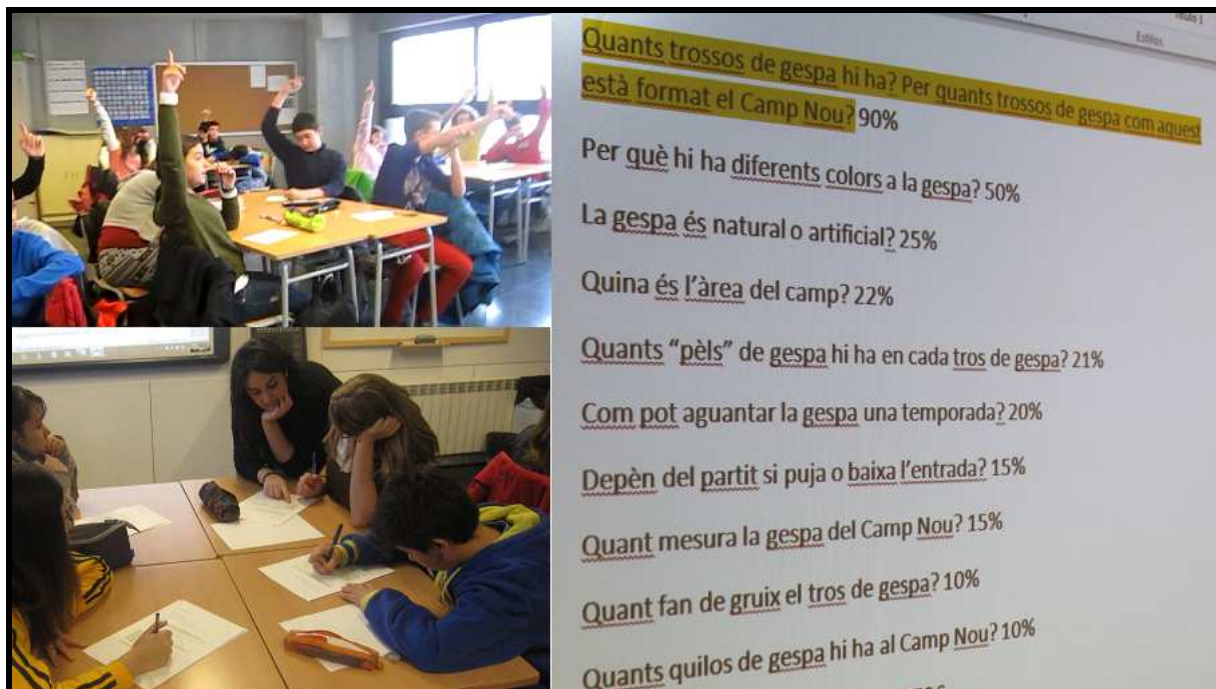
A l'Institut Escola Les Vinyes s'ha dut a terme l'activitat amb dos grups classe diferents, en dues sessions diferents d'una hora. La primera amb el G1 de 1r d'ESO i la segona amb el G4 de 1r d'ESO. Tots dos grups tenen 20 alumnes que hem agrupat en equips de 4 persones.

L'activitat parteix d'una fotografia del Camp Nou a vista d'ocell i una peça de col·leccionista que conté un tros de gespa del Camp Nou. El fet de començar a través d'un objecte físic singularitza l'activitat implícitament transmet el missatge de que avui faran quelcom especial, l'ambient que es genera contribueix positivament a crear "el conflicte", a generar motivació, ganes de conèixer, de participar...

L'estímul inicial ha funcionat molt bé. Han sorgit moltes preguntes abans fins i tot de plantejar cap activitat: què és això? què té a veure amb les matemàtiques?

Situem l'activitat explicant que farem una activitat en tres actes, similar a Piràmide de monedes o Sobres de sucre.

Presentem els objectes i demanem quines preguntes els venen al cap a partir dels dos objectes. Demanem que les escriguin en un full en blanc. Remarquem que tinguin en compte els dos objectes i que pensin en la relació entre ells. Recollim les preguntes a la PDI. La recollida de preguntes és un moment important, és una oportunitat per captar l'atenció de tot l'alumnat, un per un, de manera personal, individual.



