



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Análisis del caos en series temporales financieras vía el estudio de atractores

Maria Dolors Gil Doménech



Aquesta tesi doctoral està subjecta a la llicència **Reconeixement- Compartiqual 3.0. Espanya de Creative Commons.**

Esta tesis doctoral está sujeta a la licencia **Reconocimiento - Compartiqual 3.0. España de Creative Commons.**

This doctoral thesis is licensed under the **Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0. Spain License.**

Análisis del caos en series temporales financieras vía el estudio de atractores

Maria Dolors Gil Doménech

Director y tutor: Dr. Antonio Alegre Escolano



UNIVERSITAT DE BARCELONA



Doctorado en Empresa

Barcelona, 2013

*A mi familia,
en especial a mi padre*

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer y recordar a todas aquellas personas que, directa o indirectamente, han colaborado a que la presente tesis fuese una realidad.

En primer lugar, quisiera dar las gracias a mi director y tutor, el Dr. Antonio Alegre, por su inestimable ayuda en la elaboración de la tesis. Por extensión, agradecer a la Universitat de Barcelona, y concretamente al Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial, dirigido por el Dr. Roman Adillon, el haberme dado la posibilidad de formarme como investigadora y ser parte del departamento durante cuatro años.

Me gustaría agradecer también a la Universitat Internacional de Catalunya, y en especial a la Facultat de Ciències Econòmiques i Socials, bajo la dirección del Dr. Toni Mora, el haber apostado por mí y haberme dado todas las facilidades para que pudiese compatibilizar el trabajo con la realización de la tesis. Gracias a mis compañeros y compañeras de la facultad por su apoyo diario y su alegría contagiosa.

Muy especialmente, quiero dar las gracias a mis padres, Guillem y Laura, por haber sido mi guía en todo momento, por su paciencia y amor incondicional, por haberme dado todo lo que tengo. Gracias a mis hermanas, Mónica, Gloria y Olga, a mis cuñados, Borja y Kike, a mis sobrinas, Rocío y María, y a todos los que vengan, por ser pilares fundamentales en mi vida. Gracias también a mis abuelos, Joaquín y Dolores, Tomás y Pepita, por cuidar siempre de mí. Por último, agradecer a mi gran familia, la compuesta por todos mis amigos y amigas, el haberme acompañado en este proceso y estar siempre a mi lado.

Gracias a Dios por todo y por todos.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Hipótesis	9
1.4. Objetivos	9
1.4.1. Objetivo general	10
1.4.2. Objetivos específicos	10
1.5. Fases	11
1.6. Metodología	12
1.7. Estructura	13
1.8. Fuentes de investigación	15
1.9. Mapa conceptual	16
2. Base conceptual	19
2.1. Sistemas considerados	19
2.2. Dinámica de los sistemas	20
2.2.1. Sistemas dinámicos en el dominio continuo	23
2.2.2. Sistemas dinámicos en el dominio discreto	25
2.3. Espacio topológico	25
2.4. Distancia y espacio métrico	26

2.4.1. Noción de distancia y espacio métrico	26
2.4.2. Tipos de distancias	27
2.5. Dimensiones del objeto abstracto	28
2.5.1. Noción de dimensión	28
2.5.2. Tipos de dimensiones	29
2.5.3. Relación entre las dimensiones	35
2.6. Atractores	35
2.6.1. Tipos de atractores	37
2.7. Sistemas caóticos	40
3. Matemática del atractor	43
3.1. Concepto de atractor	43
3.2. Existencia del atractor	44
3.3. Dimensión de inmersión	46
3.4. Reconstrucción del espacio de estados	50
3.4.1. Teorema de inmersión	50
3.4.2. Tiempo de retardo	53
3.5. Análisis espectral singular	57
3.6. Caoticidad	64
4. Detección de caos	65
4.1. Aplicación de filtros	65
4.1.1. Filtro para la dependencia lineal	65
4.1.2. Filtros para el ruido	66
4.2. Test de independencia	69
4.2.1. Dimensión de correlación	69
4.2.2. Test BDS	73
4.2.3. Test <i>Chi-square</i> para patrones ordinales	74

4.3. Test de no-linealidad	75
4.3.1. Test de Kaplan	76
4.3.2. Test de Theiler	77
4.4. Test para la sensibilidad a las condiciones iniciales	78
4.4.1. Exponente de Lyapunov	78
4.4.2. Algoritmo propuesto	84
4.4.3. Simulación del algoritmo para la sensibilidad a las condiciones iniciales	86
4.5. Test para detectar órbitas densas	88
4.5.1. Test de diferencias cercanas	88
4.5.2. Algoritmo propuesto	91
4.5.3. Simulación del algoritmo para detectar órbitas densas	92
4.6. Test para la transitividad topológica	93
4.6.1. Algoritmo propuesto	94
4.6.2. Simulación del algoritmo para la transitividad topológica	97
4.7. Otros test para la detección de caos	100
4.7.1. Test 0-1	100
4.7.2. Test SALI	102
5. Sistema financiero	105
5.1. Introducción	105
5.2. Inmersión	113
5.2.1. Dimensión de inmersión	113
5.2.2. Tiempo de retardo	117
5.2.3. Inmersión de las series	123
5.3. Análisis espectral singular	132
5.4. Análisis de atractores	137
5.4.1. Existencia de atractor	137

5.4.2. Órbitas densas	146
5.4.3. Transitividad topológica	151
5.5. Búsqueda de caos	158
5.5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales	158
5.6. Resultados	163
6. Efectos de la crisis	167
6.1. Introducción	167
6.2. Inmersión	171
6.2.1. Dimensión de inmersión	171
6.2.2. Tiempo de retardo	176
6.2.3. Inmersión	181
6.3. Análisis espectral singular	185
6.4. Análisis de atractores	190
6.4.1. Existencia de atractor	190
6.4.2. Órbitas densas	195
6.4.3. Transitividad topológica	199
6.5. Búsqueda de caos	202
6.5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales	202
6.6. Resultados	205
7. Conclusiones	207
8. Bibliografía	217
9. Anexo: programas	229
9.1. Programa diseñado para la elección de la dimensión de inmersión	229
9.2. Programa diseñado para la elección del retardo	231
9.3. Programa diseñado para testar la contractividad	235

9.4. Programa diseñado para testar la presencia de órbitas densas	238
9.5. Programa diseñado para testar la transitividad topológica	241
9.6. Programa diseñado para testar la sensibilidad a las condiciones iniciales	246

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación

Este trabajo consiste en la proposición de una metodología para la búsqueda de caos vía el análisis de atractores, con el objetivo de determinar si diversas series financieras presentan comportamientos caóticos. El estudio se realiza mediante la aplicación de algoritmos que testan las propiedades del caos en series temporales.

La teoría del caos permite atribuir reglas deterministas a fenómenos aparentemente aleatorios. Gracias al determinismo inherente a los sistemas caóticos es posible, dentro de un cierto rango, hacer predicciones sobre su comportamiento a corto plazo. Sin embargo, esta predictibilidad desaparece a medio y largo plazo, dado que una de las características principales de los sistemas caóticos es su sensibilidad a las condiciones iniciales, por la cual una pequeña modificación de estas condiciones produce importantes cambios en el sistema con el paso del tiempo. De lo anterior se deriva la importancia que tiene la búsqueda de caos en los mercados financieros, ya que el paso de una concepción de mercado aleatoria a una caótica justificaría el uso de técnicas de previsión a corto plazo. Siguiendo esta idea, existe una rama de investigación en teoría del caos que pretende realizar una modelización caótica en

series económicas y financieras con el fin de predecir comportamientos de mercado a corto plazo.¹

Un sistema caótico se caracteriza por tener órbitas densas, ser topológicamente transitivo y ser sensible a las condiciones iniciales. Las dos primeras características implican la presencia de un atractor, esto es, una zona del espacio hacia la que tienden las trayectorias del sistema. Por su parte, la sensibilidad a las condiciones iniciales hace que las trayectorias se muevan de un modo impredecible a medio y a largo plazo dentro del atractor, y que este pueda calificarse de caótico.

Si el sistema financiero poseyese un atractor caótico sería posible, por tanto, hallar una zona del espacio hacia la cual tenderían las trayectorias. Dentro de esta zona resultaría prácticamente imposible, como mínimo a medio y a largo plazo, predecir el movimiento de las trayectorias; sin embargo, sí podría asegurarse que, si se hallasen fuera del atractor, más pronto o más tarde serían atraídas hacia él.

Así, dado que un sistema se considera caótico si presenta un atractor caótico, en el presente trabajo se pretende determinar si el sistema financiero podría calificarse de caótico, y para ello se propone una metodología que intenta detectar este tipo de atractor en series temporales. La metodología propuesta se aplica a distintas series financieras formadas por los valores de cierre de varios índices bursátiles. En caso de que se obtengan las mismas conclusiones para todas las series financieras

¹Pueden hallarse aplicaciones del caos a modelos económicos o financieros, entre muchos otros, en:

Chen, H.-J.; Li, M.-C. (2008): *Chaotic dynamics in a monetary economy with habit persistence*. Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 65, pp. 245-260.

Hallegatte, S. et al. (2008): *Business cycles, bifurcations and chaos in a neo-classical model with investment dynamics*. Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 67, pp. 57-77.

Naimzada, A.K.; Ricchiuti, G. (2008): *Heterogeneous fundamentalists and imitative processes*. Applied Mathematics and Computation, vol. 199, pp. 171-180.

analizadas, se estará validando además el teorema de Takens. Este teorema asegura que existe una correspondencia real entre el sistema original y un sistema observado, lo cual implica que es indiferente la serie de observaciones de la que se parta en el estudio a la hora de obtener conclusiones sobre el comportamiento del sistema global.

El campo de conocimiento en el que se enmarca el presente trabajo es el de matemática aplicada al ámbito financiero.

1.2. Antecedentes

Las bases de la teoría del caos fueron planteadas por Poincaré² en 1908 en un trabajo sobre el problema de los tres cuerpos, que consiste en determinar en cualquier instante las posiciones y velocidades de tres cuerpos de masa cualquiera, partiendo de unas posiciones y velocidades dadas. En este trabajo Poincaré concluyó que la evolución de un sistema con tres cuerpos tenía dependencia sensible a las condiciones iniciales, dado que una pequeña perturbación en el estado inicial podía llevar a un estado completamente distinto.

Propiamente, el descubrimiento del caos no se produjo hasta que Lorenz construyó un modelo que pretendía que sirviese para pronosticar fenómenos atmosféricos. Buscando las soluciones de dicho modelo se dio cuenta de que pequeñas alteraciones en las variables iniciales producían resultados con grandes divergencias. Se dedicó a estudiar la matemática subyacente a este fenómeno, publicando las conclusiones en un trabajo en 1963.³

²Poincaré, H. (1963): *Ciencia y método*. Espasa-Calpe, 3ª ed.

³Lorenz, E.N. (1963): *Deterministic non-periodic flows*. Journal of Atmospheric Sciences, vol. 20, pp. 130-141.

El término “caos” fue acuñado en 1976 por Li y Yorke,⁴ aunque aún no era un concepto totalmente definido.

Un tiempo más tarde el estudio del caos se trasladó al laboratorio, mediante experimentos hechos para observar caos de baja dimensión, con un número reducido de variables que lo generaban. El caos pasaba así de una simple curiosidad matemática a una realidad física.

El siguiente paso sería tratar de encontrar caos en la realidad, y se crearon gran número de instrumentos para esta finalidad. Esta línea de investigación ha seguido desarrollándose hasta el día de hoy, dando lugar a varios test que se usan para buscar caos en series temporales, como son la dimensión de correlación, desarrollada, entre otros, por Grassberger y Procaccia;⁵ el test BDS, creado por Brock, Dechert y Scheinkman;⁶ el test propuesto por Kaplan;⁷ el exponente de Lyapunov, sugerido por Oseledec;⁸ o el test 0-1, elaborado por Gottwald y Melbourne;⁹ entre otros. Sin embargo, algunos de estos instrumentos no testan características propias del caos sino la no-linealidad y otros testan tan solo alguna característica de los sistemas caóticos. Por su parte, si bien el test 0-1 se ha presentado como un test para detectar caos, también ha recibido críticas por parte

⁴Li, T.-Y.; Yorke, J.A. (1975): *Period three implies chaos*. American Mathematical Monthly, vol. 82, pp. 985-992.

⁵Grassberger, P.; Procaccia, I. (1983): *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica D, vol. 9, pp. 189-208.

⁶Brock, W. et al. (1987): *A test for independence based on the correlation dimension*. Working Paper, University of Chicago.

⁷Kaplan, D.T. (1994): *Exceptional events as evidence for determinism*. Physica D, vol. 73, pp. 38-48.

⁸Oseledec, V.I. (1968): *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Transactions of the Moskow Mathematical Society, vol. 19, pp. 197-231.

⁹Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2004): *A new test for chaos in deterministic systems*. Proceedings of the Royal Society of London A, vol. 460, pp. 603-611.

de autores como Hu y otros¹⁰ o Webel.¹¹ Hu y otros aseguran que el test 0-1 no es aconsejable para el análisis de datos empíricos, pues demuestran que proporciona conclusiones erróneas en caso de que el sistema tenga, además del caótico, otro tipo de comportamiento, lo cual es habitual en datos procedentes de la realidad.¹² Por su parte, Webel, tras aplicar el test a series temporales financieras, concluye que el test 0-1 no permite distinguir si el caos es de alta o baja dimensión.¹³

A la hora de realizar un análisis caótico, Yousefpoor y otros autores¹⁴ consideran que la definición matemática del caos proporcionada por Devaney¹⁵ proporciona las propiedades que pueden usarse como prerequisites de un comportamiento caótico. Estas propiedades son la presencia de órbitas densas, la transitividad topológica y la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Con el fin de testar la sensibilidad a las condiciones iniciales lo más habitual es utilizar el exponente de Lyapunov, el cual caracteriza el radio de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Existen diversos modos de calcular

¹⁰Hu, J. et al. (2005): *Reliability of the 0-1 test for chaos*. Physical Review E, vol. 72, 056207. Los creadores del test 0-1 rebaten este artículo en:

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2008): *Comment on "Reliability of the 0-1 test for chaos"*. Physical Review E, vol. 77, 028201.

¹¹Webel, K. (2012): *Chaos in German stock returns - New evidence from the 0-1 test*. Economics Letters, vol. 115, pp. 487-489.

¹²Esta conclusión es rebatida por los autores del test con la publicación de:

Falconer, I. et al. (2007): *Application of the 0-1 Test for Chaos to Experimental Data*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 6, nº 2, pp. 395-402.

¹³Se entiende por *caos de alta dimensión* aquel en el que en su generación intervienen un número elevado de variables. En el caso de *caos de baja dimensión* es reducido el número de variables que intervienen en su generación.

¹⁴Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

¹⁵Devaney, R.L. (1989): *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley.

este exponente, como por ejemplo los propuestos por Gencay y Dechert,¹⁶ Nychka y otros,¹⁷ Eckmann y otros,¹⁸ o Wolf y otros.¹⁹ Recientemente, autores como Kim y Choe²⁰ o Dabrowski²¹ han propuesto nuevos métodos para hallar el máximo exponente de Lyapunov.

La existencia de una órbita densa en un conjunto hace que, bajo la acción de la función de cambio de estado, la órbita se mueva de una vecindad arbitraria a otra, de tal modo que se tienda a “llenar” el espacio. La presencia de órbitas densas se analiza habitualmente a través del test de diferencias cercanas o “close returns test”, cuya base fue planteada por Eckmann y otros.²² Este test parte de la idea de que si las observaciones evolucionan cerca de una órbita densa durante un tiempo suficientemente largo, entonces retornarán a la vecindad tras un intervalo de tiempo determinado, que indica la longitud de la órbita. Puede verse una versión detallada del mismo, entre otros, en el trabajo de Gilmore.²³

¹⁶Gencay, R.; Dechert, W.D. (1992): *An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n -dimensional unknown dynamical system*. Physica D, vol. 49, pp. 142-157.

¹⁷Nychka, D. et al. (1992): *Finding chaos in noisy systems*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 54, n° 2, pp. 399-426.

¹⁸Eckmann, J.-P. et al. (1986): *Lyapunov exponents from time series*. Physical Review A, vol. 34, pp. 4971-4979.

¹⁹Wolf, A. et al. (1985): *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D, vol. 16, pp. 285-317.

²⁰Kim, B.J.; Choe, G.H. (2010): *High precision numerical estimation of the largest Lyapunov exponent*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, pp. 1378-1384.

²¹Dabrowski, A. (2012): *Estimation of the largest Lyapunov exponent from the perturbation vector and its derivative dot product*. Nonlinear Dynamics, vol. 67, pp. 283-291.

²²Eckmann, J.-P. et al. (1986): *Lyapunov exponents from time series*. Physical Review A, vol. 34, pp. 4971-4979.

²³Gilmore, C.G. (2001): *An examination of nonlinear dependence in exchange rates, using recent methods from chaos theory*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 139-151.

Por lo que respecta a la propiedad de transitividad topológica, no se ha encontrado hasta el momento un test comúnmente aceptado que permita determinar si un sistema es topológicamente transitivo a partir del análisis de observaciones del mismo. Según Yousefpoor y otros²⁴ esto supone una importante limitación a la hora de realizar estudios sobre la dinámica caótica de una serie de observaciones, ya que impide que una de las propiedades de los sistemas caóticos pueda ser contrastada. Por ello, algunos autores, como por ejemplo Medio,²⁵ se basan en la idea de que la transitividad topológica implica la presencia de órbitas densas y, así, aseguran que es suficiente con testar la segunda propiedad para conocer la primera.

El análisis caótico de series temporales ha sido utilizado en una amplia gama de disciplinas científicas como la astronomía, biología, química, ecología, ingeniería, medicina, o física. Son varios también los estudios que se han centrado en buscar caos en las ciencias sociales, y en particular en el ámbito económico y financiero. En esta línea se situarían, entre muchos otros, trabajos de investigación como el de Yousefpoor y otros,²⁶ que aplican el análisis del caos a series temporales formadas por los rendimientos de algunas acciones de la bolsa de Teherán; el de McKenzie,²⁷ quien estudia la presencia de órbitas densas en series temporales provenientes de varios índices del mercado de capitales; el trabajo de Abhyankar y otros,²⁸ quienes

²⁴Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

²⁵Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, p. 41.

²⁶Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

²⁷McKenzie, M. (2001): *Chaotic behavior in national stock market indices: new evidence from the close return test*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 35-53.

²⁸Abhyankar, A. et al. (1997): *Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: The S & P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100*. Journal of Business &

hacen un estudio parecido en los índices bursátiles S&P 500, DAX, NIKKEI 225 y FTSE-100; el de Serletis y Shintani²⁹ o el de Shintani y Linton,³⁰ que buscan caos en el mercado de capitales estadounidense; los trabajos de Iseri y otros³¹ o de Özer y Ertokatli,³² que centran el análisis caótico en la bolsa de valores de Estambul; el de Webel,³³ quien usa el test 0-1 para tratar de hallar caos en el mercado de capitales alemán; el trabajo de Bigdeli y Afshar,³⁴ los cuales aplican el análisis caótico a series provenientes del mercado eléctrico iraní; el de Barkoulas y otros autores,³⁵ que buscan caos en el mercado de petróleo; el de Matilla-García,³⁶ quien centra la búsqueda de caos en el mercado de futuros de energía; o el de Olmedo,³⁷ que realiza un análisis caótico del mercado de trabajo español.

Economic Statistics, vol. 15, n° 1, pp. 1-14.

²⁹Serletis, A.; Shintani, M. (2003): *No evidence of chaos but some evidence of dependence in the US stock market*. Chaos, Solitons & Fractals, vol. 17, pp. 449-454.

³⁰Shintani, M.; Linton, O. (2004): *Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos*. Journal of Econometrics, vol. 120, pp. 1-33.

³¹Iseri M. et al. (2008): *A model proposal for the chaotic structure of Istanbul stock exchange*. Chaos, Solitons & Fractals, vol. 36, pp. 1392-1398.

³²Özer, G.; Ertokatli, C. (2010): *Chaotic processes of common stock index returns: An empirical examination on Istanbul Stock Exchange (ISE)*. African Journal of Business Management, vol. 4, n° 6, pp. 1140-1148.

³³Webel, K. (2012): *Chaos in German stock returns - New evidence from the 0-1 test*. Economics Letters, vol. 115, pp. 487-489.

³⁴Bigdeli, N.; Afshar, K. (2009): *Characterization of Iran electricity market indices with pay-as-bid payment mechanism*. Physica A, vol. 388, pp. 1577-1592.

³⁵Barkoulas, J.T. et al. (2012): *A metric and topological analysis of determinism in the crude oil spot market*. Energy Economics, vol. 34, pp. 584-591.

³⁶Matilla-García, M. (2007): *Nonlinear Dynamics in Energy Futures*. The Energy Journal, vol. 28, n° 3, pp. 7-29.

³⁷Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

1.3. Hipótesis

La hipótesis de la que se parte en el presente trabajo es que la teoría del caos podría explicar el comportamiento impredecible que se observa en los mercados financieros.

En el ámbito de las ciencias sociales, y más concretamente en el financiero, gran parte de los modelos con los que se trabaja se basan en la Hipótesis de Mercados Eficientes (HME), la cual dice que los precios en los mercados financieros siguen un camino aleatorio, distribuyéndose normalmente y con variaciones que son estadísticamente independientes. Según esto, el precio por lo general debe oscilar en un rango pequeño, siendo muy baja la probabilidad de una gran fluctuación en el mismo. De la HME se deriva la imposibilidad de correlacionar el futuro con el presente o el pasado y por ello de identificar tendencias o ciclos en los mercados de capitales.

Sin embargo, viendo la frecuencia con la que los precios en los mercados financieros sufren grandes cambios, cabe pensar que esta teoría no resulta del todo apropiada para explicar su comportamiento. La teoría del caos se presenta entonces como una buena alternativa para el análisis de series financieras, permitiendo hallar zonas del espacio en las que se mueven las trayectorias y hacer predicciones a corto plazo sobre la evolución de las mismas.

1.4. Objetivos

El objetivo general y objetivos específicos que se persiguen en la investigación son los que se detallan a continuación:

1.4.1. Objetivo general

Analizar series temporales financieras desde una perspectiva caótica vía el estudio de atractores.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Plantear los fundamentos teóricos del concepto de atractor y de caos.

Se busca con ello determinar y definir cuál es la base conceptual necesaria para entender el concepto de caos. Asimismo, para la consecución de este objetivo específico habrá que detallar cuáles son las características de los sistemas caóticos, y también será necesario profundizar en el concepto de atractor y ver qué relación tiene este con el caos.

2. Realizar una relación de los instrumentos existentes para la búsqueda de caos.

Para lograr este segundo objetivo específico, se tendrá que realizar una profunda revisión de los métodos existentes para el análisis caótico de series temporales con el fin de determinar qué características del caos testan. Esto permitirá comprobar si hay alguna característica del caos para la que no existe test, y en este caso, ver si es necesaria la elaboración de algoritmos nuevos.

3. Proponer una metodología para el análisis del caos en series temporales vía el estudio de atractores.

En este punto será necesario seleccionar test existentes o elaborar algoritmos propios, que conformarán la metodología a seguir para el análisis de series temporales.

4. Aplicar la metodología propuesta a varias series temporales financieras.

Se perseguirá con este objetivo específico determinar si las series temporales de diversos índices bursátiles presentan propiedades caóticas.

5. Analizar a través de la metodología propuesta los efectos de la crisis originada en el 2007 en las series financieras objeto de estudio.

Con este último objetivo específico se pretenderá observar si la crisis ha tenido tal impacto en el mercado financiero que ha hecho variar los resultados del análisis anterior.

1.5. Fases

El trabajo se estructura en tres fases:

La primera fase consiste en el establecimiento del marco teórico. En esta fase se persiguen los dos primeros objetivos específicos de la investigación, y para tal fin por un lado se profundiza en el concepto de atractor y de caos, definiendo la base conceptual necesaria para ello, y por otro lado se realiza una relación de los instrumentos que han sido propuestos hasta el momento para detectar caos en series temporales.

En la segunda fase se pretende la consecución del tercer objetivo específico, y para ello se propone una metodología a seguir para el análisis caótico de series temporales. Esta metodología consiste en testar las características del caos en las series temporales, y con esa finalidad se seleccionan test existentes y se proponen algoritmos nuevos.

Por último, la tercera parte de la investigación consta del análisis de series temporales, persiguiendo así los dos últimos objetivos específicos. En esta fase se aplica la metodología propuesta a series temporales formadas por valores de cierre

de diversos índices bursátiles, y se analizan tanto las series de los índices desde inicios de su cotización como, por separado, las observaciones correspondientes al periodo de crisis originada a mediados del año 2007, con el fin de observar el impacto de esta reciente crisis en el sistema financiero desde el punto de vista de la teoría del caos.

1.6. Metodología

Son varios los métodos de investigación que se siguen en la elaboración de las distintas partes que integran el presente trabajo.

En la primera fase de la investigación, consistente en el establecimiento del marco teórico, se realiza en primer lugar una búsqueda teórica sobre varios conceptos básicos relacionados con el caos. Asimismo, se lleva a cabo una investigación de tipo descriptivo sobre los diversos métodos existentes para la búsqueda de comportamientos caóticos en series temporales. En esta primera fase se hace una revisión bibliográfica profunda con el fin, por un lado, de entender los conceptos clave de la investigación, y por otro, de conocer el estado de la cuestión en materia de análisis del caos en series temporales.

Para la segunda fase de la investigación, en la que se especifica la metodología a seguir en el análisis, se diseñan algoritmos que tienen por finalidad testar las características del caos en series temporales. Los algoritmos propuestos para testar la presencia de órbitas densas y la sensibilidad a las condiciones iniciales se basan en métodos frecuentemente utilizados expuestos en la fase anterior de investigación. Sin embargo, al no encontrar ningún test comúnmente aceptado para detectar la transitividad topológica en series temporales, en esta segunda fase se elabora un algoritmo nuevo para testar esta característica.

Por último, en la tercera fase de la investigación se lleva a cabo el análisis de diversas series temporales financieras formadas por los valores de cierre de varios índices bursátiles. El programa soporte básico que se utiliza para el análisis es *The R-project for Statistical Computing*.³⁸ Este software permite realizar representaciones gráficas y proporciona instrumentos necesarios para el análisis, como son por ejemplo el filtraje espectral, la realización de confinamientos o la obtención de funciones de densidad, entre otros. Además, este programa incorpora un lenguaje de programación propio que posibilita la elaboración de algoritmos y la aplicación de los mismos.

1.7. Estructura

El trabajo se estructura en nueve capítulos: el actual, que contiene la introducción, cinco capítulos que recogen la investigación, otro con las conclusiones y, para acabar, dos últimos capítulos que contienen la bibliografía principal utilizada y un anexo con los programas que se aplican en el análisis. A continuación se resume brevemente el contenido de los cinco capítulos centrales.

El capítulo 2 proporciona una serie de definiciones descriptivas de conceptos a los que posteriormente se hará referencia. De modo general, se empieza definiendo sistema para, a continuación, pasar a los sistemas dinámicos. Se explica también qué son un espacio topológico y un espacio métrico. Dentro de este último, se define distancia y se detallan distintos tipos de distancias. Se hace lo mismo con el concepto de dimensión: se presenta su definición y se distinguen varios tipos de dimensiones. A continuación, se da una definición de un modo descriptivo del

³⁸Para una visión más detallada de este programa puede consultarse la página principal del proyecto *R*:

<http://www.r-project.org/>

concepto de atractor y se proporcionan ejemplos de atractores. Por último, se definen los sistemas caóticos.

El capítulo 3 se centra en la matemática del atractor, profundizando en su descripción de un modo formal. Se empieza definiendo formalmente atractor, para pasar a especificar las condiciones necesarias para que haya atractor en un sistema, y para que este sea único. Más tarde, se desarrollan una serie de conceptos que serán necesarios en el estudio para detectar la presencia de atractores, como son la dimensión de inmersión, la reconstrucción del espacio de estados y el análisis espectral singular. En estos apartados se explican los algoritmos utilizados en el posterior análisis para la elección de una dimensión de inmersión y retardos adecuados. Para acabar, se define la propiedad de caoticidad a partir de los conceptos anteriores.

El capítulo 4 consiste en la relación de algunos de los test que han sido propuestos hasta el momento con el objetivo de intentar detectar comportamientos caóticos. Algunas de las técnicas a las que se hace referencia permiten explorar la dinámica no-lineal del sistema haciendo posible distinguir entre procesos aleatorios y deterministas. En este capítulo se exponen con más detalle aquellos test que posteriormente se emplearán en el estudio. Además, se especifican los pasos en que consisten los algoritmos propuestos para testar las características de los sistemas caóticos: presencia de órbitas densas, transitividad topológica y sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el capítulo 5 se empieza detallando la metodología que se seguirá en el análisis del caos de varias series temporales financieras. El estudio se centra en los valores de cierre de varios índices bursátiles, concretamente del Standard & Poor's 500, del Dow Jones Industrial Average, del NASDAQ Composite, del FTSE 100, del NIKKEI 225, del Hang Seng, del DAX 30 y del IBEX 35, con datos desde

inicios de su cotización hasta principios del 2009. Con el fin de intentar detectar la presencia de atractores caóticos en las series, en primer lugar se procede a elegir la dimensión de inmersión y el retardo adecuados. A continuación, se realiza una inmersión de los datos y se representan las trayectorias en su base óptima. Además, se estudia si es posible que exista un atractor y si este es único. El paso siguiente consiste en testar la presencia de órbitas densas y la transitividad topológica para determinar si hay atractor. Por último, se analiza la sensibilidad a las condiciones iniciales para ver si el atractor es caótico.

En el capítulo 6 se repite el análisis anterior, aplicándolo esta vez a las series temporales con datos que van desde agosto del 2007 hasta marzo del 2011, con el fin de estudiar el impacto de la crisis en el sistema. Se persigue, aislando estas últimas observaciones, ver si el efecto de la crisis ha sido tal que haya hecho a las trayectorias salir del atractor, en el caso de que se hallaran en él.

1.8. Fuentes de investigación

Las fuentes de investigación utilizadas y a las que se hace referencia a lo largo del trabajo son principalmente artículos de revistas de interés internacional, la mayoría indexadas, también tesis doctorales y libros relacionados con el tema de estudio.

De entre las revistas indexadas más consultadas para la elaboración del presente trabajo destacan las siguientes:

- Chaos, Solitons and Fractals
- Journal of Time Series Analysis
- Physical Review A
- Physical Review E

A continuación se citan los artículos y libros especialmente relevantes en la investigación, sobretodo para la profundización en el concepto de caos y para el desarrollo de la metodología a seguir:

- Matilla-García, M. (2007): *Nonlinear Dynamics in Energy Futures*. The Energy Journal, vol. 28, n° 3, pp. 7-29.
- Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.
- Paissan, G. (2005): *Métodos de Análisis de Datos Caóticos*. Incertezas experimentales y Teoría de errores, Monografías 2005.
- Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

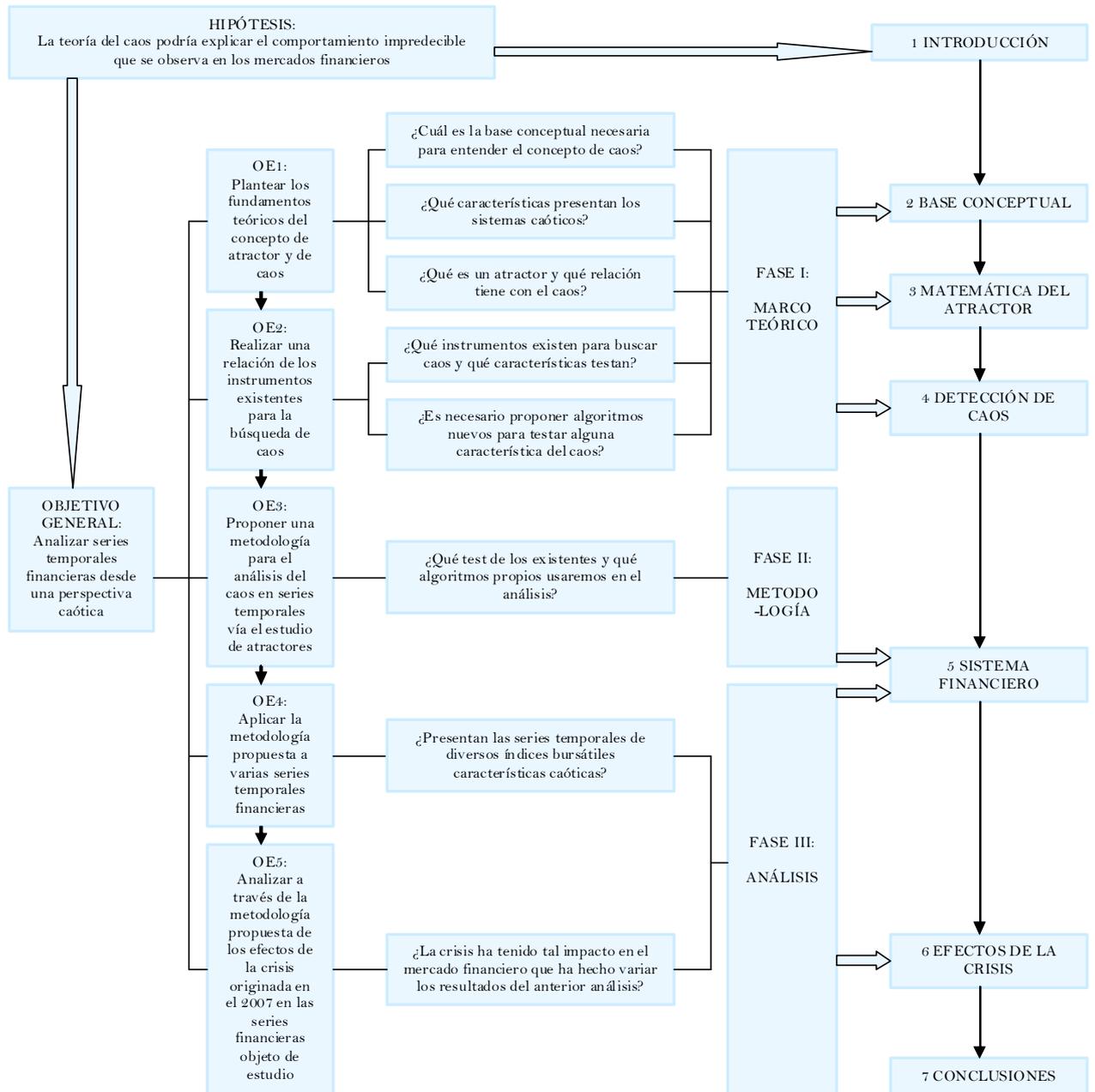
Las series temporales financieras objeto de estudio se obtienen de las bases de datos proporcionadas por Econstats.³⁹

1.9. Mapa conceptual

A modo de resumen, se muestra a continuación el mapa conceptual, que contiene la hipótesis, los objetivos y las preguntas que responden, las fases de la investigación y la estructura del trabajo, anteriormente mencionados:

³⁹<http://www.econstats.com/>

1.9. MAPA CONCEPTUAL



Capítulo 2

Base conceptual

2.1. Sistemas considerados

Se considera *sistema* a un conjunto de elementos con una relación orgánica entre sí, siendo esta una relación que da al conjunto un comportamiento de unidad. El término sistema ha adquirido varios usos especializados, si bien habitualmente se refiere a conjuntos estructurados y organizados.¹

Se entiende por *sistema dinámico* aquel que presenta una evolución a lo largo del tiempo.² Por tanto, un sistema será dinámico si está sometido a cambios a lo largo del tiempo, dependiendo estos cambios, entre otros factores, de la situación en que se haya encontrado el sistema anteriormente.

¹Véanse por ejemplo las definiciones siguientes:

- “conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a un determinado objeto”. Fuente: Real Academia Española;

- “cualquier entidad integradora de elementos como un todo que exhiba propiedades de globalidad en donde el todo es superior a la suma de las partes”. Fuente: Nieto, U. (1998): *Historia del tiempo en economía. Predicción, caos y complejidad*. McGraw-Hill.

²Consideraremos el tiempo ($t \in \mathbb{R}$) como la variable sobre la que se producen los cambios del sistema, pero no la causante de los mismos.

El *estado del sistema* es un vector que refleja la medición³ de elementos del sistema en un instante, es decir, que muestra las magnitudes simultáneas fundamentales del mismo en un momento determinado.

La *variable estado*, denotada por el vector $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$,⁴ es una función del tiempo cuyo valor en cualquier momento del tiempo es el estado del sistema.

El conjunto de todos los posibles estados de un sistema se denomina *espacio de estados* (M). Así, el espacio de estados será aquel en el que evoluciona la variable estado $\mathbf{x}_t \in M \subset \mathbb{R}^n$.

2.2. Dinámica de los sistemas

Entre los distintos estados de un sistema dinámico existen relaciones, que pueden modelizarse matemáticamente, denominadas *leyes o ecuaciones de movimiento, de evolución o de cambio de estado*.⁵ Dadas las ecuaciones de movimiento, puede determinarse la evolución del estado del sistema.

La *trayectoria* de un sistema es un subconjunto cerrado de la evolución de su estado. Esta trayectoria dependerá de las condiciones iniciales de las que parta el sistema y de las relaciones funcionales de cambio de estado del mismo.⁶

³Entendiendo por *medición* la asignación de una n -pla de números reales que representa unívocamente el estado del sistema bajo observación.

⁴Siendo $n \in \mathbb{N}$ el número de argumentos que componen el estado, que puede tender a ∞ .

⁵Fuente:

Fernández, A. (1994): *La economía de la complejidad: Economía dinámica caótica*. McGraw-Hill.

⁶Fuente:

Escot, L. (2000): *Dinámica Económica Caótica: Una Aplicación al Estudio del Ciclo y el Crecimiento Económico*. Tesis doctoral.

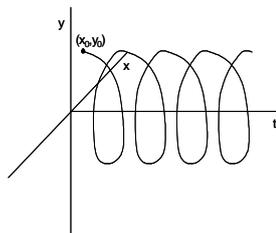


Gráfico 1. Ejemplo de trayectoria a través de (x_0, y_0) , que representa el valor de (x, y) cuando $t = 0$, en el espacio (x, y, t) de \mathbb{R}^3

Una *órbita* del sistema es una representación atemporal en \mathbb{R}^n de la trayectoria en el periodo orbital, siendo este el intervalo de tiempo en que tarde el sistema en volver a un estado asumido anteriormente. En este sentido, no todo sistema dinámico presenta órbitas. Y en caso de presentarlas el periodo orbital puede ir variando.

Sin embargo, en el presente trabajo se utilizará el término *órbita* en un sentido más amplio, entendiéndolo por *órbita* del sistema una representación atemporal en \mathbb{R}^n de su trayectoria.

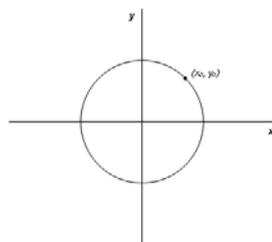


Gráfico 2. Ejemplo de órbita a través de (x_0, y_0) en el espacio (x, y) de \mathbb{R}^2 , la cual es una proyección en el plano (x, y) de la trayectoria temporal

Se entiende por *flujo* de un sistema tanto el conjunto de todas las trayectorias del sistema, formadas a partir de todas las posibles condiciones iniciales del mismo,

como la función de cambio de estado que las genera.

Así, en este último sentido, el flujo F de un sistema será una función continua de la forma:⁷

$$F : M \times \mathbb{R} \rightarrow M,$$

$$F(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in M, t \in \mathbb{R},$$

donde M es el espacio de estados.

El flujo o función de cambio de estado del sistema es un *homeomorfismo*: una aplicación topológica diferenciable,⁸ continua en el espacio de estados,⁹ biyectiva y que tiene inversa¹⁰ también continua en M . Que sea biyectiva implica que cada

⁷Fuente:

Paissan, G. (2005): *Métodos de Análisis de Datos Caóticos*. Incertezas experimentales y Teoría de errores, Monografías 2005.

⁸Una aplicación es *diferenciable en un intervalo* si lo es en cada uno de sus puntos.

Una aplicación es *diferenciable en un punto* si existe una transformación lineal en el mismo de tal modo que la parte no-lineal del incremento de la función sea un infinitésimo de orden superior a la norma infinitésima del vector de la variable independiente.

Fuente:

Michavila, F. (1986): *Fundamentos de cálculo numérico: Topología métrica*. Reverté, S.A.

⁹Una aplicación F es *continua en un espacio* si lo es en cada uno de sus puntos.

Una aplicación es *continua en un punto* \mathbf{x}_0 si y sólo si para todo entorno E de la imagen del punto se cumple:

$$\exists E(\mathbf{x}_0) \mid F(E(\mathbf{x}_0)) \subset E(F(\mathbf{x}_0)) .$$

Fuente:

Michavila, F. (1986): *Fundamentos de cálculo numérico: Topología métrica*. Reverté, S.A.

¹⁰Sea F una función cuyo dominio sea el conjunto A y cuya imagen sea el conjunto B , entonces la función *inversa* de F , denotada F^{-1} , tendrá dominio B e imagen A y cumplirá:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff F^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B.$$

estado proviene únicamente de otro y el otro tiene como imagen sólo a este. El homeomorfismo está orientado en el tiempo, lo que significa que no es reversible.

Tanto una trayectoria como un flujo, en un sentido más genérico, se consideran objetos abstractos¹¹ en \mathbb{R}^n orientados en el tiempo.

2.2.1. Sistemas dinámicos en el dominio continuo

Considérese un sistema dinámico cuyo movimiento esté descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias¹² expresado del siguiente modo:

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in M \subset \mathbb{R}^n,$$

donde $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo M un subconjunto abierto¹³ de \mathbb{R}^n , y con $\mathbf{x}' \equiv d\mathbf{x} / dt$, para $t \in \mathbb{R}$ que indica el tiempo y es considerado en su forma continua.

