

Selección de una cartera de inversión a través del Modelo de Markowitz

Portfolio selection through the model of Markowitz

Cristian García Ramos
Dr. José B. Sáez Madrid

Administración y Dirección de Empresas

RESUMEN Y PALABRAS CLAVE

El objetivo de este trabajo, aparte de conocer mejor la metodología del modelo de Markowitz, es construir una serie de carteras eficientes que puedan batir al IBEX-35. Este modelo consiste en la creación de un conjunto de carteras eficientes que nos proporcionarán el mínimo riesgo posible a un nivel determinado de rentabilidad. Para ello, primero será necesario seleccionar un conjunto de activos que serán los que compondrán nuestra cartera de inversión. Al resolver este modelo matemático de optimización obtendremos las carteras esquina, que al compararlas con una cartera compuesta por los 35 activos de la bolsa española, algunas ofrecerán al inversor una rentabilidad mucho más elevada al mismo nivel de riesgo, o bien, con el mismo rendimiento algunas carteras esquina serán mucho menos arriesgadas que la cartera con todos los títulos del IBEX-35.

Palabras clave: Markowitz, gestión de carteras, frontera eficiente, carteras esquina, diversificación, rentabilidad simple, riesgo, correlación, varianza y volatilidad.

The aim of this research project, apart from studying the methodology of the model of Markowitz, is to construct a set of efficient portfolios with the objective of beating the IBEX-35 through this mathematic model. The model consists of the construction of an efficient portfolio set which provide us the minimum possible risk given a fix return level. It is an optimization problem which its proposal is to maximize the return of the portfolio and to minimize the variance, that is the risk of the portfolio, with two restrictions: the first one is the investor has to invest his entire budget and the second one is the proportional part of each asset in the portfolio must be positive or neutral, never negative because the investor cannot short sell.

First of all, we will need to select a set of assets which will form our portfolio. Once this optimization mathematic model will be resolved, we will have the corners portfolio. If we compare them with the IBEX-35 portfolio, it is very probable that some of the efficient portfolio that we have calculated will offer the investor either a much higher return than the entire Spanish stock exchange assets together with the same volatility or a less risk with the same return. This is the purpose of the model of Markowitz.

For this reason, assets with negative correlation between them should be chosen due to a combination of negatively correlated assets as this would minimize the variance as much as possible. But I selected ten diversified assets with all types of correlation to observe the consequences of each one.

Key words: Markowitz, portfolio management, efficient sets, corner portfolio, diversification, simple return, risk, correlation, variance and volatility.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	4
I. JUSTIFICACIÓN.....	6
1. La razón del modelo de Markowitz como trabajo final de grado.....	6
2. Interrelación de las asignaturas con el trabajo final.....	6
II. TEORÍA.....	8
1. Biografía.....	8
2. La gestión de carteras.....	8
3. El modelo de Markowitz.....	9
3.1. <i>Hipótesis del modelo</i>	9
3.2. <i>Planteamiento del modelo de Markowitz</i>	10
3.3. <i>La frontera eficiente</i>	10
3.4. <i>Herramientas para la resolución del modelo</i>	11
3.5. <i>Efecto de la correlación de los activos en la varianza de la cartera</i>	11
3.6. <i>Construcción de una cartera eficiente</i>	12
4. Críticas al modelo de Markowitz.....	13
III. ANÁLISIS DE DATOS.....	14
1. Hipótesis previas.....	14
1.1. <i>Horizonte temporal</i>	14
1.2. <i>Títulos y mercado de valores</i>	14
1.3. <i>Datos recopilados</i>	15
2. Cálculo de las rentabilidades mensuales de cada activo.....	15
3. Cálculo de la volatilidad.....	17
4. Anualización de rentabilidades y volatilidades de los títulos.....	18
5. Cálculo de las correlaciones.....	19
6. Selección de los activos de la cartera.....	21
7. Datos de los títulos de la cartera.....	21
7.1. <i>Rentabilidades medias y volatilidades</i>	21
7.2. <i>Matriz de correlaciones</i>	22
7.3. <i>Matriz de varianzas y covarianzas de rentabilidades mensuales</i>	23
7.4. <i>Matriz de varianzas y covarianzas anualizada</i>	23
7.5. <i>La varianza de la cartera</i>	24
IV. APLICACIÓN PRÁCTICA.....	26

1. Situación previa.....	26
1.1. Resultados del IBEX-35	26
2. Cálculo de la frontera eficiente.....	27
2.1. El peso de cada activo en la cartera	27
2.2. La volatilidad de la cartera	28
2.3. Método de la Línea Crítica	29
2.4. Construcción de las carteras esquina	30
2.5. Resolución gráfica de la frontera eficiente.....	31
CONCLUSIONES	32
BIBLIOGRAFÍA.....	35
ANEXOS.....	36
Anexo 1.....	37
Anexo 2.....	53
Anexo 3.....	55
Anexo 4.....	61
Anexo 5.....	62
Anexo 6.....	63

INTRODUCCIÓN

Este trabajo pretende poner en práctica el modelo de selección de carteras de Markowitz con el objetivo de batir al mercado español en su conjunto con una cartera de diez activos. Batar al mercado significa que podemos construir carteras que ofrezcan una mayor rentabilidad que el conjunto del mercado con el mismo nivel de riesgo, o bien, que nuestras carteras ofrezcan la misma rentabilidad que el mercado pero con un nivel de riesgo menor.

Es bueno saber que ni los mercados de valores ni el mercado bursátil tienen un comportamiento estructurado y mucho menos predecible, ya que en ellos influyen factores de todo tipo. Si se quiere tener en cuenta todos los factores que pueden causar algún impacto en las bolsas, sería una misión prácticamente imposible de acometer por muy potentes programas de ordenador que se posean en la actualidad. Toda esa complejidad, al final debe simplificarse con el uso de modelos, ya no solo por un tema de reducción de costes sino porque un modelo complejo y costoso no es sinónimo de éxito.

El modelo que voy a plantear y desarrollar, tanto práctica como teóricamente, es el modelo de Markowitz. Es el primer modelo, que data del año 1952, de la denominada Teoría de Carteras, donde se engloban todos los modelos que tengan como objetivo encontrar las carteras que ofrecen el mínimo riesgo para un nivel aceptable de rentabilidad.

El cuerpo del trabajo lo voy a estructurar en cuatro partes:

La primera será una justificación del proyecto, en la que expondré mis razones por las que he decidido elegir este modelo de selección de carteras de inversión para mi trabajo. Además, comentaré la interrelación que existe entre las asignaturas impartidas en estos cuatro años del grado de Administración y Dirección de Empresas en la Universidad de Barcelona, ya que uno de los objetivos de la elaboración de un trabajo final de grado es precisamente relacionar conceptos adquiridos en esta carrera.

Acto seguido me centraré en el planteamiento del modelo, comentando de que tipo es, cual es su objetivo, las hipótesis que hay que considerar a la hora de aplicar el modelo, que función maximiza y que minimiza, a que restricciones está sujeto el modelo y su fundamento teórico.

Después de explicar la teoría del modelo, saltamos a la parte de análisis de los datos seleccionados. Este capítulo tratará sobre que hipótesis previas y propias impongo para poder aplicar a la práctica el modelo. Dentro de esta parte, comentaré como he seleccionado los activos que formarán la cartera de inversión, ya que solo se compondrá de diez activos. Estos datos deberán estar justificados, el porqué escojo precisamente esos datos y no otros, como recopilo dicha información y para qué, cuál es el objetivo que persigo.

Una vez haya explicado la parte teórica del modelo, para comprender mejor los conceptos teóricos desarrollados dedicaré un capítulo a la aplicación práctica del modelo. En esta parte detallaré paso a paso el camino a seguir para su resolución.

Con el cuerpo del trabajo determinado, procederé a la realización de las conclusiones, que serán la valoración cualitativa y cuantitativa de los resultados obtenidos, a la confirmación de supuestos e interrogantes de las partes anteriores y a la medición de los objetivos propuestos en la parte inicial del trabajo.

I. JUSTIFICACIÓN

1. La razón del modelo de Markowitz como trabajo final de grado

La elección del trabajo sobre gestión de carteras a través del modelo de Markowitz es, personalmente, debido a una pasión por las finanzas, ya sea en decisiones de inversión, de financiación o valoración de empresas. Cualquier rama de las finanzas me fascina.

También, los mercados financieros son ámbitos en los que me gustaría profundizar y conocerlos mejor, con el deseo de participar o relacionarme con ellos en un futuro profesional. Todavía estoy indeciso, pero ser gestor de un fondo de inversión sería una experiencia muy gratificante, creo que es una profesión en la que cada día es diferente y se aprende algo nuevo, pero a la vez de mucha competitividad. Sino pues empezaría en el área financiera de alguna empresa con el objetivo a largo plazo de ser director financiero, y por qué no, en una empresa grande e importante, aunque esta parte ya no se relaciona tan directamente con el trabajo como la de ser gestor de fondos. Para la realización del trabajo, me he centrado en el mercado de capitales, concretamente en el mercado de valores con instrumentos de renta variable de España. Esto, unido a la gestión de carteras, un poco desconocido hasta el momento por lo que a mí respecta, es una oportunidad para adquirir conocimientos en una materia a la que, como he aludido arriba, es un campo que me interesa para desarrollar mi carrera profesional.

2. Interrelación de las asignaturas con el trabajo final

El trabajo engloba varias asignaturas impartidas durante el transcurso del grado en Administración y Dirección de Empresas. Dichas materias son Matemática Financiera, Estadística, Matemáticas y Macroeconomía.

Todas ellas son de gran importancia y se relacionan entre sí en este modelo de gestión de carteras, ya que se basa en un modelo matemático-financiero. Para obtener las volatilidades de los títulos y de las carteras eficientes como paso previo he tenido que calcular la rentabilidad simple, estudiada en Matemática Financiera y la varianza y desviación típica de cada título seleccionado, que se estudia en Estadística. También podemos observar una relación entre la asignatura de Matemáticas y la de Estadística, ya que en el modelo es necesario crear una matriz de varianzas y covarianzas y otra de correlaciones. La matriz de varianzas y covarianzas, una vez anualizada, será utilizada para calcular la volatilidad de la cartera, que no es más que un producto de matrices y que desarrollaré más adelante, en la aplicación práctica. Pero la parte más importante de este modelo está relacionada con la materia de Matemáticas, que como he comentado antes, se basa en un modelo de optimización sujeto a restricciones. Para finalizar, después de realizar todos los cálculos y haber creado las carteras eficientes, viene el proceso de inversión, en el que el gestor de fondos, o el propio inversor, estudia los datos macroeconómicos del país donde quiere invertir o se centra en un sector a la hora de

seleccionar los títulos. En mi caso la macroeconomía no es relevante porque me centro en el mercado español y mi selección de títulos, que más adelante explicaré, la he realizado con otro criterio que no tiene relación directa con la macroeconomía, pero sí con la estadística.

II. TEORÍA

1. Biografía

Harry Max Markowitz, (Chicago, 1927 -) es un economista estadounidense especializado en el análisis de inversiones. Recibió el Premio Nobel de Economía en 1990 junto a Merton Miller y William Sharpe por su trabajo pionero en la teoría económica financiera y sus aportaciones al análisis de carteras de inversión y a los métodos de financiación corporativa.

Markowitz cursó sus estudios secundarios en Chicago e ingresó en la Universidad de la misma ciudad para cursar su licenciatura, donde en 1954 obtuvo el doctorado con una tesis sobre la teoría de cartera. Allí se forjó como economista con profesores como M. Friedman, T. Koopmans, J. Marschak y Leonard J. Savage.

Todos aquellos modelos que tengan como objetivo la búsqueda de las carteras que ofrecen el mínimo riesgo a un nivel de rentabilidad aceptable se agrupan en la Teoría de Carteras antes mencionada. Y es en 1952 cuando publicó un artículo en el *Journal of Finance*, titulado «*Portfolio Selection*», que se considera el origen de la teoría de selección de carteras y en el cual estudiaba el proceso de selección de una cartera de inversión. Más adelante, en 1959 publicó su libro *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*, siendo un impulso a su artículo de la Teoría de Carteras.

Su trabajo es la primera formalización matemática de la idea de diversificación de inversiones, es decir, consiste en buscar aquella composición de la cartera que haga máxima la rentabilidad para un determinado nivel de riesgo, o bien, haciendo mínimo el riesgo para una rentabilidad dada. Me centro en este segundo caso a la hora de optimizar y encontrar las carteras esquina.

2. La gestión de carteras

En la estrategia de la gestión de carteras se pueden diferenciar dos tendencias a la hora de conseguir los objetivos del inversor.

Por un lado está la que se denomina estrategia pasiva, que supone el cumplimiento de la hipótesis de eficiencia del mercado. Es decir, el precio de cotización de un título refleja toda la información existente en el mercado sobre su comportamiento. Por lo tanto, existe información perfecta y nadie puede superar al mercado de referencia. Así, la gestión pasiva se plantea seguir a una cartera de referencia que refleje los movimientos del mercado. El único objetivo de dicha estrategia es la construcción de una cartera que replique la evolución de un índice.

Y por otro lado, la estrategia activa, o gestión activa. Consiste en aprovechar la ineficiencia del mercado. Se basa en el incumplimiento de la hipótesis de eficiencia del

mercado bursátil y supone que los precios de cotización de los activos no reflejan toda la información disponible. Con esta estrategia, los gestores piensan que pueden batir al mercado anticipándose a sus movimientos sobre la base de las malformaciones de precios que pueden existir en el mercado.

Con el modelo de Markowitz vamos a comprobar si se puede dar esa ineficiencia del mercado, en este caso el IBEX-35 y conseguir batir al índice bursátil español con una cartera diversificada.

3. El modelo de Markowitz

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor, es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para el inversor una cartera eficiente es la que presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad, o de la misma forma, si proporciona la máxima rentabilidad posible para un nivel de riesgo dado.

3.1. Hipótesis del modelo

El modelo de Markowitz parte de una serie de hipótesis previas a su cálculo como son:

- Es un modelo uniperiódico: para su análisis, todas las inversiones tienen el mismo periodo de tiempo, es decir, que únicamente cubren un instante T de tiempo.
- Los activos, n , que formarán parte de la cartera son conocidos.
- Todos los activos seleccionados son de riesgo, tomando como medida de riesgo la varianza, o desviación tipo, para el cálculo de la volatilidad.
Por tanto: $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma_k > 0$.
- Se conocen las variables aleatorias de la rentabilidad de los activos, que además se distribuirán según las leyes Normales.
- El presupuesto que dispone el inversor, M , que se destine a la constitución de la cartera, debe invertirse íntegramente. Es decir, que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Siendo x_k el peso del activo k en el total de la cartera.
- No se admite la venta a crédito o venta al descubierto, es decir, que las posiciones cortas (*short selling*) no se contemplan en este método. Solo los *longs*. Lo que implica que todas las proporciones x_k sean positivas o nulas.
- El inversor es averso al riesgo, trata de reducir el riesgo asumido y prefiere colocar su presupuesto en una cartera de baja rentabilidad, sin exponer el capital invertido a un riesgo elevado a su juicio.
- Los activos son infinitamente divisibles y no se tendrán en cuenta ningún tipo de gastos, ni la inflación ni los impuestos.

3.2. Planteamiento del modelo de Markowitz

Como consecuencia de estas hipótesis, el planteamiento del modelo matemático-financiero de constitución de carteras es:

$$\text{Minimizar: } \sigma_p^2 = x' \cdot V \cdot x$$

$$\text{Maximizar: } E_p = \sum_{k=1}^n x_k \cdot E_k$$

$$\text{Sujeto a las restricciones: } \sum_{k=1}^n x_k = 1$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, x_k > 0$$

Siendo:

σ_p^2 = Varianza de la cartera p .

x' = Vector columna de la proporción de cada activo x_k

x = Vector fila de la proporción de cada activo x_k

V = Matriz de varianzas y covarianzas de las rentabilidades anualizadas.

E_p = Rentabilidad esperada de la cartera p .

E_k = Rentabilidad esperada de cada título.

x_k = Proporción del presupuesto del inversor destinado al activo k .

3.3. La frontera eficiente

Por lo tanto, el conjunto de pares $[E_p, \sigma_p]$ o distintas combinaciones de rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes es lo que se denomina la «frontera eficiente» (*efficient sets*).

La frontera eficiente nos permitirá conocer las mejores carteras diversificadas.

En esta frontera estarán todas aquellas carteras que proporcionan el máximo rendimiento con un riesgo mínimo.

Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima.

3.4. Herramientas para la resolución del modelo

Al haber dos objetivos, buscar la máxima rentabilidad y el mínimo riesgo, la resolución de este tipo de problemas, que como hemos dicho antes nos permite encontrar la frontera eficiente, se puede obtener:

- De forma gráfica.
- Con métodos matemáticos de optimización.

En este trabajo, al haber seleccionado diez activos, trabajaremos a través de los métodos de optimización. Cuando se trabaja con dos o tres activos se puede utilizar la representación gráfica.

Un método matemático para resolver el modelo de Markowitz es el denominado Método de la Línea Crítica. Es un algoritmo de programación cuadrática cuyo objetivo es detectar las «carteras esquina» (*corner portfolio*).

Según el Dr. José B. Sáez Madrid, el Dr. Francesc Ortí Celma y el Dr. Jesús López Zaballos, una cartera esquina es aquella cartera que cambia cualitativamente la composición de la cartera, ya sea porque entra a formar parte de la cartera un activo que antes no estaba, o bien porque desaparece de la cartera un activo que antes sí estaba. En todo cuadro de carteras esquina, la primera cartera esquina es la que ofrece mayor rentabilidad esperada y la última cartera esquina es la que ofrece menor riesgo según la medida seleccionada en cada modelo.

