CUESTIONARIO DE EXAMEN

correspondiente á la asignatura de 09451

CALCULOS

redactado por el

D. D. LAURO CLARIANA RICART

Catedrático de la misma en la

Universidad de Barcelona

Curso 1899-1900

CUESTIONARIO DE EXAMEN

GRUPO 1º

I – Variable en general ~ Diferentes conceptos de variable ~ Función ~ Su clasificación ~ Función dependiente de variable compleja ~ Consideraciones geométricas aplicadas á la variable compleja.

II – Estudio general de las ecuaciones lineales diferenciales totales, aplicado en particular al sistema siguiente:

$$
\begin{array}{l}
dx_{m+1} = b_1^1 dx_1 + b_1^2 dx_2 + \cdots\cdots + b_1^m dx_m \\
dx_{m+2} = b_2^1 dx_1 + b_2^2 dx_2 + \cdots\cdots + b_2^m dx_m \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
dx_{m+h} = b_h^1 dx_1 + \cdots\cdots + b_h^k dx_k + \cdots\cdots + b_h^i dx_i + \cdots + b_h^m dx_m \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
dx_{m+n} = b_n^1 dx_1 + b_n^2 dx_2 + \cdots\cdots + b_n^m dx_m
\end{array}
$$

III – Probar en las funciones ordinarias que las reglas de derivación se hacen extensivas á la cantidad compleja.

GRUPO 2º

I – Razon por cociente entre dos variables ~ Estudio de la cantidad en su mayor grado de generalidad ~ Razon por cociente entre dos cantidades indefinidamente pequeñas ó indefinidamente grandes ~ División en órdenes de la cantidad conforme á sus tres categorias ~ Consideraciones geométricas ~ Fórmulas típicas ~ Procedimientos distintos que pueden seguirse para la determinación del orden de una cantidad.

II – Ecuaciones á las derivadas parciales de primer orden ~ Importancia de la función $V(x, y, z, a, b) = 0$ ~ Integrales completa, singular y general segun Lagrange ~ Integración para cuando $q = f(x, y, z, p)$ siendo p dependiente de una constante arbitraria. Casos particulares:

$$f(y, p, q) = 0 \quad p = a\,; \; f(x, p) = f_1(y, q) = 0$$

III – Determinación de la fórmula general:

$l.z = l.r + \theta\sqrt{-1}$. Casos particulares: $l.1 = 2K\pi\sqrt{-1}$

$l.-1 = (2K+1)\pi\sqrt{-1}$ $l\sqrt{-1} = \frac{4K+1}{2}\pi\sqrt{-1}$

Aplicación de la fórmula anterior para la determinación de $u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right) + \frac{4K+1}{2}\pi$ siendo $arc.\,sen.z = u$.

GRUPO 3º

I _ Determinación del orden de una suma, de un producto, de un cociente y de una potencia de varias cantidades comprendidas en una misma ó diferentes categorías ~ Orden definitivo de una cantidad, cuando esta no se refiere al orden fundamental.

II _ Estudio de Lagrange acerca de las ecuaciones á las derivadas parciales de primer orden ~ Ymportancia de la serie de igualdades siguientes:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq} = \frac{-dp}{X+pZ} = \frac{-dq}{Y+qZ}$$

Transformación para cuando la ecuación no contiene á la variable z ~ Ejemplos.

III _ Integrar z^2dz á lo largo de una recta de longitud igual á la unidad, saliendo del origen y formando un ángulo de 45° con el eje de las x ~ Integrar según el contorno de una elipse, la función $\sqrt{z}\,dz$, siendo

$$x = a\cos.\varphi \quad é \quad y = b\,sen.\varphi$$

GRUPO 4º

I - Estudio de las cantidades que difieren entre sí indefinidamente poco ~ Consecuencias ~ Orden de la razon $\frac{a}{b}$, cuando en vez de a y b se sustituyen otras cantidades que difieren de las primeras indefinidamente poco ~ Probar que el orden de una suma cuyos sumandos tienen el mismo signo, no altera si se reemplazan todo ó parte de los sumandos por otros que difieran indefinidamente poco de los primeros ~ Observaciones notables de este último principio ~ Fundamentos del cálculo diferencial é integral.

II – Caso general de integración de ecuación entre derivadas parciales de primer orden y primer grado, dependiente de tres ó cuatro variables ~ Consecuencia para el estudio de ciertas superficies geométricas ~ Integración de ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero.

III – Demostrar que se cumplen las condiciones de monogeneidad en las funciones siguientes: $u = \cos. z$, $u = e^z$ siendo z una cantidad compleja.

GRUPO 5°

I – Método de los indivisibles, de los coeficientes indeterminados de Descartes, de las primeras y últimas razones, de los límites y de Newton ~ Observaciones acerca de las cantidades que se desvanecen ~ Teoría relativa á la derivada de Lagrange. Método importante de Leibnitz ~ Consideraciones filosóficas y comparativas de los métodos precedentes.

II – Ecuaciones entre derivadas parciales ~ Caso en que la ecuación diferencial se refiera á una sola variable ~ Ejemplos ~ Ecuaciones entre derivadas parciales de órdenes superiores al primero, bajo condiciones análogas á las del caso anterior ~ Determinar la integral correspondiente á la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P \frac{\partial z}{\partial x} = Q$$

III – Determinación de las integrales siguientes:

$$\int e^{ax} \cos. bx\, dx \quad , \quad \int e^{ax} \operatorname{sen}. bx\, dx$$

por medio de la cantidad compleja.

GRUPO 6°

I – Determinación numérica de las cantidades como límites de variables, segun el procedimiento de los griegos ~ Valor numérico de una cantidad como resultado de una suma compuesta de un número indefinido de cantidades indefinidamente pequeñas ~ Valor numérico de una cantidad [illegible] tado de la razon por cociente de dos cantidades variables que se resuelven en una cualquiera de las tres categorias correspondientes á la cantidad.

II – Integración de ecuaciones diferenciales por medio de series. Empleo de la serie de Mac-Laurin y de Taylor ~ Casos en que no puede aplicarse la serie de Mac-Laurin ~ Dada una integral bajo forma de serie, deducir su ecuación diferencial correspondiente.