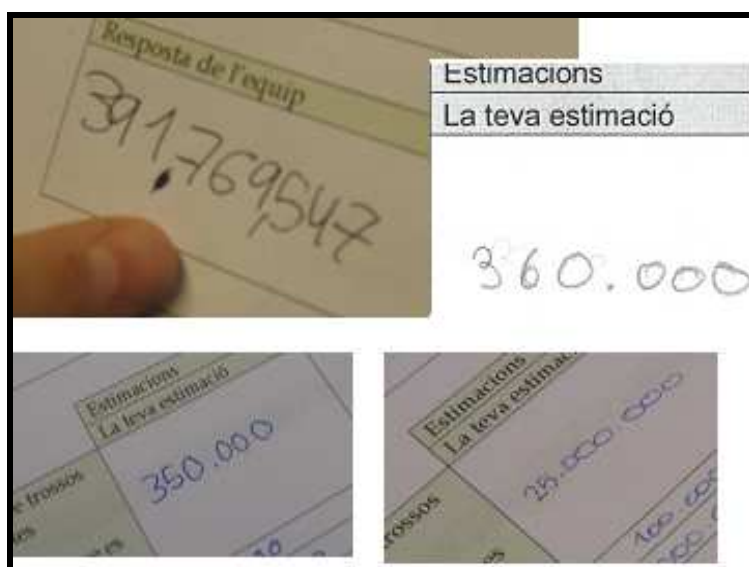
Diferents fotografies de l'experimentació de l'A3A a l'Institut Escola Les Vinyes

En línies generals l'activitat ha funcionat molt bé. Cal tenir en compte que el bon funcionament de l'activitat pot ser degut també a que la persona encarregada de fer l'activitat no era el professor de diari però "supervisada" per aquest per lo que hi havia un equilibri perfecte. Per una banda, l'alumnat no es podia relaxar per falta de confiança amb la persona que hi portava l'activitat però alhora la figura del professor de diari hi era i era una part important de l'activitat per lo que els alumnes se sentien còmodes. Hi havia molt bon clima a l'aula consolidat ja després de tot el trimestre. Sense restar importància al fet que ja havien fet aquest tipus d'activitat altres cops. En definitiva, ha sigut molt fàcil experimentar l'activitat.

M'he oblidat totes dues vegades de dir que agafessin un full cada un per escriure les seves preguntes per diferenciar el que es deia de la part individual i la de grup. S'ha de parar ràpid abans que comencin a dir-les en veu alta doncs això fomentaria el que no volem precisament, que als que els hi costa més començar l'activitat es quedessin enrere.

Una alumna pregunta: "Quant mesura el Camp Nou?". Aquesta pregunta té sentit per a ella, però no pels demés. La podem ajudar: "Què vol dir quan mesura?". I pot ser bo escollir una opció equivocada: "Vols dir quina alçada fa l'estadi?". "No!". "I com podries...?"

Els i les alumnes s'han enganxat a l'activitat i tothom ha participat, tothom. Aquest era l'objectiu principal i encara així, en un moment donat, apurada pel temps en la segona sessió, l'he perdut de vista. Hagués continuat amb l'activitat sinó se m'arriba a fer veure que el millor era esperar a tres persones que encara no s'havien reenganxat, no havien fet les seves pròpies conjetures. Encara sent l'objectiu principal i sabent el pes d'aquest fet, encara veient que havia funcionat, amb l'anterior grup, el moment d'espera comentant les altres preguntes, anava a continuar i això s'ha de tenir en compte.



Estimacions d'alguns alumnes de l'A3A (La gespa del Camp Nou)

Ha faltat temps per poder mastegar més l'activitat, donar temps a arribar a una resposta consensuada pel grup i poder discutir en grup-classe la resolució. Un mínim de dues sessions hagués estat bé. A més, la falta d'experiència en portar una classe, fa que el temps que es dedica a cada cosa no sigui proporcional al temps merescut per a cada fase.

Quedaria incompleta aquesta anàlisi de l'experiència si no giréssim la mirada cap a l'alumnat. Una mateixa activitat presentada per un mateix professor o una mateixa professora, pot donar resultats molt diferents segons l'alumnat a qui va dirigit.