Una vez determinada la frontera eficiente, seleccionaremos la cartera óptima, que para cada inversor dependerá de su grado de aversión al riesgo. Es decir, que la selección de la cartera óptima será una cuestión subjetiva que dependerá de variables cualitativas y cuantitativas del inversor, por ejemplo la edad, el patrimonio, la situación familiar, entre muchas más. Cuanto más arriesgado sea el inversor, tenderá a escoger carteras cercanas a la máxima rentabilidad, en cambio, cuanto más averso sea, preferirá escoger carteras cercanas a la del mínimo riesgo.

3.5. Efecto de la correlación de los activos en la varianza de la cartera

Un detalle que no quería dejar pasar por alto antes de entrar en el análisis de datos y la aplicación práctica, es que al ser un modelo que busca la menor volatilidad, las correlaciones entre los activos son clave para el desarrollo del trabajo. Según Vanini y Vignola (2001, p. 13) “si el activo k está correlacionado positivamente con la cartera, una unidad más de rentabilidad de este activo aumenta la varianza y lo contrario, si la correlación es negativa. Es el llamado “*Markowitz phenomenon*”. Entonces, sería bueno poder seleccionar activos que tengan una correlación negativa entre ellos, así el riesgo del activo con respecto a la cartera hace disminuir la varianza, y por lo tanto, el riesgo de la cartera.

3.6. Construcción de una cartera eficiente

Para encontrar las carteras esquina, como he dicho antes, existe el Método de la Línea Crítica. Una cartera esquina es eficiente si y sólo si es combinación lineal convexa entre dos carteras esquinas consecutivas. Diremos que una combinación lineal convexa de 2 puntos, en este caso dos carteras esquina consecutivas, es una recta.

Supongamos que al aplicar el algoritmo a n activos se detectan m carteras esquina, conociendo los siguientes datos:

Cartera esquina	Rentabilidad esperada	Riesgo (Varianza)	Proporciones activos
1	E_1	σ_1^2	$X_1 = (x_{1,1} \ x_{1,2} \ \dots \ x_{1,n})$
...	...	...	...
h	E_h	σ_h^2	$X_h = (x_{h,1} \ x_{h,2} \ \dots \ x_{h,n})$
$h+1$	E_{h+1}	σ_{h+1}^2	$X_{h+1} = (x_{h+1,1} \ x_{h+1,2} \ \dots \ x_{h+1,n})$
...	...	...	...
m	E_m	σ_m^2	$X_m = (x_{m,1} \ x_{m,2} \ \dots \ x_{m,n})$

Sea E^* la rentabilidad esperada deseada que cumple $E_h \geq E^* \geq E_{h+1}$:

$$E^* = \lambda \cdot E_h + (1 - \lambda) \cdot E_{h+1} \text{ con } \lambda \in [0,1], \text{ de donde: } \lambda = \frac{E^* - E_{h+1}}{E_h - E_{h+1}}.$$

A partir del valor de λ , la cartera eficiente que proporciona una rentabilidad esperada de E^* , se obtendrá aplicando:

$$X^* = \lambda \cdot X_h + (1 - \lambda) \cdot X_{h+1}, \quad \text{es decir:}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_{h,1} \\ x_{h,2} \\ \dots \\ x_{h,n} \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \cdot \begin{bmatrix} x_{h+1,1} \\ x_{h+1,2} \\ \dots \\ x_{h+1,n} \end{bmatrix}$$

Vemos entonces que una vez se disponen de todas las carteras esquina, no es necesario el uso de ningún programa matemático para poder encontrar cualquier cartera eficiente. Solo basta con encontrar el valor de λ y buscar una rentabilidad deseada que esté dentro de la frontera eficiente, es decir, entre la cartera eficiente de máxima rentabilidad y la cartera eficiente de mínima volatilidad.

4. Críticas al modelo de Markowitz

Si bien es un modelo muy útil y a nivel teórico ha tenido un gran éxito dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones, su utilización en la práctica entre gestores de carteras y analistas de inversiones no ha sido tan extensa como era de esperar debido a su gran éxito teórico.

La complejidad matemática del modelo ha sido una de principales causas de este hecho contradictorio; por una parte, al ser un programa cuadrático paramétrico, cuadrático porque en la función objetivo aparecen términos cuadráticos y es paramétrico porque podemos variar la esperanza matemática de la rentabilidad, el algoritmo de resolución era complejo. Otra dificultad era debido a que el número de estimaciones y rentabilidades esperadas, varianzas y covarianzas a realizar es muy elevado. Sin embargo, a día de hoy se dispone de *software* y *hardware* necesarios para poder resolver dicho modelo.

Actualmente, las razones de su escasa utilización podrían ser las hipótesis restrictivas que he citado en el desarrollo del modelo, recordemos: no tiene en cuenta ni costes de transacción ni los impuestos, considera perfecta la divisibilidad de los títulos seleccionados y además, no proporciona ninguna herramienta para que el inversor valore su actitud ante el riesgo y pueda deducir su función de utilidad, que es necesaria para la elección de su cartera óptima, aunque no le imposibilita la elección de cualquier cartera eficiente de este modelo.

La mayoría de los gestores de carteras tienden a fundamentar sus decisiones en valoraciones subjetivas y no en el empleo de técnicas de selección de inversión de tipo cuantitativo, de inversor racional. Según Mendizábal, Miera y Zubia (2002, p.35) “algunos de ellos piensan que con el empleo de este tipo de técnicas su labor dejaría de ser fundamental y podrían incluso llegar a perder su puesto de trabajo (Focardi y Jonas, 1997). No obstante, ninguna de estas causas es definitiva”.

También citan a Michaud (1989) que “señala una serie de ventajas que tiene la utilización de una técnica de optimización como el modelo de Markowitz: satisfacción de los objetivos y restricciones de los inversores, control de la exposición de la cartera al riesgo, establecimiento de un estilo de inversión, uso eficiente de la información, etc.”.

III. ANÁLISIS DE DATOS

Antes de empezar con la aplicación práctica del modelo, he definido una serie de hipótesis para poder hacerlo más simple y a la vez didáctico.

1. Hipótesis previas

1.1. Horizonte temporal

El primer paso es el horizonte temporal en el que me sitúo a la hora de construir las carteras. Vamos a suponer que hoy estamos a día 1 de enero de 2014 y voy a definir un horizonte temporal de 3 años, es decir, voy a considerar los datos desde el 1 de enero de 2011 hasta el 31 de diciembre de 2013. Así, una vez construidas las carteras eficientes, cualquier interesado podrá comparar los resultados muy recientes del modelo con la realidad. Otro motivo de la elección de dicho horizonte temporal es debido a empresas que en sus respectivas páginas web corporativas solo tienen publicados los dividendos repartidos en los últimos años. Durante este periodo, la bolsa española ha vivido una etapa de altibajos que propició una tendencia a mantenerse estable en estos tres años.

1.2. Títulos y mercado de valores

El siguiente paso es tener claro con que activos voy a trabajar. En este caso, no he seleccionado los 10 títulos a través de un modelo de selección de activos ya que no es en lo que centra el modelo de Markowitz, sino más bien en las correlaciones entre los activos. Es por eso que primeramente he recopilado todos los datos necesarios de 31 empresas que cotizan en el IBEX-35.

Estas empresas son las siguientes: Abertis (ABE), Acciona (ANA), Actividades de Construcción y Servicios (ACS), Amadeus (AMS), Arcelor Mittal (MTS), Banco Popular (POP), Banco Sabadell (SAB), Banco Santander (SAN), Bankinter (BKT), Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA), Bolsas y Mercados Españoles (BME), CaixaBank (CABK), Enagás (ENG), Fomento de Construcciones y Contratas (FCC), Ferrovial (FER), Gamesa (GAM), Gas Natural Fenosa (GAS), Grifols (GRF), Iberdrola (IBE), Inditex (ITX), Indra (IDR), Jazztel (JAZ), MAPFRE (MAP), Mediaset España Comunicación (TL5), Obrascón Harte Lain (OHL), Red Eléctrica de España (REE), Repsol (REP), Sacyr (SCYR), Técnicas Reunidas (TRE), Telefónica (TEF) y Viscofan (VIS).

No disponía de todos los datos de DIA que salió a bolsa el 5 de julio de 2011, tampoco de Bankia que empezó a cotizar en el mismo mes que DIA, ni de IAG ni de las acciones de clase B de Abengoa, que se incorporaron al IBEX el 24 de enero de 2011 y el 7 de noviembre de 2012 respectivamente. Además, una vez disponía de los datos, el 22 de

diciembre de 2014 exactamente, Endesa entró en el IBEX en sustitución de Viscofan, que era la menos negociada del selectivo.

He considerado que el IBEX-35 es el mercado de referencia y el más conocido a nivel nacional, también para hacer más fácil la comprensión y relación de los activos con el conjunto del mercado y por tener más conocimiento de las empresas del mercado español.

1.3. Datos recopilados

Para el estudio, he utilizado las cotizaciones de cierre del último día de cada mes, además de la primera cotización del año 2011, para así poder calcular la rentabilidad mensual de enero de 2011. He preferido utilizar dicha cotización porque sino ya me iría al año anterior. Si tomaba las cotizaciones diarias al cierre pasaría de 36 rentabilidades mensuales de cada uno de los diez activos a 767 rentabilidades diarias, cosa que complicaría el proceso ya que *Microsoft Excel* puede tener problemas a la hora de hacer cálculos porque dichas rentabilidades diarias en ocasiones pueden ser muy pequeñas e incluso próximas a cero. Para el cálculo de la rentabilidad mensual, aparte de las cotizaciones, he utilizado los dividendos¹ repartidos dentro del trienio. Es un dato que he considerado importante a tener en cuenta porque es una manera de obtener rendimiento a través de las acciones. Una empresa que reparta dividendos en periodos cortos de tiempo, como es el caso de las entidades financieras, repercute en el cálculo de la rentabilidad media. O también una empresa que suele repartir un dividendo por acción elevado, como por ejemplo Acciona, que suele repartir dos veces al año, a cuenta del ejercicio anterior en enero y el complementario en junio, pero que oscilan entre 0,90 y 2,03 euros por acción.

A parte de los 31 títulos, también he calculado la rentabilidad mensual, media y anual del IBEX-35 y su volatilidad, tanto mensual como anual. A diferencia de las acciones, la unidad del mercado bursátil son puntos en vez de euros y el índice, como no es una empresa, no reparte dividendos. He calculado la rentabilidad por el aumento absoluto del mes dividido por los puntos del cierre del mes anterior.

2. Cálculo de las rentabilidades mensuales de cada activo

Para calcular la rentabilidad mensual he utilizado la rentabilidad simple, que es un caso particular de la tasa efectiva del periodo de inversión (TEPI) y que se caracteriza por suponer que la tasa de reinversión es igual a 0, es la hipótesis más conservadora de reinversión. La Rentabilidad Simple (RS) se obtiene para un periodo t y se calcula:

$$RS_t = \frac{C_t + D_t - C_0}{C_0} \quad \text{donde } D_t = \text{dividendo por acción en el momento } t$$

¹ Dividendos obtenidos de las páginas web corporativas respectivas de cada empresa.

Es muy simple, para cada mes se suma el dividendo pagado en ese mes, si lo hubiere, a la cotización del mes a cierre menos la cotización del mes anterior, esto dividido por la cotización del mes anterior. Con esto obtenemos 36 rentabilidades simples mensuales para cada título las cuales calcularemos su media para obtener la rentabilidad media mensual.

A modo de ejemplo vamos a calcular la primera rentabilidad mensual del BBVA, entidad financiera que reparte dividendos, aproximadamente cada tres meses:

$$RS_{12\ BBVA\ (Enero\ 2011)} = \frac{8,97 + 0,09 - 7,6}{7,6} = 19,21\%$$

Al repartir dividendos durante el mes de enero de 2011, vemos como éstos permiten aumentar la rentabilidad mensual unas décimas, ya que si no hubiese repartido dividendos la rentabilidad hubiera sido de:

$$RS_{12\ BBVA\ (Enero\ 2011\ sin\ Dt)} = \frac{8,97 + 0 - 7,6}{7,6} = 18,03\%$$

La rentabilidad se ha visto aumentada un 1,18% gracias al reparto de dividendos.

Pero al calcular la rentabilidad del mes siguiente vemos que no reparte dividendos, y como es obvio, no añade nada a la rentabilidad ya que no se obtiene nada vía dividendos. Entonces la rentabilidad mensual de febrero de 2011 sería la siguiente:

$$RS_{12\ BBVA\ (Febrero\ 2011)} = \frac{8,95 + 0 - 8,97}{8,97} = -0,22\%$$

Observamos que en febrero de 2011 obtiene una rentabilidad negativa.

Hay meses, como el mes de enero de 2012 y que podemos observar en la siguiente tabla, que gracias al reparto de dividendos durante ese mes ha pasado de tener una rentabilidad negativa mensual a una rentabilidad positiva.

Los datos y resultados obtenidos del BBVA son los siguientes:

Fecha	Cotización al cierre	Dividendos por acción repartidos	Rentabilidad mensual
03/01/2011	7,6	-	-
31/01/2011	8,97	0,09	19,21%
28/02/2011	8,95	-	-0,22%
31/03/2011	8,56	-	-4,36%
29/04/2011	8,66	0,15	2,92%
31/05/2011	8,12	-	-6,24%
30/06/2011	8,07	-	-0,62%
29/07/2011	7,35	0,10	-7,68%
31/08/2011	6,34	-	-13,74%
30/09/2011	6,18	-	-2,52%
31/10/2011	6,56	0,10	7,77%

30/11/2011	6,27	-	-4,42%
30/12/2011	6,68	-	6,54%
31/01/2012	6,67	0,10	1,35%
29/02/2012	6,73	-	0,90%
30/03/2012	5,97	-	-11,29%
30/04/2012	5,11	-	-14,41%
31/05/2012	4,57	0,12	-8,22%
29/06/2012	5,63	-	23,19%
31/07/2012	5,32	0,10	-3,73%
31/08/2012	6,07	-	14,10%
28/09/2012	6,11	-	0,66%
31/10/2012	6,44	0,10	7,04%
30/11/2012	6,52	-	1,24%
31/12/2012	6,96	-	6,75%
31/01/2013	7,33	0,10	6,75%
28/02/2013	7,43	-	1,36%
28/03/2013	6,76	-	-9,02%
30/04/2013	7,37	0,12	10,80%
31/05/2013	7,25	-	-1,63%
28/06/2013	6,45	-	-11,03%
31/07/2013	7,12	0,10	11,94%
30/08/2013	7,22	-	1,40%
30/09/2013	8,26	-	14,40%
31/10/2013	8,63	0,10	5,69%
29/11/2013	8,79	-	1,85%
31/12/2013	8,95	-	1,82%

Para ver las rentabilidades mensuales y los datos relacionados como son las cotizaciones y dividendos del resto de empresas, ver el anexo 1.

El cálculo de la rentabilidad media del resto de valores seleccionados sigue el mismo procedimiento que se ha utilizado con el BBVA.

Un dato a tener en cuenta es que las fechas no coinciden exactamente con las de final de mes, esto es debido a que el último día de mes cayó en fin de semana, días en que el mercado bursátil está cerrado. Por eso he cogido el último día de mes en que el la bolsa española estaba abierta.

3. Cálculo de la volatilidad

Una vez he calculado las rentabilidades mensuales, la segunda variable que considera el modelo de Markowitz es la varianza, o bien la desviación estándar $\sigma(\tilde{R})$, como medida de riesgo. Para medir el riesgo, el modelo de Markowitz utiliza la varianza, aunque en este

trabajo utilizo la desviación típica para medir el riesgo, así evito utilizar medidas cuadráticas.

$$\sigma(\tilde{R}) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R})}$$

$$\text{Donde } \sigma^2(\tilde{R}) = E[\tilde{R} - E(\tilde{R})]^2 = E(\tilde{R})^2 - E^2(\tilde{R})$$

$\tilde{R}$ = Rentabilidad del activo.

4. Anualización de rentabilidades y volatilidades de los títulos

Al hacer la desviación estándar de las 37 rentabilidades mensuales, obtenemos la volatilidad del activo, pero mensual, y a nosotros nos interesan las variables anuales. Es por eso que, una vez hayamos calculado las rentabilidades medias mensuales y las desviaciones estándar, estas variables se deben anualizar. Para anualizar la rentabilidad simple mensual es muy sencillo:

$$RS_1 = \bar{R}_{12} * 12$$

La volatilidad es la fluctuación de la rentabilidad del activo, en términos porcentuales absolutos, respecto al valor de su rentabilidad esperada. Y de forma similar a la rentabilidad, se publica la volatilidad anualizada. Bajo la hipótesis de no reinversión de interés que comenté anteriormente, la volatilidad anualizada, a partir de la volatilidad mensual es:

$$\sigma_1 = \sqrt{12} * \sigma_{12}$$

Si seguimos con el BBVA como ejemplo, observamos que la rentabilidad media mensual es de un 1,32% y su volatilidad mensual es del 8,82% y al anualizar estos datos obtenemos:

$$RS_1 = 1,32\% * 12 = 15,79\%$$

$$\sigma_1 = \sqrt{12} * 0,0882 = 0,3054 = 30,54\%$$

Para el resto de títulos, estos datos se anualizan de la misma forma que acabo de hacer con el BBVA.

