

Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

TEORÍA DE ONDÍCULAS

Alejandro Llanos Marías

Directora: María Jesús Carro Rossell
Realitzat a: Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi. UB

Barcelona, 23 de juny de 2014

Índice

1. Introducción	2
2. Teorema de Balian Low	5
2.1. Clase de Schwartz	5
2.2. Distribuciones Temperadas	13
2.3. Teorema de Balian Low	17
3. Introducción a la teoría de wavelets	20
3.1. Análisis de multiresolución	20
3.2. Construcción de wavelets desde un MRA	28
3.3. Caracterizaciones	36
3.4. Ejemplos de wavelets	40
3.4.1. Wavelet de Haar	40
3.4.2. Wavelet de Shannon	41
3.4.3. Wavelet de Franklin	44
3.4.4. Wavelet de Lemarié	44
3.4.5. Wavelet de Lemarié-Meyer	45
4. Conclusión	46
A. Resultados de Análisis Real y Funcional	47
B. Resultados de Análisis Armónico y Teoría de la Señal	49
Bibliografía	51

1. Introducción

En 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier, afirmó que cualquier función periódica se puede expresar como una suma infinita de ondas sinusoidales y cosinusoidales de distintas frecuencias. En el espacio $L^2([0, 1])$, uno de los sistemas clásicos de bases ortonormales es $\{e^{2\pi i k x} : k \in \mathbb{Z}\}$. Dada una función $f \in L^2([0, 1])$, se definen sus coeficientes de Fourier como:

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Además, la función f viene representada a través de su serie de Fourier:

$$S[f](x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Las series de Fourier son una herramienta ideal para analizar ondas sonoras y de luz. Sin embargo, no son igual de eficaces para el estudio de fenómenos transitorios.

El análogo de estas bases para $L^2([\alpha, \beta])$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, se obtiene a través de traslaciones y dilataciones. Para encontrar una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ podemos recubrir \mathbb{R} con una unión disjunta de intervalos

$$[\alpha_j, \alpha_{j+1}) \text{ con } j \in \mathbb{Z} \text{ y } -\infty < \dots < \alpha_j < \alpha_{j+1} < \dots < \infty$$

y considerar una de estas bases para cada espacio $L^2([\alpha_j, \alpha_{j+1}))$, multiplicando el elemento de la base por la función característica de $[\alpha_j, \alpha_{j+1})$, y cogiendo la totalidad de las funciones así obtenidas. Esta base ortonormal, sin embargo, produce efectos no deseados en los extremos α_j cuando intentamos representar una función en términos de esta.

Al querer remediar esta situación consideramos funciones regulares que reemplacen las funciones características de $[\alpha_j, \alpha_{j+1})$ para $j \in \mathbb{Z}$. En el caso de exponenciales complejas y de particiones simples como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$$

estudiamos sistemas de la forma

$$\{g_{m,n}(x) = e^{2\pi i m x} g(x-n) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Un sistema de este tipo, a menudo, es llamado base de Gabor. Como veremos en la siguiente sección, para que dicho sistema sea una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, g no puede ser demasiado regular o "muy localizada".

La teoría de wavelets se puede definir como una alternativa a la clásica teoría de Fourier y tiene como objetivo construir una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ a partir de una única función mediante dilataciones y traslaciones. Una wavelet ortonormal de \mathbb{R} es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ donde

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \text{ con } j, k \in \mathbb{Z}.$$

En 1909, Alfred Haar descubrió la siguiente base de funciones:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

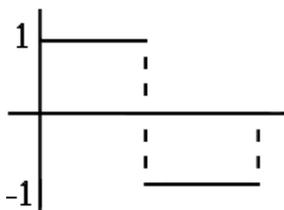


Figura 1: Wavelet de Haar.

Actualmente, se reconoce como la primera wavelet y por ello recibe el nombre de **wavelet de Haar**. En la sección “Ejemplos de wavelets” está completamente desarrollada.

Las wavelets han tenido una historia científica inusual, marcada por muchos descubrimientos y redescubrimientos independientes. Han sido introducidas recientemente, a principios de la década de 1980, cuando surgió una teoría matemática coherente sobre ellas que hizo que hubiera un progreso más rápido. En 1984, un artículo publicado conjuntamente por Morlet y Grossmann introdujo por primera vez el término “wavelet” en el lenguaje matemático. Yves Meyer, en 1985, descubrió las primeras wavelets ortogonales suaves. En 1988, Ingrid Daubechies, construyó las primeras wavelets ortogonales con soporte compacto. Sus wavelets convirtieron la teoría en una herramienta práctica.

El interés de los matemáticos y de los expertos de muchas otras disciplinas en las wavelets es debido a la variedad de aplicaciones que tienen en diferentes ámbitos. Prueba de ello es la gran cantidad de libros y de artículos de investigación que hay sobre ellas (ver, por ejemplo, [1] y [5]).

David Donoho e Iain Johnstone, en 1990, utilizaron las wavelets para “eliminar el ruido” de las imágenes. Dos años después, el FBI escogió un método de wavelets para comprimir su enorme base de datos de huellas dactilares. En 1999, la Organización Internacional de Estándares (International Standards Organization) aprobó un nuevo método de compresión de imágenes digital el cual utiliza wavelets para comprimir archivos de imágenes en una proporción de 1:200, sin pérdidas apreciables en la calidad de la imagen. Actualmente, las wavelets se utilizan en el procesamiento, compresión y eliminación del ruido de imágenes y señales, en la computación de ciertos operadores integrales, en la estimación estadística, en la solución numérica de E.D.P., etc (ver [3]).

Como dijo Dana Mackenzie: “Una forma de pensar en las wavelets es plantear cómo miran nuestros ojos al mundo. Desde un avión un bosque se ve como una cubierta verde. Desde un carro se ven los árboles individualmente. Si nos acercamos vemos las ramas y las hojas. A medida que nos acercamos a escalas más pequeñas, podemos encontrar detalles que no habíamos visto antes”.

El objetivo de este trabajo es introducir la teoría de las wavelets, más concretamente, conocer qué es una wavelet, en qué consiste el análisis de multiresolución, cómo podemos construir wavelets a partir de él, qué caracterizaciones hay sobre ellas y cuáles son algunas de las wavelets más conocidas. El trabajo se divide en dos grandes secciones que son: “Teorema de Balian Low” e “Introducción a la teoría de wavelets”.

En la primera sección, la finalidad es demostrar el Teorema de Balian Low. Dicho teorema dice que si tenemos una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{g_{m,n} = e^{2\pi imx}g(x-n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces g estará necesariamente muy mal localizada en tiempo o en frecuencia, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2|g(x)|^2dx = \infty$ o $\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\hat{g}(\xi)|^2d\xi = \infty$.

Por lo tanto, si escogemos una función suficientemente regular con un decrecimiento rápido en el infinito, entonces al trasladarla por enteros y modularla no producirá una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Para poder entender la demostración del Teorema de Balian Low, he tenido que conocer primero el espacio de las distribuciones temperadas ya que su demostración utiliza unos operadores definidos en este espacio. Así, he estudiado la clase de Schwartz, S_n , para llegar a trabajar con su espacio dual, que son las distribuciones temperadas.

En la segunda sección se presenta un método de construcción de wavelets ortonormales basado en la existencia de una familia de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo unas ciertas propiedades. Tal familia es llamada un **análisis de multiresolución** o **MRA**.

Además de conocer dicho método también conoceremos los pasos para construir wavelets a partir de él junto con algunos ejemplos conocidos y propiedades que satisfacen las wavelets.

Por otro lado, en los anexos encontraremos resultados vistos en las asignaturas optativas del grado de “Análisis Real y Funcional” y de “Análisis Armónico y Teoría de la Señal”. Son resultados que se utilizan constantemente a lo largo del trabajo.

El trabajo está basado principalmente en el libro de E. Hernández y G. Weiss, “A First Course on Wavelets” (ver [4]), y el libro de W. Rudin, “Análisis Funcional” (ver [6]). El resto de bibliografía ha servido para aportar, complementar, comparar,... los diferentes resultados y sus demostraciones de tal manera que el resultado final fuera lo más completo y claro posible.

2. Teorema de Balian Low

Una manera de construir bases ortonormales a partir de una única función consiste en trasladarla y modularla. Por ejemplo, sea $g = \chi_{[0,1]}$ entonces una base de $L^2(\mathbb{R})$ es:

$$g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx} g(x - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Tal y como hemos comentado en la introducción, el objetivo de este capítulo es demostrar el Teorema de Balian Low, el cual nos da la condición que debe satisfacer $g \in L^2(\mathbb{R})$ si el sistema $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal. Este resultado afirma que si una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ genera una base ortonormal a través de traslaciones y modulaciones, entonces g estará muy mal localizada en tiempo o en frecuencia.

Para poder llegar a demostrar este resultado y ver sus consecuencias, necesitamos conocer el espacio de las distribuciones temperadas debido que en la demostración del teorema se introducen dos operadores definidos en tal espacio.

La sección 2.1 introduce la clase de Schwartz y algunas de sus propiedades para así llegar a estudiar su espacio dual que son las distribuciones temperadas como veremos en la sección 2.2. Por último, en la sección 2.3 se presenta y se demuestra el Teorema de Balian Low.

2.1. Clase de Schwartz

Definición 2.1. Sea $D(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \phi \text{ tiene soporte compacto}\}$.

Sea $S_n = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| = \rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

Al conjunto S_n se le conoce como la **Clase de Schwartz**. Una definición equivalente que también se da de la clase de Schwartz es la siguiente:

$$S_n = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_x |(1 + |x|^2)^\alpha D^\beta f(x)| = \rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

Proposición 2.2. $D(\mathbb{R}^n) \subset S_n$.

Demostración:

Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$ y sea K su soporte. Por lo tanto:

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = \sup_{x \in K} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leq M \sup_{x \in K} |D^\beta \phi(x)| < \infty.$$

■

Proposición 2.3. $S_n \subset L^1$.

Demostración:

Sea $f \in S_n$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)(1+|x|^2)^M}{(1+|x|^2)^M} \right| dx \leq \rho_{M,0}(f) \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M} dx.$$

Si vemos que $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M} dx < \infty$ entonces tendremos que $f \in L^1$. Por lo tanto, $S_n \subset L^1$.

Veamos para que M se satisfice $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M} dx < \infty$. Haciendo el cambio a coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-M} dx &= \int_0^\infty \rho^{n-1} (1+\rho^2)^{-M} d\rho \int_{S^{n-1}} d\theta = C_n \int_0^\infty \rho^{n-1} (1+\rho^2)^{-M} d\rho = \\ &= C_n \left[\int_0^1 \rho^{n-1} (1+\rho^2)^{-M} d\rho + \int_1^\infty \rho^{n-1} (1+\rho^2)^{-M} d\rho \right]. \end{aligned}$$

Como $\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^M}$ es una función continua en $[0, 1]$ y además está acotada, entonces:

$$\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^M} d\rho \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+0)^M} d\rho = 1 < \infty.$$

De la integral $\int_1^\infty \rho^{n-1} (1+\rho^2)^{-M} d\rho$ la única singularidad es en el ∞ . Por lo tanto,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho^{n-1} \rho^{2M}}{\rho^{n-1} (1+\rho^2)^M} = 1 \neq 0;$$

$$\int_1^\infty \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2M}} d\rho = \int_1^\infty \frac{1}{\rho^{2M-n+1}} d\rho < \infty \iff 2M - n + 1 > 1.$$

Es decir, si $M > \frac{n}{2}$, por criterios de comparación, $\int_1^\infty \rho^{n-1} (1+\rho^2)^{-M} d\rho < \infty$. ■

Definición 2.4. Una seminorma en un espacio vectorial X es una función ρ sobre X con valores reales tal que:

- $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$
- $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$

$\forall x, y \in X$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$

Observación 2.5. El conjunto $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$ forma una familia numerable de seminormas en S_n , ya que:

$$\rho_{\alpha,\beta}(f+g) \leq \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| + \sup_x |x^\alpha D^\beta g(x)| = \rho_{\alpha,\beta}(f) + \rho_{\alpha,\beta}(g).$$

$$\rho_{\alpha,\beta}(\lambda f) = \sup_x |x^\alpha D^\beta (\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_x |x^\alpha D^\beta (f)(x)| = |\lambda| \rho_{\alpha,\beta}(f).$$

Definición 2.6. Una familia P de seminormas de un espacio vectorial topológico X se dice que separa puntos si para cada $x \neq 0$ existe una $p \in P$ tal que $p(x) \neq 0$.

Observación 2.7. El conjunto $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$ forma una familia numerable de seminormas en S_n que separa puntos.

Definición 2.8. Sea X un espacio vectorial topológico. Diremos que X es F -espacio si su topología τ está inducida por una métrica d invariante y completa.

Teorema 2.9. La Clase de Schwartz, S_n , es un F -espacio.

Demostración:

Como el conjunto $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$ forma una familia numerable de seminormas en S_n que separa puntos, podemos asociar a cada $\rho_{\alpha,\beta}$ una ρ_k con $k \in \mathbb{N}$.

Así, definimos la siguiente función:

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k} \rho_k(f-g)}{1 + \rho_k(f-g)}.$$

Veamos que d es una distancia invariante en S_n con respecto a la cual la clase de Schwartz es un espacio métrico completo.