La solución general del sistema anterior será una función de la forma:

$$\theta : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n,$$

¹¹Se entiende por *objeto abstracto* la totalidad de pares entrada-salida que describen el comportamiento de un objeto físico.

Fuente:

Wiberg, D.M. (1971): *Teoría y problemas de espacio de estado y sistemas lineales*. McGraw-Hill.

¹²Una *ecuación diferencial* es una ecuación matemática que relaciona una función desconocida, de una o más variables, con sus derivadas de distintos órdenes.

Una *ecuación diferencial ordinaria (EDO)* es una ecuación diferencial en la que la función desconocida depende de una única variable independiente. En otras palabras, una EDO se caracteriza por contener derivadas de distinto orden respecto a una sola variable independiente.

¹³Entendemos por conjunto *abierto* aquel en el cual los extremos no están incluidos en el conjunto.

Para una definición más formal de conjunto abierto, puede consultarse el apartado 2.6 del presente trabajo.

donde I es un intervalo temporal $I \subset \mathbb{R}$, y θ es una función diferenciable en I que relaciona cada momento temporal con el estado del sistema en ese momento, tal que $\theta(t) \in M$ y:

$$\theta'(t) = f[\theta(t)], \quad \forall t \in I.$$

El flujo F coincidirá con la solución general del sistema. La órbita de θ es el conjunto $\{\theta(t) \mid t \in I\}$. Por otro lado, la trayectoria de θ es el conjunto $\{(t, \theta(t)) \mid t \in I\}$.¹⁴

Se simboliza:

$$\theta(t, \mathbf{x}) \equiv \theta_t(\mathbf{x}),$$

donde $\theta_t(\mathbf{x}) : M \longrightarrow M$.

Si el sistema es observable y tiene un estado \mathbf{x}_0 en el momento inicial t_0 , la solución general del sistema lleva a la particular del mismo, que será:

$$\theta(t_0) = \mathbf{x}_0 \wedge \theta_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_t,$$

por lo que puede expresarse:¹⁵

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 \cdot \int_{t_0}^{t_0+t} f(\theta(\tau)) d\tau.$$

¹⁴Fuente:

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.

¹⁵Fuente:

Dou, A. (1964): *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dossat, S.A.

2.2.2. Sistemas dinámicos en el dominio discreto

Cuando el tiempo t tome sólo valores discretos $t \in \mathbb{Z}$, el sistema dinámico quedará caracterizado del siguiente modo:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_t).$$

Los conceptos definidos en el campo continuo pueden generalizarse al campo discreto, teniendo en cuenta que $\mathcal{F} \equiv \theta$.¹⁶

En el dominio discreto, se puede considerar la trayectoria de longitud k de un punto \mathbf{x} como la sucesión de las iteraciones¹⁷ de \mathcal{F} en ese punto, $\mathcal{F}^k(\mathbf{x})$, siendo \mathcal{F} una aplicación de $M \subset \mathbb{R}^n$ en sí mismo.

Con el fin de conocer la dinámica del sistema bajo la acción del flujo generado por \mathcal{F} en el espacio de estados será necesario investigar la naturaleza de las iteraciones de puntos bajo \mathcal{F} y $\forall t, k \in I$:

$$\mathbf{x}_{t+k} = \mathcal{F}^k(\mathbf{x}_t).$$

2.3. Espacio topológico

Dado un conjunto A , se denomina *topología* a cualquier familia F de partes p_i de A , con $i \in P$, siendo P el número de partes, que verifique las siguientes condiciones:¹⁸

¹⁶Fuente:

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.

¹⁷Consistiendo la *iteración* en repetir la aplicación de un mismo procedimiento geométrico u operaciones al resultado obtenido en una etapa anterior.

¹⁸Fuente:

1. Tanto el conjunto vacío como el global pertenecen a la familia,

$$\{\emptyset, A\} \in F.$$

2. La unión de partes de la familia es otra parte que pertenece a la familia,

$$\cup_{i \in P'} p_i \in F, \quad \forall P' \subset P.$$

3. La intersección de un número finito de partes de la familia es otra parte que pertenece a la familia,

$$\cap_{i \in P''} p_i \in F, \quad \forall P'' \subset P.$$

El conjunto A al que se asocia una topología constituye un *espacio topológico* que se denota por (A, F) .

2.4. Distancia y espacio métrico

2.4.1. Noción de distancia y espacio métrico

Sea A un conjunto cualquiera y d una aplicación que asocia a cada par de elementos (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de A un único número real no negativo:

$$d : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times A \rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

d define una *distancia* o *métrica* en A si y sólo si cumple, $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in A$, las siguientes condiciones:

Dou, A. (1964): *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dossat, S.A.

separación: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0 \iff \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

desigualdad triangular: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$,

simetría: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Se denomina *espacio métrico* T a un par $T = (A, d)$, donde A es un conjunto y d es una distancia definida en A . Los elementos de un espacio métrico reciben el nombre de *puntos*.

2.4.2. Tipos de distancias

Distancia entre dos puntos

Existen varias aplicaciones en \mathbb{R}^n que cumplen los axiomas especificados en el apartado anterior, como por ejemplo las siguientes:

- $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ (distancia natural),
- $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ (distancia euclídea),
- $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$, $\forall p \in \mathbb{N} - \{0\}$ (distancia generalizada de la euclídea),
- $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i=1 \dots n} |x_i - y_i|$ (distancia del máximo).

Distancia entre un punto y un conjunto

Sean un punto $\mathbf{x} \in A$ y un subconjunto de $A : C \subset A$, la distancia entre ambos es:¹⁹

¹⁹Siendo \inf el ínfimo, es decir, la mayor de las cotas inferiores.

$$d(\mathbf{x}, C) = \inf_{\mathbf{y} \in C} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Distancia entre dos conjuntos

Sean dos subconjuntos de A : $B, C \subset A$, la distancia entre ambos se define como:

$$d(B, C) = \inf_{\mathbf{x} \in B, \mathbf{y} \in C} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Distancia de Hausdorff entre dos conjuntos

Sean dos subconjuntos de A : $B, C \subset A$, la distancia de Hausdorff entre ambos, $h(B, C)$, se calcula del modo siguiente:²⁰

$$h(B, C) = \max \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in B} \inf_{\mathbf{y} \in C} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \sup_{\mathbf{x} \in C} \inf_{\mathbf{y} \in B} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\}.$$

2.5. Dimensiones del objeto abstracto

2.5.1. Noción de dimensión

Cualquier definición de *dimensión* (dim) debe cumplir como mínimo los siguientes requerimientos:²¹

1. En el caso de que un conjunto esté constituido por un único elemento, su dimensión deberá ser cero.

²⁰Siendo sup el supremo, es decir, la menor de las cotas superiores.

²¹Fuente:

Yamaguti, M. et al. (1997): *Mathematics of Fractals*. American Mathematical Society, serie *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 167.

2. Para el intervalo $[0, 1]$ la dimensión tendrá que ser uno.
3. Monotonía: si $B \subset C$, entonces $\dim(B) \leq \dim(C)$.
4. Invarianza: si f es una aplicación inyectiva²² de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se cumple que $\dim(f(B)) = \dim(B)$.
5. Estabilidad numerable: dada una sucesión de conjuntos cerrados $B_j \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\dim(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sup \dim(B_j)$ para $j \geq 1$.

2.5.2. Tipos de dimensiones

La ocupación de \mathbb{R}^n por parte del objeto abstracto se denomina *dimensión del objeto*. Con tal de llegar a su definición, y para su posterior aplicación en el análisis, en este apartado se parte de la dimensión vectorial y dimensión euclídea, que hacen referencia a la dimensión del espacio, y, de forma constructiva, se pasa a la dimensión topológica, dimensión fractal y dimensión de Hausdorff como una generalizada de la anterior, que hacen referencia a la dimensión del objeto. Por último, la dimensión por recuento por cajas, que hace operativa la fractal, permitirá desarrollar un algoritmo para su cálculo numérico.²³

Dimensión vectorial

Se entiende por *dimensión vectorial* ($\dim_V(A) \in \mathbb{N}$) aquella que corresponde al espacio vectorial al cual pertenece el objeto abstracto A . Es el número cardinal

²² f es *inyectiva* si y sólo si:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

²³ Fuente:

Dugnol, B. et al. (2000): *Notas sobre Geometría Fractal*. Geometría Fractal, Universidad de Oviedo.

de vectores de cualquiera de las bases del espacio vectorial.²⁴ En el caso que nos ocupa, la dimensión vectorial será n , ya que el espacio vectorial es \mathbb{R}^n .

Dimensión euclídea o euclidiana

Si el espacio vectorial está normado por una norma euclídea,²⁵ recibirá el nombre de *espacio vectorial euclídeo o euclidiano*. La *dimensión euclídea* ($\dim_E(A) \in \mathbb{N}$) será aquella que corresponde a este espacio, la cual cumple la siguiente propiedad:

Si se toma un objeto abstracto A que tenga la unidad en cada una de sus dimensiones vectoriales, y se hace una misma partición en cada una de ellas, el número de partes (P) del objeto abstracto obtenido será igual al número de particiones (p) realizadas en cada una de sus dimensiones elevado a la dimensión del espacio euclídeo:

$$P(p) = p^{\dim_E(A)},$$

de donde puede despejarse la dimensión euclídea:

$$\frac{\log P(p)}{\log p} \equiv \dim_E(A).$$

²⁴Fuente:

Rojo, A.O. (1973): *Álgebra II*. El Ateneo.

²⁵Siendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, donde $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1\dots n}$, se define el producto interno como:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Entonces, la *norma euclídea* del vector \mathbf{x} , simbolizada por $\|\mathbf{x}\|$, se obtiene del siguiente modo:

$$\|\mathbf{x}\| = +\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Dimensión topológica o de recubrimiento

Se dice que $\phi = \{\phi_i\}$ es un *recubrimiento abierto* de un conjunto A si:

$$A \subset \cup_i \phi_i,$$

es decir, un recubrimiento abierto es una colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene al conjunto A .

Se entiende por *orden del recubrimiento* (ord_R) el número máximo de abiertos que interseccionan para todo punto del conjunto A . Es decir:

$$ord_R(A) = \text{máx} \{s \mid B \in \cup_s \phi_s : \forall B \subset A\}.$$

Un *refinamiento abierto* de ϕ , ϕ' , será otro recubrimiento abierto de A tal que cada abierto de ϕ' esté incluido en algún abierto de ϕ :

$$\forall i \Rightarrow \exists k \mid \phi'_i \subset \phi_k.$$

Un conjunto A tiene *dimensión topológica o de recubrimiento* $\dim_T(A) = \mu$ si cualquier recubrimiento abierto de A admite un refinamiento abierto de orden $\mu + 1$ pero no de orden μ .

Dimensión fractal

La *dimensión fractal* ($\dim_F(A) \in \mathbb{R}^+$) es una medida de lo que ocupa un objeto abstracto A en \mathbb{R}^n , y se obtiene como una generalización de la propiedad vista del espacio euclídeo.

Si se toma un objeto abstracto A que tenga la unidad en cada una de sus dimensiones vectoriales, siendo $j(\varepsilon)$ el mínimo número de bolas abiertas de diámetro ε que producen un recubrimiento de A , se define la dimensión fractal como:

$$\dim_F(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log j(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

El problema que presenta esta dimensión tiene que ver con la magnitud infinita del numerador y denominador de la anterior expresión. Este inconveniente es subsanado por la dimensión de Hausdorff.

La dimensión fractal se hace operativa con la dimensión por recuento de cajas (*Box-counting*), a la que se hace referencia posteriormente.

Dimensión de Hausdorff

Sea A un conjunto acotado de \mathbb{R}^n y sea $\phi = \{\phi_i\}$ un recubrimiento abierto finito de A con conjuntos de diámetro $diam_i = \sup \{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi_i\} \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$. Para un $0 \leq k \leq n$, donde n es la dimensión euclídea del espacio, se calcula:

$$\bar{d}_H(\varepsilon, k) = \sum_i diam_i^k.$$

Tomando todos los posibles recubrimientos, se busca el valor:

$$\inf \{\bar{d}_H(\varepsilon, k)\}.$$

A continuación se halla la *medida de Hausdorff* k -dimensional del conjunto A :

$$H^k(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\inf \bar{d}_H(\varepsilon, k)\}.$$

Es evidente que:²⁶

$$\lim_{k \rightarrow 0} H^k(A) = \infty \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} H^k(A) = 0.$$

²⁶En el caso de $k \rightarrow 0$, se supone que lo hace de modo más rápido que ε .

Con tal de determinar la *dimensión de Hausdorff* ($\dim_H(A)$), se toma el supremo k para el cual $H^k(A) \rightarrow \infty$, y el ínfimo k para el cual $H^k(A) \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\dim_H(A)_{\text{inf}} &= \sup \{k : H^k(A) = \infty\} \\ \dim_H(A)_{\text{sup}} &= \inf \{k : H^k(A) = 0\}.\end{aligned}$$

Para cualquier conjunto A , estos valores existen, y, dependiendo de ε , ambos toman un único valor: la *dimensión de Hausdorff*.

Esta dimensión cumple la propiedad siguiente:

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una *aplicación de Lipschitz* de constante $c > 0$, es decir:

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq c \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A,$$

entonces se cumple:

$$\dim_H(f(A)) \leq c^k \cdot \dim_H(A).$$

Dimensión por recuento de cajas (*Box-counting*)

Con el fin de hacer operativo el concepto de *dimensión fractal*, resulta conveniente la definición de la *dimensión por recuento de cajas* o *Box-counting* ($\dim_B(A)$).

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y acotado y sea $\phi = \{\phi_i\}$ un recubrimiento de A con bolas de diámetro $\varepsilon > 0$. Para un $0 \leq k \leq n$, se calcula:

$$\bar{d}_B(\varepsilon, k) = \sum_i \varepsilon^k.$$

Al tratarse A de un conjunto acotado, la anterior suma puede hallarse, para $1 \leq i \leq j$, donde j representa el número de bolas que realizan el recubrimiento, del siguiente modo:

$$\bar{d}_B(\varepsilon, k) = j \varepsilon^k.$$

Sea $j(\varepsilon)$ el menor número de bolas que realizan el recubrimiento, entonces puede expresarse:

$$\inf \bar{d}_B(\varepsilon, k) = j(\varepsilon) \varepsilon^k.$$

Si la cantidad anterior es una cantidad δ positiva, finita y distinta de cero, obtendremos:

$$j(\varepsilon) \varepsilon^k = \delta,$$

$$\frac{j(\varepsilon)}{\varepsilon^{-k}} = \delta.$$

y aplicando logaritmos:

$$\log j(\varepsilon) - k \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = \log(\delta),$$

$$\frac{\log j(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} - k = \frac{\log(\delta)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

En el caso de que $\varepsilon \rightarrow 0^+$, el segundo término de la igualdad también tiende a cero, por lo que a partir del valor que toma k se da la siguiente definición de la *dimensión por recuento de cajas*:

$$\dim_B(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log j(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}.$$

2.5.3. Relación entre las dimensiones

$$\dim_T(A) \leq \dim_H(A) \leq \dim_B(A) \leq \dim_E(A) = n.$$

2.6. Atractores

Dadas unas condiciones iniciales o punto inicial, la trayectoria del sistema puede ser atraída, tras un periodo de tiempo suficientemente extenso, hacia alguna zona del espacio de estados que se denomina *atractor* del sistema. El atractor es, pues, la región del espacio de estados del sistema hacia la que convergen las posibles trayectorias del mismo, su flujo.

Un conjunto compacto²⁷ $U \subset M$ será *atrayente* si se cumplen las propiedades:

1. U es invariante²⁸ bajo el flujo F ;
2. existe un entorno o vecindad²⁹ $E(U)$ para el cual se cumple que:

$$E(U) \rightarrow U.$$

²⁷Un conjunto U es *compacto* si es cerrado y acotado.

Un conjunto U es *cerrado* si su complementario es abierto.

Un conjunto U es *acotado* si $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall \mathbf{x} \in U$ se verifica que $\|\mathbf{x}\| \leq K$, y/o bien tiene un número finito de elementos.

²⁸Un conjunto $U \subset M$ es *invariante* si, para un flujo F definido en $M \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que $F(U) \subset U$.

Fuente:

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.

²⁹Entendemos por *entorno o vecindad* a todo abierto que contiene al conjunto.

Por tanto, un conjunto atrayente es un conjunto cerrado y acotado que se halla dentro del espacio de estados y que tiene la propiedad de que las imágenes de los puntos de dentro de él se hallan también en su interior, y las imágenes de los puntos que están fuera de él, en un entorno, más pronto o más tarde se sitúan en él.

Un conjunto U será el *atractor* de un flujo F si:

1. cumple las propiedades de conjunto atrayente;
2. es topológicamente transitivo.

Un conjunto U es *topológicamente transitivo* para un flujo F si, para dos conjuntos abiertos³⁰ cualesquiera $B, C \subset U$, se cumple que:³¹

$$\exists k \in [0, \infty) | F^k(B) \cap C \neq \emptyset.$$

La transitividad topológica implica la presencia de órbitas densas³² en U para el flujo F .³³ Cuando un conjunto es topológicamente transitivo no se puede descomponer, no puede dividirse en dos o más conjuntos invariantes.

En resumen, un atractor es un conjunto atrayente topológicamente transitivo, lo que significa que haciendo una aplicación de él en él mismo (haciendo su imagen o flujo), cualquier zona dentro del atractor puede ser accesible por parte del sistema.³⁴

³⁰Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ será *abierto* si la vecindad de cada punto en B está contenida en B . Por ello, un abierto está formado por puntos interiores, que pueden cerrarse en una bola que pertenece al conjunto.

³¹Como se ha visto en el apartado 2.2.2 del presente trabajo, F^k hace referencia a la sucesión de k iteraciones de F en un punto.

³²La existencia de una *órbita densa* en un conjunto hace que, bajo la acción del flujo F , la órbita se mueva de una vecindad arbitraria a otra, de tal modo que se tienda a “llenar” el conjunto.

³³Fuente:

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, p. 41.

³⁴Esta propiedad se aplicará posteriormente en el diseño de un algoritmo o test que detecte la

2.6.1. Tipos de atractores

Clásicamente se distinguen cuatro tipos de atractores dependiendo de hacia dónde tienden las posibles trayectorias o flujo³⁵ del sistema dinámico:

- a) Atractor de punto fijo.
- b) Atractor cíclico o de ciclo límite.
- c) Atractor cuasi-periódico o toroidal.
- d) Atractor caótico.

Para ejemplificar los distintos tipos de atractores, se considerará el caso simple de un sistema dinámico definido a tiempo discreto y se supondrá que la dinámica de la variable estado $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ viene dada por:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_t).$$

- a) El sistema tendrá un *atractor de punto fijo* en el caso de que $\mathbf{x} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$, es decir, cuando las trayectorias del sistema, partiendo de todas las posibles situaciones iniciales, converjan a un estado constituido por un único punto en el espacio de estados, y en el cual el sistema permanece de forma permanente. Los sistemas con estados de equilibrio tienen atractores de punto fijo.

presencia de transitividad topológica en una serie empírica. Véase el apartado 4.6.1 del presente trabajo.

³⁵Entendiendo por flujo, como previamente se ha definido, el conjunto de todas las trayectorias del sistema, formadas a partir de todas las posibles condiciones iniciales del mismo.

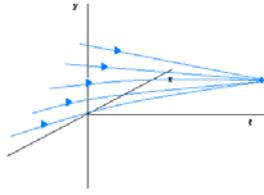


Gráfico 3. Ejemplo de trayectorias en un espacio de estados bidimensional con atractor de punto fijo

- b) El sistema tendrá un *atractor cíclico o de ciclo límite* cuando, una vez situado dentro del atractor, tras un periodo de tiempo z se cumpla que $\mathbf{x}_{t+z} = \mathcal{F}^z(\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}_t$, y $\mathbf{x}_{t+k} \neq \mathbf{x}_t$ para $0 < k < z$. En otras palabras, los atractores cíclicos tienen un flujo que evoluciona siguiendo un ciclo regular en el que cada cierto tiempo se repiten los estados anteriores. El periodo de tiempo z se conoce como *periodo del ciclo*, y es el mínimo lapso de tiempo que tarda en repetirse la secuencia de estados. Los atractores cíclicos son propios de sistemas con órbitas periódicas.

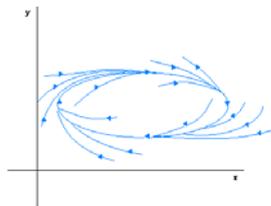


Gráfico 4. Ejemplo de órbitas en un espacio de estados bidimensional con atractor elíptico de ciclo límite

- c) El sistema tendrá un *atractor cuasi-periódico o toroidal* cuando esté compuesto por dos o más osciladores periódicos no-lineales que se superpongan.³⁶

³⁶Fuente:

Un atractor de este tipo está caracterizado porque su flujo está acotado por un máximo y por un mínimo. Un ejemplo de atractor toroidal son los toros, que están compuestos por dos o más movimientos periódicos que se superponen y van en distintas direcciones.

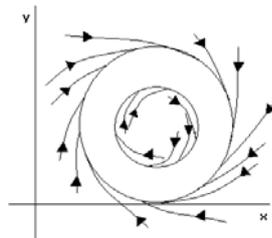


Gráfico 5. Ejemplo de órbitas en un espacio de estados bidimensional con atractor toroidal

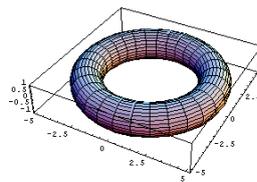


Gráfico 6. Ejemplo de atractor toroidal en un espacio de estados tridimensional

- d) El sistema tendrá un *atractor caótico* cuando posea trayectorias inestables,³⁷ aun permaneciendo dentro del atractor. Los atractores caóticos se encuentran

Escot, L. (2000): *Dinámica Económica Caótica: Una Aplicación al Estudio del Ciclo y el Crecimiento Económico*. Tesis doctoral.

³⁷Cuando son *inestables*, las trayectorias originadas a partir de puntos arbitrariamente próximos del atractor se separan exponencialmente a medida que pasa el tiempo. Ello provoca que un ínfimo cambio en las condiciones iniciales se vea magnificado por la acción del flujo (entendido como función generadora de las trayectorias).

Por el contrario, cuando son *estables*, las trayectorias que parten de puntos arbitrariamente juntos convergen.

en sistemas caóticos, y se caracterizan por tener una dimensión fractal³⁸ no natural.

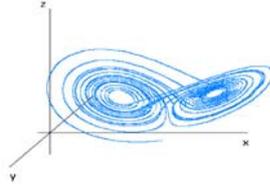


Gráfico 7. Ejemplo de atractor caótico en un espacio de estados tridimensional: el atractor de Lorenz

Las trayectorias son inestables si y sólo si tienen dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Se dice que un flujo $F : M \rightarrow M$ tiene *dependencia sensible a las condiciones iniciales* si, $\forall \mathbf{x} \in M$, se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0 \wedge \delta \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{0} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, k \neq \infty : \|f^k(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0) - f^k(\mathbf{x}_0)\| > \varepsilon .$$

2.7. Sistemas caóticos

Cuando un sistema posee un atractor caótico se dice que es caótico.

Un *sistema caótico* es por tanto aquel sistema dinámico que cumple las siguientes condiciones:³⁹

³⁸Para la definición de dimensión fractal, véase el apartado 2.5.2 del presente trabajo.

³⁹Esta definición de sistema caótico es debida a:

Devaney, R.L. (1989): *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley.

1. sus estados son sensibles respecto a las condiciones iniciales;
2. es topológicamente transitivo;
3. posee órbitas⁴⁰ densas.

Un sistema caótico es además un sistema determinista no-lineal.⁴¹

Un *sistema* será *lineal* cuando cumpla las características siguientes:

1. si un estado se descompone en la suma de dos estados cualesquiera $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\beta}_t$, donde $\boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\beta}_t \in M$, se verifica que:

$$\mathbf{x}_{t+1} = F(\mathbf{x}_t) = F(\boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\beta}_t) = F(\boldsymbol{\alpha}_t) + F(\boldsymbol{\beta}_t);$$

2. si un estado se expresa como el producto externo de otro cualquiera por un escalar $\mathbf{x}_t = \mu \boldsymbol{\alpha}_t$, se verifica que:

$$\mathbf{x}_{t+1} = F(\mathbf{x}_t) = F(\mu \boldsymbol{\alpha}_t) = \mu F(\boldsymbol{\alpha}_t).$$

Dado el isomorfismo⁴² entre el espacio de transformaciones lineales y el de matrices, un sistema lineal puede expresarse del siguiente modo:

$$\mathbf{x}_{t+1} = F(\mathbf{x}_t) \iff \mathbf{x}_{t+1} = A \mathbf{x}_t,$$

⁴⁰Considerando órbita en su sentido amplio, ya definido.

⁴¹Fuente:

Espinosa, F. (2001): *Modelización no browniana de series temporales financieras*. Tesis doctoral.

⁴²Un *isomorfismo* es un homeomorfismo biyectivo. Para la definición de homeomorfismo, véase el apartado 2.2 del presente trabajo.

En este sentido, a toda aplicación lineal le corresponde una matriz y a toda matriz le corresponde una aplicación lineal, de tal modo que se da una biyección a nivel de elementos y de operaciones.

o de modo más general:

$$\mathbf{x}_{t+k} = A^k \mathbf{x}_t,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de coeficientes constantes.⁴³

Todo sistema que no cumpla las propiedades de sistema lineal se dice que es un *sistema no-lineal*.

En un sistema lineal las modificaciones en su estado inicial causan variaciones proporcionales en los siguientes estados del sistema. En cambio, en un sistema no-lineal las variaciones causadas en los siguientes estados no son proporcionales o no tienen por qué serlo.

Un *sistema determinista* es aquel en el cual los estados posteriores evolucionan a partir de los anteriores, de acuerdo con una ley fija.⁴⁴ Se entiende por sistema determinista aquel en el que la evolución en el tiempo de la variable estado quede perfectamente determinada por las leyes que rigen la evolución del mismo.

⁴³Fuente:

Rojo, A.O. (1973): *Álgebra II*. El Ateneo.

⁴⁴Fuente:

Nieto, U. (1998): *Historia del tiempo en economía. Predicción, caos y complejidad*. McGraw-Hill.

Capítulo 3

Matemática del atractor

3.1. Concepto de atractor

En un espacio métrico¹ $T = (A, d)$, se denomina *sucesión de Cauchy* a toda sucesión de puntos $\{\mathbf{x}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ en la que exista un valor j de i , tal que, para $q > p > j$ y para un $\varepsilon > 0$ dado, se verifique:

$$d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \varepsilon.$$

Una sucesión será *convergente* si y sólo si tiene límite, tiende hacia un valor.²

Un espacio métrico será *completo* cuando toda sucesión de Cauchy sea convergente.³

Sea T un espacio métrico completo y sea S el conjunto de todos los subconjuntos de T compactos⁴ no vacíos, entonces S será un espacio métrico completo con la

¹Para recordar el concepto de espacio métrico, véase el apartado 2.4.1 del presente trabajo.

²Una sucesión tiene por límite un determinado valor si, a partir de un punto, todos los demás se hallan dentro de una bola de centro ese valor y radio infinitésimo.

³Por ejemplo, \mathbb{R} y \mathbb{R}^n son espacios métricos completos.

⁴Cabe recordar que un conjunto compacto es un conjunto cerrado y acotado.

distancia de Hausdorff $h(B, C), \forall B, C \subset S$.⁵ Si existe por tanto un espacio métrico completo con una distancia, el conjunto de todos sus subconjuntos compactos no vacíos también es completo respecto de la distancia de Hausdorff.

Dadas un conjunto de transformaciones continuas $f_i : T \rightarrow T, i = 1, 2, \dots, k$, entonces $\{f_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ recibe el nombre de *sistema de funciones iteradas*.

Sea $F : S \rightarrow S$ la transformación:

$$F(B) = \cup_i f_i(B), \quad B \subset S,$$

se denomina *atractor* del sistema de funciones iteradas a cualquier subconjunto $U \subset S$ tal que $F(U) \subset U$. Así entendido, el atractor U es un punto fijo de F .⁶

3.2. Existencia del atractor

Si el espacio métrico T es compacto, entonces cualquier sistema de funciones iteradas admite como mínimo un atractor.

Si, para algún $0 \leq c < 1$ y $\forall i$, se verifica que las imágenes de dos puntos se hallan a una distancia menor que la que había entre los dos puntos:

$$d(f_i(\mathbf{x}_p), f_i(\mathbf{x}_q)) \leq c \cdot d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q), \quad \forall \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q \in T,$$

⁵Un espacio con la distancia de Hausdorff, definida, como se ha visto en el apartado 2.4.2 del presente trabajo, como:

$$h(B, C) = \max \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in B} \inf_{\mathbf{y} \in C} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \sup_{\mathbf{x} \in C} \inf_{\mathbf{y} \in B} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\},$$

se denomina *espacio de Hausdorff*.

⁶Fuente:

Navascués, M.A.; Sebastián, M.V. (2001): *Fórmula fractal de la energía de una señal muestreada*. Margarita Mathematica: Homenaje a J. J. Guadalupe, pp. 37-48.

entonces F es una aplicación contractiva respecto la métrica de Hausdorff, es decir:

$$h(F(B), F(C)) \leq c \cdot h(B, C), \quad \forall B, C \subset S.$$

Aplicando el *teorema del punto fijo* de Banach,⁷ entonces F admitirá un único punto fijo, o lo que es lo mismo, existirá un único atractor U que verifique:

$$U = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(B), \quad \forall B \subset S,$$

donde F^k denota la composición de F consigo misma k veces.⁸

⁷Banach, S. (1932): *Théorie des opérations linéaires*. Monografie Matematyczne, vol. 1.

⁸Demostración:

Partiendo de un punto cualquiera \mathbf{x}_0 de T se forma la sucesión

$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \dots\},$$

donde $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$, \dots , $\mathbf{x}_r = f(\mathbf{x}_{r-1})$, \dots

El primer paso será probar que la sucesión anterior es de Cauchy, es decir, que para $\varepsilon > 0$ dado:

$$\exists j < p < q \mid d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \varepsilon.$$

Para ello, se aplica reiteradamente la definición de aplicación contractiva, obteniendo:

$$d(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{x}_j) \leq c \cdot d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j-1}) \leq c^2 \cdot d(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j-2}) \leq \dots \leq c^j \cdot d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) = c^j \cdot a,$$

donde $a = d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$ y $0 \leq c < 1$.

Teniendo en cuenta el carácter contractivo de la transformación y que la distancia es un número real no negativo que cumple la desigualdad triangular $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, puede expresarse:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) &\leq d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1}) + d(\mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{x}_{p+2}) + \dots + d(\mathbf{x}_{q-1}, \mathbf{x}_q) \leq \\ &\leq d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}) + \dots + d(\mathbf{x}_{q-1}, \mathbf{x}_q) + \dots \leq \\ &\leq c^j \cdot a + c^{j+1} \cdot a + \dots = c^j \cdot a (1 + c + c^2 + \dots) = c^j \cdot \frac{a}{1 - c} \end{aligned}$$

3.3. Dimensión de inmersión

Siendo el vector de estados $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, será necesario, con el fin de conocer las propiedades del espacio de estados del sistema original, establecer una relación uniforme entre este espacio de estados y otro espacio que sea homeomorfo a él, de tal forma que se conserven todas las propiedades y estructuras existentes en el

Por tanto, para que se verifique $d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \varepsilon$ será suficiente con elegir un entero j que cumpla $c^j \cdot \frac{a}{1-c} < \varepsilon$, lo cual es siempre posible dado que, como $0 \leq c < 1$, a medida que j aumenta, $c^j \cdot \frac{a}{1-c} \rightarrow 0$.

Por lo anterior, la sucesión $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \dots\}$ es de Cauchy y, puesto que por hipótesis T es completo, existirá un punto $\mathbf{x} \in T$ tal que:

$$\lim \mathbf{x}_r = \mathbf{x}.$$

Es fácil demostrar que este punto verifica $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Para tal fin, habrá que ver que la condición de aplicación contractiva $d(f(\mathbf{x}_p), f(\mathbf{x}_q)) \leq c \cdot d(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)$ implica la continuidad de f en todo punto \mathbf{z}_0 de T . En efecto, basta con tomar $\delta = \varepsilon$, dado $\varepsilon > 0$, para que se verifique, para todo punto \mathbf{z} tal que $d(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}) < \delta$:

$$d(f(\mathbf{z}_0), f(\mathbf{z})) \leq c \cdot d(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}) \leq c \cdot \delta = c \cdot \varepsilon < \varepsilon.$$

Como acaba de verse que f es continua y además $\lim \mathbf{x}_r = \mathbf{x}$, entonces también $\lim f(\mathbf{x}_r) = f(\mathbf{x})$. Dado que $\{\mathbf{x}_r\}$ y $\{f(\mathbf{x}_r)\}$ son la misma sucesión, sus límites coinciden, es decir:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

c.q.d.

Además, esta solución es única. Esto puede demostrarse por reducción al absurdo, dado que si existiese otro punto \mathbf{y} con $f(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$, entonces $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lo cual contradice la hipótesis de aplicación contractiva $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq c \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Fuentes:

Dou, A. (1964): *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dossat, S.A.

Navascués, M.A.; Sebastián, M.V. (2001): *Fórmula fractal de la energía de una señal muestreada*. Margarita Mathematica: Homenaje a J. J. Guadalupe, pp. 37-48.

primero.

Para ello se define en el espacio de estados la relación \mathfrak{R} , la cual es un subconjunto de \mathbb{R}^{2n} :

$$\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Dado que interesa que la misma reconozca la evolución del vector de estados, deberán considerarse por lo menos $2n$ relaciones consecutivas en el mismo, es decir:

$$\mathfrak{R} \equiv \{(\mathfrak{R}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_t))\}_{t=\{t_1, t_2, \dots, t_{2n}\}}.$$

Como n puede tomar valores muy elevados, si se logra determinar en la estructura homeomorfa la dimensión u del atractor, la cual es fractal, la *dimensión de inmersión*⁹ (“*embedding dimension*”) m deberá ser estrictamente superior a dos veces la dimensión fractal del atractor u :¹⁰

$$m > 2u.$$

A esta conclusión llega el *teorema de inmersión de Whitney*:¹¹ si el atractor

⁹La *dimensión de inmersión* se obtiene al intentar desarrollar un sistema dinámico de baja dimensión que describa el movimiento en el atractor del sistema. Para ello se realiza una inmersión o confinamiento del atractor en una variedad lineal, cuya menor dimensión posible es la dimensión de inmersión.

¹⁰Como se verá a continuación, tanto Whitney como Takens aseguran también que es necesario que la dimensión de inmersión sea superior al doble de la del atractor.

¹¹Whitney, H. (1936): *Differentiable Manifolds*. The Annals of Mathematics, vol. 37, nº 3, pp. 645-680.

U es una variedad lineal¹² u -dimensional en M , $\vartheta : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es genérica¹³ y $m > 2u$, entonces ϑ es biyectiva en U . Esto significa que si las trayectorias del sistema dinámico en el espacio de estados M son atraídas a una variedad lineal U con dimensión u , y pueden realizarse m mediciones simultáneas del sistema en un momento determinado¹⁴ a través de una función ϑ , entonces es de esperar que $\vartheta(U)$ represente unívocamente todos los estados que pertenecen a la variedad lineal original U . Este teorema afirma que siempre es posible encontrar un *atractor de inmersión* (“*embedded attractor*”) en algún espacio \mathbb{R}^m a condición de que m sea más de dos veces la dimensión del atractor u .¹⁵

La dimensión de inmersión (m) muestra el mínimo número de variables independientes necesarias para describir el sistema.¹⁶ Existen diversas maneras de obtener la dimensión de inmersión adecuada para realizar una posterior reconstrucción del espacio de estados. Uno que frecuentemente se utiliza para este fin es el *método de los falsos vecinos cercanos* (“*false nearest neighbor method*”),¹⁷

¹²Una *variedad lineal* es un espacio topológico B con la siguiente propiedad:

Si $\mathbf{x} \in B$, existe alguna vecindad o entorno E de \mathbf{x} y algún entero $n > 0$ tal que E es homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Si dos espacios son *homeomorfos* tienen exactamente las mismas propiedades topológicas.

¹³Se entiende por *función genérica* aquella que tiene un comportamiento típico diferenciable o suave.

¹⁴Para cada estado del sistema se obtendrá un vector de \mathbb{R}^m , y se tendrán tantos vectores como mediciones se realicen en distintos instantes del tiempo.

¹⁵Fuente:

Paissan, G. (2005): *Métodos de Análisis de Datos Caóticos*. Incertezas experimentales y Teoría de errores, Monografías 2005.

¹⁶Fuente:

Grassberger, P.; Procaccia, I. (1983): *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica D, vol. 9, pp. 189-208.

¹⁷Este método fue propuesto por:

Kennel, M. et al. (1992): *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction*

con el cual se halla la dimensión de inmersión para la que los puntos próximos lo están principalmente a causa de la dinámica del sistema. Hay otros métodos que buscan una dimensión de inmersión válida,¹⁸ que sea estrictamente superior al doble de la del atractor.

En el presente trabajo, partiendo de que la dimensión de inmersión (m) es aconsejable que sea estrictamente superior a dos veces la dimensión fractal del atractor (u), se ha propuesto un algoritmo para obtener la dimensión de inmersión o de confinamiento óptima consistente en los pasos siguientes:¹⁹

1. Se obtienen vectores de inmersión de cada serie, con distintas dimensiones de inmersión (m) posibles y todos los retardos que se quieran considerar para cada una de ellas.
2. Se calcula la dimensión fractal del objeto abstracto²⁰ (u) a partir del recuento

using a geometrical construction. Physical Review A, vol. 45, pp. 3403-3411.

Puede verse una aplicación de este método, por ejemplo, en:

Karakasidis, T.E.; Charakopoulos, A. (2009): *Detection of low-dimensional chaos in wind time series.* Chaos, Solitons and Fractals, vol. 41, pp. 1723-1732.

Reiss, J.D. et al. (2008): *Verification of chaotic behavior in an experimental loudspeaker.* Journal of the Acoustical Society of America, vol. 124, n° 4, pp. 2031-2041.

¹⁸Véanse, por ejemplo, los propuestos por:

Liangyue, C. (1997): *Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series.* Physica D, vol. 110, pp. 43-50.

Lim, T.P.; Puthusserypady, S. (2005): *Postprocessing methods for finding the embedding dimension of chaotic time series.* Physical Review E, vol. 72, 027204.

¹⁹Los resultados de la aplicación de este algoritmo pueden verse en los apartados 5.2.1 y 6.2.1 del presente trabajo.

Asimismo, puede hallarse el programa elaborado para la elección de la dimensión de inmersión en el apartado 9.1, situado en el anexo del presente trabajo.

²⁰Si bien Whitney (y posteriormente Takens) enunciaba la condición $m > 2u$ considerando u la dimensión del atractor, puede generalizarse esta condición. En el caso que nos ocupa, dado

de cajas.²¹

3. Se representa, para cada dimensión de inmersión considerada, la dimensión fractal obtenida.
4. Dado que la dimensión de inmersión (m) debe ser estrictamente superior al doble de la dimensión fractal del objeto abstracto (u), se halla el valor que toma la siguiente función:

$$m - 2u.$$

5. Por último, se representan los valores que toma la anterior función para cada una de las dimensiones de inmersión y los retardos considerados. La dimensión óptima que se elegirá será aquella para la cual la función $m - 2u$ sea superior a cero. A ser posible, se intentará que la dimensión m permita una representación gráfica de las trayectorias, a efectos prácticos.

3.4. Reconstrucción del espacio de estados

3.4.1. Teorema de inmersión

En los estudios empíricos, los estados \mathbf{x}_t del sistema dinámico no son observables, y el flujo F que los genera es desconocido. De lo que se dispone es de una serie de observaciones $\{z_n = v(\mathbf{x}_n)\}$ relacionadas con \mathbf{x}_t a través de una determinada función de medición o valoración $v(\cdot)$, tampoco conocida.

que no es posible obtener la dimensión exacta del atractor por el hecho de disponer solamente de observaciones del sistema, la dimensión que se utilizará será la del objeto abstracto que conforma la trayectoria. Además, teniendo en cuenta que posteriormente en el análisis se demostrará que existe atractor en todas las series analizadas, resulta adecuado tomar la dimensión fractal del objeto abstracto como aproximación a la del atractor.

²¹Para conocer el procedimiento para el cómputo de esta dimensión, véase el apartado 2.5.2 del presente trabajo.

Dado que la serie $\{\mathcal{x}_t\}$ en sí misma no representa exactamente el espacio de estados del sistema dinámico, se deberá emplear algún método para obtener la estructura multidimensional del sistema dinámico a partir de los datos disponibles. En esto consistirá la *reconstrucción del espacio de estados*.

Una técnica para reconstruir el espacio de estados es el *método de los retardos*. Este método parte de considerar vectores de un nuevo espacio, denominado *espacio de inmersión* (“*embedding space*”), formados a partir de valores de las medidas escalares retardadas en el tiempo:

$$\mathcal{x}_i = (\mathcal{x}_{i-(m-1)\tau}, \mathcal{x}_{i-(m-2)\tau}, \dots, \mathcal{x}_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

donde el número de elementos m coincide con la dimensión de inmersión y τ es el tiempo de retardo.

El número de coordenadas de los vectores de inmersión del espacio de estados dependerá del sistema que se esté estudiando. La dimensión del espacio de estados y tiempo de retardo a considerar deberán ser aquellos para los cuales se pueda asegurar que los puntos cercanos en el espacio de estados lo son debido a la dinámica del sistema y no simplemente a una proyección.²²

Según el teorema de inmersión de Whitney²³ enunciado en el apartado anterior, si ϑ es una función genérica, el atractor U es una variedad u -dimensional en M y $m > 2u$, entonces ϑ es biyectiva en U . Para Whitney, $\vartheta(U)$ no tiene autointersecciones, ya que dos estados que son diferentes en U permanecen diferentes al ser representados en \mathbb{R}^m . En la proposición del teorema se requiere

²²Fuente:

Paissan, G. (2005): *Métodos de Análisis de Datos Caóticos*. Incertezas experimentales y Teoría de errores, Monografías 2005.