III – Derivadas sucesivas de $u = \frac{x}{e^x - 1}$ ~ Relacion importante con los números de Bernoulli.

GRUPO 7°

I – Procedimiento general para determinar la razon por cociente del incremento de una funcion á su variable independiente ~ Estudio general de la derivada ~ Consideraciones filosóficas acerca de las funciones continuas cuya derivada se resuelve en la tercera categoria de la cantidad ~ Incremento y diferencial de una función ordinaria ~ Incremento y diferencial de la variable independiente ~ Coeficiente diferencial ~ Consideraciones geométricas.

II – Integración de ecuaciones diferenciales simultáneas ~ Ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden entre tres variables ~ Aplicación á las formas normales ~ Casos particulares que pueden ocurrir.

III – Derivada $\underline{n+1}$ de $\underline{u}$ siendo $u = \text{arc. tg.} x$ con aplicación de la cantidad compleja y en el supuesto de que $u = \frac{\pi}{2} - y$

GRUPO 8°

I – Diferenciación de una función compuesta en el supuesto de que no haya mas que una variable independiente ~ Diferenciación de una función compuesta, suponiendo que hayan varias variables independientes ~ Fórmulas generales. ~ Probar que si dos cantidades $\underline{p}$ y $\underline{q}$ dependen de x é y, siendo dichas cantidades una función de la otra, las derivadas respectivas son prop[illegible]les ~ Y[illegible]ortancia del te[illegible] recip[illegible]

II - Integración de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y sin término independiente de la variable ~ Método de Euler ~ Ecuación modular ~ Estudiar los diferentes casos que pueden presentarse según sean las raíces desiguales, iguales ó imaginarias ~ Ejemplos.

III - Determinar las diferenciales de las funciones hiperbólicas siguientes: $y = Th^2 x + Cth^2 x$; $y = (Sh.x)^x$.

GRUPO 9º

I - Funciones hiperbólicas directas é inversas ~ Preliminares acerca de los desarrollos en serie de las funciones: e^z, cos.z, y sen.z, para cuando z sea una cantidad compleja ~ Estudio de la expresión $e^{z2\sqrt{-1}}$ ~ Funciones hiperbólicas directas ~ Paralelo entre las funciones circulares y las hiperbólicas directas. Funciones hiperbólicas inversas.

II - Integración de ecuaciones lineales de un orden cualquiera ~ Caso en que el segundo miembro sea igual á cero ~ Integración de la ecuación lineal completa ~ Casos particulares que pueden ocurrir.

III - Transformar en funciones circulares la expresión: $\frac{e^{x2\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\sqrt{-1}} - 1}$.
Importancia de esta fórmula para las funciones de Bernoulli.

GRUPO 10º

I - Diferenciación de las funciones hiperbólicas directas ~ Referencia á las funciones circulares ~ Diferenciación de las funciones hiperbólicas inversas ~ Aplicar diferentes procedimientos para la obtención de las fórmulas anteriores.

II - Integración de ecuaciones diferenciales de un orden superior al primero ~ Reducción de la integral múltiple á otras simples ~ Ecuación diferencial en que entran dos derivadas consecutivas de un orden cualquiera, ó que se diferencien en dos unidades ~ Casos particulares de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse á un orden inferior ~ Ejemplos.

III - Determinación de $\cos^m x$, en función de los arcos múltiples.

GRUPO 11º

I_ Aplicación del cálculo diferencial á las determinantes en forma de matriz ~ Caso en que los elementos de la matriz dependan de una sola variable, siendo ó no todos los elementos funciones de la misma ~ Caso en que los elementos de la matriz sean funciones de dos ó mas variables independientes.

II_ Soluciones singulares de una ecuación diferencial de primer orden ~ Soluciones singulares deducidas de la integral general ~ Significación de dicha integral ~ Propiedad del factor integrable en esta clase de integrales ~ Ejemplos.

III_ Área de la evoluta de una elipse, dada por la ecuacion $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$ y siendo $x=\frac{c^2}{a}\operatorname{sen}^3\varphi$, $y=\frac{c^2}{b}\cos^3\varphi$

GRUPO 12º

I_ Derivadas y diferenciales de diferentes órdenes correspondientes á una función ordinaria ~ Consecuencias para una función trascendente ~ Investigaciones importantes para descubrir ciertas leyes en el desarrollo de sus derivaciones ~ Ejemplos.

II_ Ecuación diferencial de primer orden y de un grado cualquiera ~ Consideraciones generales ~ Caso en que la ecuación diferencial no contenga á las variables ~ Ecuaciones diferenciales de M. Clairaut, dadas por las formas siguientes:

$$y=xF(p)+\varphi(p) \quad , \quad y=px+\varphi(p)$$

III_ Área de la evoluta de una elipse referida á ejes polares, siendo $r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$, $p=\frac{b^2}{a}$, $e=\frac{c}{a}$, $r=\frac{a^2-cx}{a}$ $x=a\cos\varphi$.

GRUPO 13º

I_ Fórmula de Leibnitz para la determinación de la derivada ó diferencial de un orden cualquiera correspondiente á un producto de funciones ordinarias ~ Demostrar que el desarrollo es general ; Aplicar el mismo principio á la división de funciones ~ Determinación de las leyes á que se sujetan ciertos desarrollos ~ Ejemplos.

I.- Estudio del factor que transforma en integrable el primer miembro de la ecuación diferencial: $Mdx + Ndy = 0$ ~ Determinar dicho factor para cuando la ecuación sea homogenea. Problema de las trayectorias en general ~ Trayectorias ortogonales.

III.- Demostrar en la catenaria dada por la ecuación: $my = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2}$, que la ordenada es la hipotenusa de un triangulo rectangulo en que uno de sus catetos es la porción de arco contado desde el punto de arranque y el otro siempre igual á la ordenada minima.

GRUPO 14ª

I.- Derivadas sucesivas de algunas funciones para el valor particular de $x=0$ ~ Importancia de la fórmula de Leibnitz para la resolución de este problema ~ Determinación directa de las dos primeras derivadas ~ Estudiar los valores resultantes de arc. sen. x y arc. tg. x, segun el grado de su derivación sea par ó impar.