El siguiente cuadro muestra las rentabilidades y volatilidades medias mensuales y anuales de los 31 activos:

Título	Rentabilidad media mensual	Volatilidad media mensual	Rentabilidad media anual	Volatilidad media anual
ABE	1,24%	6,04%	14,84%	20,91%
ANA	0,39%	11,02%	4,72%	38,18%
ACS	0,23%	10,32%	2,75%	35,74%
AMS	2,36%	6,19%	28,36%	21,44%

MTS	-1,55%	10,79%	-18,56%	37,39%
POP	-2,67%	15,50%	-32,00%	53,69%
SAB	0,22%	13,93%	2,61%	48,24%
SAN	0,64%	8,48%	7,67%	29,39%
BKT	1,59%	12,51%	19,08%	43,33%
BBVA	1,35%	8,88%	16,19%	30,77%
BME	2,28%	7,53%	27,40%	26,08%
CABK	1,14%	11,97%	13,63%	41,48%
ENG	1,39%	5,33%	16,67%	18,46%
FCC	0,74%	13,10%	8,86%	45,39%
FER	2,49%	5,21%	2,92%	18,05%
GAM	1,94%	14,89%	23,26%	51,58%
GAS	2,25%	8,04%	26,98%	27,84%
GRF	3,75%	8,35%	44,99%	28,91%
IBE	0,28%	8,12%	3,40%	28,13%
ITX	2,50%	5,78%	29,94%	20,01%
IDR	0,63%	7,69%	7,59%	26,64%
JAZ	2,54%	8,41%	30,51%	29,14%
MAP	2,06%	10,04%	24,72%	34,76%
TL5	0,72%	9,48%	8,66%	32,83%
OHL	1,30%	8,69%	15,59%	30,11%
REE	1,61%	6,27%	19,35%	21,71%
REP	0,40%	8,10%	4,82%	28,08%
SCYR	0,92%	17,84%	11,09%	61,78%
TRE	0,08%	7,42%	1,00%	25,69%
TEF	-0,18%	6,84%	-2,22%	23,70%
VIS	1,40%	5,53%	16,81%	19,15%

Hay que tener en cuenta que para demostrar y explicar los resultados utilizo de dos hasta cuatro decimales para no sobrecargar los datos, en algunos casos como veréis utilizo ocho para las covarianzas. El *Excel*, en cambio utiliza 16 decimales para hacer todos los cálculos, no solo pasa con las rentabilidades y las desviaciones tipo. Es por eso que si se hacen estas operaciones con una calculadora utilizando dos decimales no darán estos resultados. Será debido a esto que acabo de comentar, que no se aproxima igual utilizando 2 o 4 e incluso 8 decimales que utilizando 16 y eso hay que tenerlo en consideración para estos y siguientes cálculos.

5. Cálculo de las correlaciones

Ahora que disponemos de la rentabilidad anual y la volatilidad anualizada de 31 títulos del índice bursátil español, el siguiente paso a realizar es juntar en una tabla todas las rentabilidades mensuales de todos los activos ordenadas por fechas, para calcular la matriz de correlaciones, aunque todavía no nos interesa saber que rentabilidad tiene cada activo,

porque estamos en el proceso de selección, las tenemos calculadas. De momento, dejamos a un lado la volatilidad, ya la recuperaremos más adelante. En esta matriz (ver anexo 2) nos encontramos con todas las relaciones que existen entre los 31 activos.

La correlación ρ entre dos variables indica el grado de asociación lineal que existe entre variables cuantitativas. Siempre toma valores comprendidos entre $[-1,1]$; cuanto más se aproxime a 1 el grado de relación directa será elevado y cuando se acerque a -1 el grado de relación inversa será elevado. Cuando sea aproximado a 0 significará un débil grado de asociación lineal. Se conoce como el coeficiente de correlación y su fórmula es la siguiente:

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Podemos observar que existen correlaciones muy positivas, positivas, negativas y algunas prácticamente nulas. Por ejemplo, Santander (SAN) y BBVA tienen un grado de asociación lineal muy alto, su coeficiente de correlación es de 0,91. En cambio, entre Viscofan (VIS) y ACS con una correlación de 0,01 o entre Grifols (GRF) e Iberdrola (IBE) con un -0,08 podemos decir que no existe asociación lineal entre ellas. Y entre VIS y Repsol (REP) hay una relación negativa ya que el coeficiente de correlación es de -0,24.

$$\rho_{BBVA\ SAN} = \frac{0,0067}{0,0882 \cdot 0,0848} = 0,9099$$

$$\rho_{VIS\ ACS} = \frac{0,0000755}{0,0553 \cdot 0,1032} = 0,0136$$

$$\rho_{GRF\ IBE} = \frac{-0,0005124}{0,0835 \cdot 0,0812} = -0,0776$$

$$\rho_{VIS\ REP} = \frac{-0,0010644}{0,0553 \cdot 0,0810} = -0,2443$$

Para el cálculo de las correlaciones se utilizan las covarianzas y desviaciones tipo de las rentabilidades mensuales.

Como podemos ver en el caso de GRF e IBE y entre VIS y REP, al tener una covarianza negativa entre ellos, es obvio que estén negativamente correlacionados ya que sus respectivas desviaciones tipo no pueden ser negativas nunca, porque al ser la raíz cuadrada de la varianza, y ésta es una medida cuadrática, siempre será positiva.

Con la matriz de correlaciones completada, vuelvo a hacer hincapié en el llamado fenómeno de Markowitz, *Markowitz phenomenon*, descrito por Vanini y Vignola. La correlación negativa entre activos hace disminuir la varianza de la cartera. Es por eso que al seleccionar los activos me he basado en las correlaciones entre ellos y a la hora de crear la cartera he incluido todos los activos que estaban correlacionados negativamente. No obstante, hay todo tipo de correlaciones entre los diez activos que componen mi cartera;

tanto muy positivas, positivas, nulas y negativas, con el objetivo de poder sacar más conclusiones y con un fin divulgativo.

6. Selección de los activos de la cartera

También, sin dejar de banda las correlaciones y como hace referencia Markowitz, he creado una cartera diversificada para comprender mejor los conceptos anteriormente explicados.

Como podemos ver a continuación, entre las 31 empresas he seleccionado 10 títulos basándome en una mezcla de correlaciones entre ellas y no más de dos empresas por sector. Los activos que compondrán mi cartera de inversión son los siguientes:

- Petróleo y energía:
 - Repsol (REP)
 - Iberdrola (IBE)
- Materiales básicos, industria y construcción:
 - Actividades de Construcción y Servicios (ACS)
 - Acciona (ANA)
- Bienes de consumo:
 - Viscofan (VIS)
 - Grifols (GRF)
- Servicios financieros
 - Banco Santander (SAN)
 - Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA)
- Tecnología y telecomunicaciones
 - Telefónica (TEF)
 - Amadeus (AMS)

7. Datos de los títulos de la cartera

7.1. Rentabilidades medias y volatilidades

Ahora que ya he seleccionado los activos, para plantear el modelo solo nos queda reunir, entre los 31 títulos calculados, los datos de los 10 activos seleccionados en otra hoja de trabajo, que es la que nos va a interesar (ver anexo 3).

En esta tabla resumo las rentabilidades y volatilidades medias finales, mensuales y anuales de los 10 títulos seleccionados:

Título	Rentabilidad media mensual	Volatilidad media mensual	Rentabilidad media anual	Volatilidad media anual
ANA	0,39%	11,02%	4,72%	38,18%

ACS	0,23%	10,32%	2,75%	35,74%
AMS	2,36%	6,19%	28,36%	21,44%
SAN	0,64%	8,48%	7,67%	29,39%
BBVA	1,35%	8,88%	16,19%	30,77%
GRF	3,75%	8,35%	44,99%	28,91%
IBE	0,28%	8,12%	3,40%	28,13%
REP	0,40%	8,10%	4,82%	28,08%
TEF	-0,18%	6,84%	-2,22%	23,70%
VIS	1,40%	5,53%	16,81%	19,15%

Cabe destacar que he seleccionado un título con rentabilidad negativa, en este caso Telefónica. Pero esto no quiere decir que TEF vaya a ser descartada para el cálculo de las carteras eficientes. Es posible que entre en alguna cartera esquina ya que el modelo de Markowitz no tiene en cuenta las rentabilidades de los títulos. Si para minimizar el riesgo dada una rentabilidad deseada tiene que utilizar activos con rentabilidades negativas, no hay duda de que lo hará. Lo que realmente interesa es la rentabilidad y el riesgo de la cartera diversificada.

7.2. Matriz de correlaciones

Como se puede observar en la matriz de la siguiente página (ver la matriz completa y con seis decimales en el anexo 4), entre estos 10 activos existe una amplia variedad de correlaciones. Como ya he explicado anteriormente, he querido crear una cartera diversificada y con diferentes grados de correlación para demostrar, como veremos en la aplicación práctica, que la correlación influye en la construcción de carteras a través de este modelo de Markowitz.

La matriz de correlaciones de estos 10 títulos es la siguiente:

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
ACS	1									
AMS	0,34	1								
ANA	0,47	-0,11	1							
BBVA	0,75	0,28	0,62	1						
GRF	-0,23	0,41	-0,22	-0,03	1					
IBE	0,78	0,27	0,72	0,78	-0,08	1				
REP	0,42	-0,03	0,45	0,71	-0,14	0,56	1			
SAN	0,79	0,21	0,55	0,91	-0,07	0,75	0,64	1		
TEF	0,68	0,27	0,64	0,79	-0,16	0,79	0,66	0,77	1	
VIS	0,01	0,30	-0,23	-0,05	0,38	-0,003	-0,24	-0,10	-0,18	1

7.3. Matriz de varianzas y covarianzas de rentabilidades mensuales

Volviendo al planteamiento del modelo con datos reales, al ya tener las rentabilidades mensuales calculadas, las vamos a agrupar en una sola tabla, ya que nos facilitará el trabajo a la hora de calcular la matriz de varianzas y covariancias. Esta matriz (ver anexo 5), que en nuestro caso es de dimensión 10 por 10, agrupa las varianzas en la diagonal de la matriz y el resto de elementos son las covarianzas. La varianza es una medida de dispersión respecto a la media aritmética, en nuestro caso es la rentabilidad media mensual, pero solo respecto a un activo. La covarianza, en cambio, indica si existe asociación lineal entre dos títulos y su signo. El problema es que al no estar acotada no se sabe si indica un elevado grado de relación, ya sea directa o inversa, por eso utilizamos el coeficiente de correlación. La fórmula de la varianza y la covarianza que utiliza el *Excel* son las siguientes:

$$VAR_x = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 / (n - 1)$$
$$COV_{x,y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

Pero para poder resolver el modelo de Markowitz, esta matriz, como he dicho anteriormente, debe anualizarse porque las varianzas y covarianzas han sido calculadas previamente respecto a rentabilidades mensuales.

7.4. Matriz de varianzas y covarianzas anualizada

Para anualizar dicha matriz es muy sencillo, solo hay que multiplicar por doce cada elemento de la matriz de varianzas y covarianzas anterior y obtenemos las varianzas y covarianzas anuales. El siguiente paso es completar la matriz, porque el *Excel* solo nos da la mitad. La completamos sabiendo que $COV_{x,y} = COV_{y,x}$, es decir, que el orden de los títulos no altera el resultado de la covarianza.

Para encontrar la varianza anualizada de BBVA hay que buscar su varianza en la matriz que no está anualizada y multiplicarla por doce.

$$\sigma_{BBVA}^2(anualizada) = 12 * \sigma_{BBVA}^2(con\ rent.\ mensuales)$$

Para el cálculo de la covarianza de BBVA con respecto a cualquier otro activo, por ejemplo con ACS, hay que hacer lo mismo que en el caso anterior, es decir, multiplicar por doce la covarianza.

$$COV_{SAN\ ACS}(anualizada) = 12 * COV_{SAN\ ACS}(con\ rentabilidades\ mens.)$$

Para anualizar las varianzas y covarianzas del resto de títulos se sigue el mismo procedimiento que acabo de hacer con el BBVA.

Ahora, la matriz de varianzas y covarianzas anualizadas es la siguiente:

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
ACS	0,124									
AMS	0,026	0,045								
ANA	0,062	-0,009	0,142							
BBVA	0,080	0,018	0,070	0,092						
GRF	-0,023	0,025	-0,023	-0,002	0,081					
IBE	0,076	0,016	0,076	0,066	-0,006	0,077				
REP	0,041	-0,002	0,047	0,059	-0,011	0,043	0,077			
SAN	0,081	0,013	0,060	0,080	-0,006	0,060	0,051	0,084		
TEF	0,056	0,013	0,056	0,056	-0,010	0,051	0,042	0,052	0,055	
VIS	0,0009	0,012	-0,016	-0,003	0,021	-0,0002	-0,013	-0,006	-0,008	0,036

Ahora ya tenemos la matriz, que tendremos que completar y que ya está anualizada (ver anexo 6). Esta es la matriz que utilizaremos para calcular el riesgo de nuestra cartera.

7.5. La varianza de la cartera

Ya disponemos de todos estos datos que son necesarios para la construcción de la matriz de varianzas y covarianzas anualizadas. Y esta matriz, como he dicho antes, es la que necesitamos para el cálculo de la varianza de la cartera.

Ahora solo falta preparar el planteamiento del problema con la información que disponemos.

En la misma hoja de trabajo he creado un vector una vector fila de 1x10, que serán las ponderaciones de cada activo sobre el total de la cartera para cada nivel de rentabilidad.

También, construyo un vector columna de 10x1 que será simplemente la matriz fila transpuesta y que indica lo mismo, el peso de cada título en la cartera.

La multiplicación de estos vectores por la matriz de varianzas y covarianzas anualizada, que hemos calculado antes, nos dará el riesgo de la cartera. Como ya he dicho, el modelo de Markowitz mide el riesgo a través de la varianza, o bien la desviación típica. Para hacerlo más claro, es adecuado expresar la varianza de la cartera de forma matricial:

$$\sigma_p^2 = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x \cdot V \cdot x'$$

Y para calcular el riesgo de la cartera se hace a través de la volatilidad. La volatilidad es la raíz cuadrada de la variable aleatoria de la rentabilidad de la cartera:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_p)}$$

Veremos la resolución de la varianza de la cartera en el siguiente capítulo, que es la aplicación práctica.

Con todo esto ya podemos empezar la resolución del modelo de Markowitz.

IV. APLICACIÓN PRÁCTICA

Después de explicar y analizar todos los datos obtenidos, voy a proceder a la realización práctica del modelo. Pero antes de nada, déjenme que vuelva a citar los datos básicos para situarnos.

1. Situación previa

Primero de todo, recordad que estamos a 1 de enero de 2014 y las rentabilidades analizadas van desde enero de 2011 a diciembre de 2013. La cartera que vamos a construir está compuesta por 10 activos diversificados del IBEX-35 que son los siguientes: Actividades de Construcción y Servicios (ACS), Amadeus (AMS), Acciona (ANA), Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA), Grifols (GRF), Iberdrola (IBE), Repsol (REP), Banco Santander (SAN), Telefónica (TEF) y Viscofan (VIS).

Una vez tenía los títulos agrupados, había calculado entorno a 1.116 rentabilidades mensuales de 31 activos del IBEX, de las cuales solo seleccioné 360 que son las de los diez activos de la cartera. Con estas rentabilidades mensuales calculábamos las 10 rentabilidades medias mensuales y desviaciones típicas, que acto seguido anualicé y que se recogen en esta tabla:

	Rentabilidad media	Volatilidad
ACS	2,75%	35,74%
AMS	28,36%	21,44%
ANA	4,72%	38,18%
BBVA	16,19%	30,77%
GRF	44,99%	28,91%
IBE	3,40%	28,13%
REP	4,82%	28,08%
SAN	7,67%	29,39%
TEF	-2,22%	23,70%
VIS	16,81%	19,15%

1.1. Resultados del IBEX-35

El IBEX-35, para compararlo con los títulos, durante el mismo periodo obtuvo una rentabilidad media anual del 2,53%, debido a que en su composición hay activos con rentabilidades bajas e incluso negativas, como es el caso del Banco Popular con un -32,00% y de Arcelor Mittal con una pérdida 18,56% media anual. La bolsa española presentaba una volatilidad del 22,45%.

Con las rentabilidades calculadas, procedíamos a calcular la matriz de varianzas y covarianzas, pero la que nos interesa es la que se ha obtenido con rentabilidades anualizadas.

2. Cálculo de la frontera eficiente

Una vez recopilado estos datos procedo a encontrar la frontera eficiente de esta cartera de 10 títulos a través de la resolución del modelo de optimización que planteó Markowitz y que cabe recordar:

$$\text{Minimizar: } \sigma_p^2 = x' \cdot V \cdot x$$

$$\text{Maximizar: } E_p = \sum_{k=1}^n x_k \cdot E_k$$

$$\text{Sujeto a las restricciones: } \sum_{k=1}^n x_k = 1$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, x_k > 0$$

La resolución de este problema de optimización como ya dije es muy compleja si se tienen más de dos o tres activos, pero hoy en día existen *software* avanzados y que facilitan el proceso una barbaridad, en mi caso he utilizado la aplicación *Solver*, de *Microsoft Excel*.

2.1. El peso de cada activo en la cartera

El peso es la ponderación del activo k en la cartera. Como dije anteriormente, para minimizar la varianza de la cartera σ_p^2 , es necesario crear una matriz o vector columna de 10×1 y su transpuesta. Pero claro, como el peso de cada activo depende de la rentabilidad que le queramos otorgar a la cartera, y para poder realizar correctamente el cálculo, previamente he puesto por defecto que cada activo tenga un peso del 10% sobre el total de la cartera, así la suma de cada porcentaje da un 100%, es decir, $\sum_{k=1}^n x_k = 1$, cumpliendo con una restricción del modelo. Luego a la hora de la resolución, cuando le solicite la volatilidad mínima para una rentabilidad dada, estas ponderaciones cambiarán de valor. Para facilitar la comprensión, quedaría así:

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
PONDERACIONES	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

Rentabilidades anualizadas		Ponderaciones
ACS	2,75%	10,00%
AMS	28,36%	10,00%
ANA	4,72%	10,00%

BBVA	16,19%	10,00%
GRF	44,99%	10,00%
IBE	3,40%	10,00%
REP	4,82%	10,00%
SAN	7,67%	10,00%
TEF	-2,22%	10,00%
VIS	16,81%	10,00%
Suma:		100,00%

Para el inversor, cada ponderación significa el porcentaje de acciones que debe comprar de cada compañía con respecto al total de su presupuesto. Por ejemplo, si un inversor tuviera un presupuesto de 100 euros y desea una rentabilidad del 12,75% y sin importarle el riesgo (que no es el caso del modelo de Markowitz pero es para entender el significado de las ponderaciones) en este caso debería adquirir 10 euros en acciones de cada empresa.