Comenzaremos viendo que d es distancia.

- La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k} \rho_k(f-g)}{1 + \rho_k(f-g)}$ converge ya que $\frac{\rho_k(f-g)}{1 + \rho_k(f-g)} < 1$ y $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ es una serie convergente.
- Claramente $d(f, g) = d(g, f)$ debido que $\rho_k(f-g) = \rho_k(g-f)$.
- ¿ $d(f, g) = 0 \iff f = g$?

Como $\frac{2^{-k} \rho_k(f-g)}{1 + \rho_k(f-g)} \geq 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ ya que $\rho_k \geq 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y además $\{\rho_k\}$ es una familia que separa puntos, entonces:

$$d(f, g) = 0 \iff \rho_k(f-g) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \iff f - g = 0.$$

- ¿ $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g), \forall f, g, h \in S_n$?

Comenzaremos probando la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k(f-h)}{1 + \rho_k(f-h)} + \frac{\rho_k(h-g)}{1 + \rho_k(h-g)} &= \frac{\rho_k(f-h)(1 + \rho_k(h-g))}{(1 + \rho_k(f-h))(1 + \rho_k(h-g))} + \\ &+ \frac{\rho_k(h-g)(1 + \rho_k(f-h))}{(1 + \rho_k(f-h))(1 + \rho_k(h-g))} \geq \frac{\rho_k(f-g)}{1 + \rho_k(f-g)}. \end{aligned}$$

Esto equivale a ver:

$$\begin{aligned} &[\rho_k(f-h)(1 + \rho_k(h-g)) + \rho_k(h-g)(1 + \rho_k(f-h))](1 + \rho_k(f-g)) \geq \\ &\geq (1 + \rho_k(f-h))(1 + \rho_k(h-g))\rho_k(f-g). \end{aligned}$$

Como $\{\rho_k\}_k$ forman una familia de seminormas, entonces $\rho_k(f + g) \leq \rho_k(f) + \rho_k(g)$ para cualquier $f, g \in S_n$ y $k \in \mathbb{N}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \rho_k(f - g) &= \rho_k(f - h + h - g) \leq \rho_k(f - h) + \rho_k(h - g) \leq \\ &\leq \rho_k(f - h) + \rho_k(h - g) + 2\rho_k(f - h)\rho_k(h - g). \end{aligned}$$

debido que $\rho_k \geq 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (1 + \rho_k(f - h))(1 + \rho_k(h - g))\rho_k(f - g) &= \\ &= \rho_k(f - g) + [\rho_k(f - h) + \rho_k(h - g) + \rho_k(f - h)\rho_k(h - g)]\rho_k(f - g) \leq \\ &\leq [\rho_k(f - h) + \rho_k(h - g) + 2\rho_k(f - h)\rho_k(h - g)](1 + \rho_k(f - g)) = \\ &= [\rho_k(f - h)(1 + \rho_k(h - g)) + \rho_k(h - g)(1 + \rho_k(f - h))](1 + \rho_k(f - g)). \end{aligned}$$

De esta manera, partiendo de la primera desigualdad, al multiplicarla por 2^{-k} y sumando en $k \in \mathbb{N}$ obtenemos el resultado que buscábamos.

Así, d es una distancia y además, como podemos observar, es invariante por traslaciones.

Falta ver la completitud. Sea $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en S_n . Entonces:

$$\sup_x |x^\beta D^\alpha f_i(x) - x^\beta D^\alpha f_j(x)| = \sup_x |x^\beta D^\alpha (f_i - f_j)(x)| \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto, para todo α, β tenemos que $x^\beta D^\alpha f_i(x)$ converge uniformemente en \mathbb{R}^n hacia una función acotada $g_{\alpha,\beta}$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Como $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones derivables en \mathbb{R}^n y $x^\beta D^\alpha f_i(x)$ converge uniformemente en \mathbb{R}^n a $g_{\alpha,\beta}$ entonces, por el Teorema de la Convergencia Uniforme y Derivación, tenemos que existe una función $g_{0,0}$ derivable tal que $f_i \rightarrow g_{0,0}$ en S_n y $x^\beta D^\alpha f_i(x) \rightarrow x^\beta D^\alpha g_{0,0}(x)$.

Por lo tanto, $g_{\alpha,\beta}(x) = x^\beta D^\alpha g_{0,0}(x)$. Así, S_n es un espacio completo. ■

El siguiente teorema es un resultado que necesitaremos para demostrar la continuidad de algunas aplicaciones:

Teorema del Grafo Cerrado 2.10. *Sean X e Y dos F -espacios, entonces todo operador $\Lambda : X \rightarrow Y$ lineal con $G = \{(f, \Lambda f) : f \in X\}$ cerrado en el espacio topológico producto $X \times Y$ es continuo.*

Fórmula de Leibnitz:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta g)$$

para cualquier $f, g \in C^\infty(\Omega)$ y α multiíndice.

Teorema 2.11. Sea P un polinomio, $g \in S_n$ y α un multiíndice. Entonces, cada una de las aplicaciones:

$$f \mapsto Pf, f \mapsto fg, f \mapsto D^\alpha f$$

es una transformación lineal continua de S_n en S_n .

Demostración:

Vamos a demostrarlo para la aplicación $f \mapsto fg$ y las otras dos son análogas.

Entonces, utilizando la fórmula de Leibnitz:

$$\begin{aligned} \sup_x |x^\alpha D^\beta (fg)(x)| &= \sup_x |x^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} c_{\beta\gamma} (D^{\beta-\gamma} f)(x) (D^\gamma g)(x)| \leq \\ &\leq \sup_x \sum_{\gamma \leq \beta} |c_{\beta\gamma} (D^{\beta-\gamma} f)(x)| \rho_{\alpha,\gamma}(g) \leq \sum_{\gamma \leq \beta} \sup_x |c_{\beta\gamma} (D^{\beta-\gamma} f)(x)| \rho_{\alpha,\gamma}(g) = \\ &= \sum_{\gamma \leq \beta} |c_{\beta\gamma}| \rho_{0,\beta-\gamma}(f) \rho_{\alpha,\gamma}(g) < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $fg \in S_n$.

Falta ver que la aplicación es continua. Sea $G = \{(f, \Phi f) | f \in S_n\}$ donde $\Phi(f) = fg$ y $(h, w) \in \bar{G}$. Sea $\{h_i\}$ una sucesión de G tal que:

$$h_i \longrightarrow h \text{ en } S_n \text{ y } \Phi(h_i) = h_i g \longrightarrow w \text{ en } S_n.$$

Veamos que $\Phi(h_i) = h_i g \longrightarrow hg$ en S_n utilizando la fórmula de Leibnitz.

$$\begin{aligned} \sup_x |x^\gamma D^\alpha (h_i g - hg)| &= \sup_x |x^\gamma D^\alpha (h_i g) - x^\gamma D^\alpha (hg)| = \\ &= \sup_x |x^\gamma \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} h_i) (D^\beta g) - x^\gamma \sum_{\beta \leq \alpha} d_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} h) (D^\beta g)| \leq \\ &\leq \sup_x |x^\gamma \sum_{\beta \leq \alpha} k_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} (h_i - h)) (D^\beta g)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} |k_{\alpha\beta}| \rho_{0,\alpha-\beta}(h_i - h) \rho_{\gamma,\beta}(g). \end{aligned}$$

donde $k_{\alpha\beta} = \max \{c_{\alpha\beta}, d_{\alpha\beta}\}$. Así,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_x |x^\gamma D^\alpha (h_i g - hg)| = 0.$$

Por lo tanto, $\Phi(h_i) = h_i g \longrightarrow hg$ en S_n y así, $w = hg = \Phi(h)$. Esto implica que $(h, w) = (h, \Phi(h)) \in G$, es decir, que G es cerrado. Por el Teorema del Grafo Cerrado, Φ es continua. ■

Definición 2.12. Sea P un polinomio de n variables, $P(\xi) = \sum c_\alpha \xi^\alpha = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$. Se definen los operadores diferenciales $P(D)$ y $P(-D)$ por:

$$P(D) = \sum c_\alpha D_\alpha, \quad P(-D) = \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha;$$

$$\text{donde } D_\alpha = (i)^{-|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Teorema 2.13. Sean $f \in S_n$ y P un polinomio. Entonces $(\widehat{P(D)f}) = P\hat{f}$ y $(\widehat{Pf}) = P(-D)\hat{f}$.

Demostración:

Demostremos primero que $(\widehat{Pf}) = P(-D)\hat{f}$.

Sea $t=(t_1, \dots, t_n)$ y $t'=(t_1 + \epsilon, \dots, t_n)$ con $\epsilon \neq 0$. Entonces:

$$\frac{\hat{f}(t') - \hat{f}(t)}{i\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{e^{-ix(t'-t)} - 1}{i\epsilon} e^{-ixt} dx = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\epsilon} - 1}{x_1 i\epsilon} e^{-ixt} dx.$$

Sea $\varphi(x_1, \epsilon) = \frac{e^{-ix_1\epsilon} - 1}{\epsilon}$ y veamos que $|\varphi(x_1, \epsilon)| \leq |2x_1|$. Por el Teorema del Valor Medio tenemos:

$$\frac{e^{-ix_1\epsilon} - 1}{\epsilon} = \frac{\cos(x_1\epsilon) - \cos(x_1 0)}{\epsilon} - \frac{isin(x_1\epsilon) - isin(x_1 0)}{\epsilon} = x_1(-\sin(\xi) - i\cos(\zeta)).$$

Así, $|\varphi(x_1, \epsilon)| = |x_1(-\sin(\xi) - i\cos(\zeta))| \leq |2x_1|$.

Por lo tanto, como $|x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\epsilon} - 1}{x_1 i\epsilon} e^{-ixt}| \leq |2x_1 f(x)|$ y $x_1 f \in L^1$ entonces podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada (A.3) y obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(t') - \hat{f}(t)}{i\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\epsilon} - 1}{x_1 i\epsilon} e^{-ixt} dx.$$

Entonces,

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{f}(t) = - \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e^{-ixt} dx$$

Esto equivale a que $(\widehat{Pf}) = P(-D)\hat{f}$ tomando $P(x) = x_1$. El caso general se prueba por iteración.

Demostremos ahora que $(\widehat{P(D)f}) = P\hat{f}$.

Observamos que si $f \in S_n$ entonces $P(D)f \in S_n$. Sea $e_t(x) = e^{itx}$, entonces se satisface:

- $(f * e_t)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y) e^{ity} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ity} dy = \hat{f}(t)$.
- $D_\alpha e_t = (i)^{-|\alpha|} (it_1)^{\alpha_1} \cdots (it_n)^{\alpha_n} e^{ixt} = (i)^{-|\alpha|} (i)^{|\alpha|} (t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}) e^{ixt} = t^\alpha e_t$.
- $P(D)e_t = \sum c_\alpha D_\alpha e_t = \sum c_\alpha t^\alpha e_t = P(t)e_t$.

Además, utilizando integración por partes tenemos:

$$\begin{aligned}
((P(D)f) * e_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D_\alpha f(x-y) e_t(y) dy = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} D_\alpha f(x-y) e_t(y) dy = \\
&= \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) D_\alpha e_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D_\alpha e_t(y) dy = (f * P(D)e_t)(x); \\
(f * P(t)e_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha t^\alpha e^{ity} dy = \\
&= \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha t^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{ity} dy = P(t) [(f * e_t)(x)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t].$$

Evaluando en el 0 y utilizando las igualdades que acabamos de demostrar, obtenemos:

$$P(t)\hat{f}(t) = P(t)[(f * e_t)(0)] = ((P(D)f) * e_t)(0) = (\widehat{P(D)f})(t).$$

■

Proposición 2.14. *La convergencia en L^∞ es más débil que la convergencia en S_n .*

Demostración:

Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión tal que $f_n \rightarrow g$ en S_n .

Esto equivale a decir que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ se cumple que } \sup_x |x^\alpha D^\beta (f_n - g)(x)| < \epsilon.$$

En particular, si $\alpha = \beta = 0$ tenemos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \text{ se cumple que } \sup_x |(f_n - g)(x)| < \epsilon.$$

Así, $f_n \rightarrow g$ en L^∞ .

■

Teorema 2.15. *La transformación de Fourier es una aplicación lineal, continua, biyectiva, de periodo 4 de S_n en S_n , cuya inversa también es continua.*

Demostración:

Sea $f \in S_n$ y $g(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)$. Veamos que $g \in S_n$.

$$\begin{aligned}
\sup_x |x^\gamma D^\beta ((-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x))| &= \sup_x |x^\gamma (-1)^{|\alpha|} [(D^\beta x^\alpha) f(x) + x^\alpha (D^\beta f(x))]| \leq \\
&\leq \sup_x |x^\gamma (-1)^{|\alpha|} (D^\beta x^\alpha) f(x)| + \sup_x |x^\gamma (-1)^{|\alpha|} (D^\beta f(x))| < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (2.13) tenemos que $\hat{g} = D_\alpha \hat{f}$ y $PD_\alpha \hat{f} = P\hat{g} = (\widehat{P(D)(g)})$.

