



Treball final de grau

**GRAU DE
MATEMÀTIQUES**

**Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona**

TEORIES TOPOLÒGIQUES QUÀNTIQUES DE CAMPS EN DIMENSIÓ 2

Armajac Raventós i Pujol

Director: Ignasi Mundet Riera

Realitzat a: Departament d'Àlgebra i
Geometria UB

Barcelona, 29 de gener de 2015

Pròleg

La idea inicial d'aquest treball és concebuda després d'haver cursat l'assignatura de *Topologia Algebraica*. En el curs es construïren ponts entre el món topològic i l'algebraic, fet que provocà l'augment del meu interès cap a visions i tractaments transversals dins les matemàtiques i la intenció d'aprofundir-hi. Tenint en compte aquestes circumstàncies puc afirmar que un dels objectius de la realització del treball, que no del document que tens a les mans, ha estat la iniciació o l'aprofundiment en àrees que la pròpia estructura dels estudis de grau no permet, especialment en topologia diferencial i en teoria de categories.

L'altre objectiu ha estat sense cap mena de dubte la recerca d'una dinàmica que permetés l'aprenentatge de manera distinta a com és plantejat normalment en els cursos usuals de grau, amb altres tempos, prioritats i objectius.

0.1 La física del treball

A causa del meu hipotètic doble perfil matemàtic-físic i de circumstàncies intrínseques de la titulació vaig intentar que el tema d'estudi estigués lligat a aquesta ciència i d'aquesta manera poder donar una dimensió extra al treball. Clarament l'elecció de les *teories topològiques quàntiques de camps* compleix aquest requisit.

Tot i haver iniciat també aquesta línia de treball, basant-ne principalment la introducció en [1] i [2], així com una trobada informal amb *Dr. Fiol* del *Departament de Física Fonamental* de la UB, per motius logístics, aquesta vessant del treball va haver ser cancel·lada. En algun punt del treball es fa referència a la utilitat que tenen aquestes matemàtiques per la física, però no deixen de ser apunts anecdòtics.

0.2 Resum de continguts

El treball està orientat en fer una introducció del concepte de *Teoria topològica quàntica de camps* i enunciar i demostrar el teorema d'equivalència categòrica entre les 2 - $TQFT$ s i les àlgebres de Frobenius. Per assolir aquests objectius hem estructurat el treball en quatre capítols.

En el primer capítol es defineix amb la màxima precisió la categoria dels bordismes, així com les $TQFT$ s. Al acabar el capítol s'il·lustra breument el concepte amb una petita exposició de les 1 - $TQFT$ s i es fan alguns apunts sobre possibles variants que enriqueixen l'estructura.

En el capítol 2 es defineixen les àlgebres de Frobenius i es demostren propietats sobre aquests objectes. En particular s'ha de destacar el tractament que rep la descomposició en suma directa i la caracterització de les àlgebres de Frobenius indescomponibles. Aquest darrer resultat ens permet caracteritzar amb molta més precisió les àlgebres de Frobenius, i un cop demostrada l'equivalència de categories ens permet traslladar el resultat a les 2 - $TQFT$ s.

El capítol 3 tracta la descomposició en parell de pantalons de les superfícies orientables amb vora, un resultat imprescindible per poder arribar a l'equivalència de categories. Concretament s'estudia de quines maneres pot ser construïda una superfície a partir de cinc peces concretes. Aquesta descomposició no és única, per tant es determina quins passos es poden fer per canviar d'una descomposició a l'altra. El capítol està enfocat en el cas 2 -dimensional, però part dels resultats són vàlids en dimensió arbitrària.

En el darrer capítol es construeixen els dos functors que defineixen l'equivalència de categories i es demostra que efectivament en defineixen una. Es fan notar els problemes que apareixen de manera natural en definir els functors corresponents i es veu com poden ser solucionats.

En les darreres pàgines hi ha diversos apèndixs on es poden trobar definicions i resultats (amb o sense demostració). S'han incorporat d'aquesta manera els resultats utilitzats en el treball que transcendeixen el temari de grau.

0.3 Comentaris sobre el treball fet

Tot i que el treball no aporta resultats nous, considero que és important explicar com s'ha obrat durant aquests mesos.

D'una banda hi ha hagut un temps remarcable dedicat a adquirir coneixements nous referents a geometria i topologia diferencial, quasi tota la seva totalitat treballant [3] i [4]. A partir dels coneixements adquirits en aquests procés i l'ajuda del *Dr. Mundet* s'han pogut demostrar els resultats continguts en el capítol 3.

D'altra banda, a partir de la lectura de nombrosos articles i lectures s'ha treballat el concepte de *TQFTs* i s'ha escollit la definició que es troba en el treball. El capítol 2 i 4 són una reconstrucció de [5], en el que se segueixen els passos de l'article, omplint els forats que deixa *Abbrams* i amb alguns matisos conceptuals extres.

Finalment vull fer notar que s'ha intentat fer l'exposició des d'un punt de vista categòric, fet que en la majoria d'articles consultats no es treballava.

0.4 Agraïments

En primer lloc vull donar les gràcies al *Dr. Mundet* per la dedicació i la paciència que ha tingut, així com la seva capacitat de guia, propiciant que fos jo mateix qui recorregués el camí del meu apranentatge.

En segon lloc vull donar també les gràcies a tots aquells companys de facultat que comentant les dificultats amb les que em trobava m'hagin pogut ajudar d'una manera o altra.

Finalment també haig d'agrair a totes aquelles persones que hagin aguantat la meua inestabilitat i mal humor de l'etapa final i m'hagin passat per alt accions que en circumstàncies normals no hagués dut a terme.

Preface

This project started after a course about algebraic topology. On this course bridges between the topological world and algebraic world were bought, this fact increased my interest to the transversal mathematical views. Keeping in mind this circumstances, I can declare that one of this project aim, not this document goal, has been the introduction or the progress on mathematical areas that weren't worked deeply, differential topology and categories especially,

The second objective has been a set of dynamics which permits a different learning way in relation to the usual degree courses, with other times, priorities and goals.

0.5 The project and the physics

Because of my hypothetic double profile mathematical-physic and intrinsic degree circumstances, I tried to choose a topic related to this science in order to give an extra dimension to the project. The *topological quantum field theories* achieve this requirement clearly. In spite of starting these research line, reading the articles [1] and [2], and an informal meeting with *Dr. Fiol* of *Departament de Física Fonamental*, this project aspect was canceled. In some section I say something about mathematic use on physic world, but they will be anecdotes.

0.6 Summary

This project is oriented to a *topological quantum field theories* introduction and the category equivalence theorem between the *2-TQFTs* and the Frobenius algebras proof. In order to achieve these objectives I have organized the book on four chapters.

On the first chapter the bordism category is defined and the *TQFT* concept is explained. At the end of the chapter we explain the case of 1-*TQFT*s briefly and some notes about possible generalizations are given.

On chapter 2 Frobenius algebras are defined and some properties are proved. The treatment given to the decomposition in direct sum of indecomposable Frobenius algebras deserves a particular mention. After the proof of the categoric equivalence between 2-*TQFT*s and Frobenius algebras we will be able to use this result to the decompose 2-*TQFT*s.

On chapter 3 the pair of pants decomposition of oriented surfaces with boundary is studied. This theorem is essential in order to build the category equivalence. We study the ways that a surface can be bought with only five types of pieces, this decompositions isn't unique, so we study the different change steps between decompositions. Although the aim of this chapter is the decomposition of the surfaces, some propositions are more general.

On the last chapter a pair of functors are bought to define the categorical equivalence between the Frobenius algebras ant the *TQFT*s. We focus on the problems behind the functors definition and we solve them.

At the end there are some appendixes with definitions and theorems. They are concepts beyond the usual degree teachings.

Índex

Pròleg	iii
0.1 La física del treball	iii
0.2 Resum de continguts	iv
0.3 Comentaris sobre el treball fet	v
0.4 Agraïments	v
Preface	vii
0.5 The project and the physics	vii
0.6 Summary	vii
Contents	viii
1 Bordismes i TQFTs	1
1.1 La categoria dels bordismes	1
1.2 Teories topològiques quàntiques de camps	4
1.3 Exemple: 1-TQFTs	6
1.4 Altres consideracions	6
2 Àlgebres de Frobenius	9
2.1 Definicions generals	9
2.2 Descomposició d'Àlgebres de Frobenius. Categoria Monoidal	15
2.3 Exemples d'àlgebres de Frobenius	17
3 Descomposició en parells de pantalons	19
3.1 Conceptes bàsics	20
3.2 Visió geomètrica	27
4 Equivalència entre les $TQFT_k$s i les àlgebres de Frobenius	33
4.1 Primer functor: $TQFT_k^2 \rightarrow Frob_k$	33
4.2 Segon functor: $Frob_k \rightarrow TQFT_k^2$	36
4.3 L'equivalència de categories	40
A Notes d'Àlgebra	43
B Notes de Topologia Diferencial	47
C Notes sobre Categories monoidals	49

Capítol 1

Bordismes i TQFTs

Una dels primers passos a donar és l'exposició detallada dels objectes sobre els quals treballarem. En les properes pàgines definirem la categoria dels n -bordismes, així com *Teoria Topològica Quàntica de Camps*. Per tal d'il·lustrar el concepte farem un petit exemple del cas unidimensional. A mode de conclusió donarem algunes idees de quins casos més generals es poden considerar o possibles extensions.

En aquest capítol apareix el concepte de categoria monoidal, com no és un concepte propi del temari de grau hem posat les definicions necessàries a l'apèndix C. Per més informació sobre el concepte o sobre teoria de categories en general consulteu [6].

En les demostracions d'aquest capítol s'utilitza majoritàriament la notació emprada en [3].

1.1 La categoria dels bordismes

Definició 1.1.1. Siguin Σ_0 i Σ_1 dues $(n-1)$ -varietats orientades. Un bordisme de Σ_0 a Σ_1 és un 5-ple $(M; \Omega_0, \Omega_1; h_0, h_1)$ on M és una n -varietat orientada, $\partial M = \Omega_0 \sqcup \Omega_1$ i $h_i : \Sigma_i \rightarrow \Omega_i$ és un difeomorfisme, on h_0 inverteix l'orientació i h_1 la preserva.

Nota 1.1.2. Usualment només es denota el bordisme per la varietat base M i s'elideixen les altres components. Per comoditat notacional seguirem aquesta tendència a menys que sigui necessari donar tota la informació.

Diem que Σ_0 és l'entrada i Σ_1 la sortida d' M . Es poden representar acompanyades d'una *fletxa de temps* que indica quina és l'entrada i la sortida, sinó se sobreentén que van

d'esquerra a dreta o de baix a dalt.

Com és usual en el món matemàtic, per tal de fer un bon estudi, és convenient identificar objectes i estudiar les classes d'equivalència, d'altra banda el problema és inabastable. Com és usual en topologia, aquestes identifikacions es defineixen a partir de difeomorfismes.

Definició 1.1.3. Diem que dos bordismes $(M; \Omega_0; \Omega_1; h_0, h_1)$ i $(M'; \Omega'_0; \Omega'_1; h'_0, h'_1)$ són equivalents si existeix un difeomorfisme $\phi : M \rightarrow M'$ preservant l'orientació tal que $\phi(\Omega_i) = \Omega'_i$ i $h'_i = \phi \circ h_i$ per $i = 1, 2$.

Nota 1.1.4. A partir d'ara treballarem amb classes d'equivalència de bordismes. Tot i així en la literatura mai s'especifica ni es denota de cap manera, identificant la denominació de bordisme i classe de bordisme. Seguirem la mateixa tendència.

De manera intuïtiva es pot visualitzar que dos morfismes poden ser enganxats per les seves vores si aquestes coincideixen. Si es consideren varietats topològiques, definir la unió no presenta cap dificultat, n'hi ha prou en considerar l'espai unió i posteriorment identificar els punts d'una vora amb els de l'altra mitjançant l'homeomorfisme entre les vores. En el cas de varietats diferenciables, però, hem de dotar aquest nou espai d'una estructura diferencial i ens haurem d'assegurar que el procediment utilitzat defineix una única classe de bordisme.

Lema 1.1.5. Sigui M una n -varietat. Existeix un embedding $g : \partial M \times [0, 1] \hookrightarrow M$ tal que $g|_{\partial M \times \{0\}} = Id_{\partial M}$. Aquest embedding s'anomena collar.

Demostració. Considerem un atlas d' M amb una partició de la unitat associada $\{\rho_i\}_i$. Considerem les cartes que intersecten la vora, $\{(\phi_i, U_i)\}_i$. Podem definir un camp vectorial transversal a la vora en cada U_i de la següent manera: $V_i(x) = [x, i, e_n]$ per tot $x \in U_i$, a partir de la partició de la unitat podem definir el camp $V(x) = \sum_i [x, i, \rho_i(x)e_n]$. Els resultats clàssics en aquesta àrea (per exemple [4, pag. 37]) ens garanteixen que el camp determina un flux $\Phi : W \rightarrow M$, sent W un obert de $\partial M \times [0, 1]$ que conté $\partial M \times \{0\}$. Es pot restringir W per afirmar que Φ és un embedding, ja que l'aplicació $T_x \Phi$ és bijectiva per tot $x \in \partial M \times \{0\}$, implicant que Φ sigui una immersió i homeomorf a la seva imatge. Per acabar podem construir un embedding $h : \partial M \times [0, 1] \hookrightarrow W$. Composant els dos embeddings s'obté g . □

Donat un bordisme $(M; \Omega_0, \Omega_1; h_0, h_1)$ de Σ_0 a Σ_1 i un segon $(M'; \Omega'_1, \Omega'_2; h'_1, h'_2)$ de Σ_1 a Σ_2 considerem $\bar{M} = M \sqcup_{h'_1 \circ h_1} M'$. El nostre objectiu és determinar una estructura

diferencial sobre aquest espai i d'aquesta manera definir $(\bar{M}; \Omega_0, \Omega'_2; h_0, h'_2)$ com l'encaixament d' M i M' .

Considerem el conjunt \mathfrak{U} format per les cartes d' M i M' que no contenen punts de les seves respectives vores i les cartes (V_i, ϕ_i) definides de la següent manera.

Fixada (U_i, φ_i) una carta de Σ_1 , podem considerar la carta induïda per l'isomorfisme h_1 en Ω_1 , per comoditat la denotarem igual. Si g és un collar com el del lema 1.1.5 d' M respecte Ω_1 podem considerar la carta d' M $(g(U_i \times [0, 1]), (\varphi_i \times -I) \circ g^{-1})$. Fent servir el mateix argument per M' obtenim la carta $(g'(U_i \times [0, 1]), (\varphi_i \times I) \circ g'^{-1})$. Finalment podem construir $V_i = g \circ ((U_i \times [0, 1])) \sqcup_{h'_1 \circ h_0^{-1}} g'(U_i \times [0, 1])$ i

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (I_n \times -I_1) \circ (\varphi_i \times I) \circ g^{-1} & \text{si } x \in g(U_i \times [0, 1]) \subseteq M \\ (\varphi_i \times I) \circ g'^{-1} & \text{si } x \in g'(U_i \times [0, 1]) \subseteq M' \end{cases} \quad (1.1)$$

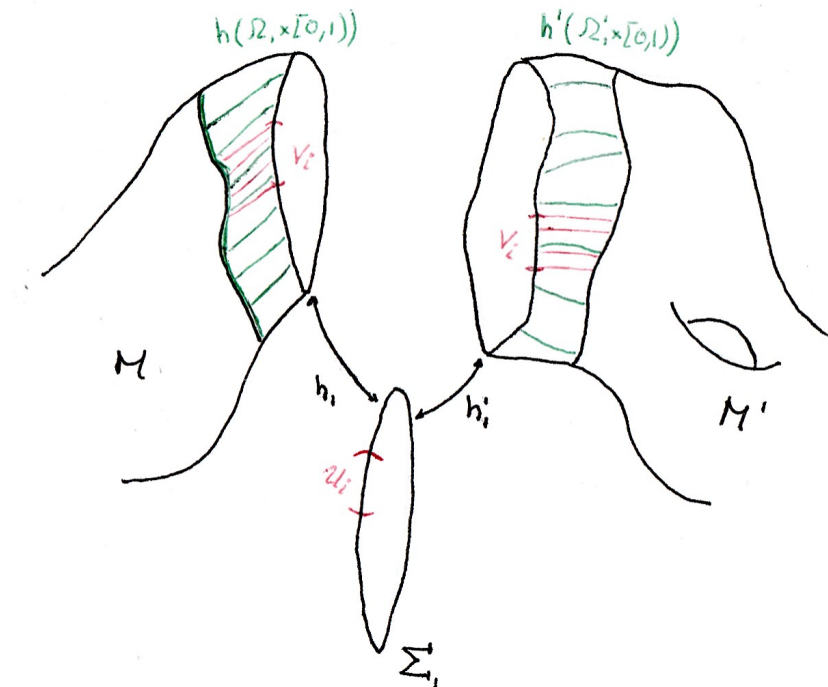


FIGURA 1.1: Encaixament de dues varietats

Proposició 1.1.6. (\bar{M}, \mathfrak{U}) és estructura diferenciable, sent \mathfrak{U} l'atles induït pels collars h i h' d' M i M' sobre Ω_1 i Ω'_1 respectivament. A més a més, si \mathfrak{U}' és un altre atlas induït per collars diferents, $(\bar{M}, \mathfrak{U}) \cong (\bar{M}, \mathfrak{U}')$.