II.- Ecuaciones diferenciales lineales ~ Estudio de la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ~ Fórmulas notables de Jaime Bernoulli aplicadas á la ecuación: $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^m$ ~ Justificar la ecuación de condición ~ aplicaciones.

III.- Area de una rama de lemniscata cuya ecuación es: $r = a\sqrt{\cos. 2\theta}$.

GRUPO 15ª

I.- Diferenciación de funciones sin resolver ~ Diferenciación de una función ordinaria sin resolver ~ Diferenciación de dos funciones sin resolver compuestas cada una de tres variables, siendo dos de ellas funciones de la tercera. Estudio en el caso de haber n ecuaciones con $n+1$ variables ~ Nuevos casos mas generales que pueden presentarse.

II.- Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden ~ Separación de variables ~ Casos en que es posible la integración ~ Estudiar el caso en que la ecuación diferencial sea homogénea ~ Caso en que faltando la homogeneidad, por alguna transformación, puede llevarse al primero.

III - Volumen engendrado por la cicloide dada por las ecuaciones:

$$x = a(u - \text{sen.}u) \qquad y = a(1 - \cos.u)$$

y en el concepto de girar alrededor del eje $\underline{x}$.

GRUPO 16º

I - Derivadas parciales de funciones compuestas de dos ó mas variables independientes ~ Principio fundamental de dichas derivadas ~ Diferenciales de órdenes superiores al primero de funciones compuestas en el caso mas general ~ Leyes generales que se observan en sus desarrollos ~ Diferentes notaciones adoptadas ~ Estudio para el caso en que algunas variables independientes se transformen en dependientes.

II - Yntegración de ecuaciones diferenciales ordinarias ~ Consideraciones generales ~ Probar que toda ecuación diferencial del orden $\underline{m}$, admite una integral que encierra $\underline{m}$ constantes arbitrarias ~ Yntegrales particulares ~ Órdenes respectivos de las ecuaciones diferenciales y de las integrales ~ Regla general para conocer si una integral con $\underline{m}$ constantes, se refiere á una ecuación diferencial del orden $\underline{m}$.

III - Problema de Viviani, referente á la parte de la semiesfera que corresponde al cuadrado de su diametro.

GRUPO 17º

I - Diferenciales de diversos órdenes de funciones sin resolver ~ Ley de los desarrollos segun las funciones sean mas ó menos complicadas ~ Eliminación de constantes ~ Procedimiento general ~ Aplicación á las cónicas.

II - Yntegración de ecuaciones diferenciales ~ Ecuaciones diferenciales ordinarias ~ Ecuaciones entre derivadas parciales ~ Ecuación entre diferenciales totales ~ Probar que todo sistema de $\underline{m}$ ecuaciones diferenciales entre $\underline{x}$ y $\underline{m}$ funciones $y_1\ y_2 \cdots y_m$, de la primera variable, puede transformarse en otro donde no figuren mas que las derivadas de primer orden ~ Forma normal de un sistema simultaneo de m ecuaciones de primer orden ~ Procedimiento general para deducir de un sistema de m ecuaciones diferenciales, una ecuacion diferencial en que no entre mas que x y una de las funciones ~ Aplicación de reglas análogas á la formación de una determinante para deducir el orden de la ecuación diferencial definitiva ~ Condiciones á que deben satisfacer las integrales ademas de las que corresponden á las ecuaciones diferenciales respectivas ~ Aplicación á la Mecánica respecto al movimiento de un punto en el espacio.

III - Consideraciones acerca del hiper espacio ~ Aplicación á la hiper esfera ~ Importancia de la Jacobiana $\dfrac{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n)}$ siendo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= R \cos\theta \\
x_2 &= R \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_{n-2} &= R \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \dots\dots\dots \cos\theta_{n-2} \\
x_{n-1} &= R \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \dots\dots \operatorname{sen}\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\
x_n &= R \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \dots\dots \operatorname{sen}\theta_{n-2} \operatorname{sen}\theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

GRUPO 18ª

I - Eliminación de funciones arbitrarias ~ Procedimiento general. Consecuencias ~ Aplicar el anterior procedimiento á las superficies regladas de plano director y á las superficies desarrollables.

II - Cuadratura de superficies curvas ~ Fórmula general ~ Observación notable acerca de los límites de la integral doble que corresponde á la fórmula general ~ Aplicación á la esfera ~ Cuadratura de superficies de revolución ~ Aplicaciones.

III - Generalización del teorema de Green, siendo

$$\Omega = \iint \dots v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Aplicación á las funciones esféricas representadas por la ecuación general: $u = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n-2}{2}}$, siendo

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Importancia de la fórmula:

$$\iint \dots \sum_i v\, x_i\, dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx\, R^{-n} = 0$$

GRUPO 19ª

I – Cambio de variables ~ Estudiar el cambio de variables en la función siguiente: $V = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots)$ ~ Cambio de la variable independiente ~ Cambio de la funcion y de la variable independiente ~ Ejemplos.

II – Volumen de cuerpos terminados por superficies cualesquiera ~ Fórmulas generales ~ Procedimientos varios para la determinación de un volumen ~ Aplicación al elipsoide ~ Volumen de cuerpos referidos á coordenadas polares.

III – Teorema de M. Kronecker.

GRUPO 20ª

I – Del cambio de variables ~ Funciones de la forma:

$$V = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots)$$

~ Cambio de las variables independientes ~ Cambio de todas las variables ~ Ejemplos.

II – Volumen de cuerpos de revolución ~ Aplicaciones en el concepto de que las generatrices-generadoras de los diferentes cuerpos de revolución, vengan expresadas respectivamente por: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, $y^2 = 2px$ y en el concepto de que dichas generatrices giren alrededor del eje $\underline{x}$.

III – Transformación de la integral triple $\iiint dx\,dy\,dz$, en coordenadas polares.

GRUPO 21º

I – Determinantes funcionales ~ Consideraciones generales ~ Forma de la determinante U ~ Forma de la determinante de Jacobi expresada por J ~ Consecuencias ~ Determinante H ~ Relaciones notables entre las determinantes J y H.