²³Whitney, H. (1936): *Differentiable Manifolds*. The Annals of Mathematics, vol. 37, n° 3, pp. 645-680.

que las coordenadas de ϑ sean independientes. Takens,²⁴ sin embargo, señaló que es suficiente con tomar como ϑ una función formada a partir de una serie temporal de mediciones.

Partiendo de una función de medición $v : M \rightarrow \mathbb{R}$, según Takens ϑ es la función de coordenadas retardadas:

$$\vartheta(\mathbf{x}) \equiv [v_{i-(m-1)\tau}(\mathbf{x}), v_{i-(m-2)\tau}(\mathbf{x}), \dots, v_i(\mathbf{x})], \quad i = 1, \dots, \tilde{n}.$$

donde v representa mediciones del sistema dinámico para el que U es un atractor y $\tilde{n} = n - (m - 1)\tau$ es el número de vectores de inmersión correspondiente a n observaciones.

Según el *teorema de inmersión de Takens*, si U es una subvariedad²⁵ de dimensión u invariante bajo el sistema dinámico, m es estrictamente superior a $2u$ y $\vartheta : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función de las coordenadas retardadas con una medición genérica v y retardos temporales genéricos τ , entonces ϑ es biyectiva en U .²⁶ Así, si el atractor posee una dimensión u , entonces la dimensión de inmersión es como mínimo $|2u + 1|$, para gráficos genéricos retardados.

El teorema de inmersión de Takens proporciona por tanto las condiciones bajo las cuales pueden reconstruirse las propiedades del sistema dinámico original a partir de la serie temporal escalar de observaciones. Según Takens, si la secuencia $\{\varkappa_i\}$ consiste en medidas escalares²⁷ del estado del sistema dinámico, entonces, bajo

²⁴Takens, F. (1981): *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, pp. 366–381. Springer-Verlag.

²⁵Una *subvariedad* de una variedad B es un conjunto abierto de B que también es una variedad.

Para una definición de variedad, véase el apartado 3.3 del presente trabajo.

²⁶Fuente:

Paissan, G. (2005): *Métodos de Análisis de Datos Caóticos*. Incertezas experimentales y Teoría de errores, Monografías 2005.

²⁷Se entiende por *medida escalar* aquella que se representa por un número real.

ciertas asunciones, el tiempo de retardo de inmersión produce una imagen biyectiva del conjunto original $\{\mathbf{x}\}$, siempre y cuando m sea suficientemente grande.

Takens probó que la trayectoria reconstruida resultante $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n)$ tenía propiedades topológicas idénticas a las propiedades del sistema original.

3.4.2. Tiempo de retardo

Existen diversos planteamientos a la hora de determinar un tiempo de retardo (τ) óptimo. Una manera es tomar aquel tiempo de retardo que haga que la función de autocorrelación²⁸ alcance un determinado valor.²⁹ También se elige a veces el tiempo de retardo que se corresponda con el primer mínimo de la integral de correlación³⁰ generalizada.³¹ Otra opción es la de optar por aquel tiempo de retardo

²⁸La *función de autocorrelación* mide la correlación entre los valores de una serie diferidos un lapso de tiempo k .

La autocorrelación o correlación entre dos observaciones \mathcal{X}_i , \mathcal{X}_{i-k} puede obtenerse del siguiente modo:

$$\text{corr}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_{i-k}) = \frac{\text{cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_{i-k})}{\sigma(\mathcal{X}_i) \cdot \sigma(\mathcal{X}_{i-k})},$$

donde "cov" representa la covarianza entre las observaciones y σ la desviación típica.

²⁹Como, por ejemplo, en:

Chen, L. (2008): *On the Chaotic Dynamics Analysis of China Stock Market*. Proceedings of the 9th International Conference for Young Computer Scientists, vol. 1-5, pp. 3011-3015.

Schuster, H.G. (1988): *Deterministic Chaos: An Introduction*. VCH Verlagsgesellschaft.

Tsonis, A.A.; Elsner, J.B. (1987): *Fractal characterization and simulation of lightning*. Beitrage zur Physik der Atmosphaere (Contributions to Atmospheric Physics), vol. 60, n° 2, pp. 187-192.

³⁰Para una definición de la *integral de correlación*, véase el apartado 4.2.1 del presente trabajo.

³¹Como, por ejemplo, en:

Liebert, W.; Schuster, H. (1989): *Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series*. Physical Letters A, vol. 142, n° 2, pp. 107-111.

que minimice la función de información mutua³² propuesta por Fraser y Swinney.³³ Y, como estos, existen otros planteamientos válidos, ya que no hay que olvidar que la elección óptima de los parámetros dependerá del contexto específico en el que se aplique.³⁴

A la hora de intentar detectar comportamientos caóticos, en el presente trabajo se considera que el tiempo de retardo a elegir debería ser múltiplo del tiempo de muestreo y ser suficientemente grande como para garantizar cierta independencia de las mediciones, pero no tanto como para que estas fueran totalmente independientes. Si el tiempo de retardo considerado es demasiado pequeño, la serie de observaciones contiene muy poca información nueva, mientras que en caso de tratarse de un sistema caótico, si el tiempo de retardo es demasiado grande entonces toda la información relevante para la reconstrucción del espacio de estados puede perderse debido a la divergencia entre trayectorias cercanas.³⁵

³²La *función de información mutua* entre dos variables aleatorias mide la reducción de la incertidumbre o ruido en una variable debido al conocimiento del valor de la otra variable.

³³Fraser, A.M.; Swinney, H.L. (1986): *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*. Physical Review A, vol. 33, n° 2, pp. 1134-1140.

Pueden verse recientes aplicaciones de este método en:

Barkoulas, J.T. (2008): *Testing for deterministic monetary chaos: Metric and topological diagnostics*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 38, pp. 1013-1024.

Çoban, G.; Büyüklü, A.H. (2009): *Deterministic flow in phase space of exchange rates: Evidence of chaos in filtered series of Turkish Lira-Dollar daily growth rates*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 42, pp. 1062-1067.

Huang, S.-C. et al. (2010): *Chaos-based support vector regressions for exchange rate forecasting*. Expert Systems with Applications, vol. 37, n° 12, pp. 8590-8598.

³⁴Véase, por ejemplo, el propuesto por:

Matilla-García, M. et al. (2004): *Dimension estimation with the BDS-G statistic*. Applied Economics, vol. 36, pp. 1219-1223.

³⁵Fuente:

Karakasidis, T.E.; Charakopoulos, A. (2009): *Detection of low-dimensional chaos in wind time*

En el caso que nos ocupa, con el objetivo de determinar el tiempo de retardo óptimo se partirá de las consideraciones siguientes:

- Cuanto mayor sea el retardo, más influencia tiene sobre la variable la función de valoración y menos su valor anterior. Habrá un retardo para el cual el estado del sistema ya no dependerá del estado en el momento anterior, sino que solamente lo hará de la función de valoración. Y este es el retardo que se considerará adecuado para observar el sistema.
- Hasta que se alcanza el retardo óptimo, cuanto mayor sea el retardo considerado, más parte del espacio de estados ocupa la trayectoria. En cuanto el retardo es el óptimo, la trayectoria realiza la máxima ocupación posible del espacio de estados, y aunque siga aumentándose el retardo la trayectoria ya no ocupa mayor espacio.

En base a las consideraciones anteriores, para una dimensión de inmersión determinada el algoritmo propuesto para hallar el retardo óptimo consiste en los pasos siguientes:³⁶

1. Se calculan, para distintos retardos,³⁷ los ángulos que se forman entre el dato de origen y cada uno de los demás datos.
2. Se calcula, para cada retardo, el ángulo medio como la media de los ángulos anteriores.³⁸

series. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 41, pp. 1723-1732.

³⁶Los resultados de la aplicación de este algoritmo pueden verse en los apartados 5.2.2 y 6.2.2 del presente trabajo.

Asimismo, puede hallarse el programa elaborado para la elección del retardo en el apartado 9.2, situado en el anexo del presente trabajo.

³⁷En el análisis se consideran los retardos $\tau = 1, 2, \dots, 120$.

³⁸El ángulo medio se calcula del siguiente modo:

3. Se representa, para cada retardo, el ángulo medio. Este primero aumenta, luego se estabiliza, luego vuelve a aumentar, luego se estabiliza, y así sucesivamente.³⁹ Interesa aquel retardo para el que se estabilice el ángulo medio y que presente mayor concentración de puntos.

4. Para encontrar dónde el ángulo medio presenta una máxima concentración de puntos, se trabaja con la frecuencia absoluta. Para ello, en primer lugar se representa, por centiles,⁴⁰ el polinomio ajustado a la frecuencia absoluta.⁴¹

$$\text{ángulo medio} = \frac{\sum \text{ángulos}}{\text{número de confinamientos}}.$$

³⁹Al principio esta función aumenta dado que hasta que el retardo no es el adecuado, el volumen (medido por la suma de ángulos) que ocupa la trayectoria en el espacio de estados va aumentando a medida que lo hace el retardo. Aumenta por tanto el numerador y además disminuye el denominador (formado por el número de puntos, de confinamientos, que disminuye a mayor retardo).

Una vez el retardo es idóneo, el ángulo medio se estabiliza.

Si se sigue aumentando el retardo, y este va alejándose de un valor adecuado, el numerador del ángulo medio empieza a disminuir mientras que el denominador sigue disminuyendo. Si la variación del numerador es mayor, el ángulo medio disminuirá.

A medida que el retardo se acerca a otro valor idóneo, la suma de ángulos (numerador) vuelve a aumentar, lo que produce, junto con la disminución del denominador, que el ángulo medio aumente de nuevo.

Y así sucesivamente.

El ángulo medio se estabilizará de nuevo en los retardos que sean idóneos para realizar la inmersión.

⁴⁰Los centiles, que aparecerán en el eje de abscisas, se han calculado restando el máximo ángulo medio y el mínimo, y dividiendo entre 100. Ese valor proporciona la amplitud de cada centil.

⁴¹En el cálculo de la frecuencia absoluta se ha partido de restar a cada ángulo medio el ángulo medio inicial, y dividir el resultado por 100. Una vez se ha obtenido ese valor, se ha sumado 1 en el centil que le corresponde. Y eso se ha hecho para cada ángulo medio, acumulando el resultado.

5. A continuación, se buscan los centiles donde la frecuencia absoluta presente sus máximos.⁴² Una vez hallados esos centiles, se mira a qué ángulos medios corresponden,⁴³ y ese ángulo medio a qué retardo.⁴⁴ De todos los retardos idóneos, aquel que se elegirá como óptimo será el que corresponda al máximo global de la frecuencia absoluta.⁴⁵

3.5. Análisis espectral singular

Una vez se hallados la dimensión de inmersión (m) y el retardo (τ) óptimos para confinar la serie, y obtenidos los confinamientos, que son biyectivos con los del sistema original, el siguiente paso consistirá en localizar la base ortonormal que minimice las proyecciones sobre esta de los confinamientos o vectores de inmersión que forman la trayectoria. Con el fin de encontrarla, se buscará una transformación sobre los vectores de inmersión que produzca esta base ortonormal.

El proceso consiste en localizar un nuevo conjunto de vectores ortonormales que sean base en el espacio de inmersión de tal modo que las proyecciones en un número dado de estas direcciones conserven la máxima fracción posible de la varianza de los vectores originales. De este modo, el error a la hora de hacer las proyecciones será mínimo. La resolución de este problema de minimización lleva a un problema

⁴²Para hallar estos valores, se han ajustado polinomios de grado 9 a la frecuencia absoluta, y se han buscado los máximos de esos polinomios.

⁴³Cada ángulo medio idóneo se calculará del siguiente modo:

$$\text{ángulo medio}_i = \text{ángulo medio mínimo} + \text{centil}_i \cdot \text{amplitud centil} .$$

⁴⁴Se ajusta el retardo sobre el ángulo, y así, sabiendo el ángulo medio, se obtiene el retardo al que corresponde.

⁴⁵Observando el gráfico se determina cuál de los máximos era máximo global.

de valores y vectores propios.⁴⁶

Para la obtención de la base ortonormal óptima sobre la que reconstruir el atractor el presente estudio se basa en el *análisis espectral singular*, que se desarrolla a continuación.⁴⁷

Se parte de una serie x_t consistente en observaciones del sistema, y se realizan los confinamientos, obteniéndose así en el espacio de inmersión m -dimensional una secuencia de vectores $\{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m \mid i = 1, \dots, \tilde{n}\}$, m -historias, con $\tilde{n} = n - m + 1$ que indica el número de confinamientos.

Con las m -historias puede construirse una *matriz de trayectorias* $\tilde{n} \times m$:

$$X = \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^t \\ \dots \\ \mathbf{x}_{\tilde{n}}^t \end{pmatrix}.$$

A continuación, se considera un conjunto de vectores $\{\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \mid i = 1, \dots, m\}$ cuya acción sobre X genere un conjunto de vectores ortogonales y linealmente independientes $\{\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m \mid i = 1, \dots, m\}$. Según el *teorema de Gram-Schmidt*,⁴⁸ todo espacio vectorial de dimensión finita siempre admite una base ortonormal, por lo que se puede lograr que $\{\mathbf{z}_i\}$ sea una base ortonormal, lo cual permitiría que todos los confinamientos pudieran escribirse como una combinación lineal de los vectores ortonormales que la conforman.

⁴⁶Se entiende por *vector propio* de un operador lineal aquel vector no nulo que, cuando es transformado por el operador, da lugar a un múltiplo escalar de sí mismo. Este escalar se conoce como *valor propio*.

⁴⁷En el análisis de series temporales del presente trabajo será necesario aplicar un análisis espectral singular con tal de observar las trayectorias en la base óptima.

⁴⁸Para una visión más detallada de este teorema puede consultarse:

Michavila, F. (1986): *Fundamentos de cálculo numérico: Topología métrica*. Reverté, S.A.

Puede expresarse la siguiente relación:

$$\mathbf{y}_i^t X = l_i \mathbf{z}_i^t, \quad (3.1)$$

siendo $\{l_i\}$ la longitud del vector $\{\mathbf{z}_i^t\}$, que lo normaliza. Con la anterior expresión se ha realizado una transformación lineal de la matriz de observaciones X a través de \mathbf{y}_i^t .

Multiplicando los dos lados de la igualdad anterior por su traspuesta se obtiene:

$$\mathbf{y}_i^t X X^t \mathbf{y}_j = l_i l_j \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

siendo δ_{ij} la *delta de Kronecker*.⁴⁹

Se denominará V a la matriz resultante del producto $X X^t$. Esta matriz $V = X X^t$ es real y simétrica, por lo que $V = V^t$, y presenta la forma:

$$V = \frac{1}{\tilde{n}} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{\tilde{n}} \rangle \\ \dots & & \dots \\ \langle \mathbf{x}_{\tilde{n}}, \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_{\tilde{n}}, \mathbf{x}_{\tilde{n}} \rangle \end{pmatrix}.$$

V puede interpretarse como la matriz que muestra las correlaciones entre los pares de vectores que se han generado a partir de una inmersión de longitud m , y es semidefinida positiva.⁵⁰

Dado que si $i \neq j$ entonces $\delta_{ij} = 0$, la expresión 3.2 sólo tiene sentido para $i = j$. Así, se obtiene:

⁴⁹La *delta de Kronecker* es una función de dos variables que cumple:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

⁵⁰Una matriz simétrica es *semidefinida positiva* cuando todos sus valores propios son positivos o nulos.

$$\mathbf{y}_i^t V \mathbf{y}_i = l_i^2 .$$

Los vectores propios de V conforman una base ortonormal de \mathbb{R}^m y satisfacen la igualdad anterior, dado que, por ser ortonormales, cumplen:⁵¹

$$V \mathbf{y}_i = l_i^2 \mathbf{y}_i . \tag{3.3}$$

Trasponiendo la relación 3.1 se llega a:

$$X^t \mathbf{y}_i = l_i \mathbf{z}_i . \tag{3.4}$$

A continuación, se multiplican ambos lados de la igualdad por la matriz de trayectorias X :

$$X X^t \mathbf{y}_i = l_i X \mathbf{z}_i ,$$

la cual, teniendo en cuenta que $V = X X^t$, puede expresarse del siguiente modo:

⁵¹Multiplicando por $(\mathbf{y}_i^t \cdot \mathbf{y}_i)$ el segundo término de la expresión anterior se obtiene:

$$\mathbf{y}_i^t V \mathbf{y}_i = l_i^2 \mathbf{y}_i^t \mathbf{y}_i ,$$

donde se identifica:

$$\mathbf{y}_i^t V = l_i^2 \mathbf{y}_i^t .$$

Trasponiendo la anterior igualdad se llega a:

$$V {}^t \mathbf{y}_i = l_i^2 \mathbf{y}_i ,$$

y por ser V simétrica:

$$V \mathbf{y}_i = l_i^2 \mathbf{y}_i .$$

$$V \mathbf{y}_i = l_i X \mathbf{z}_i .$$

Sustituyendo la anterior expresión en 3.3 se obtiene:

$$l_i X \mathbf{z}_i = l_i^2 \mathbf{y}_i ;$$

y, dividiendo entre la matriz longitud l_i se llega a:

$$X \mathbf{z}_i = l_i \mathbf{y}_i . \tag{3.5}$$

Si ahora se multiplican ambos lados de la igualdad por la traspuesta de la matriz de trayectorias X^t se obtiene la expresión:

$$X^t X \mathbf{z}_i = l_i X^t \mathbf{y}_i .$$

Denominando W a la matriz resultante del producto $X^t X$, la anterior igualdad puede exponerse del modo siguiente:

$$W \mathbf{z}_i = l_i X^t \mathbf{y}_i .$$

Y, dada la relación 3.4, puede expresarse:

$$W \mathbf{z}_i = l_i (l_i \mathbf{z}_i) ,$$

$$W \mathbf{z}_i = l_i^2 \mathbf{z}_i . \tag{3.6}$$

Esta matriz $W = X^t X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es simétrica, $W = W^t$, y definida positiva.⁵²

⁵²Una matriz simétrica es *definida positiva* cuando todos sus valores propios son estrictamente positivos.

Las matrices V y W tienen los mismos valores propios. W tiene n valores propios, positivos, por ello es definida positiva. V tiene \tilde{n} valores propios, de los que n coincidirán con los de W y el resto, $\tilde{n} - n$, serán nulos; es por esto que es semidefinida positiva.

Los vectores $\{\mathbf{z}_i\}$ son los vectores propios de W y forman una base ortonormal de \mathbb{R}^m ; por su parte $\{l_i^2\}$ son sus correspondientes valores propios.⁵³

Considérese la matriz $Z = \{\mathbf{z}_i\}$ cuyas columnas están formadas por los vectores propios de la matriz simétrica W . Si se normalizan estos vectores serán ortonormales.⁵⁴ Asimismo, si una matriz está constituida por vectores ortonormales entonces esta matriz es ortogonal,⁵⁵ por lo que se cumplirá que $Z^t = Z^{-1}$. Considérese además la matriz diagonal $L^2 = \text{diag}(l_1^2, l_2^2, \dots, l_m^2)$ formada por los valores propios $\{l_i^2\}$ ordenados de mayor a menor. Entonces, la relación 3.6 puede expresarse del siguiente modo:

⁵³Nótese que la expresión 3.6 lleva a un elipsoide, dado que:

$$W \mathbf{z}_i = l_i^2 \mathbf{z}_i$$

puede expresarse como:

$$\mathbf{z}_i^t W \mathbf{z}_i = l_i^2 ,$$

siendo $\mathbf{z}_i^t W \mathbf{z}_i$ la fórmula de un elipsoide y l_i^2 la longitud de los ejes.

⁵⁴Se entiende por vectores *ortonormales* aquellos que cumplen:

- 1) son perpendiculares (ortogonales) entre ellos;
- 2) tienen longitud 1.

⁵⁵Una matriz cuadrada A es *ortogonal* si al multiplicarla por su traspuesta A^t se obtiene la matriz identidad I :

$$A \cdot A^t = I ,$$

por lo que, si una matriz A es ortogonal, cumple:

$$A^t = A^{-1} .$$

La matriz A es ortogonal si y sólo si los vectores fila o vectores columna que la conforman son un conjunto ortonormal de vectores.

$$W Z = Z L^2 .$$

Dado que $W = X^t X$ la expresión anterior queda:

$$X^t X Z = Z L^2 .$$

A continuación, se multiplican ambos lados de esta igualdad por la traspuesta de la matriz de vectores propios Z^t :

$$Z^t X^t X Z = Z^t Z L^2 .$$

Como la matriz Z es ortonormal, $Z^t = Z^{-1}$, el producto de esta matriz por su traspuesta da como resultado la matriz identidad $Z^t Z = I$.

$$Z^t X^t X Z = L^2 ,$$

$$(X Z)^t X Z = L^2 .$$

donde la matriz $X Z$ es una matriz de trayectorias proyectada sobre la base $\{\mathbf{z}_i\}$, es decir, muestra las coordenadas de los vectores confinados en la base ortonormal hallada.⁵⁶

Así, puede hallarse una base Z que sirva para proyectar todos los confinamientos. En otras palabras, todos los confinamientos realizados se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores $\{\mathbf{z}_i\}$. La elección de $\{\mathbf{z}_i\}$ es óptima en el

⁵⁶De la anterior expresión se deduce que la proyección de X sobre Z es mínima, puesto que el producto $(X Z)^t X Z$ da lugar a una matriz diagonal.

sentido de que hace independientes las columnas de la matriz de trayectorias y minimiza el error cuadrático medio⁵⁷ de la proyección sobre esta base.⁵⁸

3.6. Caoticidad

Un atractor se caracteriza por poseer transitividad topológica, la cual conlleva la existencia de órbitas densas.⁵⁹ Si además es sensible a las condiciones iniciales, este atractor se califica de caótico. A la propiedad que cumplen los objetos caóticos se la denominará *caoticidad*.

En este sentido, para determinar si un sistema cumple la propiedad de caoticidad lo que se hará será, en primer lugar, comprobar si posee atractor, y a continuación testar si este es sensible a las condiciones iniciales.

⁵⁷El *error cuadrático medio* que se obtiene al establecer una función f como aproximación a un conjunto de valores \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$ puede calcularse del siguiente modo:

$$ecm(f) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n e_k^2}{n}},$$

siendo $e_k = x_k - f(x_{k-1})$.

⁵⁸Fuente:

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.

⁵⁹Fuente:

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, p. 41.

Capítulo 4

Detección de caos

4.1. Aplicación de filtros

Es habitual en varios de los estudios que tratan de buscar caos en series temporales aplicar previamente filtros a estas series, para evitar que la posible presencia de dependencias lineales o de ruidos aleatorios afecten a los resultados. Por ello, si bien la aplicación de estos filtros no es propiamente un instrumento que tenga por finalidad la búsqueda de caos, por tratarse de un primer paso en varios estudios que pretenden detectar comportamientos caóticos, a continuación se enuncian algunos de los filtros frecuentemente empleados en este tipo de estudios.

4.1.1. Filtro para la dependencia lineal

Filtraje por medio de un ARMA

Algunos de los test que se enuncian posteriormente son sensibles a los procesos en los que existen dependencias lineales entre las variables. Para evitar que estas posibles dependencias afecten a los resultados de los análisis, es habitual filtrar

previamente la serie utilizando un modelo lineal ARMA¹ y trabajar con los errores.² En este sentido, el *Akaike Information Criterion* (AIC)³ es un criterio comúnmente utilizado para determinar qué ARMA(p,q) se ajusta mejor a los datos.

4.1.2. Filtros para el ruido

La presencia de un ruido aleatorio dificulta en gran medida la detección de comportamientos caóticos en el sistema, dado que puede afectar sustancialmente a los valores que toma la función de correlación, al exponente de Lyapunov, y a otros de los instrumentos que se enumeran a continuación para distinguir si un sistema cumple la propiedad de caoticidad.

¹El *modelo autorregresivo de media móvil* (ARMA), también llamado *modelo Box-Jenkins*, se aplica a series temporales de datos. Está formado por dos partes, una autorregresiva (AR) y otra de media móvil (MA). La parte AR considera que el valor actual de una serie es una función lineal de los valores anteriores y de la innovación actual, entendida esta innovación como la nueva información que aparece en cada instante. La parte MA considera que el valor actual es una función lineal de la innovación actual y de las anteriores innovaciones.

El modelo está normalmente referenciado como ARMA(p,q), siendo p el orden de la parte autorregresiva, y q el orden de la parte de la media móvil. Se expresa del siguiente modo:

$$x_t = e_t + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i e_{t-i} ,$$

donde x_t se refiere al valor que toma la variable en el momento t ; ϕ_1, \dots, ϕ_p son los parámetros del modelo AR; $\theta_1, \dots, \theta_q$ los del modelo MA; y e_t es el término de error que representa la innovación, el cual se asume que es una variable aleatoria o ruido blanco que sigue una distribución normal de media cero y varianza σ^2 : $e_t \sim N(0, \sigma^2)$.

²Fuente:

Gimeno, R. (2000): *Análisis Caótico de Series Temporales Financieras de Alta Frecuencia. El Contrato de Futuro sobre el Bono Ncional a 10 años*. Tesis doctoral.

³Akaike, H. (1981): *Likelihood of a model and information criteria*, IEEE Transactions on Automatic Journal of Econometrics, vol. 16, pp. 3-14.

Filtraje espectral

El filtraje espectral tiene como objetivo eliminar el ruido o comportamiento aleatorio⁴ presente en algunos datos.

Para realizar el filtraje, se parte de descomponer en valores singulares⁵ la matriz de trayectorias X :

$$X = Y L Z^t,$$

con $Y \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Si la dimensión del atractor u se ha hallado, puede descomponerse la matriz L del siguiente modo:

$$L = L^* + L',$$

donde L^* y L' se han obtenido a partir de L , igualando a cero los $m - u$ valores propios que pertenecen a la parte aleatoria y los u valores propios significativos, respectivamente. Más concretamente:

$$L^* = \text{diag}(l_1, \dots, l_u, 0, \dots, 0),$$

$$L' = \text{diag}(0, \dots, 0, l_{u+1}, \dots, l_m).$$

⁴Un *comportamiento aleatorio* es aquel en el cual el azar está involucrado en los futuros estados del sistema. Así, un comportamiento aleatorio es el que no es determinista, es decir, es aquel que no cumple que los estados posteriores evolucionen a partir de los anteriores, de acuerdo con una ley fija.

⁵Entendemos por *valor singular* de una matriz A la raíz cuadrada de los valores propios reales y positivos de la matriz simétrica que se obtiene de multiplicar $A^t A$. En el caso que nos ocupa los valores singulares se hallan en la matriz L .

Se pueden obtener las componentes aleatoria y determinista de la matriz de trayectorias del siguiente modo:

$$\begin{aligned} X^* &= Y L^* Z^t, \\ X' &= Y L' Z^t. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Y sumando las anteriores ecuaciones se verifica:

$$X = X^* + X',$$

por lo que la matriz de trayectorias original es igual a la suma de las dos componentes separadas: X^* , que representa la parte de la trayectoria que se mueve por causas deterministas, y X' , que expresa el movimiento debido al ruido. Por ello, habrá que filtrar, de la matriz original X , el movimiento hacia las $m - u$ direcciones no-deterministas recogido por la matriz X' .

Sustituyendo la expresión 3.5⁶ en la 4.1, se obtiene:

$$X^* = \sum_{i=1}^u [X \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^t],$$

la cual permite hallar X^* a partir de los datos originales y de los vectores propios de W . Se puede realizar la proyección de la matriz de trayectorias en el subespacio determinista con la siguiente operación:

$$X^{**} = X^* Z.$$

A la hora de analizar si una serie temporal ha sido generada por un sistema caótico resultará útil el filtraje previo de la serie, representándola luego en X^{**} .⁷

⁶Véase el apartado 3.5 del presente trabajo

⁷Fuente:

Filtro propuesto por Orzesko

Con el fin de reducir el ruido aleatorio en series temporales, Orzesko⁸ propuso un filtro basado en el *método de los vecinos cercanos o de los análogos* (“*nearest neighbor method*”). El método que propone se basa en la idea de que cuando se añade ruido a una serie temporal, el atractor se vuelve más amplio, es decir, la media de las distancias entre puntos cercanos situados en el atractor aumenta, e intenta por ello reducir con el filtraje estas distancias.⁹

4.2. Test de independencia

4.2.1. Dimensión de correlación

Con el método de los retardos¹⁰ puede realizarse la inmersión de una serie temporal $\{\mathbf{x}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ en un espacio m -dimensional, donde m es la dimensión de inmersión y τ es el tiempo de retardo, obteniendo:

$$\mathcal{X}_i = (\mathcal{X}_{i-(m-1)\tau}, \mathcal{X}_{i-(m-2)\tau}, \dots, \mathcal{X}_i).$$

Se define la *integral de correlación* del siguiente modo:¹¹

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.

⁸Orzesko, W. (2008): *The new method of measuring the effects of noise reduction in chaotic data*. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 38, pp. 1355-1368.

⁹Existen otros métodos para filtrar el ruido presente en una serie temporal. Véase por ejemplo el propuesto en:

Urbanowicz, K. et al. (2004): *Noise reduction in chaotic time series by local projection with nonlinear constraints*. *Acta Physica Polonica B*, vol. 35, pp. 2175-2197.

¹⁰Véase el apartado 3.4.1 del presente trabajo.

¹¹El método desarrollado parte del procedimiento ofrecido por:

Grassberger, P.; Procaccia, I. (1983): *Measuring the strangeness of strange attractors*. *Physica D*, vol. 9, pp. 189-208.

$$C(m, n, \varepsilon) = \frac{2}{\tilde{n}(\tilde{n} - 1)} \sum_{1 \leq i < j \leq \tilde{n}} \Theta(\varepsilon - \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|), \quad \varepsilon > 0,$$

donde $\Theta(\cdot)$ es una función de probabilidad conocida como la función de Heavyside,¹² n el número de observaciones, $\tilde{n} = n - (m - 1)\tau$ el número de puntos confinados en el espacio m -dimensional, y $\|\cdot\|$ denota la norma. $C(m, n, \varepsilon)$ mide el porcentaje de pares de puntos \boldsymbol{x}_i , $i = 1, 2, \dots, \tilde{n}$ cuya norma de separación es inferior a ε .

Si el límite de $C(m, n, \varepsilon)$ cuando $n \rightarrow \infty$ existe $\forall \varepsilon$, se expresará:

$$C(m, \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(m, n, \varepsilon),$$

siendo $C(m, \varepsilon)$ la probabilidad de que dos puntos cualesquiera del vector de estados se encuentren a una distancia menor que ε . La integral de correlación muestra por tanto la probabilidad de que un conjunto de puntos se hallen separados un radio o distancia inferior a una distancia determinada en el espacio de estados.¹³

¹²La función de Heavyside toma los valores:

$$\begin{cases} \Theta(k) = 0 & \text{si } k \leq 0 \\ \Theta(k) = 1 & \text{si } k > 0 \end{cases}.$$

¹³Si los datos se han generado a partir de un proceso estacionario, entonces este límite existe y puede obtenerse del siguiente modo:

$$C(m, \varepsilon) = \int \int \Theta(\varepsilon - \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|) dF(\boldsymbol{x}_i) dF(\boldsymbol{x}_j), \quad \varepsilon > 0.$$

Un *proceso estacionario* (en sentido estricto) es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad es la misma sea cual sea el instante de tiempo considerado. Como consecuencia de ello, la media y la varianza de este tipo de procesos, si existen, no varían a lo largo del tiempo.

Un *proceso estocástico* es una sucesión de variables aleatorias indexadas por una variable, generalmente el tiempo.

En el caso de que el proceso sea independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.), entonces:

La *dimensión de correlación* \dim_c se obtiene del siguiente modo:

$$\dim_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(m, n, \varepsilon)}{\log \varepsilon} .$$

Esta dimensión muestra la pendiente de la regresión de $\log C(m, n, \varepsilon)$ frente a $\log \varepsilon$ para $\varepsilon \rightarrow 0$, y depende de la dimensión de inmersión m .

En los estudios empíricos, usualmente se busca el valor de \dim_c a medida que m aumenta. En este sentido, la dimensión de correlación puede utilizarse para intentar distinguir entre procesos aleatorios y procesos deterministas, dado que:

- si a medida que aumenta m , \dim_c también aumenta, el sistema se califica de aleatorio;
-

$$C(m, \varepsilon) = C^m(1, \varepsilon).$$

En general, $C(m, \varepsilon) - C^m(1, \varepsilon)$ sigue una función de distribución normal, con media cero y varianza:

$$\begin{aligned} \sigma^2(m, n, \varepsilon) = 4 \cdot & \left[k^m(n, \varepsilon) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m-1} k^{m-j}(n, \varepsilon) \cdot C^{2j}(n, 1, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + (m-1)^2 \cdot C^{2m}(n, 1, \varepsilon) - m^2 \cdot k(n, \varepsilon) \cdot C^{2m-2}(n, 1, \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

donde se puede estimar $k(n, \varepsilon)$ a partir de:

$$k(n, \varepsilon) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{h=j+1}^n [\Theta(\varepsilon - \|\varkappa_i - \varkappa_j\|) \Theta(\varepsilon - \|\varkappa_j - \varkappa_h\|)].$$

Fuente:

Grassberger, P.; Procaccia, I. (1983): *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica D, vol. 9, pp. 189-208.

Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

- si \dim_c alcanza un valor determinado para un valor relativamente pequeño de m , y se mantiene en él, entonces se concluye que los datos se han generado a partir de un proceso determinista (lo cual es compatible con un comportamiento caótico).¹⁴

Sin embargo, la utilización de la dimensión de correlación para distinguir caos de aleatoriedad presenta una serie de inconvenientes. Por ejemplo, cuando la dimensión de correlación es muy elevada, como en el caso de caos de alta dimensión,¹⁵ es muy difícil estimarla a no ser que se disponga de un número considerablemente grande de observaciones. Ruelle¹⁶ asegura, en este sentido, que sólo podrá distinguirse correctamente una serie caótica si su dimensión de correlación es inferior a $2 \log n$. Además, según Reiss y otros autores,¹⁷ para valores de ε demasiado pequeños o demasiado grandes la dimensión de correlación obtenida no es la adecuada, y por tanto la pendiente de la regresión de $\log C(m, n, \varepsilon)$ frente a $\log \varepsilon$ hay que calcularla en el medio de la curva, en la región en la que la pendiente es más estable.

¹⁴Puede verse aplicaciones de este método a datos económicos en:

Barkoulas, J.T. et al. (2012): *A metric and topological analysis of determinism in the crude oil spot market*. Energy Economics, vol. 34, pp. 584-591.

Iseri, M. et al. (2008): *A model proposal for the chaotic structure of Istanbul stock exchange*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 36, pp. 1392-1398.

Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

¹⁵Como se ha visto anteriormente, se entiende por *caos de alta dimensión* aquel en el que en su generación intervienen un número elevado de variables. En el caso de *caos de baja dimensión* es reducido el número de variables que intervienen en su generación.

Un sistema poseerá caos de alta dimensión cuando esté caracterizado por más de un exponente de Lyapunov positivo. Véase el apartado 4.4.1 del presente trabajo.

¹⁶Ruelle, D. (1990): *Deterministic chaos: the science and the fiction*. Proceedings of the Royal Society of London A, vol. 427, pp. 241-248.

¹⁷Reiss, J.D. et al. (2008): *Verification of chaotic behavior in an experimental loudspeaker*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 124, n° 4, pp. 2031-2041.

4.2.2. Test BDS

Con el fin de superar los inconvenientes que presentaba la dimensión de correlación, Brock, Dechert y Scheinkman¹⁸ propusieron un nuevo test estadístico conocido como *test BDS*.

El test BDS contrasta la hipótesis nula de que las observaciones de la serie son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)¹⁹ y permite detectar la presencia de dependencias, incluso las no-lineales, en series de datos.

A partir del concepto de la integral de correlación, el estadístico BDS se define, para $m > 1$, como:

$$BDS(m, \tilde{n}, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{\sigma} [C(m, \varepsilon) - C^m(1, \varepsilon)].$$

Si $BDS(m, \tilde{n}, \varepsilon) = 0$ entonces los datos son i.i.d.²⁰

Este estadístico sigue una función de distribución normal estándar²¹ bajo la

¹⁸Brock, W. et al. (1987): *A test for independence based on the correlation dimension*. Working Paper, University of Chicago.

¹⁹Los datos estarán *idénticamente o uniformemente distribuidos* si no existe una zona que tenga más probabilidad de contener trayectorias que otra.

²⁰Esto es así dado que bajo esta hipótesis se cumple que $C(m, \varepsilon) = C^m(1, \varepsilon)$.

²¹Se denomina *distribución normal estándar* a aquella que sigue una normal de media $\mu = 0$ y desviación típica y varianza $\sigma = \sigma^2 = 1$.

Una variable aleatoria continua x sigue una *distribución normal o gaussiana* de media μ y desviación típica σ (varianza σ^2), $x \sim N(\mu, \sigma)$, si su función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La función de distribución de la distribución normal se define del siguiente modo:

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

hipótesis nula de que las observaciones de la serie son i.i.d.²²

El tiempo de retardo τ asumido por este test es 1. En el caso de que quisiese tomarse para el análisis un tiempo de retardo distinto de 1, Matilla-García y otros autores²³ sugieren el test *BDS Generalizado* (*BDS-G test*), que considera a τ un parámetro.

4.2.3. Test *Chi-square* para patrones ordinales

Este test fue propuesto por Matilla-García²⁴ para detectar la presencia de dependencias en las series de datos. Presenta la ventaja de que en su aplicación no es necesario seleccionar ningún parámetro libre,²⁵ a diferencia de los test previamente enumerados. Se basa en el análisis de la dinámica simbólica,²⁶

²²Pueden verse aplicaciones de este test a datos económicos, entre otros, en:

Abhyankar, A. et al. (1997): *Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: The S & P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100*. Journal of Business & Economic Statistics, vol. 15, n° 1, pp. 1-14.

McKenzie, M. (2001): *Chaotic behavior in national stock market indices: new evidence from the close return test*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 35-53.

Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

Özer, G.; Ertokatli, C. (2010): *Chaotic processes of common stock index returns: An empirical examination on Istanbul Stock Exchange (ISE)*. African Journal of Business Management, vol. 4, n° 6, pp. 1140-1148.

²³Matilla-García, M. et al. (2004): *A Generalized BDS Statistic*. Computational Economics, vol.24, pp. 277-300.

Matilla-García, M. et al. (2005): *The BDS test and delay time*. Applied Economics Letters, vol. 12, pp. 109-113.

²⁴Matilla-García, M. (2007): *A non-parametric test for independence based on symbolic dynamics*. Journal of Economic Dynamics & Control, vol. 31, pp. 3889-3903.

²⁵Se entiende por *parámetro libre* aquel que puede tomar cualquier valor.

²⁶La *dinámica simbólica* estudia los sistemas dinámicos basándose en secuencias simbólicas que se obtienen de dividir el espacio de fases en un número finito de regiones y etiquetar cada región

realizando una permutación ordinal de patrones hallados en las series temporales para una dimensión de inmersión dada. Este test es robusto²⁷ ante la presencia de pequeños ruidos. Matilla-García y Marín²⁸ aplican este test a diversas series temporales financieras, con el fin de intentar detectar comportamientos deterministas, pudiendo ser caóticos, en las mismas.

4.3. Test de no-linealidad

Son varios los test destinados a detectar la presencia de no-linealidades en series temporales,²⁹ pero en el presente apartado tan sólo se hace referencia a algunos comúnmente utilizados.

con un número o letra.

²⁷Se dice que un test es *robusto* si la modificación de los supuestos de partida en los que se basa no altera significativamente los resultados que proporciona.

²⁸Matilla-García, M.; Marín, M.R. (2010): *A new test for chaos and determinism based on symbolic dynamics*. Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 76, pp. 600-614.

²⁹Véanse, por ejemplo, los tests propuestos en:

Hinich, M.J. (1982): *Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series*. Journal of Time Series Analysis, vol. 3, pp. 169-176.

McLeod, A.I.; Li, W.K. (1983): *Diagnostic checking ARMA time series models using squared residuals autocorrelations*. Journal of Time Series Analysis, vol. 4, pp. 269-273.

Tsay, R.S. (1986): *Nonlinearity tests for time series*. Biometrika, vol. 73, n° 2, pp. 461-466.

White, H. (1989): *An Additional Hidden Unit Test for Neglected Nonlinearity in Multilayer Feedforward Networks*. Proceedings of The International Joint Conference on Neural Networks II, pp. 451-455.

Puede verse una aplicación a datos económicos de los métodos de Hinich y McLeod-Li en:

Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

4.3.1. Test de Kaplan

El test de Kaplan³⁰ parte del hecho de que en las trayectorias de un sistema determinista, a diferencia de las que se generan en procesos aleatorios, se cumple la propiedad de que puntos próximos tienen imágenes próximas en el espacio de estados.³¹ Esto implica que si los datos observados son $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$, simplemente graficando x_i versus x_{i+1} puede observarse qué tipo de proceso siguen. Si los datos son aleatorios, este tipo de gráfico no produce ninguna estructura, mientras que si son deterministas (o caóticos), presentan una estructura. A partir de esta premisa, se elabora un estadístico que posee un límite inferior estrictamente positivo para procesos aleatorios, pero no para procesos deterministas.

Este test puede utilizarse también para distinguir si el proceso generador de datos es de tipo lineal. Para tal fin, el procedimiento que se utiliza en el test de Kaplan consiste en generar procesos lineales sustitutos para los datos y determinar si estos datos son descritos mejor por los sustitutos generados o bien por una trayectoria ruidosa no-lineal continua. Se rechaza la linealidad si el valor del estadístico calculado para los procesos sustitutos es suficientemente pequeño comparado con el valor del estadístico calculado para los datos.³²

³⁰Kaplan, D.T. (1994): *Exceptional events as evidence for determinism*. Physica D, vol. 73, pp. 38-48.