D'aquesta manera no queda ben definit l'encolament de varietats, però sí el de les classes de bordismes.

Definició 1.1.7. Denotem per $Bord_n$, la categoria dels n -bordismes, aquella que els seus objectes són les $(n-1)$ -varietats tancades (o sigui compactes i sense vora) i els seus morfismes són les classes d'equivalència de bordismes definida en 1.1.3. Per cada objecte Σ , la identitat és la classe de $(\Sigma \times I; \Sigma \times \{0\}, \Sigma \times \{1\}; p_0, p_1)$, on p_0 i p_1 són les restriccions de les projeccions naturals. La composició de dos morfismes és la classe de cobordisme definida en la proposició 1.1.6.

Podem dotar aquesta categoria d'una estructura monoidal. Escrivint $Bord_n$ denotarà a partir d'ara la categoria monoidal.

Definició-Proposició 1.1.8. La unió disjunta $\sqcup : \mathbf{Bord}_n \times \mathbf{Bord}_n \rightarrow \mathbf{Bord}_n$ és un bifunctor que a cada parell d'objectes li associa la unió disjunta i a cada parell de classes de bordismes li associa la classe de la unió disjunta.

Proposició 1.1.9. $(\mathbf{Bord}_n, \sqcup, \emptyset)$ és una categoria monoidal simètrica estricta.

Aquests resultats deriven de manera immediata de les definicions. No els comprovarem

1.2 Teories topològiques quàntiques de camps

Denotem la categoria monoidal simètrica dels espais vectorials de dimensió finita sobre un cos k fixat amb el producte tensorial com \mathbf{Vec}_k . Aquesta categoria (encara que no en el context categòric) és estudiada en els cursos elementals de matemàtiques, se suposaran sabudes totes les seves propietats.

Definició 1.2.1. Una n -TQFT és un functor monoidal fort.

$$Z : (\mathbf{Bord}_n, \sqcup, \emptyset) \longrightarrow (\mathbf{Vec}_k, \otimes, k)$$

que compleix les següents propietats:

- Functorialitat respecte difeomorfismes: Si $\Sigma \cong \Sigma'$, aleshores $Z(\Sigma) \cong Z(\Sigma')$.
- Involutivitat: $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$, on Σ^* és la varietat obtinguda en invertir l'orientació de Σ i $Z(\Sigma)^*$ és l'espai dual de $Z(\Sigma)$.

Per il·lustrar el concepte de monoidalitat de Z considerem un morfisme $M : \Sigma_0 \sqcup \Sigma'_0 \rightarrow \Sigma_1$. Aleshores existeix un isomorfisme $\varphi \in \mathbf{Vec}_k$ tal que $\varphi : Z(\Sigma_0) \otimes Z(\Sigma'_0) \cong Z(\Sigma_0 \sqcup \Sigma'_0)$. A més a més $Z(M) \circ \varphi : Z(\Sigma_0) \otimes Z(\Sigma'_0) \rightarrow Z(\Sigma_1)$.

Nota 1.2.2. És usual trobar elidits els isomorfismes de simetria i els de monoidalitat forta. Per exemple es pot trobar escrit directament $Z(\Sigma_0) \otimes Z(\Sigma'_0) = Z(\Sigma_0 \sqcup \Sigma'_0)$. Es pot interpretar que els isomorfismes corresponents són la identitat (és plausible imposar que en una Z determinada $Z(\Sigma_0) \otimes Z(\Sigma'_0) = Z(\Sigma_0 \sqcup \Sigma'_0)$), tot i que en el cas de la simetria és un tema notacional, ja que és conegut que en general el producte tensorial de dos espais no commuta.

Considerem \emptyset com objecte, aleshores com $Z(\emptyset) = Z(\emptyset^*) = Z(\emptyset)^*$, $Z(\emptyset) = k$. D'aquesta manera, si M és un bordisme sense vora, $Z(M)$ és el morfisme multiplicació per un cert $x \in k$. Això defineix un invariant per les varietats sense vora.

Podem considerar la categoria de les n -*TQFTs* sobre un cos k (a partir d'ara \mathbf{TQFT}_k^n), la categoria que els seus objectes són les *TQFTs* i els seus morfismes són les transformacions naturals entre elles. Definir aquesta estructura és important, ja que l'objectiu del treball és establir una equivalència de categories entre \mathbf{TQFT}_k^2 i la categoria de les àlgebres de Frobenius, que definirem en el capítol 2.

Al mateix temps podem definir dues estructures monoidals sobre \mathbf{TQFT}_k^n . Com que aquestes són induïdes pel producte tensorial i per la suma directa d'espais vectorials les denotarem igual. Els definim els dos, amb el mateix procediment, denotem \otimes i \oplus per \square .

Definició 1.2.3. Si Z' i Z'' són dos objectes de \mathbf{TQFT}_k^n definim $Z = Z' \square Z''$ com la *TQFT* tal que:

- $Z(\Sigma) = Z'(\Sigma) \square Z''(\Sigma)$.
- $Z(M) = Z'(M) \square Z''(M)$.

Si $\tau' : Z' \rightarrow T'$ i $\tau'' : Z'' \rightarrow T''$ són dues transformacions naturals, es defineix $\tau = \tau' \square \tau''$ com la transformació natural de Z a T tal que $\tau \Sigma = \tau' \Sigma \square \tau'' \Sigma$.

S'han de comprovar unes quantes propietats per tal de poder afirmar que el resultat obtingut és una *TQFT* i una transformació natural respectivament. Aquestes comprovacions es duen a terme aplicant les propietats dels productes tensorials usuals. Tot seguit s'han de definir de la mateixa manera els isomorfismes naturals que representen l'associativitat, la commutativitat i la unitat. Tots aquests morfismes venen induïts també pels seus homòlegs del producte tensorial i la suma directa. Aquesta construcció convé tenir-la present, però ens centrarem en l'estructura de categoria pròpiament dita.

1.3 Exemple: 1-TQFTs

Considerem \mathbf{Bord}_1 . Els seus objectes són conjunts finits de punts, cada un d'ells amb orientació positiva (p_+) o negativa (p_-). Els morfismes són classes d'1-varietats orientades i compactes, o sigui unions d'interval·ls o circumferències orientades. A la figura 1.2 tenim representats els 4 morfismes que permeten construir la resta mitjançant composició o producte.

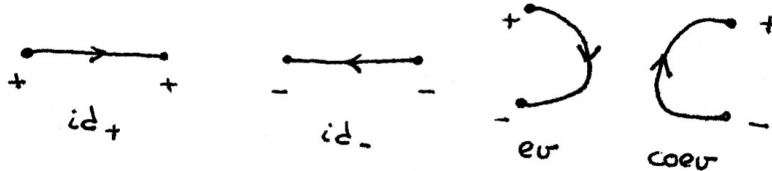


FIGURA 1.2

Experimentem una mica amb aquests objectes:

Considerem Z una $TQFT$. $Z(p_+) = V$ un espai vectorial de dimensió finita. Per ser Z involutòria $Z(p_-) = V^*$ i per ser Z monoidal $Z(p_{n,m}) \cong \bigotimes_{i=1}^n V \otimes \bigotimes_{i=1}^m V^*$ sent $p_{n,m}$ la unió de n p_+ i m p_- .

Per ser Z functor $Z(id_+) = id_V$ i $Z(id_-) = id_{V^*}$ i els morfismes ev i $coev$ defineixen dos morfismes de \mathbf{Vect}_k

$$e : V \otimes V^* \rightarrow k, \quad c : k \rightarrow V \otimes V^*$$

Es pot veure, de fet, que l'elecció d'aquests dos morfismes determina la $TQFT$. Això és perquè, tal com hem dit abans, tots els morfismes es poden expressar com a composició dels de la figura 1.2. Aquesta idea continua sent vàlida en el cas de dos dimensions, però amb complexitat afegida.

1.4 Altres consideracions

En el cèlebre article d'*Atiyah* [7] s'exposa per primera vegada des d'un punt de vista matemàtic el concepte de $TQFT$ amb l'objectiu de començar a axiomatitzar la idea de *teories de camps* que ja feia temps que estaven navegant pels mars de la física. En aquest primer article no segueix una estructura categòrica, és interessant consultar-lo ja que una idea molt intuïtiva és donada, tot i que és interessant acompanyar-lo d'altres lectures més modernes i clares per tal que el lector profà no es confongui i tingui una visió més precisa

del concepte.

En un context físic aquesta estructura és insuficient per treballar. És habitual enriquir l'estructura segons les necessitats del model, així les *TQFTs* adquireixen noves propietats. Alguns d'aquests afegits poden ser l'adició de mètriques a les varietats, estructures hermítiques als espais vectorials o permetre espais vectorials de dimensió no finita, aquesta última consideració és especialment comuna en física, ja que les descripcions dels sistemes es fan a partir d'espais de Hilbert.

En els següents capítols oblidarem la propietat d'involutivitat. En el nostre cas afegim més distincions de casos a l'hora de fer les demostracions però cap tractament qualitativament diferent.

Capítol 2

Àlgebres de Frobenius

En aquest capítol s'introdueixen les àlgebres de Frobenius, una estructura més rica que una àlgebra que compararem amb les *TQFTs*.

La línia argumental del capítol és semblant a la que se segueix a [5], però es completen alguns resultats i els que no són importants pel nostre objectiu s'elideixen.

Tot i que en el grau s'estudia l'estructura d'àlgebra, aquí apareix una nova visió, així com el concepte de coàlgebra. Les definicions es troben a l'apèndix A.

2.1 Definicions generals

Sigui A un k -espai vectorial de dimensió finita n . Dotem a A d'una estructura de k -àlgebra mitjançant el producte $\beta : A \otimes A \rightarrow A$ commutatiu i amb unitat $g : k \rightarrow A$. Podem considerar $\bar{\beta} : A \rightarrow \text{End}(A)$ que envia x al morfisme *multiplicar per x* . I podem dotar a $\text{Hom}_k(A, k)$ (a partir d'ara A^*), d'estructura d' A -mòdul a partir del morfisme $A \otimes A^* \rightarrow A^*$ tal que $x \otimes \omega \mapsto \omega \circ \bar{\beta}(x)$. Observem que $(x \cdot \omega)(a) = \omega(xa)$.

Nota 2.1.1. Tot i aquesta linealització β del producte continuarem utilitzant la notació usual del producte quan sigui necessari, ja que és molt menys aparatosa. Per tant quan escrivim dos elements consecutius, s'entendrà que l'expressió representa el producte d'aquests dos elements.

Proposició 2.1.2. Els següents enunciats són equivalents:

- i Existeix un isomorfisme d' A -mòduls $\lambda : A \cong A^*$.

- ii Existeix una k -forma $f : A \rightarrow k$ tal que el seu nucli no conté cap ideal no nul.
- iii Existeix una aplicació k -bilineal $\eta : A \otimes A \rightarrow k$ associativa i no degenerada.
- iv Per tot ideal I , $I = \text{ann}(\text{ann}(I))$ i $\dim_k(I) + \dim_k(\text{ann}(I)) = \dim_k(A)$.

Demostració. $i \Rightarrow ii$ Prenem $f = \lambda(1)$. Si $(x) \subseteq \ker f$, per tot $a \in A$, $0 = f(ax) = (\lambda(1))(ax) = (x \cdot \lambda(1))(a) = (\lambda(x))(a)$, per tant $\lambda(x) = 0$. Com λ és isomorfisme, $x = 0$.

$ii \Rightarrow iii$ Prenem $\eta = f \circ \beta$. η és k -lineal i associativa per ser-ho β i f . Si existeix $y \in A$ tal que per tot $x \in A$, $\eta(x \otimes y) = 0$, aleshores $(y) \subseteq \text{Ker} f$, d'on $y = 0$, per tant η és no degenerada.

$iii \Rightarrow iv$ Definim per tot $a \in A$, $a^* : A \rightarrow k$ com $a^*(x) = \eta(a \otimes x)$. Per veure que si $\{e_i\}_i$ és una k -base d' A aleshores $\{e_i^*\}_i$ és una k -base d' A^* , és suficient comprovar-ne la independència lineal; si per tot $x \in A$, $0 = \sum_i \mu_i \eta(e_i \otimes x) = \eta((\sum_i \mu_i e_i) \otimes x)$, per la no degeneració $0 = \sum_i \mu_i e_i$, d'on $\mu_i = 0$. D'aquesta penúltima expressió també se'n segueix que per tot element $\omega \in A^*$ existeix un $a \in A$ tal que $\omega = a^*$. Un cop fetes aquestes consideracions, si construïm un isomorfisme $\varphi : \text{ann}(I) \rightarrow I^\perp$, ja estarà demostrada la relació de dimensions. Definim $\varphi(a) = a^*$, és k -lineal per ser-ho η , és injectiva per ser η no degenerada i si $a^* \in I^\perp$ aleshores per tot $x \in I$, $\eta(a \otimes x) = 0$, per tant per tot $x \in I$ i $z \in A$, $0 = \eta(a \otimes xz) = \eta(ax \otimes z)$, per tant $aI = 0$ d'on $a \in \text{ann}(I)$. Finalment, considerant aquesta relació de dimensions per I i $\text{ann}(I)$ s'arriba a que $\dim_k(\text{ann}(\text{ann}(I))) = \dim_k(I)$, unit a la inclusió trivial $\text{ann}(\text{ann}(I)) \subseteq I$ s'arriba a la igualtat de l'enunciat.

La implicació restant és més complicada, es pot trobar a [8, pags. 414-418]. Tot i així només necessitem l'equivalència de les tres primeres i la implicació que hem demostrat, per tant el que hem demostrat és suficient. Per veure l'equivalència de les 3 primeres es torna enrere definint $f(a) = \eta(1 \otimes a)$ i $\lambda = f \circ \bar{\beta}$. \square

Observació 2.1.3. És important recordar com estan relacionades f , η i λ , seran utilitzades més endavant indistintament sense explicar com s'obtenen una de l'altra.

Definició 2.1.4. Una k -àlgebra de Frobenius és un parell (A, f) complint la propietat ii de l'anterior proposició. A partir d'ara, per abreviar podrem dir que (A, f) és una FA , sempre que no hi hagi possibilitat de confusió pot ometre l' f .

En el que resta de capítol es procedirà a caracteritzar les àlgebres de Frobenius amb el detall necessari per poder establir més endavant la correspondència amb les $2 - TQFT$ s.

Proposició 2.1.5. Sigui (A, f) una FA . Totes les FA sobre A són de la forma $(A, u \cdot f)$, sent u una unitat d' A .