II – Rectificación de curvas ~ Sentido verdadero de dicha rectificación ~ Aplicaciones a los ejemplos siguientes:

$$y^2 = 2px, \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Consideraciones generales acerca del origen de las inte-

grales elípticas ~ Determinación de sus tres especies.
III – Consideraciones notables acerca de la integral: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$.

GRUPO 22°

I – Diferencial de una función dependiente de variable compleja ~ Condiciones para que la función imaginaria: $\varphi(z)=u+vi$. admita una derivada ~ Función monógena ~ Consecuencias importantes para dos funciones que tengan derivadas iguales.
II – Aplicaciones geométricas del cálculo integral ~ Cuadratura de figuras planas ~ Ejemplos de cuadratura de curvas referidas á coordenadas cartesianas y polares.
III – Estudio de la integral siguiente: $\int_{-1}^{+1} dz$, siendo $z=\sqrt{t}$.

GRUPO 23°

I – Fórmula de Lagrange para el desarrollo de una función cualquiera de z, según una serie ordenada de potencias enteras y positivas de x, siendo $z=a+x\varphi(z)$ ~ Ley que se desarrolla en las derivadas consecutivas de la serie ~ Casos particulares que pueden originarse de la fórmula general de Lagrange ~ Ejemplos.
II – Integrales múltiples en general ~ Reducción de dichas integrales ~ Método general ~ Aplicaciones ~ Método de Dirichlet con aplicación al volumen del elipsoide.
III – Integrales de Fresnel partiendo de $\int_0^{I} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}}$

GRUPO 24°

I – Diferencial del área correspondiente á una curva plana. Diferencial de un arco de curva plana ~ Fórmulas generales correspondientes á la tangente, subtangente, normal y subnormal de curvas planas referidas á ejes polares ~ Diferencial de un arco ó área correspondiente á una curva plana, referida á los mismos ejes polares ~ Aplicación á la familia de las espirales.
II – Integrales Eulerianas de primera y segunda especie.

Transformaciones de las mismas por sustitución ~ Propiedades ~ Importancia de la expresión : $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ~ su demostración ~ Determinación de la curva Gamma.

III — Desarrollo de la integral: $\int_0^x e^{-x^2}dx$, segun x sea menor ó mayor que la unidad ~ Expresion de: $u'=\int_x^\infty e^{-x^2}dx=\int_x^\infty \frac{1}{2x}e^{-x^2}2x\,dx$ para cuando $x>1$ ~ Fórmula notable de Laplace:

$$U=\int_0^\infty e^{-x^2}dx-\int_x^\infty e^{-t^2}dt \quad \text{siendo } U=e^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

GRUPO 25

I — Contacto de curvas planas ~ Linea osculatriz ~ Círculo osculador ~ Curvatura de curvas planas ~ Curvatura media ~ Curvatura de una curva en un punto dado ~ Círculo de curvatura ~ Relación entre el círculo de curvatura y el osculador.

II — Deducir de la integral conocida: $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}$ la expresión siguiente:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\,l\,\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+b^2}$$

Deducir de la integral conocida: $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$ la siguiente:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-ax}}{x}\operatorname{sen} bx\,dx=\operatorname{arc.tg}\frac{b(a-\alpha)}{b^2+a\alpha}$$

Determinar por procedimientos distintos la integral: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

Importancia de la cantidad compleja para la determinación de ciertas integrales.

III — Cambiar la variable independiente x en t en la expresion: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+\frac{2ay}{1-x}=0$, siendo $x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ y valiendose de las funciones hiperbólicas.

GRUPO 26

I — Determinar el sentido de la curvatura en una curva plana cerca de un punto dado ~ Diferentes formas del radio de curvatura ~ Estudiar el caso en que el arco represente la variable independiente ó que la función no se halle resuelta ~ Expresión del radio de curvatura en ejes polares.

II — Determinación de integrales definidas por medio d. la diferenciación é integración bajo el signo integral ~ Pasar de la integral $\int_a^b F(x)\,dx$, á la siguiente: $\int_a^b F(x,z)\,dx$ segun los límites de dicha integral sean constantes ó dependientes de la variable. Diferenciación é integración bajo el signo integral en general ~ Aplicar los principios precedentes á las integrales que á continuacion se expresan:

$$\int_i^I \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}} \;;\; \int_i^I e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \;,\; \int_i^I e^{-(a+b\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}}$$

á fin de obtener las nuevas siguientes:

$$\int_i^I \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}} \;;\; \int_i^I e^{-ax} x^{n-1}\,dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

y

$$\left.\begin{aligned} \int_i^I e^{-ax} x^{n-1}\,\text{sen}.bx\,dx &= \frac{(n-1)!\,\text{sen}.n\theta}{\rho^n} \\ \int_i^I e^{-ax} x^{n-1}\cos.bx\,dx &= \frac{(n-1)!\cos.n\theta}{\rho^n} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{siendo} \\ &a+b\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\theta) \end{aligned}$$

III — Transformar la ecuación: $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$ en coordenadas polares ~ Procedimientos distintos.

GRUPO 27

I — Aplicación del radio de curvatura á las cónicas ~ Fórmula común ~ Radio de curvatura en la circunferencia, cicloide y espiral logarítmica.

II — Determinar si la integral $\int_a^b F(x)\,dx$ tiene un valor finito y determinado cuando uno de sus límites se convierte en una cantidad indefinidamente grande ~ Averiguar si la integral $\int_a^b F(x)\,dx$ tiene un valor finito y determinado cuando $F(x)$ se transforma en una cantidad indefinidamente grande para el valor de la variable que corresponde á uno de los límites de la integral ~ Caso en que la función $F(x)$ remete indefinidamente growde por un valor de la variable que esté comprendido entre los límites de dicha integral.

III – Fórmula de Gauss, partiendo de $f(m,x)=\int_i^m \left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{x-1}dt$.

GRUPO 28

I – Evolutas y evolventes en las curvas planas ~ Propiedades notables de las mismas ~ Fórmulas fundamentales ~ Determinación de las evolutas en algunas curvas conocidas.