³¹Lo cual significa que si \mathbf{x}_t y \mathbf{y}_t están cerca uno del otro, y sus valores retardados también lo están, entonces \mathbf{x}_{t+1} y \mathbf{y}_{t+1} estarán cerca uno del otro.

³²Para una versión más formal y detallada del test de Kaplan, pueden consultarse:

Barnett, W.A. et al. (1997): *A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos*. Journal of Econometrics, vol. 82, pp. 157-192.

Kaplan, D.T. (1994): *Exceptional events as evidence for determinism*. Physica D, vol. 73, pp. 38-48.

Matilla-García, M. (2007): *Nonlinear Dynamics in Energy Futures*. The Energy Journal, vol. 28, n° 3, pp. 7-29.

Puede verse una aplicación de este método, entre otros, en:

4.3.2. Test de Theiler

El test propuesto por Theiler juntamente con otros autores³³ es uno de los procedimientos más utilizados para comprobar la presencia de no-linealidades en el sistema generador de una serie de datos.

Este método parte de la creación de series de datos sustitutos (“*surrogate data*”). Estos datos sustitutos son series aleatorias de datos generadas a partir de la serie empírica, de modo que conserven algunas propiedades de la serie original (como la media, varianza, estructura de autocorrelación y el espectro de Fourier³⁴) pero eliminando la posible dependencia no-lineal. Cuando se han generado las series sustitutas, se calcula un índice estadístico sensible a la dependencia no-lineal en la serie de datos original y, además, se obtiene la distribución del índice para las series sustitutas. A continuación, se aplica un test que tiene por hipótesis nula que los índices proceden de un sistema lineal. En el caso de que la hipótesis nula fuera rechazada, se aceptaría, dentro de un determinado intervalo de confianza, que los datos empíricos provienen de un sistema no-lineal, ya que las series sustitutas se han generado a partir de un proceso lineal.³⁵

Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

³³Theiler, J. et al. (1992): *Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data.* Physica D, vol. 58, pp. 77-94.

Posteriormente, Theiler describe el programa para aplicar el método propuesto junto con otro para calcular la integral de correlación en:

Theiler, J. (1994): *Two tools to test time series data for evidence of chaos and/or nonlinearity.* Integrative physiological and behavioral science: the official journal of the Pavlovian Society, vol. 29, pp. 211-216.

³⁴El *espectro de Fourier* es la representación de la amplitud o la fase respecto a la frecuencia. Para más información, puede consultarse:

Arsac, J. (1961): *Transformation de Fourier et Théorie des distributions.* Dunod.

³⁵Pueden verse aplicaciones de este método por ejemplo en:

4.4. Test para la sensibilidad a las condiciones iniciales

4.4.1. Exponente de Lyapunov

El *exponente de Lyapunov*³⁶ caracteriza el radio de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Dos trayectorias en el espacio de estados con separación inicial Δ_0 divergen:

$$|\Delta_t| \approx e^{\lambda t} |\Delta_0|,$$

donde λ es el exponente de Lyapunov, que puede obtenerse despejando la anterior expresión:

$$\frac{|\Delta_t|}{|\Delta_0|} \approx e^{\lambda t},$$

$$\ln \frac{|\Delta_t|}{|\Delta_0|} \approx \lambda t,$$

$$\lambda \approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta_t|}{|\Delta_0|}.$$

Kugiumtzi, D.; Aifantis, C. (2004): *Statistical analysis for long term correlations in the stress time series of jerky flow*. Journal of Mechanical Behaviour of Materials, vol. 15, nº 3, pp. 135-147.

Schreiber, T.; Schmitz, A. (1996): *Improved surrogate data for nonlinearity tests*. Physical Review Letters, vol. 77, pp. 635-640.

³⁶El exponente de Lyapunov debe su nombre al matemático ruso Lyapunov, que fue quien empezó esta línea de investigación de los sistemas dinámicos. Sin embargo, fue Oseledec quien formuló por primera vez este concepto en la forma en que se conoce hoy en día.

Lyapunov, A.M. (1907): *Problème général de stabilité de mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, vol. 9, pp. 203-475.

Oseledec, V.I. (1968): *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Transactions of the Moskow Mathematical Society, vol. 19, pp. 197-231.

4.4. TEST PARA LA SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

Considerando que se poseen un total de n observaciones del sistema, el exponente de Lyapunov se calcula del siguiente modo:

$$\lambda = \frac{1}{nt} \sum_{j=1}^n \ln \frac{|\Delta_{tj}|}{|\Delta_{0j}|}.$$

Para cualquier punto del sistema puede hallarse un exponente de Lyapunov. Al conjunto de todos los exponentes de Lyapunov de un sistema se denomina *espectro de exponentes de Lyapunov*.

Cuando el máximo exponente de Lyapunov es:

- $\lambda < 0$ implica contracción, la serie es convergente.
- $\lambda = 0$ la serie es constante o cíclica.
- $\lambda > 0$ implica alejamiento de los puntos, la serie presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.³⁷

El exponente de Lyapunov mide por tanto la media de divergencia o convergencia exponencial entre trayectorias que en sus condiciones iniciales se hallan a una distancia infinitesimal. Un sistema con un exponente de Lyapunov positivo³⁸ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que conlleva una imposibilidad de realizar predicciones a largo plazo.³⁹

³⁷Cabe recordar que, cuando un sistema presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales, un pequeño cambio en las condiciones iniciales hace que el sistema evolucione de manera considerablemente distinta.

³⁸Nótese que se habla de exponente de Lyapunov y no de máximo exponente de Lyapunov, dado que si un sistema tiene un exponente de Lyapunov positivo, el máximo también lo será.

³⁹Pueden verse aplicaciones del máximo exponente de Lyapunov a datos económicos en:

Barkoulas, J.T. et al. (2012): *A metric and topological analysis of determinism in the crude oil spot market*. Energy Economics, vol. 34, pp. 584-591.

Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

Hay distintos modos de hallar el exponente de Lyapunov.⁴⁰ Uno de ellos es el *algoritmo de Kantz*,⁴¹ el cual parte de elegir un punto inicial x_k de la serie temporal en el espacio de estados y en considerar los puntos vecinos, que serán aquellos situados a una distancia menor a ε del punto considerado.

Para la aplicación del algoritmo de Kantz, se considera una trayectoria del espacio de estados como representación de la serie temporal y se supone que se observa un dato muy cercano $x_{k'}$ al punto inicial escogido. Entonces la distancia

⁴⁰Véanse, por ejemplo, los métodos propuestos en:

Eckmann, J.-P. et al. (1986): *Lyapunov exponents from time series*. Physical Review A, vol. 34, pp. 4971-4979.

Gencay, R.; Dechert, W.D. (1992): *An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n -dimensional unknown dynamical system*. Physica D, vol. 49, pp. 142-157.

Nychka, D. et al. (1992): *Finding chaos in noisy systems*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 54, n° 2, pp. 399-426.

Wolf, A. et al. (1985): *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica D, vol. 16, pp. 285-317.

Pueden verse aplicaciones del método propuesto por Nychka et al. a datos económicos en:

Abhyankar, A. et al. (1997): *Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: The S & P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100*. Journal of Business & Economic Statistics, vol. 15, n° 1, pp. 1-14.

Özer, G.; Ertokatli, C. (2010): *Chaotic processes of common stock index returns: An empirical examination on Istanbul Stock Exchange (ISE)*. African Journal of Business Management, vol. 4, n° 6, pp. 1140-1148.

También puede verse una aplicación del método propuesto por Wolf a datos económicos en:

Özer, G.; Ertokatli, C. (2010): *Chaotic processes of common stock index returns: An empirical examination on Istanbul Stock Exchange (ISE)*. African Journal of Business Management, vol. 4, n° 6, pp. 1140-1148.

⁴¹Para una visión más detallada de este algoritmo, pueden consultarse:

Hegger, R. et al. (1999): *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*. Chaos, vol. 9, pp. 413-435.

Espinosa, F. (2001): *Modelización no browniana de series temporales financieras*. Tesis doctoral.

4.4. TEST PARA LA SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

entre ambos puntos $\Delta_0 = x_k - x_{k'}$ es una perturbación pequeña, que puede crecer exponencialmente a lo largo del tiempo. La evolución de esta distancia con el tiempo vendrá dada por la siguiente función: $\Delta_t = x_{k+t} - x_{k'+t}$. Si se halla $|\Delta_t| \approx e^{\lambda t} |\Delta_0|$ entonces λ es el máximo exponente de Lyapunov.

Para hallar el máximo exponente de Lyapunov el algoritmo de Kantz trabaja con la siguiente expresión:

$$K(\varepsilon, m, t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{|E(x_k)|} \sum_{x_{k'} \in E(x_k)} |x_{k+t} - x_{k'+t}| \right),$$

donde m es la dimensión de inmersión y $E(x_t)$ es la vecindad de x_t de diámetro ε . Si para algún rango de valores de ε , m y t la función $K(\varepsilon, m, t)$ presenta un crecimiento lineal, la pendiente de este crecimiento será una estimación del máximo exponente de Lyapunov λ de la serie temporal.

Existen varios test basados en los exponentes de Lyapunov que buscan hallar caos en series temporales, como por ejemplo los propuestos por Serletis y Shintani,⁴² quienes, basándose en un trabajo de Whang y Linton⁴³ y en el exponente de Lyapunov que se obtiene aplicando el método de Nychka y otros autores,⁴⁴ elaboran

⁴²Serletis, A.; Shintani, M. (2003): *No evidence of chaos but some evidence of dependence in the US stock market*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 17, pp. 449-454.

⁴³Whang, Y.-J.; Linton, O. (1999): *The asymptotic distribution of nonparametric estimates of the Lyapunov exponent for stochastic time series*. Journal of Econometrics, vol. 91, pp. 1-42.

⁴⁴Nychka, D. et al. (1992): *Finding chaos in noisy systems*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 54, n° 2, pp. 399-426.

un test a partir del error estándar de este;⁴⁵ por Shintani y Linton,⁴⁶ cuyo test se basa en la distribución asintótica de la red neuronal⁴⁷ del exponente de Lyapunov; o por Park y Whang,⁴⁸ quienes sugieren un test que está basado en el estimador Nadaraya-Watson⁴⁹ del exponente de Lyapunov.

⁴⁵Pueden verse aplicaciones de este test a datos económicos, entre otros, en:

Serletis, A.; Shahmoradi, A. (2007): *Chaos, self-organized criticality, and SETAR nonlinearity: An analysis of purchasing power parity between Canada and the United States*. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, pp. 1437-1444.

Serletis, A.; Shahmoradi, A. (2004): *Absence of chaos and 1/f spectra, but evidence of tar nonlinearities, in the Canadian exchange rate*. *Macroeconomic Dynamics*, vol. 8, pp. 543-551.

Serletis, A.; Shintani, M. (2003): *No evidence of chaos but some evidence of dependence in the US stock market*. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 17, pp. 449-454.

Serletis, A.; Shintani, M. (2006): *Chaotic monetary dynamics with confidence*. *Journal of Macroeconomics*, vol. 28, pp. 228-252.

Las conclusiones de este último estudio se discuten en:

Barnett, W.A. (2006): *Comments on "Chaotic monetary dynamics with confidence"*. *Journal of Macroeconomics*, vol. 28, pp. 253-255.

⁴⁶Shintani, M.; Linton, O. (2004): *Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos*. *Journal of Econometrics*, vol. 120, pp. 1-33.

En este mismo trabajo los autores aplican el test propuesto a datos económicos.

⁴⁷En el campo de la inteligencia artificial, las *redes neuronales* se inspiran en la forma en que funciona el sistema nervioso, el cual responde a diversas entradas con estímulos de salida que se producen a través de la colaboración de neuronas interconectadas. Así, las redes neuronales pueden utilizarse para modelar matemáticamente determinados problemas que partan de un conjunto de datos de entrada significativo con el fin de conseguir que la red aprenda automáticamente las propiedades deseadas y permita simular los resultados que se obtendrán.

⁴⁸Park, J.Y.; Whang, Y.-J. (2012): *Random walk or chaos: A formal test on the Lyapunov exponent*. *Journal of Econometrics*, vol. 169, pp. 61-74.

⁴⁹Este estimador se utiliza para realizar estimaciones no paramétricas de funciones de densidad.

Recientemente, autores como Kim y Choe⁵⁰ o Dabrowski⁵¹ han propuesto nuevos métodos para hallar el máximo exponente de Lyapunov. Mientras que el de Kim y Choe está basado en algoritmos existentes y presenta una ventaja, y es que no requiere la reconstrucción del espacio de estados, el método propuesto por Dabrowski usa un vector de perturbaciones⁵² y su producto escalar para calcular el máximo exponente de Lyapunov. Sin embargo, por tratarse de métodos relativamente nuevos, no se ha hallado por el momento ningún estudio en el que se apliquen a series temporales.

Por su parte, Fernández-Rodríguez juntamente con otros autores⁵³ afirman que por sí mismo el máximo exponente de Lyapunov no permite distinguir entre procesos caóticos y estocásticos.⁵⁴ Estos autores aseguran que esta distinción puede realizarse evaluando la *estabilidad del máximo exponente de Lyapunov* para distintos tamaños de la muestra y proponen un test a este respecto. En el caso de que el máximo exponente de Lyapunov se estabilice o decrezca a medida que aumente el tamaño muestral, entonces se podrá clasificar el proceso como caótico. Si por el contrario el máximo exponente de Lyapunov aumenta con el tamaño muestral, el proceso será estocástico, ya que va aumentando la inestabilidad del sistema. Para la aplicación de este test es necesario elegir previamente el tiempo de retardo y dimensión de inmersión a utilizar.⁵⁵

⁵⁰Kim, B.J.; Choe, G.H. (2010): *High precision numerical estimation of the largest Lyapunov exponent*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, pp. 1378-1384.

⁵¹Dabrowski, A. (2012): *Estimation of the largest Lyapunov exponent from the perturbation vector and its derivative dot product*. Nonlinear Dynamics, vol. 67, pp. 283-291.

⁵²Entendiendo por *vector de perturbaciones* aquel que recoge las distancias entre dos trayectorias cuya distancia inicial es una perturbación pequeña.

⁵³Fernández-Rodríguez, F. et al. (2005): *Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*. Journal of Applied Econometrics, vol. 20, pp. 911-930.

⁵⁴Se entiende por *proceso estocástico* a una sucesión de variables aleatorias $\{x_t\}$, con $t \in \mathbb{R}$.

⁵⁵Para una visión más detallada de este test, pueden consultarse:

4.4.2. Algoritmo propuesto

Como previamente se ha visto,⁵⁶ un sistema es sensible a las condiciones iniciales cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \wedge \delta \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{0} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, k \neq \infty : \|f^k(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0) - f^k(\mathbf{x}_0)\| > \varepsilon .$$

Si se considera el sistema discreto:

$$\mathbf{x}_1 = A \mathbf{x}_0 ,$$

entonces puede expresarse:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= A^k \mathbf{x}_0 , \\ \mathbf{x}_k^* &= A^k (\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0) . \end{aligned}$$

La distancia entre ambos es:

$$\|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k\| = \|A^k (\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_0) - A^k \mathbf{x}_0\| = \|A^k \delta \mathbf{x}_0\| ,$$

y como se ha partido de que $\delta \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{0}$, entonces la distancia $\|\mathbf{x}_k^* - \mathbf{x}_k\|$ dependerá del módulo de A^k .

Fernández-Rodríguez, F. et al. (2005): *Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*. Journal of Applied Econometrics, vol. 20, pp. 911-930.

Matilla-García, M. (2007): *Nonlinear Dynamics in Energy Futures*. The Energy Journal, vol. 28, nº 3, pp. 7-29.

Para ver una aplicación de este test a datos económicos, pueden consultarse:

Matilla-García, M. (2007): *Nonlinear Dynamics in Energy Futures*. The Energy Journal, vol. 28, nº 3, pp. 7-29.

Resende, M.; Zeidan, R.M. (2008): *Expectations and chaotic dynamics: Empirical evidence on exchange rates*. Economics Letters, vol. 99, pp. 33-35.

⁵⁶Véase el apartado 2.6.1 del presente trabajo.

Si A es diagonalizable⁵⁷ puede escribirse como:

$$A^k = T^{-1} D^k T,$$

siendo T la matriz de transformación, que contiene los vectores propios de A , y D una matriz diagonal con los valores propios λ_i de A en la diagonal principal, es decir:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ ,, } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2^k & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Si $\exists i : |\lambda_i| > 1 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_i^k| \rightarrow \infty$ entonces el sistema será sensible a las condiciones iniciales por la divergencia de sus trayectorias.⁵⁸ En este caso por tanto $\forall \varepsilon > 0 \implies \exists k$ tal que cumpla la hipótesis de sensibilidad a las condiciones iniciales.

Partiendo del desarrollo anterior, se propone un algoritmo para determinar la sensibilidad a las condiciones iniciales que consiste en los pasos siguientes:⁵⁹

1. Se realiza la inmersión de las series temporales en la base óptima, con la dimensión de inmersión y retardos elegidos, obteniendo así los confinamientos.

⁵⁷Una matriz cuadrada es diagonalizable si mediante un cambio de base puede reducirse a una forma diagonal.

Si la matriz analizada no fuera diagonalizable, en lugar de obtener los valores propios se obtendrían *formas canónicas de Jordan*.

Para una visión más detallada, puede consultarse:

Dou, A. (1964): *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dossat, S.A.

⁵⁸En el caso de que $\lambda_i < -1$ tal divergencia será oscilante.

⁵⁹Los resultados de la aplicación de este algoritmo pueden verse en los apartados 5.5.1 y 6.5.1 del presente trabajo.

Asimismo, puede hallarse el programa elaborado para testar la sensibilidad a las condiciones iniciales en el apartado 9.6, situado en el anexo del presente trabajo.

Se cogen los estados o confinamientos a analizar y se calculan las matrices de transición o de cambio de estado,⁶⁰ que llevan de un estado a otro de forma dinámica del siguiente modo:

$$\mathbf{x}_k = \prod_{r=0}^k A(r) \cdot \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_k = A(k) \cdot \mathbf{x}_{k-1} ,$$

donde se considera A la matriz de cambio de estado, que varía en el tiempo.

2. De cada matriz de transición $A(k)$ se calculan los valores propios, se hallan los módulos de estos⁶¹ y se toma el máximo.
3. Se representa el módulo máximo previamente obtenido para cada matriz de transición.
4. En caso de que el módulo sea superior a 1, puede deducirse que la serie presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

4.4.3. Simulación del algoritmo para la sensibilidad a las condiciones iniciales

A continuación se aplica el algoritmo propuesto a una serie sensible a las condiciones iniciales,⁶² con la finalidad de simularlo. Tras ello se obtiene un gráfico que muestra en azul los módulos máximos de los valores propios ajustados de la

⁶⁰Si la dimensión de inmersión es m , serán necesarias m observaciones para poder hallar la matriz de transición $m \times m$.

⁶¹Los módulos se calculan ya que los valores propios pueden ser números complejos.

⁶²En concreto, se han generado un total de 10000 datos a partir de la expresión:

$$x_{t+1} = 4 \cdot x_t \cdot (1 - x_t),$$

caracterizada por presentar sensibilidad a las condiciones iniciales, con $x_0 = 0,05$.

4.4. TEST PARA LA SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

matriz de transición y en rojo estos tras el alisado.⁶³ Para que se pueda considerar que el algoritmo propuesto proporciona resultados coherentes, los módulos máximos de los valores propios obtenidos deberán ser superiores a 1.

El gráfico resultante de la aplicación del algoritmo⁶⁴ a la serie sensible a las condiciones iniciales es el siguiente:⁶⁵

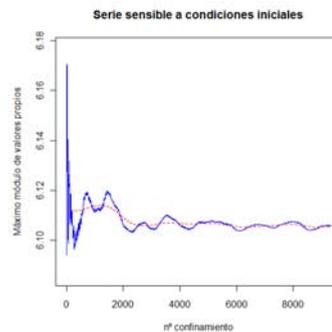


Gráfico 8. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición de la serie sensible a las condiciones iniciales.

Observando el gráfico anterior puede deducirse que el test proporciona resultados coherentes y que, por tanto, puede considerarse válido, ya que para todos los confinamientos la serie presenta módulos máximos de los valores propios de las matrices de transición superiores a 1.

⁶³Dado que algunos módulos eran muy elevados, se han ajustado los datos, dejando sin modificar los módulos cuyo valor estuviera entre 0 y 1, y a partir de 1 representando $1 + \ln(\text{módulo})$. Además, como estos módulos presentaban oscilaciones, se han alisado los resultados.

⁶⁴Previo a la aplicación del algoritmo, se han seguido los procedimientos detallados en los apartados 3.3 y 3.4.2 del presente trabajo con el fin de obtener la dimensión de inmersión y retardo óptimos para esta serie, los cuales han resultado ser $m = 13$ y $\tau = 55$, respectivamente.

⁶⁵En el eje horizontal de los gráficos aparece el número de matrices de transición, que coincide con el número de confinamientos, y en el eje vertical el módulo máximo de los valores propios obtenido para cada matriz de transición.

4.5. Test para detectar órbitas densas

4.5.1. Test de diferencias cercanas

El test de diferencias cercanas o “*close returns test*”⁶⁶ está basado en los gráficos de recurrencia (“*recurrence plots*” o RP), que fueron introducidos por Eckmann y otros autores⁶⁷ con el fin de visualizar el comportamiento de la trayectoria de un sistema dinámico en el espacio de estados.⁶⁸

El test sigue un procedimiento que se aplica a la serie temporal de observaciones. Parte de la idea de que si las observaciones x_t evolucionan formando una órbita densa durante un tiempo suficientemente largo, entonces retornarán a la vecindad de x_t tras un intervalo I , que indica la longitud de la órbita. Esto significa que

⁶⁶Para una visión más detallada de este test, pueden consultarse:

Gilmore, C.G. (2001): *An examination of nonlinear dependence in exchange rates, using recent methods from chaos theory*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 139-151.

Gilmore, C.G. (1993): *A new test for chaos*. Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 22, pp. 209-237.

Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

Puede verse una aplicación a datos económicos de este test, entre otros, en:

McKenzie, M. (2001): *Chaotic behavior in national stock market indices: new evidence from the close return test*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 35-53.

⁶⁷Eckmann, J.-P. et al. (1986): *Lyapunov exponents from time series*. Physical Review A, vol. 34, pp. 4971-4979.

⁶⁸Pueden verse recientes aplicaciones del análisis RP, entre otros, en:

Barkoulas, J.T. et al. (2012): *A metric and topological analysis of determinism in the crude oil spot market*. Energy Economics, vol. 34, pp. 584-591.

Bigdeli, N.; Afshar, K. (2009): *Characterization of Iran electricity market indices with pay-as-bid payment mechanism*. Physica A, vol. 388, pp. 1577-1592.

Marwan, M.C. et al. (2007): *Recurrence plots for the analysis of complex systems*. Physics Reports, vol. 438, pp. 237-329.

la diferencia $|\varkappa_t - \varkappa_{t+I}|$ será pequeña. De igual modo, \varkappa_{t+1} será cercano a \varkappa_{t+1+I} , \varkappa_{t+2} lo será a \varkappa_{t+2+I} , y así sucesivamente.

Con el objetivo de identificar las regiones con diferencias cercanas en la serie temporal, se computan todas las diferencias $|\varkappa_t - \varkappa_{t+I}|$. Se toma un valor pequeño, ε , como umbral y se representa la siguiente información en un gráfico cuyo eje horizontal indica la observación t , con $t = (1, \dots, n)$ y el vertical i con $i = (1, \dots, n - 1)$, donde n es el número de observaciones en la serie temporal:

- si $|\varkappa_t - \varkappa_{t+I}| < \varepsilon$ entonces el resultado se muestra en color negro;
- si $|\varkappa_t - \varkappa_{t+I}| \geq \varepsilon$ entonces el resultado se muestra en color blanco.

En el caso de existir diferencias cercanas, y por tanto órbitas densas, aparecerán segmentos de líneas horizontales en el gráfico. Por el contrario, el gráfico resultante de un conjunto de datos aleatorios está formado generalmente por una gama uniforme de puntos negros.

A continuación, puede construirse un histograma a partir de los resultados del gráfico anterior. Para cada valor de i del eje vertical, se suman por filas el número de diferencias cercanas por medio de $\theta_i = \Theta(\varepsilon - |\varkappa_t - \varkappa_i|)$, donde $\Theta(\cdot)$ es la función de Heavyside.⁶⁹ El histograma muestra en el eje horizontal los valores de i y en el vertical θ_i .

Para los datos con órbitas densas, el histograma contendrá una serie de picos que no se distribuyen de manera uniforme. Por el contrario, cuando no existen

⁶⁹Cabe recordar que esta función cumple:

$$\begin{cases} \Theta(k) = 0 & \text{si } k \leq 0 \\ \Theta(k) = 1 & \text{si } k > 0 \end{cases} .$$

órbitas densas, se cumple que $\theta_i = \bar{\theta}$, es una constante. En este último caso, la distribución descrita en el gráfico de las diferencias cercanas será binomial.⁷⁰

La probabilidad de que haya un punto negro $p(\text{negro})$ es:

$$p(\text{negro}) = \frac{\text{número total de diferencias cercanas}}{\text{área total del gráfico}} .$$

El valor medio $\bar{\theta}$ se calcula del siguiente modo:

$$\bar{\theta} = g p(\text{negro}) ,$$

donde g es el número total de diferencias calculadas.

Por último, se aplica un test χ^2 , hallando el estadístico siguiente:

$$\chi_C^2 = \frac{\sum(\theta_i - \bar{\theta})^2}{g p (1 - p)} .$$

El estadístico anterior se compara con el valor del test χ^2 para un nivel de significación determinado:

- si $\chi_C^2 > \chi^2$, entonces se rechaza la hipótesis de que existen órbitas densas.
- si $\chi_C^2 < \chi^2$, se acepta la hipótesis de que existen órbitas densas.

⁷⁰La *distribución binomial* es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de n pruebas independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de éxito.

Una prueba de Bernoulli es dicotómica, con dos posibles resultados: éxito, al que se asocia una probabilidad de ocurrencia p , y fracaso, con probabilidad $q = 1 - p$.

4.5.2. Algoritmo propuesto

Partiendo de las consideraciones anteriores, para el presente trabajo se ha elaborado un algoritmo que tiene como finalidad detectar la presencia de órbitas densas. Este algoritmo consiste en los pasos siguientes:⁷¹

1. Para cada serie temporal, se realizan los confinamientos en la base óptima, con la dimensión de inmersión y retardo elegidos. Se calculan las distancias naturales⁷² entre los estados confinados para distintos incrementos temporales o periodos orbitales $\Delta t = 1, 2, \dots, \tilde{n}-1$, siendo \tilde{n} el número de confinamientos o de vectores de inmersión.
2. Se halla la distancia media d_M de las distancias de los estados confinados y se toma un valor ε , pequeño, proporcional a esta distancia.
3. Para cada periodo orbital, se calcula el total de estados cuya distancia es inferior a ε , es decir, las diferencias cercanas.
4. Se cuenta el número de confinamientos que se han comparado para cada periodo orbital y se calcula la frecuencia relativa de que haya una diferencia cercana del siguiente modo:

⁷¹Pueden verse resultados de la aplicación de este algoritmo en los apartados 5.4.2 y 6.4.2 del presente trabajo.

Asimismo, puede hallarse el programa elaborado para testar la presencia de órbitas densas en el apartado 9.4, situado en el anexo del presente trabajo.

⁷²Cabe recordar, como se ha visto en el apartado 2.4.2 del presente trabajo, que la distancia natural entre dos puntos \mathbf{x}, \mathbf{y} se obtiene del siguiente modo:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| .$$

$$p(\text{cercana}) = \frac{\text{número de diferencias cercanas}}{\text{número de confinamientos comparados}},$$

y esto para cada periodo orbital.

5. Se multiplica la frecuencia relativa por el número de confinamientos totales comparados, obteniendo así la frecuencia absoluta reconstruida. Esta indicará cuántos sucesos están próximos para cada periodo orbital.
6. Se realiza una representación gráfica de la frecuencia absoluta. En el análisis de series temporales, el gráfico partirá de un valor aproximadamente igual al número de datos⁷³ e irá disminuyendo, dado que a medida que aumenta el incremento temporal cada confinamiento difiere más del anterior. Si no existen órbitas densas, en cuanto la frecuencia absoluta tome el valor cero, permanecerá allí. Por el contrario, en el caso de que haya órbitas densas aparecerán picos en el gráfico, lo que significará que la órbita se ha movido de nuevo en una vecindad.⁷⁴

4.5.3. Simulación del algoritmo para detectar órbitas densas

Con el fin de simular el algoritmo propuesto, se ha procedido a testar una serie aleatoria. En concreto, se ha utilizado una serie formada a partir de una distribución uniforme con valores que oscilan entre 0 y $2^2\varepsilon$. Para que el algoritmo sea válido, esta serie no debe presentar vecinos cercanos, hallándose así la frecuencia

⁷³Esto es así porque se parte de un ε suficientemente pequeño como para que pueda considerarse que cada dato se encuentra cerca del siguiente y, por ello, que existe diferencia cercana para un periodo orbital de 1.

⁷⁴En el caso de series aleatorias, este gráfico deberá tomar el valor cero desde un principio ya que este tipo de series no presentan diferencias cercanas.

absoluta siempre en el valor cero. El gráfico obtenido al aplicar el algoritmo a la serie aleatoria ha sido el siguiente:⁷⁵

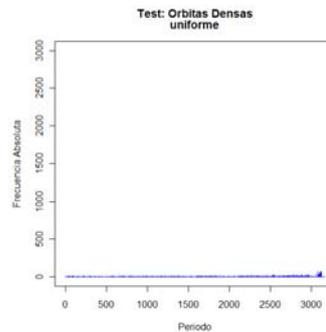


Gráfico 9. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en una serie aleatoria

Observando el gráfico puede deducirse que el test resulta válido ya que se cumple que la serie aleatoria no presenta órbitas densas.

4.6. Test para la transitividad topológica

No se ha encontrado hasta el momento un test que se aplique a series temporales y que esté comúnmente aceptado para determinar si el sistema del que provienen las series es topológicamente transitivo. Ello implica una importante limitación a la hora de realizar estudios sobre la presencia de caos en una serie de observaciones, ya que impide que una de las propiedades de los sistemas caóticos pueda ser contrastada.⁷⁶

⁷⁵En el eje horizontal del gráfico se muestra el periodo orbital considerado, y en el vertical la frecuencia absoluta, que indica los sucesos próximos para cada periodo orbital.

⁷⁶Fuente:

Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

Por lo anterior, en el presente trabajo se ha propuesto un algoritmo que permita distinguir si un sistema posee transitividad topológica a partir de una serie de observaciones del mismo.

4.6.1. Algoritmo propuesto

Cabe recordar⁷⁷ que la transitividad topológica implica que, dentro del espacio de estados, no existe ningún subconjunto por el cual no pueda pasar la trayectoria del sistema. En otras palabras, si el sistema es topológicamente transitivo, cualquier zona dentro del espacio de estados tiene que ser accesible por parte del sistema.

Formalmente, sea $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la función que representa la evolución del sistema o flujo, donde M es el espacio de estados, se dice que existe transitividad topológica si:

$$\forall B, C \subset M, \exists k \in (0, \infty) | F^k(B) \cap C \neq \emptyset$$

Para ver si un sistema es topológicamente transitivo, el algoritmo propuesto consiste en los siguientes pasos:⁷⁸

1. Con los confinamientos realizados, con la dimensión y retardos pertinentes, y con el cambio de base hecho, se mezclan los puntos o confinamientos y se separan en “paquetes”, en nuestro caso de 100 puntos.⁷⁹

⁷⁷Como se ha visto en el apartado 2.6 del presente trabajo.

⁷⁸Pueden verse resultados de la aplicación de este algoritmo en los apartados 5.4.3 y 6.4.3 del presente trabajo.

Asimismo, puede hallarse el programa elaborado para testar la transitividad topológica en el apartado 9.5, situado en el anexo del presente trabajo.

⁷⁹Esto se hace por la magnitud del problema, siguiendo Montecarlo (simulación), que consiste en mezclar los puntos, dividirlos en “paquetes” de igual número de datos, y calcular por secuenciación, de “paquete” en “paquete”. En cuanto dos resultados consecutivos difieran en

2. Se toma un “paquete” de puntos y se calculan las distancias euclídeas⁸⁰ entre todo par de puntos del “paquete” considerado. A continuación se normalizan⁸¹ estas distancias.⁸²
3. Se obtienen tanto la función de densidad de las distancias normalizadas como la de distribución.
4. Se busca el máximo valor y el mínimo de la serie temporal en el “paquete” considerado, y se generan puntos idénticamente distribuidos con valores comprendidos entre ese máximo y mínimo a partir de una distribución uniforme.
5. Se sigue el mismo procedimiento que para la serie objeto de estudio hasta obtener la función de densidad y la función de distribución de las distancias normalizadas de los puntos distribuidos uniformemente.
6. Se añade un nuevo “paquete” de datos a los que se habían tomado anteriormente y se repite el procedimiento. Y así sucesivamente hasta que las funciones de densidad y de distribución difieran de las obtenidas anteriormente en menos de un épsilon prefijado, en nuestro caso de 10^{-5} .

menos de un épsilon prefijado, entonces se para el proceso y se toma el último resultado como válido, por considerar que se ha llegado a un grado satisfactorio de convergencia.

⁸⁰Como se ha visto en el apartado 2.4.2 del presente trabajo, la distancia euclídea entre dos puntos \mathbf{x}, \mathbf{y} se obtiene del siguiente modo:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

⁸¹Consistiendo la *normalización* o *tipificación* en restar a cada valor su media y dividir el resultado por la desviación típica.

⁸²Estas distancias se expresan en una matriz, que tiene ceros en la diagonal principal y es simétrica, por lo que sólo es necesario calcular el triángulo superior.

7. Se representan las funciones de densidad y de distribución tanto de las distancias normalizadas de la serie original como de la uniforme. En el eje vertical de los gráficos aparecen los valores que toman estas funciones, mientras que en el horizontal aparecen valores del 0 al 100, que representan el número de intervalos en los que se han dividido las funciones para su representación. Bajo cada gráfico aparecen especificados dentro de un intervalo el valor mínimo y máximo que toman las distancias normalizadas, que se corresponden respectivamente con el valor 0 y 100 del eje horizontal. Asimismo, dividiendo entre 100 la diferencia entre el valor mínimo y máximo de las distancias normalizadas se determina el salto de un intervalo a otro.

8. Se comparan las funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie original y la uniforme aplicando el test de Kolmogorov-Smirnov.⁸³

El anterior algoritmo testa la transitividad topológica de un modo atemporal, por lo que no puede deducirse de esta la presencia de órbitas densas. Así, será necesario complementar este algoritmo con otro que teste la presencia de órbitas densas. En caso de que una serie temporal presente atractor, ambas propiedades tendrán que cumplirse.

⁸³El *test de Kolmogorov-Smirnov* es un test no paramétrico que sirve para determinar la bondad de ajuste de dos distribuciones entre sí. Generalmente, en el caso de que tras la aplicación del test se obtenga un *p-value* superior o igual un nivel de significación prefijado se aceptará la hipótesis nula de que una distribución se ajusta a la otra.

Se entiende por *test no paramétrico* aquel en el cual las afirmaciones establecidas no se hacen en base a la distribución de las observaciones, que es desconocida a priori.

4.6.2. Simulación del algoritmo para la transitividad topológica

Con el fin de comprobar la coherencia del algoritmo propuesto, se ha hecho lo siguiente: en puntos uniformemente distribuidos se han reemplazado algunos puntos por otros acumulados en una zona del espacio de estados y así la serie deja de cumplir la propiedad de transitividad topológica. Concretamente, se han reemplazado un 10 %, un 20 % y un 30 %, respectivamente, del número de confinamientos por puntos obtenidos sumando una pequeña oscilación a la media entre el máximo valor y el mínimo valor de los datos originales. Tras la aplicación del algoritmo propuesto a las tres series generadas debería obtenerse un *p-value* pequeño, que lleve a rechazar la hipótesis nula de que las funciones se distribuyen de modo parecido. Además, para que pudiese aceptarse la simulación como coherente, el *p-value* obtenido debería ser menor (más lejos de ser aceptada la hipótesis nula) a más puntos se hayan reemplazado de la serie uniforme, ya que ello implica alejarse más de la propiedad de transitividad topológica.

Las anteriores distribuciones, generadas a partir de la concentración de, respectivamente, un 10 %, un 20 % y un 30 % de datos en una zona, recibirán el nombre de “conglomeradas”.

Tras la aplicación del algoritmo para la transitividad topológica a las distribuciones conglomeradas, que compara estas distribuciones con la distribución uniforme, se obtienen los gráficos que se muestran a continuación:⁸⁴

⁸⁴Como se ha explicado en el apartado 4.6.1 del presente trabajo, en el eje vertical de los gráficos aparecen los valores que toman las funciones de densidad (primer gráfico) y de distribución (segundo gráfico), mientras que en el horizontal aparecen valores del 0 al 100, que representan el número de intervalos en los que se han dividido las funciones para su representación. Bajo cada gráfico aparecen especificados dentro de un intervalo el valor mínimo y máximo que toman

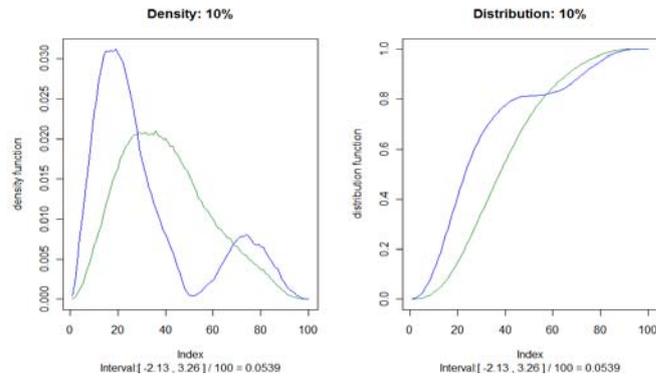


Gráfico 10. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la distribución conglomerada un 10 % (en azul) y de la distribución uniforme (en verde)

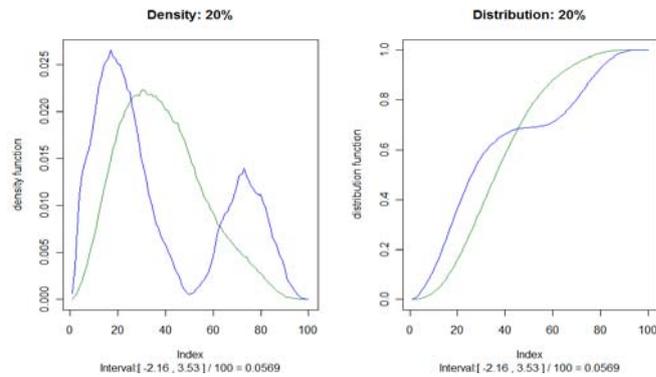


Gráfico 11. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la distribución conglomerada un 20 % (en azul) y de la distribución uniforme (en verde)

las distancias normalizadas, que se corresponden respectivamente con el valor 0 y 100 del eje horizontal. Asimismo, dividiendo entre 100 la diferencia entre el valor mínimo y máximo de las distancias normalizadas se determina el salto de un intervalo a otro.

4.6. TEST PARA LA TRANSITIVIDAD TOPOLÓGICA

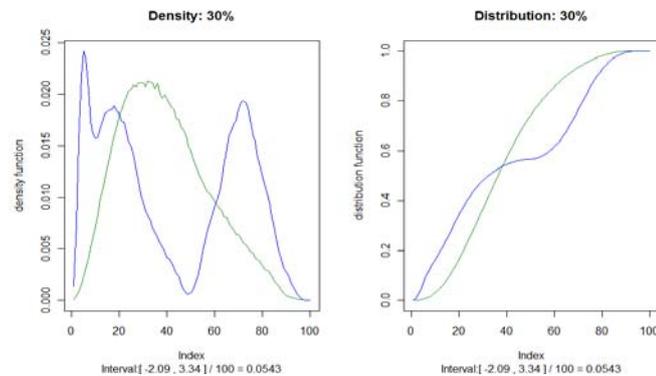


Gráfico 12. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la distribución conglomerada un 30 % (en azul) y de la distribución uniforme (en verde)

La aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov⁸⁵ a las distribuciones anteriores da lugar a los siguientes resultados:

Serie	Test Kolmogorov-Smirnov
Conglomerada 10 %	$D = 0,1591$; $p - value = 0,1370$
Conglomerada 20 %	$D = 0,1766$; $p - value = 0,08234$
Conglomerada 30 %	$D = 0,2041$; $p - value = 0,03350$

Tabla 1. Resultados de la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a las funciones de distribución de las distancias normalizadas de las distribuciones conglomeradas y de la distribución uniforme

Como cabía esperar, el $p - value$ que se obtiene es pequeño en todos los casos analizados, y es más pequeño a mayor número de puntos conglomerados. Por lo

⁸⁵Para la aplicación de este test se ha utilizado el software *The R-Project for Statistical Computing* y, más concretamente, la instrucción *ks.test* que se halla en el mismo.

anterior, puede deducirse que el test propuesto para la transitividad topológica da lugar a resultados coherentes.

4.7. Otros test para la detección de caos

Aparte de los instrumentos citados anteriormente, existen otros test cuya finalidad es la de intentar detectar caos en series temporales. Sin embargo, ninguno de ellos parece haber conseguido totalmente su objetivo para cualquier tipo de serie y por ello, por el momento, no hay ningún test aceptado como únicamente válido. A continuación se enumeran algunos de ellos, si bien el uso de uno u otro dependerá de la serie temporal que se analice así como de los objetivos que se persigan con la investigación.