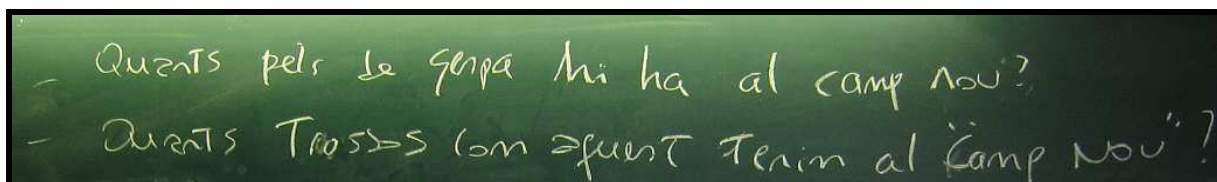
Es per això que s'ha experimentat el mateix tipus d'activitat al mateix curs de l'ESO de l'Institut de Vacarisses. Tan l'Institut Escola de Castellbisbal com aquest pertanyen a la comarca del Vallès Occidental. La diferència entre els grups de Castellbisbal i el de

Vacarisses és que aquest darrer fa una optativa que es diu Unitats i Mesura, assignatura que tracta més de prop els continguts de l'A3A en qüestió.

El bon funcionament d'un material no depèn únicament de l'activitat que es plantegi ni de l'entusiasme del professorat, també depèn, en molta mesura, dels alumnes, del seu interès, del seu estil d'aprenentatge, de l'ambient de cada grup...

Cal tornar a destacar dels grups de Castellbisbal que va ser bastant fàcil dur l'activitat. L'ambient del grup de l'Institut de Vacarisses era més dispers pot ser degut al fet que l'activitat es plantejava des d'una assignatura optativa i que la professora els hi dóna tan sols una hora a la setmana i només havien fet dues sessions amb ella abans de fer l'A3A. Tot i així, el nivell de participació i interès va ser bo.

Es va notar el fet que l'Institut Escola de Castellbisbal ja havia fet unes altres dues Activitats en Tres Actes abans. Al llarg de la sessió ho vaig poder observar a partir de situacions diferents, però ja de bon començament vaig notar que els hi costaria d'arribar a la pregunta d'interès i així va ser. Vaig haver de reconduir la pregunta d'interès dels alumnes (la primera de la fotografia que hi ha a continuació) per tal d'aconseguir que es plantejessin la que ens interessava resoldre (la segona):



Dues de les preguntes que es van fer els alumnes en l'experimentació de l'A3A a l'Institut de Vacarisses

Aquest fet reforça una de les idees de l'apartat 6.1.2 on s'explica que és costós a vegades fer sortir els alumnes de la rutina però que també són fàcils d'acostumar doncs ells estan més preparats pels canvis. Són els docents els que els han d'acostumar, fer que agafin altres hàbits com són el de compromís personal i d'autonomia. L'única manera és posar-los davant de situacions que requereixin aquests dos aspectes.

Tanmateix, però, un alt percentatge d'alumnes de l'Institut Vacarisses, en el moment de fer els càlculs, va demostrar conèixer i saber calcular l'àrea doncs, com s'ha dit, cursen

l'assignatura d' Unitats i Mesura i just a la sessió anterior, de manera casual, havien sortit a calcular l'àrea del pati.

En general, en tots els grups, encara que s'estiguin produint converses interessants, sovint el nivell de soroll dins de l'aula és alt. De vegades a causa de la pròpia motivació del alumnes, altres per simple dispersió, en qualsevol cas es raonable pensar que es podria aconseguir el mateix ambient de treball reduint el nivell de soroll si el grup en fos conscient. Aconseguir-ho, però, està molt relacionat amb els hàbits i els costums dels alumnes, amb l'ambient habitual de treball

A més, a Vacarisses tenen un altre estil d'aprenentatge i no estan acostumats a treballar en equip. El treball en equip requereix més compromís per part de l'alumnat. És més fàcil distreure's i no "aprofitar" el temps. Cal cert entrenament per a que funcioni de manera eficient.

De les dues experiències es creu que es va treure un bon profit educatiu. L'ús de recursos materials i activitats experimentals a classe sol tenir per al nostre alumnat un valor afegit d'interès, de sorpresa, de participació, d'atenció, de vivència... que no sempre aconseguim amb altres tipus de recursos.