II – Desarrollos de integrales definidas para cuando uno ó los dos límites de la integral pasen á la categoría de cantidades indefinidamente grandes ~ Determinación de las integrales siguientes:

$$\int_i^I e^{-x}dx,\ \int_i^I \frac{dx}{x},\ \int_i^I \cos.x\,dx,\ \int_i^I e^{-ax}dx,\ \int_i^I e^{ax}dx,\ \int_{-I}^I \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$\int_{-I}^I \frac{dx}{(x-a)^2+b^2},\ \int_i^I e^{-ax}\cos.bx\,dx,\ \int_i^I \frac{y^{m-1}dy}{(1+y)^n}\ \text{siendo } m<n;\ \int_i^I x^n e^{-x}dx$$

III – Determinación de la serie

$$l.\Gamma(x)=-Cx-l.x+\frac{1}{2}S_2x^2-\frac{1}{3}S_3x^3+\ldots\ldots$$

partiendo de la fórmula de Gauss:

$$\Gamma(x)=\frac{m^x.1.2.\ldots\ldots m}{x(x+1)\ldots\ldots(x+m)}$$

GRUPO 29

I – Estudio de las involutas y envolventes planas ~ Procedimiento general para determinar la envolvente de varias involutas correspondientes á una misma función ~ Consideraciones acerca de las tangentes comunes ~ Aplicaciones á varios ejemplos.

II – Determinación de las integrales definidas siguientes:

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{2m}x\,\text{sen}.^{2n}x\,dx,\ \int_i^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{2m}x\,\text{sen}.^{2n+1}x\,dx,\ \int_i^1 \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int_i^1 \frac{x^{2m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Fórmula de Wallis.

III – Expresión de $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ y determinación en general de

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ por medio de la fórmula de Gauss.

GRUPO 30

I – Puntos singulares en las curvas planas ~ Puntos singulares á que da origen una misma rama de curva ~ Puntos singulares que resultan del encuentro de varias ramas ~ Estudiar el caso en que la ecuación se presente bajo forma implícita.

II – Nociones generales acerca de las integrales definidas ~ Determinación de las siguientes:

$$\int_i^1 x^m dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{x}, \quad \int_i^a \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad \int_i^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Determinación de las siguientes integrales definidas en el concepto de que m, sea par ó impar.

$$\int_i^{\frac{\pi}{2}} sen.^m x\, dx, \quad \int_i^{\frac{\pi}{2}} cos.^m x\, dx, \quad \int_i^{\frac{\pi}{4}} tg.^m x\, dx$$

III – Demostrar la igualdad siguiente:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen.\, n\pi}$$

partiendo de la fórmula de Gauss y sabiendo además que

$$sen.x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots\cdots$$

GRUPO 31

I – Líneas alabeadas ~ Funciones que la determinan ~ Ecuaciones de la tangente y del plano normal en un punto de una línea alabeada ~ Diferencial de un arco referido á ejes coordenados cartesianos ó polares.

II – Integración de funciones diferenciales con tres variables independientes ~ Condición de integrabilidad ~ Determinar la expresión general correspondiente á la integral de dichas funciones diferenciales ~ Ejemplos.

III – Determinación de $\frac{\partial^2 l\Gamma(x)}{\partial x^2}$ sabiendo que

$$l.\Gamma(x) = -Cx - l.x + \frac{S_2 x^2}{2} - \frac{S_3 x^3}{3} + \cdots\cdots\cdots$$

Deducir luego la notable fórmula

$$\frac{\partial l.\Gamma(x+1)}{\partial x} = -C + x\left[\frac{1}{1(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} + \cdots\cdots\right]$$

GRUPO 32

I – Plano osculador ~ Conceptos diferentes que pueden conducir al conocimiento de la expresión de dicho plano ~ Ecuación correspondiente ~ Movimiento circulatorio á que obedecen las cantidades que entran en dicha ecuación ~ Aplicación á la hélice.

II – Integración de funciones diferenciales compuestas de dos ó mas variables independientes ~ Condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de dichas funciones ~ Estudiar el caso particular de una función compuesta de dos variables independientes ~ Ejemplos.

III – Constante de Euler expresada por
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}-l.m$$
siendo m indefinidamente grande ~ Fórmula fundamental:
$$l.m = l(m-1) + l\left(1-\frac{1}{m-1}\right)$$

GRUPO 33

I – Superficies curvas ~ Ecuación del plano tangente ~ Plano tangente en un punto del elipsoide ~ Ecuaciones de la normal ~ Ángulos de la normal con los ejes coordenados ~ Superficie envolvente de otra móvil.

II – Integración por medio de series ~ Principios importantes que deben tenerse en cuenta en dichos desarrollos ~ Procedimiento general ~ Integración por series de las expresiones:
$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{dx}{1+x},\quad \int\frac{dx}{1+x^2}$$
Valores aproximados de algunas integrales irreducibles á forma finita ~ Aplicación á la integral elíptica de primera especie.

III – Cálculo de la constante de Euler partiendo de las fórmulas siguientes:
$$\frac{\partial l.\Gamma(x+1)}{\partial x} = -C + x\left[\frac{1}{1(x+1)}+\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{3(x+3)}+\cdots\cdots\right]=$$
$$=-C+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)$$

GRUPO 34

I – Curvatura de las líneas en el espacio ~ Expresión del primer radio de curvatura ~ Círculo osculador ~ Centro de dicho círculo –

Normal principal – Cosenos de los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

II – Deducir de la fórmula general

$$\int sen^m x \cos^n x\,dx = -\frac{sen^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int sen^{m-2} x \cos^n x\,dx$$

la integrál $\int sen^m x\,dx$ en el supuesto de que $n=0$ y según m sea par ó impar. – Deducir de la expresión

$$\int sen^m x \cos^n x\,dx = \frac{sen^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int sen^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

la que corresponde á $\int \cos^n x\,dx$, bajo condiciones análogas á las del caso anterior – Deducir de la fórmula

$$\int sen^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x\, sen^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int sen^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx$$

la correspondiente á $\int tg^m x\,dx$, en el supuesto de que se tenga $n=-m$ – Deducir de la fórmula

$$\int sen^m x \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\, sen^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int sen^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx$$

la inmediata $\int \cot^m x\,dx$ siendo $m=-n$.

III – Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int_0^\infty \frac{sen.\, bx}{x^n}\,dx = \frac{b^{n-1}}{2\Gamma(n)}\,\frac{\pi}{sen.\,\frac{n\pi}{2}}$$

hallándose n comprendido entre 1 y 2 – Fórmulas fundamentales. $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{n-1}\,dx$; $\int_0^\infty sen.\,bx\, e^{-tx}\,dx = \frac{b}{b^2+t^2}$

$$\frac{t^2}{b^2} = \theta^2 \qquad \int_0^\infty \frac{\theta^{\frac{n}{2}-1}}{1+\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{sen.\,\frac{n\pi}{2}}$$

GRUPO 35

I – Angulo de flexión ó de segunda curvatura – Cosenos de los ángulos que forma una recta perpendicular al plano osculador con los ejes coordenados – Fórmula del radio de curvatura de segunda especie.

II – Deducir de la fórmula general

$$\int sen^m x \cos^n x\,dx = \frac{sen^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int sen^m x \cos^{n-2} x\,dx$$

el desarrollo que corresponde á $\int \frac{sen^m . x}{cos^n . x} dx$, en el supuesto de que n, sea negativa ~ Deducir de la fórmula general

$$\int sen^m . x \, cos^n . x \, dx = - \frac{sen^{m-1} . x \, cos^{n+1} . x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sen^{m-2} . x \, cos^n . x \, dx$$

el desarrollo correspondiente á $\int \frac{cos^n . x}{sen^m . x} dx$, considerando m negativa ~ Deducción de las últimas integrales:

$$\int \frac{dx}{sen . x \, cos . x} , \int \frac{dx}{sen . x} , \int \frac{sen . x}{cos . x} dx , \int \frac{dx}{cos . x} , \int \frac{cos . x}{sen . x} dx$$

III- Deducir la integral siguiente:

$$\int_{1}^{I} \frac{sen . 2x\pi}{x^{1-s}} dx = \frac{(2\pi)^{1-s}}{4\Gamma(1-s) sen . \frac{\pi s}{2}}$$

GRUPO 36

I - Determinar en la hélice el primero y segundo radio de curvatura ~ Diferenciales de los cosenos correspondientes á los ángulos que con los ejes coordenados forman la tangente, la normal principal y la binormal referentes á un punto de una línea alabeada ~ Importancia de las fórmulas que expresan las diferenciales de los cosenos correspondientes á los ángulos que la normal principal forma con los ejes coordenados.

II - Determinación de las integrales que á continuación se expresan:

$$\int e^{ax} cos . bx \, dx , \int e^{ax} sen . bx \, dx , \int sen^m . x \, cos^n . x \, dx$$

Consideraciones acerca de las últimas integrales

$$\int dx , \int cos . x \, dx , \int sen . x \, dx \text{ y } \int sen . x \, cos . x \, dx$$

III - Determinar la igualdad que á continuación se expresa:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$$

en el supuesto de que $B(p,p) = 2\int_{1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \right]^{p-1} dx$ y $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$.

GRUPO 37

I - Determinar la expresión de la superficie polar de una línea cualquiera ~ Sistema de ecuaciones indispensable para poder deducir la superficie polar de una linea ~ Aplicación á la hélice.

II - Integración de funciones trascendentes ~ Estudio de las siguientes integrales: $\int F(x)\,dx$, $\int F(sen.x)\cos.x\,dx$, $\int F(arc.sen.x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int F(sen.x, cos.x)\,dx$, $\int F(sen.x, sen.2x \ldots\ldots cos.x\, cos.2x)\,dx$

Hallar el desarrollo de la integral $\int P z^n dx$, siendo P una función algebraica y z una trascendente.

III - Determinar la integral

$$\int_i^I \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}(t+1)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\;\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$ suponiendo $t+1=z$ y $z=\frac{1}{u}$.

GRUPO 38

I - Esfera osculatriz ~ Expresión del radio de dicha esfera osculatriz ~ Evolutas en las lineas alabeadas ~ Consideraciones notables acerca de las normales principales trazadas en los diferentes puntos de una linea alabeada ~ Ecuaciones que determinan las evolutas de una linea dada.

II - Aplicacion de las integrales binomias:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(-m+1)} - \frac{b(m-np-n-1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

á las expresiones siguientes:

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} , \int\frac{x^{-m} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Deducir sus diferentes desarrollos segun m sea par ó impar ~ Integral correspondiente al péndulo circular: $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

III - Determinar la integral siguiente:

$$\int_i^I \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$ siendo $x = \frac{1}{t}$

GRUPO 39

I - Teoria de la curvatura en las superficies ~ Curvatura de una linea cualquiera trazada sobre una superficie ~ Radios de curvatura correspondientes á una seccion oblicua ó normal ~ Teorema de Meusnier.

II – Deducir la segunda fórmula correspondiente á las binomias:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx$$

Deducir la tercera:

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(m-np-n-1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

Deducir la cuarta:

$$\int x^m(a+bx^n)^{-p}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} + \frac{-m-n+np-1}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx$$

III – Integrar la expresion $\int F(\text{sen.}x, \cos.x)dx$ considerando la expresion de dentro del signo integral referida á una funcion racional, siendo $z = tg.\frac{1}{2}x$ ~ Aplicacion á: $\int\frac{dx}{\text{sen.}x}$, $\int\frac{dx}{\cos.x}$

GRUPO 40

I – Secciones principales en un punto de una superficie ~ Teorema de Euler ~ Probar que la suma de las curvaturas de dos secciones normales perpendiculares entre si, es constante é igual á la suma de las curvaturas máxima y minima en el punto considerado de la superficie ~ Importancia de los puntos umbilicales ~ Ecuaciones que determinan dicho punto.

II – Integracion de las diferenciales binomias ~ Casos generales de integracion ~ Deducir la fórmula siguiente:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$

III – Preparar la integral:

$$\int\frac{dx}{\cos.a - \cos.x}$$ dentro de las funciones racionales.

GRUPO 41

I – Cálculo de los radios de curvatura principales en un punto dado cualquiera de una superficie ~ Ecuacion que determina la direccion de las secciones principales en un punto dado cualquiera de una superficie ~ Relación de las fórmulas finales con las que se refieren á las lineas de curvatura que pasan por el punto considerado de la superficie.