4.7.1. Test 0-1

Este test fue elaborado por Gottwald y Melbourne⁸⁶ para distinguir si un sistema dinámico determinista es caótico o no. En él se parte de definir una función que es acotada en el caso de que la dinámica subyacente no sea caótica, y se comporta asintóticamente si es caótica. A partir del cómputo del ratio de crecimiento asintótico de esta función obtiene un valor K , que tiene valor 0 cuando el sistema no es caótico, y valor 1 cuando sí que lo es, y de aquí el nombre del test.

El test 0-1 no proporciona ningún tipo de información cuantitativa ni puede cuantificarse a partir de sus resultados el grado de irregularidad de los datos, pero parece resultar una herramienta útil a la hora de diagnosticar la presencia o no de caos.

⁸⁶Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2004): *A new test for chaos in deterministic systems*. Proceedings of the Royal Society of London A, vol. 460, pp. 603-611.

Este test presenta una ventaja respecto a la utilización del exponente de Lyapunov para intentar detectar caos, y es que, mientras que el cálculo del exponente de Lyapunov requiere la reconstrucción del espacio de estados, el test 0-1 trabaja directamente con los datos de la serie temporal. Otra ventaja de la aplicación de este test es que tanto la naturaleza de los datos como la dimensión de la dinámica subyacente del sistema son irrelevantes.⁸⁷

Sin embargo, la aplicación de este test también presenta desventajas, como la de que no permite cuantificar el grado de irregularidad existente en el sistema, mientras que con el máximo exponente de Lyapunov es posible hacerlo. Además, autores como Hu y otros⁸⁸ llegan a la conclusión de que este test es útil para distinguir datos que provienen de sistemas totalmente caóticos de los que lo hacen de sistemas totalmente regulares, pero en el caso de que haya caos de baja dimensión⁸⁹ o el sistema tenga, además del caótico, otro tipo de comportamiento, entonces el test clasifica equivocadamente los datos. Estos mismos autores aseguran que, por ello, el test 0-1 no es útil para el análisis de datos empíricos, dado que apenas hay en la realidad datos que presenten comportamientos totalmente caóticos o totalmente regulares.⁹⁰ Ante estas críticas, los creadores del test 0-1 han presentado

⁸⁷Para una visión más detallada de este test, pueden consultarse, entre otros:

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2005): *Testing for Chaos in Deterministic Systems with Noise*. Physica D, vol. 212, n° 1-2, pp. 100-110.

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2004): *A new test for chaos in deterministic systems*. Proceedings of the Royal Society of London A, vol. 460, pp.603-611.

⁸⁸Hu, J. et al. (2005): *Reliability of the 0-1 test for chaos*. Physical Review E, vol. 72, 056207.

Los creadores del test 0-1 rebaten este artículo en:

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2008): *Comment on "Reliability of the 0-1 test for chaos"*. Physical Review E, vol. 77, 028201.

⁸⁹Como previamente se ha definido, se entiende por *caos de baja dimensión* aquel que es generado por un número de variables.

⁹⁰Esta conclusión es rebatida por los autores del test con la publicación de:

una reformulación del mismo para aumentar su sensibilidad.⁹¹

Recientemente, Webel⁹² ha aplicado el test 0-1 al análisis de series temporales, concretamente al mercado de valores alemán, lo cual supone un importante avance, pues así el test 0-1 ha pasado de ser un concepto teórico a aplicarse empíricamente. El autor llega a la conclusión en su análisis de que el test 0-1 no permite detectar si el caos es de alta o baja dimensión, ya que la distancia entre el estadístico del test y 0 o 1 no puede interpretarse de un modo significativo. Por ello, afirma que será necesario complementar las conclusiones del test con métodos tradicionales como la obtención del máximo exponente de Lyapunov.

4.7.2. Test SALI

El test SALI (*Smaller Alignment Index*) fue diseñado por Skokos y otros autores⁹³ con el fin de distinguir si las órbitas presentan una naturaleza caótica u ordenada. Este test parte de una órbita dada y sigue la evolución a lo largo del tiempo de dos vectores de desviación inicial distinta. A continuación, calcula las

Falconer, I. et al. (2007): *Application of the 0-1 Test for Chaos to Experimental Data*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 6, n° 2, pp. 395–402.

Los autores del test 0-1 justifican su aplicación en:

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2009): *On the Implementation of the 0-1 Test for Chaos*. SIAM Journal on applied dynamical systems, vol. 8, pp. 129-145.

⁹¹Véase:

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2009): *On the Implementation of the 0-1 Test for Chaos*. SIAM Journal on applied dynamical systems, vol. 8, pp. 129-145.

⁹²Webel, K. (2012): *Chaos in German stock returns - New evidence from the 0-1 test*. Economics Letters, vol. 115, pp. 487-489.

⁹³Skokos, C. et al. (2002): *Smaller Alignment Index (SALI): Detecting order and chaos in conservative dynamical systems*. Proceedings of the 4th GRACM Congress on Computational Mechanics, vol. IV, pp. 1496-1502. Tsahalis.

normas de la diferencia⁹⁴ y de la adición⁹⁵ de los dos vectores normalizados. La evolución en el tiempo del menor de ambos es el SALI. En general, el SALI tiende a cero para órbitas caóticas, mientras que para órbitas no caóticas⁹⁶ el SALI tiende a fluctuar alrededor de valores distintos de cero. Así, este test podría también servir para intentar distinguir comportamientos caóticos.⁹⁷ Sin embargo, no se ha hallado hasta el momento ningún trabajo en el que se aplique este test a series temporales.

⁹⁴A la norma de la diferencia de los dos vectores normalizados se le da el nombre de “*parallel alignment index*”.

⁹⁵A la norma de la adición de los dos vectores normalizados se la nombra “*antiparallel alignment index*”.

⁹⁶Los autores se refieren a estas como órbitas “ordenadas”.

⁹⁷Para una visión más detallada de este test pueden consultarse, entre otros:

Skokos, C. et al. (2004): *Detecting order and chaos in Hamiltonian systems by the SALI method*. Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 37, pp. 6269-6284.

Skokos, C. et al. (2003): *How does the Smaller Alignment Index (SALI) distinguish order from chaos?*. Progress of Theoretical Physics Supplement, nº 150, pp. 439-443.

Skokos, C. et al. (2002): *Smaller Alignment Index (SALI): Detecting order and chaos in conservative dynamical systems*. Proceedings of the 4th GRACM Congress on Computational Mechanics, vol. IV, pp. 1496-1502. Tsahalis.

Capítulo 5

Sistema financiero

5.1. Introducción

Como se ha definido previamente,¹ se considera *sistema* a un conjunto de elementos con una relación orgánica entre sí, siendo esta una relación que da al conjunto un comportamiento de unidad. En este sentido, el *sistema financiero* está compuesto por un conjunto de mercados e instituciones con una relación orgánica, que canalizan recursos desde las unidades económicas poseedoras de ahorro a las que lo necesitan. Este sistema es el mecanismo que garantiza a la inversión los fondos necesarios para su actividad, constituyendo de ese modo el motor para la generación de renta y riqueza. El sistema financiero es además *dinámico*, ya que presenta una evolución a lo largo del tiempo.

El *estado* del sistema financiero es un vector que refleja la medición de elementos del mismo en un instante. Sin embargo, no hay que olvidar que en este sistema el número de elementos (n) que conforman el estado es muy grande,² por lo que la

¹Véase el apartado 2.1 del presente trabajo.

²El sistema financiero está configurado básicamente por tres grupos de elementos, cada uno de los cuales presenta gran número de componentes:

variable estado $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ pertenece a un espacio vectorial de dimensión muy elevada.

En los siguientes capítulos se pretende estudiar el sistema financiero desde una perspectiva caótica. Más concretamente, se analiza la posible presencia de caos en los mercados financieros a partir de la búsqueda de atractores caóticos en los mismos. Siguiendo a Yousefpoor y otros,³ se elige como metodología a seguir la de testar las características de los sistemas caóticos: transitividad topológica y presencia de órbitas densas, que implican presencia de atractor, y sensibilidad a las condiciones iniciales, que hace que se pueda calificar como caótico. Para tal fin, se establecen los pasos siguientes:

1. Realizar una inmersión o confinamiento de las series temporales, que permite reconstruir el espacio de estados, con la dimensión de inmersión y retardo óptimos.
2. Aplicar un análisis espectral singular para expresar las trayectorias en su base óptima.
3. Ver si es posible la existencia de atractor y si este es único, a partir del estudio de la contractividad de las series.
4. Testar la presencia de órbitas densas.
5. Testar la transitividad topológica.

1. Activos financieros y dinero.

2. Mercados financieros: monetarios o de capitales, primarios o secundarios (como la Bolsa), negociados o abiertos,...

3. Mediadores e intermediarios financieros.

Además, es elevado el número de variables que influyen a cada uno de estos elementos.

³Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

6. Testar la sensibilidad a las condiciones iniciales.

El anterior análisis permitirá además analizar la validez del teorema de Takens en el ámbito financiero. Como se ha visto,⁴ este teorema asegura que, bajo ciertas asunciones, existe una correspondencia real entre el sistema original y el sistema observado. Por ello, en el caso de que se obtuvieran conclusiones similares independientemente de la serie financiera que se estuviese analizando, podría deducirse que el teorema de Takens es válido en el sistema financiero, o como mínimo que no es inválido. Esto permitiría, por un lado, que pudiera reconocerse de un modo empírico al sistema financiero como sistema, y, por otro, que fuera indiferente la serie de observaciones de la que se partiese en el estudio, ya que se estarían obteniendo conclusiones que podrían extrapolarse al mercado financiero global. Así, en el caso de cumplirse Takens, se simplificaría el análisis del sistema, ya que bastaría con estudiar un argumento de los n de que se compone la variable estado para conocer el comportamiento del mismo.

En el presente capítulo se analizan varias series temporales financieras con datos desde inicios de su cotización hasta principios del 2009, incluyendo así algunos meses de crisis mundial para ver la tendencia de las series. Con el fin de aislar el impacto de la actual crisis en el mercado financiero a efectos comparativos, en el siguiente capítulo se estudiarán las mismas series en el periodo comprendido desde agosto de 2007⁵ hasta marzo de 2011.

⁴Véase el apartado 3.4.1 del presente trabajo.

⁵Para determinar el origen de la crisis el presente trabajo se basa en la teoría de George Soros, quien asegura: “El estallido de la crisis económica de 2008 puede fijarse oficialmente en agosto de 2007, cuando los Bancos centrales tuvieron que intervenir para proporcionar liquidez al sistema bancario”.

Soros, G. (2008): *El nuevo paradigma de los mercados financieros. Para entender la crisis económica mundial*. Taurus.

Para realizar el estudio, se han tomado series temporales financieras formadas por los valores de cierre de varios índices bursátiles de países de distintas partes del mundo, puesto que si se cumpliera el teorema de Takens tendrían que obtenerse conclusiones similares sobre el sistema financiero fuera cual fuera la serie temporal de la que se partiese. Los índices objeto de análisis han sido algunos de los principales índices bursátiles a nivel mundial y el principal índice español.⁶ A continuación se muestran las series temporales de los índices analizados:⁷

- **Standard & Poor's 500:** Es un índice ponderado por capitalización de las 500 acciones más representativas de las principales industrias de Estados Unidos, que operan en la Bolsa de Nueva York y en NASDAQ (“National Association of Securities Dealer Automated Quotation”).⁸

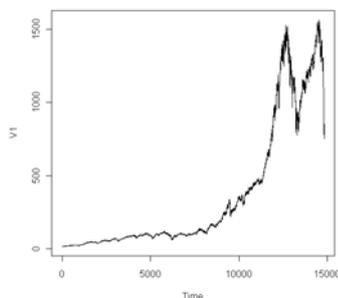


Gráfico 13. Serie temporal del índice Standard & Poor's 500

⁶Fuente de los datos: Econstats.

⁷En el eje horizontal de los gráficos aparece el número de observaciones y en el vertical el valor que toman estas.

⁸El estudio se realiza sobre un total de 14.926 datos, con los valores de cierre del índice desde el 3/1/1950 hasta el 30/4/2009.

- **Dow Jones Industrial Average:** Se trata de un índice ponderado por precio de los 30 valores industriales correspondientes a las mayores empresas de Estados Unidos.⁹

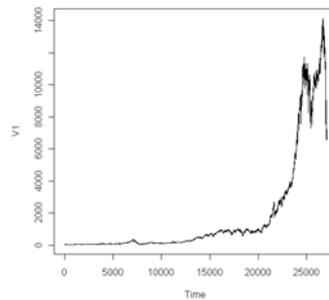


Gráfico 14. Serie temporal del índice Dow Jones Industrial Average

- **NASDAQ Composite:** Se trata de un índice ponderado por capitalización del valor de mercado de todas las acciones listadas en NASDAQ. Lo conforman más de 5.000 empresas.¹⁰

⁹El estudio se realiza sobre un total de 27.094 datos, con los valores de cierre del índice desde el 4/1/1901 hasta el 30/4/2009.

¹⁰El estudio se realiza sobre un total de 9.644 datos, con los valores de cierre del índice desde el 9/2/1971 hasta el 30/4/2009.

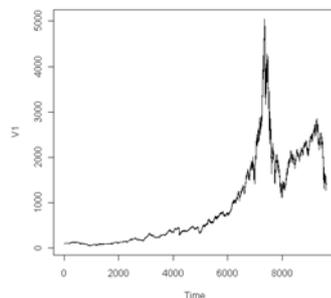


Gráfico 15. Serie temporal del índice NASDAQ Composite

- **FTSE 100:** El índice Financial Times Stock Exchange (FTSE) 100 es un índice ponderado por capitalización de los 100 valores principales de la Bolsa de Londres.¹¹

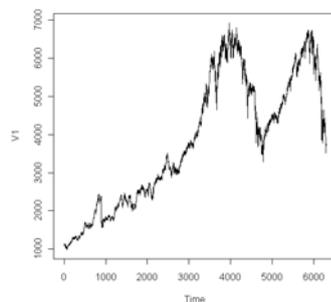


Gráfico 16. Serie temporal del índice FTSE 100

- **NIKKEI 225:** El índice Nihon Keizai Shimbun Inc (NIKKEI) 225 es un índice ponderado por precio de los 225 valores más líquidos que cotizan en la

¹¹El estudio se realiza sobre un total de 6.334 datos, con los valores de cierre del índice desde el 4/4/1984 hasta el 30/4/2009.

Bolsa de Tokio.¹²

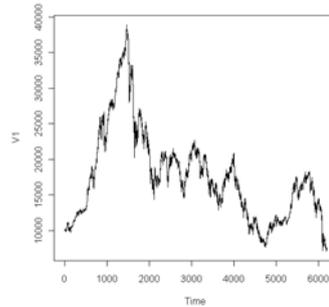


Gráfico 17. Serie temporal del índice NIKKEI 225

- **Hang Seng:** Se trata de un índice ponderado por capitalización de las 33 compañías que se hallan dentro del 90% de las empresas con mayor capitalización y volumen de la Bolsa de Hong Kong, y que han cotizado durante más de 24 meses.¹³

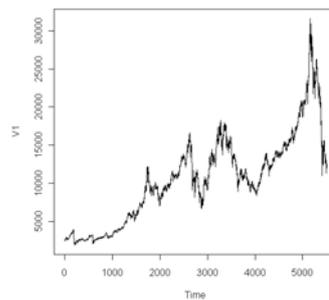


Gráfico 18. Serie temporal del índice Hang Seng

¹²El estudio se realiza sobre un total de 6.228 datos, con los valores de cierre del índice desde el 6/1/1984 hasta el 30/4/2009.

¹³El estudio se realiza sobre un total de 5.535 datos, con los valores de cierre del índice desde el 5/1/1987 hasta el 30/4/2009.

- **DAX 30:** El índice Deutscher Aktienindex (DAX) 30 es un índice ponderado por capitalización de los 30 valores principales en cuanto a capitalización y contratación que cotizan en la Bolsa de Frankfurt.¹⁴

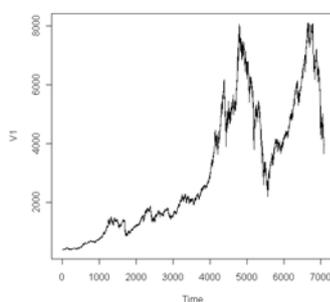


Gráfico 19. Serie temporal del índice DAX 30

- **IBEX 35:** El Iberia Index (IBEX) 35 es un índice ponderado por capitalización de los 35 valores con mayor liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) y en las cuatro Bolsas españolas: Barcelona, Bilbao, Madrid y Valencia.¹⁵

¹⁴El estudio se realiza sobre un total de 7.120 datos, con los valores de cierre del índice desde el 6/1/1981 hasta el 30/4/2009.

¹⁵El estudio se realiza sobre un total de 3.586 datos, con los valores de cierre del índice desde el 2/1/1995 hasta el 30/4/2009.

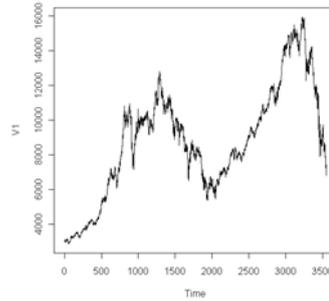


Gráfico 20. Serie temporal del índice IBEX 35

Con la finalidad de realizar un posterior análisis del caos en las series, se procede en el siguiente apartado a realizar una inmersión o confinamiento de las mismas. Para poder confinar, es necesario previamente conocer la dimensión de inmersión y retardo óptimos.

5.2. Inmersión

5.2.1. Dimensión de inmersión

Con la aplicación del algoritmo¹⁶ propuesto a cada serie temporal analizada, se obtienen dos gráficos: el primero representa para cada dimensión de inmersión ($m = 2, \dots, 15$) y retardos considerados ($\tau = 1, \dots, 100$) la dimensión fractal del objeto abstracto (u); el segundo de ellos muestra los valores que toma la función $m - 2u$ para cada una de las dimensiones de inmersión y los retardos considerados. La dimensión a elegir como óptima será aquella para la cual la función $m - 2u$ sea superior a cero, por lo que, para que sea más sencillo detectar visualmente cuándo

¹⁶Para la elaboración de este algoritmo, se ha partido de conceptos desarrollados en el apartado 3.3 del presente trabajo. En ese mismo apartado puede obtenerse una visión detallada de los pasos que sigue el algoritmo propuesto para la obtención de la dimensión de inmersión óptima.

la diferencia supera este valor, en el segundo gráfico se traza una línea horizontal verde en el valor cero. A ser posible, se intentará además que la dimensión de inmersión (m) elegida permita una representación gráfica de las trayectorias.

Los gráficos resultantes de la aplicación del algoritmo para cada serie financiera analizada se muestran a continuación:¹⁷

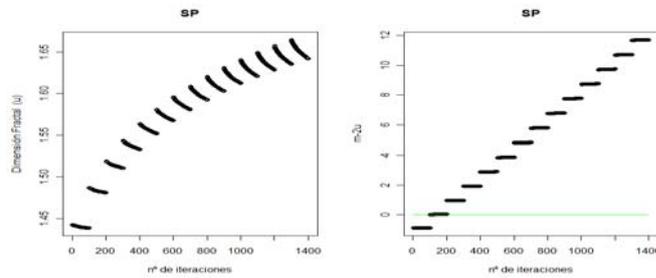


Gráfico 21. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del Standard & Poor's 500

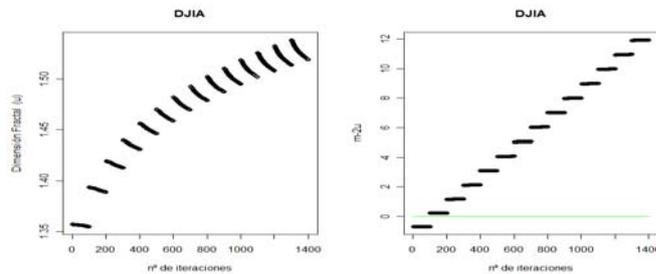


Gráfico 22. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del Dow Jones Industrial Average

¹⁷En el eje horizontal de cada gráfico se muestran el número de iteraciones realizadas, esto es, un total de 1.400, que son el resultado de considerar 14 dimensiones de inmersión (desde 2 hasta 15) y 100 retardos para cada una de ellas. En el eje vertical del primer gráfico se muestran los valores que toma la dimensión fractal del objeto, y en el del segundo los valores que toma la diferencia entre la dimensión de inmersión y dos veces la dimensión fractal del objeto.

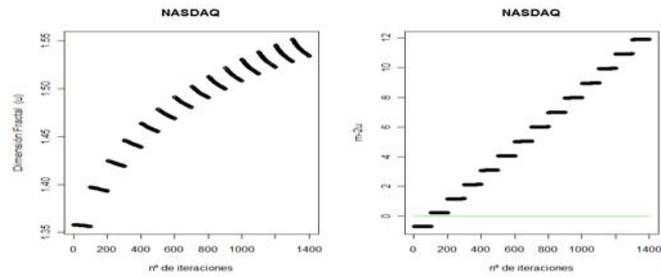


Gráfico 23. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del NASDAQ Composite

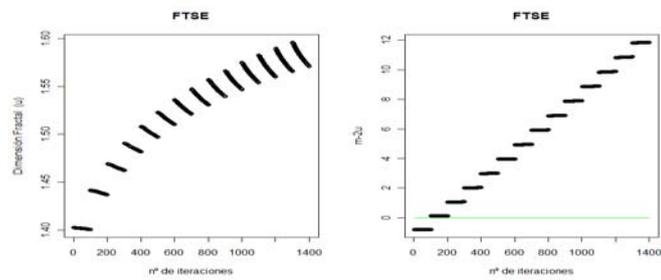


Gráfico 24. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del FTSE 100

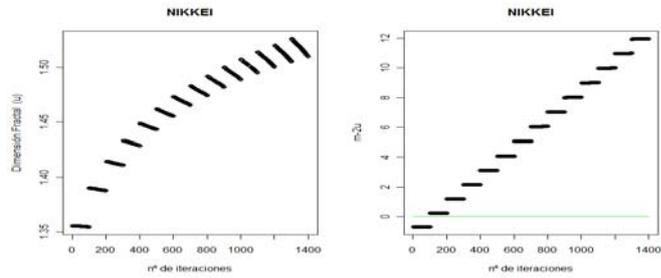


Gráfico 25. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del NIKKEI 225

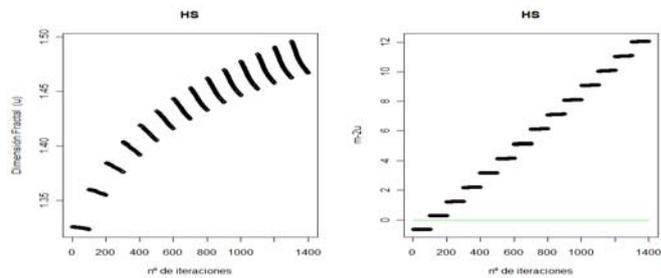


Gráfico 26. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del Hang Seng

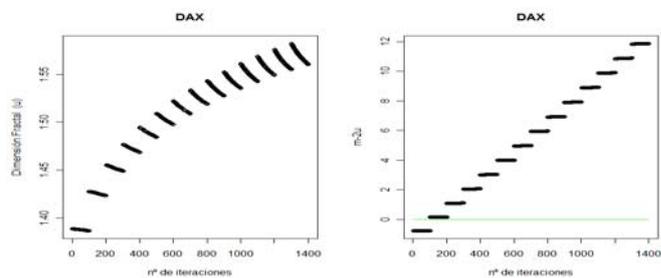


Gráfico 27. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del DAX 30

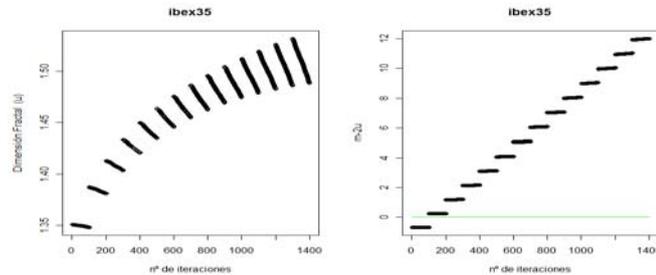


Gráfico 28. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie del IBEX 35

Como puede observarse, a partir de una dimensión de inmersión de 3 todas las series presentan la diferencia $m - 2u$ superior a cero. Únicamente en el caso del índice Standard & Poor's 500 esta diferencia parece ser igual a cero para una dimensión de 3. A efectos prácticos, se elegirá como dimensión de inmersión óptima a considerar la de 3 para todas las series, ya que ello posibilita ver gráficamente las series en la dimensión de inmersión elegida.¹⁸

5.2.2. Tiempo de retardo

Como se ha visto anteriormente,¹⁹ con el fin de hallar el retardo idóneo para observar la trayectoria el algoritmo desarrollado parte de considerar que el retardo adecuado tiene que ser aquel para el cual el estado del sistema no dependa del momento anterior sino de la función de valoración. Además, con el retardo óptimo

¹⁸Las distorsiones que pudieran aparecer por haber elegido esta dimensión en el caso del Standard & Poor's 500 se subsanarán en cierto modo buscando el retardo más adecuado para la dimensión de inmersión elegida.

¹⁹Véase el apartado 3.4.2 del presente trabajo, donde puede obtenerse una visión detallada de los pasos que sigue el algoritmo propuesto.

la trayectoria deberá realizar la máxima ocupación posible del espacio de estados. En el caso de que la trayectoria se mueva principalmente por una zona determinada del espacio de estados, es posible que se halle dentro de un atractor.

Tras aplicar el algoritmo propuesto a cada serie temporal analizada, se obtienen dos gráficos: el primero muestra para cada retardo considerado desde 1 hasta 120 el ángulo medio que se forma entre dato del origen y todos los demás así como el polinomio ajustado a este ángulo; el segundo muestra, por centiles, el polinomio ajustado a la frecuencia absoluta. El retardo a elegir será aquel para el cual se establezca el ángulo medio y que presente mayor concentración de puntos, el cual puede hallarse a partir del máximo global del polinomio ajustado a la frecuencia absoluta.²⁰

Los gráficos resultantes de la aplicación del algoritmo para la elección del retardo óptimo a cada serie financiera analizada se muestran a continuación:²¹

²⁰Los retardos óptimos se han calculado para la dimensión de inmersión elegida de 3, lo cual permite subsanar en cierto modo en el caso del Standard & Poor's 500 las distorsiones que pudieran aparecer por no haber elegido una dimensión superior.

²¹En el eje horizontal del primer gráfico se muestran los retardos considerados ($\tau = 1, \dots, 120$) y en el vertical el ángulo medio (en grados) para cada retardo.

En el eje horizontal del segundo gráfico aparece por centiles el ángulo medio y en el eje vertical la frecuencia absoluta para cada ángulo medio.

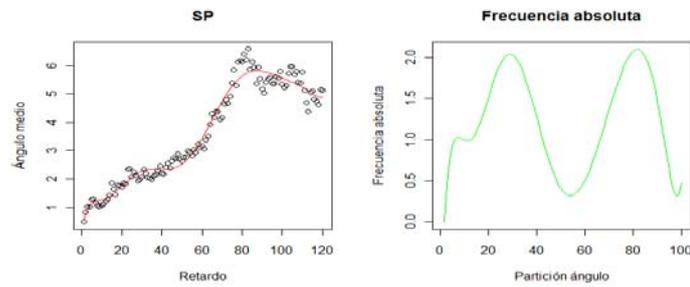


Gráfico 29. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del Standard & Poor's 500

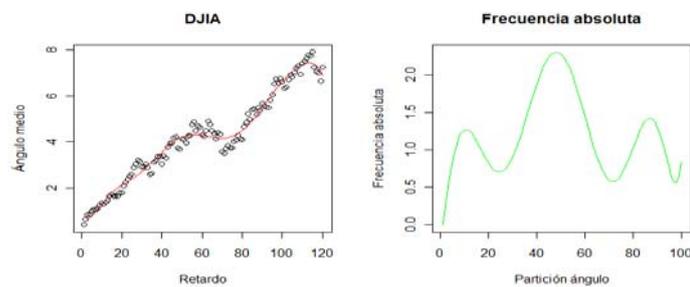


Gráfico 30. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del Dow Jones Industrial Average

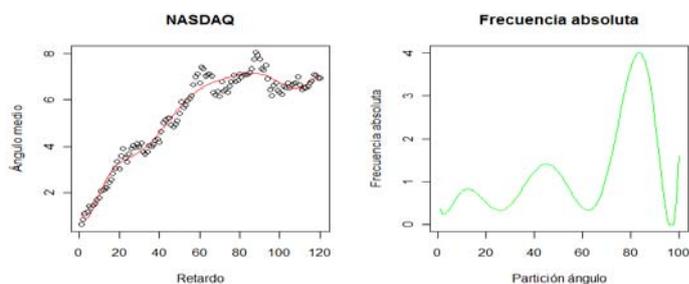


Gráfico 31. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del NASDAQ Composite

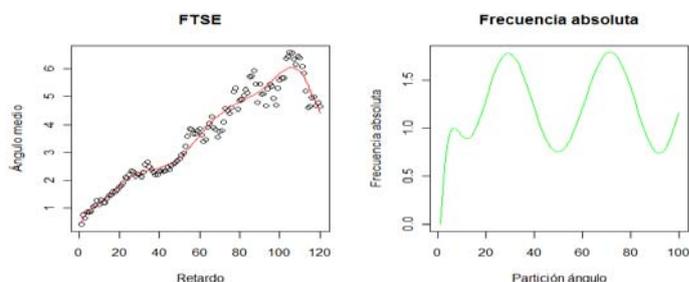


Gráfico 32. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del FTSE 100

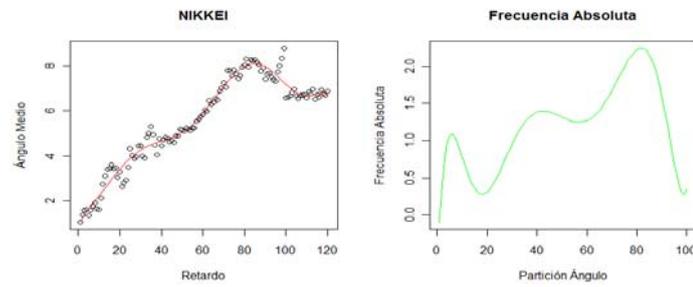


Gráfico 33. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del NIKKEI 225

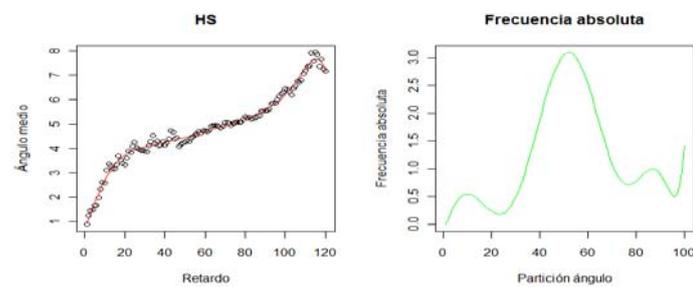


Gráfico 34. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del Hang Seng

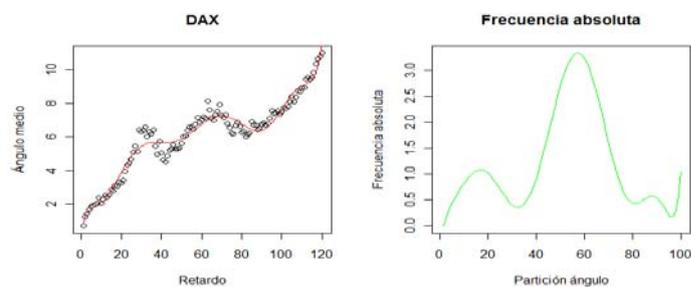


Gráfico 35. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del DAX 30

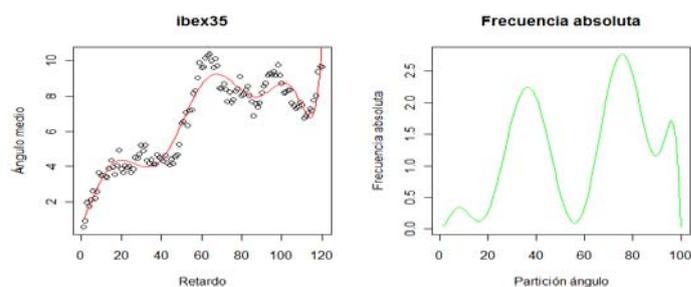


Gráfico 36. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie del IBEX 35

La siguiente tabla muestra los retardos idóneos hallados para cada índice. El retardo que se ha resaltado en negrita en cada caso es aquel que se corresponde con el máximo global de la frecuencia absoluta, y que será, por tanto, el retardo óptimo a elegir:

Índice	Retardos óptimos
S&P 500	5, 35, 99
Dow Jones Industrial Average	11, 59 , 107
NASDAQ Composite	11, 33, 92
FTSE 100	5, 33, 95
NIKKEI 225	7, 36, 83
Hang Seng	4, 53 , 110
DAX 30	12, 66 , 116
IBEX 35	5, 28, 89 , 79

Tabla 2. Retardos óptimos

5.2.3. Inmersión de las series

Una vez se han determinado la dimensión de inmersión y el tiempo de retardo a elegir, puede procederse a realizar una inmersión de las series. A continuación se representan las trayectorias resultantes de los confinamientos realizados para una dimensión de 3 y el retardo óptimo para cada serie temporal.²²

²²Al realizarse el confinamiento para la dimensión de inmersión elegida de 3 y el retardo óptimo se obtienen vectores de 3 componentes, los cuales presentan la forma $(\varkappa_i, \varkappa_{i+\tau}, \varkappa_{i+2\tau})$, donde \varkappa_i representa la observación en el momento i , y τ el tiempo de retardo.

En los ejes de los gráficos se muestra lo siguiente: en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado, en la segunda dimensión el valor del segundo componente, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector.

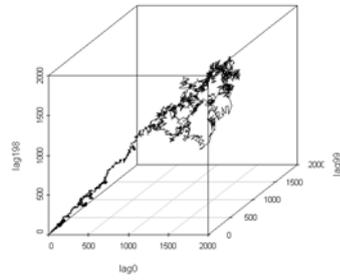


Gráfico 37. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del Standard & Poor's 500

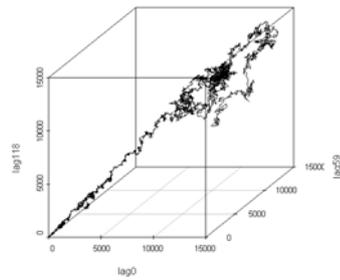


Gráfico 38. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del Dow Jones Industrial
Average

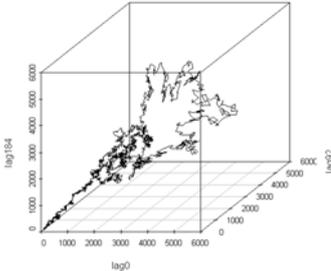


Gráfico 39. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del NASDAQ Composite

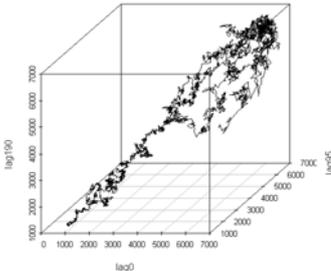


Gráfico 40. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del FTSE 100

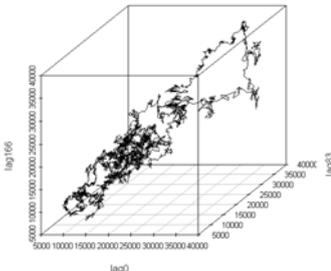


Gráfico 41. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del NIKKEI 225

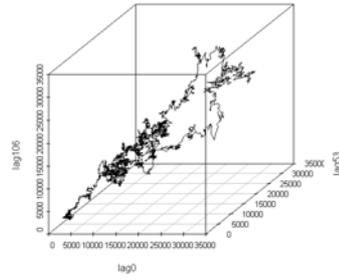


Gráfico 42. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del Hang Seng

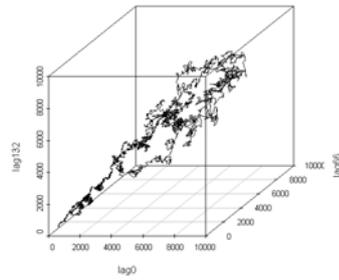


Gráfico 43. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del DAX 30

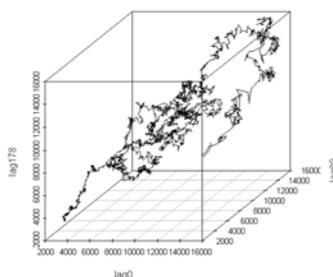


Gráfico 44. Trayectoria tras el confinamiento de la serie del IBEX 35

Como puede observarse, todas las series parecen comportarse de un modo parecido. Al principio sus trayectorias tienden hacia una zona del espacio de estados, y una vez situadas en ella, permanecen moviéndose dentro de esa zona. Con el fin de intentar determinar si esto se debe a la presencia de un atractor, se ha aislado este comportamiento, que en todas las series corresponde aproximadamente a las 3000 últimas observaciones. El origen del movimiento errático observado en los 3000 últimos datos se halla entre febrero y julio de 1997, dependiendo de la serie de la que se trate.²³

A continuación se muestran a modo de comparación las trayectorias de las series financieras analizadas durante todo el periodo considerado y las mismas a partir del dato 3000 contando desde el final, para una dimensión de inmersión de 3 y el tiempo de retardo óptimo para esta dimensión:²⁴

²³Dado que cada serie temporal está formada por un número distinto de observaciones, es interesante estudiar su comportamiento tomando un mismo número de datos, y de ahí que resulte adecuado analizar las 3000 últimas observaciones de todas ellas.

²⁴En los ejes de los gráficos se muestra: en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado, en la segunda dimensión el valor del segundo componente, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector.

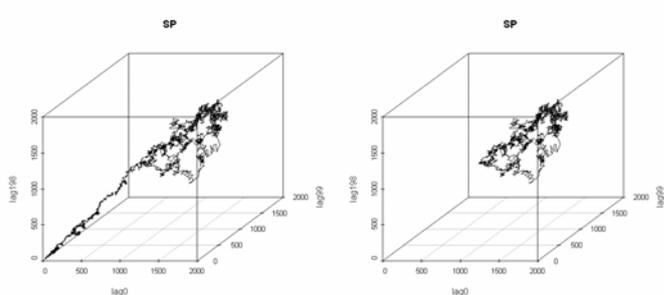


Gráfico 45. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice Standard & Poor's 500 de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

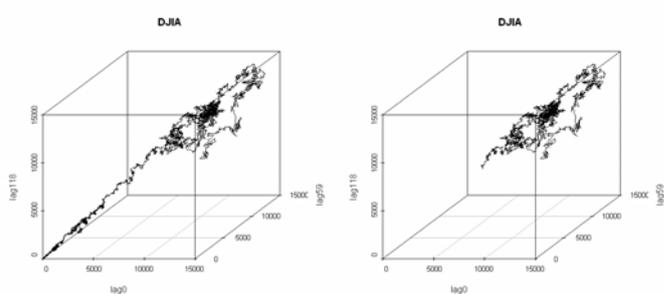


Gráfico 46. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice Dow Jones Industrial Average de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

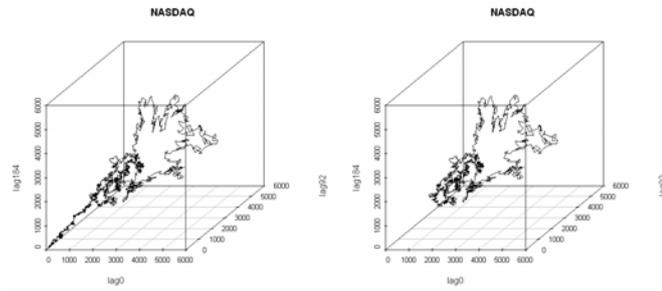


Gráfico 47. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice NASDAQ Composite de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

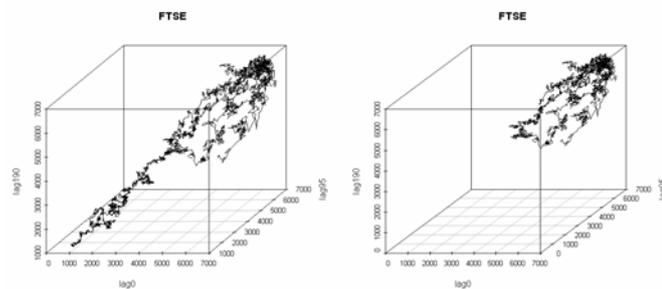


Gráfico 48. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice FTSE 100 de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

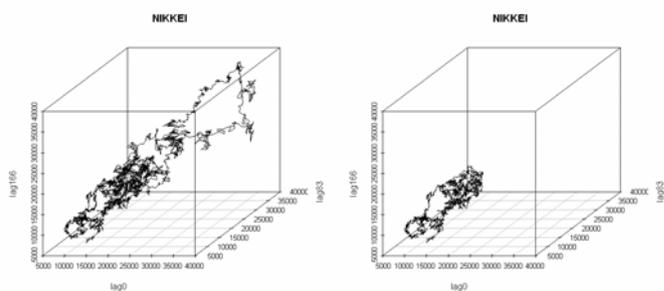


Gráfico 49. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice NIKKEI 225 de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

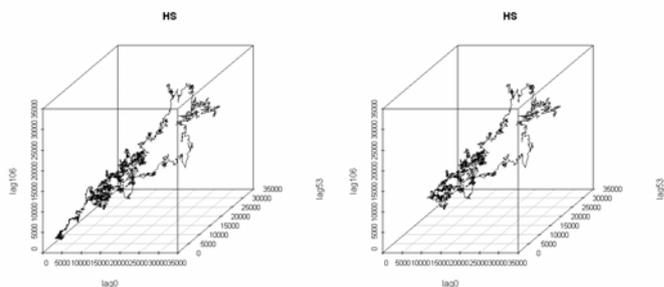


Gráfico 50. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice Hang Seng de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

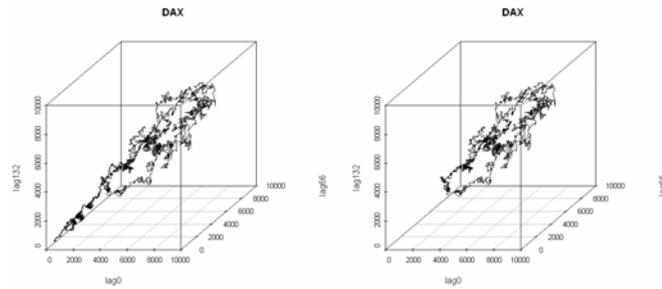


Gráfico 51. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice DAX 30 de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

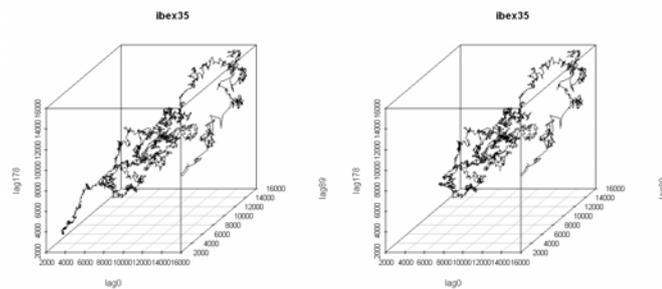


Gráfico 52. Respectivamente, trayectorias confinadas del índice IBEX 35 de todo el periodo y de las últimas 3000 observaciones

Resulta interesante determinar si el comportamiento de las series en las últimas 3000 observaciones es debido a la entrada en un atractor. Siguiendo a Takens,²⁵ dado que hemos tomado $m > 2u$, en el caso de que todas las series presentaran un atractor, y por ello se comportaran de un mismo modo, sería posible, tomando cualquiera de las series temporales anteriores, y a través de la función de valoración que permite establecer la biyección, confirmar la existencia de atractor en el sistema

²⁵Takens, F. (1981): *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, pp. 366–381. Springer-Verlag.

financiero original. Todo ello gracias al homeomorfismo existente entre el espacio de estados (el sistema financiero, no observable en su totalidad) y el espacio de inmersión (el sistema de observaciones).