9.3. EXPERIMENTACIÓ DE L'A3A (L'ESCENARI D'UN CRIM)

L'activitat ha estat experimentada a l'Institut La Mallola d'Esplugues de Llobregat a un grup de 26 alumnes de 2n de batxillerat de la modalitat de ciències.

Ha estat plantejada a partir d'una maqueta de l'escenari d'un crim situada en el geoespai, material manipulable descrit en l'apartat 8 del present treball.

Al començament, els alumnes han quedat sorpresos i a la vegada desconcertats doncs no imaginaven què és el que anaven a fer. Un cop explicat el format d'aquestes activitats i donades les pautes pertinents, han aconseguit mantenir l'atenció fins el final de la sessió i es podria concloure que aquesta s'ha dut a terme amb èxit, entenent aquest èxit com aconseguir que l'alumnat estigui motivat durant tota la sessió.

Presentem la maqueta als alumnes i expliquem que aquest representa l'escenari d'un crim. En el moment en el que se'ls demana quines preguntes els suggereix la situació plantejada,

no hi ha gaire diversitat. La majoria es qüestiona “des d'on han disparat?” que, realment, és la pregunta que volíem abordar. Sorgeixen altres preguntes equivalent que permeten centrar-nos en la pregunta objectiu.

Comença el moment de les conjectures. Com en la maqueta apareix el dibuix d'un edifici, concreten més la seva pregunta: “des de quina finestra han disparat?”.

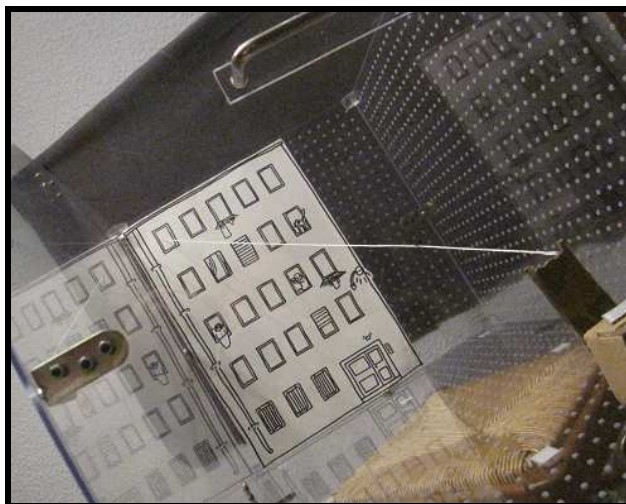
Els alumnes ja estan implicats personalment en el problema, és el moment en que han de demanar la informació que creuen necessitar per resoldre l'activitat. Coneixen l'objectiu, aconseguir l'equació de la trajectòria de la bala (que suposen recta). Així i tot s'observa que no tenen l'agilitat suficient per a fer els càlculs de manera autònoma, és per això que l'activitat en aquesta fase s'ha dut a terme de forma molt guiada (Annexos).

Demanen els punts de la recta i, tal i com s'exposa en l'apartat on es descriu aquesta activitat, són el mateixos alumnes els que s'apropen a la maqueta i observen en quin lloc geomètric es troba tant la marca de la bala a la cadira com la del vidre. És en aquest moment que se'ls fa notar la importància de prendre un sistema de referència comú donat que l'activitat en aquest punt es desenvoluparà conjuntament. De totes maneres, se'ls comunica que dedicarem una altra sessió per a que de manera autònoma mirin de resoldre el mateix problema però prenent un altre sistema de referència.

Fins aquest moment els alumnes no disposen la fitxa de treball doncs es pretén que tota aquesta primera part convisqui a la reflexió i al diàleg. Es preocuparan de contestar a totes aquelles preguntes que s'han plantejat a nivell de grup.