II - Determinar las funciones que corresponden á las integrales, que á continuación se expresan:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}, \int \frac{(\alpha x+\beta)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}, \int \frac{dx}{x\sqrt{Bx+Cx^2}}$$

III - Determinación de las integrales:

$\int tg.x\,dx, \int cot.x\,dx$ en el supuesto de que los términos sean homogéneos y de grado par.

GRUPO 42

I - Definición de linea indicatriz ~ estudio y consecuencias importantes de dicha linea ~ Lineas de curvatura situadas sobre una superficie ~ Lugar geometrico de las normales á dichas lineas ~ Superficie como lugar geométrico de los centros de curvatura de las precitadas lineas.

II - Integración de funciones irracionales ~ Caso en que los radicales contengan cantidades monomias ~ Integración de funciones de la forma $F(x, \sqrt{a+bx\pm x^2})$ ~ Integración de funciones especiales que pueden reducirse facilmente á la forma racional.

III - Determinar la forma de reducción:

$$x^{m+1}(l.x)^n = (m+1)A_n + mA_{n-1}, \text{ siendo } \int x^m (l.x)^n dx = A$$

Valores de $A_0\ A_1\ A_2 \dots$

GRUPO 43

I - Superficies cilíndricas, conicas y de revolución ~ Ecuaciones entre derivadas parciales de las superficies antedichas ~ Consideraciones generales acerca de las superficies designadas bajo el nombre de conoides, desarrollables y regladas ~ Ecuaciones entre derivadas parciales de las precitadas superficies.

II - Procedimientos generales para la integración de funciones fraccionarias racionales ~ Integración en cada uno de los cuatro casos que pueden presentarse ~ Estudiar el caso mas general de expresión fraccionaria racional ~ Aplicaciones.

III - Principios de Cauchy ~ Función monodroma ó monotropa ~ Función politropa ~ Función sinécdoque ú holomorfa ~ Función racional ~ Polos ~ Función meromorfa ~ Estudio de la función l.z ~ Consideraciones geométricas ~ Puntos críticos ~ Diferentes regiones del plano de la variable ~ Camino elemental ~ Lacinas cortantes ~ Reducción de un camino cualquiera á una combinación de caminos elementales.

GRUPO 44

I - Triangulos indefinidamente pequeños ~ Triangulo cuyos tres ángulos tienden hacia α, β y γ, como cantidades finitas y los tres lados a, b, c hacia los indefinidamente pequeños de un mismo orden ~ Triangulo ABC en que A tiende hacia un ángulo recto y los lados contiguos hacia los indefinidamente pequeño de primer orden ~ Orden indefinitesimal de diversas lineas que pueden considerarse en un triangulo rectangulo que tenga un cateto y un ángulo adyacente indefinidamente pequeño. Triangulo que tiene un lado indefinidamente pequeño respecto á su contiguo ~ Triangulo que tiene dos ángulos indefinidamente pequeños de primer orden ~ Triangulo que tiene un ángulo indefinidamente pequeño de primer orden, comprendido entre dos lados indefinidamente pequeños, tambien de primer orden.

II - Integración por partes ~ Fin que se propone dicha integración ~ Modo de disponer los datos para poder aplicar el principio de la integración por partes ~ Integración por sustitución ~ Observaciones acerca de los límites de la integral ~ Reglas prácticas que pueden tenerse en cuenta para alcanzar las integrales por sustitución ~ Ejemplos.

III - Estudio de una función algebraica u, definida por la ecuación:

$$0 = Au^m + Bu^{m-1} + \ldots\ldots = F(z, u)$$

Determinación de las diferentes ramas de curvas pertenecientes á la función anterior ~ Puntos críticos ~ Reducción de un camino cualquiera á caminos elementales ~ Ley de permutación ~ Clarificación de los puntos críticos.

GRUPO 45

I - Orden indefinitesimal de líneas cuando entran en comparación unas con otras ~ Consideraciones generales acerca de la curvatura de las líneas ~ Diferencia de curvatura de las dos mitades de un arco indefinidamente pequeño de primer orden ~ Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y su cuerda ~ Diferencia entre un arco indefinidamente pequeño y la tangente trazada á una de las extremidades del arco y terminada en la ordenada trazada por la otra extremidad de dicho arco ~ Diferencia de curvaturas extremas en un arco indefinidamente pequeño ~ Expresión de la perpendicular trazada desde la extremidad de un arco indefinidamente pequeño á la tangente que pasa por el otro extremo ~ Ángulo formado por la cuerda de un arco indefinidamente pequeño de primer orden con la tangente que pasa por el punto medio de este arco ~ Arco comprendido entre el punto medio de un arco indefinidamente pequeño de primer orden, y el punto de contacto de la tangente paralela á la cuerda de este arco ~ Angulos formados por las tangentes á las extremidades de un arco indefinidamente pequeño con la cuerda respectiva. Diferencia entre las tangentes precitadas.

II - Nociones preliminares acerca del cálculo integral ~ Relación entre el cálculo diferencial é integral ~ Integral de una suma de diferenciales ~ Integración inmediata ~ Ejemplos.

III - Integrales de funciones monodromas ~ Probar que el cálculo numérico de la integral definida: $\int_L f(z)dz$ puede referirse á las integrales de funciones de variable real ~ Consecuencias de las in[illegible]grales integrales ...

III_ Estud:

curvilíneas.

GRUPO 46

I _ Expresión en forma de matriz de las líneas de curvatura de la superficie $f(x, y, z) = 0$ ~ Líneas de curvatura en el elipsoide ~ Líneas de curvatura en las superficies de revolución ~ Líneas de máxima y mínima pendiente.

II _ Cálculo de las variaciones ~ Consideraciones generales ~ Principio fundamental de esta teoría ~ Variación de una integral definida segun los límites de dicha integral sean ó no fijos ~ Maximo ó minimo absoluto de una integral definida ~ Ecuación indefinida ~ Ecuación de los límites ~ Maximo ó minimo relativo ~ Aplicación notable á las líneas geodésicas de una superficie.