Demostració. Si $(x) \subseteq \ker u \cdot f$, aleshores per tot $a \in A$, $u \cdot f(u^{-1}ax) = 0$, d'on $0 = f(uu^{-1}ax) = f(ax)$. Per tant, com $(x) \subseteq \ker f$, $(x) = 0$. Suposant que (A, g) és FA, com $g \in A^*$, $g = \lambda_f(u) = f \circ \bar{\beta}(u) = u \cdot f$ per algun $u \in A$, repetint el mateix argument per f arribem que $g = (uv) \cdot g$ per certs $u, v \in A$, aleshores $\lambda_g(1) = g = uv \cdot g = uv \cdot \lambda_g(1) = \lambda_g(uv)$, per la injectivitat de λ_g u és unitat. \square

Si (A, f) és una FA, podem assignar-li a A de manera natural una estructura de coàlgebra. Definim la counitat com f i la comultiplicació α a partir de la composició de les aplicacions següents:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes A \\ \downarrow \lambda & & \uparrow \lambda^{-1} \otimes \lambda^{-1} \\ A & \xrightarrow{\beta^*} & A \otimes A \end{array} \quad (2.1)$$

S'ha de comprovar que (A, α, f) és una coàlgebra. Abans d'això expressem alguns dels morfismes amb els que treballem en coordenades. Ens serà útil tenir-les en ment a l'hora de comprovar la commutativitat d'alguns diagrames. Si $\{e_i\}_{i=1 \div n}$ és una base d' A .

$$\begin{aligned} \beta : A \otimes A &\longrightarrow A & ; & & \beta(e_i \otimes e_j) &= \sum_m \beta_{i,j}^m e_m \\ f : A &\longrightarrow k & ; & & f(e_m) &= f_m \\ \bar{\beta} : A &\longrightarrow \text{End}(A) & ; & & \bar{\beta}(e_i) &= \sum_{m,k} \beta_{i,k}^m e_m \otimes e_k^* \\ \lambda : A &\longrightarrow A^* & ; & & \lambda(e_i) &= \sum_{m,k} \beta_{i,k}^m f_m e_k^* \\ \beta^* : A^* &\longrightarrow A^* \otimes A^* & ; & & \beta^*(e_k^*) &= \sum_{i,j} \beta_{i,j}^k e_i^* \otimes e_j^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

Observació 2.1.6. Hem de tindre en compte que hem elidit els isomorfismes canònics i naturals usals en els que intervé el producte tensorial (e.g. $A \otimes A^* \cong \text{End}(A)$, $(A \otimes A)^* \cong_{\varphi} A^* \otimes A^* \circ A \otimes k \cong A$). Per exemple, en l'anterior definició d' α , s'ha d'entendre que $\alpha = (\lambda^{-1} \otimes \lambda^{-1}) \circ \varphi \circ \beta^* \circ \lambda$.

A més a més, per la commutativitat i l'associativitat de β s'obté que:

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}^m &= \beta_{j,i}^m \\ \sum_k \beta_{i,j}^k \beta_{k,l}^m &= \sum_k \beta_{j,l}^k \beta_{i,k}^m \end{aligned}$$

La comprovació de l'estructura de coàlgebra d' (A, α, f) es pot trobar a [A.0.3](#).

A continuació es presenta una caracterització de les àlgebres de Frobenius que serà vital posteriorment.

Teorema 2.1.7. Sigui A una k -àlgebra. (A, f) és FA si, i només si, existeix un coproducte $\alpha : A \rightarrow A \otimes A$ A -lineal i una counitat $f : A \rightarrow k$ que dotin a A d'una estructura de coàlgebra.

Demostració. En primer lloc un s'ha de preguntar quina és l'estructura d' A -mòdul d' $A \otimes A$. Es pren com a producte el morfisme que compleix $a \otimes (x \otimes y) \mapsto (ax) \otimes y$ i d'aquesta manera es dota a $A \otimes A$ d'estructura d' A -mòdul.

Comprovar que α és A -lineal és equivalent a comprovar que el següent diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\beta} & A \\
 \downarrow I \otimes \alpha & & \downarrow \alpha \\
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\beta \otimes I} & A \otimes A
 \end{array} \tag{2.3}$$

Prenem l' α definida anteriorment, ja hem vist que dota a A d'una estructura de coàlgebra juntament amb la counitat f . Només resta veure l' A -linealitat. Per veure la commutativitat de 2.3 veurem la commutativitat de diferents diagrames que implicaran la commutativitat del nostre. Utilitzarem les expressions en coordenades que hem escrit anteriorment. Considerem el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{\bar{\beta}} A \otimes A^* & & e_i \xrightarrow{\quad} \sum_{m,k} \beta_{ik}^m e_m \otimes e_k^* \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \\
 A^* & & \sum_{l,m} \beta_{im}^l f_l e_k^* \\
 \searrow \beta^* & & \downarrow \\
 A^* \otimes A^* & & \sum_{k,l,j} \left(\sum_m \beta_{i,k}^m \beta_{m,j}^l \right) f_l e_j^* \otimes e_k^* \\
 & & \downarrow \\
 & & \sum_{l,j,k} \left(\sum_m \beta_{im}^l \beta_{jk}^m \right) f_l e_j^* \otimes e_k^*
 \end{array}$$

Expressant la imatge dels elements d'una base d' A en coordenades i utilitzant l'associativitat de β veiem que commuta. Considerem aquest segon diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\lambda} & A^* & \xrightarrow{\lambda^{-1}} & A \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \bar{\beta} \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\lambda^{-1} \otimes \lambda^{-1}} & A^* \otimes A^* & \xleftarrow{\lambda \otimes I^*} & A \otimes A
 \end{array}$$

observem que el subdiagrama dret és l'anterior i l'esquerra és la definició d' α canviant considerant algun un isomorfisme en sentit contrari. Com els dos diagrames interiors

commuten, l'exterior també. El podem simplificar i obtindre el següent diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 \downarrow \alpha & \searrow \bar{\beta} & \\
 A \otimes A & \xleftarrow{I \otimes \lambda^{-1}} & A \otimes A^*
 \end{array} \tag{2.4}$$

Finalment considerem aquest diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A \otimes A & \xrightarrow{\beta} & A & & \\
 & \swarrow I \otimes \bar{\beta} & \downarrow I \otimes \alpha & & \downarrow \alpha & \searrow \bar{\beta} & \\
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\beta \otimes I} & A \otimes A & \xrightarrow{\beta \otimes I} & A \otimes A & \xleftarrow{I \otimes \lambda^{-1}} & A \otimes A^* \\
 & \searrow I \otimes \lambda^{-1} & & & \downarrow I \otimes \lambda & \swarrow I \otimes I^* & \\
 & & A \otimes A^* & \xrightarrow{I \otimes I^*} & A \otimes A^* & &
 \end{array}$$

En l'interior s'hi pot apreciar el diagrama 2.3. Els altres són, o diagrames que la seva commutativitat és trivial, o deriven del 2.4. Per tant el diagrama interior ha de commutar.

Per l'altra implicació, assumim que tenim una comultiplicació α i una counitat f que compleixen les hipòtesis. L'objectiu serà veure que $\eta := f \circ \beta : A \otimes A \rightarrow k$ compleix les condicions de la proposició 2.1.7. L'associativitat de η és heretada de β , s'ha de veure la no degeneració. Definim $\psi := \alpha \circ g : k \rightarrow A \otimes A$ i considerem el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A \otimes A \otimes A & & & & \\
 & \nearrow \alpha \otimes I & & \searrow I \otimes \beta & & & \\
 A & \longrightarrow & k \otimes A & \xrightarrow{g \otimes I} & A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes f} & A \otimes k \longrightarrow A \\
 & & & \searrow \beta & \nearrow \alpha & &
 \end{array}$$

Per hipòtesi recórrer el diagrama per la part superior i l'inferior és equivalent. D'altra banda, utilitzant la definició d'àlgebra i coàlgebra veiem que la composició inferior és la identitat, per tant $(I \otimes \eta) \circ (\psi \otimes I)$ és la identitat en A . Fixada una base $\{e_i\}$, per tot $a \in A$, ψ ve determinada per $\psi(1) = \sum_i u_i \otimes e_i$, per unes certes $u_i \in A$.

$$a \mapsto 1 \otimes a \mapsto \left(\sum_i u_i \otimes e_i \right) \otimes a \mapsto \sum_i u_i \otimes \eta(e_i \otimes a) \mapsto \sum_i \eta(e_i \otimes a) u_i = a$$

D'aquesta igualtat se'n dedueix que $\{u_i\}_i$ és un conjunt de generadors, i si tenim en compte que n'hi ha tants com la dimensió d' A podem afirmar que és base. Prenent

$a = u_j$ s'arriba a que $\eta(e_i \otimes u_j) = \delta_{ij}$. Suposem que existeixen $c_1, \dots, c_n \in k$ tal que $\eta((\sum_i c_i e_i) \otimes x) = 0$ per tot $x \in A$. Prenent $x = u_j$ arribem a que $c_j = 0$. Per tant η és no degenerada. \square

Definició 2.1.8. Si (A, f) i (A', f') són dues FA , un morfisme de FA d' A a A' és un morfisme d'àlgebres $\phi : A \rightarrow A'$ tal que $f = f' \circ \phi$.

Proposició 2.1.9. Si ϕ és un FA -morfisme, és injectiu. A més a més és un morfisme de coalgebres si, i només si, és un isomorfisme.

Per demostrar la segona part de la proposició necessitem resultats previs que introduïrem tot seguit.

Proposició 2.1.10. Si A té estructura de FA , aleshores A^* també en té.

Demostració. Si (A, f) és una FA , per la proposició 2.1.2, existeix un isomorfisme que ens garanteix que tots els elements d' A^* són de la forma $a \cdot f$ amb $a \in A$. Podem construir un producte intern en A^* com $(a \cdot f)(b \cdot f) := (ab) \cdot f$. Definim $\tau : A^* \rightarrow k$ com $\tau(\omega) = \omega(1)$, com $\tau(a \cdot f) = f(a)$, es pot afirmar que (A^*, τ) és una FA . \square

Demostració. Considerem el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & A^* \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^* \\ A' & \xrightarrow{\lambda'} & A'^* \end{array}$$

Commuta, ja que

$$\phi^*(f' \circ \bar{\beta}'(\phi(a))) = f' \circ \bar{\beta}'(\phi(a)) \circ \phi = f' \circ \phi \circ \bar{\beta}(a) = f \circ \bar{\beta}(a)$$

on hem utilitzat l'expressió de $\lambda(x) = f \circ (\bar{\beta}(x))$ i el fet que ϕ sigui morfisme d'àlgebres, o sigui $\bar{\beta}'(\phi(a)) \circ \phi(x) = \beta'(\phi(a) \otimes \phi(x)) = \phi(\beta(a \otimes x)) = (\phi \circ \bar{\beta}(a))(x)$. Si $\phi(x) = 0$ aleshores $\lambda(x) = 0$, i per ser λ isomorfisme $x = 0$, per tant ϕ és injectiva.

D'altra banda observem que si ϕ^* és una aplicació de FA respecte l'estructura que hem descrit en la proposició 2.1.10, per tot $\omega \in A'^*$ es compleix

$$(\tau \circ \phi^*)(\omega) = \phi^*(\omega)(1_A) = (\omega \circ \phi)(1_A) = \omega(1) = \tau'(\omega)$$

Per tant ϕ^* és morfisme de FA .

Si ϕ és comultiplicativa, aleshores ϕ^* és multiplicativa. Aleshores, com ϕ^* és un morfisme de FA , és injectiva, i ϕ exhaustiva.

Si ϕ és un isomorfisme, per la commutativitat del diagrama, ϕ^* ha de ser multiplicativa, i per tant ϕ comultiplicativa. \square

Proposició 2.1.11. Si $\phi, \phi' : (A, f) \rightarrow (A', f')$ són isomorfismes de FA , aleshores $\phi = \phi'$.

Demostració. Considerem $\Phi = \phi'^{-1} \circ \phi$ i afirmem que $f \circ \Phi = f$. Si $\Phi(x) \neq x$ aleshores $f(x - \Phi(x)) = 0$, contradient el fet que (A, f) sigui FA . \square

Definició 2.1.12. Definim la categoria de les àlgebres de Frobenius \mathbf{Frob}_k la categoria que els seus objectes són les FA i les seves fletxes són els isomorfismes de FA .

2.2 Descomposició d'Àlgebres de Frobenius. Categoria Monoidal

L'objectiu d'aquesta secció serà dotar a \mathbf{Frob}_k de dues estructures monoidals. El procés està estructurat de diferents parts. en primer lloc es considera la suma directa i el producte tensorial d'àlgebres i coàlgebres (una definició es pot trobar a l'apèndix A). Tot seguit es veu quines estructures com a FA poden tindre el producte o la suma de FA , la part interessant que es durà a terme en la secció. Finalment es dóna forma a la categoria especificant l'expressió de cada un dels termes qui hi intervenen (un breu esquema a l'apèndix A).

Proposició 2.2.1. Siguin A, A_i k -àlgebres amb $A = \bigoplus_{i=1}^m A_i$. Aleshores $(A, f) \in \mathbf{Frob}_k$ si, i només si, existeixen f_i tal que $(A_i, f_i) \in \mathbf{Frob}_k$. A més a més f i $\{f_i\}_i$ es determinen mútuament mòdul una unitat d' A .

Demostració. Sigui (A, f) una FA , definim $f_i := f|_{A_i}$. Suposem que $(x_i) \subseteq \ker f_i$, aleshores per tot $a \in A_i$, $f_i(ax_i) = 0$. Considerem $x = \sum_j x_j$ sent $x_j = 0$ si $i \neq j$ i $x_j \in A_j$, aleshores per tot $a = \sum_j a_j$ amb $a_j \in A_j$, $f(ax) = f(a_i x_i) = f_i(a_i x_i) = 0$. Com A és FA , $x = 0$, per tant $x_i = 0$ i $(A_i, f_i) \in \mathbf{Frob}_k$. Per veure la unicitat mòdul una unitat considerem $(A_i, f'_i) \in \mathbf{Frob}_k$, aleshores existeixen unitats $u_i \in A_i$ tal que $f'_i = u_i \cdot f_i$. $u = \sum_i u_i$ és unitat d' A , per tant $(A, u \cdot f)$ és FA i es comprova fàcilment que $u \cdot f|_{A_i} = f'_i$.

D'altra banda si $(A_i, f_i) \in \mathbf{Frob}_k$ per tot i , definim $f := \sum_i f_i$. Suposem que $(x) \subseteq \text{Ker } f$ sent $x = \sum_i x_i$, aleshores per tot element arbitrari $a = \sum_i a_i \in A$, $f(ax) = 0$. Aleshores, per tot i $f_i(a_i x_i) = 0$, com que succeeix per tot $a_i \in A_i$ i $(A_i, f_i) \in \mathbf{Frob}_k$ $x_i = 0$, per tant $x = 0$ i $(A, f) \in \mathbf{Frob}_k$. Igual que en el cas anterior, si $(A, f') \in \mathbf{Frob}_k$, $f' = u \cdot f$ i per tant $f' = \sum u_i \cdot f_i$. \square

Definició 2.2.2. Diem que una k -àlgebra és indescomponible si no és isomorfa a la suma directa de k -àlgebres.

Proposició 2.2.3. Si A és una k -àlgebra indescomponible, aleshores tot element de A és unitat o nilpotent.

Demostració. Sigui $a \in A$ arbitrari i φ l'aplicació multiplicar per a . Considerem la cadena de subespais:

$$\text{Im}(\varphi) \supseteq \text{Im}(\varphi^2) \supseteq \text{Im}(\varphi^3) \supseteq \dots$$

Aquesta cadena ha d'estacionar per ser A de dimensió finita. Es poden donar un d'aquests dos casos, que existeixi un m tal que $\text{Im}(\varphi^m) = 0$, i per tant a sigui nilpotent, o que per tot k $\text{Im}(\varphi^m) = \text{Im}(\varphi^{m+k})$. En aquest segon cas, prenent $k = m$ obtenim que per tot $x \in A$, existeix un $z \in A$ tal que $\varphi^m(x) = \varphi^{2m}(z)$, per tant $x - \varphi^m(z) \in \ker(\varphi^m)$, d'on $x \in \ker(\varphi^m) + \text{Im}(\varphi^m)$. Per arguments de dimensió podem afirmar que $A = \ker(\varphi^m) \oplus \text{Im}(\varphi^m)$.

A continuació veurem que cada un dels sumands és k -àlgebra. Per construcció són tancats per la suma i el producte extern, i és fàcil comprovar que també pel producte que hereten d' A com anell. Per trobar les unitats considerem les projeccions de la unitat: $1_A = 1_{\ker} + 1_{\text{Im}}$, les dues components han de ser no nul·les, si no $a^m = 0$ o a és invertible (si $1_A \in \text{Ker}(\varphi^n)$ o $1_A \in \text{Im}(\varphi^n)$ respectivament), i per tant hauríem acabat. Per veure que són elements unitat en els respectius espais utilitzarem que si $x, y \in A$, aleshores $\varphi^n(xy) = x\varphi^n(y)$. D'altra banda, si $x \in \text{Ker}(\varphi^n)$ i $y \in \text{Im}(\varphi^n)$, aleshores $0 = \varphi^n(x)y = x\varphi^n(y) = \varphi^n(xy)$, per tant $xy \in \ker(\varphi^n) \cap \text{Im}(\varphi^n) = \{0\}$.

- Si $x \in \text{Ker}(\varphi^n)$, $1_{\text{Im}}x = 0$, i per tant $1_{\ker}x = x$.
- Si $x \in \text{Im}(\varphi^n)$, $1_{\ker}x = 0$, i per tant $1_{\text{Im}}x = x$.