2.2. La volatilidad de la cartera

El siguiente paso es añadir una columna al lado de las ponderaciones con la rentabilidad media de cada título respecto al peso del activo en la cartera. Es decir, esta será la rentabilidad media esperada de cada activo otorgándole a la cartera una rentabilidad deseada, que el modelo de Markowitz la seleccionará con el mínimo riesgo.

Después de esto, necesitamos encontrar la varianza de la cartera, que como ya comenté en el análisis de datos, es fundamental para el cálculo de las carteras eficientes. Recordemos, la varianza de la cartera se calculaba de la siguiente forma:

$$\sigma_p^2 = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x \cdot V \cdot x'$$

Y la volatilidad de la cartera, que se puede calcular con la desviación típica, es:

$$\sigma(\tilde{R}_p) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{R}_p)}$$

Al multiplicar los vectores de las ponderaciones por la matriz de varianzas y covarianzas, la varianza de la cartera da por defecto un 0,033552, que ahora mismo es irrelevante ya que es consecuencia de haber asignado por defecto un 10% de peso a cada activo. Digamos que es también una varianza por defecto.

Lo mismo pasa con la volatilidad de la cartera, da un 18,32% pero ahora mismo no hay que tener en cuenta la volatilidad, ya que no tiene sentido debido a que todavía no hemos fijado ningún nivel de rentabilidad.

Como podemos observar en la siguiente imagen, para poder ejecutar el modelo a través del *Solver*, solo falta crear una celda donde irá la rentabilidad esperada de la cartera. Esta celda será la que nosotros utilizaremos para que nos calcule la rentabilidad de la cartera y, en consecuencia, para utilizar el método de la línea crítica, cuyo objetivo es encontrar las carteras esquina y así la frontera eficiente. Y dicha celda debe ser igual al sumatorio de la rentabilidad media.

AHORA SOLO ME CENTRARÉ EN LA MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS COMPLETA CON RENTABILIDADES ANUALIZADAS

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
PONDERACIONES	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

<u>Rentabilidades anualizadas</u>	<u>Ponderaciones</u>	<u>Rentabilidad media</u>	Varianza de la cartera:	0,033552
ACS	2,75%	10,00%	0,27%	
AMS	28,36%	10,00%	2,84%	
ANA	4,72%	10,00%	0,47%	
BBVA	16,19%	10,00%	1,62%	
GRF	44,99%	10,00%	4,50%	
IBE	3,40%	10,00%	0,34%	
REP	4,82%	10,00%	0,48%	
SAN	7,67%	10,00%	0,77%	
TEF	-2,22%	10,00%	-0,22%	
VIS	16,81%	10,00%	1,68%	
Suma:	100,00%		12,75%	

VOLATILIDAD:	18,32%
Rentabilidad deseada:	

2.3. Método de la Línea Crítica

A partir de aquí, nuestro objetivo es detectar las carteras esquina a través del llamado método de la línea crítica, que ya mencioné en la parte teórica. La primera cartera esquina es la del activo de máxima rentabilidad, en nuestro caso será el 100% de GRF, con una volatilidad del 28,91%. Para encontrar la siguiente cartera esquina he ido disminuyendo la rentabilidad deseada hasta encontrar el momento en que la cartera cambia su composición por la entrada de un nuevo activo o la salida de uno que ya estaba dentro. En el caso de entrada de un título, la cartera esquina será la anterior a la entrada. Si se trata de una salida, se considerará cartera esquina una vez haya salido el título completamente. La última cartera esquina es la de menor volatilidad de todas las carteras de la frontera eficiente.

Para realizar estos cálculos, como he comentado, utilizo el *Solver*. Este complemento de *Microsoft Excel* nos permite plantear el problema de optimización y a través de la celda objetivo, que es la celda que se quiere minimizar o maximizar, en nuestro caso minimizar la volatilidad, va buscando el valor mínimo sujeto a las restricciones que he ordenado previamente. En el modelo de Markowitz las restricciones son que la suma de ponderaciones sea igual a 1 y que éstas sean positivas o nulas. Para que *Solver* pueda proceder a encontrar el mínimo, es necesario que tenga que cambiar el valor de unas celdas, que en nuestro caso son las ponderaciones.

Como ejemplo, calculo la mínima volatilidad con una rentabilidad dada del 42%, las instrucciones que hay que darle al *Solver* son las siguientes:

Primero de todo en la celda de rentabilidad deseada le indico que quiero, a modo de ejemplo, un 42%. Luego seleccionamos como celda objetivo la volatilidad y quiero que este valor sea mínimo. También le pido que para encontrar el riesgo mínimo, siempre sujeto a la rentabilidad deseada, pueda cambiar el valor de las ponderaciones (la matriz columna). Al variar la matriz columna, la matriz fila de ponderaciones también cambiará porque he definido que las ponderaciones del vector fila sean iguales que las del vector columna, así al cambiar los valores de la columna, los de la fila variarán también y tomarán el mismo valor. Todo esto sujeto a las restricciones que comenté en el capítulo de teoría, que son por un lado la suma de ponderaciones debe ser igual a 1 y estas ponderaciones deben ser positivas o nulas, pero nunca negativas. Dicha rentabilidad deseada, como es obvio, debe coincidir con la suma de las rentabilidades anualizadas de cada activo de la cartera multiplicado por su correspondiente ponderación, que la denominaremos como rentabilidad media esperada.

2.4. Construcción de las carteras esquina

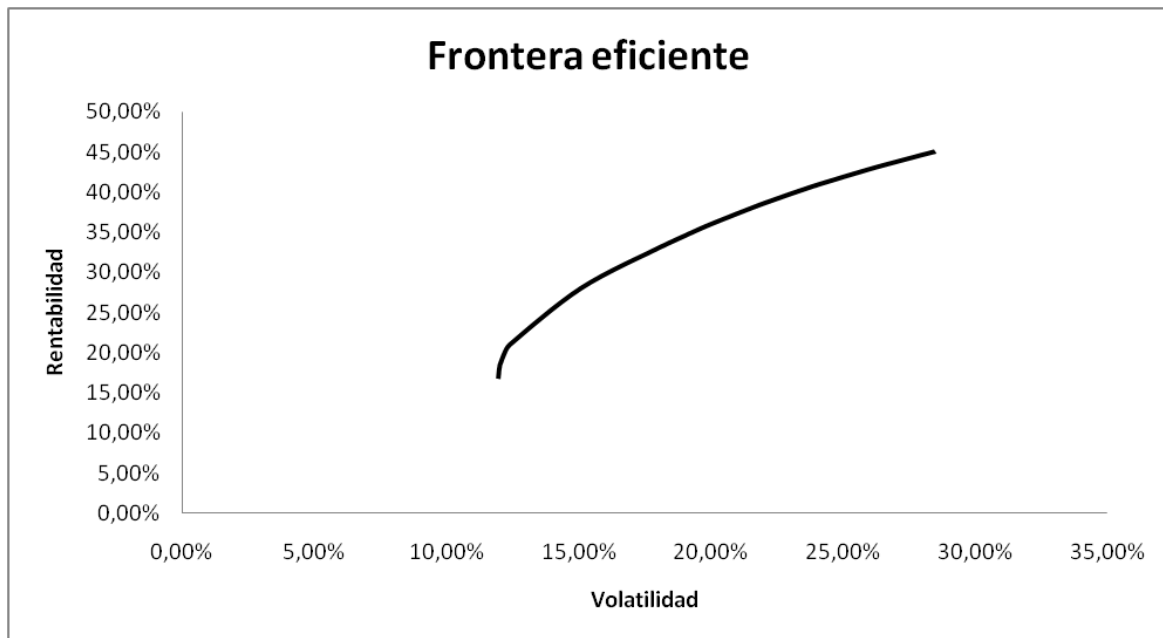
Volviendo al tema de las carteras esquina, la frontera eficiente que nos permite conocer las mejores carteras según un nivel de rentabilidad fijado haciendo mínima la volatilidad se muestra en el siguiente cuadro de carteras esquina:

Nº	R	σ	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
1	44,99%	28,91%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%
2	40,76%	23,98%	0%	25,42%	0%	0%	74,58%	0%	0%	0%	0%	0%
3	39,38%	22,74%	0%	28,15%	0%	3,21%	68,63%	0%	0%	0%	0%	0%
4	34,99%	19,35%	0%	35,63%	8,67%	2,02%	53,68%	0%	0%	0%	0%	0%
5	34,71%	19,17%	0%	35,46%	8,90%	1,98%	52,85%	0%	0%	0%	0%	0,80%
6	33,28%	18,23%	0%	35,04%	9,53%	0%	49,20%	0%	2,42%	0%	0%	3,80%
7	18,29%	12,03%	0%	21,08%	10,33%	0%	9,41%	0%	19,66%	0%	0%	39,51%
8	16,70%	11,97%	0%	17,76%	8,87%	0%	7,68%	0%	18,61%	0%	5,37%	41,71%

En el capítulo anterior comente que había seleccionado un título con rentabilidad media negativa, obviamente tanto mensual como anual, y que no era sinónimo de no tener posibilidades de entrar ya que, como dije, el modelo de Markowitz a la hora de calcular las carteras esquina, con el método de la línea crítica, no tiene en cuenta si un título ha generado una rentabilidad positiva o negativa, solo tiene como objetivo minimizar el riesgo a una rentabilidad deseada, o bien, maximizar la rentabilidad esperada a un nivel dado de riesgo. Pues bien, como podemos observar, Telefónica entra en la última cartera esquina que es la de menor volatilidad de todas las carteras eficientes.

2.5. Resolución gráfica de la frontera eficiente

Con estas carteras esquina, podemos encontrar la frontera eficiente. En el eje de abscisas situamos la volatilidad y en eje de ordenadas ponemos la rentabilidad media esperada de la cartera. El resultado nos lleva a un gráfico como el que podemos ver a continuación.



Observamos cómo la frontera eficiente va cogiendo forma de parábola. Eso quiere decir que la rentabilidad de las carteras eficientes disminuye más rápido que la volatilidad hasta que llegamos a un punto en el que una unidad menos de rentabilidad hace crecer la volatilidad. Ese punto es el de la cartera con la menor volatilidad de todas las carteras eficientes.

Ya hemos construido las carteras eficientes a través del modelo de Markowitz. Ahora es el momento de comentar los resultados y compararlos con el IBEX-35. Además, comprobar si se ha cumplido el objetivo marcado al principio, ver si nuestras carteras construidas se comportaron mejor que la bolsa española en su conjunto.

CONCLUSIONES

Una vez conocidas las carteras esquina, recordemos cuales son:

Nº	R	σ	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
1	44,99%	28,91%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%
2	40,76%	23,98%	0%	25,42%	0%	0%	74,58%	0%	0%	0%	0%	0%
3	39,38%	22,74%	0%	28,15%	0%	3,21%	68,63%	0%	0%	0%	0%	0%
4	34,99%	19,35%	0%	35,63%	8,67%	2,02%	53,68%	0%	0%	0%	0%	0%
5	34,71%	19,17%	0%	35,46%	8,90%	1,98%	52,85%	0%	0%	0%	0%	0,80%
6	33,28%	18,23%	0%	35,04%	9,53%	0%	49,20%	0%	2,42%	0%	0%	3,80%
7	18,29%	12,03%	0%	21,08%	10,33%	0%	9,41%	0%	19,66%	0%	0%	39,51%
8	16,70%	11,97%	0%	17,76%	8,87%	0%	7,68%	0%	18,61%	0%	5,37%	41,71%

Vemos que hay activos que no han participado, como son las acciones de ACS, las de SAN y las de IBE. Si nos fijamos en la matriz de correlaciones (ver anexo 4), observamos que la correlación entre ACS e IBE si redondeamos es de 0,78, la de ACS con SAN es de un 0,79, prácticamente igual que la relación con Iberdrola, y la correlación del SAN con IBE es de un 0,75 aproximadamente. Esto quiere decir que debido a la elevada correlación que hay entre estos tres títulos, dificulta la reducción de la volatilidad y, en consecuencia, la entrada en las carteras esquina.

En cambio, hay acciones con mucho peso en dichas carteras eficientes, como es el caso de Grifols, Viscofan y Amadeus. La cartera de máxima rentabilidad es la compuesta por GRF y, como es normal, va perdiendo peso pero se mantiene en el total de las carteras diversificadas, cualquier cartera eficiente estará compuesta por una parte de GRF. VIS, en cambio, sigue el camino opuesto. No entra, prácticamente, hasta la mitad de la frontera eficiente, pero acaba en la cartera diversificada de menor volatilidad con un 41,71%. AMS también es un título importante en la cartera ya que está en todas las carteras esquina menos en la de mayor rentabilidad, en la que solo puede estar el activo de mayor rentabilidad media anual. AMS llega a tener un 35% aproximadamente en la mitad de las carteras esquina, concretamente en las carteras 4, 5 y 6, y acaba con un peso del 17,76%. Esto es debido, como comenté en la parte teórica, al efecto que tiene la correlación negativa entre las acciones en la composición de las carteras, que hace reducir la volatilidad. Observamos en la matriz de correlaciones que GRF y VIS tienen correlaciones negativas con prácticamente todos los títulos, entre ellos también.

Es curioso que Amadeus, que como hemos dicho tiene un peso más que considerable en las carteras eficientes, está correlacionado positivamente con Grifols y Viscofan, con un 0,41 y un 0,30. GRF y VIS son las que más peso tienen en el conjunto de carteras esquina, GRF al principio y VIS en las últimas. Que AMS esté también en las carteras eficientes con bastante proporción puede ser debido a que también está correlacionado negativamente pero con otro título, en este caso con Acciona, que también participa en la cartera pero en menor medida.

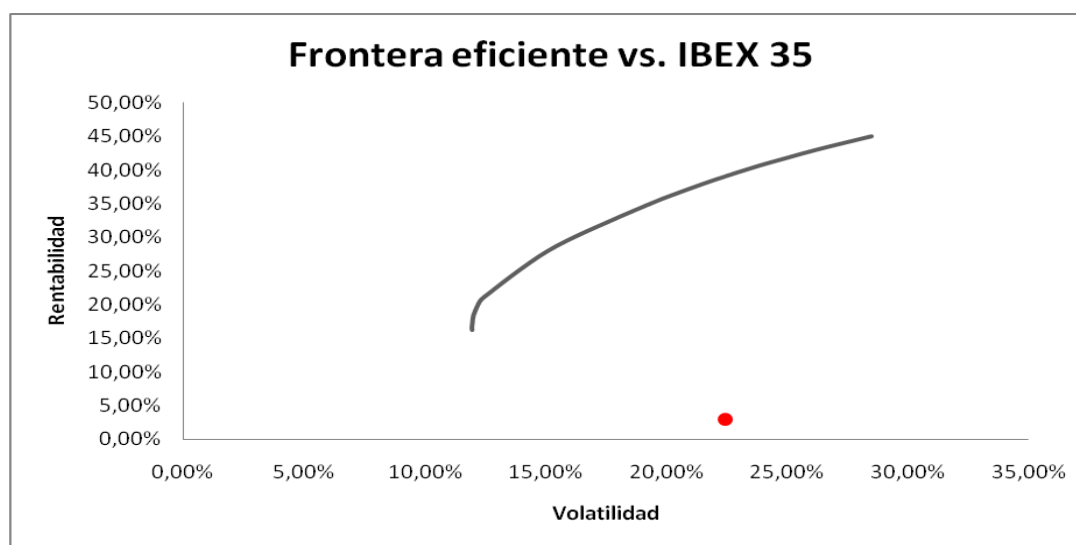
Acciones con un peso intrascendente en las carteras diversificadas son BBVA, Acciona como hemos comentado, Telefónica y un poco más de peso Repsol, que llega a tener un 19,66% en penúltima cartera esquina.

Visto esto, podemos afirmar que una empresa con una enorme capitalización bursátil no equivale a ser un activo en el que se vaya a obtener una buena rentabilidad o una rentabilidad superior a otro título de menor capitalización bursátil. Un claro ejemplo es el Banco Santander; es la empresa con mayor capitalización bursátil y la más negociada² del IBEX-35 (86.223,74 millones de euros y 54 millones de acciones al día, respectivamente) y en cambio no es un título eficiente según el modelo de Markowitz, es decir, que no participa en ninguna cartera eficiente para conseguir la máxima rentabilidad a ningún nivel de volatilidad. En cambio, Viscofan que, por su pequeña capitalización bursátil, desde el 22 de diciembre de 2014 ya no cotiza en el IBEX-35, recordemos que son las 35 empresas españolas de mayor capitalización bursátil, sustituida por Endesa y que para el modelo de Markowitz es una empresa que tiene un importante peso en las carteras esquina de menor volatilidad.

$$\text{Capitalización bursátil} = \text{Número de acciones en circulación} \cdot \text{Precio de una acción}$$

Para inversores que deseen una alta rentabilidad se le ofrecerían carteras diversificadas de hasta 3 activos, que serían todas que están entre las carteras esquina 1, 2 y 3. En cambio, para inversores que priorizan la volatilidad a la rentabilidad se les ofrecerían carteras diversificadas con 5 títulos y hasta un máximo de 6 títulos para los que no quieran superar una volatilidad del 13%.