Además, por (2.11) tenemos que $P(D)(g) \in S_n$ ya que $g \in S_n$. Como $S_n \subset L^1$ entonces $P(D)(g) \in L^1$.

Puesto que la transformada de Fourier de una función integrable es una función acotada, entonces $(\widehat{P(D)(g)})$ está acotada. Así:

$$\sup_x |PD_\alpha \hat{f}| = \sup_x |(\widehat{P(D)(g)})| < \infty$$

Por lo tanto, $\hat{f} \in S_n$. Ahora veamos que es continua.

Sea $G = \{(g, \hat{g}) | g \in S_n\}$ y $(h, f) \in \bar{G}$. Sea $\{h_i\}$ una sucesión tal que:

$$h_i \longrightarrow h \text{ en } S_n$$

$$\hat{h}_i \longrightarrow f \text{ en } S_n$$

Como la transformada de Fourier de una función integrable es una función acotada y $S_n \subset L^1$ entonces:

$$\hat{h}_i \longrightarrow \hat{h} \text{ en } L^\infty$$

Como $\hat{h}_i \longrightarrow f$ en L^∞ debido a la Proposición 2.14, entonces $\hat{h} = f$. Por lo tanto, G es cerrado.

Por el Teorema del Grafo Cerrado, la transformación de Fourier es continua.

Sea $\phi(g) = \hat{g}$. La fórmula de inversión de la transformada de Fourier nos muestra que ϕ es biyectiva en S_n . Además,

$$\phi^2 g(z) = \phi \hat{g}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(z) e^{-ixz} = g(-x)$$

Por lo tanto, $\phi^4 g = g$. De esta manera, $\phi^3 = \phi^{-1}$ y como ϕ es continua entonces ϕ^{-1} es continua ya que es composición de funciones continuas. ■

Teorema 2.16. *El espacio $D(\mathbb{R}^n)$ es denso en S_n .*

Demostración:

Sea $f \in S_n$ y $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ con $\varphi = 1$ sobre la bola unidad de \mathbb{R}^n . Definimos:

$$f_r(x) = f(x)\varphi(rx), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0.$$

Así, $f_r \in D(\mathbb{R}^n)$. Además, utilizando la fórmula de Leibnitz, para todo polinomio P y todo multiíndice α tenemos:

$$\begin{aligned} P(x)D^\alpha(f - f_r)(x) &= P(x)D^\alpha(f(x)(1 - \varphi(rx))) = \\ &= P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(x) r^{|\beta|} (D^\beta(1 - \varphi(rx))). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para todo multiíndice β , $D^\beta(1 - \varphi(rx)) = 0$ cuando $|x| \leq \frac{1}{r}$ ya que $\varphi(rx) = 1$. Como $f \in S_n$, entonces $PD^{\alpha-\beta} f \in S_n$, para todo $\beta \leq \alpha$ por el Teorema 2.11.

De esta manera, (2.17) converge uniformemente a 0 cuando $r \rightarrow 0$. Así pues,

$$f_r \rightarrow f \text{ en } S_n.$$

■

Teorema 2.18. *El espacio S_n es denso en $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración:

Claramente debido a la densidad de $D(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ y el Teorema 2.16.

■

2.2. Distribuciones Temperadas

Definición 2.19. *Una distribución en Ω es una forma lineal definida en $D(\Omega)$ que sea continua.*

$$D'(\Omega) = \{\phi : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{K} : \phi \text{ es lineal y continua}\};$$

$$S'_n = \{f : S_n \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ es lineal y continua}\}.$$

Teorema 2.20. *Sea u una forma lineal en $D(\Omega)$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

- $u \in D'(\Omega)$;
- Para todo compacto $k \subset \Omega$, existe un entero no negativo N y una constante $C < \infty$ tales que para toda función $\phi \in D_k$ se verifica que $|u\phi| \leq C \|\phi\|_N$;

donde $D_k = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{soporte de } f \subset K\}$.

Distribuciones definidas por funciones y medidas:

Sea f una función compleja localmente integrable definida en Ω . Esto significa que f es medible en sentido Lebesgue y que en todo compacto $K \subset \Omega$ se verifica que $\int_K |f(x)| dx < \infty$.

Definimos la distribución asociada a la función f como $u_f(\phi) = \int_{\Omega} \phi(x)f(x)dx$ donde $\phi \in D(\Omega)$. Como,

$$|u_f(\phi)| = \left| \int_{\Omega} \phi(x)f(x)dx \right| \leq \|\phi\|_0 \int_K |f(x)|dx = C \|\phi\|_0$$

donde $\|\phi\|_N = \sup \{|D^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}$, entonces por el teorema 2.20, tenemos que $u_f \in D'(\Omega)$.

Definición 2.21. Las distribuciones temperadas son aquellas $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ que admiten extensión continua a todo el espacio S_n .

Las distribuciones temperadas en \mathbb{R}^n son los elementos de S'_n .

Proposición 2.22. Sea $1 \leq p < \infty$, $N \geq 0$ y g función medible en \mathbb{R}^n tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{-N}g(x)|^p dx = C < \infty.$$

Entonces g es una distribución temperada.

Demostración:

Definimos $\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$. Supongamos $p > 1$ ya que el caso $p = 1$ es todavía más sencillo y sea q el exponente conjugado. Por lo tanto, aplicando Holder:

$$\begin{aligned} |\Lambda f| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)(1 + |x|^2)^N||g(x)(1 + |x|^2)^{-N}|dx \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)(1 + |x|^2)^N|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)(1 + |x|^2)^{-N}|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= C^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{N-M}(1 + |x|^2)^M f(x)|^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq C^{1/p} \left(\sup_x |(1 + |x|^2)^M f(x)| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{N-M}|^q \right)^{1/q} = \\ &= C^{1/p} \left(\sup_x |(1 + |x|^2)^M f(x)| \right) B^{1/q} \end{aligned}$$

donde $B < \infty$ para M suficientemente grande.

Si $f \in S_n$, entonces $|\Lambda f| \leq C^{1/p} \left(\sup_x |(1 + |x|^2)^M f(x)| \right) B^{1/q} < \infty$ y por lo tanto $\Lambda f \in S_n$.

Sea $\{f_i\}$ una sucesión tal que $f_i \rightarrow 0$. Entonces $\Lambda f_i \rightarrow 0$. Por lo tanto, Λ es continua. Todo esto implica que g es una distribución temperada. ■

Teorema 2.23. Sean α multiíndice, P un polinomio, $g \in S_n$ y u una distribución temperada. Entonces las distribuciones $D^\alpha u$, Pu y gu son también temperadas.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata a partir del teorema 2.11 y de las siguientes definiciones:

- $(D^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f)$
- $(Pu)(f) = u(Pf)$
- $(gu)(f) = u(gf)$

■

Definición 2.24. Dada $u \in S'_n$, definimos $\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi})$ con $\phi \in S_n$.

Puesto que la transformación de Fourier es una aplicación lineal continua de S_n en S_n y puesto que u es continua en S_n , resulta que $\hat{u} \in S'_n$.

De esta forma asociamos a cada distribución temperada u su transformada de Fourier \hat{u} que es una distribución temperada.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces f puede considerarse también como una distribución temperada, u_f , por lo que son aplicables dos definiciones de transformada de Fourier. Vamos a ver que las dos definiciones coinciden, es decir, si la distribución asociada a \hat{f} es $\widehat{(u_f)}$.

$$\widehat{(u_f)}(\phi) = u_f(\hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\phi(x)dx = (u_{\hat{f}})(\phi)$$

para cualquier $\phi \in S_n$.

Puesto que $L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'_n$, también nos podríamos plantear si las dos definiciones para la transformación de Fourier coinciden. El resultado es afirmativo, y lo podemos obtener siguiendo los mismos pasos que hemos hecho para una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.25. Diremos que $u_n \rightarrow u$ en S'_n si, y sólo si, para cualquier $\varphi \in S_n$ tenemos que $u_n(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$.

Teorema 2.26. La transformación de Fourier es una aplicación lineal continua y biyectiva, de periodo 4, de S'_n sobre S'_n , cuya inversa también es continua.

Demostración:

Sea $\{u_n\}$ una sucesión tal que:

$$u_n \rightarrow u \text{ en } S'_n \implies u_n(\varphi) \rightarrow u(\varphi), \forall \varphi \in S_n;$$

$$\hat{u}_n \rightarrow v \text{ en } S'_n \implies \hat{u}_n(\varphi) \rightarrow v(\varphi), \forall \varphi \in S_n.$$

Por lo tanto,

$$u_n(\hat{\varphi}) \rightarrow v(\varphi);$$

$$u_n(\hat{\varphi}) \rightarrow u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi).$$

Entonces, $v(\varphi) = \hat{u}(\varphi)$ para cualquier $\varphi \in S_n$. Esto implica que $v = \hat{u}$.

Utilizando el Teorema del Grafo Cerrado, tenemos que la transformación de Fourier es continua.

El resto de propiedades se obtienen inmediatamente del teorema 2.15. ■

Teorema 2.27. Sean $u \in S'_n$ y P un polinomio. Entonces $\widehat{P(D)u} = P\hat{u}$ y $\widehat{Pu} = P(-D)\hat{u}$.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las siguientes definiciones y propiedades:

- $(D^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f)$
- $(Pu)(f) = u(Pf)$
- $(gu)(f) = u(gf)$
- $\widehat{P(D)f} = P\hat{f}$
- $\widehat{Pf} = P(-D)\hat{f}$

donde $f \in S_n$. ■

Proposición 2.28. Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y sean $h_f, h_g \in L^2(\mathbb{R})$ las derivadas de f y g respectivamente en el sentido de las distribuciones, es decir:

$$\langle h_f, \phi \rangle = - \langle f, \phi' \rangle, \text{ para toda } \phi \in S_n,$$

$$\langle h_g, \phi \rangle = - \langle g, \phi' \rangle, \text{ para toda } \phi \in S_n.$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_f(x)g(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h_g(x)dx,$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)h_g(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) + xh_f(x)]g(x)dx.$$

Demostración:

Por la Proposición 2.18, existen sucesiones:

$$\{g_k\}_k \subset S_n \text{ tal que } g_k \longrightarrow g \text{ en } L^2(\mathbb{R}),$$

$$\{f_m\}_m \subset S_n \text{ tal que } f_m \longrightarrow f \text{ en } L^2(\mathbb{R}).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_f(x)g(x)dx &= \lim_k \int_{-\infty}^{+\infty} h_f(x)g_k(x)dx = - \lim_k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'_k(x)dx = \\ &= - \lim_k \lim_m \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)g'_k(x)dx = \lim_k \lim_m \int_{-\infty}^{+\infty} f'_m(x)g_k(x)dx = \\ &= \lim_m \int_{-\infty}^{+\infty} f'_m(x)g(x)dx = - \lim_m \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)h_g(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h_g(x)dx. \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra la segunda igualdad. ■

2.3. Teorema de Balian Low

Teorema 2.29. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx}g(x - n)$ para cualquier $m, n \in \mathbb{Z}$. Si $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|g(x)|^2dx = \infty \text{ o } \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\hat{g}(\xi)|^2d\xi = \infty.$$

Demostración:

Durante la demostración, f' y g' corresponden a las funciones h_f y h_g respectivamente de la Proposición 2.28. Es decir, f' y g' son las derivadas de las funciones f y g respectivamente en el sentido distribucional.

Sean Q y P dos operadores definidos en el espacio S'_n de las distribuciones temperadas, dados por:

$$(Qf)(x) = xf(x) \text{ y } (Pf)(x) = -if'(x).$$

Hemos visto que $L^2(\mathbb{R}) \subset S'_n$ y además, por el Teorema 2.23, estos operadores tienen sentido y están bien definidos.

Como podemos observar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Qg(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx,$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Pg(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(\widehat{Pg(x)})(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

Así, tenemos que demostrar que (Qg) y (Pg) no pueden converger en $L^2(\mathbb{R})$ a la vez. Supongamos que tanto (Qg) como (Pg) convergen en $L^2(\mathbb{R})$ y veremos que llegamos a contradicción. En este caso, se cumple que:

$$\langle Qg, Pg \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle, \quad (2.30)$$

$$\langle Qg, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle \text{ para cualquier } m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.31)$$

$$\langle Pg, g_{m,n} \rangle = \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle \text{ para cualquier } m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.32)$$

Si las igualdades (2.30), (2.31) y (2.32) son ciertas, entonces implican que:

$$\langle Qg, Pg \rangle = \langle Pg, Qg \rangle, \quad (2.33)$$

ya que,

$$\begin{aligned} \langle Qg, Pg \rangle &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle \langle Pg, g_{-m,-n} \rangle = \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Pg, g_{-m,-n} \rangle \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle = \langle Pg, Qg \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que (2.33) no puede suceder si (Pg) y (Qg) convergen en $L^2(\mathbb{R})$ a la vez. En el caso que convergieran, aplicando la Proposición 2.28 obtendríamos:

$$\begin{aligned} \langle Qg, Pg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) \overline{-ig'(x)} dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x) + xg'(x)\} \overline{g(x)} dx = \\ &= -i \langle g, g \rangle + \langle Pg, Qg \rangle = -i + \langle Pg, Qg \rangle. \end{aligned}$$

debido a que $\langle g, g \rangle = \|g\|_2^2 = \|g_{0,0}\|_2^2 = 1$.