Una vez realizados los confinamientos, será necesario comprobar si las series muestran transitividad topológica y tienen órbitas densas, lo cual implica la presencia de atractor, y si son sensibles a las condiciones iniciales, con lo que podría hablarse de caoticidad en las mismas. Antes de empezar con el análisis de las propiedades del caos, va a realizarse un análisis espectral singular, para hallar la base óptima sobre la que reconstruir las trayectorias.

5.3. Análisis espectral singular

El análisis espectral singular²⁶ permite expresar las trayectorias en su base óptima, que es aquella que minimiza su proyección sobre los ejes y que además hace independientes las columnas de la matriz de trayectorias, formada por los confinamientos en filas.

A partir del análisis espectral singular se halla la base óptima sobre la que reconstruir las trayectorias de las series a través de un algoritmo consistente en los pasos siguientes:

1. Se multiplican los confinamientos traspuestos por los confinamientos sin trasponer, obteniéndose así una matriz cuadrada.
2. Se buscan los valores y los vectores propios de la anterior matriz.
3. Se forma una matriz con los vectores propios²⁷ en columnas, dado que son

²⁶Véase el apartado 3.5 del presente trabajo.

²⁷El programa *The R-project for Statistical Computing* proporciona directamente los vectores propios normalizados, por lo que no es necesario dividirlos por la longitud para normalizarlos.

los vectores que producen la transformación sobre la matriz. Se traspone la matriz anterior obteniéndose así la matriz de cambio de base.²⁸

4. Se calculan las coordenadas de cada confinamiento sobre la nueva base multiplicando la matriz de cambio de base por el confinamiento.
5. Se representan las trayectorias en la nueva base obtenida.

Tras la aplicación del anterior algoritmo, se representan dos gráficos para cada serie temporal analizada: teniendo en cuenta la dimensión de inmersión y el retardo óptimos, el primer gráfico muestra la trayectoria en la base original (canónica), y el segundo la trayectoria en la base óptima obtenida, mediante el cambio de base resultante del análisis espectral singular. Los gráficos obtenidos son:²⁹

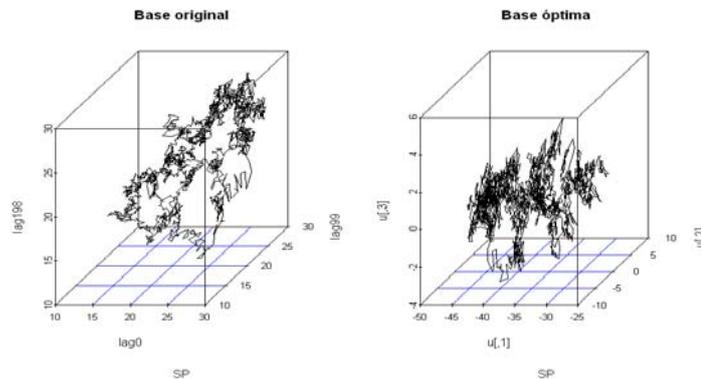


Gráfico 53. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice Standard & Poor's 500 en la base original y en la base óptima

²⁸ Como los vectores son ortonormales, la matriz traspuesta coincide con la matriz inversa, que es en realidad la que permite el cambio de base.

²⁹ En el primer gráfico se muestra, en la base canónica, en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado, en la segunda dimensión el valor del segundo componente, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector.

En el segundo gráfico se muestra en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado en la nueva base, en la segunda dimensión el valor del segundo componente en la nueva base, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector en la nueva base.

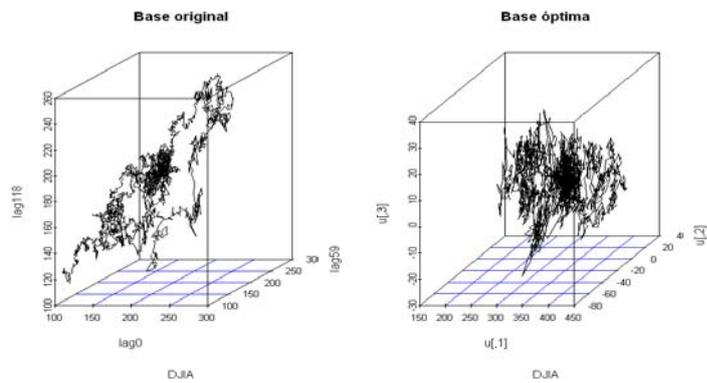


Gráfico 54. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice Dow Jones Industrial Average en la base original y en la base óptima

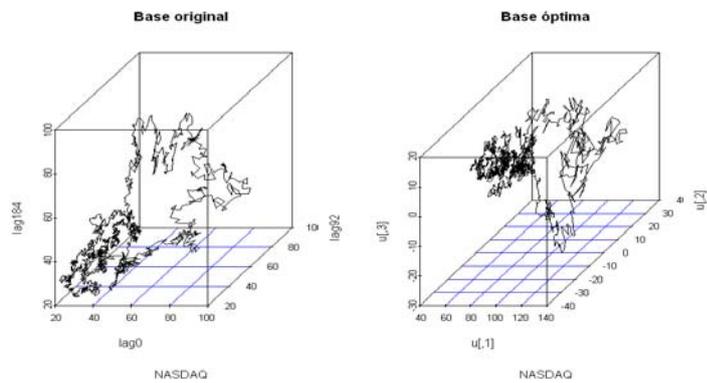


Gráfico 55. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice NASDAQ Composite en la base original y en la base óptima

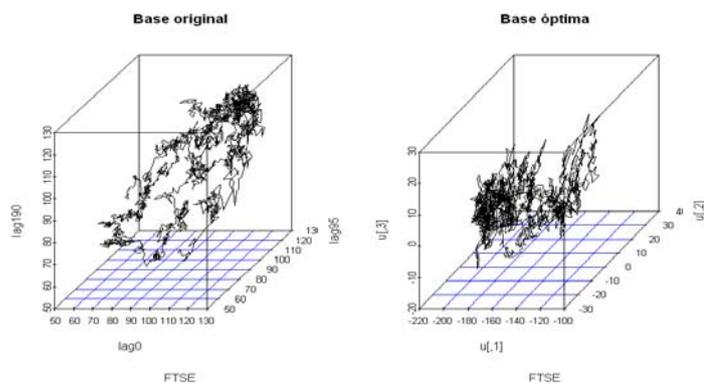


Gráfico 56. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice FTSE 100 en la base original y en la base óptima

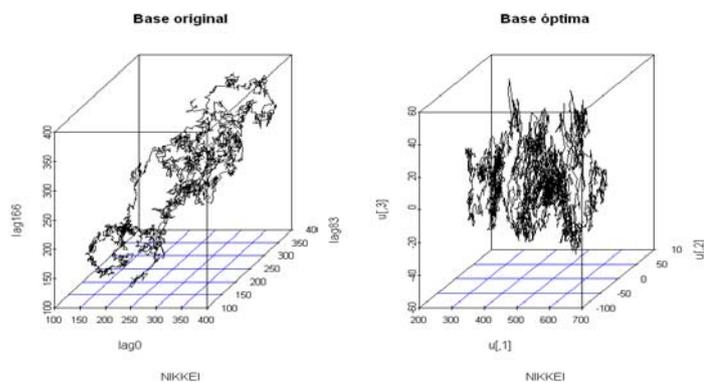


Gráfico 57. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice NIKKEI 225 en la base original y en la base óptima

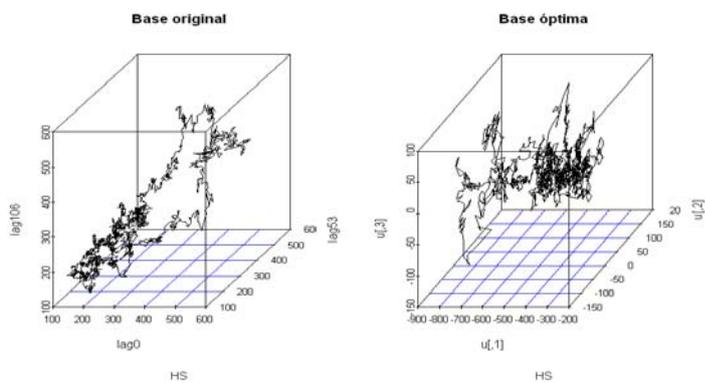


Gráfico 58. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice Hang Seng en la base original y en la base óptima

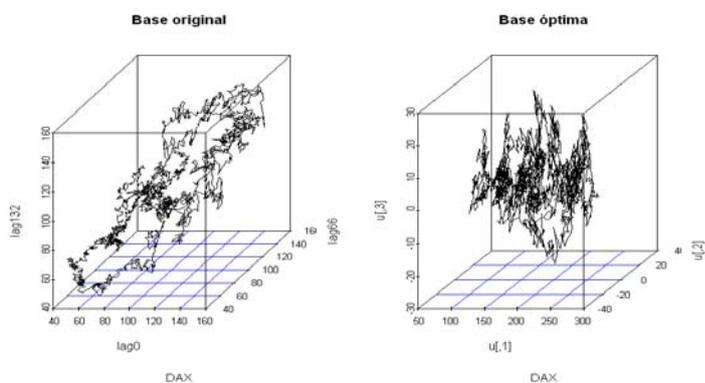


Gráfico 59. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice DAX 30 en la base original y en la base óptima

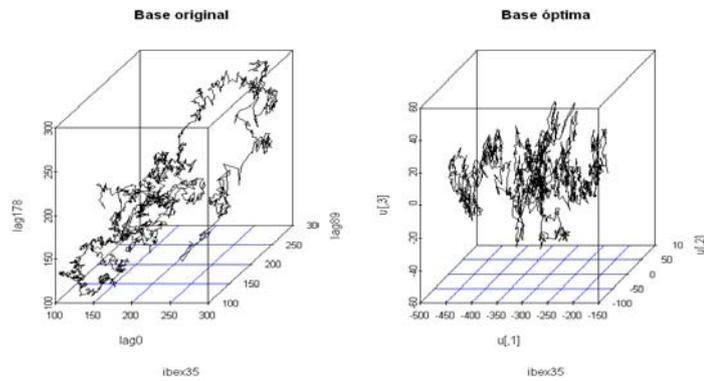


Gráfico 60. Respectivamente, trayectoria de las 3000 últimas observaciones del índice IBEX 35 en la base original y en la base óptima

5.4. Análisis de atractores

5.4.1. Existencia de atractor

Con el fin de determinar si el comportamiento observado en las últimas 3000 observaciones de las series temporales es debido a la presencia de un atractor en las mismas, en primer lugar se comprueba si es posible que este atractor exista.

Como se ha visto anteriormente,³⁰ tanto el sistema original como el sistema confinado, que se construye a partir de los datos observados, varían en el tiempo, son orientados. Si el espacio de estados fuese un espacio métrico compacto,³¹ y la función de cambio de estado o flujo continua, de modo que estuviese formada por un conjunto de funciones iteradas, tendría atractor. En el caso de que se diese la biyección entre el sistema original y el confinado, esto significaría que también

³⁰Véanse los apartados 3.1 y 3.2 del presente trabajo.

³¹Como se ha visto en el apartado 3.1 del presente trabajo, un conjunto es compacto si es cerrado y acotado.

existe atractor en el sistema original. Si además la aplicación fuese contractiva, habría un atractor y sólo uno. Así, en el confinamiento adecuado, si la distancia entre dos imágenes es inferior a la distancia entre los puntos que las originan, para todo punto, siendo el espacio de estados compacto y la función de cambio de estado o flujo continua, hay un atractor y sólo uno. Si es superior o igual, significa que puede haber más de un atractor.

El problema que surge es que el sistema de funciones iteradas (SFI) que permite iterar no tiene por qué ser constante en el tiempo. Un dato no es motivado por una función, sino por un conjunto de ellas, que pueden ir variando. Esto hace que el atractor se pueda ir redefiniendo a lo largo del tiempo, y que además pueda haber más de un atractor.

En el caso que nos ocupa el espacio de estados es un espacio métrico compacto³² y la función de transición es continua,³³ aunque se tome a intervalos discretos, por lo que puede considerarse que existe atractor. Para comprobar si hay uno y sólo uno habrá que estudiar si las series son contractivas.

Una serie presentará un único atractor si, cogiendo dos puntos y haciendo sus imágenes, se cumple que:

$$\|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)\| \leq c \cdot \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad \forall i, j,$$

³²Estamos trabajando en \mathbb{R}^3 , que es un espacio métrico completo. El espacio de estados es además compacto porque siempre podemos albergar el conjunto de los estados en un cerrado (haciendo que la frontera pertenezca al conjunto) y acotado (ya que se dispone de un número finito de elementos, y porque se pueden cerrar en una bola de centro el origen y radio finito).

³³La función de transición es continua debido a que se trabaja con el mercado continuo de valores. Los datos discretos se han obtenido de tomar muestras a intervalos regulares de tiempo de una serie temporal que es continua.

siendo la constante de Lipschitz $0 \leq c < 1$, ya que entonces la serie es contractiva.

Partiendo de la idea anterior, para comprobar si la serie es contractiva y por ello presenta un atractor y sólo uno, el algoritmo desarrollado consiste en los siguientes pasos:³⁴

1. Se cogen dos puntos³⁵ del espacio de estados al azar y sus imágenes correspondientes.³⁶
2. Se calcula la distancia de Hausdorff³⁷ entre los puntos originales y después entre sus respectivas imágenes, y se halla la constante de Lipschitz c dividiendo la segunda entre la primera:

$$c = \frac{\|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_j)\|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}.$$

3. Se calcula la media de la constante de Lipschitz. En el caso de que esta media sea siempre inferior a 1, puede concluirse que la serie es contractiva.

³⁴Previamente se hace un alisado de la serie mediante filtraje espectral para evitar en el muestreo coger elementos con comportamientos extremos, dado que este test resulta muy sensible a la presencia de tales comportamientos.

Véase el apartado 4.1.2 del presente trabajo para el concepto de filtraje espectral.

Puede hallarse el programa elaborado para testar la contractividad en el apartado 9.3, situado en el anexo del presente trabajo.

³⁵En la topología con la que se trabaja, un punto es uno de los subconjuntos de todos los que puede haber en el espacio de estados.

³⁶Se toman por imágenes los subconjuntos siguientes.

³⁷Como se ha visto en el apartado 2.4.2 del presente trabajo, la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos B y C se calcula del modo siguiente:

$$h(B, C) = \max \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in B} \inf_{\mathbf{y} \in C} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \sup_{\mathbf{x} \in C} \inf_{\mathbf{y} \in B} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\},$$

4. Aplicando Montecarlo (simulación),³⁸ se van repitiendo los pasos anteriores, para otros pares de puntos iniciales.

5. Se representan la media de la constante de Lipschitz y la función de densidad normalizada de la última constante de Lipschitz obtenida.³⁹

Simulación del algoritmo para la contractividad

Para comprobar la validez del anterior algoritmo se ha procedido a testar con el mismo una serie disipativa,⁴⁰ obteniéndose el gráfico siguiente:⁴¹

³⁸Como se ha visto en el apartado 4.6.1 del presente trabajo, esta técnica consiste en mezclar los puntos, dividirlos en “paquetes” y calcular por secuenciación, de “paquete” en “paquete”. Cuando dos resultados difieran en menos de un épsilon prefijado, entonces se para el proceso y se toma el último resultado como válido por considerarse que se ha alcanzado un grado satisfactorio de convergencia.

³⁹El programa se parará cuando se estime que el resultado converge en el sentido de Cauchy.

⁴⁰La serie disipativa se ha obtenido a partir de la expresión:

$$x_t = 100 + 1,001^t .$$

Resultará lógico por tanto que la media de la constante de Lipschitz obtenida se sitúe cerca de la razón de variación: 1,001.

⁴¹En el eje horizontal del primer gráfico aparecen el número de simulaciones hechas, y en el vertical el valor que toma la media de la constante de Lipschitz.

En el eje horizontal del segundo gráfico se indica cuántas veces hay que sumar la desviación típica a la media, y en el vertical los valores que toma la función de densidad normalizada tras la última simulación hecha. Debajo del gráfico se muestra el valor de la media de la constante de Lipschitz tras esta simulación.

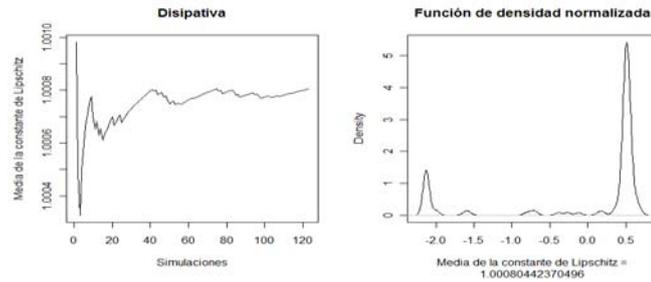


Gráfico 61. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie disipativa

Dado que la media de la constante de Lipschitz es superior a 1, puede concluirse que el algoritmo propuesto es válido, ya que permite llegar a la conclusión de que la serie analizada es disipativa.

Aplicación del algoritmo para la contractividad a las series temporales financieras

A continuación se muestran los gráficos obtenidos tras la aplicación del algoritmo para comprobar si existe un único atractor en las series temporales objeto de estudio:⁴²

⁴²En el primer gráfico aparece una línea horizontal verde en el valor 1, para que resulte más sencillo distinguir visualmente si la media de la constante de Lipschitz supera este valor.

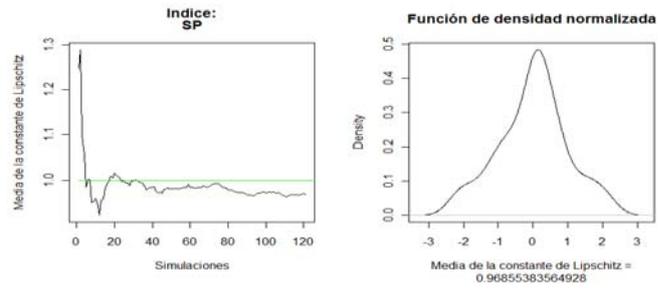


Gráfico 62. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el Standard & Poor's 500

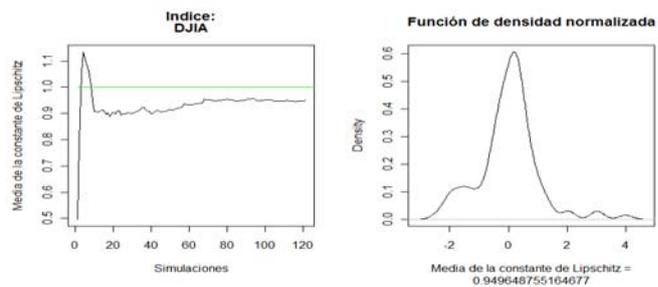


Gráfico 63. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el Dow Jones Industrial Average

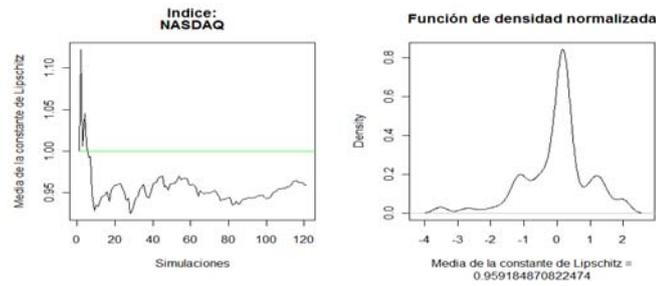


Gráfico 64. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el NASDAQ Composite

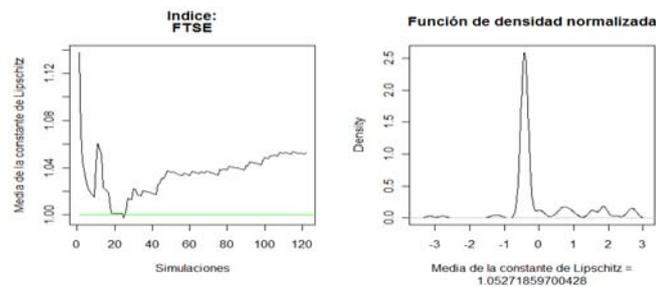


Gráfico 65. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el FTSE

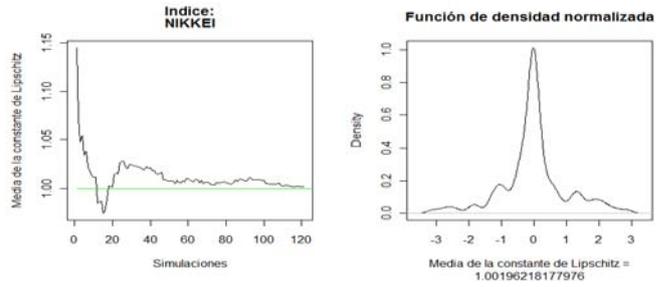


Gráfico 66. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el NIKKEI 225

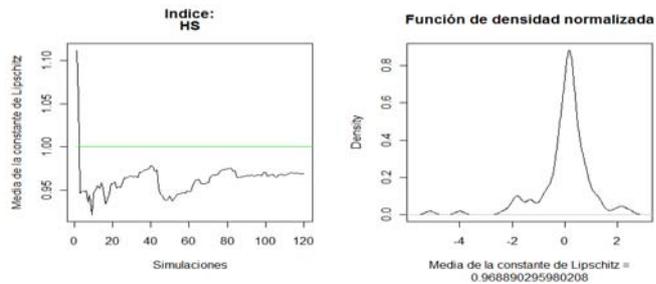


Gráfico 67. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el Hang Seng

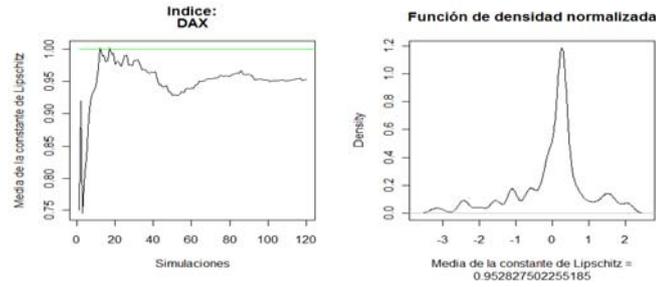


Gráfico 68. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el DAX

30

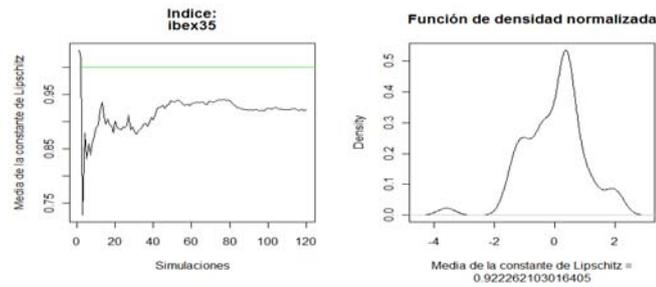


Gráfico 69. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para el IBEX

35

Observando los anteriores gráficos puede comprobarse que en la mayoría de las series analizadas la constante de Lipschitz es inferior a 1, por lo que se concluye que estas series presentan un atractor y sólo uno. Únicamente en el caso del FTSE 100 y del NIKKEI 225 la constante de Lipschitz se sitúa por encima del valor 1 aunque toma un valor cercano a 1, por lo que puede deducirse que en el espacio de estados en el que se mueven las trayectorias formadas por los valores de ambos

índices puede haber más de un atractor.

Dado que se ha concluido que en todas las series temporales analizadas existe como mínimo un atractor, se procede a continuación a analizar la presencia de órbitas densas y la transitividad topológica en las 3000 últimas observaciones de todas las series, con el fin de distinguir si el comportamiento observado puede ser debido al hecho de haber entrado en el atractor. Como se ha explicado anteriormente,⁴³ habrá que analizar ambas propiedades ya que, a pesar de haberse afirmado que la transitividad topológica implica la presencia de órbitas densas,⁴⁴ el algoritmo propuesto para la transitividad topológica testa esta propiedad de un modo atemporal, por lo que no puede deducirse que, en caso de que se detecte transitividad topológica, haya también órbitas densas. Si la serie se halla en el atractor tiene que cumplir ambas propiedades.

5.4.2. Órbitas densas

El algoritmo propuesto para detectar la presencia de órbitas densas⁴⁵ da lugar a un gráfico para cada serie financiera, en el cual se representa la frecuencia absoluta de los sucesos próximos, para cada periodo orbital. Cabe recordar que, tras la aplicación del algoritmo, se obtendrá para cada serie un gráfico que partirá de un valor aproximadamente igual al número de datos e irá disminuyendo hasta el valor cero. Podrá deducirse que la serie presenta órbitas densas si, para algún periodo orbital, aparece algún pico en el gráfico, ya que esto significa que la órbita ha retornado a la vecindad.

A continuación se muestran los gráficos resultantes de la aplicación del

⁴³Véase el apartado 4.6.1 del presente trabajo.

⁴⁴Véase el apartado 2.6 del presente trabajo.

⁴⁵Véase el apartado 4.5.2 del presente trabajo.

algoritmo:⁴⁶

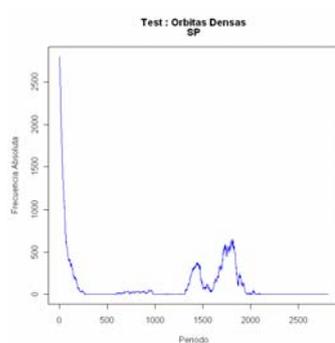


Gráfico 70. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice Standard & Poor's 500

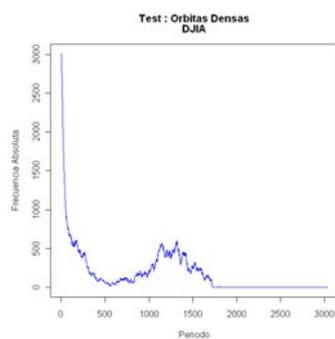


Gráfico 71. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice Dow Jones Industrial Average

⁴⁶En el eje horizontal del gráfico se muestra el periodo orbital considerado, y en el vertical la frecuencia absoluta, que indica los sucesos próximos para cada periodo orbital.

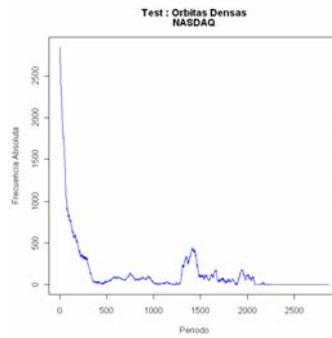


Gráfico 72. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice NASDAQ Composite

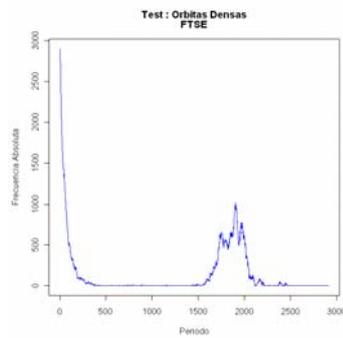


Gráfico 73. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice FTSE 100

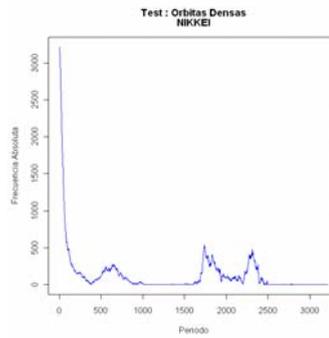


Gráfico 74. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice NIKKEI 225

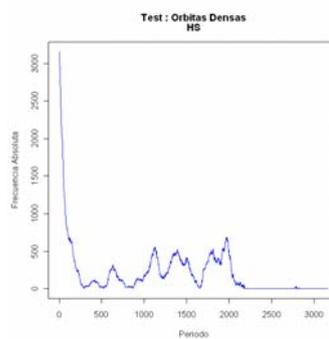


Gráfico 75. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice Hang Seng

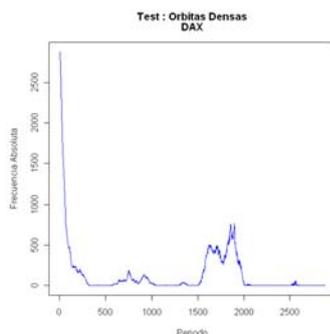


Gráfico 76. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice DAX 30

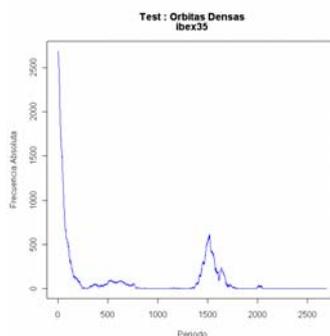


Gráfico 77. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en el índice IBEX 35

Como puede observarse, todas las series anteriores presentan órbitas densas en sus 3000 últimas observaciones, para distintos periodos orbitales en función de la serie financiera. Por ejemplo, el índice Standard & Poor's presenta una órbita densa para un periodo orbital de entre 1500 y 2000, aproximadamente.

5.4.3. Transitividad topológica

Tras la aplicación del algoritmo propuesto para analizar la presencia de transitividad topológica⁴⁷ en los 3000 últimos datos de los índices objeto de estudio, se han obtenido dos gráficos para cada serie financiera: en el primero se muestran las funciones de densidad normalizadas de las distancias del índice (en verde) y de la distribución uniforme (en azul), y en el segundo las funciones de distribución de estas mismas distancias.

Los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo son los que se muestran a continuación:⁴⁸

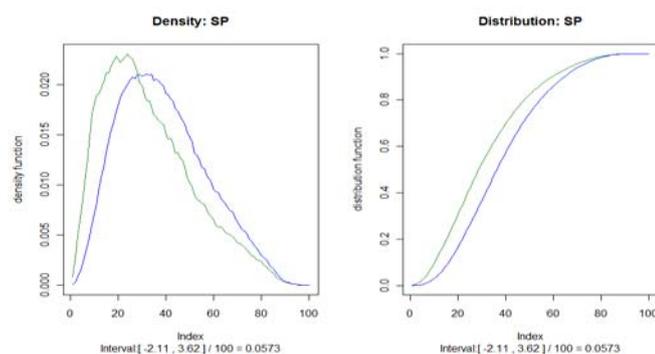


Gráfico 78. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice Standard & Poor's 500 y de la distribución uniforme

⁴⁷Véase el apartado 4.6.1 del presente trabajo.

⁴⁸Como se ha explicado en el apartado 4.6.1 del presente trabajo, en el eje vertical de los gráficos aparecen los valores que toman las funciones de densidad (primer gráfico) y de distribución (segundo gráfico), mientras que en el horizontal aparecen valores del 0 al 100, que representan el número de intervalos en los que se han dividido las funciones para su representación. Bajo cada gráfico aparecen especificados dentro de un intervalo el valor mínimo y máximo que toman las distancias normalizadas, que se corresponden respectivamente con el valor 0 y 100 del eje horizontal. Asimismo, dividiendo entre 100 la diferencia entre el valor mínimo y máximo de las distancias normalizadas se determina el salto de un intervalo a otro.

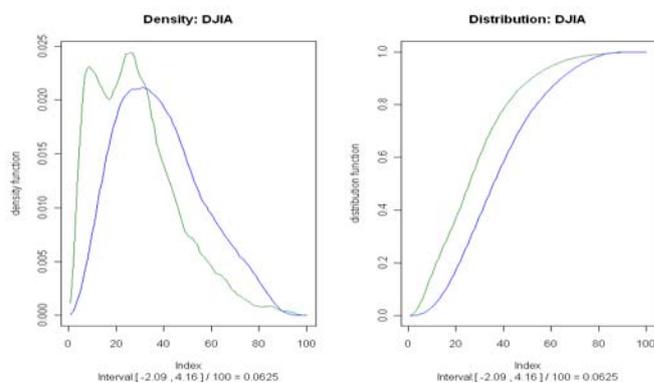


Gráfico 79. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice Dow Jones Industrial Average y de la distribución uniforme

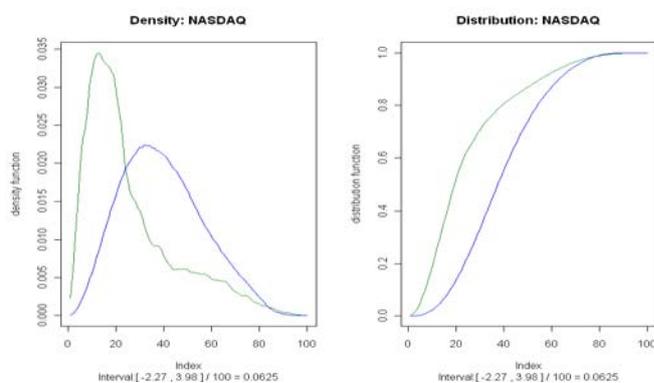


Gráfico 80. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice NASDAQ Composite y de la distribución uniforme

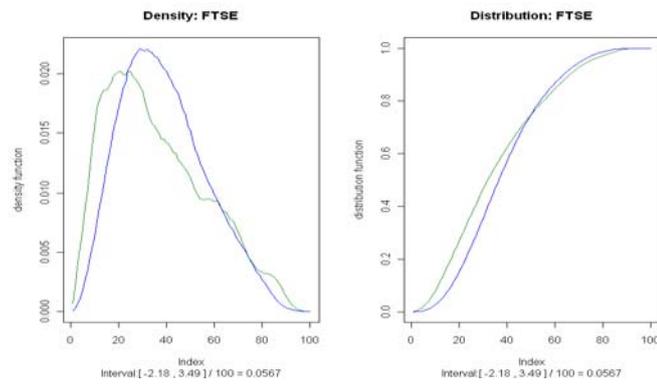


Gráfico 81. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice FTSE 100 y de la distribución uniforme

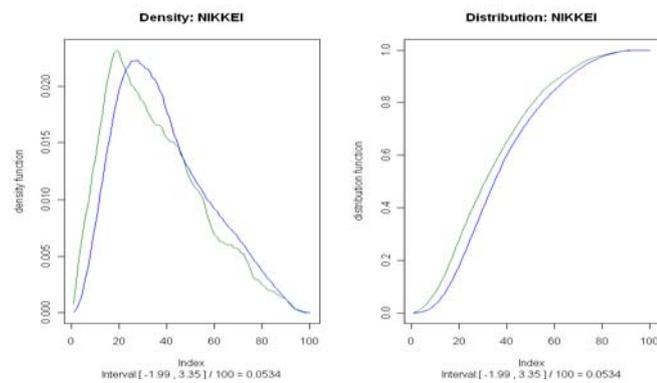


Gráfico 82. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice NIKKEI 225 y de la distribución uniforme

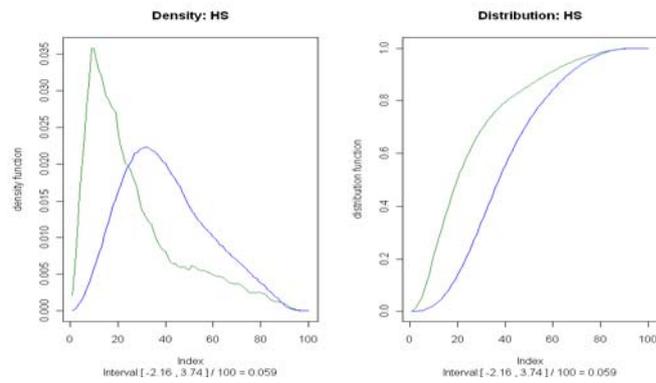


Gráfico 83. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice Hang Seng y de la distribución uniforme

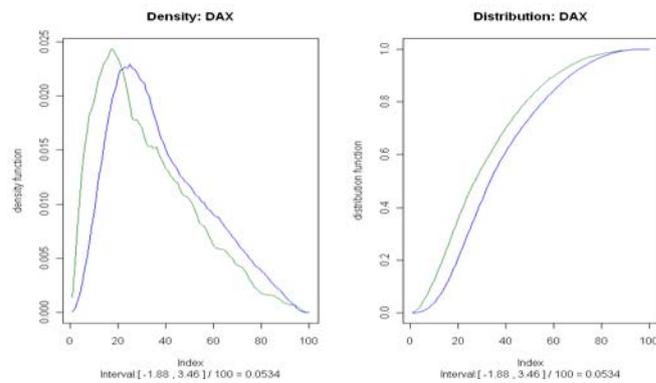


Gráfico 84. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice DAX 30 y de la distribución uniforme

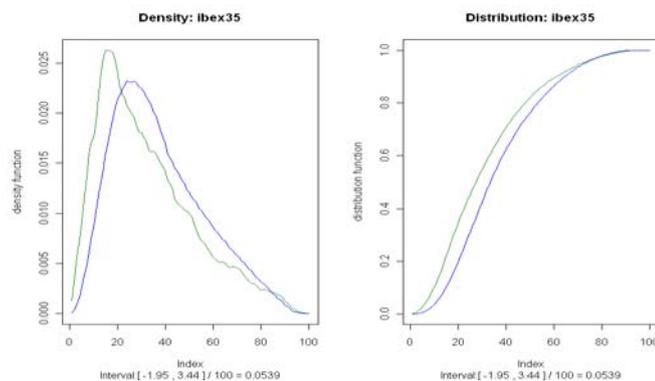


Gráfico 85. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice IBEX 35 y de la distribución uniforme

Con la finalidad de comparar estadísticamente las distribuciones anteriores se ha utilizado el test de Kolmogorov-Smirnov, obteniéndose los siguientes resultados:

Índice	Test Kolmogorov-Smirnov
S&P 500	$D = 0,0863$; $p - value = 0,8191$
Dow Jones Industrial Average	$D = 0,1469$; $p - value = 0,2175$
NASDAQ Composite	$D = 0,2086$; $p - value = 0,02546$
FTSE 100	$D = 0,0741$; $p - value = 0,9276$
NIKKEI 225	$D = 0,051$; $p - value = 0,9996$
Hang Seng	$D = 0,1819$; $p - value = 0,06209$
DAX 30	$D = 0,0816$; $p - value = 0,902$
IBEX 35	$D = 0,0749$; $p - value = 0,9202$

Tabla 3. Resultados de la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a las funciones de distribución de las distancias normalizadas de las series financieras y de la distribución uniforme

En la tabla anterior puede observarse cómo tras la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov el $p - value$ que se obtiene en todas las series es elevado excepto

en los casos del Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite y Hang Seng. Para los índices Standard & Poor's 500, FTSE 100, NIKKEI 225, DAX 30 e IBEX 35 puede aceptarse la hipótesis nula de que ambas funciones se distribuyen de un modo parecido, lo cual llevaría a deducir que como mínimo los últimos 3000 datos de estas series cumplen la propiedad de transitividad topológica.