Si ahora comparamos las carteras esquina, no por el peso de cada una, sino con el total del IBEX-35, recordemos de 2011 a 2013 el IBEX cosechó una rentabilidad de un 2,53% con una volatilidad del 22,45%, podemos llegar a la conclusión de que cualquier cartera de la frontera eficiente se comporta mucho mejor de lo que lo ha hecho el IBEX. Si lo demostramos gráficamente se entenderá mejor:



² Datos a 26 de enero de 2015 en invertia.com

En el gráfico se puede apreciar claramente que todas las carteras diversificadas de la frontera eficiente ofrecen muchas más rentabilidad que el IBEX-35 (punto rojo). Además las carteras eficientes que tienen una volatilidad del 22,45% (que es la del IBEX) o menor, ofrecen rentabilidades muy superiores que el mercado bursátil español, incluso la cartera eficiente de menor volatilidad. Si bien es cierto que las carteras eficientes con una volatilidad superior al 22,45% teóricamente tienen más riesgo que el IBEX, subjetivamente observo que el IBEX ofrece una rentabilidad media anual irrisoria en comparación con las carteras diversificadas de mayor rentabilidad y aunque estas tengan más volatilidad, la diferencia respecto al mercado español es pequeña. La cartera esquina de mayor rentabilidad tiene una volatilidad superior a la del mercado español de un 6,47% (un 28,91% de la cartera respecto a un 22,45% del IBEX) pero la diferencia de rentabilidad entre dicha cartera y la del IBEX en su conjunto es de un 42,46% (una rentabilidad del 44,99% de la cartera de máxima rentabilidad, que como ya sabemos, coincide con el activo de máxima rentabilidad, y un rendimiento por parte del IBEX del 2,53%).

También cabe destacar que la cartera eficiente de menor volatilidad tiene una rentabilidad superior a la del conjunto del mercado español y además una menor volatilidad, es decir que los posibles inversores muy aversos al riesgo, podrán escoger una cartera con muy poca volatilidad pero que se espera que genere un rendimiento superior al IBEX.

Otra conclusión a la que llego es que no es necesario crear una cartera con muchos valores. No hay relación alguna entre el número de títulos que se seleccionan para la construcción de una cartera con la rentabilidad y volatilidad obtenida de ésta. A veces, como ha sido en este caso, es más exitoso crear una buena cartera con pocos valores pero diversificada, que reduce el nivel de riesgo y nos da una rentabilidad más que aceptable, o bien, una cartera con una alta rentabilidad y un nivel de riesgo acorde o una muy buena relación rentabilidad-riesgo. Se puede escoger cualquiera de las tres opciones.

Llegados a este punto podemos afirmar que nuestra cartera ha batido claramente al IBEX, cumpliendo así con el objetivo marcado. Claro que hay que tener una cosa muy en cuenta: estos son resultados calculados *a priori* que pretenden predecir el comportamiento futuro de los activos seleccionados y de la bolsa española. Pero el mercado bursátil, ya no solo el español, puede variar por cualquier factor, por insignificante que parezca y más en estos tiempos en que el mundo está globalizado y el auge de las nuevas tecnologías hace que la relación de la macroeconomía con los mercados financieros sea muy estrecha. Esto hace que estemos expuestos al riesgo por factores que no solo suceden en España y no tienen porque estar relacionados explícitamente el mercado bursátil, pero que pueden acabar afectando.

BIBLIOGRAFÍA

BORRELL, M. et al. *Estadística financiera*. Madrid: Ed. Centro de Estudios Ramón Areces; 1997.

GÓMEZ-BEZARES, F. *Gestión de carteras*. Bilbao: Desclée de Brouwer; 2000.

MARKOWITZ, H. M. "Portfolio selection". A: *Journal of finance*. Vol. 7, pg. 77-91; 1952

MARKOWITZ, H. M. *Portfolio selection*. Nova York: Wiley; 1959.

MARTINEZ ABASCAL, E. *Invertir en Bolsa*. Madrid: Ed. McGraw-Hill; 1999

MENDIZÁBAL ZUBELDIA, A. et al. *El modelo de Markowitz en la gestión de carteras. Cuadernos de gestión*. [Internet] Vol. 2, N°1; 2002.

SÁEZ MADRID, JOSÉ B., ORTÍ CELMA, FRANCESC et al. *Diversificación en renta variable: ¿Cuestión de cantidad o de calidad de los activos? Segunda Parte*. Ejecutivos de finanzas [Internet]. 2012 [Citado el 27 de enero de 2015]. Disponible en: <http://www.iaef.org.ar/files/revista/230/finanzas.pdf>

VANINI, P., VIGNOLA, L. *Chapter 1. Markowitz model*. [Internet]; 2001. [Citado el 27 de enero de 2015]. Disponible en: <http://www.math.ethz.ch/finance/misc/PortfolioSelection/Markowitz.pdf>

ANEXOS

En las siguientes páginas completo y amplío la información dada en el transcurso del trabajo sobre los datos recopilados y matrices calculadas³ para la resolución del modelo de Markowitz, tanto para los 31 activos previos como para los 10 títulos seleccionados posteriormente.

³ Todas las tablas y matrices del anexo son de elaboración propia.

Anexo 1

Cotización, dividendos y rentabilidades mensuales de los 31 activos del IBEX-35

Fecha	ABERTIS (ABE)			ACCIONA (ANA)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	13,49		-	53,11		-
31/01/2011	14,33		6,23%	63,19	1,07	20,99%
28/02/2011	14,56		1,61%	70,49		11,55%
31/03/2011	15,33		5,29%	76,68		8,78%
29/04/2011	16		4,37%	78,54		2,43%
31/05/2011	16,03		0,19%	75,36		-4,05%
30/06/2011	15,4	0,30	-2,06%	73,16		-2,92%
29/07/2011	12,83	0,67	-12,34%	72,27	2,03	1,56%
31/08/2011	11,08		-13,64%	65,26		-9,70%
30/09/2011	11,6		4,69%	63,65		-2,47%
31/10/2011	11,94	0,30	5,52%	68,63		7,82%
30/11/2011	11,84		-0,84%	68,85		0,32%
30/12/2011	12,34		4,22%	66,73		-3,08%
31/01/2012	12,88		4,38%	61,36	1,03	-6,50%
29/02/2012	12,83		-0,39%	59,05		-3,76%
30/03/2012	12,77		-0,47%	52,36		-11,33%
30/04/2012	11,69	0,36	-5,64%	46,4		-11,38%
31/05/2012	10,29		-11,98%	42,45		-8,51%
29/06/2012	10,65		3,50%	47,1	1,97	15,59%
31/07/2012	10,06		-5,54%	35,49		-24,65%
31/08/2012	10,8		7,36%	37,18		4,76%
28/09/2012	11,45		6,02%	44,29		19,12%
31/10/2012	11,62		1,48%	47,34		6,89%
30/11/2012	11,24	0,33	-0,43%	49,85		5,30%
31/12/2012	12,42		10,50%	56,21		12,76%
31/01/2013	12,62		1,61%	59,22	0,90	6,96%
28/02/2013	13,46		6,66%	47,04		-20,57%
28/03/2013	13,11		-2,60%	42,53		-9,59%
30/04/2013	14,18	0,33	10,68%	49,75		16,98%
31/05/2013	13,88		-2,12%	48,09		-3,34%
28/06/2013	13,4		-3,46%	40,55		-15,68%
31/07/2013	13,96		4,18%	35,33	1,75	-8,56%
30/08/2013	13,36		-4,30%	38,72		9,60%
30/09/2013	14,37		7,56%	42,06		8,63%
31/10/2013	15,8		9,95%	46,73		11,10%
29/11/2013	15,65	0,33	1,14%	45		-3,70%
31/12/2013	16,15		3,19%	41,77		-7,18%

Fecha	ACS			AMADEUS (AMS)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	35,2		-	15,35		-
31/01/2011	37,7		7,10%	15,32		-0,20%
28/02/2011	33,25	0,90	-9,42%	14,09		-8,03%
31/03/2011	33,08		-0,51%	13,5		-4,19%
29/04/2011	33,97		2,69%	14,14		4,74%
31/05/2011	33,37		-1,77%	14,26		0,85%
30/06/2011	32,49		-2,64%	14,36		0,70%
29/07/2011	29,49	1,15	-5,69%	14,05	0,30	-0,07%
31/08/2011	28,57		-3,12%	13,91		-1,00%
30/09/2011	26,59		-6,93%	12,06		-13,30%
31/10/2011	27,45		3,23%	13,66		13,27%
30/11/2011	24,03		-12,46%	12,53		-8,27%
30/12/2011	22,9		-4,70%	12,54		0,08%
31/01/2012	23,58		2,97%	13,1	0,18	5,90%
29/02/2012	22,34	0,90	-1,44%	14,3		9,16%
30/03/2012	19,19		-14,10%	14,15		-1,05%
30/04/2012	13,85		-27,83%	15,44		9,12%
31/05/2012	13,44		-2,96%	14,82		-4,02%
29/06/2012	16,89		25,67%	16,7		12,69%
31/07/2012	12,85	1,07	-17,58%	17,59	0,20	6,53%
31/08/2012	15,79		22,88%	17,76		0,97%
28/09/2012	16,03		1,52%	18,13		2,08%
31/10/2012	16,47		2,74%	19,1		5,35%
30/11/2012	16,44		-0,18%	17,95		-6,02%
31/12/2012	19,04		15,82%	19,05		6,13%
31/01/2013	17,67		-7,20%	18,48	0,25	-1,68%
28/02/2013	18,2		3,00%	19,6		6,06%
28/03/2013	18,21		0,05%	21,08		7,55%
30/04/2013	19,53		7,25%	22,42		6,36%
31/05/2013	21,65		10,86%	23,51		4,86%
28/06/2013	20,35		-6,00%	24,56		4,47%
31/07/2013	21,6	1,11	11,60%	25,82	0,25	6,15%
30/08/2013	21,31		-1,34%	24,44		-5,34%
30/09/2013	23,5		10,28%	26,2		7,20%
31/10/2013	24,18		2,89%	27,35		4,39%
29/11/2013	23,78		-1,65%	27,57		0,80%
31/12/2013	25,02		5,21%	31,11		12,84%

Fecha	ARCELOR MITTAL (MTS)			BANCO POPULAR (POP)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	28,96		-	19,38		-
31/01/2011	26,6		-8,15%	21,96	0,05	13,57%
28/02/2011	26,63	0,12	0,56%	21,91		-0,23%
31/03/2011	25,53		-4,13%	20,74		-5,34%
29/04/2011	24,85		-2,66%	20,24		-2,41%
31/05/2011	23,17	0,11	-6,32%	20,21	0,05	0,10%
30/06/2011	24,01		3,63%	19,37		-4,16%
29/07/2011	21,8		-9,20%	18,06	0,05	-6,50%
31/08/2011	15,28		-29,91%	18,15		0,50%
30/09/2011	12,03		-21,27%	17,4		-4,13%
31/10/2011	15,04		25,02%	16,66	0,05	-3,97%
30/11/2011	13,9	0,12	-6,78%	15,85		-4,86%
30/12/2011	14,08		1,29%	17,6		11,04%
31/01/2012	15,38		9,23%	16,45		-6,53%
29/02/2012	15,8		2,73%	15,41		-6,32%
30/03/2012	14,33		-9,30%	13,45	0,04	-12,46%
30/04/2012	13,03		-9,07%	12,08		-10,19%
31/05/2012	11,16	0,12	-13,43%	8,15		-32,53%
29/06/2012	12,12		8,60%	8,92	0,08	10,43%
31/07/2012	13,08		7,92%	7,65		-14,24%
31/08/2012	11,83		-9,56%	9,07		18,56%
28/09/2012	11,17		-5,58%	8,51		-6,17%
31/10/2012	11,4		2,06%	6,02		-29,26%
30/11/2012	11,69		2,54%	3,21		-46,68%
31/12/2012	12,78		9,32%	2,93		-8,72%
31/01/2013	12,62		-1,25%	3,32		13,31%
28/02/2013	11,5		-8,87%	3,33		0,30%
28/03/2013	10,08		-12,35%	2,89		-13,21%
30/04/2013	9,28		-7,94%	2,96		2,42%
31/05/2013	9,9		6,68%	3,22		8,78%
28/06/2013	8,54		-13,74%	2,36		-26,71%
31/07/2013	9,9		15,93%	3,31		40,25%
30/08/2013	9,69		-2,12%	3,55		7,25%
30/09/2013	10,16		4,85%	3,97		11,83%
31/10/2013	11,68		14,96%	4,19		5,54%
29/11/2013	12,71		8,82%	4,28		2,15%
31/12/2013	12,94		1,81%	4,39		2,57%

Fecha	BANCO SABADELL (SAB)			BANCO SANTANDER (SAN)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	2,96		-	7,97		-
31/01/2011	3,49		17,91%	8,95		12,30%
28/02/2011	3,15		-9,74%	8,94	0,12	1,23%
31/03/2011	3,09		-1,90%	8,19		-8,39%
29/04/2011	2,99	0,06	-1,29%	8,62		5,25%
31/05/2011	2,98		-0,33%	8,26	0,23	-1,51%
30/06/2011	2,85		-4,36%	7,96		-3,63%
29/07/2011	2,61		-8,42%	7,33		-7,91%
31/08/2011	2,75		5,36%	6,42	0,14	-10,50%
30/09/2011	2,69	0,05	-0,36%	6,22		-3,12%
31/10/2011	2,61		-2,97%	6,18		-0,64%
30/11/2011	2,49		-4,60%	5,6	0,13	-7,28%
30/12/2011	2,93		17,67%	5,87		4,82%
31/01/2012	2,82		-3,75%	5,95		1,36%
29/02/2012	2,43		-13,83%	6,23	0,12	6,72%
30/03/2012	2,04		-16,05%	5,77		-7,38%
30/04/2012	1,78		-12,75%	4,72		-18,20%
31/05/2012	1,31		-26,40%	4,26	0,22	-5,08%
29/06/2012	1,53	0,05	20,61%	5,22		22,54%
31/07/2012	1,55		1,31%	4,95		-5,17%
31/08/2012	2,3		48,39%	5,67	0,15	17,58%
28/09/2012	2,09		-9,13%	5,8		2,29%
31/10/2012	1,88		-10,05%	5,79		-0,17%
30/11/2012	2,15		14,36%	5,91	0,15	4,66%
31/12/2012	1,98		-7,91%	6,1		3,21%
31/01/2013	1,97		-0,51%	6,18		1,31%
28/02/2013	1,67		-15,23%	5,81	0,15	-3,56%
28/03/2013	1,43		-14,37%	5,24		-9,81%
30/04/2013	1,58		10,49%	5,49		4,77%
31/05/2013	1,46	0,21	5,70%	5,54	0,15	3,64%
28/06/2013	1,28		-12,33%	4,9		-11,55%
31/07/2013	1,54		20,31%	5,49		12,04%
30/08/2013	1,74		12,99%	5,34	0,15	0,00%
30/09/2013	1,86		6,90%	6,03		12,92%
31/10/2013	1,89		1,61%	6,54		8,46%
29/11/2013	1,9		0,53%	6,54	0,15	2,29%
31/12/2013	1,9		0,00%	6,51		-0,46%

Fecha	BANKINTER (BKT)			BBVA		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	18,04		-	7,6		-
31/01/2011	20,62		14,30%	8,97	0,09	19,21%
28/02/2011	22,08		7,08%	8,95		-0,22%
31/03/2011	21,47		-2,76%	8,56		-4,36%
29/04/2011	22,87		6,52%	8,66	0,15	2,92%
31/05/2011	21,57	0,97	-1,44%	8,12		-6,24%
30/06/2011	20,49		-5,01%	8,07		-0,62%
29/07/2011	19,96		-2,59%	7,35	0,10	-7,68%
31/08/2011	19,55		-2,05%	6,34		-13,74%
30/09/2011	20,09	0,40	4,81%	6,18		-2,52%
31/10/2011	20,75		3,29%	6,56	0,10	7,77%
30/11/2011	20,32		-2,07%	6,27		-4,42%
30/12/2011	20,8	0,60	5,31%	6,68		6,54%
31/01/2012	20,86		0,29%	6,67	0,10	1,35%
29/02/2012	20,04		-3,93%	6,73		0,90%
30/03/2012	19,22		-4,09%	5,97		-11,29%
30/04/2012	17,78		-7,49%	5,11		-14,41%
31/05/2012	14,02	0,97	-15,69%	4,57	0,12	-8,22%
29/06/2012	15,89		13,34%	5,63		23,19%
31/07/2012	15,95		0,38%	5,32	0,10	-3,73%
31/08/2012	18,12		13,61%	6,07		14,10%
28/09/2012	16,37	0,40	-7,45%	6,11		0,66%
31/10/2012	16,63		1,59%	6,44	0,10	7,04%
30/11/2012	16,67		0,24%	6,52		1,24%
31/12/2012	18,45	0,60	14,28%	6,96		6,75%
31/01/2013	20,64		11,87%	7,33	0,10	6,75%
28/02/2013	20		-3,10%	7,43		1,36%
28/03/2013	19,16		-4,20%	6,76		-9,02%
30/04/2013	20,6		7,52%	7,37	0,12	10,80%
31/05/2013	19,95	0,60	-0,24%	7,25		-1,63%
28/06/2013	18,82	0,14	-4,96%	6,45		-11,03%
31/07/2013	20,77		10,36%	7,12	0,10	11,94%
30/08/2013	21,97		5,78%	7,22		1,40%
30/09/2013	23,46	0,40	8,60%	8,26		14,40%
31/10/2013	27,57		17,52%	8,63	0,10	5,69%
29/11/2013	26,89		-2,47%	8,79		1,85%
31/12/2013	27,66	0,60	5,09%	8,95		1,82%