Y por lo tanto, llegamos a contradicción, es decir, (Pg) y (Qg) no pueden converger en $L^2(\mathbb{R})$ a la vez.

Ahora solo nos falta demostrar las igualdades (2.30), (2.31) y (2.32).

Veamos que (2.30) es cierta.

Como Qg y $Pg \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{g_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal, entonces tenemos:

$$\langle Qg, Pg \rangle = \left\langle \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle g_{m,n}, Pg \right\rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle .$$

Para demostrar (2.31), observamos que $\langle g, g_{m,n} \rangle = 0$ para cualquier $m, n \in \mathbb{Z}$. Esto es cierto ya que para $n = 0$ es obvio y para $n \neq 0$ tenemos que $g = g_{0,0}$ es ortogonal a $g_{m,n}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle Qg, g_{m,n} \rangle &= \langle Qg, g_{m,n} \rangle - n \langle g, g_{m,n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-n)g(x)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} yg(y+n)\overline{g(y)}e^{-2\pi im(y+n)} dy = \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle . \end{aligned}$$

Para ver (2.32) usamos la Proposición 2.28 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle Pg, g_{m,n} \rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx} dx = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[-2\pi im\overline{g(x-n)} + \overline{g'(x-n)} \right] e^{-2\pi imx} dx = \\ &= 2\pi m \int_{-\infty}^{\infty} g_{0,0}(x)\overline{g_{m,n}(x)} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{g'(x-n)}e^{-2\pi imx} dx = \\ &= 2\pi m\delta_{m,0}\delta_{0,n} + \int_{-\infty}^{\infty} g(y+n)\overline{(-ig'(y))}e^{-2\pi im(y+n)} dy = \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle . \end{aligned}$$

■

Observación 2.34. *En particular, si $g \in S_n(\mathbb{R})$, entonces:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|g(x)|^2 dx = \epsilon + \int_{-M}^M x^2|g(x)|^2 dx \leq \epsilon + M^2 \int_{-M}^M |g(x)|^2 dx < \infty$$

Además, como $g \in S_n(\mathbb{R})$ y la transformación de Fourier va de $S_n(\mathbb{R})$ a $S_n(\mathbb{R})$, entonces $\hat{g} \in S_n(\mathbb{R})$. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \delta + \int_{-N}^N \xi^2|\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \leq \delta + N^2 \int_{-N}^N |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Por lo tanto, para funciones $g \in S_n(\mathbb{R})$, por el Teorema de Balian-Low, tenemos que $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ no producirá una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ a través de traslaciones por enteros y modulaciones de los elementos del sistema.

3. Introducción a la teoría de wavelets

En este capítulo presentaremos un método para construir wavelets ortonormales que se basa en la existencia de una familia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen unas ciertas propiedades. En nuestro caso, tendrán que cumplir cinco propiedades. Tal familia es llamada un **análisis de multiresolución**, o simplemente, un **MRA**.

En la sección 3.1 mostraremos el análisis de multiresolución y estudiaremos la dependencia entre las propiedades que deben satisfacer. La construcción de wavelets des de un MRA se presenta en la sección 3.2. Algunas de sus caracterizaciones aparecerán en la sección 3.3. Y por último, en la sección 3.4 conoceremos algunas wavelets y veremos el proceso de construcción de ellas a partir de su MRA, como por ejemplo, la wavelet de Haar, la de Shannon,...

Para ello, tres operadores de funciones definidas en \mathbb{R} jugarán un papel importante en todo el desarrollo de la teoría:

- La traslación por h , τ_h , definida por $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$.
- La dilatación por $r > 0$, ρ_r , definida por $(\rho_r f)(x) = f(rx)$.
- La modulación definida como la multiplicación por e^{imx} .

El particular interés de los dos primeros operadores es debido a que las bases de wavelets vendrán dadas aplicando dichos operadores a ciertas funciones. Es decir:

Definición 3.1. *Una wavelet ortonormal de \mathbb{R} es una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{\varphi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ donde*

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k).$$

Así, φ ha sido trasladada por enteros y dilatada para generar una base ortonormal. La multiplicación por el factor $2^{j/2}$ sirve para que cada elemento tenga L^2 -norma igual a uno. Observamos que $\|\varphi_{j,k}\|_2 = \|\varphi\|_2 = 1$.

Además si calculamos la transformada de Fourier:

$$\hat{\varphi}_{j,k}(\xi) = 2^{-j/2} e^{-i\xi 2^{-j} k} \hat{\varphi}(2^{-j} \xi).$$

Como vemos, las traslaciones se han convertido en modulaciones.

3.1. Análisis de multiresolución

El análisis de multiresolución (MRA) consiste en una sucesión de subespacios cerrados $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ con $j \in \mathbb{Z}$ satisfaciendo:

$$V_j \subset V_{j+1} \text{ para cualquier } j \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

$$f \in V_j \text{ si y sólo si } f(2\cdot) \in V_{j+1} \text{ para cualquier } j \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (3.4)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.5)$$

$$\text{Existe } \varphi \in V_0 \text{ tal que } \{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\} \text{ es una base ortonormal de } V_0 \quad (3.6)$$

La función φ cuya existencia es asegurada en (3.6) es llamada **función escala** obtenida por MRA.

A veces la condición (3.6) se rebaja asumiendo que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una **base de Riesz** de V_0 . Al final de la sección, se demuestra que las dos versiones son equivalentes.

Definición 3.7. $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz si para toda $f \in V_0$, existe una única sucesión $\{\alpha_n\}_n \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(x - n)$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ y además

$$A \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \leq \|f\|_2^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$$

con $0 < A \leq B < \infty$ constantes independientes de $f \in V_0$.

Observación 3.8. ■ La condición (3.6) implica que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de V_0 con $A = B = 1$.

- Sea $\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, como $\varphi_{0,k} = \varphi(x - k)$ entonces $\varphi_{0,k} \in V_0$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ debido a (3.6).
- Si $j \in \mathbb{Z}$, la condición (3.3) implica que $\{\varphi_{j,n} : j, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j .

Teorema 3.9. La condición (3.2), (3.3) y (3.6) implican (3.4). Esto es así, si en la condición (3.6) sólo asumimos que $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz.

Demostración:

Supongamos que existe $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ tal que $f \neq \{0\}$. Podemos asumir que $\|f\|_2 = 1$. En particular, $f \in V_{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, si $f_j(x) = 2^{j/2} f(2^j x)$ entonces $f \in V_0$, por (3.3). Además, $\|f_j\|_2 = \|f\|_2 = 1$. Como podemos asumir que $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz, entonces podemos escribir

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j \varphi(x - k)$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$, y además

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k^j|^2 \leq \|f_j\|_2^2 = 1.$$

Calculando la transformada de Fourier podemos escribir

$$\hat{f}(\xi) = 2^{j/2} m_j(2^j \xi) \hat{\varphi}(2^j \xi) \quad \text{donde} \quad m_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-ik\xi} \text{ en } L^2(\mathbb{T}).$$

Observamos que $m_j(\xi)$ es una función 2π periódica con norma $\leq \sqrt{\frac{2\pi}{A}}$. Entonces, para $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi &\leq 2^{j/2} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{2\pi}^{4\pi} |m_j(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = \\ &= 2^{-j/2} \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^j} \int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2^j} \sum_{l=0}^{2^j-1} \int_{2^{j+1}\pi+2l\pi}^{2^{j+1}\pi+2(l+1)\pi} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{A} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Haciendo $j \rightarrow \infty$ obtenemos $\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi = 0$. Con esto deducimos que $\hat{f}(\xi) = 0$ casi para cualquier $\xi \in [2\pi, 4\pi]$. Aplicando el mismo argumento para $2^{l/2} \hat{f}(2^l \xi)$ con $l \in \mathbb{Z}$ obtendremos $\hat{f}(\xi) = 0$ casi para cualquier $\xi \in 2^l [2\pi, 4\pi]$. Por lo tanto, $\hat{f}(\xi) = 0$ casi para cualquier $\xi \in (0, \infty)$. De manera análoga, aplicando el argumento con el intervalo $[-4\pi, -2\pi]$ obtendremos $\hat{f}(\xi) = 0$ casi para cualquier $\xi \in (-\infty, 0)$.

■

Teorema 3.10. *Sea $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen (3.2), (3.3) y (3.6). Además, supongamos que la función escala φ de la condición (3.6) es tal que $|\hat{\varphi}|$ es continua en 0. Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

- $\hat{\varphi}(0) \neq 0$.
- $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Más concretamente, $|\hat{\varphi}(0)| = 1$.

Demostración:

Supongamos que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Sea $W = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$.

Queremos ver que W es invariante por traslaciones. Para ello primero veremos que W es invariante por traslaciones del tipo $\tau_{2^{-l}m}$ con $l, m \in \mathbb{Z}$.

Sea $f \in W$, dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ y $h \in V_0$ tal que $\|f - h\|_2 < \epsilon$.

Por (3.2) deducimos que $h \in V_j$ si $j \geq j_0$. Además, por (3.3) y (3.6)

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k) \text{ en } L^2(\mathbb{R}).$$

Por lo tanto,

$$(\tau_{2^{-l}m} h)(x) = h(x - 2^{-l}m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j(x - 2^{-l}m) - k).$$

Si $j \geq l$, entonces $\varphi(2^j(x - 2^{-l}m) - k) = \varphi(2^j x - 2^{j-l}m - k) \in V_j$ ya que $2^{j-l} \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $(\tau_{2^{-l}m} h)(x) \in V_j$. Como $\|\tau_{2^{-l}m} f - \tau_{2^{-l}m} h\|_2 = \|f - h\|_2 < \epsilon$ y ϵ puede ser tan pequeño como queramos, deducimos que W es invariante por traslaciones del tipo $\tau_{2^{-l}m}$.

En general, para $x \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $m, l \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-l}m$ sea arbitrariamente cercano a x .

Si vemos que $\|\tau_{2^{-l}m} f - \tau_x f\|_2 < \epsilon$, entonces W será invariante por traslaciones del tipo τ_x .

Queremos ver que $\|\tau_{2^{-l}m} f - \tau_x f\|_2 < \epsilon$. Por el Teorema de Plancherel (B.14):

$$\|\tau_{2^{-l}m} f - \tau_x f\|_2 = \left\| \widehat{\tau_{2^{-l}m} f} - \widehat{\tau_x f} \right\|_2.$$

Además,

$$\widehat{\tau_{2^{-l}m} f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\xi 2^{-l}m} \text{ y } \widehat{\tau_x f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x}.$$

Entonces, utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada (A.3) vemos:

$$\begin{aligned} \lim_{l,m} \left\| \widehat{\tau_{2^{-l}m} f} - \widehat{\tau_x f} \right\|_2^2 &= \lim_{l,m} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-i\xi 2^{-l}m} - e^{-i\xi x}|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \lim_{l,m} |e^{-i\xi 2^{-l}m} - e^{-i\xi x}|^2 d\xi < \epsilon \|\hat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\tau_{2^{-l}m}f - \tau_x f\|_2 < \epsilon$.

Por último, queremos ver que $W^\perp = \{0\}$.

Como $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ y $|\hat{\varphi}|$ es continua en 0, entonces $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ en $(-\mu, \mu)$ con $\mu > 0$.

Supongamos que existe $g \in W^\perp$ donde g es ortogonal a cualquier $f \in W$ y como W es invariante por traslaciones:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\overline{g(t)}dt \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}, f \in W.$$

Como $\widehat{(\tau_{-x}f)}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}$, por el Teorema de Plancherel (B.14):

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}.$$

Como $\hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = 0$ en casi cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. En particular, si $f(x) = 2^j\varphi(2^jx)$, por (3.3) $f \in V_j \subset W$ y además $\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$.

Por lo tanto, $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = 0$ en casi cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. Como $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \neq 0$ si $\xi \in (-2^j\mu, 2^j\mu)$, deducimos que $\hat{g}(\xi) = 0$ en casi cualquier $\xi \in (-2^j\mu, 2^j\mu)$.

Haciendo $j \rightarrow \infty$, vemos que $\hat{g}(\xi) = 0$ en casi cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. Así que, $g = 0$.

Esto implica que $W^\perp = \{0\}$, y por lo tanto, $L^2(\mathbb{R}) = W \oplus W^\perp = W = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$.

Veamos la otra implicación. Supongamos que $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = W$ y sea f tal que

$\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$. Como $\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-1,1]}(x)|^2 dx = 2$, por el Teorema de Plancherel (B.14), $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{\pi}$.

Si P_j es la proyección ortogonal sobre V_j , entonces $\|f - P_j f\|_2 \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Veámoslo:

Sea $\epsilon > 0$, entonces, por (3.5), $\exists j_0 \in \mathbb{Z}$ y $g(x) \in V_{j_0}$ tal que $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Por (3.2), $g(x) \in V_j$ y $P_j g(x) = g(x)$, $\forall j \geq j_0$. Entonces, utilizando la desigualdad de Minkowski (A.9):

$$\|f - P_j f\|_2 = \|f - g + P_j g - P_j f\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|P_j(f - g)\|_2 \leq 2\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\|f - P_j f\|_2 \rightarrow 0$ si $j \rightarrow \infty$.