En el caso de los índices Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite y Hang Seng, se han ido recortando las series para intentar determinar en qué momento el p -value obtenido de la aplicación del algoritmo propuesto pasaba a ser elevado. Se ha observado que en el caso del Dow Jones Industrial Average y del Hang Seng el p -value presenta un crecimiento considerable suprimiendo los 1000 últimos datos, lo que implicaría que posiblemente estas series han salido del atractor antes que las otras. Por su parte, en el caso del NASDAQ Composite este p -value elevado se ha logrado suprimiendo los 1500 últimos datos a las 2500 últimas observaciones, lo cual significaría una entrada en el atractor posterior y una salida anterior a la de los demás índices. Los gráficos resultantes de estos cambios se muestran a continuación:

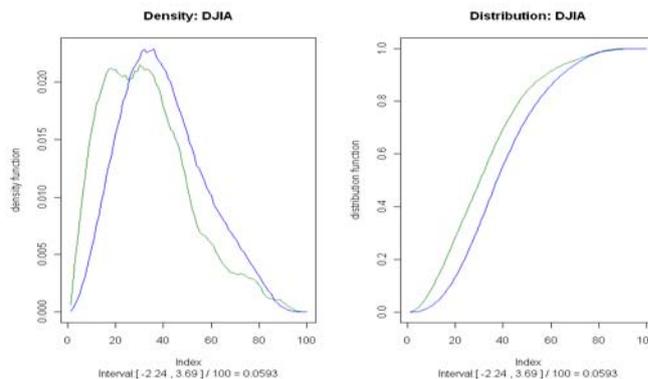


Gráfico 86. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice Dow Jones Industrial Average y de la distribución uniforme

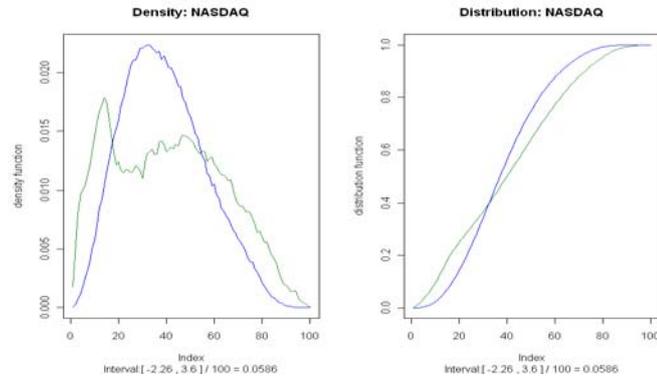


Gráfico 87. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice NASDAQ Composite y de la distribución uniforme

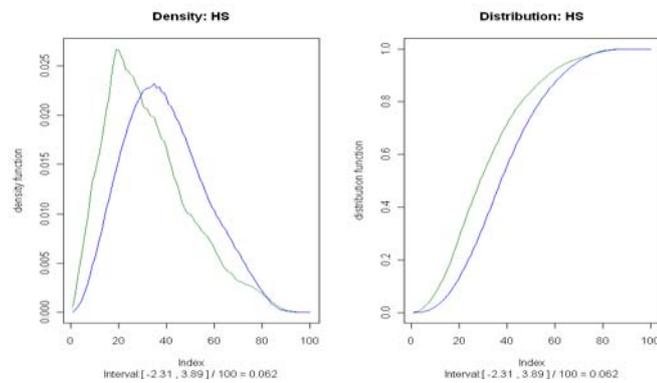


Gráfico 88. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie del índice Hang Seng y de la distribución uniforme

Al aplicar el test de Kolmogorov-Smirnov a las tres series anteriores se llega a los siguientes resultados:

Índice	Test Kolmogorov-Smirnov
Dow Jones Industrial Average	$D = 0,095$; $p - value = 0,7284$
NASDAQ Composite	$D = 0,0896$; $p - value = 0,7736$
Hang Seng	$D = 0,0938$; $p - value = 0,7956$

Tabla 4. Resultados de la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a las funciones de distribución de las distancias normalizadas de las series financieras y de la distribución uniforme

De los apartados anteriores puede deducirse que el comportamiento errático que se ha observado en todas las series temporales parece deberse a la presencia de un atractor en las mismas, si bien el momento de entrada varía dependiendo del índice analizado. Con el fin de determinar si los atractores pueden ser caóticos se analiza a continuación la sensibilidad a las condiciones iniciales.

5.5. Búsqueda de caos

5.5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Tras aplicar a las series temporales analizadas el algoritmo propuesto para la detección de sensibilidad a las condiciones iniciales⁴⁹ se han obtenido gráficos que muestran en azul los módulos máximos de los valores propios ajustados de la matriz de transición, en rojo estos tras el alisado⁵⁰ y en verde el valor de la cota 1, que es la que sirve para distinguir si la serie presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

⁴⁹Véase el apartado 4.4.2 del presente trabajo.

⁵⁰Dado que algunos módulos eran muy elevados, se han ajustado los datos, dejando sin modificar los módulos cuyo valor estuviera entre 0 y 1, y a partir de 1 representando $1 + \ln(\text{módulo})$. Además, como estos módulos presentaban oscilaciones, se han alisado los resultados.

Si los módulos máximos de los valores propios son superiores a 1, podrá concluirse que existe esta sensibilidad.

Los resultados obtenidos de la aplicación de dicho algoritmo para cada índice se muestran a continuación:⁵¹

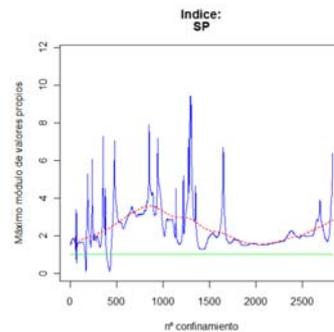


Gráfico 89. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice Standard & Poor's 500

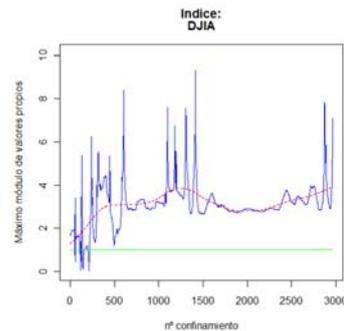


Gráfico 90. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice Dow Jones Industrial Average

⁵¹En el eje horizontal de los gráficos aparece el número de matrices de transición, que coincide con el número de confinamientos, y en el eje vertical el módulo máximo de los valores propios obtenido para cada matriz de transición.

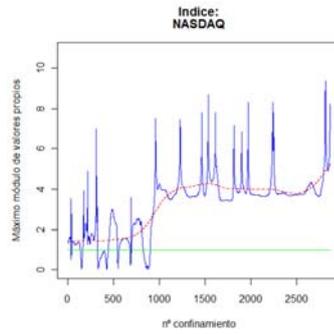


Gráfico 91. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice NASDAQ Composite

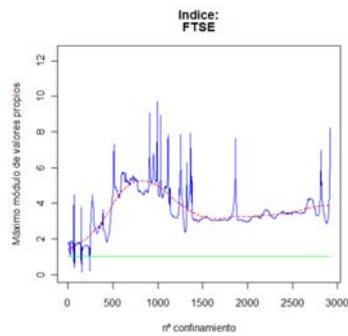


Gráfico 92. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice FTSE 100

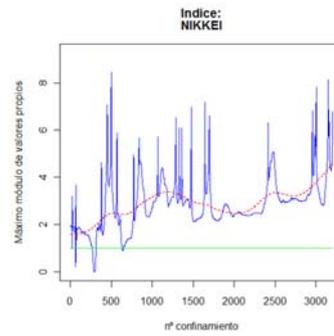


Gráfico 93. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice NIKKEI 225

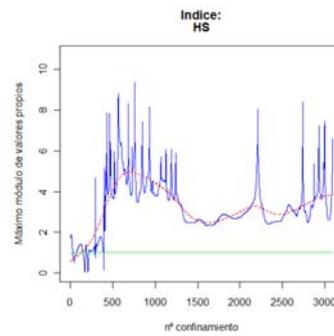


Gráfico 94. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice Hang Seng

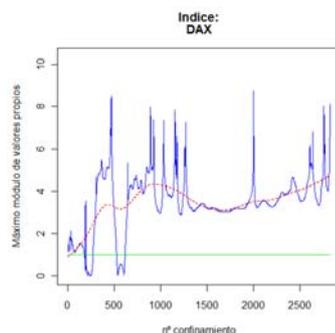


Gráfico 95. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice DAX 30

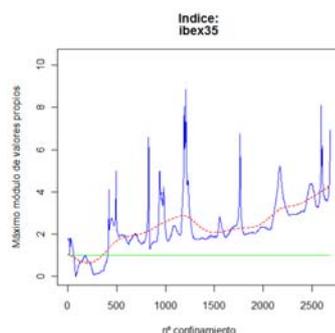


Gráfico 96. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición del índice IBEX 35

Como puede observarse, en todas las series los módulos máximos de los valores propios toman valores superiores a 1, por lo que puede concluirse que la hipótesis de sensibilidad a las condiciones iniciales es válida para todos los índices.⁵²

⁵²Únicamente el IBEX 35 presenta un primer tramo breve en que el máximo módulo del valor propio toma valores inferiores a 1, pero en términos generales aceptamos que es superior a 1 y por ello que el índice es sensible a las condiciones iniciales.

5.6. Resultados

Con el fin de realizar un análisis del caos en el sistema financiero en primer lugar se ha procedido a buscar una dimensión de inmersión óptima a considerar para las distintas series financieras objeto de estudio, la cual ha sido de 3 en todas ellas.

El siguiente paso ha consistido en hallar los tiempos de retardo idóneos con los que observar cada serie, para la dimensión de inmersión considerada. Estos retardos óptimos han sido los siguientes:

Índice	Retardos óptimos
S&P 500	99
Dow Jones Industrial Average	59
NASDAQ Composite	92
FTSE 100	95
NIKKEI 225	83
Hang Seng	53
DAX 30	66
IBEX 35	89

Tabla 5. Retardos óptimos elegidos

Una vez se ha procedido a efectuar la inmersión de las series y se han representado las trayectorias de los confinamientos realizados para la dimensión y retardo óptimos, se ha observado un comportamiento parecido en todas las series: sus trayectorias tienden a una zona del espacio de estados y, una vez en ella, permanecen moviéndose en esa zona. Con el fin de analizar si esto se ha debido a la presencia de atractores en las mismas, se ha aislado ese comportamiento, que

en todas las series corresponde aproximadamente a las 3000 últimas observaciones, para posteriormente realizar un análisis de las propiedades de los atractores. El origen del movimiento errático observado en los 3000 últimos datos se halla entre febrero y julio de 1997.

Previo al análisis de los atractores se ha realizado un análisis espectral singular de las 3000 últimas observaciones con el fin de expresar las trayectorias en su base óptima.

Tras realizar el cambio de base, se ha comprobado si era posible la presencia de atractor en las series temporales analizadas. Para ello se necesita, por un lado, que el espacio de estados sea un espacio métrico compacto, lo cual se cumple ya que siempre podemos albergar el conjunto de los estados en un cerrado y acotado y, por otro lado, que la función de cambio de estado sea continua, lo que ocurre en las series analizadas, pues se trabaja con el mercado continuo de valores. Además, gracias a la propiedad de la contractividad se ha podido concluir que los índices Standard & Poor's 500, Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite, Hang Seng, DAX 30 e IBEX 35 tienen un atractor y sólo uno, mientras que el FTSE 100 y el NIKKEI 225 pueden tener más de un atractor.

Una vez se ha comprobado que para todas las series financieras objeto de estudio es posible la presencia de algún atractor, se ha procedido a testar si las series se hallan dentro de él en el periodo correspondiente a las 3000 últimas observaciones. Para ese fin se ha testado en primer lugar la presencia de órbitas densas en el periodo correspondiente a las 3000 últimas observaciones de las series financieras, cumpliendo todas ellas esta propiedad.

A continuación se ha testado la transitividad topológica, llegando a la conclusión de que todas las series cumplen esta propiedad en el periodo considerado,

salvo los índices Dow Jones Industrial Average y Hang Seng, que lo hacen suprimiendo sus 1000 últimas observaciones, lo que significa una salida del atractor aproximadamente en mayo del 2005, y el índice NASDAQ Composite, que cumple la transitividad topológica suprimiendo los 1500 últimos datos a las 2500 últimas observaciones, lo que significaría una entrada en el atractor datada aproximadamente en mayo de 1999 y una salida del mismo en mayo del 2003.

El hecho de que todas las series analizadas hayan resultado ser topológicamente transitivas y presentar órbitas densas ha permitido deducir que, efectivamente, el comportamiento errático observado podría deberse a la presencia de atractores en las mismas.

El último paso ha consistido en analizar la sensibilidad a las condiciones iniciales con el fin de distinguir si los atractores son caóticos. De nuevo, todos los índices han presentado esta propiedad, lo que los convierte en imprevisibles a medio y largo plazo dentro de su atractor.

Capítulo 6

Efectos de la crisis

6.1. Introducción

En este capítulo se pretende analizar las series temporales objeto de estudio durante el periodo de crisis económico-financiera que empezó a mediados del año 2007¹ y de la que todavía se sufren los efectos. El objetivo de este análisis es el de comprobar si las series se hallan todavía en el atractor en este periodo o si, por el contrario, el impacto de la crisis en los mercados ha sido de tal magnitud que ha desplazado a las trayectorias fuera del mismo.

Las representaciones gráficas de las series temporales financieras, con los valores de cierre de los índices bursátiles desde el 1/8/2007 hasta el 23/3/2011, son las

¹Como se ha señalado en el apartado 5.1 del presente trabajo, siguiendo a Soros se toma agosto del 2007 como fecha de inicio de la crisis.

Fuente:

Soros, G. (2008): *El nuevo paradigma de los mercados financieros. Para entender la crisis económica mundial*. Taurus.

siguientes:²

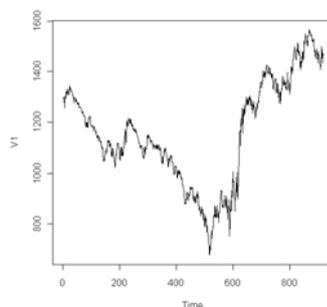


Gráfico 97. Serie temporal del índice Standard & Poor's 500

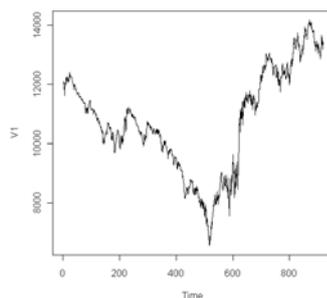


Gráfico 98. Serie temporal del índice Dow Jones Industrial Average

²Concretamente, para el periodo comprendido entre el 1/8/2007 y el 23/3/2011 se dispone de 918 datos del Standard & Poor's 500, 919 datos del Dow Jones Industrial Average, 919 datos del NASDAQ Composite, 920 datos del FTSE 100, 887 datos del NIKKEI 225, 919 datos del Hang Seng, 930 datos del DAX 30 y 926 datos del IBEX 35.

En el eje horizontal de los gráficos aparece el número de observaciones y en el vertical el valor que toman estas.

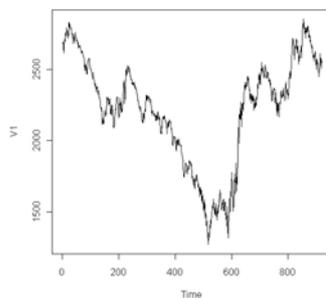


Gráfico 99. Serie temporal del índice NASDAQ Composite

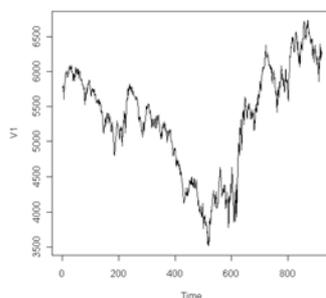


Gráfico 100. Serie temporal del índice FTSE 100

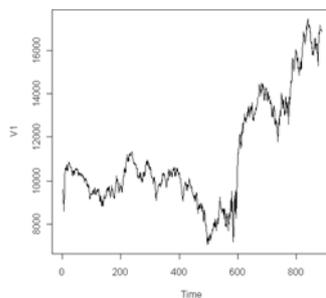


Gráfico 101. Serie temporal del índice NIKKEI 225

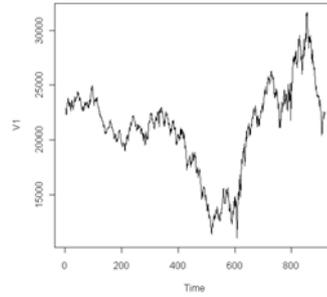


Gráfico 102. Serie temporal del índice Hang Seng

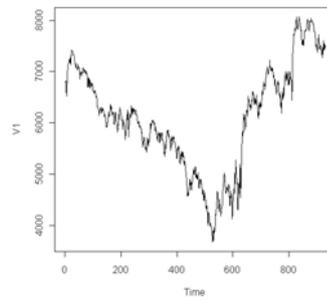


Gráfico 103. Serie temporal del índice DAX 30

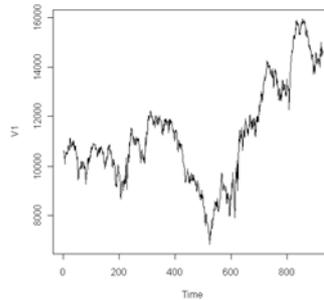


Gráfico 104. Serie temporal del índice IBEX 35

Con la finalidad de realizar un análisis de las series temporales, a continuación se seguirán los mismos pasos seguidos en el capítulo anterior: en primer lugar se realizará una inmersión de las series para, posteriormente, analizar si poseen un atractor y, en caso de que lo hubiera, si es caótico.

6.2. Inmersión

6.2.1. Dimensión de inmersión

Tras aplicar el algoritmo propuesto anteriormente³ a cada serie temporal financiera, se obtienen dos gráficos para cada una: el primero muestra la dimensión fractal del objeto abstracto (u) para cada dimensión de inmersión ($m = 2, \dots, 10$) y retardos considerados ($\tau = 1, \dots, 100$); el segundo representa, para cada dimensión de inmersión y retardos considerados, los valores que toma la función $m - 2u$. Cabe recordar que se tomará como dimensión de inmersión óptima aquella para la cual la función $m - 2u$ sea superior a cero, intentando, en la medida de lo posible, que

³Para la elaboración de este algoritmo, se ha partido de conceptos desarrollados en el apartado 3.3 del presente trabajo. En ese mismo apartado puede obtenerse una visión detallada de los pasos que sigue el algoritmo propuesto para la obtención de la dimensión de inmersión óptima.

la dimensión considerada permita una representación gráfica de las trayectorias. Para facilitar el que se pueda detectar visualmente cuándo la diferencia $m - 2u$ es superior a cero, en el segundo gráfico se traza una línea horizontal de color verde en este valor.

Los gráficos obtenidos con el algoritmo son los siguientes:^{4 5}

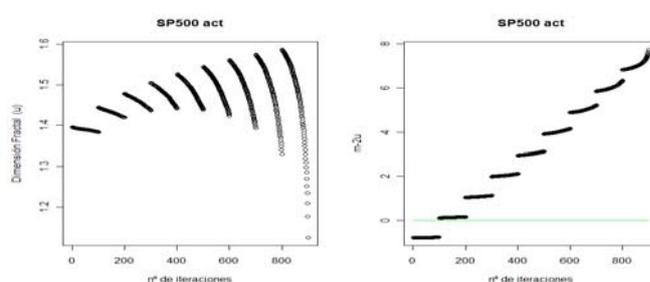


Gráfico 105. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del Standard & Poor's 500

⁴En el eje horizontal de cada gráfico se muestran el número de iteraciones realizadas, esto es, un total de 900, que son el resultado de considerar 9 dimensiones de inmersión (desde 2 hasta 10) y 100 retardos para cada una de ellas. En el eje vertical del primer gráfico se muestran los valores que toma la dimensión fractal del objeto, y en el del segundo los valores que toma la diferencia entre la dimensión de inmersión y dos veces la dimensión fractal del objeto.

⁵Con el fin de distinguir los gráficos de este capítulo, en la mayoría de ellos aparece el nombre del índice seguido de la abreviatura “act”, que hace referencia a que las series están formadas a partir de datos más actuales que los empleados en el capítulo anterior.

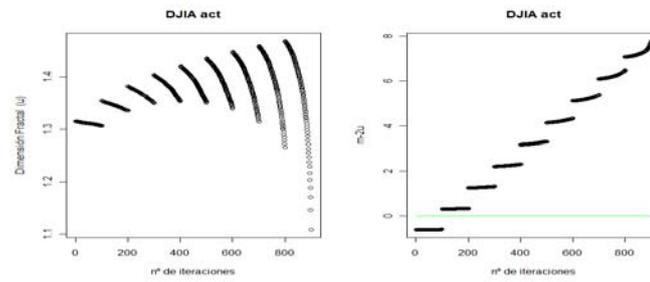


Gráfico 106. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del Dow Jones Industrial Average

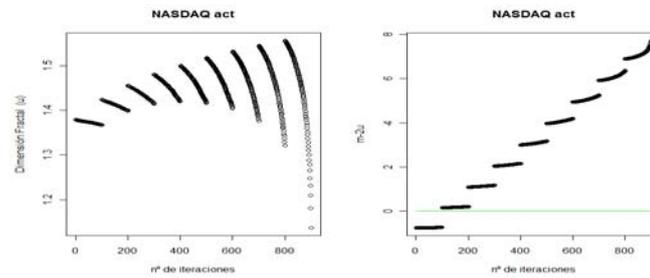


Gráfico 107. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del NASDAQ Composite

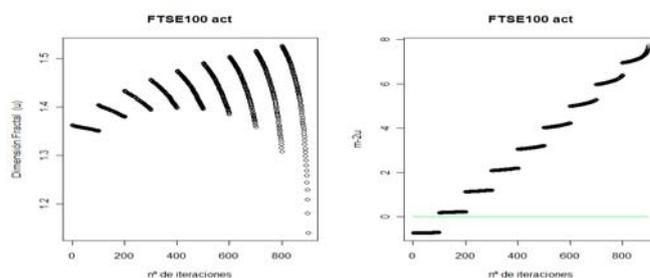


Gráfico 108. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del FTSE 100

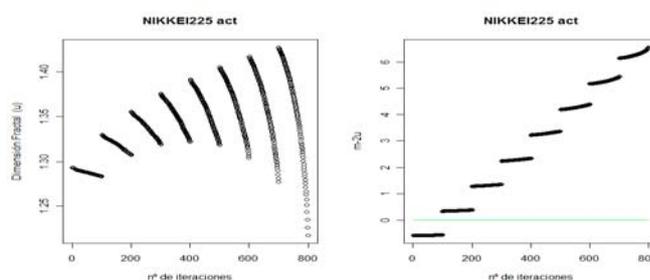


Gráfico 109. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del NIKKEI

225

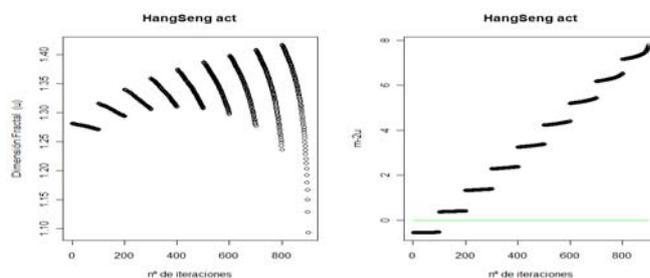


Gráfico 110. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del Hang Seng

174

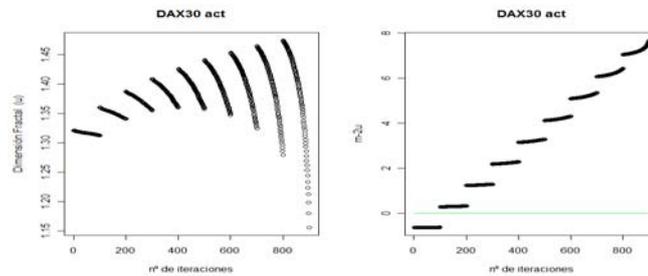


Gráfico 111. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del DAX 30

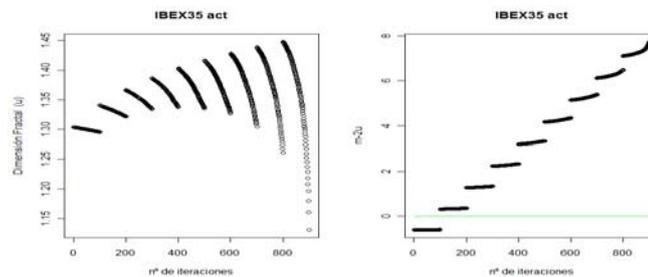


Gráfico 112. Respectivamente, dimensión fractal (u) y diferencia $m - 2u$, para cada dimensión de inmersión (m) y retardo, en la serie con datos más actuales del IBEX 35

Como puede observarse en los gráficos anteriores, la diferencia $m - 2u$ es superior a cero a partir de una dimensión de inmersión de 3 en todas las series financieras. Igual que se hizo en el capítulo anterior, a efectos prácticos se va a elegir como dimensión de inmersión óptima la de 3 para todas las series, ya que ello posibilita la posterior representación de las mismas.

6.2.2. Tiempo de retardo

Con la aplicación del algoritmo propuesto⁶ a cada serie temporal analizada, se obtienen dos gráficos: uno que muestra, para cada retardo considerado desde 1 hasta 120, el ángulo medio que se forma entre dato del origen y todos los demás y el polinomio ajustado a este ángulo; otro que representa, por centiles, el polinomio ajustado a la frecuencia absoluta. Cabe recordar que se elegirá el retardo para el que se establezca el ángulo medio y que presente mayor concentración de puntos. Este retardo óptimo podrá hallarse a partir del máximo global del polinomio ajustado a la frecuencia absoluta.

Los gráficos que resultan de la aplicación del algoritmo para cada serie financiera analizada son los siguientes:⁷

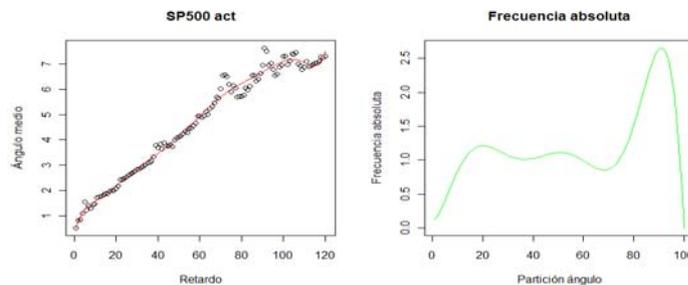


Gráfico 113. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del Standard & Poor's 500

⁶Para la elaboración de este algoritmo, se ha partido de conceptos desarrollados en el apartado 3.4.2 del presente trabajo. En ese mismo apartado puede obtenerse una visión detallada de los pasos que sigue el algoritmo.

⁷En el eje horizontal del primer gráfico se muestran los retardos considerados ($\tau = 1, \dots, 120$) y en el vertical el ángulo medio (en grados) para cada retardo.

En el eje horizontal del segundo gráfico aparece por centiles el ángulo medio y en el eje vertical la frecuencia absoluta para cada ángulo medio.

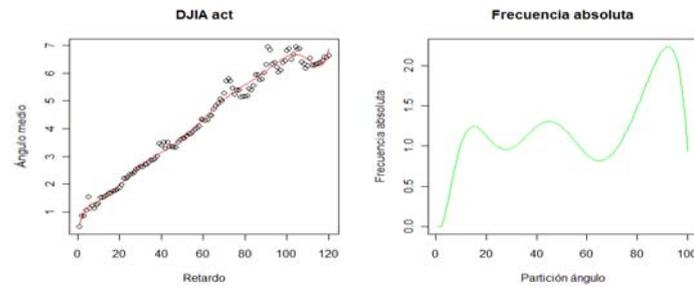


Gráfico 114. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del Dow Jones Industrial Average

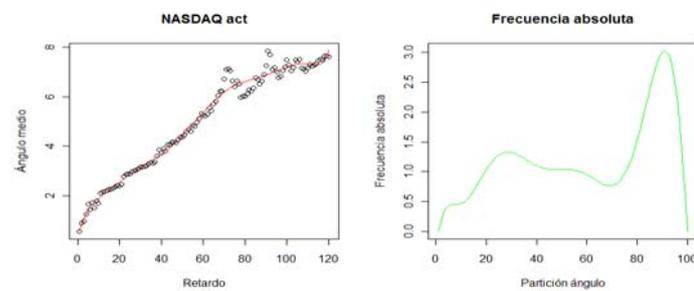


Gráfico 115. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del NASDAQ Composite

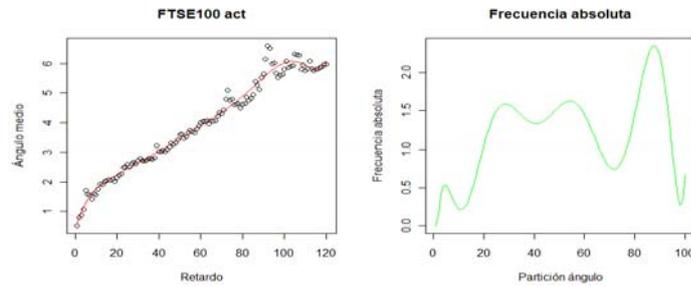


Gráfico 116. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del FTSE 100

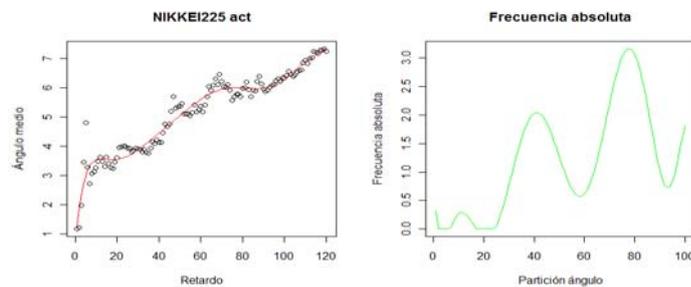


Gráfico 117. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del NIKKEI 225

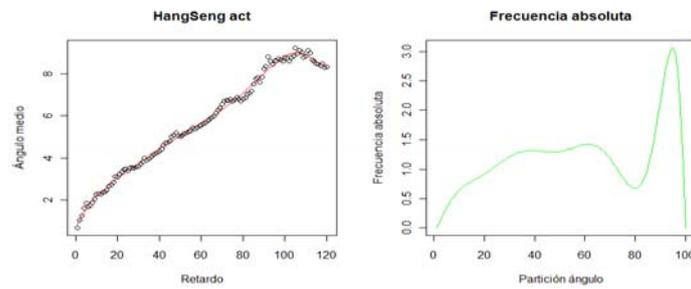


Gráfico 118. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del Hang Seng

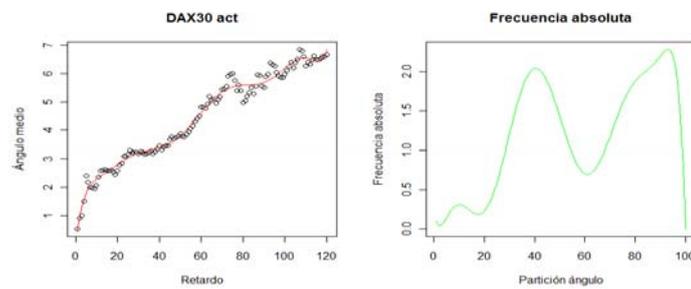


Gráfico 119. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del DAX 30

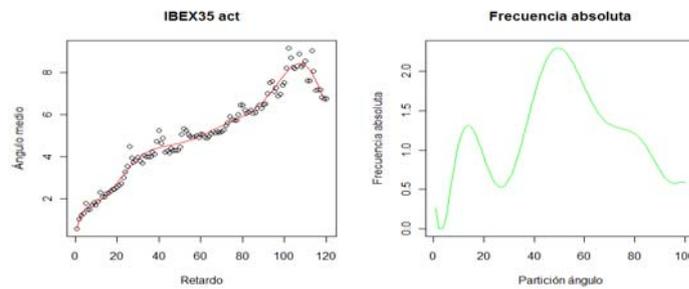


Gráfico 120. Respectivamente, para cada retardo desde 1 hasta 120, ángulo medio y polinomio ajustado a él, y, para cada centil, polinomio ajustado a la frecuencia absoluta, en la serie con datos más actuales del IBEX 35

La tabla que se muestra a continuación contiene los retardos que se corresponden con máximos de la frecuencia absoluta para cada índice. Aquel retardo que aparece resaltado en negrita es el que se corresponde con el máximo global de la frecuencia absoluta, y que será, por tanto, el retardo óptimo a elegir:

Índice	Retardos óptimos
S&P 500	16, 49, 105
Dow Jones Industrial Average	11, 44, 109
NASDAQ Composite	21, 47, 101
FTSE 100	4, 21, 60, 106
NIKKEI 225	3, 23, 79 , 114
Hang Seng	33, 65, 105
DAX 30	6, 29, 108
IBEX 35	10, 53 , 107

Tabla 6. Retardos óptimos

6.2.3. Inmersión

Tras la obtención de la dimensión de inmersión y el tiempo de retardo óptimos, a continuación se procede a realizar la inmersión de las series.

Las trayectorias que resultan de los confinamientos realizados en las series de los índices objeto de estudio, para una dimensión de inmersión de 3 y el retardo óptimo para cada una, se representan a continuación:⁸

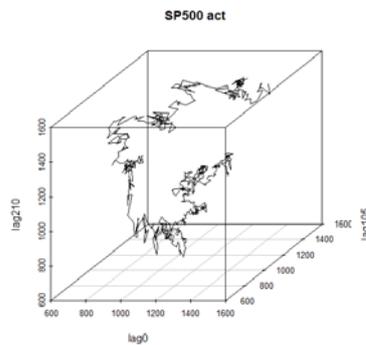


Gráfico 121. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del Standard & Poor's 500

⁸Al realizarse el confinamiento para la dimensión de inmersión elegida de 3 y el retardo óptimo se obtienen vectores de 3 componentes, los cuales presentan la forma $(\varkappa_i, \varkappa_{i+\tau}, \varkappa_{i+2\tau})$, donde \varkappa_i representa la observación en el momento i , y τ el tiempo de retardo.

En los ejes de los gráficos se muestra lo siguiente: en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado, en la segunda dimensión el valor del segundo componente, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector.

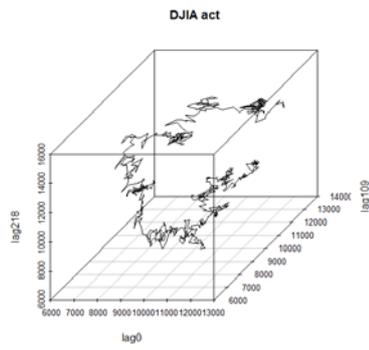


Gráfico 122. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del Dow Jones Industrial Average

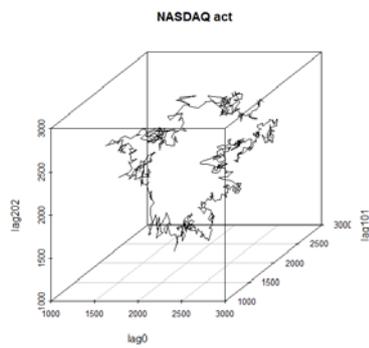


Gráfico 123. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del NASDAQ Composite

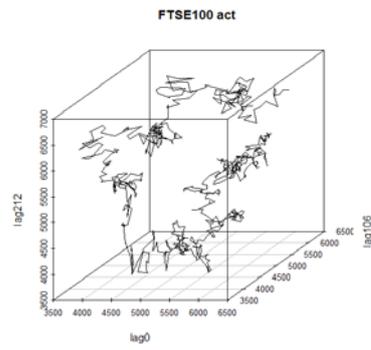


Gráfico 124. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del FTSE 100

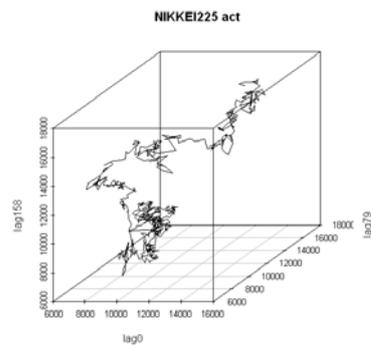


Gráfico 125. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del NIKKEI 225

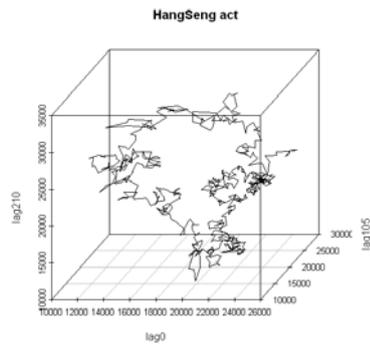


Gráfico 126. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del Hang Seng

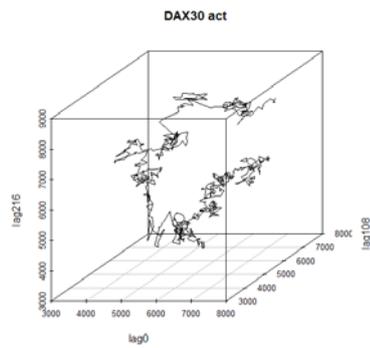


Gráfico 127. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del DAX 30

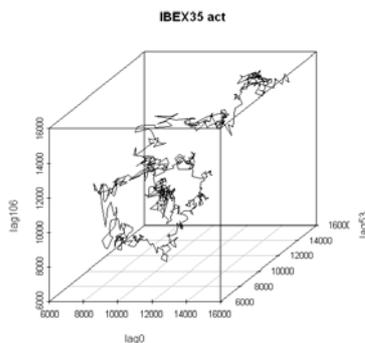


Gráfico 128. Trayectoria tras el confinamiento de la serie con datos más actuales del IBEX 35

6.3. Análisis espectral singular

Hay que realizar un análisis espectral singular⁹ con el fin de observar las trayectorias en su base óptima, que es aquella sobre la cual las trayectorias tienen una proyección mínima sobre los ejes y que hace independientes las columnas de la matriz de trayectorias.

Tras realizar el análisis espectral singular con el algoritmo propuesto en el capítulo anterior,¹⁰ se obtienen los siguientes gráficos que muestran las trayectorias de cada serie temporal en la base original (canónica) y en su base óptima:¹¹

⁹Véase el apartado 3.5 del presente trabajo.

¹⁰Véase el apartado 5.3 del presente trabajo.

¹¹En el primer gráfico se muestra, en la base canónica, en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado, en la segunda dimensión el valor del segundo componente, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector.

En el segundo gráfico se muestra en la primera dimensión el valor del primer componente del vector confinado en la nueva base, en la segunda dimensión el valor del segundo componente en la nueva base, y en la tercera dimensión el valor del tercer componente del vector en la nueva base.

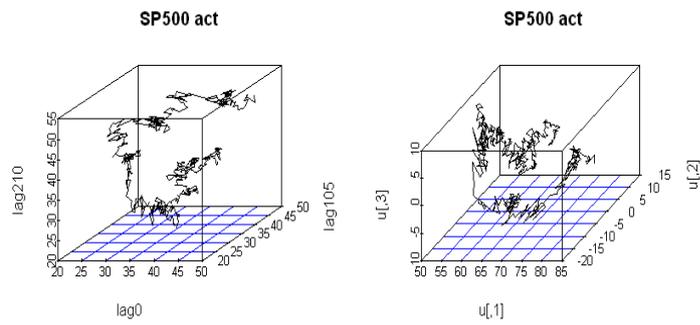


Gráfico 129. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice Standard & Poor's 500 en la base original y en la base óptima

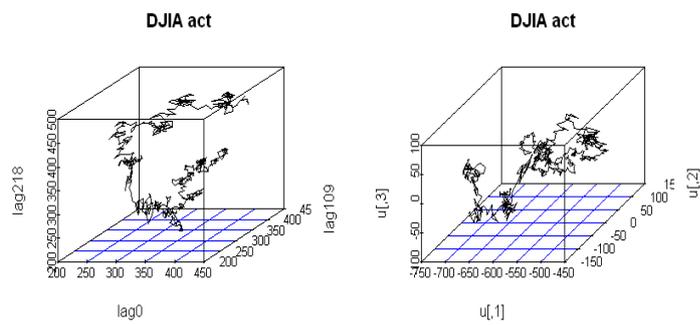


Gráfico 130. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice Dow Jones Industrial Average en la base original y en la base óptima

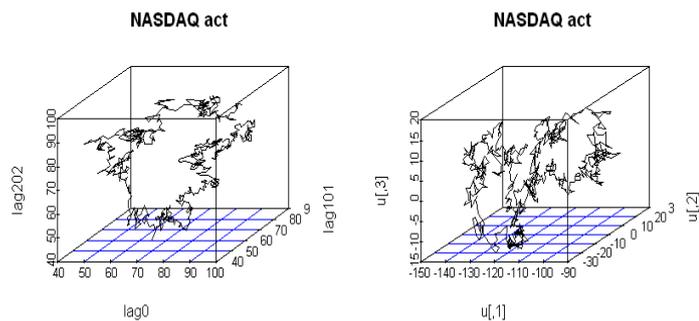


Gráfico 131. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice NASDAQ Composite en la base original y en la base óptima

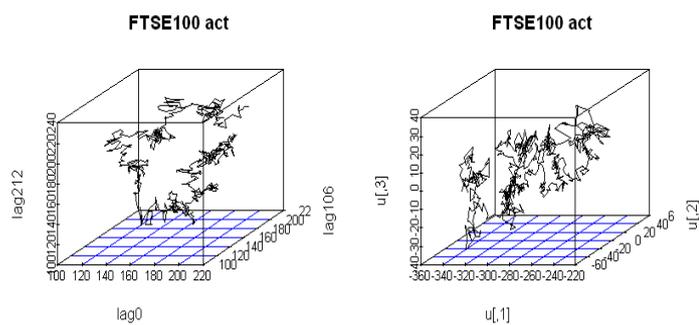


Gráfico 132. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice FTSE 100 en la base original y en la base óptima

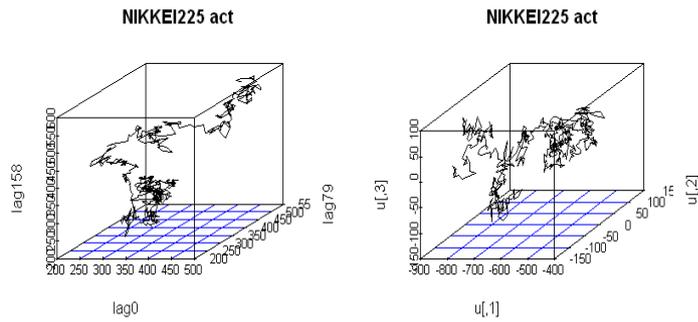


Gráfico 133. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice NIKKEI 225 en la base original y en la base óptima

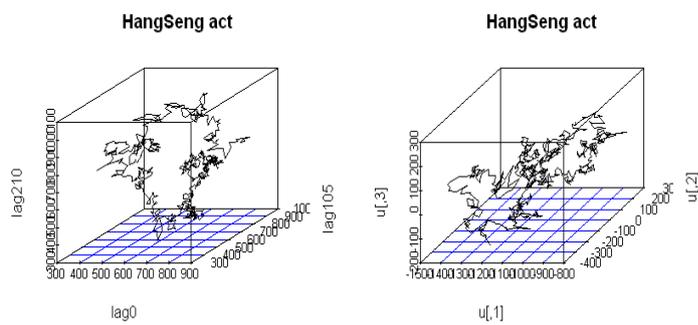


Gráfico 134. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice Hang Seng en la base original y en la base óptima

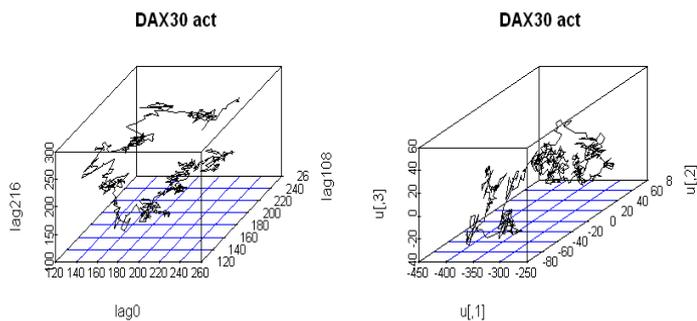


Gráfico 135. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice DAX 30 en la base original y en la base óptima

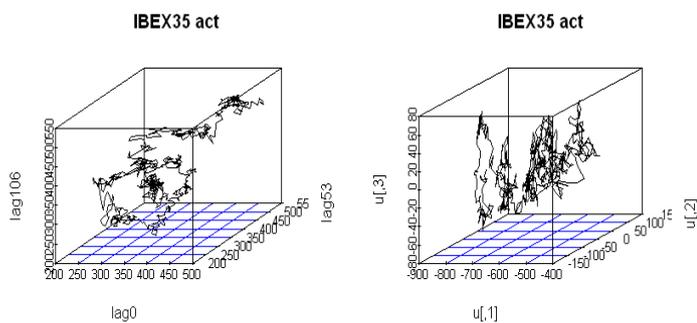


Gráfico 136. Respectivamente, trayectoria de datos más actuales del índice IBEX 35 en la base original y en la base óptima

6.4. Análisis de atractores

6.4.1. Existencia de atractor

Con el fin de distinguir si las series temporales se encuentran inmersas en un atractor, a continuación se comprueba si es posible que exista un atractor y, en el caso de que así sea, si este es único. Para que el sistema presente atractor, el espacio de estados tiene que ser un espacio métrico compacto, lo cual se cumple ya que podemos albergar el conjunto de los estados en un cerrado y acotado y, además, la función de transición debe ser continua, como pasa en el mercado continuo de valores. Para determinar si hay un atractor y sólo uno se aplica el algoritmo que testa si las series son contractivas.¹²

Los gráficos obtenidos tras la aplicación del algoritmo propuesto para comprobar si existe un único atractor en las series temporales financieras actuales se muestran a continuación:¹³

¹²Véanse los apartados 3.1 y 3.2 del presente trabajo para profundizar en el concepto de existencia y unicidad del atractor.