Fecha	BME			CAIXABANK (CABK)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	18,04		-	4		-
31/01/2011	20,62		14,30%	5,04	0,08	28,00%
28/02/2011	22,08		7,08%	5,25		4,17%
31/03/2011	21,47		-2,76%	4,98	0,06	-4,00%
29/04/2011	22,87		6,52%	4,99		0,20%
31/05/2011	21,57	0,97	-1,44%	5,06		1,40%
30/06/2011	20,49		-5,01%	4,84	0,05	-3,36%
29/07/2011	19,96		-2,59%	4,03		-16,74%
31/08/2011	19,55		-2,05%	3,56		-11,66%
30/09/2011	20,09	0,40	4,81%	3,32		-6,74%
31/10/2011	20,75		3,29%	3,54	0,06	8,43%
30/11/2011	20,32		-2,07%	3,79		7,06%
30/12/2011	20,8	0,60	5,31%	3,8	0,06	1,85%
31/01/2012	20,86		0,29%	3,84		1,05%
29/02/2012	20,04		-3,93%	3,54		-7,81%
30/03/2012	19,22		-4,09%	2,92	0,06	-15,82%
30/04/2012	17,78		-7,49%	2,6		-10,96%
31/05/2012	14,02	0,97	-15,69%	2,02		-22,31%
29/06/2012	15,89		13,34%	2,56		26,73%
31/07/2012	15,95		0,38%	2,66	0,05	5,86%
31/08/2012	18,12		13,61%	3,03		13,91%
28/09/2012	16,37	0,40	-7,45%	2,93		-3,30%
31/10/2012	16,63		1,59%	2,92	0,06	1,71%
30/11/2012	16,67		0,24%	2,94		0,68%
31/12/2012	18,45	0,60	14,28%	2,64		-10,20%
31/01/2013	20,64		11,87%	2,91	0,06	12,50%
28/02/2013	20		-3,10%	3,14		7,90%
28/03/2013	19,16		-4,20%	2,64		-15,92%
30/04/2013	20,6		7,52%	2,81	0,06	8,71%
31/05/2013	19,95	0,60	-0,24%	2,78		-1,07%
28/06/2013	18,82	0,14	-4,96%	2,36		-15,11%
31/07/2013	20,77		10,36%	2,77		17,37%
30/08/2013	21,97		5,78%	2,81	0,05	3,25%
30/09/2013	23,46	0,40	8,60%	3,24		15,30%
31/10/2013	27,57		17,52%	3,77	0,05	17,90%
29/11/2013	26,89		-2,47%	3,72		-1,33%
31/12/2013	27,66	0,60	5,09%	3,79	0,05	3,23%

Fecha	ENAGÁS (ENG)			FCC		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	14,67		-	19,65		-
31/01/2011	15,41		5,04%	21,28	0,72	11,96%
28/02/2011	15,52		0,71%	23,13		8,69%
31/03/2011	15,92		2,58%	23,36		0,99%
29/04/2011	16,71		4,96%	22,93		-1,84%
31/05/2011	16,38		-1,97%	21,31		-7,06%
30/06/2011	16,73		2,14%	20,99		-1,50%
29/07/2011	15,9	0,53	-1,79%	19,17	0,72	-5,24%
31/08/2011	14,61		-8,11%	18,15		-5,32%
30/09/2011	13,81		-5,48%	18,6		2,48%
31/10/2011	14,27		3,33%	18,78		0,97%
30/11/2011	13,94		-2,31%	19,18		2,13%
30/12/2011	14,29	0,38	5,24%	20,04		4,48%
31/01/2012	15,3		7,07%	17,97	0,65	-7,09%
29/02/2012	15,4		0,65%	19,02		5,84%
30/03/2012	14,43		-6,30%	16,75		-11,93%
30/04/2012	13,28		-7,97%	12,91		-22,93%
31/05/2012	12,63		-4,89%	10,32		-20,06%
29/06/2012	14,37		13,78%	10,08		-2,33%
31/07/2012	14,1	0,61	2,37%	8,29	0,65	-11,31%
31/08/2012	14,77		4,75%	10		20,63%
28/09/2012	15,35		3,93%	10,15		1,50%
31/10/2012	15,34		-0,07%	10,08		-0,69%
30/11/2012	15,74		2,61%	9,14		-9,33%
31/12/2012	16,14	0,43	5,27%	9,37		2,52%
31/01/2013	17,43		7,99%	9,96		6,30%
28/02/2013	18,35		5,28%	8,94		-10,24%
28/03/2013	18,17		-0,98%	7,44		-16,78%
30/04/2013	20,23		11,34%	7,87		5,78%
31/05/2013	19,31		-4,55%	7,82		-0,64%
28/06/2013	18,99		-1,66%	7,16		-8,44%
31/07/2013	18,56	0,68	1,32%	10,39		45,11%
30/08/2013	17,18		-7,44%	13,47		29,64%
30/09/2013	18,12		5,47%	14,69		9,06%
31/10/2013	19,69		8,66%	16,98		15,59%
29/11/2013	19,37		-1,63%	15,56		-8,36%
31/12/2013	19	0,50	0,67%	16,18		3,98%

Fecha	FERROVIAL (FER)			GAMESA (GAM)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	7,56		-	5,8		-
31/01/2011	8,66		14,55%	5,6		-3,45%
28/02/2011	8,72		0,69%	6,39		14,11%
31/03/2011	8,85		1,49%	7,33		14,71%
29/04/2011	9,31		5,20%	6,35		-13,37%
31/05/2011	8,82	0,30	-2,04%	6,57		3,46%
30/06/2011	8,72		-1,13%	5,55		-15,53%
29/07/2011	8,9		2,06%	5,11	0,05	-7,03%
31/08/2011	8,72		-2,02%	4,21		-17,61%
30/09/2011	8,59		-1,49%	3,38		-19,71%
31/10/2011	9,2		7,10%	3,52		4,14%
30/11/2011	9,18	0,20	1,96%	3,26		-7,39%
30/12/2011	9,33		1,63%	3,21		-1,53%
31/01/2012	8,95		-4,07%	2,99		-6,85%
29/02/2012	9,5		6,15%	2,39		-20,07%
30/03/2012	8,62		-9,26%	2,38		-0,42%
30/04/2012	8,41		-2,44%	2,05		-13,87%
31/05/2012	7,6	0,25	-6,66%	1,49		-27,32%
29/06/2012	8,89		16,97%	1,41		-5,37%
31/07/2012	8,85		-0,45%	1,23	0,05	-9,22%
31/08/2012	9,39		6,10%	1,49		21,14%
28/09/2012	10,13		7,88%	1,64		10,07%
31/10/2012	10,9		7,60%	1,57		-4,27%
30/11/2012	11,4		4,59%	1,65		5,10%
31/12/2012	11,2	1,00	7,02%	1,66		0,61%
31/01/2013	11,81		5,45%	1,74		4,82%
28/02/2013	12,01		1,69%	2,31		32,76%
28/03/2013	12,38		3,08%	2,38		3,03%
30/04/2013	12,57		1,53%	2,97		24,79%
31/05/2013	12,48	0,25	1,27%	3,56		19,87%
28/06/2013	12,28		-1,60%	4,18		17,42%
31/07/2013	12,8		4,23%	5,55		32,78%
30/08/2013	12,55		-1,95%	5,3		-4,50%
30/09/2013	13,29		5,90%	6,45		21,70%
31/10/2013	14,05		5,72%	7,14		10,70%
29/11/2013	13,93		-0,85%	7,26		1,68%
31/12/2013	14,07	0,40	3,88%	7,58		4,41%

Fecha	GAS NATURAL FENOSA (GAS)			GRIFOLS (GRF)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	11,35		-	10,42		-
31/01/2011	12,07	0,35	9,43%	11,13		6,81%
28/02/2011	12,38		2,57%	11,8		6,02%
31/03/2011	13,26		7,11%	12,3		4,24%
29/04/2011	13,88		4,68%	13,37		8,70%
31/05/2011	13,2		-4,90%	14,19		6,13%
30/06/2011	14,2	0,45	10,98%	13,9		-2,04%
29/07/2011	14,04		-1,13%	15,25		9,71%
31/08/2011	12,74		-9,26%	14,33		-6,03%
30/09/2011	12,78		0,31%	14,04		-2,02%
31/10/2011	13,49		5,56%	13,49		-3,92%
30/11/2011	12,94		-4,08%	12,01		-10,97%
30/12/2011	13,27		2,55%	13		8,24%
31/01/2012	12,5	0,36	-3,09%	13,95		7,31%
29/02/2012	12,7		1,60%	15,6		11,83%
30/03/2012	11,98		-5,67%	16		2,56%
30/04/2012	10,52		-12,19%	19,03		18,94%
31/05/2012	8,78		-16,54%	18,35		-3,57%
29/06/2012	10,11	0,47	20,50%	19,99		8,94%
31/07/2012	10,03		-0,79%	25,34		26,76%
31/08/2012	9,81		-2,19%	22,4		-11,60%
28/09/2012	11,02		12,33%	25,7		14,73%
31/10/2012	11,97		8,62%	26,76		4,12%
30/11/2012	11,94		-0,25%	24,6		-8,07%
31/12/2012	13,58		13,74%	26,36		7,15%
31/01/2013	14,71	0,39	11,19%	25,05		-4,97%
28/02/2013	15,2		3,33%	27,29		8,94%
28/03/2013	13,81		-9,14%	28,93		6,01%
30/04/2013	15,9		15,13%	30,47		5,32%
31/05/2013	15,99		0,57%	28,26	0,01	-7,22%
28/06/2013	15,49		-3,13%	28,2	0,20	0,50%
31/07/2013	15,3	0,50	2,00%	31,71		12,45%
30/08/2013	14,82		-3,14%	30,39		-4,16%
30/09/2013	15,43		4,12%	30,35		-0,13%
31/10/2013	17,37		12,57%	30,21		-0,46%
29/11/2013	18,32		5,47%	33,66		11,42%
31/12/2013	18,7		2,07%	34,77		3,30%

Fecha	IBERDROLA (IBE)			INDITEX (ITX)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	5,76		-	11,14		-
31/01/2011	6,26		8,68%	11,04		-0,90%
28/02/2011	6,32		0,96%	10,49		-4,98%
31/03/2011	6,14		-2,85%	11,32		7,91%
29/04/2011	6,27		2,12%	12,11		6,98%
31/05/2011	6,15		-1,91%	12,63	0,16	5,62%
30/06/2011	6,13		-0,33%	12,61		-0,16%
29/07/2011	5,67	0,03	-7,01%	12,63		0,16%
31/08/2011	5,13	0,16	-6,70%	11,86		-6,10%
30/09/2011	5,07		-1,17%	12,87		8,52%
31/10/2011	5,26		3,75%	13,15		2,18%
30/11/2011	4,96		-5,70%	12,61	0,16	-2,89%
30/12/2011	4,84		-2,42%	12,66		0,40%
31/01/2012	4,5	0,15	-3,93%	13,34		5,37%
29/02/2012	4,44		-1,33%	13,86		3,90%
30/03/2012	4,26		-4,05%	14,36		3,61%
30/04/2012	3,52		-17,37%	13,59		-5,36%
31/05/2012	3,06		-13,07%	13,28	0,18	-0,96%
29/06/2012	3,72		21,57%	16,31		22,82%
31/07/2012	2,95	0,19	-15,59%	16,77		2,82%
31/08/2012	3,15		6,78%	17,68		5,43%
28/09/2012	3,53		12,06%	19,33		9,33%
31/10/2012	3,99		13,03%	19,69		1,86%
30/11/2012	3,82		-4,26%	21,08	0,18	7,97%
31/12/2012	4,2		9,95%	21,1		0,09%
31/01/2013	3,97	0,14	-2,14%	20,64		-2,18%
28/02/2013	3,79		-4,53%	20,53		-0,53%
28/03/2013	3,63		-4,22%	20,68		0,73%
30/04/2013	4,09		12,67%	20,41		-1,31%
31/05/2013	4,17		1,96%	19,16	0,22	-5,05%
28/06/2013	4,06		-2,64%	18,97		-0,99%
31/07/2013	4,15	0,16	6,16%	20,04		5,64%
30/08/2013	4,01		-3,37%	20,03		-0,05%
30/09/2013	4,3		7,23%	22,78		13,73%
31/10/2013	4,63		7,67%	24,2		6,23%
29/11/2013	4,69		1,30%	23,47	0,22	-2,11%
31/12/2013	4,64		-1,07%	23,96		2,09%

Fecha	INDRA (IDR)			JAZZTEL (JAZ)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	12,75		-	3,56		-
31/01/2011	13,75		7,84%	3,81		7,02%
28/02/2011	14,1		2,55%	3,86		1,31%
31/03/2011	14,15		0,35%	3,83		-0,78%
29/04/2011	15,32		8,27%	4,13		7,83%
31/05/2011	14,55		-5,03%	4,53		9,69%
30/06/2011	14,24		-2,13%	4,43		-2,21%
29/07/2011	13,83	0,68	1,90%	4,33		-2,26%
31/08/2011	12,49		-9,69%	3,38		-21,94%
30/09/2011	10,84		-13,21%	3,73		10,36%
31/10/2011	12,16		12,18%	4,18		12,06%
30/11/2011	10,45		-14,06%	4,13		-1,20%
30/12/2011	9,84		-5,84%	3,74		-9,44%
31/01/2012	10,07		2,34%	4,21		12,57%
29/02/2012	9,54		-5,26%	4,29		1,90%
30/03/2012	9,19		-3,67%	4,87		13,52%
30/04/2012	7,84		-14,69%	5,06		3,90%
31/05/2012	7,25		-7,53%	4,44		-12,25%
29/06/2012	7,33		1,10%	4,47		0,68%
31/07/2012	7,21	0,68	7,64%	4,19		-6,26%
31/08/2012	7,62		5,69%	4,46		6,44%
28/09/2012	7,54		-1,05%	4,64		4,04%
31/10/2012	8,8		16,71%	5,11		10,13%
30/11/2012	9,01		2,39%	5,19		1,57%
31/12/2012	10,02		11,21%	5,26		1,35%
31/01/2013	9,63		-3,89%	5,06		-3,80%
28/02/2013	9,57		-0,62%	5,9		16,60%
28/03/2013	9,3		-2,82%	5,94		0,68%
30/04/2013	10,21		9,78%	5,71		-3,87%
31/05/2013	10,18		-0,29%	5,4		-5,43%
28/06/2013	9,94		-2,36%	5,97		10,56%
31/07/2013	10,2	0,34	6,04%	6,82		14,24%
30/08/2013	10,97		7,55%	6,87		0,73%
30/09/2013	11,09		1,09%	8,03		16,89%
31/10/2013	12,17		9,74%	8,08		0,62%
29/11/2013	11,23		-7,72%	7,74		-4,21%
31/12/2013	12,16		8,28%	7,78		0,52%

Fecha	MAPFRE (MAP)			MEDIASET (TL5)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	2,1		-	8,36		-
31/01/2011	2,48		18,10%	9,18		9,81%
28/02/2011	2,69		8,47%	9,09		-0,98%
31/03/2011	2,66		-1,12%	8,08		-11,11%
29/04/2011	2,82		6,02%	7,59		-6,06%
31/05/2011	2,67		-5,32%	6,27	0,35	-12,78%
30/06/2011	2,55	0,08	-1,50%	6,02		-3,99%
29/07/2011	2,48		-2,75%	6,54		8,64%
31/08/2011	2,39		-3,63%	5,04		-22,94%
30/09/2011	2,34		-2,09%	4,29		-14,88%
31/10/2011	2,66		13,68%	4,8		11,89%
30/11/2011	2,48		-6,77%	4,38		-8,75%
30/12/2011	2,46	0,07	2,02%	4,41		0,68%
31/01/2012	2,54		3,25%	4,47		1,36%
29/02/2012	2,58		1,57%	4,48		0,22%
30/03/2012	2,41		-6,59%	4,3		-4,02%
30/04/2012	2,18		-9,54%	3,43	0,14	-16,98%
31/05/2012	1,57		-27,98%	3,42		-0,29%
29/06/2012	1,6	0,08	7,01%	3,83		11,99%
31/07/2012	1,48		-7,50%	4,06		6,01%
31/08/2012	1,93		30,41%	4,37		7,64%
28/09/2012	2,13		10,36%	4,22		-3,43%
31/10/2012	2,14		0,47%	4,14		-1,90%
30/11/2012	2,16		0,93%	4,53		9,42%
31/12/2012	2,32	0,04	9,26%	5,09		12,36%
31/01/2013	2,27		-2,16%	5,56		9,23%
28/02/2013	2,49		9,69%	5,39		-3,06%
28/03/2013	2,41		-3,21%	5,6		3,90%
30/04/2013	2,79		15,77%	5,96		6,43%
31/05/2013	2,79		0,00%	5,99		0,50%
28/06/2013	2,5	0,07	-7,89%	6,69		11,69%
31/07/2013	2,75		10,00%	7,81		16,74%
30/08/2013	2,55		-7,27%	7,39		-5,38%
30/09/2013	2,65		3,92%	8,51		15,16%
31/10/2013	2,96		11,70%	9		5,76%
29/11/2013	2,92		-1,35%	8,64		-4,00%
31/12/2013	3,11	0,05	8,22%	8,39		-2,89%