Entonces, $\|P_j f\|_2 \rightarrow \|f\|_2$ si $j \rightarrow \infty$.

Si $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^jx - k)$, tenemos que

$$\|P_j f\|_2^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi};$$

ya que $\{\varphi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal debido a (3.3) y (3.6). Por el Teorema de

Plancherel (B.14) y sabiendo que $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi_{j,-k}}(\xi)} d\xi \right|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) 2^{-j/2} e^{-i2^{-j}k\xi} \overline{\widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2 = \\ &= 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} \widehat{\varphi}(\mu) e^{-ik\mu} d\mu \right|^2. \end{aligned}$$

Para j suficientemente grande, $[-2^{-j}, 2^{-j}] \subset [-\pi, \pi]$ y la última expresión es 2^j veces la suma de los cuadrados de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier de la función $\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]}\widehat{\varphi}$. Por el Teorema de Plancherel (B.14) y la Identidad de Parseval (A.12):

$$\frac{2^j}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}.$$

Por otro lado, por la continuidad de $|\widehat{\varphi}|$ en 0, tenemos:

$$\frac{2^j}{2\pi} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \longrightarrow \frac{1}{\pi} |\widehat{\varphi}(0)|^2$$

Por lo tanto, $|\widehat{\varphi}(0)| = 1 \neq 0$. ■

Observación 3.11. ■ *A partir de la demostración de este teorema podemos deducir la condición (3.5) si suponemos (3.2), (3.3) y (3.6) y que existe un $\mu > 0$ tal que $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ en $[-\mu, \mu]$. Es decir, no hace falta suponer que $|\widehat{\varphi}|$ sea continua en 0.*

■ *Si $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es un MRA, la demostración del teorema nos muestra que:*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\widehat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = 1$$

Lema 3.12. *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ de manera que $\{\varphi(\cdot - k)\}$ con $k \in \mathbb{Z}$ forma una base de Riesz de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ tal que:*

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \quad (3.13)$$

donde las constantes A y B son independientes de $c = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $0 < A \leq B < \infty$. Sea

$$\sigma_\varphi(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Entonces, $\sqrt{A} \leq \sigma_\varphi(\xi) \leq \sqrt{B}$ casi para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $c = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ y sea $S_c = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}$. Entonces:

$$\widehat{S}_c(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \widehat{\varphi}(\xi) = \vartheta_c(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)$$

donde $\vartheta_c(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$ en $L^2(\mathbb{T})$. Además,

$$\begin{aligned} \|\widehat{S}_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\vartheta_c(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\vartheta_c(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{T}} |\vartheta_c(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{T}} |\vartheta_c(\xi) \sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Plancherel (B.14) tenemos:

$$\|S_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\vartheta_c(\xi) \sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi.$$

Por lo tanto, utilizando la identidad de Parseval (A.12), podemos reescribir la propiedad (3.13) de la forma:

$$A \|\vartheta_c\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \|\vartheta_c \sigma_\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq B \|\vartheta_c\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (3.15)$$

Fijando $\eta \in \mathbb{T}$ y escogiendo $\vartheta_c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2m\pi}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik(\xi-\eta)}$, entonces:

$$|\vartheta_c(\xi)|^2 = \frac{1}{2m\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{m(\xi-\eta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)} \right)^2 = K_m(\eta - \xi)$$

donde K_m es el núcleo de Fejér. Esto es cierto ya que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{ik(\xi-\eta)} = \frac{1 - e^{im(\xi-\eta)}}{1 - e^{i(\xi-\eta)}} = \frac{\sin\left(\frac{m(\xi-\eta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)} e^{i(\xi-\eta)\frac{m-1}{2}}$$

En este caso, utilizando la identidad de Parseval (A.12), tenemos que $\|\vartheta_c\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$.

Además, $\|\vartheta_c \sigma_\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta)$. Por lo tanto, por (3.15) obtenemos:

$$A \leq (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \leq B \text{ casi para cualquier } \eta \in \mathbb{T}. \quad (3.16)$$

Como $(K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \rightarrow \sigma_\varphi^2(\eta)$ cuando $m \rightarrow \infty$ casi para cualquier $\eta \in \mathbb{T}$, entonces haciendo $m \rightarrow \infty$ en (3.16) obtenemos el resultado del Lema 3.12. ■

Observación 3.17. Observemos que la función σ_φ definida en el Lema 3.12 siempre está bien definida cuando $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. De hecho, por el Teorema de Plancherel (B.14) tenemos:

$$\|\sigma_\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} |\sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Esto, implica que $\sigma_\varphi(\xi) < \infty$ casi para cualquier $\xi \in \mathbb{T}$.

Proposición 3.18. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces son equivalentes:

- $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal.
- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ c.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Utilizando el Teorema de Plancherel (B.14), el Teorema de la Convergencia Monótona (A.1) y sabiendo que $\widehat{\tau_x f}(t) = \hat{f}(t)e^{-ixt}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 e^{ik\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 \right) e^{ik\mu} d\mu. \end{aligned}$$

Si $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 = 1$, entonces $\int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\mu} d\mu$.

Como $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\mu} d\mu$ vale 1 si $k = 0$ y vale 0 si $k \neq 0$, esto implica que $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una sistema ortonormal.

Si $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una sistema ortonormal, entonces $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 \right) e^{ik\mu} d\mu$ son los coeficientes de Fourier de la función $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2$ y valen 0 para cualquier $k \neq 0$ y 1 para $k = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2l\pi)|^2 = 1 \text{ c.p.t. } \mu \in \mathbb{R}$$

■

Proposición 3.19. Sea $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ una base de Riesz de V_0 , entonces podemos encontrar una función $\gamma \in V_0$ tal que $\{\gamma(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortonormal de V_0 .

Desmostración:

Este resultado es una consecuencia del Lema 3.12. Sea γ tal que $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\varphi}}{\sigma_\varphi}$. Sabemos que $\frac{1}{\sigma_\varphi}$ está acotada ya que:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{B}} \leq \frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ casi para cualquier } \xi \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Plancherel (B.14) tenemos que γ converge en $L^2(\mathbb{R})$. Como σ_φ es 2π periódica, entonces podemos encontrar dos sucesiones $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$ tal que:

$$\frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi} \text{ y } \sigma_\varphi(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi} \text{ en } L^2(\mathbb{T}).$$

Entonces,

$$\hat{\gamma}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi} \text{ y } \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\gamma}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\xi}.$$

Calculando las transformadas de Fourier de estas igualdades obtenemos

$$\gamma(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{0,k}(x) \text{ y } \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \gamma_{0,k}(x)$$

en $L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto,

$$\gamma \in \overline{\text{span} \{\varphi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}} \text{ y } \varphi \in \overline{\text{span} \{\gamma_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Entonces, por la definición de $\hat{\gamma}$ y la 2π periodicidad de σ_φ :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{\sigma_\varphi^2(\xi)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{R}$$

Por la Proposición 3.18, tenemos que $\{\gamma(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0 . ■

3.2. Construcción de wavelets desde un MRA

Sea W_0 el complementario ortogonal de V_0 en V_1 , es decir, $V_1 = V_0 \oplus W_0$. El Teorema de la Proyección (A.13) nos asegura que dicho W_0 existe. Por lo tanto, si dilatamos los elementos de W_0 por 2^j , obtendremos el subespacio cerrado W_j de V_{j+1} tal que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Esto será cierto, si los W_j satisfacen la siguiente propiedad:

$$f \in W_0 \iff f(2^j \cdot) \in W_j.$$

Veamoslo:

- Sea $f \in W_0$ y queremos ver que $f(2^j \cdot) \in V_{j+1}$ y que $(f(2^j \cdot), g) = 0$, $\forall g \in V_j$.

Como $f \in W_0$, entonces $f \in V_1$. Por (3.3), $f(2^j \cdot) \in V_{j+1}$.

Además,

$$(f(2^j \cdot), g) = \int_{\mathbb{R}} f(2^j x) g(x) dx = 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(2^{-j} t) dt = 2^{-j} (f, g(2^{-j} \cdot)) = 0$$

ya que $f \in W_0$ y $g(2^{-j} \cdot) \in V_0$.

- Sea $f(2^j \cdot) \in W_j$ y queremos ver que $f \in V_1$ y que $(f, g) = 0$, para toda $g \in V_0$. Como $f(2^j \cdot) \in W_j$, entonces $f(2^j \cdot) \in V_{j+1}$ y, por (3.3), $f \in V_1$.

Además,

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(2^j t)g(2^j t)dt = 2^j (f(2^j \cdot), g(2^j \cdot)) = 0$$

ya que $f(2^j \cdot) \in W_j$ y $g(2^j \cdot) \in V_j$.

Además, los subespacios W_j satisfacen que:

$$V_{j+1} = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l; \quad (3.20)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l \quad (3.21)$$

Veamos primero que $V_{j+1} = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l$. Podemos reescribir los V_{j+1} de la siguiente manera:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = \dots = V_n \oplus \left(\bigoplus_{l=n}^j W_l \right).$$

Sea $f \in V_{j+1}$, entonces:

$$f = f_n + \sum_{l=n}^j f_l \text{ con } f_l \in W_l.$$

Por el Teorema de la Proyección (A.13) tenemos que $f_n = P_n(f)$.

Si demostramos que $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|P_n f\|_2 = 0$, entonces podremos afirmar que $V_{j+1} = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l$.

Primero demostraremos esto para funciones continuas con soporte compacto y luego generalizaremos el resultado, por un argumento de densidad, para funciones del espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Sea $g \in C_{[-A, A]}$ y $\epsilon > 0$. Entonces, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz (A.8) tenemos:

$$\begin{aligned} \|P_n g\|_2^2 &= \left\| \sum_k (g, \varphi_{n,k}) \varphi_{n,k} \right\|_2^2 = \sum_k |(g, \varphi_{n,k})|^2 = \sum_k \left| \int_{-A}^A g(x) 2^{n/2} \varphi(2^n x - k) dx \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_k \left(\int_{-A}^A |g(x)|^2 dx \right) 2^n \left(\int_{-A}^A |\varphi(2^n x - k)|^2 dx \right) = \|g\|_2^2 \sum_k \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Necesitamos ver que:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \sum_k \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx = 0.$$

Como $\|\varphi\|_2 = 1$, entonces existe N tal que:

$$\sum_{|k| \geq N} \int_{\frac{-1}{2} - k}^{\frac{1}{2} - k} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{|x| \geq N - \frac{1}{2}} |\varphi(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Por lo tanto, si $2^n A < \frac{1}{2}$:

$$\sum_{|k| \geq N} \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx \leq \sum_{|k| \geq N} \int_{\frac{-1}{2} - k}^{\frac{1}{2} - k} |\varphi(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Como para todo $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow -\infty} \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \|P_n g\|_2^2 &\leq \|g\|_2^2 \lim_{n \rightarrow -\infty} \sum_k \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx = \\ &= \|g\|_2^2 \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\sum_{|k| < N} \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx + \sum_{|k| \geq N} \int_{-2^n A - k}^{2^n A - k} |\varphi(x)|^2 dx \right) = \epsilon \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|P_n g\|_2 = 0$, $\forall g \in C_{[-A, A]}$.

Como el espacio de las funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R})$, esto implica que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe $g \in C_{[-A, A]}$ tal que $\|f - g\|_2 < \epsilon$.

Así,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} \|P_n f\|_2 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} (\|P_n(f - g)\|_2 + \|P_n g\|_2) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} \|f - g\|_2 + \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} \|P_n g\|_2 < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|P_n f\|_2 < \epsilon$.

Con esto queda demostrado que $V_{j+1} = \bigoplus_{l=-\infty}^j W_l$.

Falta ver que $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $f_{j+1} = P_{j+1} f$.

Como $f_{j+1} \in V_{j+1}$, por lo que acabamos de demostrar:

$$f_{j+1} = \sum_{l=-\infty}^j f_l \text{ con } f_l \in W_l.$$

Además, ya hemos visto anteriormente que $\|P_{j+1} f\|_2 \rightarrow \|f\|_2$.

Por lo tanto, haciendo $j \rightarrow \infty$ tenemos:

$$f = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l \text{ con } f_l \in W_l.$$

Con esto queda demostrado que $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} W_l$.

Para encontrar un wavelet ortonormal, primero necesitamos encontrar una función $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sea base ortonormal de W_0 . En este caso, $\{2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de W_j debido a (3.3) y la definición de W_j .

Por lo tanto, $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, lo cual muestra que ψ es un wavelet ortonormal en \mathbb{R} .

Vamos a intentar encontrar dicha función ψ .

Consideremos $V_0 = W_{-1} \oplus V_{-1}$ y observemos que $\frac{1}{2}\varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$. Por, (3.6) podemos expresar esta función en términos de la base $\{\varphi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$, de manera que:

$$\frac{1}{2} \varphi \left(\frac{1}{2}x \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x + k) \text{ en } L^2(\mathbb{R}) \quad (3.22)$$

donde $\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi \left(\frac{1}{2}x \right) \overline{\varphi(x + k)} dx$ y $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$.

Calculando la transformada de Fourier obtenemos:

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi)m_0(\xi) \quad (3.23)$$

donde $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$ es una función 2π periódica de $L^2(\mathbb{T})$.