Hem descomposat A en suma de dues àlgebres. Com per hipòtesi no és possible, un dels sumands és A . Com $A \neq \text{Ker}(\varphi^n)$ aleshores $A = \text{Im}(\varphi^n)$ per tant existeix $b \in A$ tal que $1 = ba$, d'on a és invertible. \square

Procedim a caracteritzar les àlgebres indescomposables i veure quines àlgebres de Frobenius en podem obtenir d'elles.

Sigui A indescomponible. Considerem el seu nilradical \mathcal{N} com a subespai vectorial d' A . Com A és indescomponible, utilitzant l'anterior proposició, podem expressar $A = \mathcal{N} \oplus \mathcal{U}$, sent \mathcal{U} un subespai generat per unitats d' A . Si A és una àlgebra de Frobenius, la propietat *iv* de la proposició 2.1.7 ens garanteix que $\dim(\mathcal{N}) + \dim(\text{ann}(\mathcal{N})) = \dim(A)$, per tant $\dim(\text{ann}(\mathcal{N})) = \dim(\mathcal{U})$, diferent de 0 per ser A unitari. Denotarem a l' $\text{ann}(\mathcal{N})$ per \mathcal{S} .

Proposició 2.2.4. \mathcal{S} és principal i qualsevol element no nul el genera.

Demostració. Sigui $a \in \mathcal{S}$ no nul i $\{u_i\}_i$ una base d' \mathcal{U} , si veiem que $\{u_i a\}$ genera \mathcal{S} ja haurem acabat. És un sistema linealment independent, ja que si $\sum_i \lambda_i (u_i a) = 0$, $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ (ja que no pot ser unitat perquè aleshores $a = 0$), i per la independència lineal d' $\{u_i\}_i$, $\lambda_i = 0$ per tot i . Per tant $\dim(\langle \{u_i a\}_i \rangle) = \dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{S})$, podem concloure que $\mathcal{S} = \langle \{u_i a\} \rangle$. \square

Si A és indescomponible i $\mathcal{N} = 0$, tot element no nul d' A és unitat, per tant A és una extensió del cos k . En cas contrari anomenem a A àlgebra anul·ladora.

Proposició 2.2.5. Si A és un cos, aleshores per tota $f \in A^*$ no nul·la $(A, f) \in \mathbf{Frob}_k$. Si A és una àlgebra anul·ladora, per tota $f \in A^*$ tal que $f(a) \neq 0$ per algun generador d' \mathcal{S} , $(A, f) \in \mathbf{Frob}_k$.

Demostració. El primer cas és immediat, ja que si $f(a) \neq 0$ per algun $a \in A$, aleshores si $(x) \subseteq \ker f$, $0 = f(x(x^{-1}a)) = f(a)$.

Si A és anul·ladora i $(x) \subseteq \ker f$, aleshores per la proposició A.0.8 existeix un $y \in A$ tal que $yx = a$, per tant $0 = f(yx) = f(a)$, per tant $x = 0$. \square

Tots aquests resultats els podem condensar en el següent teorema

Teorema 2.2.6. Tota àlgebra de Frobenius descompon en la suma directa de cossos i àlgebres anul·ladores. L'estructura àlgebra de Frobenius és determinada per les estructures dels seus sumands mòdul una unitat.

Es pot veure que es pot dotar a \mathbf{Frob}_k d'una estructura monoidal a partir de la suma directa i el producte tensorial d'àlgebres. En l'apèndix A es poden trobar les definicions del producte tensorial i la suma directa d'àlgebra i coàlgebra.

Utilitzant els isomorfismes d'associativitat, commutativitat i d'unitat propis dels espais vectorials es pot construir l'estructura de categoria monoidal. Ens limitarem a enunciar-ho perquè el lector en sigui conscient.

Teorema 2.2.7. $(\mathbf{Frob}_k, \otimes, k)$ i $(\mathbf{Frob}_k, \oplus, 0)$ són categories monoidals.

2.3 Exemples d'àlgebres de Frobenius

Exemple 2.3.1. Considerem l'àlgebra dels polinomis d'una variable truncats, $A := k[X]/(X^n)$. Fixem la base usual $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ i denotem $w = x^{n-1}$. Considerem w^* element de

la base dual respecte la base fixada. Veiem que (A, w^*) és FA , ja que tot element de la base divideix x^{n-1} .

Exemple 2.3.2. Si removem temporalment la hipòtesi de commutativitat de les àlgebres de Frobenius podem considerar l'àlgebra de matrius amb coeficients a k i l'aplicació traça.

Podríem posar més exemples, però la majoria d'ells involucren estructures que no ens són molt familiars, com cohomologies o àlgebres de caràcter.

Capítol 3

Descomposició en parells de pantalons

Aquest capítol és la preparació per poder abordar amb seguretat la construcció de l'equivalència de 2-TQFT_k i \mathbf{Frob}_k en capítol següent. Per aquest motiu pot ser recomanable començar a llegir primer aquest darrer capítol i un cop es vegi la necessitat de l'estudi que es durà a terme en aquest capítol tornar aquí.

És conegut el teorema de classificació de les superfícies diferencials que caracteritza tota superfície orientable mitjançant el seu gènere i el nombre de components de la vora (veure una exposició completa en [3, capítol 9]). En aquest capítol farem un pas més, trossejarem les superfícies d'una determinada manera i estudiarem com una superfície donada pot ser construïda a partir d'aquestes peces.

Ens veiem obligats a avisar que s'utilitzaran conceptes i alguns resultats no compresos en els cursos de grau. En l'apèndix B s'inclouen algunes de les definicions i resultats més importants que utilitzarem. Tot i així especifiquem on trobar el desenvolupament teòric de cada un dels temes:

- Definició de l'espai de jets: [3, capítol 2.4]
- Transversalitat: [3, capítol 3]
- Teoria Morse: [3, capítol 6]

3.1 Conceptes bàsics

L'objectiu d'aquesta secció és introduir les eines geomètriques que posteriorment necessitarem. Com que el nostre objectiu són les descomposicions de superfícies pot ser que s'intercalin resultats sobre varietats de dimensió arbitrària amb resultats específics de dimensió 2.

Comencem definint quin serà el nostre concepte de descomposició.

Definició 3.1.1. Una descomposició d'una bordisme $M : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ és una funció Morse $f : M \rightarrow [0, 1]$ tal que $f^{-1}(0) = \Sigma_0$ i $f^{-1}(1) = \Sigma_1$ i que tots els punts crítics tenen imatges diferents.

En diem descomposició perquè escollint valors $b_0, \dots, b_n \in [0, 1]$ tals que

$$0 = b_0 < x_1 < b_1 < \dots < x_n < b_n = 1$$

sent x_1, \dots, x_n els valors crítics, cada $f^{-1}([b_{i-1}, b_i])$ tindrà un únic punt crític. D'aquesta manera M es descompon en la composició de bordismes $f^{-1}([b_{i-1}, b_i]) : f^{-1}(b_{i-1}) \rightarrow f^{-1}(b_i)$.

Definició 3.1.2. Diem que dues funcions Morse f_0 i f_1 estan connectades si existeix una homotopia de classe C^2 , $H : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(\cdot, 0) = f_0$ i $H(\cdot, 1) = f_1$. Usualment denotem $H(\cdot, t)$ per f_t . Diem que aquest camí és Morse si cada una de les f_t és funció Morse.

Proposició 3.1.3. Sigui $H : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ un camí Morse. Aleshores $H(\cdot, 0)$ i $H(\cdot, 1)$ tenen el mateix tipus de punts crítics.

Demostració. Només és necessari veure el següent resultat de propagació de punts crítics a nivell local. Considerarem $H : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i veurem que si 0 és un punt crític d' $H(\cdot, 0)$, aleshores existeix un $\delta_0 > 0$ i $\eta_0 > 0$ tal que per tot $\eta < \eta_0$, si $|t| < \delta_0$ aleshores $H(\cdot, t)|_{B_\eta(0)}$ té un únic punt crític.

Per ser 0 crític d' $H(\cdot, 0)$, $D_x H(0, 0) = 0$ i $\det D_x^2 H(0, 0) \neq 0$. Per tant existeix $\varepsilon > 0$ tal que si $((z', t') \in B_\varepsilon((0, 0)))$, aleshores $\det D_x^2 H(z', t') \neq 0$.

Prenem $\eta_0 = \delta_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Per $\eta < \eta_0$ arbitrari suposem que existeix un t tal que $|t| < \delta_0$ i dos punts crítics $x_1, x_2 \in B_\eta(0)$, o sigui $D_x H(x_1, t) = D_x H(x_2, t) = 0$. Definim

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto D_x H((1-s)x_1 + sx_2, t) \end{aligned}$$

Podem calcular $\varphi'(s) = [D_x^2 H((1-s)x_1 + sx_2, t)](x_2 - x_1)$. D'altra banda definim

$$\begin{aligned} \Sigma: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \sum_i (x_2 - x_1)_i \varphi_i(s) \end{aligned}$$

Com $\Sigma(0) = \Sigma(1) = 0$ existeix un $s_0 \in [0, 1]$ tal que $\Sigma'(s_0) = 0$. Però

$$\Sigma'(s_0) = (x_2 - x_1)^t [D_x^2 H((1-s_0)x_1 + s_0x_2, t)](x_2 - x_1) = 0$$

per tant $\det D_x^2 H((1-s_0)x_1 + s_0x_2, t) = 0$, contradient la hipòtesi. De moment hem vist la impossibilitat de tindre dos punts crítics per una mateixa t en un entorn del 0, falta veure que n'hi ha algun. Per això considerem la següent funció

$$\begin{aligned} D_x H: B_\eta(0) \times B_{\delta_0}(0) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto D_x H(x, t) \end{aligned}$$

podem afirmar que és una submersió per ser el hessià d' H no degenerat en aquest domini, per tant $(D_x H)^{-1}(0)$ és una 1-varietat que conté el $(0, 0)$, garantint una corba de punts crítics en un entorn de l'origen. \square

Lema 3.1.4. Sigui $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de Morse. Existeix un entorn \mathcal{V} de f en $C_S^2(M, \mathbb{R})$ tal que per tota funció Morse g d'aquest entorn, f i g poden ser connectades per un camí de funcions Morse.

Demostració. Considerem un atlas d' M , $\Phi = \{(U_i, \varphi_i)\}$ tal que:

- En cada U_i no hi ha més d'un punt crític.
- Si en U_i hi ha un punt crític considerem $K_i \subseteq U_i$ un compacte que contingui el punt crític i un $\delta_i > 0$ tal que

$$\delta_i < \left| \det \left(D_{\varphi_i(z)}^2 f \circ \varphi_i^{-1} \right) \right|, \quad \forall z \in K_i$$

per ser el determinant una funció uniformement continua en compactes existeix un $\varepsilon_i > 0$ tal que si $\|A - B\| < \varepsilon_i$, aleshores $|\det(A) - \det(B)| < \delta_i$ (sent A i B matrius quadrades).

- Si en U_i no hi ha cap punt crític, considerem $K_i \subseteq U_i$ compacte i $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$\varepsilon_i < \|D_{\varphi_i(z)} f \circ \varphi_i^{-1}\|, \quad \forall z \in K_i$$

- $\{K_i\}$ és un recobriment d' M .

Considerem l'entorn $\mathcal{V} := \mathcal{N}^2(f; \Phi; K_i, \varepsilon_i)$ i una funció Morse g d'aquest entorn (el conjunt de funcions Morse és dens en $C_S^2(M)$ [3, pag. 147]).

Definim $H : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ l'homotopia de classe C^2 entre f i g com $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ i denotem $H(\cdot, t)$ per f_t . Si veiem que cada f_t és Morse haurem acabat, veurem que cap punt $x \in M$ és crític degenerat. Distingirem per casos i reduïrem a l'absurd.

Si $x \in K_i$ i U_i no conté cap punt crític. Per ser g en V

$$\|D_{\varphi_i(x)}f \circ \varphi_i^{-1} - D_{\varphi_i(x)}g \circ \varphi_i^{-1}\| < \varepsilon_i \quad (3.1)$$

Suposem que x és punt crític d' f_t , aleshores

$$0 = (1 - t)D_{\varphi_i(x)}f \circ \varphi_i^{-1} + tD_{\varphi_i(x)}g \circ \varphi_i^{-1} \Rightarrow D_{\varphi_i(x)}g \circ \varphi_i^{-1} = \frac{t-1}{t}D_{\varphi_i(x)}f \circ \varphi_i^{-1}$$

substituint a l'equació 3.1 arribem a

$$\varepsilon_i < \|D_{\varphi_i(x)}f \circ \varphi_i^{-1}\| < t\varepsilon_i < \varepsilon_i \quad !!$$

Si $x \in K_i$ i U_i conté un punt crític

$$\|D_{\varphi_i(x)}^2f \circ \varphi_i^{-1} - D_{\varphi_i(x)}^2g \circ \varphi_i^{-1}\| < \varepsilon_i \quad (3.2)$$

Suposem que x és un punt crític degenerat, aleshores

$$0 = \det\left(D_{\varphi_i(x)}^2f_t \circ \varphi_i^{-1}\right) = \det(B)$$

on $B := \left[D_{\varphi_i(x)}^2f \circ \varphi_i^{-1} - t\left(D_{\varphi_i(x)}^2f \circ \varphi_i^{-1} - D_{\varphi_i(x)}^2g \circ \varphi_i^{-1}\right)\right]$, si $A := D_{\varphi_i(x)}^2f \circ \varphi_i^{-1}$, podem considerar

$$\|A - B\| = t\|D_{\varphi_i(x)}^2f \circ \varphi_i^{-1} - D_{\varphi_i(x)}^2g \circ \varphi_i^{-1}\| < \varepsilon_i$$

per tant $|\det(A)| = |\det(A) - \det(B)| < \delta_i !!$. □

En la proposició 3.1.3 hem vist què succeeix si dues funcions Morse estan connectades per un camí Morse. El següent resultat ens garanteix i ens caracteritza un camí entre funcions Morse.

Teorema 3.1.5. Donades dues funcions Morse $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una 2-varietat compacte, existeix un camí de funcions $\{f_t\}$ tal que tota f_t és funció Morse excepte en un nombre finit de punts t_1, \dots, t_n .

Demostració. El primer pas de la demostració és caracteritzar els 2-jets $j_{(x,t)}^2 f \in J_{(x,t)}^2(M \times I)$ tal que les projeccions dels seus representants $f(\cdot, t)$ tinguin un punt crític degenerat en x (a partir d'ara en aquesta situació direm que (x, t) és un punt espacialment degenerat d' f). Aquest conjunt el partirem en dos i veurem que cada un d'ells és varietat.

Denotarem $(x, t) \in M \times I$ per p . Ho utilitzarem quan sigui escaient.

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \pi: J^2(M \times I) &\longrightarrow J^2(M) \\ j_p^2 f &\longmapsto j_x^2 f(\cdot, t) \end{aligned}$$

Els 2-jets en $x \in M$ pertanyents a la secció zero Z^* són representats per funcions que tenen un punt crític en x i el seu hessià és nul en aquest punt. Com π és una submersió, $Z_0 := \pi^{-1}(Z^*) \subseteq J^2(M \times I)$ és una subvarietat de dimensió 7, mentre que $N := \pi^{-1}(J^2(M) \setminus Z^*) \subseteq J^2(M \times I)$ és una varietat de dimensió 12. El que hem fet en construir N ha estat "treure" de $J^2(M \times I)$ els jets representats per funcions amb punts crítics espacialment degenerats amb hessià nul.

Veiem que els jets restants (els representats per funcions amb hessià degenerat no nul) formen una varietat. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} G: N \subseteq J^2(M \times I) &\longrightarrow \bigcup_{x \in M} (J_x^1(M) \times \mathbb{R}) \\ j_p^2 f &\longmapsto (j_x^1 f(\cdot, t), \det H_x f(\cdot, t)) \end{aligned}$$

En aquest cas ens interessa calcular l'espai tangent de la varietat que busquem, no ens queda cap més remei que realitzar càlculs havent fixat cartes.

Considerem (U, φ) una carta d' M , i construïm $(U \times I, \varphi \times Id)$ carta d' $M \times I$. Considerem les cartes de $J^1(M)$ i $J^2(M \times I)$ induïdes per aquestes primeres (tal com s'explica a [3, pag. 61]). L'expressió de la composició de G amb les corresponents cartes és

$$(x_1, x_2, t, a_1, a_2, b_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6) \longmapsto (x_1, x_2, a_1, a_2, \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2)$$

Diferenciant obtenim que l'aplicació tangent és exhaustiva arreu excepte en els punts que les seves coordenades compleixen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Considerem Z^* la secció zero de $\bigcup_{x \in M} (J_x^1(M) \times \mathbb{R})$. Les coordenades de tot punt d' N tenen alguna de les α 's no nul·les. D'aquesta manera podem afirmar que G és transversal a Z^* , per tant $Z_1 := G^{-1}(Z^*)$ és una subvarietat diferencial de dimensió 9.