Un cop calculada l'equació de la recta es fa una reflexió conjunta. La majoria dels alumnes, s'han adonat que necessitaven l'equació del pla on es troba la façana de l'edifici. “I com ho sabeu?”, els hi pregunto. “Ho imagino, estem a la unitat de geometria a l'espai”. És aquí quan he estat gairebé deu minuts per assegurar-me de que tots entenien o, si més no, se'n feien la idea, de l'interès que tenia trobar l'equació del pla. Aquest moment és sorprenent, pensava que seria un concepte força complicat de transmetre i no ha sigut així. Se'ls ha acompanyat en la cerca d'aquesta equació però sense calcular ni els vectors directors, ni el vector normal al pla. Estic acostumada a veure cares estranyes quan, en les meves classes a particulars, faig afirmacions del tipus: “ $A(3,2,1)$, $B(3, 3, -1)$ i $C(3, -2, 0)$ defineixen el pla $x=3$. Es pot observar que la coordenada x és constant i igual a 3”. En canvi, a l'aula s'ha

entès. Per aproximació, podria dir que el 50% de la classe ha entès aquest tipus d'afirmació. Tot seguit hem acabat fent la intersecció de la recta i el pla trobats i han pogut veure la solució de manera gràfica.



Solució gràfica de l'Activitat en Tres Actes plantejada

Des del punt de vista personal, ha estat molt satisfactori veure l'interès que ha suscitat l'activitat. Per a mi, era tot un repte aconseguir fer partícip a tots els alumnes del gaudi que suposa afrontar un problema matemàtic. Crec fermament que aquest tipus d'experiència pot encendre el desig de conèixer, tan de l'alumne com del docent, i que pot deixar, tant en l'esperit com en el caràcter, una empremta que perduri tota una vida.

10. CONCLUSIONS

Al finalitzar aquest, el meu Treball Final de Grau, tinc una idea molt clara: hi ha molta tasca a fer a l'educació matemàtica a secundària, tanmateix la introducció de noves metodologies que donin un major protagonisme a l'alumnat i la incorporació de nous recurs (A3A, materials, TIC...) són clarament línies de progrés.

Penso que no es pot dir que el sistema educatiu ha de treballar per competències i no fer canvis metodològics en determinades activitats. Fer canvis en la metodologia pot resultar costós (formació del professorat, inèrcies, creences...) però, amb aquest treball, m'agradaria posar de manifest que és possible integrar, de manera més contundent, la resolució de problemes a l'activitat d'aula i, particularment, la resolució de les activitats en tres actes (A3A). Aquest tipus d'activitats poden aportar línies de solució a alguns dels problemes de l'educació matemàtica. Ben segur que calen també altres canvis (institucionals?, organitzatius?, normatius?) però, si més no, aquest canvi metodològic és un dels canvis que pot abordar el docent i que pot contribuir a millorar molt l'educació matemàtica actual. Tant l'ús del material manipulable com les conviden a que els alumnes s'expressin i això és el que genera coneixement.

D'igual manera que s'ha citat en l'apartat 5.1 que no és útil copiar, per bé que funcionin, altres models educatius, en el cas de les A3A, tampoc es poden fer còpies idèntiques. El que s'ha de fer és estudiar-les per trobar les millors solucions possibles tot tenint en compte la pròpia realitat de l'aula.

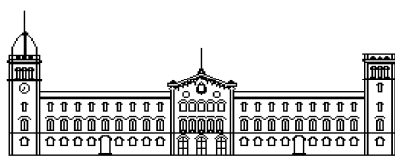
Com en totes les innovacions educatives, cal tenir la virtut de saber esperar si de bon començament els recursos no funcionen com s'espera. En general, a les persones ens costa acostumar-nos a les coses, i no esperem el suficient temps per valorar si són bons canvis o no, jutgem abans de provar i, en aquests casos, ho argumentem amb que costa molt treballar a l'aula amb els nois i noies d'avui en dia.

Estic convençuda que són clarament línies de progrés que espero saber aplicar i aprofundir en el meu futur exercici professional com a docent.