A esta función se le llama **filtro de paso bajo** asociado con la función escala φ .

Corolario 3.24. *Sea $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$ con $\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi \left(\frac{1}{2}x \right) \overline{\varphi(x + k)} dx$ el filtro de paso bajo asociado con la función escala φ .*

Entonces, casi para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (3.25)$$

Demostración:

Por (3.23), la Proposición 3.2 y la 2π periodicidad de m_0 tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 = \\ &= \sum_{k=2l} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 |m_0(\xi + 2l\pi)|^2 + \sum_{k=2l+1} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi + \pi)|^2 |m_0(\xi + 2l\pi + \pi)|^2 = \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{k=2l} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{k=2l+1} |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi + \pi)|^2 = \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \end{aligned}$$

casi para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. ■

Lema 3.26. *Sea φ la función escala de un análisis de multiresolución $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, y m_0 el filtro de paso bajo asociado. Entonces:*

$$V_{-1} = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \text{ para alguna } m \in L^2(\mathbb{T}) \text{ } 2\pi \text{ periódica} \right\};$$

$$V_0 = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = l(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \text{ para alguna } l \in L^2(\mathbb{T}) \text{ } 2\pi \text{ periódica} \right\}.$$

Desmostración:

Veamos que $V_{-1} = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \text{ para alguna } m \in L^2(\mathbb{T}) \text{ } 2\pi \text{ periódica} \right\}$.

Sea $f \in V_{-1}$, entonces $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(\frac{1}{2}x - k)$ con $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$.

Calculando la transformada de Fourier y usando (3.23) tenemos:

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2}\hat{\varphi}(2\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2ik\xi} = m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

donde $m(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$ es una función 2π periódica de $L^2(\mathbb{T})$.

Recíprocamente, sea $m \in L^2(\mathbb{T})$ y 2π periódica y veamos que una función f definida tal que $\hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ pertenece a V_{-1} .

Observamos que para toda $h \in L^2(\mathbb{T})$ 2π periódica tenemos que $h(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Esto es cierto debido a la ortonormalidad de $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$, a la Proposición 3.18 y al Teorema de la Convergencia Monótona (A.1), ya que:

$$\begin{aligned} \|h\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^{2\pi} |h(\mu)|^2 |\hat{\varphi}(\mu + 2k\pi)|^2 d\mu = \int_0^{2\pi} |h(\mu)|^2 \sum_k |\hat{\varphi}(\mu + 2k\pi)|^2 d\mu = \|h\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Como $|m_0(\xi)| \leq 1$, debido a (3.25), y $m \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $h(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$.

Por lo tanto, como $\hat{f}(\xi) = m(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi)$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces, por unicidad de la transformada de Fourier, $f \in V_{-1}$.

Argumentando de manera análoga se demuestra la caracterización del subespacio V_0 . ■

Sigamos con la construcción del wavelet ψ . Los elementos de W_{-1} son funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $f \in V_0$ y son ortogonales a V_{-1} .

Identidad de Polarización 3.27. Sean u, v elementos de una espacio de Banach real. Entonces satisfacen:

$$(u, v) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 &= (u + v, u + v) - (u - v, u - v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) - (u, u) - (u, -v) - (-v, u) - (-v, -v) = 4(u, v). \end{aligned}$$

Sea $U : V_0 \longrightarrow L^2(\mathbb{T})$ definida por $U(f) = l$, donde l es una función como la del Lema 3.26. Observar que $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ ya que si existiera un ξ_0 tal que $\hat{\varphi}(\xi_0) = 0$ entonces $\hat{f}(\xi_0) = 0$ para cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ y esto no tiene sentido. Además, como la transformada de Fourier es única para cada función, esto implica que la función l es única para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Es fácil ver que U es lineal y que satisface:

$$\|Uf\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|l\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_k d_k e^{-ik\xi} \right|^2 d\xi = 2\pi \sum_k |d_k|^2 = 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Por la identidad de polarización, para cualquier $f, g \in V_0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle Uf, Ug \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \frac{1}{4} \left(\|U(f+g)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 - \|U(f-g)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(2\pi \|f+g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - 2\pi \|f-g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) = 2\pi \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Sea $g \in V_{-1}$. Si f es ortogonal a V_{-1} , utilizando esta igualdad, la 2π periodicidad de m y el Lema 3.26 tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi} \langle Uf, Ug \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \langle l(\xi), m(2\xi)m_0(\xi) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l(\xi) \overline{m(2\xi)m_0(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{m(2\xi)} \left[l(\xi) \overline{m_0(\xi)} + l(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \right] d\xi. \end{aligned}$$

para cualquier $m \in L^2(\mathbb{T})$ 2π periódica. Por lo tanto, obtenemos:

$$l(\xi) \overline{m_0(\xi)} + l(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} = 0 \text{ para casi cualquier } \xi \in \mathbb{T}$$

Esto implica que:

$$(l(\xi), l(\xi + \pi)) = -\lambda(\xi + \pi) (\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)}) \quad (3.28)$$

para casi cualquier ξ y un apropiado $\lambda(\xi)$. Haciendo el cambio $\xi = \mu + \pi$ obtenemos:

$$(l(\mu + \pi), l(\mu)) = -\lambda(\mu + 2\pi) (\overline{m_0(\mu)}, -\overline{m_0(\mu + \pi)})$$

por la 2π periodicidad de m_0 y l . Esta igualdad equivale a:

$$(l(\xi), l(\xi + \pi)) = \lambda(\xi + 2\pi) (\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)}) \quad (3.29)$$

para casi cualquier ξ . Sabemos de (3.25) que el vector $(\overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)})$ tiene norma 1 para casi cualquier ξ . Por (3.28) y (3.29) tenemos:

$$\lambda(\xi + \pi) = -\lambda(\xi + 2\pi) \iff \lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi).$$

Por lo tanto, λ es una función 2π periódica de $L^2(\mathbb{T})$ satisfaciendo,

$$\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi) \text{ casi para cualquier } \xi \in \mathbb{T}. \quad (3.30)$$

Sea $s(2\xi) = \frac{\lambda(\xi)}{e^{-i\xi}}$ donde $s \in L^2(\mathbb{T})$ y 2π periódica, entonces por (3.28) y (3.30) obtenemos:

$$l(\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)}. \quad (3.31)$$

Esto nos da una caracterización del subespacio W_{-1} :

$$W_{-1} = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ con } s \in L^2(\mathbb{T}) 2\pi \text{ periódica} \right\}.$$

Lema 3.32. *Sea φ una función escala de un análisis de multiresolución $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, y m_0 el filtro de paso bajo asociado, entonces:*

$$W_0 = \left\{ f : \hat{f}(2\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ con } s \in L^2(\mathbb{T}) 2\pi \text{ periódica} \right\}.$$

De manera similar tenemos:

$$W_j = \left\{ f : \hat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ con } s \in L^2(\mathbb{T}) 2\pi \text{ periódica} \right\}.$$

Proposición 3.33. *Sea φ una función escala de un análisis de multiresolución $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, y m_0 el filtro de paso bajo asociado, entonces una función $\psi \in W_0$ es un wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, si y sólo si,*

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} v(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi) \quad (3.34)$$

casi para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$, para alguna función medible 2π periódica v tal que $|v(\xi)| = 1$ para casi cualquier $\xi \in \mathbb{T}$.

Demostración:

Sea $\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} v(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi)$ casi para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$, para alguna función medible 2π periódica v tal que $|v(\xi)| = 1$ para casi cualquier $\xi \in \mathbb{T}$.

Debido a que $v \in L^2(\mathbb{T})$ y a (3.32), obtenemos que $\psi \in W_0$.

Sea $g \in W_0$ entonces, por la caracterización de W_0 , $\hat{g}(2\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi)$ con $s \in L^2(\mathbb{T})$.

De esta manera,

$$\hat{g}(\xi) = \frac{v(\xi)}{v(\xi)} e^{i\frac{\xi}{2}} s(\xi) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{s(\xi)}{v(\xi)} \hat{\psi}(\xi) = s(\xi) \overline{v(\xi)} \hat{\psi}(\xi).$$

Como $s\bar{v} \in L^2(\mathbb{T})$, podemos escribir $s(\xi) \overline{v(\xi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi}$ donde $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ y así obtener:

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \hat{\psi}(\xi).$$

Lo que implica que:

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k).$$

Así, hemos probado que $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ genera W_0 .

La ortonormalidad de este sistema la vamos a ver mostrando que $\hat{\psi}$ satisface la igualdad de la Proposición 3.18. Por (3.25), la 2π periodicidad de m_0 y usando la Proposición 3.18 para φ , tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + k\pi)|^2 |m_0(\frac{\xi}{2} + k\pi + \pi)|^2 = \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + 2l\pi)|^2 |m_0(\frac{\xi}{2} + 2l\pi + \pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + 2l\pi + \pi)|^2 |m_0(\frac{\xi}{2} + 2l\pi + 2\pi)|^2 = \\ &= |m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de W_0 .

Si $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de W_0 , entonces $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de W_j .

Por (3.21), dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos:

$$f = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l \quad \text{y} \quad f_l = \sum_k a_k 2^{l/2} \psi(2^l \cdot -k)$$

donde $f_l \in W_l$. Así, $f = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_k a_k 2^{l/2} \psi(2^l \cdot -k)$.

Por lo tanto, obtenemos que ψ es wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Recíprocamente, supongamos que $\psi \in W_0$ es un wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Como $\psi \in W_0$ entonces, por el Lema 3.32, $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} v(\xi) \overline{m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)} \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$.

Si vemos que $|v(\xi)| = 1$ casi para cualquier $\xi \in \mathbb{T}$, acabaremos la demostración. Por lo tanto, utilizando un argumento análogo al que acabamos de hacer, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + k\pi)|^2 |m_0(\frac{\xi}{2} + k\pi + \pi)|^2 = \\ &= |v(\xi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + 2l\pi)|^2 |m_0(\frac{\xi}{2} + 2l\pi + \pi)|^2 + \\ &+ |v(\xi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + 2l\pi + \pi)|^2 |m_0(\frac{\xi}{2} + 2l\pi + 2\pi)|^2 = \\ &= |v(\xi)|^2 \left[|m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 \right] = |v(\xi)|^2. \end{aligned}$$

■

Con esta proposición completamos la construcción de un wavelet construido a través de un análisis de multiresolución.

Por simplicidad, podemos suponer que $v(\xi) = 1$. Así, por (3.34) y (3.23), obtenemos:

$$\hat{\psi}(2\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-i(k-1)\xi} \right) \hat{\varphi}(\xi).$$

Por lo tanto,

$$\hat{\psi}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-i(k-1)\frac{\xi}{2}} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Y calculando la inversa de la transformada de Fourier obtenemos:

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1)). \quad (3.35)$$

3.3. Caracterizaciones

Definición 3.36. Una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se dice que es de banda limitada si el soporte de \hat{f} es un compacto de \mathbb{R} .

Proposición 3.37. El conjunto de las funciones de banda limitada es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración:

Sea D el conjunto de las funciones de banda limitada. Por el Teorema de la Proyección (A.13) sabemos que:

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{D} \oplus \overline{D}^\perp.$$

Además, la Proposición A.14 nos dice que basta ver que $D^\perp = \{0\}$ para probar la densidad.

Sea $f \in D^\perp \subset L^2(\mathbb{R})$ tal que $0 = \langle f, g \rangle$ para cualquier $g \in D$.

Por el Teorema de Plancherel (B.14),

$$0 = \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

En particular, sea g tal que $\hat{g} = \chi_A$ con A compacto medible de \mathbb{R} .

Entonces, $g \in D$ y además,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_A \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Por lo tanto, $\hat{f}(\xi) = 0$ casi para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. Esto implica que $f = 0$.

Así, $D^\perp = \{0\} \implies D$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. ■

Teorema 3.38. $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es una función escala de un MRA si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{T}; \quad (3.39)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1 \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{R}; \quad (3.40)$$

$$\text{Existe } m_0 \text{ función } 2\pi \text{ periódica tal que } \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Demostración:

Supongamos que φ es una función escala de un MRA. Por la Proposición 3.18 se satisface la condición (3.39) y la igualdad (3.23) equivale a la condición (3.41).

Falta ver que se satisface la condición (3.40).

Como $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es una MRA de $L^2(\mathbb{R})$, entonces $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j}$ y por las observaciones del Teorema 3.10 tenemos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi = 1.$$

Por (3.39) tenemos que $|\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| \leq 1$. Además, como $|m_0(\xi)| \leq 1$ c.p.t. $\xi \in \mathbb{R}$ y $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, entonces $|\hat{\varphi}(2\xi)| \leq |\hat{\varphi}(\xi)|$. Por lo tanto, $|\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|$ es monótona.

Así, $0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| \leq 1$. Utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada (A.3),

$$1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi.$$

Suponiendo que $0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| < 1$ llegamos a contradicción. Por lo tanto, $\lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$.

Supongamos ahora que se satisfacen las condiciones (3.39), (3.40) y (3.41).

Sean $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$V_j = \begin{cases} \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}}, & \text{si } j = 0; \\ \{f : f(2^{-j}\cdot) \in V_0\}, & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

Entonces, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ será función escala si $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ forman un MRA de $L^2(\mathbb{R})$ con $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ base ortonormal de V_0 .