Utilitzant el teorema de transversalitat de jets B.0.11, podem afirmar que el conjunt

$$\mathcal{V} := \{H \in C_S^2(M \times I) : j^2 H \pitchfork Z_0, Z_1\}$$

és dens en $C_S^2(M \times I)$. Remarquem que com $\dim Z_0 = 7$, si $H \in \mathcal{V}$ aleshores $j_p^2 H \notin Z_0$.

Considerem $\bar{H}(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$ i un entorn $\mathcal{W} := \mathcal{N}^2(\bar{H}; \{(U_i \times I, \varphi_i \times Id)\}; \{K_i \times I\}, \{\varepsilon_i\})$ d'aquesta funció tal que els entorns $\mathcal{N}^2(f_j; \{(U_i, \varphi_i)\}, \{K_i\}, \{\varepsilon_i\})$ amb $j = 0, 1$ compleixin les condicions del lema 3.1.3. Amb aquestes dades ja podem construir l'homotopia de l'enunciat.

Podem garantir l'existència d'una homotopia H pertanyent als conjunts \mathcal{V} i \mathcal{W} . Fem primer un parell d'observacions sobre aquesta homotopia.

Si $x \in M$ és un punt crític degenerat d' $H(\cdot, t)$, $\mathcal{H}_x H(\cdot, t) \neq 0$ (ja que $j_p^2 H \notin Z_0$, per tant pertany a Z_1). A causa de la transversalitat

$$T_p H((M \times I)_p) \oplus Z_1|_{j_{(x,t)}^2 H} = J^2(M \times I)|_{j_p^2 H} \quad (3.3)$$

Per tant, $(j^2 H)^{-1}(Z_1) \subseteq M \times I$ és una subvarietat de dimensió 0. En particular significa que els punts espacialment degenerats d' H són aïllats, o sigui que tenen un entorn tal que no hi ha cap més punt espacialment degenerat. D'altra banda, si p no és un punt espacialment degenerat, existeix un entorn d'aquest punt en el que no hi ha punts espacialment degenerats.

Podem recobrir $M \times I$ per oberts dels tipus anteriorment descrits. Per ser $M \times I$ compacte hi haurà un nombre finit de punts espacialment degenerats, o sigui un nombre finit de t 's tals que $H(\cdot, t)$ no és funció de Morse.

Falta assegurar-nos que H connecti f_0 amb f_1 . Per solucionar aquest fet podem utilitzar el lema 3.1.4 per assegurar de l'existència de dos camins de Morse entre f_0 i $H(\cdot, 0)$ i entre $H(\cdot, 1)$ i f_1 (notem que hem imposat una condició addicional sobre \mathcal{W} per poder-ho fer). Encaixant els tres camins hem acabat. \square

Proposició 3.1.6. Sigui $p^* = (x^*, t^*)$ un punt espacialment degenerat d'una homotopia $\{f_t\}$ que connecta dues funcions Morse com la del teorema 3.1.5. Aleshores existeix un entorn de t^* i un entorn X de x^* tal que es dóna una de les dues situacions següents:

- si $t < t^*$, $f_{t|X}$ no té cap punt crític, i si $t > t^*$ en té dos tals que els seus índexs disten una unitat.
- si $t > t^*$, $f_{t|X}$ no té cap punt crític, i si $t < t^*$ en té dos tals que els seus índexs disten una unitat.

Demostració. Recuperem la caracterització del teorema 3.1.5 que havíem fet dels punts espacialment degenerats. Si considerem les cartes definides a partir de l'elecció de φ , podem expressar j^2H localment com

$$z = (x_1, x_2, t) \mapsto (x_1, x_2, t, \tilde{H}_{x_1}(z), \tilde{H}_{x_2}(z), \tilde{H}_t(z), \tilde{H}_{x_1x_1}(z), \tilde{H}_{x_1x_2}(z), \tilde{H}_{x_2x_2}(z), \tilde{H}_{x_1t}(z), \tilde{H}_{x_2t}(z), \tilde{H}_{tt}(z))$$

sent $\tilde{H} := H \circ (\varphi \times (I - t^*))$ i escollim φ carta d' M tal que $\varphi(x) = 0_2$ i que el hessià de la part espacial en $(0_2, 0)$ $D_{0_2}^2 \tilde{H}(\cdot, 0)$ sigui diagonal. D'aquesta manera podem afirmar que

$$\tilde{H}_{x_1}(0) = \tilde{H}_{x_2}(0) = \tilde{H}_{x_1x_1}(0) = \tilde{H}_{x_1x_2}(0) = 0, \quad \tilde{H}_{x_2x_2}(0) \neq 0 \quad (3.4)$$

D'aquesta manera podem calcular explícitament l'espai tangent de Z_1 en el punt degenerat com $Z_1 j_{p^*}^2 H = \ker T_{j_{p^*}^2 H} G$. Fent els càlculs sobre aquesta carta trobem que

$$Z_1 j_{p^*}^2 H = \langle \partial_t, \partial_{b_3}, \partial_{\beta_4}, \partial_{\beta_5}, \partial_{\beta_6}, \partial_{\alpha_2}, \partial_{\alpha_3} \rangle$$

Utilitzant la relació de transversalitat 3.3, arribem a la independència lineal dels 12 vectors següents:

$$\{T_{p^*} j^2 H(\partial_{x_1}), T_{p^*} j^2 H(\partial_{x_2}), T_{p^*} j^2 H(\partial_t), \partial_t, \partial_{b_3}, \partial_{\beta_4}, \partial_{\beta_5}, \partial_{\beta_6}, \partial_{\alpha_2}, \partial_{\alpha_3}\}$$

la independència lineal és garantida imposant que el determinant d'una matriu que tingui aquests vectors com a columnes sigui no nul. Després d'operar eliminant les columnes amb un únic 1 obtenim que

$$\begin{vmatrix} \tilde{H}_{x_1x_1}(0) & \tilde{H}_{x_1x_2}(0) & \tilde{H}_{x_1t}(0) \\ \tilde{H}_{x_1x_2}(0) & \tilde{H}_{x_2x_2}(0) & \tilde{H}_{x_2t}(0) \\ \tilde{H}_{x_1x_1x_1}(0) & \tilde{H}_{x_1x_1x_2}(0) & \tilde{H}_{x_1x_1t}(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

tenint en compte les relacions 3.4, podem afirmar que $\tilde{H}_{x_1x_1x_1}(0), \tilde{H}_{x_1t}(0) \neq 0$.

Llistant totes les relacions que hem obtingut:

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{x_1}(0) &= 0 & \tilde{H}_{x_1x_1}(0) &= 0 \\
 \tilde{H}_{x_2}(0) &= 0 & \tilde{H}_{x_1x_2}(0) &= 0 \\
 \tilde{H}_{x_1x_1x_1}(0) &\neq 0 & \tilde{H}_{x_1t}(0) &\neq 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Un cop restringits els possibles valors de les derivades d' \tilde{H} . Estem en condició d'estudiar els punts crítics espacials en un entorn de l'origen.

Els punts crítics espacials són els punts del conjunt $\{(x_1, x_2, t) : F(x_1, x_2, t) = 0\}$, sent

$$\begin{aligned}
 F: \quad \varphi(U) \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 z = (x_1, x_2, t) &\longmapsto (H_{x_1}(z), H_{x_2}(z))
 \end{aligned}$$

A partir de les relacions 3.6 es pot afirmar que $D_{(x_2,t)}F(0)$ és invertible. Per tant, utilitzant el teorema de la funció implícita, podem afirmar que existeix un entorn $W \subseteq \mathbb{R}$ de 0 amb $W \times \{0\} \times \{0\} \subseteq \varphi(U) \times I$ i una $g : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_1, g(x_1)) = 0$.

Podem utilitzar les tècniques usuals per calcular les dues primeres derivades de g , després d'un parell de minuts de càlcul arribem a

$$g_1(x_1) = O(x_1^2), \quad g_2(x_1) = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{H}_{x_1x_1x_1}(0)}{\tilde{H}_{x_1t}(0)} x_1^2 + O(x_1^3)$$

Aquestes expressions són parametritzacions dels punts espacialment crítics, o sigui que en un entorn de l'origen els punts espacialment crítics tenen coordenades $(x_1, g_1(x_1), g_2(x_1))$ amb $x_1 \in W$.

Amb aquesta parametrització podem afirmar que els punts crítics espacials estan tots en el semiespai $\{t \geq 0\}$ o en $\{t \leq 0\}$ ja que g_2 és quadràtica.

Utilitzant la parametrització sobre \tilde{H} i algunes de les seves derivades podem conèixer el signe dels valors del determinant del hessià en els punts crítics continguts en l'entorn considerant.

$$\det \left[D_{(x_1,x_2)}^2 \tilde{H}(x_1, g(x_1)) \right] = \tilde{H}_{x_1x_1x_1}(0) \tilde{H}_{x_2x_2} x_1 + O(x_1^2) \tag{3.6}$$

Podem determinar l'índex dels punts crítics a partir d'aquestes expressions. Per fer-ho més clar distingim per casos segons els signes de les diferents derivades. Expressem esquemàticament els resultats en la taula 3.1.

$\tilde{H}_{x_1x_1x_1}(0)$	$\tilde{H}_{x_2x_2}(0)$	x_1	$\det \mathcal{H}$	\mathcal{H}
+	+	+	+	$\begin{pmatrix} + & \\ & + \end{pmatrix}$
+	+	-	-	$\begin{pmatrix} - & \\ & + \end{pmatrix}$
+	-	+	-	$\begin{pmatrix} + & \\ & - \end{pmatrix}$
+	-	-	+	$\begin{pmatrix} - & \\ & - \end{pmatrix}$
-	+	+	-	$\begin{pmatrix} - & + \\ & + \end{pmatrix}$
-	+	-	+	$\begin{pmatrix} + & + \\ & + \end{pmatrix}$
-	-	+	+	$\begin{pmatrix} - & - \\ & - \end{pmatrix}$
-	-	-	-	$\begin{pmatrix} + & - \\ & - \end{pmatrix}$

TAULA 3.1: Aniquilació/nàixement de punts crítics

Aquests resultats ens indiquen que dos punts crítics espacials, un d'ells una sella i l'altre un màxim o un mínim, s'aniquilen o es creen (depenent del sentit del temps) a partir del punt degenerat.

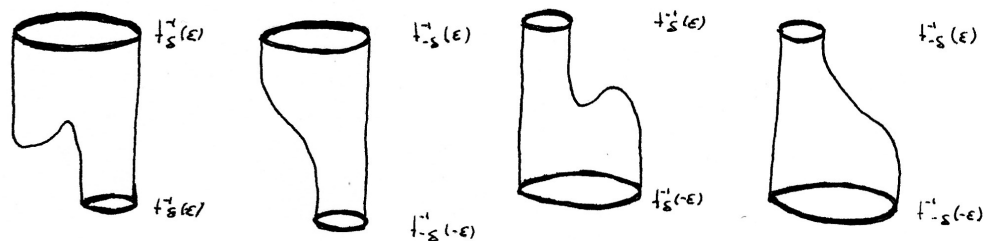


FIGURA 3.1: Creació/destrucció d'una sella i un extremal

Si escollim ϵ i δ prou petits per tal que per tot $t < \delta$ els punts crítics estudiats pertanyin a $f_t^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$ i les vores $f_t^{-1}(\epsilon)$ i $f_t^{-1}(-\epsilon)$ no variïn massa, podem representar els casos descrits en la taula 3.1 en la figura 3.1. \square

3.2 Visió geomètrica

Donada una 2-varietat M obtenim una descomposició en parells de pantalons mitjançant una funció Morse f . El nostre objectiu serà comparar dues descomposicions diferents descrivint tots els moviments (transformacions de peces) que es poden dur a terme per

passar d'una descomposició a l'altra. El fet de poder connectar les funcions de Morse ens permet determinar aquests moviments.

Recordem que una descomposició consta d'una funció Morse f i d'un parell (\bar{b}, \bar{x}) tals que

$$0 = b_0 < x_1 < b_1 < \dots < x_n < b_n = 1$$

Cada varietat $f^{-1}([b_i - 1, b_i])$ conté un únic punt crític. Gràcies a la caracterització total presentada en [3, capítol 9] podem afirmar que si la varietat és connexa només pot ser una de les de la figura 3.2. Si no és connexa, en tindre només un punt crític, serà la

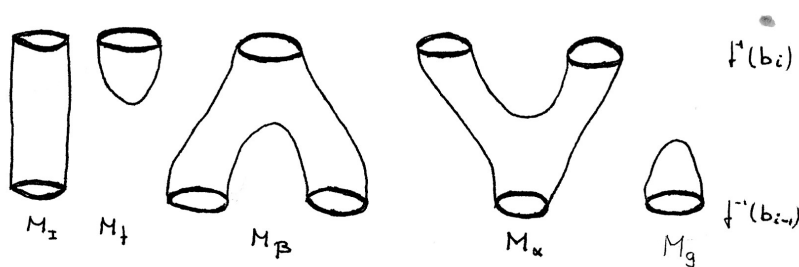


FIGURA 3.2

unió disjunta d'una de les anteriors i un nombre finit de cilindres (com en la figura 3.3). D'aquesta manera una descomposició pot tindre un aspecte com el de la figura 3.4. Són

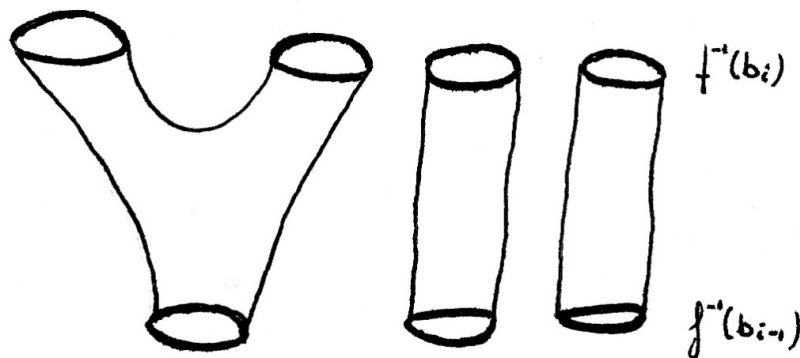


FIGURA 3.3

dues descomposicions d'un mateix bordisme, un tor amb una component d'entrada i una de sortida.

Com ja es pot intuir, una descomposició queda caracteritzada per una successió finita de punts crítics caracteritzats pels seus índexs. Així doncs, la nostra feina queda delimitada a l'estudi dels possibles canvis que hi pot haver en aquesta successió.

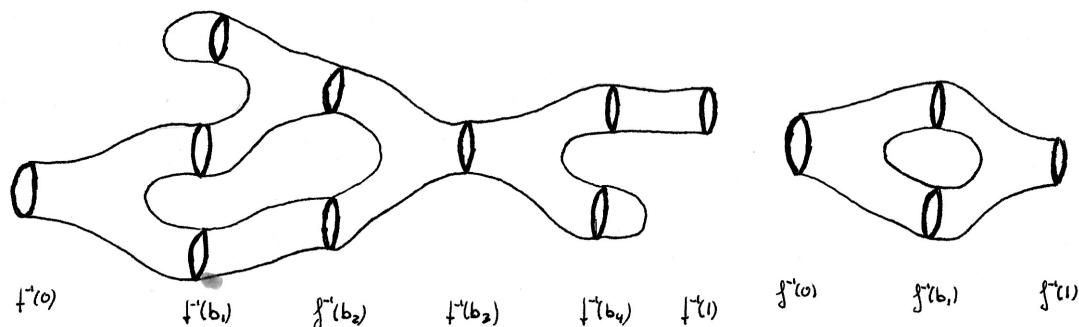


FIGURA 3.4

Els canvis entre dues descomposicions succeeixen a través d'un dels camins que hem descrit en l'anterior secció. En el transcurs d'aquest camí poden succeir dos tipus de fenòmens:

- Creació/destrucció de punts crítics: tal com està descrit en la proposició 3.1.6.
- Creuament de punts crítics: dos punts crítics tenen el mateix valor crític en un instant del camí.

En el primer cas ja hem discutit completament quines possibilitats tenim. Procedim a estudiar el segon cas.

Si t^* és el temps en que la funció Morse té dos punts crítics amb el mateix valor crític z considerem δ i ε prou petit per tal que les vores de $f_{t^* \pm \delta}^{-1}([z - \varepsilon, z + \varepsilon])$ siguin semblants i de manera que aquesta subvarietat només contingui els dos punts crítics a estudiar. Com ja hem vist en la proposició 3.1.3, sense l'aparició d'un punt crític degenerat els punts crítics es propaguen en t i no canvien la seva naturalesa. D'altra banda recordem que el pas d'un valor crític només fa variar el nombre de components de la vora en una unitat, o sigui que en una descomposició el nombre de components d' $f^{-1}(b_{i-1})$ i $f^{-1}(b_i)$ només disten una unitat.