11. BIBLIOGRAFIA

Nº	TIPUS	INFORMACIÓ
[1]	Informe	Program for International Student Assessment OCDE, 2012
[2], [3], [4]	Estudi	Els sistemes educatius europeus. Crisi o transformació? J. Prats Cuevas, Fundació La Caixa, 2005
[5]	Cita	http://calculus.mejorforo.net/t1-la-practica-de-la-ensenanza-de-la-matematica
[6], [7], [8], [9]	Publicació	Problemas en educación matemática Humberto Alagia
[10]	Informe	Curriculum ESO Dpt. Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Servei de Comunicació i Publicacions
[11]	Informe	Currículum Batxillerat Dpt. Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Servei de Comunicació i Publicacions
[12]	Cita	http://departamentodematematica.blogspot.com.es/2009/03/luis-santalo.html Lluís Santaló, 1985
[13]	Informe	Document d'identificació i desplegament de la competència matemàtica a l'ESO Dpt. Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Servei de Comunicació i Publicacions, gener 2013
[14], [15]	Artícle	Aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas M. Torres Seguro, Altadis.net, setembre 2006
[16], [17], [18], [19], [21]	Cita	http://platea.pntic.mec.es/jescuder/prob_int.htm
[20]	Cita	Conferència El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes Claudi Alsina, 2012
[22]	Llibre	How to solve it Polya, Princeton, 1945
[23]	Llibre	Para pensar mejor Miguel de Guzman, Pirámide, 2006
[24]	Conferència	Un poquito más cerca XVI JAEM de Palma, 2013
[25]	Llibre	Casi todas las ideas didácticas de Puig Adam Puig Adam, 1960

[26]	Llibre	Math made visual: Creating Images for Understanding Mathematics Claudi Alsina i Roger B.Nelsen, 2006
[27]	Llibre	Didàctica Magna Janos Comenius, editorial, 1657
[28]	Cita	http://revistasuma.es/IMG/pdf/56/039-042.pdf Henri Poincaré
[29]	Cita	http://www.webdianoia.com/moderna/kant/kant_fil_prob.htm Kant, data
[30], [31]	Blog	http://blog.mrmeyer.com/?p=10285 Dan Meyer
[32]	Diapositiva	"Sense conflicte no hi ha matemàtiques" a la XVI Jornada Didàctica Matemàtica d'ABEAM Anton Aubanell, Sergi del Moral i Andrea Ricther
[33], [37]	Estudi	Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària. Anton Aubanell Pou, 2005-2006
[34], [35]	Cites	Geometria a secundària Damià Sabaté, UPC
[36]	Decàleg	http://imaginary.fme.upc.edu:8080/bloc/-/blogs/maria-antonia-canals-i-el-gamar Maria Antonia Canals



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

**EXPLORACIÓ D'UN FORMAT NOU
D'ACTIVITAT MATEMÀTICA A L'EDUCACIÓ
SECUNDÀRIA I CREACIÓ I EXPERIMENTACIÓ
D'UN RECURS MATERIAL**

Laia Fandos Ardite

Annexos

Directors: Sergi del Moral Carmona
Anton Aubanell Pou
Realitzat a: Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 27 de gener de 2014

ÍNDEX

1. ANNEXOS

1.1. FITXES DEL TREBALL DELS ALUMNES

1.2. ANÀLISI DE LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA PER PART D'UNA ALUMNE SENSE PRÈVIA EXPLICACIÓ



1. ANNEXOS

1.1. FITXES DEL TREBALL DELS ALUMNES

ACTIVITAT EN TRES ACTES

Aquest tipus d'activitat és diferent a les activitats amb les que estem acostumats a treballar doncs no parteixen d'un enunciat. L'enunciat el formula el propi alumne a partir del que observa al mostrar-li una fotografia, un vídeo, un objecte...

1. Què s'observa?
2. A partir del que se'ns mostra, quina pregunta ens plantegem?
3. Quina és la pregunta que ens plantegem a nivell de grup de classe?
4. Estima, de manera individual, una resposta per a la pregunta anterior:
5. Què hauríem de saber per tal de respondre a la pregunta?

6. Què necessitem per tal de trobar la trajectòria de la bala?

Indicació: Suposant que la trajectòria descrita per la bala és recta, notem que és equivalent preguntar-nos què necessitem per tal de trobar l'equació de la recta.

7. Un cop determinat un sistema de referència, s'observa que la recta, en el nostre sistema de referència, passa pels punts:

8. Troba l'equació de la recta:

Equació de la recta en forma vectorial (1)	Equació de la recta en forma paramètrica (2)
Equació de la recta en forma continua (3)	Equació de la recta donada com a intersecció de dos plans (4)

Observació: No coneixem el lloc exacte des d'on han disparat, només sabem que forma part de la trajectòria de la bala. Per tal de determinar-lo ens hem de plantejar si sabem alguna cosa més del lloc des d'on ha estat disparat.