III _ Demostrar que la integral: $\int_c f(z)dz$ no cambia de valor si sufre la linea de integración, una deformación cualquiera, conservándose los extremos fijos, y con tal que dicha linea no pase por los puntos críticos de $f(z)$ ~ El valor de la integral $\int_K f(z)dz$, tomada á lo largo del contorno K, dentro del cual la función $f(z)$ permanece finita y monodroma, es igual á cero ~ Si c y c' son dos contornos cerrados en el interior de K, y si además $f(z)$ permanece finita y monodroma en todo el intervalo comprendido entre K y c, c' puede escribirse: $\int_K = \int_c + \int_{c'}$ tomados los movimientos en el mismo sentido ~ Consecuencias.

GRUPO 47

I _ Coordenadas curvilíneas ~ Coordenadas curvilíneas en un plano ~ Radio de curvatura de una curva cualquiera en un punto $(\lambda\, \mu)$ ~ Coordenadas curvilíneas de un punto sobre una superficie curva ~ Radio de curvatura de una sección normal en una superficie cualquiera, referido á coordenadas curvilíneas.

II _ Cálculo de las diferencias ~ Consideraciones generales acerca del cálculo de las diferencias ~ Desarrollo de las expresiones

$\Delta^n u_0$ y u_n ~ Determinación de las diferencias sucesivas en funciones de diferente naturaleza ~ Cálculo inverso de las diferencias ~ Generalidades ~ Relación con los principios fundamentales del cálculo integral ~ Integración de algunas funciones segun diferencias finitas ~ Desarrollo de la expresion Σu en serie, conforme á los principios de Euler ~ Integración por partes en las diferencias finitas.

III - Residuos de una funcion correspondientes á sus puntos críticos. Determinación de sus valores en forma de serie, cuando los puntos críticos son polos ~ La integral $\int_c f(z)dz$, tomada segun una circumferencia indefinidamente pequeña c, que tenga su centro en el punto dado $\underline{a}$, tenderá hacia cero al mismo tiempo que el radio r de la circumferencia, cualquiera que sea la posición de $\underline{z}$, con tal de satisfacerse la condición: $\lim(z-c)f(z)=0$ para $z=a$ ~ La integral $\int_k f(z)dz$ tomada segun una circunferencia c, que tenga por centro el origen, tiende hacia cero cuando K crece indefinidamente, si se cumple la condición:

$$\lim. z f(z) = 0 \quad , \text{ para } z=0.$$

GRUPO 48

I - Sistema de coordenadas elipticas ~ Determinación de las fórmulas:

$$x=\frac{\lambda\mu\nu}{cb}\ ,\quad y=\frac{\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)(\lambda^2-b^2)}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\ ,\quad z=\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

Deducir como caso particular las siguientes:

$$x=\frac{\rho\mu\nu}{bc}\ ;\quad y=\rho\,\frac{\sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\ ,\quad z=\rho\,\frac{\sqrt{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

II - Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int_k \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

en el supuesto de que $f(z)$ sea una función continua y monodroma en el interior del contorno K, y estar $\underline{a}$ en su interior. Consecuencias ~ Aplicaciones al teorema de Taylor ~ Teorema de Laurent ~ Grado de multiplicidad de los ceros y polos de la función $f(z)$ ~ Si la función $f(z)$ no tiene sino polos en el interior del contorno cerrado K debe resultar:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = M - N$$

siendo M el número de ceros y N el de polos de $f(z)$, situados en el interior del contorno, y contados según su grado de multiplicidad. Notable aplicación del principio anterior al número de raices de una función algebraica racional y entera.

III - Aplicación de la fórmula de Dirichlet al volumen del elipsoide, momentos de inercia y centros de gravedad.

GRUPO 49

I - Estudio particular de las coordenadas curvilíneas de Lamé ~ Parámetro de primera y segunda especie ~ Desarrollo de los grupos de fórmulas de Lamé con sus clases respectivas ~ Relaciones recíprocas ~ Ymportancia de los grupos siguientes

$$\frac{\partial \frac{1}{h^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}}{\partial \rho}$$

. . . .

II - Procedimientos varios para la determinación de las cuadraturas ~ Planimetría.

III - Aplicación de los diferentes procedimientos de las cuadraturas á la curva de Mlle. Agnesi.

GRUPO 50

I - Teorema de M. Bouquet acerca de la mas corta distancia entre dos rectas sucesivas de un sistema continuo en el espacio ~ Probar que cuando las rectas de la serie supuesta son tangentes á una misma curva en el espacio, se cumple la condición: $d\alpha d\varphi - dp\,\omega = 0$ ~ Determinar la condición para que la curva anterior sea plana.

II - Número de Bernoulli ~ Estudio de la función:

$$u = \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$$

ostrar que esta función es par ~ Deducir la fórmula general

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2\cdots n}=\frac{A}{1.2\cdots\cdots(n+1)}+\frac{B_1}{1.2.1.2\cdots(n-1)}+\frac{B_2}{1.2.3.4.1.2\cdots(n-3)}+\cdots\cdots$$

Valores particulares de A, B_1, B_2..... ~ Funciones de Bernoulli.

III - Integración de la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dy}{dx}-ay=x^4$$

por dos procedimientos distintos.

GRUPO 51

I - Integración gráfica ~ Propiedades importantes ~ Métodos generales de integración gráfica ~ Consecuencias.

II - Estudio de la función:

$$u=(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Polinomios de Legendre ~ Importancia de la fórmula:

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0$$

Consecuencias ~ Generalización de los polinomios de Legendre.

III - Determinar la integral correspondiente á la ecuación diferencial siguiente:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^m$$

GRUPO 52

I - Goniometría elíptica enlazada con la circular é hiperbólica - Fórmulas correspondientes á la suma de argumentos ~ Sus consecuencias.

II - Estudio de la función $\Theta(z)$ de Jacobi ~ Propiedades de dicha función ~ Demostrar la igualdad siguiente:

$$\Theta(z+2ma)=e^{-m(z+ma)}\Theta(z)$$

Importancia de la expresión:

$$z=(2m+1)\pi\sqrt{-1}+(2m'+1)a$$

Estudio de las cuatro funciones ϑ. – Estudio de las funciones λ, μ y ν con la representación gráfica de las mismas.

III – Integración de la ecuación entre derivadas parciales siguiente:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^m + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^m - z^n = 0$$