El que farem és veure com poden ser $f_{t^* - \delta}^{-1}([z - \varepsilon, z + \varepsilon])$ i $f_{t^* + \delta}^{-1}([z - \varepsilon, z + \varepsilon])$ tenint en compte les anteriors consideracions.

En la figura 3.5 detallem gràficament tots els casos que podrien succeir tenint en compte el canvi de nombre de components $p \rightarrow q$ de la vora (per t fixada). Si els punts crítics es troben a diferents components connexes no hi ha res a considerar, succeix un moviment del tipus que s'il·lustra en el cas *màxim-mínim* de la figura 3.5. Considerem només els casos en els que té sentit (considerant només les components entrada i sortida) la

permutació de l'ordre dels punts crítics, o sigui $1 \rightarrow 1$ (el segon cas), $1 \rightarrow 3$ i $2 \rightarrow 2$. $3 \rightarrow 1$ no l'estudiarem per ser el simètric del $1 \rightarrow 3$.

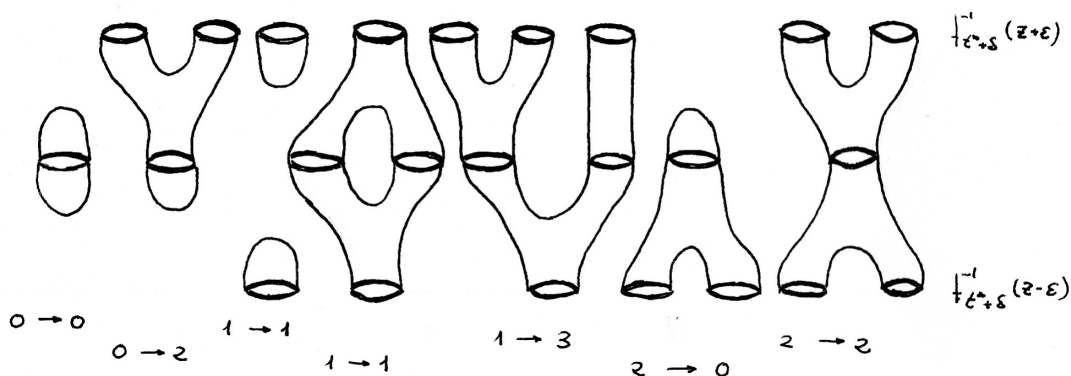


FIGURA 3.5

Fixada una de les tres situacions l'objectiu és determinar les possibles classes de bordisme de $f_{t\pm\delta}^{-1}([z - \epsilon, z])$ i $f_{t\pm\delta}^{-1}([z, z + \epsilon])$.

El cas $1 \rightarrow 1$ és el més senzill de tractar. És el cas que una component evoluciona cap a 2 i després es tornen a "ajuntar". $f_{t\pm\delta}^{-1}([z - \epsilon, z + \epsilon])$ és un tor amb dos forats, un d'entrada i un de sortida, qualsevol tall (en z') que fem per representar aquesta situació obtenim exactament la mateixa descomposició, $M_\beta \circ M_\alpha$ (figura 3.6).

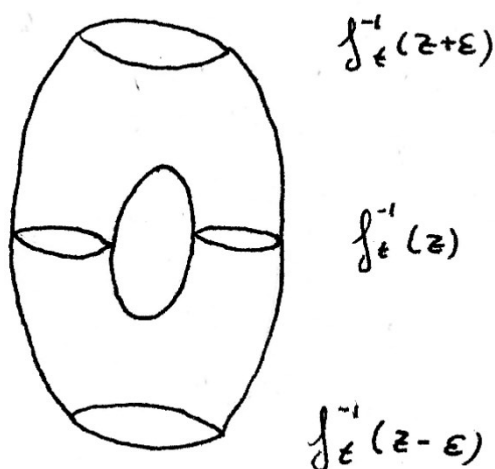


FIGURA 3.6

El cas $1 \rightarrow 3$ consisteix en l'evolució d'un cercle cap a dos, i un d'aquests dos es torna a separar. L'única diferència que hi pot haver és en la tria d'aquests dos darrers (figura

3.7).

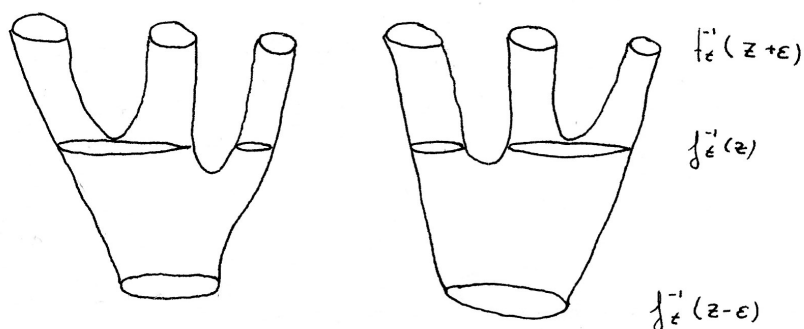


FIGURA 3.7

El cas $2 \rightarrow 2$ requereix un tractament més llarg. Partint de dues components connexes poden donar-se tres casos: les dues components esdevenen una i després es tornen a separar, una component se separa en dues i una d'aquestes dues es fusiona amb l'altra, i la situació simètrica respecte l'altra component (figura 3.8).

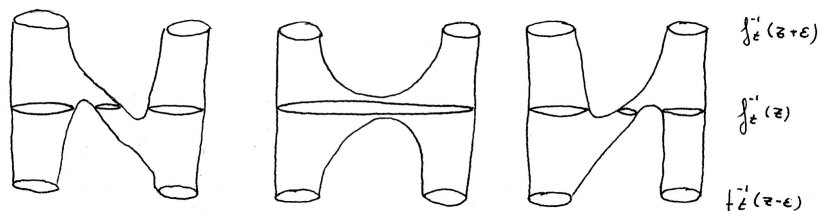


FIGURA 3.8

Amb aquestes eines sobre les descomposicions de superfícies que hem desenvolupat ja estem en condicions de d'abordar amb seguretat la construcció de l'equivalència de categories.

Capítol 4

Equivalència entre les $TQFT$ s i les àlgebres de Frobenius

Finalment podem abordar l'equivalència de categories entre \mathbf{Frob}_k i \mathbf{TQFT}_k^2 . Aquest capítol l'hem dividit en tres seccions, en les dues primeres es construeixen els dos functors que defineixen l'equivalència de categories mentre que en la tercera es demostra que efectivament és una equivalència de categories.

A causa de la gran quantitat de propietats que s'han de comprovar mitjançant commutativitat de diagrames s'ha optat per donar indicacions de com es duen a terme les comprovacions i fer-ne algunes com a exemples per tal d'il·lustrar com es realitzaria la comprovació amb tots els detalls.

D'altra banda s'ha de remarcar que de fet aquesta equivalència de categories que construirem és equivalència de categories monoidals respecte el producte tensorial i la suma directa. Aquesta afirmació implica la comprovació de la commutativitat de més diagrames. En l'apèndix C s'hi troben les definicions de functor monoidal i transformació monoidal per tal que el lector es pugui fer una idea de tota la càrrega que suposa fer aquestes comprovacions.

4.1 Primer functor: $TQFT_k^2 \rightarrow \mathbf{Frob}_k$

Definirem el functor $\mathcal{F} : TQFT_k^2 \rightarrow \mathbf{Frob}_k$ en passos.

En primer lloc identifiquem un element C de la classe de difeomorfisme d' S^1 com a distingit, per exemple podem escollir $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ amb l'estructura diferenciable usual, així com M_β , M_g , M_α i M_f bordismes fixats de les característiques descrites en la figura 3.2 tals que les components connexes de les varietats d'entrada i sortida són C .

Definició 4.1.1. Definim l'aplicació $\mathcal{F} : TQFT_k^2 \rightarrow Frob_k$ de la següent manera:

- Si Z és un objecte de $TQFT_k^2$ definim $\mathcal{F}(Z)$ com l'àlgebra de Frobenius (A, f) tal que
 - El k -espai vectorial és $A = Z(C)$.
 - El producte: $\beta = Z(M_\beta)$.
 - L'unitat: $g = Z(M_g)$.
 - El coproducte: $\alpha = Z(M_\alpha)$.
 - La counitat: $f = M_f$.
- Si $\tau : Z \rightarrow Z'$ és una transformació natural, $\mathcal{F}(\tau) = \tau(C)$

Hem de veure en primer lloc que \mathcal{F} és functor així com que està ben definit.

Teorema 4.1.2. \mathcal{F} és un functor monoidal respecte \otimes i \oplus .

Demostració. Comencem demostrant que la imatge de Z és una FA . En primer lloc s'ha de comprovar que (A, β, g) és àlgebra i (A, α, f) coàlgebra, o sigui comprovant la commutativitat dels diagrames exposats en les respectives definicions A.0.1 i A.0.2.

La commutativitat d'aquests diagrames la tenim garantida per les equivalències de bordismes mostrats en la figura 4.1 i la functorialitat de Z . Perquè s'entengui bé exposarem detalladament en el cas de l'associativitat de β .

Considerem 4 còpies de C $\{c_1, c_2, c_3, c_6\}$ connectats per 2 bordismes diferents tal com es veu en la figura 4.2. Aquests 2 bordismes pertanyen a la mateixa classe, per tant en

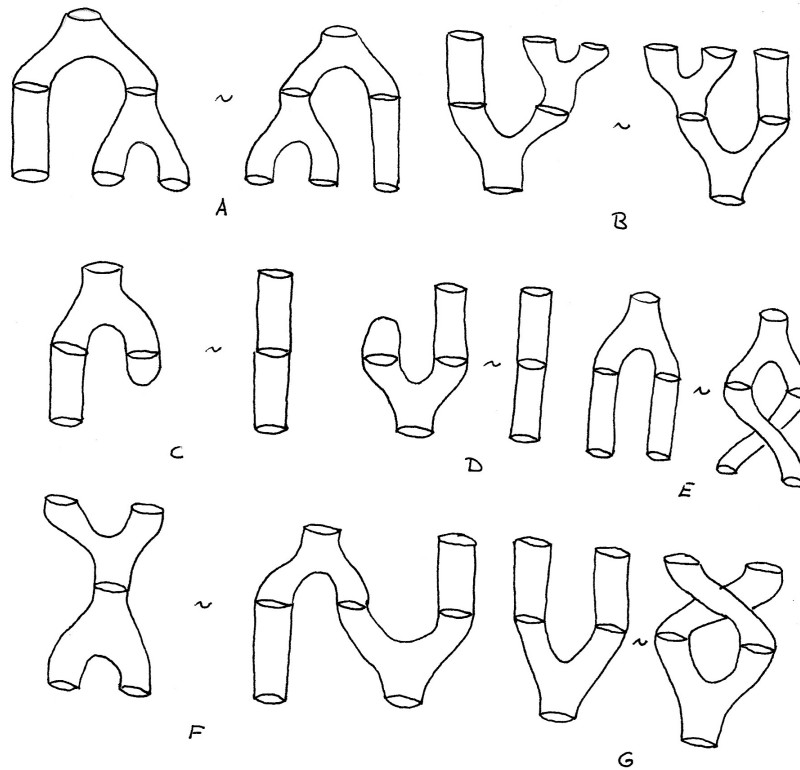


FIGURA 4.1

aplicar-hi Z obtindrem el mateix. A partir de l'aplicació de Z obtenim el diagrama 4.1.

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\beta \otimes I} & A \otimes A & \xrightarrow{\beta} & A \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 Z(c_1 \sqcup c_2) \otimes Z(c_3) & \xrightarrow{Z(M_\beta) \otimes Z(M_I)} & Z(c_4) \otimes Z(c_5) & & Z(c_6) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & \searrow Z(\bar{M}_\beta) & \uparrow \cong \\
 Z(c_1 \sqcup c_2 \sqcup c_3) & \xrightarrow{Z(M)} & Z(c_4 \sqcup c_5) & \xrightarrow{Z(\bar{M}_\beta)} & Z(c_6) \\
 \uparrow I & & \uparrow I & & \uparrow I \\
 Z(c_1 \sqcup c_2 \sqcup c_3) & \xrightarrow{Z(M')} & Z(c'_4 \sqcup c'_5) & \xrightarrow{Z(\bar{M}_\beta)} & Z(c_6) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & \nearrow Z(\bar{M}'_\beta) & \uparrow \cong \\
 Z(c_1) \otimes Z(c_2 \sqcup c_3) & \xrightarrow{Z(M'_I) \otimes Z(M'_\beta)} & Z(c'_4) \otimes Z(c'_5) & & Z(c_6) \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes \beta} & A \otimes A & \xrightarrow{\beta} & A
 \end{array} \tag{4.1}$$

Els diagrames petits commuten per ser Z un functor monoidal. El diagrama exterior, salvant tots els difeomorfismes, és el de l'associativitat.

Nota 4.1.3. Tot aquest muntatge pot semblar realment confós, però és important fer notar que continuament, per fer més senzilla l'exposició, estem elidint isomorfismes entre

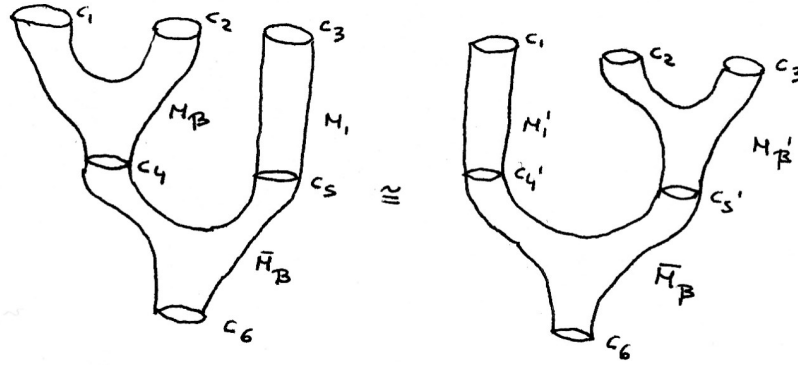


FIGURA 4.2

els diferents objectes amb els que treballem.

Hem desenvolupat aquest exemple per tal que el lector no expert vegi que és molt important tenir consciència dels objectes que estem treballant, quan treballem amb classes, quan no, quan elidim isomorfismes, etc. Sovint en la literatura (per exemple [5], on es demostra aquest resultat) totes aquestes consideracions s'elideixen i el lector no graduat, com ara l'autor d'aquestes notes, adquireix una idea esbiaixada de la realitat.

Finalment, per veure que el que es defineix és una *FA* utilitzem el teorema 2.1.7. La commutativitat del diagrama de l'esmentat teorema és equivalent l'equivalència *F* de la figura 4.1.

Veure que $\tau(C)$ és un morfisme de \mathbf{Frob}_k és molt més senzill. Per la naturalitat de τ , per tota $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$

$$\begin{array}{ccc} Z(\Sigma) & \xrightarrow{\tau_\Sigma} & Z'(\Sigma) \\ \downarrow Z(M) & & \downarrow Z'(M) \\ Z(\Sigma') & \xrightarrow{\tau_{\Sigma'}} & Z'(\Sigma') \end{array}$$

substituint M per M_β , M_α , M_f i M_g s'obté la commutativitat dels diagrames que garanteix que $\tau(S^1)$ és isomorfisme de *FA*. □

4.2 Segon functor: $\mathbf{Frob}_k \rightarrow TQFT_k^2$

Construïm ara un functor $\mathcal{T} : \mathbf{Frob}_k \rightarrow TQFT_k^2$. La construcció d'aquest no és tan fàcil, i són necessaris els resultats sobre descomposicions del capítol previ.

Definició 4.2.1. Definim una aplicació $\mathcal{T} : \mathbf{Frob}_k \rightarrow TQFT_k^2$ de la següent manera:

- Si A és una *FA* definim $\mathcal{T}(A)$ com la *TQFT* Z tal que:

- Si Σ té n components connexes $Z(\Sigma) = A^{\otimes n}$.
- $Z(M_I) = Id_A : A \rightarrow A$.
- $Z(M_\beta) = \beta : A \times A \rightarrow A$.
- $Z(M_g) = g : k \rightarrow A$.
- $Z(M_\alpha) = \alpha : A \rightarrow A \otimes A$.
- $Z(M_f) = f : A \rightarrow k$.
- Si $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ és la unió disjunta de n cilindres i un morfisme elemental, es defineix

$$Z(M) : \bigotimes_{c \in \Sigma} A_c \rightarrow \bigotimes_{c' \in \Sigma'} A_{c'}$$

sent les c 's les components connexes de Σ , $A_c = A$ i $Z(M) = \bigotimes_{m \in M} Z(M_c)$ sent M_m cada una de les components connexes d' M ¹.