9. Quina altra informació necessitem per resoldre el problema?

--

10. Fes els càlculs pertinents per trobar la solució:

Indicació: Notem que si un punt pertany a una recta i a un pla conegudes les seves equacions, per tal de trobar el punt, s'ha de fer la intersecció.

Intersecció entre pla i recta (1)

Intersecció entre pla i recta (2)

11. Escriu com podríem trobar-nos formulat aquest problema en un llibre de text:

LA GESPA DEL CAMP NOU

Data:

Nom i cognoms:

Companyes i companys d'equip:

Grup:

Quina pregunta ens plantegem al veure la fotografia del Camp Nou i el quadre amb gespa extreta del camp? Què volem saber?

	Estimacions	
	La teva estimació	L'estimació de l'equip
Nombre de trossos (d'aquestes mateixes dimensions) que es poden extreure del Camp Nou		
Fita inferior:		
Fita superior:		
Interval del grup		

Quina informació necessiteu per respondre la pregunta?

Espai per a càlculs

Resposta de l'equip

Explica el procès que heu seguit per arribar a una resposta

1.2. ANÀLISI DE LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA PER PART D'UNA ALUMNE SENSE PRÈVIA EXPLICACIÓ

ANÀLISI DE LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA PER PART D'UNA ALUMNE SENSE PRÈVIA EXPLICACIÓ.

Un quadrat màgic especial

Tenim un quadrat màgic amb els següents números:

Quadrat màgic 1

5	22	18
28	15	2
12	8	25

La suma de les seves files, columnes i diagonals principals, que anomenem constant màgica, és 45. Però aquest quadrat té algo especial. Per veure-ho, utilitzem com idioma l'anglès, substituïrem cada un dels números del quadrat pel número de lletres de la paraula amb la que s'escriu aquest número en anglès. Així, ens adonem que el que obtindrem és un altra quadrat màgic especial:

Quadrat màgic 2

4	9	8
11	7	3
6	5	10

ACTIVITAT

S'ha de construir un quadrat màgic de manera que al utilitzar d'idioma l'espanyol, tinguem un altre quadrat màgic especial.

Quadrat màgic 1

y		
		x
z		

Quadrat màgic 2

		x
	y	

Indicacions:

→ Els números x i y indicats en els quadrats màgic següents sumen 8 i la diferència es 2.

→ Del número z indicat en el primer quadrat màgic sabem:

- . Número de quatre xifres.
- . La xifra de les centenes és 0.
- . Les altres xifres sumen 6.

. La diferència del número que surt al invertir les xifres i el número buscat és 3996.

. La diferència de la xifra de les unitats i 5 vegades la xifra de les unitats de mil·ler és la xifra de les decenes.

→ En el primer quadrat màgic, la suma de les seves files, columnes i diagonals principals és 3009.

SOLUCIÓ**Quadrat màgic 1**

3	2005	1001
2001	1003	5
1005	1	2003

Quadrat màgic 2

4	11	6
9	7	5
8	3	10

TREBALLEM LA MATEMÀTICA EMOCIONAL...

Aquest treball d'exploració del que deia a la part teòrica que era important realitzar, s'ha fet amb una alumna influïda per fortes tensions emocionals al voltant de les matemàtiques presents durant tota la seva vida.

Vaig separar l'estudi en 4 etapes basant-me en la distinció que fa Polya de les etapes en la resolució de problemes:

1. **Comprendre el problema**
2. **Concebre un pla**
3. **Executar un pla**
4. **Examinar la solució obtinguda: visió retrospectiva**

1. Comprendre el problema

12:16

Ho ha entès perfectament, quan se li ha preguntat per si tenia la sensació de pànic que té de vegades ha respòs contundent que **no té por** perquè no sentia cap pressió.

Quan ho compara amb la sensació que tindria si fos un problema d'examen diu que segurament el seu nivell de comprensió de l'activitat baixaria perquè li posa nerviosa el fet de no haver fet cap activitat igual abans.

12:20

2. Concebre un pla

Se li nota **segura de si mateixa**, sap que té eines per resoldre aquest problema doncs diu "tu saps més que ningú els coneixements que tinc així que segurament pugui resoldre'l sense problema" Afegeix que en canvi creu que quan tingui que resoldre els problemes de la Selectivitat es bloquejarà perquè pensa que la persona encarregada de posar-li l'activitat no sap si a ella li han donat totes les eines per resoldre aquell problema.