Claramente los $\{V_j\}$ satisfacen que $f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$ para cualquier $j \in \mathbb{Z}$. Como $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ cumple la condición (3.39), por la Proposición 3.18 tenemos $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de V_0 .

Además, para cada $j \in \mathbb{Z}$ tenemos que:

$$V_j = \left\{ f \mid \hat{f}(2^j \xi) = \mu_j(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \text{ para alguna } \mu_j \in L^2(\mathbb{T}) 2\pi \text{ periódica} \right\}. \quad (3.42)$$

Veamos que dicha caracterización de los subespacios $\{V_j\}$ es cierta:

- Sea $f \in V_j$. Así, $f \in V_j \implies f(2^{-j} \cdot) \in V_0 \implies f(2^{-j} x) = \sum_k a_k^j \varphi(x - k)$.

Calculando la transformada de Fourier obtenemos:

$$\hat{f}(2^j \xi) = \sum_k 2^{-j} a_k^j e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi)$$

donde $\mu_j(\xi) = \sum_k 2^{-j} a_k^j e^{-ik\xi} \in L^2(\mathbb{T})$ y es 2π periódica.

- Sea f tal que $\hat{f}(2^j \xi) = \mu_j(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$ para alguna $\mu_j \in L^2(\mathbb{T})$ 2π periódica.

Como $\mu_j \in L^2(\mathbb{T})$, entonces $\mu_j(\xi) = \sum_k a_k^j e^{-ik\xi}$. Así,

$$\hat{f}(2^j \xi) = \sum_k a_k^j e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi) = \sum_k a_k^j (\varphi(\cdot - k))^\wedge(\xi).$$

Por lo tanto, calculando la inversa de la transformada de Fourier obtenemos que $f(x) = \sum_k a_k^j 2^j \varphi(2^j x - k)$. Así, $f \in V_j$.

Viendo que $V_0 \subset V_1$ entonces los $\{V_j\}$ satisfarán que $V_j \subset V_{j+1}$, ya que:

$$f \in V_j \implies f(2^{-j} \cdot) \in V_0 \subset V_1 \implies f(2^{-j-1} \cdot) \in V_0 \implies f \in V_{j+1}$$

Por lo tanto, dada $f \in V_0$ por (3.42) tenemos que $\hat{f}(\xi) = \mu_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$ con $\mu_0 \in L^2(\mathbb{T})$ 2π periódica. Por (3.41), $\hat{f}(2\xi) = \mu_0(2\xi) \hat{\varphi}(2\xi) = \mu_0(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$, y junto con la 2π periodicidad de m_0 y (3.39) tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_k |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_k |m_0(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 = \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_l |\hat{\varphi}(\xi + 2l\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_l |\hat{\varphi}(\xi + (2l+1)\pi)|^2 = \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1. \end{aligned}$$

Lo que muestra que $|m_0(\xi)| \leq 1$ casi para cualquier $\xi \in \mathbb{T}$. Entonces, $\mu_0(2\xi) m_0(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$ y es 2π periódica. Así, por (3.42), $f \in V_1 \implies V_0 \subset V_1$.

Por último, nos falta ver que los $\{V_j\}$ satisfacen que $\overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

Sea P_j la proyección en V_j . Nos es suficiente ver que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - P_j f\|_2^2 = 0$$

Si es cierto, esto equivale a decir:

$$\forall \epsilon > 0, \exists j_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \forall j \geq j_0 \text{ tenemos que } \|f - P_j f\|_2^2 < \epsilon \implies \overline{\bigcup_j V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

Por lo tanto, por el Teorema de la Proyección (A.13) sabemos que $\langle P_j f, f - P_j f \rangle = 0$ y utilizando el Teorema de Pitágoras (A.10) tenemos que:

$$\|P_j f\|_2^2 + \|f - P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \iff \|f - P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|P_j f\|_2^2$$

Viendo que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2$ acabaríamos la demostración del teorema.

Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que \hat{f} tiene soporte compacto.

Como $\{2^{j/2}\varphi(2^j \cdot -k)\}$ es una base ortonormal de V_j y para un j positivo suficientemente grande $\hat{f}(2^j \cdot)$ tiene soporte en $[-\pi, \pi]$, entonces:

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_2^2 &= \left\| \sum_k (f, \varphi_{j,k}) \varphi_{j,k}(x) \right\|_2^2 = \sum_k |(f, \varphi_{j,k})|^2 = \sum_k \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) 2^{j/2} \overline{\varphi(2^j t - k)} dt \right|^2 = \\ &= \sum_k 2^{-j} \left| \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j} x) \overline{\varphi(x - k)} dx \right|^2 = \sum_k 2^{-j} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(2^{-j} x))(\xi) \overline{(\varphi(x - k))(\xi)} d\xi \right|^2 = \\ &= \frac{2^j}{2\pi} \sum_k \left| \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(2^j \xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \right|^2 = \frac{2^j}{2\pi} \sum_k |(\hat{f}(2^j \xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)}, e^{-ik\xi})|^2 = \\ &= \frac{2^j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(2^j \xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)}|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2^j \pi}^{2^j \pi} |\hat{f}(\eta) \overline{\hat{\varphi}(2^{-j} \eta)}|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Utilizando (3.40) y el Teorema de la Convergencia Dominada (A.3) obtenemos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

para cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ de banda limitada.

Como las funciones de banda limitada son densas en $L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2, \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

■

Teorema 3.43. *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\|_2 = 1$, entonces ψ es un wavelet ortonormal si, y sólo si se satisfacen las dos condiciones siguientes:*

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 &= 1 \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{R}; \\ \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2m\pi))} &= 0 \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{R}, m \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.44. *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ wavelet, entonces ψ es un wavelet construido a través de un MRA si, y sólo si se satisface la siguiente condición:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 = 1 \text{ c.p.t. } \xi \in \mathbb{R}.$$

3.4. Ejemplos de wavelets

3.4.1. Wavelet de Haar

Sea $V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = c_k \text{ constante si } x \in [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)] = I_{j,k} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$.

Veamos que $\{V_j\}$ forma un MRA con función escala $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$.

- ¿ $\{V_j\}$ subespacios cerrados?

Sea $g \in \overline{V_j}$ y queremos ver si $g \in V_j$, es decir, si $g(x) = c_k$ para $x \in I_{j,k}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Sea $\{f_n\} \subset V_j$ tal que $\lim_n f_n = g$. Sea $x \in I_{j,k}$, entonces:

$$c_k = \lim_n c_k = \lim_n f_n(x) = g(x) \implies g \in V_j \implies \overline{V_j} = V_j$$

- ¿ $V_j \subset V_{j+1}$?

Observar que $I_{j,k} = I_{j+1,2k} \cup I_{j+1,2k+1}$.

Si f es constante en $I_{j,k}$, entonces f es constante en $I_{j+1,l}$ con $l \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $f \in V_j \implies V_j \subset V_{j+1}$

- Claramente se satisface que $f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}$.

- ¿ φ es función escala?

Tenemos $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$ y $V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = c_k \text{ si } x \in [k, k+1] \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $k = -1$, entonces $\varphi \in V_0$. Además, $\varphi(x - k) = \chi_{[-1,0)}(x - k) = \chi_{[k-1,k)}(x) \in V_0$.

$$\langle \varphi(x - k), \varphi(x - j) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[k-1,k)}(x) \chi_{[j-1,j)}(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k; \end{cases}$$

ya que $[k-1, k) \cap [j-1, j) = \emptyset$ si $j \neq k$.

Así, $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal.

Si $f \in V_0$, entonces $f(x) = \sum_k c_k \chi_{[k-1,k)}(x) = \sum_k c_k \varphi(x - k)$. Por lo tanto, $\{\varphi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de V_0 .

- ¿ $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j}$?

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-1}^0 e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \hat{\varphi}(\xi) = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\hat{\varphi}$ es continua en \mathbb{R} . Utilizando el Teorema 3.10 obtenemos lo que queríamos.

Por lo tanto, $\{V_j\}_j$ forman un MRA con función escala $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$. Así,

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\chi_{[-2,0)}(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-2,-1)}(x) + \frac{1}{2}\chi_{[-1,0)}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x+1) + \frac{1}{2}\varphi(x).$$

Entonces, $m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\xi})$. Por (3.35) tenemos:

$$\psi(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x) = \chi_{[-1,-1/2)}(x) - \chi_{[-1/2,0)}(x).$$

Falta ver que ψ es una wavelet ortonormal. Entonces:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= \left(\frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}\right) \left(\frac{e^{-i\xi/2}}{e^{-i\xi/2}}\right) = e^{i\xi/2} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}; \\ \hat{\psi}(2\xi) &= \left(\frac{1}{2}e^{i\xi} - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} = e^{i\xi} \left(\frac{1 + e^{-i(\xi+\pi)}}{2}\right) \left(\frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}\right); \\ \hat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} \frac{(1 - e^{-i\xi/2})(e^{i\xi/2} - 1)}{i\xi} = ie^{i\xi/2} \frac{1 - \cos(\xi/2)}{\xi/2} = ie^{i\xi/2} \frac{\sin^2(\xi/4)}{\xi/4}.\end{aligned}$$

Calculando la transformada de Fourier de ψ podemos ver que coincide con esta última expresión.

Por lo tanto, por la Proposición 3.33 tenemos que ψ es una wavelet ortonormal y es la llamada **Wavelet de Haar**.

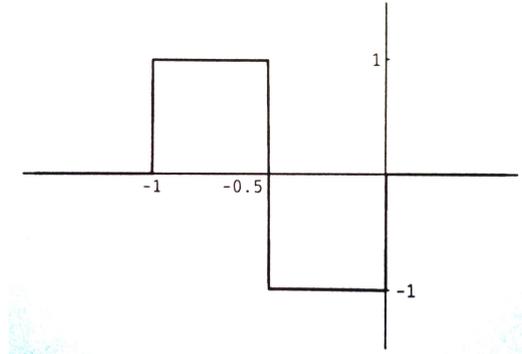


Figura 2: Wavelet de Haar.

3.4.2. Wavelet de Shannon

Sea φ tal que $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi)$ y $V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi(2^j \cdot -k) \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}}$.

Veamos que $\{V_j\}$ es un MRA con φ función escala.

- Claramente se satisface que $f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$ donde $\{V_j\}_j$ son subespacios cerrados.

- ¿ $V_j \subset V_{j+1}$?

Veamos que $V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi] \right\}$.

- Sea $f \in V_0$, entonces $f(x) = \sum_k a_k \varphi(x - k)$. Así,

$$\hat{f}(\xi) = \sum_k a_k e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi) = \sum_k a_k e^{-ik\xi} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi).$$

Por lo tanto, $\text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi]$.

- Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi]$.

Por el Teorema de Plancherel (B.14) tenemos que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, y por lo tanto, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{T})$. Así, sea $\xi \in [-\pi, \pi]$:

$$\hat{f} = \sum_k a_k e^{-ik\xi} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) = \sum_k a_k e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi).$$

Por unicidad de la transformada de Fourier obtenemos:

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi(x - k).$$

Por lo tanto, $f \in V_0$.

Como $f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j+1}$, entonces:

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subset [-2^j \pi, 2^j \pi] \right\}.$$

De esta manera, si $f \in V_{-1}$ como $\text{supp } \hat{f} \subset \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \subset [-\pi, \pi]$, entonces $f \in V_0$.

Así, $V_{-1} \subset V_0$ y falta ver que $V_j \subset V_{j+1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f \in V_j &\implies f(x) = \sum_k a_k 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) \iff f(2^{-j-1} x) = \sum_k a_k 2^{j/2} \varphi(2^{-1} x - k) \implies \\ &\implies f(2^{-j-1} x) = \sum_k a_k 2^{j/2} \varphi(x - k) \implies f(x) = \sum_k a_k 2^{j/2} \varphi(2^{j+1} x - k) \implies f \in V_{j+1}. \end{aligned}$$

- ¿ φ es función escala? ¿ $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j}$?

Como $\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$ es continua en el 0 y $\hat{\varphi}(0) = 1$, entonces por el Teorema 3.10 si vemos que φ es función escala tendremos que $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_j V_j}$.

Como $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Además,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\chi_{[-\pi, \pi]}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$$

ya que para cada ξ existe una única k tal que $\xi + 2k\pi \in [-\pi, \pi]$.

Así, por la Proposición 3.18 tenemos que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal. Como $V_0 = \text{span}\{\varphi_{0,k} = \varphi(\cdot - k)\}$, entonces $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de V_0 .

Ver que $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}x) \in V_{-1} \subset V_0$ equivale a encontrar el filtro de paso bajo asociado m_0 que satisfaga (3.23).

Si $2\xi \in [-\pi, \pi] \iff \xi \in [-\pi/2, \pi/2] \implies 1 = \hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi)m_0(\xi) = m_0(\xi)$.

Si $\xi \in [-\pi, -\pi/2) \cup [\pi/2, \pi] \iff 2\xi \in [-2\pi, -\pi) \cup [\pi, 2\pi] \implies 0 = \hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi)m_0(\xi) = m_0(\xi)$.