- Si $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ i M té una descomposició $M = M_N \circ \dots \circ M_1$ aleshores $Z(M) = Z(M_N) \circ \dots \circ Z(M_1)$.
- Si $\varphi : A \rightarrow A'$ és un morfisme de FA definim $\mathcal{T}(\varphi) = \tau : Z \rightarrow Z'$ de manera $\tau\Sigma = \varphi^{\otimes n}$.

Seguim els mateixos passos que en la secció anterior.

Teorema 4.2.2. \mathcal{T} és un functor monoidal respecte \oplus i \otimes .

Demostració. En primer lloc, en demostrar que \mathcal{T} està ben definit, a més de veure que $\mathcal{T}(A)$ és una *TQFT*, hem de veure que la imatge de tota classe de bordismes no depèn de la descomposició en bordismes elementals emprada.

Considerem M un bordisme i $M = M_N \circ \dots \circ M_1 = M'_{N'} \circ \dots \circ M'_1$ dues descomposicions en morfismes elementals. En el capítol anterior hem caracteritzat els tots els moviments que ens permeten passar d'una descomposició a una altra amb un nombre finit de passos. Per tant ara només hem de comprovar la invariància respecte un únic moviment, aquesta comprovació queda recollida en el següent lema.

Lema 4.2.3. Sigui $M = M_2 \circ M_1 = M'_2 \circ M'_1$ tal que es passa d'una descomposició a l'altra mitjançant un únic moviment i M és connexa. Aleshores $Z(M_2) \circ Z(M_1) = Z(M'_2) \circ Z(M'_1)$.

¹La idea darrera aquesta definició és marcar les diferents components de les vores per tal que a l'hora de fer la composició el functor sàpiga quines components del tensorial s'han de compondre. En [5], Abrams ho soluciona definint els objectes de **Bord**₂ com cercles etiquetats, aquesta noció fa més senzilla la visualització de la composició, però és una categoria diferent.

Demostració. Només hem de comprovar que es compleix la igualtat pels casos descrits en el capítol anterior.

- Aniquilació/naixement de punts crítics: figures 4.3 i 4.4.
- Creuament de punts crítics: figures 4.5, 4.6 i 4.7.

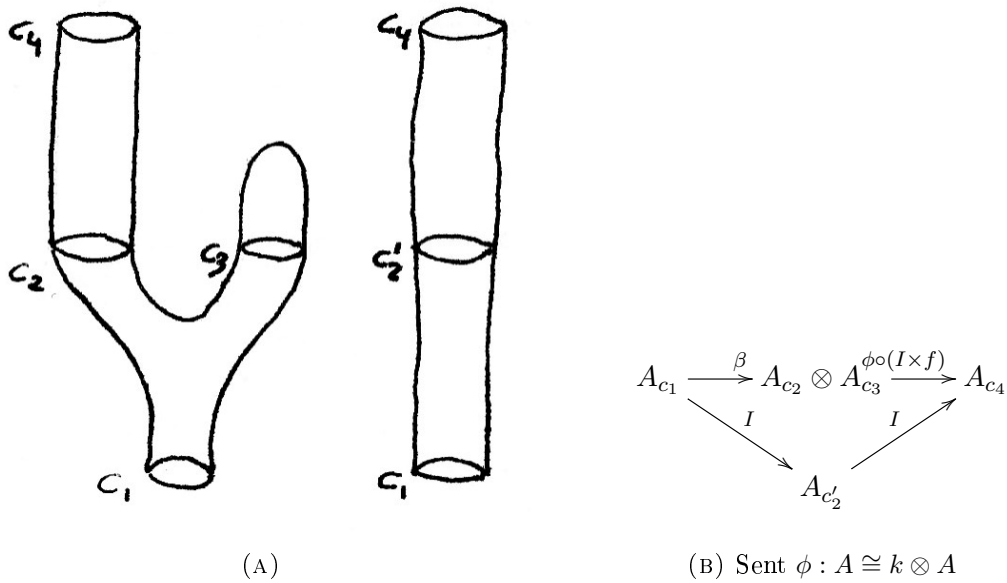


FIGURA 4.3

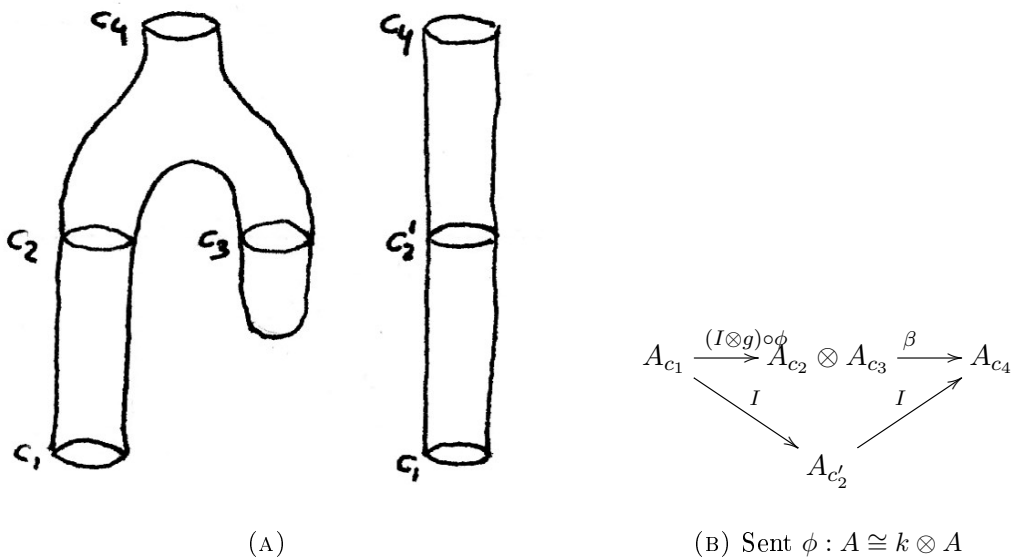


FIGURA 4.4

□

Després d'uns instants de reflexió es veu que \mathcal{T} està construït per satisfer la propietat de la composició i de la identitat, i per tant és un functor.

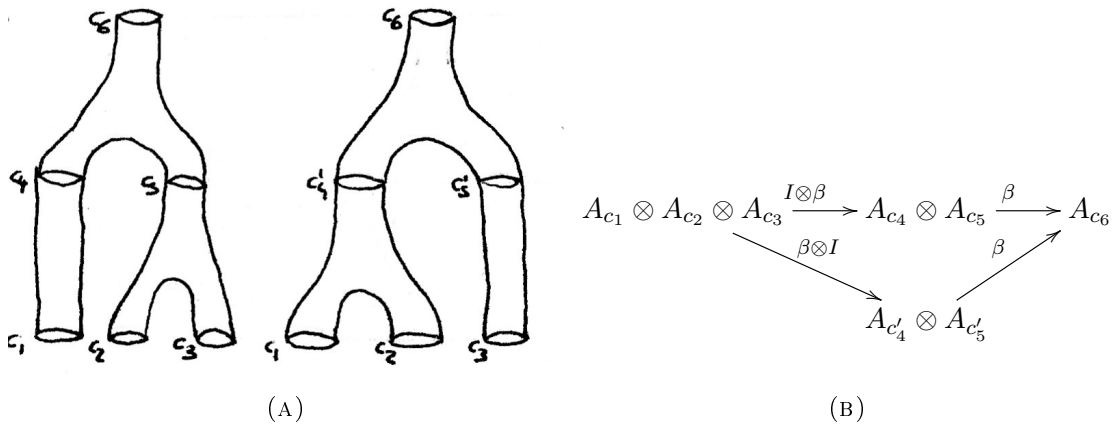


FIGURA 4.5

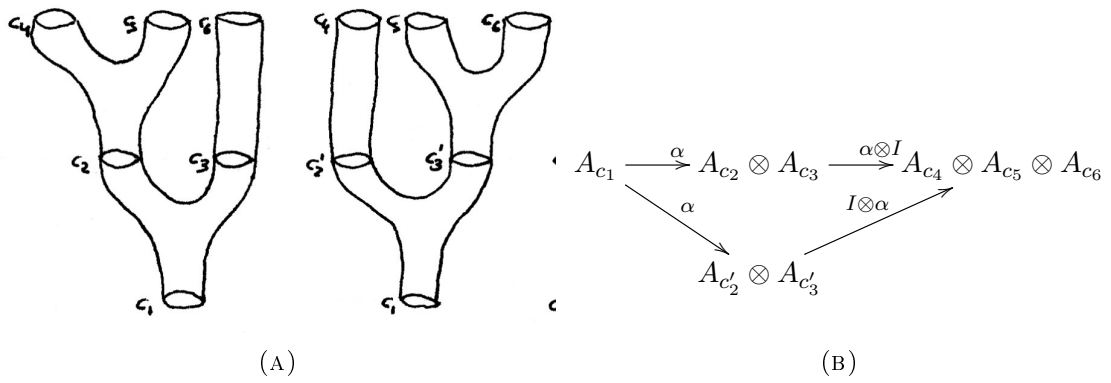


FIGURA 4.6

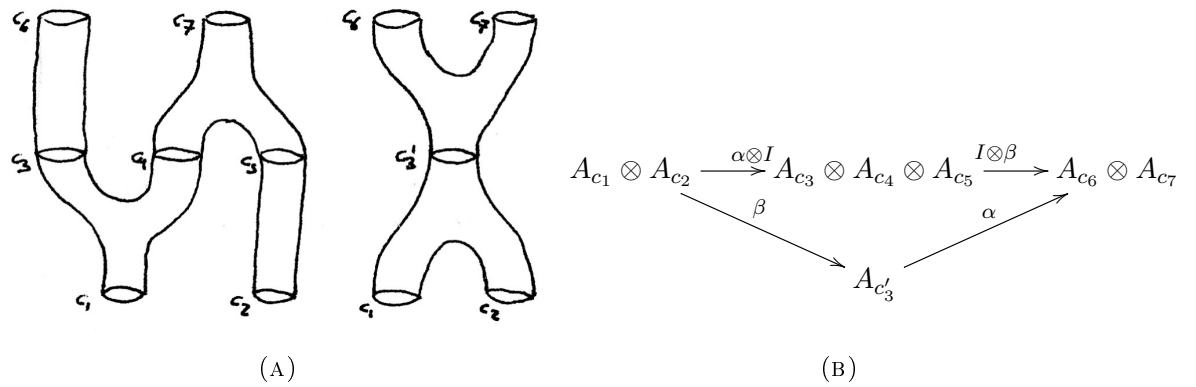


FIGURA 4.7

Per veure que $\tau : Z \rightarrow Z'$ és una transformació natural s'ha de veure que per tot bordisme $M : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ el següent diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 Z(\Sigma) = A^{\otimes n} & \xrightarrow{\varphi^{\otimes n}} & Z'(\Sigma) = A'^{\otimes m} \\
 \downarrow Z(M) & & \downarrow Z'(M) \\
 Z(\Sigma') = A^{\otimes m} & \xrightarrow{\varphi^{\otimes m}} & Z'(\Sigma') = A'^{\otimes m}
 \end{array}$$

utilitzant la naturalitat del producte tensorial només és necessari comprovar la commutativitat per M_β , M_α , M_g i M_f . Notem que la d' M_I és trivial. La commutativitat de tots és garantida per ser φ un isomorfisme de FA , o sigui, ser un morfisme d'àlgebres i de coàlgebres. \square

4.3 L'equivalència de categories

En aquesta última secció veurem que aquests dos functors defineixen una equivalència de categories. Hem de veure que $\mathcal{F}\mathcal{I} \cong 1$ i que $\mathcal{I}\mathcal{F} \cong 1$.

Abans d'això donem una idea de perquè aquests dos functors no poden definir un isomorfisme de categories. Observem que si escollim una TQFT Z tal que $Z(C) \neq Z(\bar{C})$ sent \bar{C} el cercle unitat centrat a l'origen d' \mathbb{R}^2 . Aleshores $(\mathcal{I}\mathcal{F}Z)(\bar{C}) = \mathcal{I}(Z(C)) = Z(C)$, per tant la composició no pot ser la identitat.

Per simplificar l'exposició definim

$$\mathcal{H} := \mathcal{I}\mathcal{F} : \mathbf{TQFT}_k^2 \rightarrow \mathbf{TQFT}_k^2, \quad \mathcal{H} := \mathcal{F}\mathcal{I} : \mathbf{Frob}_k \rightarrow \mathbf{Frob}_k$$

D'una banda es comprova amb relativa facilitat que \mathcal{H} sí que és el functor identitat.

D'altra banda, ja hem dit que \mathcal{H} no és la identitat. Busquem una transformació natural $\varsigma : \mathcal{H} \rightarrow 1$. Procedirem a desglossar què és realment aquesta transformació natural i com la construïm. En primer lloc es demana que per tota Z, Z' TQFTs i $\omega : Z \rightarrow Z'$ transformació natural el següent diagrama commuti

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(Z) & \xrightarrow{\varsigma^Z} & Z \\ \downarrow \mathcal{H}(\omega) & & \downarrow \omega \\ \mathcal{H}(Z') & \xrightarrow{\varsigma^{Z'}} & Z' \end{array}$$

Les fletxes d'aquest diagrama són transformacions naturals entre TQFTs, per comprovar la commutativitat considerem un objecte arbitrari Σ i comprovem la commutativitat d'aquest altre diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}(Z))(\Sigma) & \xrightarrow{(\varsigma^Z)_\Sigma} & Z(\Sigma) \\ \downarrow \mathcal{H}(\omega)_\Sigma & & \downarrow \omega_\Sigma \\ (\mathcal{H}(Z'))(\Sigma) & \xrightarrow{(\varsigma^{Z'})_\Sigma} & Z'(\Sigma) \end{array}$$

A continuació definim la transformació ς i calculem els elements necessaris per veure que el diagrama commuta. Si c és un cercle aleshores existeix un isomorfisme $\varphi_c : Z(C) \cong Z(c)$. Si $\Sigma = c_1 \sqcup \cdots \sqcup c_n$ definim $(\varsigma Z)\Sigma$ a partir del següent diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{c_i} A_{c_i} & \xrightarrow{(\varsigma Z)\Sigma} & Z(\Sigma) \\ \bigotimes_{c_i} \varphi_{c_i} \downarrow & \nearrow \cong & \\ \bigotimes_{c_i} Z(c_i) & & \end{array}$$

D'altra banda, si $\omega : Z \rightarrow Z'$ és una transformació natural, $\mathcal{F}(\omega) = \omega C$ i $\mathcal{K}(\omega)$ és una transformació natural tal que $\mathcal{K}(\omega)\Sigma = (\omega C)^{\otimes n}$. D'aquesta manera podem reescriure el diagrama com:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{c_i} A_{c_i} & \xrightarrow{(\omega C)^{\otimes n}} & \bigotimes_{c_i} A'_{c_i} \\ \bigoplus_{c_i} \varphi_{c_i} \downarrow & & \downarrow \bigotimes_{c_i} \varphi'_{c_i} \\ Z(\Sigma) & \xrightarrow{\omega\Sigma} & Z'(\Sigma) \end{array}$$

Observem que els morfismes del diagrama són isomorfismes de FA . Com hem vist en la proposició 2.1.11 que els isomorfismes entre FA , si existeixen, són únics, $\omega\Sigma$ és determinat per la resta del diagrama i aquest ha de commutar.

L'equivalència de categories ens indica que una àlgebra de Frobenius determina una única classe d'isomorfisme de *TQFTs*.

Apèndix A

Notes d'Àlgebra

Definició A.0.1. Una R -àlgebra commutativa és un R -mòdul A conjuntament amb dos aplicacions R -lineals

$$\beta : A \otimes A \longrightarrow A, \quad g : R \longrightarrow A$$

tals que els següents diagrames commuten

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes \beta} & A \otimes A \\
 \downarrow \beta \otimes I & & \downarrow \beta \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\beta} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 R \otimes A & \xrightarrow{g \otimes I} & A \otimes A & \xleftarrow{I \otimes g} & A \otimes R \\
 \searrow \cong & & \downarrow \beta & & \swarrow \cong \\
 & & A & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 \beta \nearrow & & \nwarrow \beta \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\sigma} & A \otimes A
 \end{array}$$

sent σ l'aplicació lineal induïda per l'aplicació bilinear que permuta les components. A β l'anomenem producte i a g unitat. Es pot distingir que el primer diagrama és la propietat associativa, el segon la unitària i el tercer per la commutativa.