Fecha	OHL			RED ELÉCTRICA (REE)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	22,87		-	34,6		-
31/01/2011	23,46		2,58%	37,27	0,59	9,42%
28/02/2011	24,09		2,69%	39		4,64%
31/03/2011	25,49		5,81%	40,1		2,82%
29/04/2011	27,66		8,51%	43,08		7,43%
31/05/2011	25,95		-6,18%	41,97		-2,58%
30/06/2011	26,32	0,49	3,31%	41,51		-1,10%
29/07/2011	22,2		-15,65%	38,04	1,29	-5,25%
31/08/2011	19,39		-12,66%	34,27		-9,91%
30/09/2011	18,59		-4,13%	34,22		-0,15%
31/10/2011	20,27		9,04%	34,98		2,22%
30/11/2011	19,31		-4,74%	32,66		-6,63%
30/12/2011	19,38		0,36%	33,07		1,26%
31/01/2012	20,55		6,04%	35,17	0,68	8,41%
29/02/2012	23,14		12,60%	37,9		7,76%
30/03/2012	22,32		-3,54%	36,69		-3,19%
30/04/2012	19,09		-14,47%	32,89		-10,36%
31/05/2012	15,18		-20,48%	29,93		-9,00%
29/06/2012	16,3	0,56	11,07%	34,41		14,97%
31/07/2012	16		-1,84%	32,23	1,54	-1,86%
31/08/2012	16,67		4,19%	34,42		6,79%
28/09/2012	17,95		7,68%	36,9		7,21%
31/10/2012	20,19		12,48%	36,18		-1,95%
30/11/2012	19,94		-1,24%	35,63		-1,52%
31/12/2012	21,95		10,08%	37,3		4,69%
31/01/2013	22,35		1,82%	41,01	0,68	11,77%
28/02/2013	25,55		14,32%	42,38		3,34%
28/03/2013	25,64		0,35%	39,25		-7,39%
30/04/2013	28,08		9,52%	40,39		2,90%
31/05/2013	28,46		1,35%	41		1,51%
28/06/2013	26,15	0,65	-5,83%	42,25		3,05%
31/07/2013	28,66		9,60%	41,96	1,69	3,31%
30/08/2013	26		-9,28%	39,25		-6,46%
30/09/2013	28,04		7,85%	42,07		7,18%
31/10/2013	30,9		10,20%	45,91		9,13%
29/11/2013	29,17		-5,60%	47,18		2,77%
31/12/2013	29,45		0,96%	48,5		2,80%

Fecha	REPSOL (REP)			SACYR (SCYR)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	21,19		-	4,76		-
31/01/2011	22,98	0,53	10,95%	6,95		46,01%
28/02/2011	24,33		5,87%	8,05		15,83%
31/03/2011	24,18		-0,62%	8,2		1,86%
29/04/2011	24,11		-0,29%	8,53		4,02%
31/05/2011	23,68		-1,78%	7,5	0,10	-10,90%
30/06/2011	23,89		0,89%	6,48		-13,60%
29/07/2011	22,03	0,53	-5,57%	5,78		-10,80%
31/08/2011	20,07		-8,90%	5,35		-7,44%
30/09/2011	19,98		-0,45%	4,23		-20,93%
31/10/2011	21,9		9,61%	5,09		20,33%
30/11/2011	22,4		2,28%	4,46		-12,38%
30/12/2011	23,74		5,98%	3,97		-10,99%
31/01/2012	21	0,58	-9,10%	3,65		-8,06%
29/02/2012	19,57		-6,81%	3		-17,81%
30/03/2012	18,81		-3,88%	2,28		-24,00%
30/04/2012	14,45		-23,18%	1,36		-40,35%
31/05/2012	12,08		-16,40%	1,26		-7,35%
29/06/2012	12,64		4,64%	1,45		15,08%
31/07/2012	13,01	0,55	7,28%	1,3		-10,34%
31/08/2012	14,64		12,53%	1,36		4,62%
28/09/2012	15,09		3,07%	1,67		22,79%
31/10/2012	15,42		2,19%	1,53		-8,38%
30/11/2012	16,31		5,77%	1,37		-10,46%
31/12/2012	15,34		-5,95%	1,65		20,44%
31/01/2013	16,45	0,47	10,30%	1,69		2,42%
28/02/2013	16,31		-0,85%	1,69		0,00%
28/03/2013	15,85		-2,82%	1,41		-16,57%
30/04/2013	17,8		12,30%	1,58		12,06%
31/05/2013	17,63		-0,96%	2,14		35,44%
28/06/2013	16,21	0,04	-7,83%	2,41		12,62%
31/07/2013	17,99	0,45	13,76%	2,78		15,35%
30/08/2013	17,56		-2,39%	2,7		-2,88%
30/09/2013	18,33		4,38%	3,41		26,30%
31/10/2013	19,78		7,91%	3,97		16,42%
29/11/2013	19,33		-2,28%	3,92		-1,26%
31/12/2013	18,32		-5,23%	3,77		-3,83%

Fecha	TÉCNICAS REUNIDAS (TRE)			TELEFÓNICA (TEF)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	47,4		-	17		-
31/01/2011	45,06	0,66	-3,54%	18,35		7,94%
28/02/2011	41,67		-7,52%	18,4		0,27%
31/03/2011	42,42		1,80%	17,67		-3,97%
29/04/2011	42,38		-0,09%	18,15		2,72%
31/05/2011	39,15		-7,62%	16,88	0,75	-2,87%
30/06/2011	35,34		-9,73%	16,84		-0,24%
29/07/2011	30,8	0,68	-10,92%	15,55		-7,66%
31/08/2011	27,7		-10,06%	14,51		-6,69%
30/09/2011	24,09		-13,03%	14,43		-0,55%
31/10/2011	29,26		21,46%	15,38		6,58%
30/11/2011	26,89		-8,10%	13,98	0,77	-4,10%
30/12/2011	27,77		3,27%	13,39		-4,22%
31/01/2012	27,71	0,67	2,20%	13,33		-0,45%
29/02/2012	30,23		9,09%	12,81		-3,90%
30/03/2012	31,24		3,34%	12,29		-4,06%
30/04/2012	29,43		-5,79%	11,01		-10,41%
31/05/2012	28,95		-1,63%	8,94	0,83	-11,26%
29/06/2012	32,89		13,61%	10,37		16,00%
31/07/2012	34,38	0,67	6,57%	9,23		-10,99%
31/08/2012	35,55		3,40%	10,04		8,78%
28/09/2012	36,18		1,77%	10,38		3,39%
31/10/2012	37,89		4,73%	10,16		-2,12%
30/11/2012	35,8		-5,52%	10,09		-0,69%
31/12/2012	35,09		-1,98%	10,19		0,99%
31/01/2013	37,47	0,67	8,69%	10,68		4,81%
28/02/2013	38,59		2,99%	10		-6,37%
28/03/2013	36,56		-5,26%	10,49		4,90%
30/04/2013	36,77		0,57%	11,14		6,20%
31/05/2013	37,34		1,55%	10,6		-4,85%
28/06/2013	35,3		-5,46%	9,85		-7,08%
31/07/2013	34,28	0,73	-0,82%	10,72		8,83%
30/08/2013	33,05		-3,59%	10,28		-4,10%
30/09/2013	33,85		2,42%	11,51		11,96%
31/10/2013	37,95		12,11%	12,99		12,86%
29/11/2013	39,91		5,16%	12,11	0,35	-4,08%
31/12/2013	39,49		-1,05%	11,84		-2,23%

Fecha	VISCOFAN (VIS)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	28,76		-
31/01/2011	26,54		-7,72%
28/02/2011	25,72		-3,09%
31/03/2011	28		8,86%
29/04/2011	29,77		6,32%
31/05/2011	27,84	0,20	-5,81%
30/06/2011	27,42	0,29	-0,47%
29/07/2011	25,95		-5,36%
31/08/2011	26,36		1,58%
30/09/2011	27,03		2,54%
31/10/2011	27,81		2,89%
30/11/2011	27,22		-2,12%
30/12/2011	28,66	0,36	6,61%
31/01/2012	29,47		2,83%
29/02/2012	31,15		5,70%
30/03/2012	33,55		7,70%
30/04/2012	34,15		1,79%
31/05/2012	32,71		-4,22%
29/06/2012	33,93	0,63	5,66%
31/07/2012	37,29		9,90%
31/08/2012	35,21		-5,58%
28/09/2012	35,62		1,16%
31/10/2012	37,34		4,83%
30/11/2012	37,6		0,70%
31/12/2012	42,81	0,40	14,92%
31/01/2013	38,52		-10,02%
28/02/2013	40,14		4,21%
28/03/2013	40,91		1,92%
30/04/2013	39,44		-3,59%
31/05/2013	38,02		-3,60%
28/06/2013	38,49	0,69	3,05%
31/07/2013	38,72		0,60%
30/08/2013	39,47		1,94%
30/09/2013	42,27		7,09%
31/10/2013	39,1		-7,50%
29/11/2013	39,82		1,84%
31/12/2013	41,35	0,41	4,87%

Anexo 2
Matriz de correlaciones de los 31 activos del IBEX 35 (1/2)

	ABE	ANA	ACS	AMS	MTS	POP	SAB	BBVA	SAN	FER	BKT	BME	CABK	ENG
ABE	1													
ANA	0,5009324	1												
ACS	0,5176036	0,4658344	1											
AMS	0,2152867	-0,108552	0,3433192	1										
MTS	0,430784	0,2136989	0,3097615	0,4709373	1									
POP	0,3761832	0,2070043	0,3999837	0,1545482	0,2246678	1								
SAB	0,3372738	0,338127	0,5565951	-0,008738	0,156578	0,571337	1							
BBVA	0,688494	0,6171916	0,7454488	0,2824376	0,511038	0,5214214	0,6404269	1						
SAN	0,5901967	0,5465238	0,7915021	0,2117924	0,4646318	0,5177728	0,6853155	0,9099326	1					
FER	0,4885849	0,6282721	0,6200029	0,3709541	0,3569555	0,2984473	0,4229242	0,7748891	0,6794513	1				
BKT	0,4916546	0,2722821	0,4108954	0,1148282	0,4193468	0,6283346	0,5240628	0,6137259	0,5705737	0,542337	1			
BME	0,636755	0,5401482	0,5531796	0,1231431	0,3783286	0,5926021	0,6561225	0,7705796	0,7153152	0,6089609	0,6228508	1		
CABK	0,5950506	0,4532257	0,4896049	0,1974984	0,4639729	0,6108009	0,6602801	0,8421678	0,7493108	0,6623106	0,6769522	0,7524405	1	
ENG	0,6998176	0,4726383	0,5634289	0,3804045	0,467388	0,2740527	0,3530608	0,7589877	0,6640726	0,6433328	0,4718958	0,5913291	0,6538396	1
FCC	0,4256316	0,4250746	0,4537998	-0,073836	0,3238784	0,7081335	0,6087383	0,5881334	0,5939509	0,3595998	0,5660246	0,667286	0,5857161	0,2346097
GAM	0,5329214	0,1302853	0,4051727	0,1985682	0,2481896	0,394947	0,3201726	0,3415404	0,3048983	0,1955549	0,3762742	0,3343592	0,4130976	0,3665914
ITX	0,404789	0,2970874	0,4849336	0,1971691	0,2666587	0,0958271	0,3048342	0,4847876	0,5709708	0,4480273	0,3158632	0,2918657	0,3767009	0,4915077
GAS	0,6810512	0,6542582	0,5101411	0,2441916	0,4783859	0,3108038	0,2733007	0,7188507	0,5836826	0,6892827	0,4546084	0,5987248	0,5891236	0,7677504
IBE	0,6771661	0,7238421	0,779351	0,2730771	0,3454649	0,3633802	0,4122965	0,7845785	0,7496861	0,7199298	0,3768451	0,6165813	0,5693084	0,6212624
GRF	0,0304536	-0,215343	-0,232646	0,4116779	0,1829185	0,0397841	-0,236508	-0,028738	-0,074756	0,0651123	-0,030565	-0,114141	-0,029301	0,1428792
TEF	0,6733523	0,6386712	0,6801652	0,2682436	0,3892052	0,5080975	0,5217959	0,78895	0,767142	0,694762	0,5565806	0,7419746	0,7122342	0,6874359
REP	0,5682834	0,4548701	0,4227535	-0,034956	0,381965	0,4667218	0,6249052	0,705423	0,6374346	0,5300188	0,5504247	0,6590748	0,7546562	0,6000879
IDR	0,4423354	0,3983801	0,5121277	0,4050133	0,5292322	0,0862319	0,2663566	0,5506871	0,441514	0,4588378	0,238909	0,5396022	0,4160514	0,4897093
JAZ	0,5097331	0,018749	0,1686365	0,2136487	0,2409358	0,0954734	-0,020287	0,2623568	0,1991805	0,14538	0,2767015	0,1753887	0,2589793	0,1685441
MAP	0,7472266	0,4995858	0,6327818	0,2980227	0,3083792	0,5160428	0,6037834	0,7045261	0,6538938	0,6332083	0,5410485	0,6936421	0,6426767	0,623065
OHL	0,8053955	0,3586954	0,5658708	0,4476298	0,5377164	0,2939116	0,2029995	0,6646609	0,5871191	0,6083606	0,4390971	0,5074028	0,5585485	0,7294189
REE	0,7151699	0,4725692	0,5785914	0,2963449	0,4620434	0,42207	0,3438729	0,744192	0,7493856	0,6385858	0,6630279	0,6319809	0,6438783	0,8037008
SCYR	0,4791076	0,5664747	0,6355321	0,1884409	0,355551	0,4048512	0,3363368	0,6232932	0,5892132	0,5809371	0,5222214	0,5283021	0,5544861	0,4751467
TL5	0,3480453	0,2684436	0,5057802	0,3782781	0,5490253	0,1613754	0,2908148	0,6173415	0,5648188	0,5042644	0,3995004	0,478182	0,4182469	0,5963565
TRE	0,417743	0,177662	0,325713	0,5663871	0,6572751	0,1814269	0,128401	0,4980221	0,4481781	0,4069601	0,3321476	0,2978276	0,4390876	0,5348931
VIS	0,1360413	-0,231763	0,0136083	0,3024456	0,1751357	-0,2148	-0,188798	-0,053896	-0,102261	-0,026809	-0,097686	-0,100907	-0,236495	-0,001974

Matriz de correlaciones de los 31 activos del IBEX 35 (2/2)

	FCC	GAM	ITX	GAS	IBE	GRF	TEF	REP	IDR	JAZ	MAP	OHL	REE	SCYR	TL5	TRE	VIS
ABE																	
ANA																	
ACS																	
AMS																	
MTS																	
POP																	
SAB																	
BBVA																	
SAN																	
FER																	
BKT																	
BME																	
CABK																	
ENG																	
FCC	1																
GAM	0,409675	1															
ITX	0,1581656	0,075858	1														
GAS	0,3602851	0,3012863	0,3947347	1													
IBE	0,4770654	0,3797515	0,4919688	0,7959261	1												
GRF	-0,183677	-0,053705	0,1102872	0,12481	-0,077758	1											
TEF	0,5313388	0,382357	0,5751318	0,6240127	0,7923942	-0,157912	1										
REP	0,6187355	0,5156455	0,275012	0,5931715	0,5623914	-0,139274	0,6622725	1									
IDR	0,412395	0,3494989	0,1880188	0,503066	0,5225777	0,0789319	0,4199686	0,4866639	1								
JAZ	0,1882946	0,3938209	0,396207	0,1166293	0,2679239	0,1090314	0,3310064	0,1638554	0,2578431	1							
MAP	0,5358324	0,5424812	0,2411787	0,5905687	0,6755905	-0,02157	0,6899479	0,6562884	0,5518357	0,3314605	1						
OHL	0,3828358	0,4704678	0,4254985	0,7291906	0,6955744	0,1364121	0,6251626	0,5579195	0,5610617	0,4528765	0,6972744	1					
REE	0,3850064	0,3619592	0,5104506	0,7451022	0,6716216	0,102735	0,6786321	0,5200344	0,3861947	0,3319644	0,6427635	0,7303239	1				
SCYR	0,4587837	0,5278097	0,1446613	0,5525306	0,6538878	-0,120718	0,5646519	0,5267685	0,5165996	0,1318372	0,5502752	0,452208	0,6068245	1			
TL5	0,3369819	0,437581	0,2902937	0,4065437	0,4342037	0,0265351	0,5401852	0,518635	0,5526799	0,2742093	0,3907354	0,4070291	0,5198719	0,5557817	1		
TRE	0,120891	0,2041169	0,3399504	0,438383	0,3701272	0,1244075	0,4014441	0,3546584	0,4112796	0,1506783	0,3250687	0,5569173	0,5498825	0,3057451	0,4303963	1	
VIS	-0,179943	-0,100646	0,2850413	0,0706446	-0,003703	0,3832095	-0,177521	-0,244338	0,11677	0,162251	-0,091128	0,2656898	-0,0123	-0,169738	-0,03812	0,1602518	1

Anexo 3

Cotizaciones, dividendos y rentabilidades mensuales de los 10 títulos seleccionados y del IBEX 35

Fecha	ACCIONA (ANA)			ACS		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	53,11		-	35,2		-
31/01/2011	63,19	1,07	20,99%	37,7		7,10%
28/02/2011	70,49		11,55%	33,25	0,90	-9,42%
31/03/2011	76,68		8,78%	33,08		-0,51%
29/04/2011	78,54		2,43%	33,97		2,69%
31/05/2011	75,36		-4,05%	33,37		-1,77%
30/06/2011	73,16		-2,92%	32,49		-2,64%
29/07/2011	72,27	2,03	1,56%	29,49	1,15	-5,69%
31/08/2011	65,26		-9,70%	28,57		-3,12%
30/09/2011	63,65		-2,47%	26,59		-6,93%
31/10/2011	68,63		7,82%	27,45		3,23%
30/11/2011	68,85		0,32%	24,03		-12,46%
30/12/2011	66,73		-3,08%	22,9		-4,70%
31/01/2012	61,36	1,03	-6,50%	23,58		2,97%
29/02/2012	59,05		-3,76%	22,34	0,90	-1,44%
30/03/2012	52,36		-11,33%	19,19		-14,10%
30/04/2012	46,4		-11,38%	13,85		-27,83%
31/05/2012	42,45		-8,51%	13,44		-2,96%
29/06/2012	47,1	1,97	15,59%	16,89		25,67%
31/07/2012	35,49		-24,65%	12,85	1,07	-17,58%
31/08/2012	37,18		4,76%	15,79		22,88%
28/09/2012	44,29		19,12%	16,03		1,52%
31/10/2012	47,34		6,89%	16,47		2,74%
30/11/2012	49,85		5,30%	16,44		-0,18%
31/12/2012	56,21		12,76%	19,04		15,82%
31/01/2013	59,22	0,90	6,96%	17,67		-7,20%
28/02/2013	47,04		-20,57%	18,2		3,00%
28/03/2013	42,53		-9,59%	18,21		0,05%
30/04/2013	49,75		16,98%	19,53		7,25%
31/05/2013	48,09		-3,34%	21,65		10,86%
28/06/2013	40,55		-15,68%	20,35		-6,00%
31/07/2013	35,33	1,75	-8,56%	21,6	1,11	11,60%
30/08/2013	38,72		9,60%	21,31		-1,34%
30/09/2013	42,06		8,63%	23,5		10,28%
31/10/2013	46,73		11,10%	24,18		2,89%
29/11/2013	45		-3,70%	23,78		-1,65%
31/12/2013	41,77		-7,18%	25,02		5,21%