Así, por (3.23) hemos encontrado que:

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq \xi < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{si } -\pi \leq \xi < -\frac{\pi}{2} \text{ o } \frac{\pi}{2} \leq \xi < \pi; \end{cases}$$

la cual la podemos extender periódicamente desde $[-\pi, \pi]$ a \mathbb{R} .

Por lo tanto, φ es función escala.

De esta manera, $\{V_j\}_j$ forman un MRA con función escala φ . Así, por (3.34) tenemos:

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi} \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi + \pi) \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) = e^{i\xi} \chi_{[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]}(\xi).$$

Es decir, $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \chi_{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]}(\xi)$. Por lo tanto, la función ψ tal que:

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \chi_{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]}(\xi)$$

es llamada la **Wavelet de Shannon**.

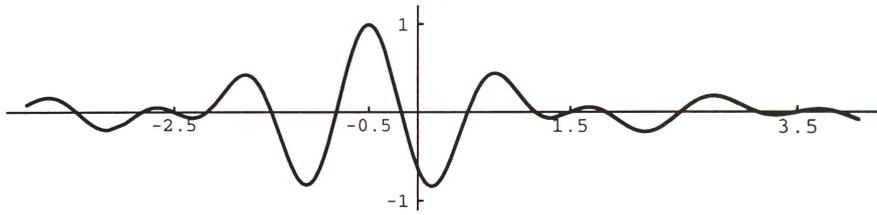


Figura 3: Wavelet de Shannon.

3.4.3. Wavelet de Franklin

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \left(\frac{\sin^4(\frac{1}{4}\xi)}{(\frac{1}{4}\xi)^2} \right) \left(\frac{1 - \frac{2}{3}\cos^2(\frac{1}{4}\xi)}{(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\frac{1}{2}\xi))(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\frac{1}{4}\xi))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tal función ψ se conoce como la **wavelet de Franklin**.

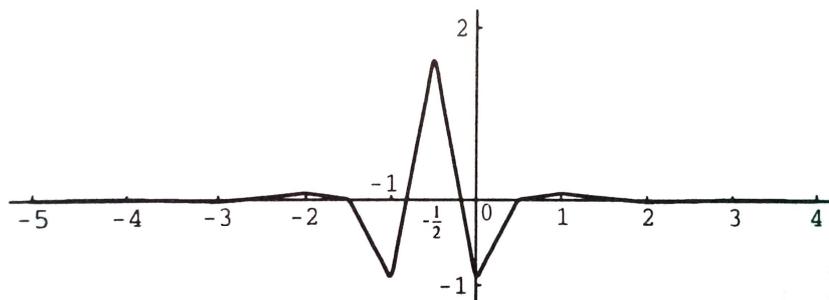


Figura 4: Wavelet de Franklin.

Su función escala es una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \left(\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\xi)}{(\frac{1}{2}\xi)^2} \right) \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{1}{2}\xi\right) \right)^{\frac{-1}{2}}.$$

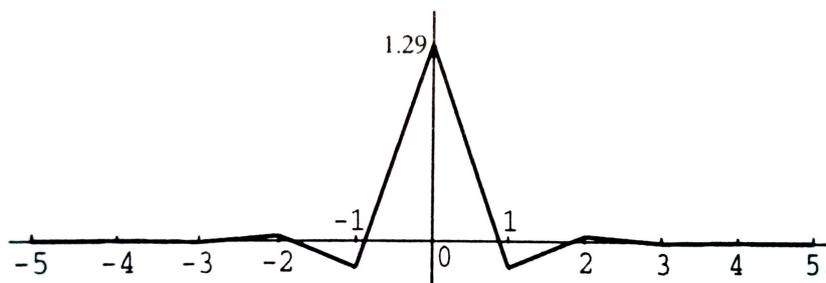


Figura 5: Función escala de la wavelet de Franklin.

3.4.4. Wavelet de Lemarié

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\psi} = \chi_K$ con $K = \left[-\frac{4}{7}, \frac{-2}{7}\right] \cup \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right]$.

Tal función ψ se conoce como la **wavelet de Lemarié**.

3.4.5. Wavelet de Lemarié-Meyer

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\psi}(\xi) = b(\xi)e^{i\xi/2}$ con

$$b(\xi) = \begin{cases} \sin(\frac{3}{4}(|\xi| - \frac{2}{3}\pi)), & \text{si } \frac{2}{3}\pi < |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi, \\ \sin(\frac{3}{8}(\frac{8}{3}\pi - |\xi|)), & \text{si } \frac{4}{3}\pi < |\xi| \leq \frac{8}{3}\pi, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tal función ψ se conoce como la **wavelet de Lemarié-Meyer**.

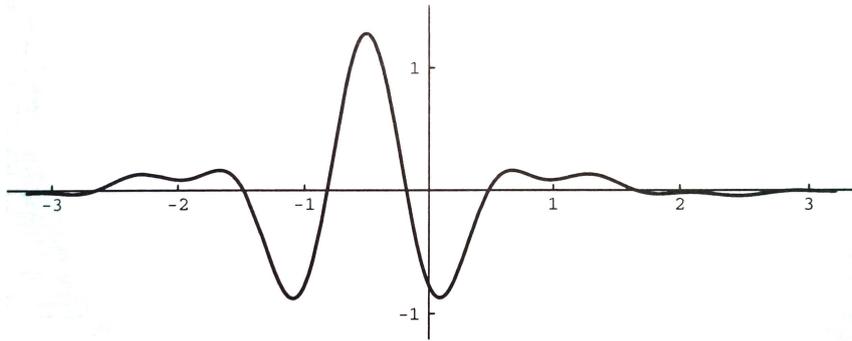


Figura 6: Wavelet de Lemarié - Meyer.

4. Conclusión

En un primer momento, antes de empezar el trabajo final de grado, entre mi tutora y yo estructuramos los diferentes capítulos que formarían este proyecto. A medida que fueron pasando las semanas, vimos que por mi situación no iba a ser viable por tiempo estudiar todo lo pensado, así que fuimos concretando y seleccionando el temario.

Además de los diferentes capítulos en los que está dividido este trabajo, nuestra intención era estudiar las wavelets con soporte compacto, profundizar mucho más en las aplicaciones que tienen hoy en día e incluso entender algún artículo publicado sobre ellas.

Comencé el trabajo final de grado estudiando el Teorema de Balian Low. Debido a las herramientas que utiliza su demostración tuve que estudiar por mí cuenta la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ y en $L^2(\mathbb{R})$, temario que he dado al final de la asignatura de “Análisis Armónico y Teoría de la Señal”, y el espacio de las distribuciones temperadas, ya que era algo que no había visto a lo largo del grado de matemáticas. Una vez visto, pude entender y demostrar el teorema y empezar con la teoría de wavelets.

El haber realizado este trabajo me ha aportado rigurosidad a la hora de escribir y expresarme matemáticamente, he sido consciente de mis capacidades y limitaciones y he conocido un ámbito de las matemáticas muy amplio el cual está en crecimiento actualmente gracias a sus múltiples aplicaciones y en el que aún hay mucho por hacer.

Me hubiera gustado cumplir las expectativas iniciales y haber estudiado todo aquello que por tiempo no forma parte del trabajo final de grado. Pero a la vez, me satisface ver los frutos de todo un semestre dedicado a este proyecto ya que era un reto para mi realizar un trabajo de análisis.

A. Resultados de Análisis Real y Funcional

Teorema de la Convergencia Monótona A.1. Dada $f \geq 0$ una función medible tal que $f = \lim_n f_n$ casi para todo $x \in X$ con $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \leq f_{n+1}$ casi para todo $x \in X$, entonces:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Lema de Fatou A.2. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles positivas, entonces:

$$\int_X \underline{\lim}_n f_n d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n d\mu.$$

Teorema de la Convergencia Dominada A.3. Dada $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \rightarrow f$ casi para todo $x \in X$ con f función medible y $|f_n(x)| \leq g(x)$ casi para todo $x \in X$ con $g \in L^1(\mu)$, entonces:

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Definición A.4. Sea H un espacio vectorial.

- Un espacio normado H se dice de Banach si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente.
- Un espacio H se dice pre-Hilbertiano si está dotado de un producto escalar.
- Un espacio H se dice de Hilbert si es pre-Hilbertiano y completo.

Definición A.5. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se definen los espacios de Lebesgue $L^p(\mu)$ con $1 \leq p < \infty$ como:

$$L^p(\mu) = \left\{ [f] : \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

Si $p = \infty$, entonces:

$$L^\infty(\mu) = \{[f] : \text{supess } |f(x)| < +\infty\}$$

donde $\text{supess } |f(x)| = \inf \{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ casi para todo } x \in X\}$.

Teorema A.6. Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.

En particular, $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con producto escalar:

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$$

Desigualdad de Holder A.7. Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

$$\int_X |f(x)||g(x)|d\mu \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sea $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$, entonces:

Desigualdad de Cauchy-Schwartz A.8. Sea H un espacio pre-Hilbertiano y $f, g \in H$, entonces:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Desigualdad de Minkowski A.9. Sea H un espacio pre-Hilbertiano y sean $f, g \in H$, entonces:

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Teorema de Pitágoras A.10. Sea H un espacio pre-Hilbertiano y sean $f, g \in H$.

Si $\langle f, g \rangle = 0$ entonces $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Desigualdad de Bessel A.11. Sea $\{e_k\}_k$ un sistema ortonormal y H espacio de Hilbert, entonces para toda $f \in H$ tenemos que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Identidad de Parseval A.12. Sea $\{e_k\}_k$ un sistema ortonormal completo y H espacio de Hilbert, entonces para toda $f \in H$ tenemos que:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

Teorema de la Proyección A.13. Sea F un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H . Entonces:

- Para todo $x \in H$ existe un único $y \in F$ tal que $\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z) = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ y decimos que $y = P_F(x)$.
- Si $F^\perp = \{z \in H : (x, z) = 0, \forall x \in F\}$ entonces:

$$H = F \oplus F^\perp = \{x = y + z : y \in F, z \in F^\perp, F \cap F^\perp = \{0\}\}.$$

Además, si $x = y + z$ e $y = P_F(x)$ entonces $z = P_{F^\perp}(x)$.

Proposición A.14. Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert H . Entonces $D^\perp = \overline{D}^\perp$.

B. Resultados de Análisis Armónico y Teoría de la Señal

Definición B.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la transformada de Fourier de f como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Proposición B.2. La transformada de Fourier está bien definida y es un operador lineal acotado.

Teorema de Riemann-Lebesgue B.3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ donde $C_0(\mathbb{R}) = \{\text{funciones continuas en } \mathbb{R} \text{ que se anulan en el infinito}\}$. En particular, \hat{f} es uniformemente continua.

Definición B.4. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$. Se define la convolución como:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Propiedades B.5. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces:

- $\widehat{(f * g)} = \hat{f}\hat{g}$.
- $\widehat{(\tau_x f)}(t) = \hat{f}e^{-2\pi i x t}$.
- $\tau_x \hat{f}(t) = \widehat{(f e^{2\pi i x t})}$.
- Si $\lambda > 0$ entonces $\widehat{(f(x/\lambda))}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$.
- Si $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ entonces existe $(\hat{f})'(t)$ y $\widehat{(-2\pi i x f(x))}(t) = (\hat{f})'(t)$.

Teorema del cambio de gorros B.6. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi$$

Definición B.7. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la inversa de la transformada de Fourier de f como:

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Teorema de Inversión B.8. Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$ casi para todo $x \in \mathbb{R}$.

Además, existe $g \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = g(x)$ casi para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lema B.9. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $(f * g) \in C_0(\mathbb{R})$.

Teorema B.10. Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Observación B.11. Como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ y la transformada de Fourier es continua en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces existe una única extensión continua

$$F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

tal que $F(f) = \hat{f}$ con $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Definición B.12. $F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ se denomina transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$.

Observación B.13. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $f_k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ con $f_k \longrightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_2 = \|f_k - f_j\|_2 \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0$$

Por lo tanto, $\{f_k\}_k$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$.

Lo que implica que $\hat{f}_k \longrightarrow F(f)$ en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema de Plancherel B.14. $F : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo isométrico. Además, $F^{-1}f(x) = Ff(-x)$.

Cálculo de la transformada de Fourier de una función de $L^2(\mathbb{R})$:

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definimos $f_k(x) = f(x)\chi_{B(0,k)}(x)$ con $k \in \mathbb{N}$.

Observamos que $f_k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y además $f_k \longrightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$.

Así,

$$\hat{f}_k(\xi) = \int_{B(0,k)} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \longrightarrow Ff(\xi) \text{ en } L^2(\mathbb{R}).$$

Bibliografía

- [1] G. Bachman, L. Narici y E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Universitext, Editorial Springer, New York, (1999).
- [2] J. Cerdà, *Linear Functional Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 116, American Mathematical Society, (2010).
- [3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBS-NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics, 61, SIAM Publications, Philadelphia, (1992).
- [4] E. Hernández y G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, New York, (1996).
- [5] Y. Nievergelt, *Wavelets Made Easy*, Editorial Birkhäuser, Boston, (1999).
- [6] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Editorial Reverté, Barcelona, (1979).
- [7] D. F. Walnut, *An introduction to Wavelet Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Editorial Birkhäuser, Boston, (2002).