Definició A.0.2. Una R -coàlgebra és un R -mòdul A conjuntament amb dues aplicacions R -lineals

$$\alpha : A \longrightarrow A \otimes A, \quad f : A \longrightarrow R$$

tals que els següents diagrames commuten

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & A \otimes A \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \otimes I \\
 A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes \alpha} & A \otimes A \otimes A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & A & & & \\
 \swarrow \cong & & \downarrow \alpha & & \searrow \cong \\
 R \otimes A & \xleftarrow{f \otimes I} & A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes f} & A \otimes R
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\sigma} & A \otimes A \\
 & \searrow \alpha & \nearrow \alpha \\
 & A &
 \end{array}$$

A α se l'anomena coproducte i a f counitat. El primer diagrama representa la coassociativitat, el segon la counitat i el tercer la cocommutativitat.

Proposició A.0.3. L'estructura (A, α, f) definida a partir del diagrama ?? és una coàlgebra.

Demostració. Hem de comprovar la commutativitat dels diagrames de la definició A.0.2. Per comprovar la coassociativitat fem els càlculs pertinents sobre els elements d'una base i utilitzem les expressions ja calculades en 2.3

$$\alpha(e_i) = \sum_{a,b,m,k} \beta_{a,b}^k \beta_{i,k}^m f_m \lambda^{-1}(e_a^*) \otimes \lambda^{-1}(e_b^*)$$

per tant

$$\begin{aligned}
 (\alpha \otimes I)(e_i) &= \sum_{a,b,m,k,x,y} \beta_{a,b}^k \beta_{i,k}^m \beta_{x,y}^a f_m \lambda^{-1}(e_x^*) \otimes \lambda^{-1}(e_y^*) \otimes \lambda^{-1}(e_b^*) \\
 (I \otimes \alpha)(e_i) &= \sum_{a,b,m,k} \beta_{a,b}^k \beta_{i,k}^m \beta_{x,y}^b f_m \lambda^{-1}(e_a^*) \otimes \lambda^{-1}(e_x^*) \otimes \lambda^{-1}(e_y^*)
 \end{aligned}$$

Aplicant a la primera expressió l'associativitat de $\beta \sum_a \beta_{x,y}^a \beta_{a,b}^k = \sum_a \beta_{y,b}^a \beta_{x,a}^k$ i la reparametrizació $(a, b, x, y) \mapsto (b, y, a, x)$ s'arriba a la igualtat. Per comprovar la cocommutativitat considerem directament

$$\sigma(\alpha(e_i)) = \sum_{a,b,m,k} \beta_{a,b}^k \beta_{i,k}^m f_m \lambda^{-1}(e_b^*) \otimes \lambda^{-1}(e_a^*)$$

considerant que $\beta_{a,b}^k = \beta_{b,a}^k$ i reparametrizant a per b i a l'invers s'arriba al resultat desitjat. Per demostrar l'última igualtat apliquem l'associativitat i la commutativitat de β i arribem a que

$$\begin{aligned}
 \alpha(e_i) &= \sum_{b,k} \beta_{b,i}^k \lambda^{-1} \left(\sum_{m,a} \beta_{m,a}^k f_m e_a^* \right) \otimes \lambda^{-1}(e_b^*) \Rightarrow \\
 (f \otimes I)(\alpha(e_i)) &= \sum_{b,k} \beta_{b,i}^k f_k \otimes \lambda^{-1}(e_b^*)
 \end{aligned}$$

Mitjançant l'isomorfisme usual, que denotarem per φ , es veu que

$$\varphi(e_i) = 1 \otimes e_i = 1 \otimes \lambda^{-1} \left(\sum_{b,k} \beta_{i,b}^k f_k e_b^* \right) = \sum_{b,k} \beta_{i,b}^k f_k \otimes \lambda^{-1}(e_b^*)$$

□

Definició-Proposició A.0.4. El producte tensorial de dues R -àlgebres (A', β', g') i (A'', β'', g'') es l' R -àlgebra (A, β, g) definida com

$$\begin{array}{lcl} A & = & A' \otimes A'' \\ \beta : (A' \otimes A'') \otimes (A' \otimes A'') & \xrightarrow{\cong} & (A' \otimes A') \otimes (A'' \otimes A'') \xrightarrow{\beta' \otimes \beta''} A' \otimes A'' \\ g : R & \xrightarrow{\cong} & R \otimes R \xrightarrow{g' \otimes g''} A' \otimes A'' \end{array}$$

es denota per $A = A' \otimes A''$

Definició-Proposició A.0.5. El producte tensorial de dues R -coàlgebres (A', α', f') i (A'', α'', f'') es l' R -àlgebra (A, α, f) definida com

$$\begin{array}{lcl} A & = & A' \otimes A'' \\ \alpha : A' \otimes A'' & \xrightarrow{\alpha' \otimes \alpha''} & (A' \otimes A') \otimes (A'' \otimes A'') \xrightarrow{\cong} (A' \otimes A'') \otimes (A' \otimes A'') \\ f : A & \xrightarrow{f' \otimes f''} & R \otimes R \xrightarrow{\cong} R \end{array}$$

es denota per $A = A' \otimes A''$

Definició-Proposició A.0.6. La summa de dues R -àlgebres (A', β', g') i (A'', β'', g'') es l' R -àlgebra (A, β, g) definida com $A := A' \oplus A''$, β definida a partir del següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (A' \oplus A'') \otimes (A' \oplus A'') & \xrightarrow{\beta} & A' \oplus A'' \\ \downarrow \cong & & \uparrow \beta' \oplus \beta'' \\ (A' \otimes A') \oplus (A' \otimes A'') \oplus (A'' \otimes A') \oplus (A'' \otimes A'') & & \\ \downarrow \pi & & \\ (A' \otimes A') \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus (A'' \otimes A'') & \xrightarrow{\cong} & (A' \otimes A') \oplus (A'' \otimes A'') \end{array}$$

i definim $g : k \rightarrow A' \otimes A''$ com $g(x) = g'(x) + g''(x)$.

Definició-Proposició A.0.7. La summa de dues R -coàlgebres (A', α', f') i (A'', α'', f'') és la R -coàlgebra (a, α, f) definida com $A := A' \oplus A''$, α definida a partir del següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A' \oplus A'' & \xrightarrow{\alpha} & (A' \oplus A'') \otimes (A' \oplus A'') \\ \downarrow \alpha' \oplus \alpha'' & & \uparrow \subseteq \\ (A' \otimes A') \oplus (A'' \otimes A'') & \xrightarrow{\cong} & (A' \otimes A') \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus (A'' \otimes A'') \end{array}$$

Definim $f : A' \oplus A'' \rightarrow k$ com $f(x + y) = f'(x) + f''(y)$ sent $x \in A'$ i $y \in A''$.

Proposició A.0.8. Sigui A una k -àlgebra de dimensió finita. Tot element no nul d' A és divisor de qualsevol generador d' $\mathcal{S} = \text{ann } \mathcal{N}$.

Demostració. Sigui $b \in A$ no nul. Escollim una base $\{b_1, \dots, b_r\}$ d' \mathcal{N} i definim recursivament

$$m_i := \max\{m \in \mathbb{N} : bb_1^{m_1} \dots b_{i-1}^{m_{i-1}} b_i^m\}$$

Definim $b' := b_1^{m_1} \dots b_r^{m_r} \neq 0$. Observem que per tota i $bb' \otimes b_i = 0$, per tant $bb' \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$. Per tant si a és un generador $a = b(\lambda b')$. \square

Apèndix B

Notes de Topologia Diferencial

Definició B.0.9. Una aplicació diferenciable $f : M \rightarrow N$ és transversal a una subvarietat $A \subseteq N$ si per tot $x \in M$ tal que $f(x) \in A$ es compleix que

$$T_x f(M_x) + A_{f(x)} = N_{f(x)}$$

es denota per $f \pitchfork A$.

Teorema B.0.10. Sigui $f : M \rightarrow N$ una aplicació de classe C^r amb $r \geq 1$ i $A \subseteq N$ una subvarietat de classe C^r . Si f és transversal a A aleshores $f^{-1}(A)$ és una subvarietat de classe C^r d' M . La codimensió d' $f^{-1}(A)$ en M i la d' A en N són la mateixa

Teorema B.0.11 (de transversalitat de jets). Siguin M i N dues varietats diferencials de classe C^∞ i A_0, \dots, A_q subvarietats de $J^r(M, N)$ de classe C^∞ . Si $1 \leq r < s \leq \infty$ el conjunt

$$\{f \in C^2(M, N) : j^r f \pitchfork A_k, k = 0, \dots, q\}$$

és dens en $C^s(M, N)$.

Demostració. [3, capítol 3, secció 2]

□

Apèndix C

Notes sobre Categories monoidals

En aquest apèndix presentem les definicions sobre conceptes categòrics no vistos a grau. No es desenvolupa els temes. Es recullen aquí perquè el lector no les hagi de buscar en fonts externes i contextualitzar-les en el nostre àmbit.

Definició C.0.12. Una transformació natural $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ entre dos functors $\mathcal{S}, \mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ és una funció que assigna a cada objecte c de \mathcal{C} un morfisme $\tau c : \mathcal{S}c \rightarrow \mathcal{T}c$ de \mathcal{C}' tal que per cada morfisme $f : c \rightarrow c'$ de \mathcal{C} el següent diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}c & \xrightarrow{\tau c} & \mathcal{T}c \\ \downarrow \mathcal{S}f & & \downarrow \mathcal{T}f \\ \mathcal{S}c' & \xrightarrow{\tau c'} & \mathcal{T}c' \end{array}$$

Definició C.0.13. Dues categories \mathcal{C} i \mathcal{C}' són isomorfes si existeixen dos functors $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ i $\mathcal{S} : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{T}\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}\mathcal{T}$ són els functors identitat.

Definició C.0.14. Dues categories \mathcal{C} i \mathcal{C}' són equivalents si existeixen dos functors $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ i $\mathcal{S} : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ amb isomorfismes naturals tals que $\mathcal{T}\mathcal{S} \cong I_{\mathcal{C}'}$ i $\mathcal{S}\mathcal{T} \cong I_{\mathcal{C}}$.

Definició C.0.15. Una categoria monoidal $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}, \square, e, \theta, \lambda, \rho \rangle$ és una categoria \mathcal{C} , un bifunctor $\square : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, un objecte e i tres isomorfismes naturals θ, λ i ρ . Explícitament són col·leccions d'isomorfismes definits com

$$\theta = \theta_{a,b,c} : a \square (b \square c) \cong (a \square b) \square c$$

naturals per tot $a, b, c \in \mathcal{C}$ i amb la commutativitat del següent diagrama

$$\begin{array}{ccccc} a \square (b \square (c \square d)) & \xrightarrow{\theta} & (a \square b) \square (c \square d) & \xrightarrow{\theta} & ((a \square b) \square c) \square d \\ \downarrow 1 \square \theta & & & & \downarrow \theta \square 1 \\ a \square ((b \square c) \square d) & \xrightarrow{\theta} & & \xrightarrow{\theta} & (a \square (b \square c)) \square d \end{array}$$

D'altra banda

$$\lambda = \lambda_a : e \square a \cong a, \quad \rho = \rho_a : a \square e \cong a$$

són naturals en a i el següent diagrama commuta per tot $a, b \in \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} a \square (e \square c) & \xrightarrow{\theta} & ((a \square e) \square c) \\ \downarrow 1 \square \lambda & \swarrow \rho \square 1 & \\ a \square c & & \end{array}$$

Finalment $\lambda_e = \rho_e$.

Diem que la categoria monoidal és estricta si ρ , λ i α són la identitat.

Diem que la categoria és simètrica si existeix un isomorfisme natural γ en a i b

$$\gamma = \gamma_{a,b} : a \square b \cong b \square a$$

tal que el següent diagrama commuta

$$\begin{array}{ccccc} a \square (b \square c) & \xrightarrow{\theta} & (a \square b) \square c & \xrightarrow{\gamma} & c \square (a \square b) \\ \downarrow 1 \square \gamma & & & & \downarrow \theta \\ a \square (c \square b) & \xrightarrow{\theta} & (a \square c) \square b & \xrightarrow{\gamma \square 1} & (c \square a) \square b \end{array}$$

i es compleix

$$\gamma_{a,b} \circ \gamma_{b,a} = 1_{b \square a}, \quad \rho_b = \lambda_b \circ \gamma_{b,e} : b \square e \cong b$$

Definició C.0.16. Un functor monoidal $(F, F_2, F_0) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ consisteix d'aquestes tres dades:

- Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$.
- Per cada parell d'objectes a i b de \mathcal{C} un morfisme

$$F_2(a, b) : F(a) \square' F(b) \rightarrow F(a \square b)$$

de \mathcal{C}' natural en a i en b .

- Un morfisme de \mathcal{C}' $F_0 : e' \rightarrow F(e)$

Tal que els següents diagrames commuten

$$\begin{array}{ccc}
 F(a) \square' (F(b) \square' F(c)) & \xrightarrow{\theta'} & (F(a) \square' F(b)) \square' F(c) \\
 \downarrow 1 \square F_2 & & \downarrow F_2 \square' q \\
 F(a) \square' (F(b \square c)) & & (F(a \square b)) \square' F(c) \\
 \downarrow F_2 & & \downarrow F_2 \\
 F(a \square (b \square c)) & \xrightarrow{F(\theta)} & F((a \square b) \square c)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 F(b) \square' e' & \xrightarrow{\rho} & F(b) \\
 \downarrow 1 \square F_0 & & \uparrow F(\rho) \\
 F(b) \square' F(e) & \xrightarrow{F_2} & F(b \square e)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 e' \square' F(b) & \xrightarrow{\lambda} & F(b) \\
 \uparrow F_0 \square 1 & & \uparrow F(\lambda) \\
 F(e) \square' F(b) & \xrightarrow{F_2} & F(e \square b)
 \end{array}$$

Diem que un functor monoidal és fort quan F_0 i $F_2(a, b)$ són isomorfismes.

Definició C.0.17. Una transformació natural monoidal $\tau : (F, F_2, F_0) \rightarrow (G, G_2, G_0)$ entre dos functors monoidals és una transformació natural ordinària $\tau : F \rightarrow G$ tal que els següents diagrames commuten

$$\begin{array}{ccc}
 F(a) \square' F(b) & \xrightarrow{F_2} & F(a \square b) \\
 \downarrow \tau a \square \tau b & & \downarrow \tau a \square b \\
 G(a) \square' G(b) & \xrightarrow{G_2} & G(a \square b)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 e' & \xrightarrow{F_0} & Fe \\
 \searrow & & \downarrow \tau e \\
 & & Ge
 \end{array}$$

Bibliografia

- [1] John W. Barrett. Quantum gravity as topological quantum field theory. *J. Math. Phys.*, 36:6161–6179, 1995. doi: 10.1063/1.531239.
- [2] Robbert Dijkgraaf. Les houches lectures on fields, strings and duality. In *Les Houches Summer School on Theoretical Physics*, 1995.
- [3] M. W. Hirsch. *Differential Topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1976.
- [4] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [5] Lowell Abrams. Two-dimensional topological quantum field theories and frobenius algebras. *J. Knot Theory and its Ramifications*, 5:569–587, 1996.
- [6] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [7] Michael Atiyah. Topological quantum field theories. *IHES Publ. Math.*, 68:175–186, 1988.
- [8] C. Reiner Irving Curtis. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Graduate Texts in Mathematics. Interscience Publishers, 1962.
- [9] Yu. A. Drozdi and V. V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras*. Springer-Verlag, 1994.
- [10] A. Juhász. Defining and classifying TQFT’s via handle attachments. *ArXiv e-prints*, August 2014.
- [11] G. W. Moore and G. Segal. D-branes and K-theory in 2D topological field theory. *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, September 2006.
- [12] Joachim Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*, volume 59 of *Student Texts*. London Mathematical Society, 2004.

-
- [13] Daniel S. Freed. Lectures on topological quantum field theory. In *GIFT Summer School on Recent Problems in Mathematical Physics*, 1992.
- [14] D. S. Freed. The cobordism hypothesis. *ArXiv e-prints*, October 2012.
- [15] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*, chapter 16. Springer-Verlag, 2002.
- [16] D. Zagier. Applications of the representation theory of finite groups. In *Graphs on Surfaces and Their Applications*.
- [17] J. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, 1963.
- [18] Jacob Lurie. On the classification of topological field theories. *Current Developments in Mathematics*, 2008:129–280, 2009. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cdm/1254748657>.