Fecha	AMADEUS (AMS)			BANCO SANTANDER (SAN)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	15,35		-	2,96		-
31/01/2011	15,32		-0,20%	3,49		17,91%
28/02/2011	14,09		-8,03%	3,15		-9,74%
31/03/2011	13,5		-4,19%	3,09		-1,90%
29/04/2011	14,14		4,74%	2,99	0,06	-1,29%
31/05/2011	14,26		0,85%	2,98		-0,33%
30/06/2011	14,36		0,70%	2,85		-4,36%
29/07/2011	14,05	0,30	-0,07%	2,61		-8,42%
31/08/2011	13,91		-1,00%	2,75		5,36%
30/09/2011	12,06		-13,30%	2,69	0,05	-0,36%
31/10/2011	13,66		13,27%	2,61		-2,97%
30/11/2011	12,53		-8,27%	2,49		-4,60%
30/12/2011	12,54		0,08%	2,93		17,67%
31/01/2012	13,1	0,18	5,90%	2,82		-3,75%
29/02/2012	14,3		9,16%	2,43		-13,83%
30/03/2012	14,15		-1,05%	2,04		-16,05%
30/04/2012	15,44		9,12%	1,78		-12,75%
31/05/2012	14,82		-4,02%	1,31		-26,40%
29/06/2012	16,7		12,69%	1,53	0,05	20,61%
31/07/2012	17,59	0,20	6,53%	1,55		1,31%
31/08/2012	17,76		0,97%	2,3		48,39%
28/09/2012	18,13		2,08%	2,09		-9,13%
31/10/2012	19,1		5,35%	1,88		-10,05%
30/11/2012	17,95		-6,02%	2,15		14,36%
31/12/2012	19,05		6,13%	1,98		-7,91%
31/01/2013	18,48	0,25	-1,68%	1,97		-0,51%
28/02/2013	19,6		6,06%	1,67		-15,23%
28/03/2013	21,08		7,55%	1,43		-14,37%
30/04/2013	22,42		6,36%	1,58		10,49%
31/05/2013	23,51		4,86%	1,46	0,21	5,70%
28/06/2013	24,56		4,47%	1,28		-12,33%
31/07/2013	25,82	0,25	6,15%	1,54		20,31%
30/08/2013	24,44		-5,34%	1,74		12,99%
30/09/2013	26,2		7,20%	1,86		6,90%
31/10/2013	27,35		4,39%	1,89		1,61%
29/11/2013	27,57		0,80%	1,9		0,53%
31/12/2013	31,11		12,84%	1,9		0,00%

Fecha	BBVA			GRIFOLS (GRF)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	7,6		-	10,42		-
31/01/2011	8,97	0,09	19,21%	11,13		6,81%
28/02/2011	8,95		-0,22%	11,8		6,02%
31/03/2011	8,56		-4,36%	12,3		4,24%
29/04/2011	8,66	0,15	2,92%	13,37		8,70%
31/05/2011	8,12		-6,24%	14,19		6,13%
30/06/2011	8,07		-0,62%	13,9		-2,04%
29/07/2011	7,35	0,10	-7,68%	15,25		9,71%
31/08/2011	6,34		-13,74%	14,33		-6,03%
30/09/2011	6,18		-2,52%	14,04		-2,02%
31/10/2011	6,56	0,10	7,77%	13,49		-3,92%
30/11/2011	6,27		-4,42%	12,01		-10,97%
30/12/2011	6,68		6,54%	13		8,24%
31/01/2012	6,67	0,10	1,35%	13,95		7,31%
29/02/2012	6,73		0,90%	15,6		11,83%
30/03/2012	5,97		-11,29%	16		2,56%
30/04/2012	5,11		-14,41%	19,03		18,94%
31/05/2012	4,57	0,12	-8,22%	18,35		-3,57%
29/06/2012	5,63		23,19%	19,99		8,94%
31/07/2012	5,32	0,10	-3,73%	25,34		26,76%
31/08/2012	6,07		14,10%	22,4		-11,60%
28/09/2012	6,11		0,66%	25,7		14,73%
31/10/2012	6,44	0,10	7,04%	26,76		4,12%
30/11/2012	6,52		1,24%	24,6		-8,07%
31/12/2012	6,96		6,75%	26,36		7,15%
31/01/2013	7,33	0,10	6,75%	25,05		-4,97%
28/02/2013	7,43		1,36%	27,29		8,94%
28/03/2013	6,76		-9,02%	28,93		6,01%
30/04/2013	7,37	0,12	10,80%	30,47		5,32%
31/05/2013	7,25		-1,63%	28,26	0,01	-7,22%
28/06/2013	6,45		-11,03%	28,2	0,20	0,50%
31/07/2013	7,12	0,10	11,94%	31,71		12,45%
30/08/2013	7,22		1,40%	30,39		-4,16%
30/09/2013	8,26		14,40%	30,35		-0,13%
31/10/2013	8,63	0,10	5,69%	30,21		-0,46%
29/11/2013	8,79		1,85%	33,66		11,42%
31/12/2013	8,95		1,82%	34,77		3,30%

Fecha	IBERDROLA (IBE)			REPSOL (REP)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	5,76		-	21,19		-
31/01/2011	6,26		8,68%	22,98	0,53	10,95%
28/02/2011	6,32		0,96%	24,33		5,87%
31/03/2011	6,14		-2,85%	24,18		-0,62%
29/04/2011	6,27		2,12%	24,11		-0,29%
31/05/2011	6,15		-1,91%	23,68		-1,78%
30/06/2011	6,13		-0,33%	23,89		0,89%
29/07/2011	5,67	0,03	-7,01%	22,03	0,53	-5,57%
31/08/2011	5,13	0,16	-6,70%	20,07		-8,90%
30/09/2011	5,07		-1,17%	19,98		-0,45%
31/10/2011	5,26		3,75%	21,9		9,61%
30/11/2011	4,96		-5,70%	22,4		2,28%
30/12/2011	4,84		-2,42%	23,74		5,98%
31/01/2012	4,5	0,15	-3,93%	21	0,58	-9,10%
29/02/2012	4,44		-1,33%	19,57		-6,81%
30/03/2012	4,26		-4,05%	18,81		-3,88%
30/04/2012	3,52		-17,37%	14,45		-23,18%
31/05/2012	3,06		-13,07%	12,08		-16,40%
29/06/2012	3,72		21,57%	12,64		4,64%
31/07/2012	2,95	0,19	-15,59%	13,01	0,55	7,28%
31/08/2012	3,15		6,78%	14,64		12,53%
28/09/2012	3,53		12,06%	15,09		3,07%
31/10/2012	3,99		13,03%	15,42		2,19%
30/11/2012	3,82		-4,26%	16,31		5,77%
31/12/2012	4,2		9,95%	15,34		-5,95%
31/01/2013	3,97	0,14	-2,14%	16,45	0,47	10,30%
28/02/2013	3,79		-4,53%	16,31		-0,85%
28/03/2013	3,63		-4,22%	15,85		-2,82%
30/04/2013	4,09		12,67%	17,8		12,30%
31/05/2013	4,17		1,96%	17,63		-0,96%
28/06/2013	4,06		-2,64%	16,21	0,04	-7,83%
31/07/2013	4,15	0,16	6,16%	17,99	0,45	13,76%
30/08/2013	4,01		-3,37%	17,56		-2,39%
30/09/2013	4,3		7,23%	18,33		4,38%
31/10/2013	4,63		7,67%	19,78		7,91%
29/11/2013	4,69		1,30%	19,33		-2,28%
31/12/2013	4,64		-1,07%	18,32		-5,23%

Fecha	TELEFONICA (TEF)			VISCOFAN (VIS)		
	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual	Cotización al cierre	Dividendos por acción	Rentabilidad mensual
03/01/2011	17		-	28,76		-
31/01/2011	18,35		7,94%	26,54		-7,72%
28/02/2011	18,4		0,27%	25,72		-3,09%
31/03/2011	17,67		-3,97%	28		8,86%
29/04/2011	18,15		2,72%	29,77		6,32%
31/05/2011	16,88	0,75	-2,87%	27,84	0,20	-5,81%
30/06/2011	16,84		-0,24%	27,42	0,29	-0,47%
29/07/2011	15,55		-7,66%	25,95		-5,36%
31/08/2011	14,51		-6,69%	26,36		1,58%
30/09/2011	14,43		-0,55%	27,03		2,54%
31/10/2011	15,38		6,58%	27,81		2,89%
30/11/2011	13,98	0,77	-4,10%	27,22		-2,12%
30/12/2011	13,39		-4,22%	28,66	0,36	6,61%
31/01/2012	13,33		-0,45%	29,47		2,83%
29/02/2012	12,81		-3,90%	31,15		5,70%
30/03/2012	12,29		-4,06%	33,55		7,70%
30/04/2012	11,01		-10,41%	34,15		1,79%
31/05/2012	8,94	0,83	-11,26%	32,71		-4,22%
29/06/2012	10,37		16,00%	33,93	0,63	5,66%
31/07/2012	9,23		-10,99%	37,29		9,90%
31/08/2012	10,04		8,78%	35,21		-5,58%
28/09/2012	10,38		3,39%	35,62		1,16%
31/10/2012	10,16		-2,12%	37,34		4,83%
30/11/2012	10,09		-0,69%	37,6		0,70%
31/12/2012	10,19		0,99%	42,81	0,40	14,92%
31/01/2013	10,68		4,81%	38,52		-10,02%
28/02/2013	10		-6,37%	40,14		4,21%
28/03/2013	10,49		4,90%	40,91		1,92%
30/04/2013	11,14		6,20%	39,44		-3,59%
31/05/2013	10,6		-4,85%	38,02		-3,60%
28/06/2013	9,85		-7,08%	38,49	0,69	3,05%
31/07/2013	10,72		8,83%	38,72		0,60%
30/08/2013	10,28		-4,10%	39,47		1,94%
30/09/2013	11,51		11,96%	42,27		7,09%
31/10/2013	12,99		12,86%	39,1		-7,50%
29/11/2013	12,11	0,35	-4,08%	39,82		1,84%
31/12/2013	11,84		-2,23%	41,35	0,41	4,87%

Fecha	IBEX 35	
	Cotización al cierre	Rentabilidad mensual
03/01/2011	9.888,30	-
31/01/2011	10.806,00	9,28%
28/02/2011	10.850,80	0,41%
31/03/2011	10.576,50	-2,53%
29/04/2011	10.878,90	2,86%
31/05/2011	10.476,00	-3,70%
30/06/2011	10.350,80	-1,20%
29/07/2011	9.630,70	-6,96%
31/08/2011	8.718,60	-9,47%
30/09/2011	8.546,60	-1,97%
31/10/2011	8.954,90	4,78%
30/11/2011	8.449,50	-5,64%
30/12/2011	8.566,30	1,38%
31/01/2012	8.509,20	-0,67%
29/02/2012	8.465,90	-0,51%
30/03/2012	8.008,00	-5,41%
30/04/2012	7.011,00	-12,45%
31/05/2012	6.089,80	-13,14%
29/06/2012	7.102,20	16,62%
31/07/2012	6.738,10	-5,13%
31/08/2012	7.420,50	10,13%
28/09/2012	7.708,50	3,88%
31/10/2012	7.842,90	1,74%
30/11/2012	7.934,60	1,17%
31/12/2012	8.167,50	2,94%
31/01/2013	8.362,30	2,39%
28/02/2013	8.230,30	-1,58%
28/03/2013	7.920,00	-3,77%
30/04/2013	8.419,00	6,30%
31/05/2013	8.320,60	-1,17%
28/06/2013	7.762,70	-6,71%
31/07/2013	8.433,40	8,64%
30/08/2013	8.290,50	-1,69%
30/09/2013	9.186,10	10,80%
31/10/2013	9.907,90	7,86%
29/11/2013	9.837,60	-0,71%
31/12/2013	9.916,70	0,80%

Anexo 4

Matriz de correlaciones completa de los 10 títulos seleccionados

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
ACS	1	0,3433192	0,4658344	0,7454488	-0,232646	0,779351	0,4227535	0,7915021	0,6801652	0,0136083
AMS	0,3433192	1	-0,108552	0,2824376	0,4116779	0,2730771	-0,034956	0,2117924	0,2682436	0,3024456
ANA	0,4658344	-0,108552	1	0,6171916	-0,215343	0,7238421	0,4548701	0,5465238	0,6386712	-0,231763
BBVA	0,7454488	0,2824376	0,6171916	1	-0,028738	0,7845785	0,705423	0,9099326	0,78895	-0,053896
GRF	-0,232646	0,4116779	-0,215343	-0,028738	1	-0,077758	-0,139274	-0,074756	-0,157912	0,3832095
IBE	0,779351	0,2730771	0,7238421	0,7845785	-0,077758	1	0,5623914	0,7496861	0,7923942	-0,003703
REP	0,4227535	-0,034956	0,4548701	0,705423	-0,139274	0,5623914	1	0,6374346	0,6622725	-0,244338
SAN	0,7915021	0,2117924	0,5465238	0,9099326	-0,074756	0,7496861	0,6374346	1	0,767142	-0,102261
TEF	0,6801652	0,2682436	0,6386712	0,78895	-0,157912	0,7923942	0,6622725	0,767142	1	-0,177521
VIS	0,0136083	0,3024456	-0,231763	-0,053896	0,3832095	-0,003703	-0,244338	-0,102261	-0,177521	1

Anexo 5

Matriz de varianzas y covarianzas de rentabilidades mensuales completa

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
ACS	0,0103462	0,0021312	0,0051489	0,0066404	-0,001947	0,00634753	0,0034364	0,0067349	0,0046665	0,0000755
AMS	0,0021312	0,0037246	-0,00072	0,0015096	0,0020677	0,00133447	-0,00017	0,0010813	0,0011042	0,00100621
ANA	0,0051489	-0,00072	0,0118083	0,0058735	-0,001926	0,00629825	0,0039501	0,0049681	0,0046813	-0,0013729
BBVA	0,0066404	0,0015096	0,0058735	0,0076696	-0,000207	0,00550179	0,004937	0,0066663	0,0046604	-0,0002573
GRF	-0,001947	0,0020677	-0,001926	-0,000207	0,006773	-0,0005124	-0,000916	-0,000515	-0,0008766	0,00171921
IBE	0,0063475	0,0013345	0,0062982	0,0055018	-0,000512	0,00641157	0,0035987	0,0050217	0,0042797	-0,0000162
REP	0,0034364	-0,00017	0,0039501	0,004937	-0,000916	0,00359875	0,0063865	0,0042614	0,0035699	-0,0010644
SAN	0,0067349	0,0010813	0,0049681	0,0066663	-0,000515	0,00502168	0,0042614	0,006998	0,0043287	-0,0004663
TEF	0,0046665	0,0011042	0,0046813	0,0046604	-0,000877	0,00427971	0,0035699	0,0043287	0,0045497	-0,0006527
VIS	0,0000755	0,0010062	-0,001373	-0,000257	0,0017192	-0,0000162	-0,001064	-0,000466	-0,0006527	0,00297166

Anexo 6

Matriz de varianzas y covarianzas de rentabilidades anualizadas completa

	ACS	AMS	ANA	BBVA	GRF	IBE	REP	SAN	TEF	VIS
ACS	0,124154	0,0255747	0,0617869	0,0796846	-0,02337	0,0761704	0,0412372	0,0808185	0,0559986	0,0009055
AMS	0,0255747	0,0446956	-0,008639	0,0181147	0,0248126	0,0160136	-0,002046	0,0129754	0,0132508	0,0120745
ANA	0,0617869	-0,008639	0,1416996	0,0704823	-0,02311	0,0755789	0,0474016	0,0596172	0,0561751	-0,016475
BBVA	0,0796846	0,0181147	0,0704823	0,0920348	-0,002486	0,0660215	0,0592443	0,0799951	0,0559252	-0,003088
GRF	-0,02337	0,0248126	-0,02311	-0,002486	0,0812765	-0,006149	-0,010992	-0,006176	-0,010519	0,0206305
IBE	0,0761704	0,0160136	0,0755789	0,0660215	-0,006149	0,0769388	0,043185	0,0602602	0,0513566	-0,000194
REP	0,0412372	-0,002046	0,0474016	0,0592443	-0,010992	0,043185	0,0766377	0,051137	0,0428391	-0,012773
SAN	0,0808185	0,0129754	0,0596172	0,0799951	-0,006176	0,0602602	0,051137	0,0839763	0,0519441	-0,005596
TEF	0,0559986	0,0132508	0,0561751	0,0559252	-0,010519	0,0513566	0,0428391	0,0519441	0,0545964	-0,007833
VIS	0,0009055	0,0120745	-0,016475	-0,003088	0,0206305	-0,000194	-0,012773	-0,005596	-0,007833	0,0356599