Se li pregunta perquè planteja aquest problema mitjançant sistemes. Contesta que ha arribat a un punt que quan pensa en que ha de trobar varies incògnites, de manera sistemàtica, prepara un sistema d'equacions. Amb això penso que és bo que alguns processos es tinguin mecanitzats per guanyar temps en la resolució i poder parar-se a pensar altres coses.

3. Executar un pla

12:27

En la resolució del sistema d'equacions lineal de dues equacions i dues incògnites no es bloqueja en absolut (ho té assimilat completament, el pas del temps fa molt) però en el sistema d'equacions lineals de tres equacions i tres incògnites (per Crammer) **es bloqueja** per uns moments i escriu " $2 + 3 = 6$ ". Li pregunto si sabia dir-me per què li passa i em diu que probablement perquè ho ha après fa poc i encara no sap si ho aplica de manera correcte. El veure tantes indicacions **la col·lapsa** però de forma momentània.

Li pregunto per la notació que utilitzarà i si es important posar una lletra o una altra i em contesta que molt per la seva professora de matemàtiques.

Expressa que **es sent bé** doncs **creu que ja ho té controlat**. Té **confiança en ella mateixa** en quant a les eines utilitzades però en el plantejament està **més insegura**.

Li faig analitzar aquest últim comentari i m'explica que de les eines està **segura** perquè les ha utilitzat moltes vegades. En el cas del plantejament, tracta de buscar una relació amb un problema similar encara que amb un altre tipus de redactat i **busca l'aprovació** en la meua expressió per sentir que ho pot estar fent bé que és el que li **motiva** per continuar.

13:02

S'equivoca al resoldre Crammer. Li pregunto per què creu que s'ha equivocat i em diu que perquè li ha sortit un decimal. Jo li dic que aquesta en general, no és una raó (pot ser si en aquest problema de quadrat màgic). En els altres exercicis, quan ja veu que ho ha comprovat varies vegades i li segueix donant un número racional per exemple doncs ho dona per vàlid però que de primeres el primer que pensa és que s'ha equivocat perquè un nombre enter li sembla un resultat més precís.

Després d'això, al anar a resoldre l'altre equació, copia malament un número. ¿Falta de **concentració**? No, la seva **bona postura** dona impressió de concentració i de que **està gaudint en general**. ¿Té ganes d'acabar? Em diu que no i em diu, ja saps que sovint em passa.

M'agrada, ha utilitzat la mateixa lletra per diferents incògnites. Li pregunto si això ho pot fer. I em diu que si que en un moment li ha assignat un valor i ara un altre i que no hi ha problema.

Comença a emplenar els quadrats màgics i en el segon comença contant les lletres que té la paraula amb la que s'escriu el número i exclama: "és millor fer operacions de mates que seguir contant lletres."

4. Examinar la solució obtinguda: visió retrospectiva

13:18

Verifica el resultat ara amb el sistema de contar lletres i així obté el resultat de forma diferent.

Li pregunto si està 100% segura de la solució de la seva activitat i em diu que està el 99% i que veure la meua expressió de felicitat li fa veure que és així.

Els alumnes també busquen les emocions provocades en tu!

Aquesta alumna havia passat per moltíssimes etapes:

Etapa traumàtica: Des de que al col·legi li obliguen a fer càlcul mental en un minut cada dia. Li suposava massa pressió.

Etapa on torna a agafar una mica de gust per les

matemàtiques: 1ESO i 2 ESO doncs li agrada molt com li explica matemàtiques el seu professor. Els exàmens, es poden fer bé si s'estudia.

Etapa on, en moments, sent odi: 3er ESO. La professora primer formalitza i després intenta fer entendre les coses només mitjançant exercicis.

Etapa on, després de molt d'esforç i gràcies a canviar el seu sistema de creences, se sent agust estudiant matemàtiques: 4º ESO i Batxillerat.

-  Emocions
-  Actituds
-  Creences

Miguel de Guzman en el seu llibre *Para pensar mejor* aconsella fer aquest tipus d'exercici.