Los pasos de los que consta el algoritmo propuesto para testar la contractividad se hallan en el apartado 5.4.1 del presente trabajo.

¹³En el eje horizontal del primer gráfico aparecen el número de simulaciones hechas, y en el vertical el valor que toma la media de la constante de Lipschitz. Además, en este gráfico aparece una línea horizontal verde en el valor 1, para que resulte más sencillo distinguir visualmente si la media de la constante de Lipschitz supera este valor.

En el eje horizontal del segundo gráfico se indica cuántas veces hay que sumar la desviación típica a la media, y en el vertical los valores que toma la función de densidad normalizada tras la última simulación hecha. Debajo del gráfico se muestra el valor de la media de la constante de Lipschitz tras esta simulación.

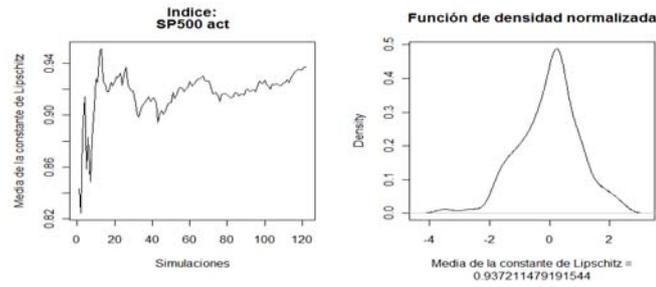


Gráfico 137 Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del Standard & Poor's 500

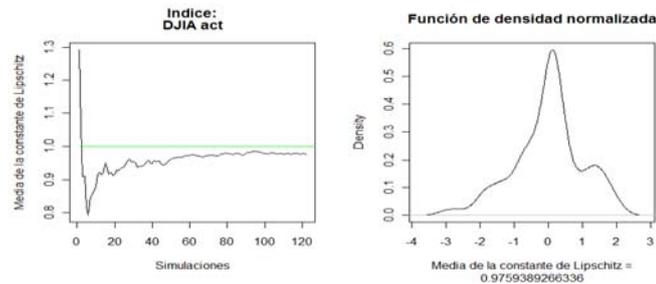


Gráfico 138. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del Dow Jones Industrial Average

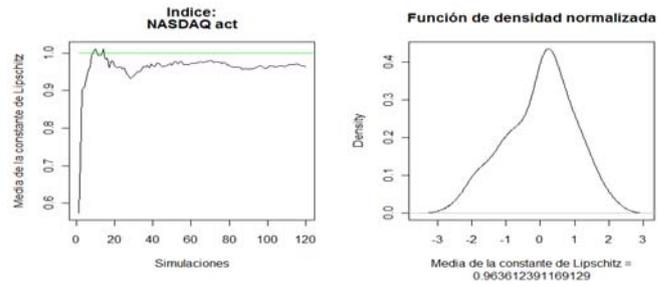


Gráfico 139. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del NASDAQ Composite

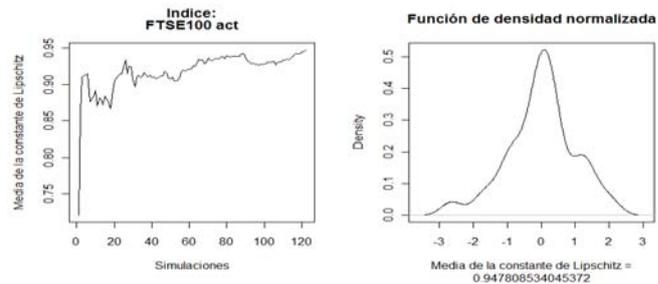


Gráfico 140. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del FTSE 100

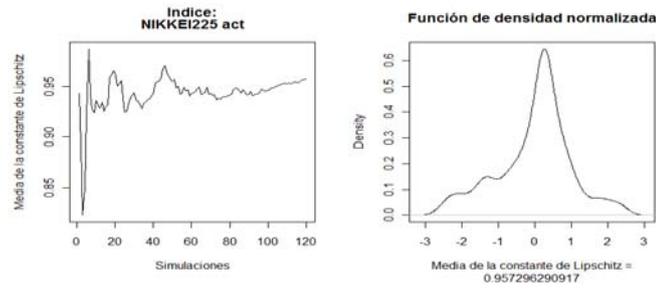


Gráfico 141. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del NIKKEI 225

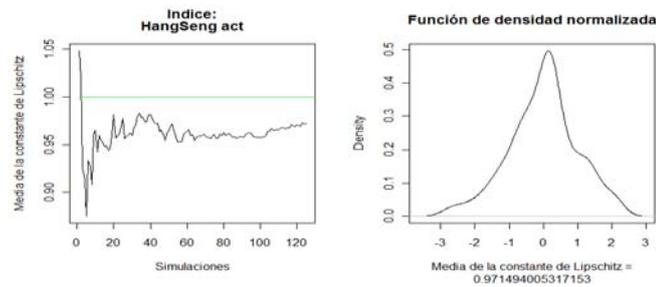


Gráfico 142. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del Hang Seng

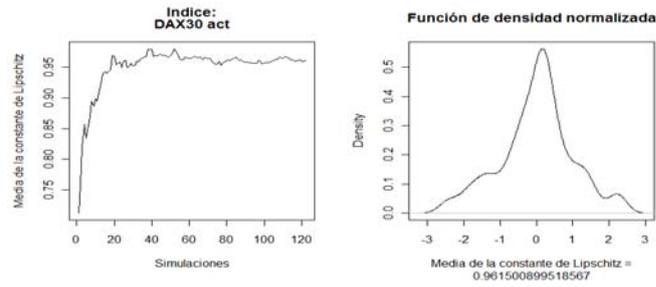


Gráfico 143. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del DAX 30

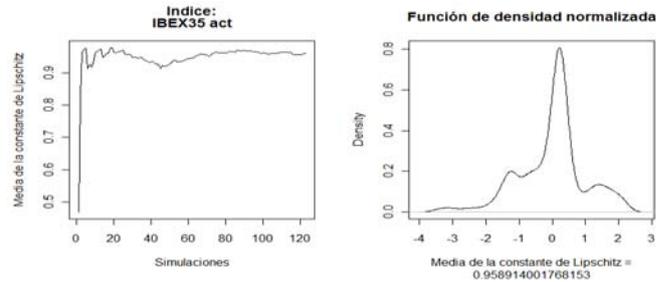


Gráfico 144. Respectivamente, media de la constante de Lipschitz y función de densidad normalizada de la constante correspondiente a la última simulación hecha para la serie con datos más actuales del IBEX 35

Como puede observarse en los anteriores gráficos, todas las series analizadas presentan una constante de Lipschitz inferior a 1, por lo que puede deducirse que las series de los índices analizados presentan un atractor y sólo uno.

6.4.2. Órbitas densas

Tras la aplicación del algoritmo propuesto para la detección de órbitas densas¹⁴ se han obtenido los siguientes gráficos:¹⁵

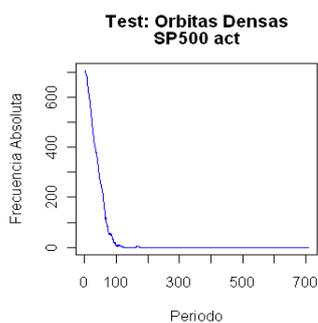


Gráfico 145. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice Standard & Poor's 500

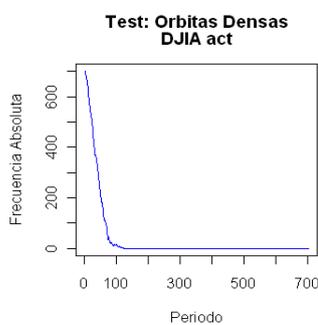


Gráfico 146. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice Dow Jones Industrial Average

¹⁴Véase el apartado 4.5.2 del presente trabajo.

¹⁵En el eje horizontal del gráfico se muestra el periodo orbital considerado, y en el vertical la frecuencia absoluta, que indica los sucesos próximos para cada periodo orbital.

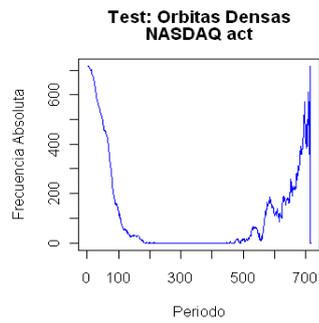


Gráfico 147. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice NASDAQ Composite

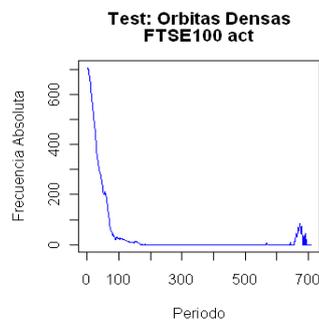


Gráfico 148. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice FTSE 100

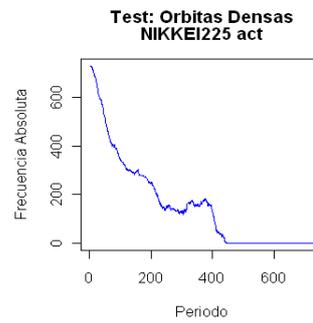


Gráfico 149. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice NIKKEI 225

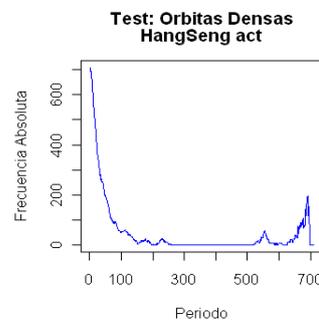


Gráfico 150. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice Hang Seng

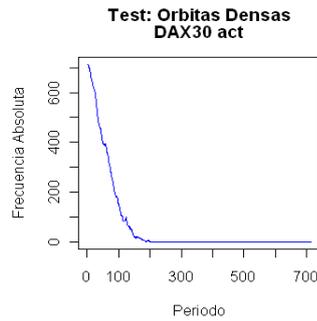


Gráfico 151. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice DAX 30

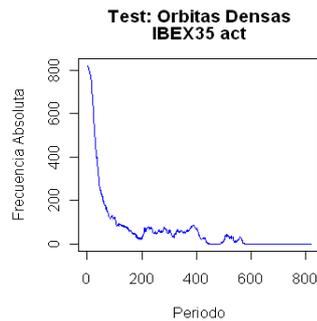


Gráfico 152. Frecuencia absoluta resultante del algoritmo para detectar órbitas densas en la serie con datos más actuales del índice IBEX 35

En los gráficos anteriores puede observarse cómo las series de los índices NASDAQ Composite, FTSE 100, Hang Seng e IBEX 35 presentan órbitas densas. Por el contrario, las de los índices Standard & Poor's 500, Dow Jones Industrial Average, NIKKEI 225 y DAX 30 no muestran una presencia de órbitas densas, dado que una vez la frecuencia absoluta toma el valor cero, permanece en él, por lo que puede deducirse que estas series no se hallan en el atractor en el periodo

considerado.

A continuación se procede a testar la transitividad topológica en las series de los índices con órbitas densas, para ver si ambas condiciones se cumplen, y por ello si puede concluirse que se encuentran en el atractor.

6.4.3. Transitividad topológica

La aplicación del algoritmo propuesto para testar la transitividad topológica¹⁶ da lugar a dos gráficos para cada serie: el primero de ellos muestra las funciones de densidad de las distancias normalizadas del índice (en verde) y de la distribución uniforme (en azul), y el segundo de ellos las funciones de distribución de esas mismas distancias.

Los gráficos resultantes de la aplicación del algoritmo a las series recientes de los índices NASDAQ Composite, FTSE 100, Hang Seng e IBEX 35 son los siguientes:¹⁷

¹⁶Véase el apartado 4.6.1 del presente trabajo.

¹⁷En el eje vertical de los gráficos aparecen los valores que toman las funciones de densidad (primer gráfico) y de distribución (segundo gráfico), mientras que en el horizontal aparecen valores del 0 al 100, que representan el número de intervalos en los que se han dividido las funciones para su representación. Bajo cada gráfico aparecen especificados dentro de un intervalo el valor mínimo y máximo que toman las distancias normalizadas, que se corresponden respectivamente con el valor 0 y 100 del eje horizontal. Asimismo, dividiendo entre 100 la diferencia entre el valor mínimo y máximo de las distancias normalizadas se determina el salto de un intervalo a otro.

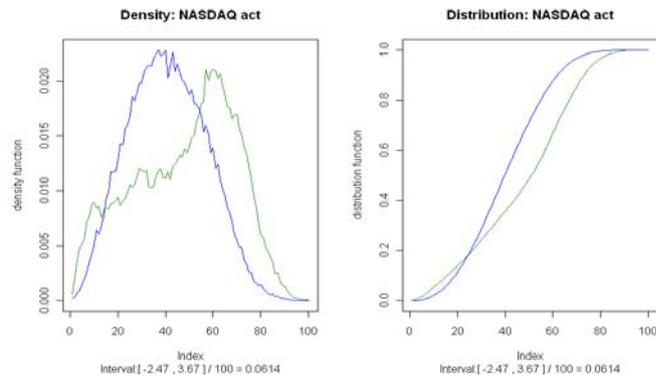


Gráfico 153. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie con datos más actuales del índice NASDAQ Composite y de la distribución uniforme

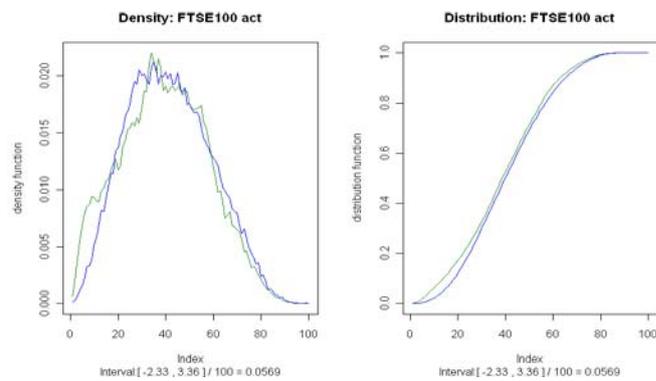


Gráfico 154. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie con datos más actuales del índice FTSE 100 y de la distribución uniforme

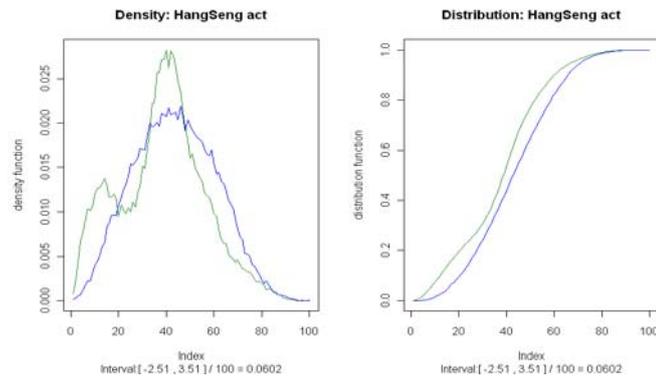


Gráfico 155. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie con datos más actuales del índice Hang Seng y de la distribución uniforme

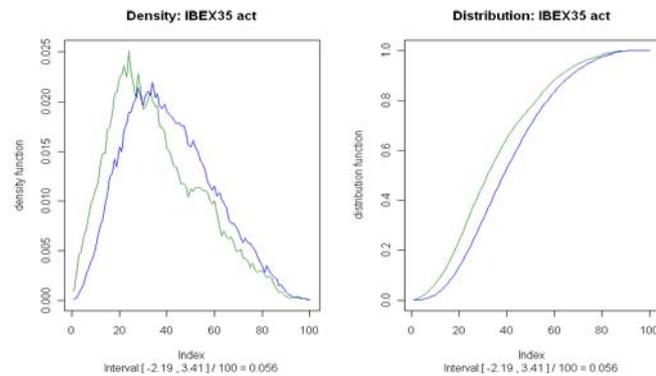


Gráfico 156. Respectivamente, funciones de densidad y funciones de distribución de las distancias normalizadas de la serie con datos más actuales del índice IBEX 35 y de la distribución uniforme

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a las funciones de distribución anteriores:

Índice	Test Kolmogorov-Smirnov
NASDAQ Composite	$D = 0,13; p - value = 0,3667$
FTSE 100	$D = 0,06; p - value = 0,9938$
Hang Seng	$D = 0,08; p - value = 0,9062$
IBEX 35	$D = 0,07; p - value = 0,967$

Tabla 7. Resultados de la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov a las funciones de distribución de las distancias normalizadas de las series financieras con datos más actuales y de la distribución uniforme

En la tabla anterior puede observarse cómo tras la aplicación del test de Kolmogorov-Smirnov el p -value que se obtiene en todas las series es elevado excepto en el caso del NASDAQ Composite.

Por todo lo anterior, tan sólo podemos asegurar que aquellos índices que presentan órbitas densas y son topológicamente transitivos, esto es, el FTSE 100, Hang Seng e IBEX 35, son los que presentan indicios de hallarse en su atractor. Para determinar si estos atractores son caóticos, hará falta testar la sensibilidad a las condiciones iniciales.

6.5. Búsqueda de caos

6.5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Al aplicar el algoritmo propuesto para testar la sensibilidad a las condiciones iniciales¹⁸ a las series temporales anteriores se han obtenido gráficos que muestran en azul los módulos máximos de los valores propios ajustados de la matriz de

¹⁸Véase el apartado 4.4.2 del presente trabajo.

transición, en rojo estos tras el alisado¹⁹ y en verde el valor de la cota 1. Podrá concluirse que existe sensibilidad a las condiciones iniciales si los módulos máximos de los valores propios son superiores a 1.

Los gráficos que se han obtenido tras aplicar este algoritmo han sido los siguientes:²⁰

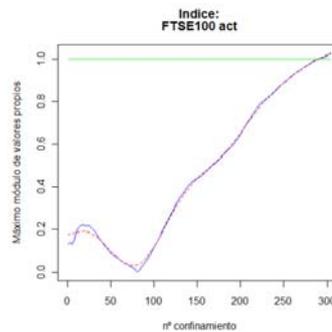


Gráfico 157. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición de la serie con datos más actuales del índice FTSE 100

¹⁹Cabe recordar que, dado que algunos módulos eran muy elevados, se han ajustado los datos, dejando los módulos cuyo valor estuviera entre 0 y 1 sin modificar, y a partir de 1 se ha representado $1 + \ln(\text{módulo})$. Además, como estos módulos presentaban oscilaciones, se han alisado los resultados.

²⁰En el eje horizontal de los gráficos aparece el número de matrices de transición, que coincide con el número de confinamientos, y en el eje vertical el módulo máximo de los valores propios obtenido para cada matriz de transición.

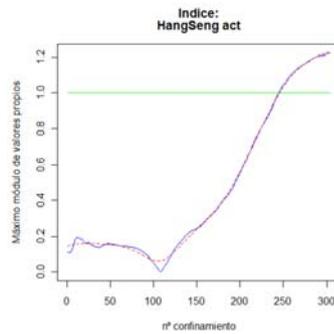


Gráfico 158. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición de la serie con datos más actuales del índice Hang Seng

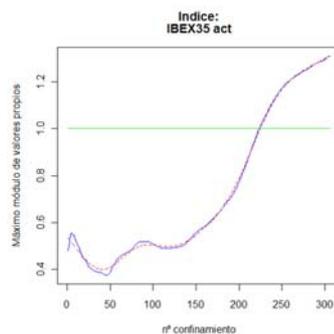


Gráfico 159. Módulos máximos de los valores propios ajustados y alisados de las matrices de transición de la serie con datos más actuales del índice IBEX 35

De los gráficos anteriores puede concluirse que, si bien los índices analizados presentan módulos máximos de los valores propios superiores a 1, lo que los hace sensibles a las condiciones iniciales, lo hacen al final, para matrices de transición de las observaciones más recientes. Eso lleva a considerar que, tras la crisis financiera con origen en el año 2007, estas series o bien salieron del atractor caótico en el que se hallaban anteriormente, para volver a situarse en él recientemente, o bien, sin

salir del atractor, este sufrió un cambio en sus propiedades, dejando de ser caótico durante un lapso de tiempo.

6.6. Resultados

Con la finalidad de observar el impacto que la crisis actual ha tenido en el sistema financiero se ha realizado un análisis del caos en las series financieras objeto de estudio en el periodo comprendido entre el 1 de agosto de 2007 y el 23 de marzo de 2011. Concretamente, se ha pretendido investigar si a consecuencia de la crisis en los mercados las trayectorias se han visto desplazadas fuera de los atractores caóticos en los que se hallaban anteriormente.

Siguiendo el procedimiento establecido en el capítulo anterior, el primer paso ha consistido en hallar la dimensión óptima a considerar para la posterior inmersión de las series, y se ha elegido la de 3 para todas ellas.

A continuación, se han buscado los retardos óptimos de cada índice para la dimensión de inmersión de 3. Estos retardos óptimos se muestran a continuación:

Índice	Retardos óptimos
S&P 500	105
Dow Jones Industrial Average	109
NASDAQ Composite	101
FTSE 100	106
NIKKEI 225	79
Hang Seng	105
DAX 30	108
IBEX 35	53

Tabla 8. Retardos óptimos elegidos

Tras encontrar la dimensión de inmersión y el retardo óptimos, se ha efectuado la inmersión de las series y se han representado las trayectorias de los confinamientos realizados. Asimismo, se ha realizado un análisis espectral singular con el fin de expresar las trayectorias en su base óptima.

El siguiente paso ha consistido en comprobar, a través de la propiedad de la contractividad, que las series presentan un atractor y sólo uno. Después, se ha procedido a analizar si las series temporales se hallaban dentro de los atractores. Para ello, en primer lugar se ha testado la presencia de órbitas densas, llegando a la conclusión de que solamente los índices NASDAQ Composite, FTSE 100, Hang Seng e IBEX 35 muestran poseer órbitas densas en el periodo considerado.

En segundo lugar, para poder determinar si las series de los índices NASDAQ Composite, FTSE 100, Hang Seng e IBEX 35 se hallan en los atractores en este periodo, se ha procedido a testar la transitividad topológica, obteniéndose que esta propiedad no se cumple para el NASDAQ Composite. Por tanto, se ha llegado a la conclusión de que únicamente los índices FTSE 100, Hang Seng e IBEX 35 se encuentran dentro de los atractores.

Por último, se ha analizado la sensibilidad a las condiciones iniciales de las tres series anteriores, con el fin de distinguir si los atractores en los que se mueven sus trayectorias tras el inicio de la crisis siguen siendo de tipo caótico. Las series analizadas han resultado ser sensibles a las condiciones iniciales hacia el final, para las observaciones más recientes. Ello ha llevado a considerar que, como consecuencia de la crisis, o bien estas series han salido de los atractores caóticos en los que se hallaban anteriormente para después volver a ellos, o bien los atractores han sufrido un cambio en sus propiedades durante un tiempo.

Capítulo 7

Conclusiones

La hipótesis de partida del presente trabajo ha sido que la teoría del caos podría explicar el comportamiento impredecible que se observa en los mercados financieros. Con el fin de contrastar esta hipótesis se ha establecido el objetivo general de analizar diversas series temporales financieras desde una perspectiva caótica vía el estudio de atractores. Para lograr este objetivo general se han concretado una serie de objetivos específicos, la consecución de los cuales ha dado lugar a los resultados que se detallan a continuación:

El primer objetivo específico ha sido el de plantear los fundamentos teóricos del concepto de atractor y de caos. En este sentido, se ha estimado necesario empezar por definir un sistema como un conjunto de elementos con una relación orgánica entre sí que da al conjunto un comportamiento de unidad, para poder progresivamente llegar a la definición de sistema caótico, el cual es un sistema determinista no-lineal. El determinismo implica que los estados posteriores evolucionen a partir de los anteriores de acuerdo con una ley fija, mientras que la no-linealidad hace que esta evolución no sea de un modo proporcional o no tenga por qué serlo. Asimismo, se ha visto que los sistemas caóticos se caracterizan por poseer atractores caóticos, y por ello cumplen las propiedades de presencia de

órbitas densas, transitividad topológica y sensibilidad a las condiciones iniciales. Se ha profundizado en el concepto de atractor, entendido como la zona del espacio hacia la que tienden las trayectorias del sistema, y se han detallado las condiciones necesarias para que exista atractor y para que este sea único: que el espacio de estados sea un espacio métrico compacto y que la función de cambio de estado o flujo sea continua y contractiva. Por otro lado, a la hora de establecer la base conceptual necesaria para el posterior análisis, se han definido conceptos como espacio topológico, distancia y espacio métrico, y dimensiones del objeto abstracto, detallando algunos tipos de distancias y de dimensiones empleadas en la metodología propuesta, como por ejemplo la distancia de Hausdorff o la dimensión fractal, entre otras.

Para la consecución del segundo objetivo específico, que ha consistido en realizar una relación de algunos de los test que permiten buscar caos en series temporales, se han clasificado estos instrumentos en varios grupos según la propiedad que testen. En primer lugar, se ha hecho referencia a algunos de los filtros que existen para series temporales, dado que varios de los estudios de la dinámica caótica de los sistemas parten de filtrar los datos. En este sentido, se han enunciado el criterio AIC, que se puede aplicar a la hora de filtrar la dependencia lineal, y como filtros para el ruido el filtraje espectral y el propuesto por Orzesko.¹ En segundo lugar, se han detallado distintos métodos para testar la independencia de los datos, como son la dimensión de correlación, el test BDS y el test Chi-square para patrones ordinales. En tercer lugar, se han señalado dos test para detectar no-linealidades en series temporales: el test de Kaplan² y el test de Theiler.³ A continuación se

¹Orzeszko, W. (2008): *The new method of measuring the effects of noise reduction in chaotic data*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 38, pp. 1355-1368.

²Kaplan, D.T. (1994): *Exceptional events as evidence for determinism*. Physica D, vol. 73, pp. 38-48.

³Theiler, J. et al. (1992): *Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data*.

han enunciado instrumentos destinados a testar las características propias de los sistemas caóticos. Concretamente, para analizar la sensibilidad a las condiciones iniciales se ha desarrollado el concepto de exponente de Lyapunov, especificando distintas formas de obtención del máximo exponente, como el algoritmo de Kantz o los métodos propuestos por Kim y Choe⁴ o Dabrowski,⁵ y se ha hecho referencia al test propuesto por Fernández-Rodríguez y otros,⁶ que se basa en distinguir procedimientos caóticos evaluando la estabilidad del máximo exponente de Lyapunov. Asimismo, se ha desarrollado el test de diferencias cercanas como método para detectar la presencia de órbitas densas. Llegados a este punto, no se ha hallado ningún test comúnmente aceptado para determinar si un sistema es topológicamente transitivo a partir del análisis de una serie de observaciones del mismo, lo cual ha hecho que se estimase necesaria la proposición de un algoritmo para testar esta característica de los sistemas caóticos. Por último, se han enunciado dos test adicionales para la detección de caos en series temporales: el test 0-1, el cual pretende detectar caos a partir del cómputo del ratio de crecimiento de una determinada función, y el test SALI, que trata de distinguir comportamientos caóticos partiendo de una órbita dada y siguiendo la evolución a lo largo del tiempo de dos vectores de desviación inicial distinta.

El tercer objetivo específico ha sido el de proponer una metodología para

Physica D, vol. 58, pp. 77-94.

⁴Kim, B.J.; Choe, G.H. (2010): *High precision numerical estimation of the largest Lyapunov exponent*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, pp. 1378-1384.

⁵Dabrowski, A. (2012): *Estimation of the largest Lyapunov exponent from the perturbation vector and its derivative dot product*. Nonlinear Dynamics, vol. 67, pp. 283-291.

⁶Fernández-Rodríguez, F. et al. (2005): *Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*. Journal of Applied Econometrics, vol. 20, pp. 911-930.

el análisis del caos en series temporales. Siguiendo a Yousefpoor y otros,⁷ se ha considerado que el camino a seguir para tal fin debería ser el de testar las características de los sistemas caóticos: presencia de órbitas densas, transitividad topológica y sensibilidad a las condiciones iniciales. Las dos primeras características implican la presencia de un atractor. Por su parte, la sensibilidad a las condiciones iniciales conlleva el que las trayectorias se muevan de un modo impredecible, como mínimo a medio y largo plazo, dentro del atractor, y que este pueda calificarse de caótico. Así, la metodología que en el presente trabajo se ha concretado para el análisis del caos ha sido el de testar la presencia de un atractor caótico en el sistema. Para tal fin, se han establecido los pasos siguientes:

1. Para poder observar un atractor en series temporales es necesaria una previa inmersión o confinamiento de las mismas, que permite reconstruir el espacio de estados. Por ello se han propuesto dos algoritmos: uno para la elección de la dimensión de inmersión y otro para hallar el tiempo de retardo óptimo con que realizar este confinamiento. El primero de ellos se basa en el teorema de inmersión de Whitney,⁸ que dice que es aconsejable que la dimensión de inmersión sea superior al doble de la dimensión fractal del atractor, mientras que el segundo permite establecer como retardo óptimo aquel con el que la trayectoria realiza la máxima ocupación posible del espacio de estados.
2. Una vez realizada la inmersión, se aplica un análisis espectral singular con el fin de que las trayectorias estén expresadas en su base óptima.
3. Se comprueba si es posible la presencia de atractor en las series temporales analizadas, lo que requiere de un espacio de estados compacto y de una

⁷Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. Applied Mathematics and Computation, vol. 198, pp. 73-91.

⁸Whitney, H. (1936): *Differentiable Manifolds*. The Annals of Mathematics, vol. 37, n° 3, pp. 645-680.

función de cambio de estado continua. Además, se propone un algoritmo para estudiar la contractividad de las series, ya que el cumplimiento de esta propiedad implica que el atractor sea único.

4. Se aplica un algoritmo para testar la presencia de órbitas densas, siguiendo el procedimiento establecido por el test de diferencias cercanas.
5. Se aplica el test propuesto para detectar transitividad topológica en las series. Este test compara la función de distribución de las distancias normalizadas entre puntos de la serie objeto de estudio con la función de distribución de las distancias entre puntos distribuidos uniformemente, obtenidos de una distribución uniforme. La comparación se hace vía el test de Kolmogorov-Smirnov.
6. Una vez se ha comprobado si las series presentan atractor, el siguiente paso consiste en determinar si este es caótico. Para ello se testa la sensibilidad a las condiciones iniciales, a partir de un algoritmo que se basa en el estudio de los valores propios de la matriz de transición o de cambio de estado.

El cuarto objetivo específico ha consistido en aplicar la metodología propuesta a series temporales financieras. En concreto, se ha procedido al análisis del caos en las series formadas por los valores de cierre de algunos de los principales índices bursátiles a nivel mundial y del principal índice español: el Standard & Poor's 500, el Dow Jones Industrial Average, el NASDAQ Composite, el FTSE 100, el NIKKEI 225, el Hang Seng, el DAX 30 y el IBEX 35. El hecho de elegir datos provenientes del mercado continuo de valores ha ido en consonancia con la línea de análisis establecida, dado que, si bien se dispone de observaciones discretas del mercado de valores, este sistema cotiza de un modo continuo, requisito necesario, juntamente con que el de que el espacio de estados sea un espacio métrico compacto, para que pueda existir atractor.

Al aplicar el procedimiento propuesto a las series temporales financieras seleccionadas se han obtenido las siguientes conclusiones:

- Todas las series, excepto la del NASDAQ Composite, dan indicios de hallarse dentro de atractores caóticos entre febrero y julio de 1997. Por su parte, la serie del índice NASDAQ Composite da señales de entrar en su atractor caótico aproximadamente en mayo de 1999.
- El índice NASDAQ Composite muestra una salida del atractor caótico en mayo de 2003, y los índices Dow Jones Industrial Average y Hang Seng en mayo de 2005. Que estas series presenten atractores caóticos implica que, en condiciones normales, sus trayectorias deberían volver a entrar en sus atractores en algún momento.

El hecho de que en el análisis del caos las series se hayan comportado de un modo similar, presentando todas atractores caóticos, permite validar el teorema de Takens en el ámbito financiero en el periodo analizado. Ello posibilita, por un lado, reconocer empíricamente al sistema financiero como sistema, entendido como un conjunto de elementos con una relación orgánica entre sí que da al conjunto un comportamiento de unidad. Por otro lado, el hecho de que se cumpla el teorema de Takens simplifica el análisis del mercado financiero global, ya este teorema dice que es suficiente con estudiar una sola valoración del sistema para conocer el comportamiento del mismo. Así, tomando cualquiera de las series temporales anteriores, y a través de la función de valoración que permite establecer la biyección, se podría confirmar la existencia de atractor caótico en el sistema financiero original, gracias al homeomorfismo existente entre el espacio de estados (el sistema financiero, no observable en su totalidad) y el espacio de inmersión (el conjunto de observaciones confinadas).

El último objetivo específico ha sido el de analizar desde una perspectiva caótica los efectos de la crisis financiera originada en 2007, para comprobar si los anteriores resultados se ven modificados. Las conclusiones obtenidas de este análisis han sido:

- Los índices Standard & Poor's 500, Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite, NIKKEI 225 y DAX 30 no han permanecido en los atractores caóticos tras originarse la crisis. Si bien los índices Dow Jones Industrial Average y NASDAQ Composite se hallaban ya fuera del atractor antes del origen de la crisis, se ha podido deducir que el impacto en los mercados ha sido de tal magnitud que, por un lado, no ha posibilitado a estos índices volver a entrar en su atractor en este periodo y, por otro, ha desplazado a las trayectorias de otros índices fuera del atractor caótico en el que se hallaban.
- Por su parte, tras originarse la crisis los índices FTSE 100, Hang Seng⁹ e IBEX 35 se hallan en atractores que no pueden calificarse como caóticos hasta el final de sus trayectorias, lo que corresponde aproximadamente al primer trimestre del año 2011. Caben dos hipótesis que expliquen tal comportamiento: o bien como consecuencia de la crisis estas series han salido de los atractores caóticos en los que se hallaban anteriormente para después volver a ellos, o bien los atractores han sufrido un cambio en sus propiedades durante un tiempo.

Por lo anterior, puede deducirse que en periodos de crisis financieras con un impacto global, no puede considerarse el teorema de Takens como válido, ya que cada serie se comporta de un modo distinto desde una perspectiva caótica. Ello lleva a concluir que, dado que este teorema no es válido en el ámbito financiero en

⁹Nótese que el índice Hang Seng había salido de su atractor caótico en mayo del 2005, por lo que se deduce que ha vuelto a entrar en un atractor.

épocas de crisis, no es suficiente en estos periodos con estudiar una observación del sistema financiero para entender el comportamiento del mismo.

Aunque una vez situadas dentro de los atractores las trayectorias se vuelven impredecibles a medio plazo y a largo plazo, lo que sí puede predecirse es que, en el caso de que una trayectoria salga de su atractor, más pronto o más tarde volverá a entrar en él. Esto es lo que es de esperar en las trayectorias de los índices Standard & Poor's 500, Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite, NIKKEI 225 y DAX 30, que con la crisis se ha comprobado que han salido del atractor. En futuras líneas de investigación se pretende seguir analizando estas trayectorias para determinar el momento en que vuelvan a entrar en los atractores caóticos.

No se pretende con esta tesis negar la existencia de comportamientos aleatorios en el ámbito financiero. La aparición de este tipo de comportamientos es inevitable ante la imposibilidad de conocer todas las variables o argumentos que afectan al estado del sistema. Nos unimos a las palabras de Fernández Díaz cuando asegura que “la complejidad del universo económico no sólo no merma nuestras posibilidades de conocer y actuar en consecuencia, sino que incluso podría decirse que las aumenta notablemente, dado que, al no estar atrapados por un mecanismo establecido desde el principio, somos libres de explorar futuras trayectorias alternativas. Si aceptamos esta visión, estaríamos identificando los comportamientos caóticos con procesos multiformes, ricos en posibilidades y abiertos a una amplia gama de potenciales explicaciones. Nada se descarta.”¹⁰

En conclusión, la consecución del objetivo general de analizar el caos en series temporales financieras vía el estudio de atractores ha posibilitado validar la hipótesis de partida de que la teoría del caos podría explicar el comportamiento

¹⁰Fernández, A. (2000): *Dinámica caótica en economía (Teoría y aplicaciones)*. McGraw-Hill.

impredecible que se observa en los mercados financieros, pero solo en aquellas épocas en las que no se sufra de crisis financieras con un impacto a nivel global.

Capítulo 8

Bibliografía

Abhyankar, A. et al. (1997): *Uncovering Nonlinear Structure in Real-Time Stock-Market Indexes: The S&P 500, the DAX, the Nikkei 225, and the FTSE-100*. Journal of Business & Economic Statistics, vol. 15, n° 1, pp. 1-14.

Akaike, H. (1981): *Likelihood of a model and information criteria*. IEEE Transactions on Automatic Journal of Econometrics, vol. 16, pp. 3-14.

Arsac, J. (1961): *Transformation de Fourier et Théorie des distributions*. Dunod.

Banach, S. (1932): *Théorie des opérations linéaires*. Monografie Matematyczne, vol. 1.

Barkoulas, J.T. et al. (2012): *A metric and topological analysis of determinism in the crude oil spot market*. Energy Economics, vol. 34, pp. 584-591.

Barkoulas, J.T. (2008): *Testing for deterministic monetary chaos: Metric and topological diagnostics*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 38, pp. 1013-1024.

Barnett, W.A. (2006): *Comments on “Chaotic monetary dynamics with confidence”*. Journal of Macroeconomics, vol. 28, pp. 253-255.

Barnett, W.A. et al. (1997): *A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos*. Journal of Econometrics, vol. 82, pp. 157-192.

Bigdeli, N.; Afshar, K. (2009): *Characterization of Iran electricity market indices with pay-as-bid payment mechanism*. Physica A, vol. 388, pp. 1577-1592.

Brock, W.A. et al. (1987): *A test for independence based on the correlation dimension*. Working Paper, University of Chicago.

Chen, L. (2008): *On the Chaotic Dynamics Analysis of China Stock Market*. Proceedings of the 9th International Conference for Young Computer Scientists, vol. 1-5, pp. 3011-3015.

Çoban, G.; Büyüklü, A.H. (2009): *Deterministic flow in phase space of exchange rates: Evidence of chaos in filtered series of Turkish Lira-Dollar daily growth rates*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 42, pp. 1062-1067.

Dabrowski, A. (2012): *Estimation of the largest Lyapunov exponent from the perturbation vector and its derivative dot product*. Nonlinear Dynamics, vol. 67, pp. 283-291.

Devaney, R.L. (1989): *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley.

Dou, A. (1964): *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Dossat, S.A.

Dugnol, B. et al. (2000): *Notas sobre Geometría Fractal*. Geometría Fractal, Universidad de Oviedo.

Eckmann, J.-P. et al. (1986): *Lyapunov exponents from time series*. Physical Review A, vol. 34, pp. 4971-4979.

Escot, L. (2000): *Dinámica Económica Caótica: Una Aplicación al Estudio del Ciclo y el Crecimiento Económico*. Tesis doctoral.

Espinosa, F. (2001): *Modelización no browniana de series temporales financieras*. Tesis doctoral.

Falconer, I. et al. (2007): *Application of the 0-1 Test for Chaos to Experimental Data*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 6, n° 2, pp. 395–402.

Fernández, A. (2000): *Dinámica caótica en economía (Teoría y aplicaciones)*. McGraw-Hill.

Fernández, A. (1994): *La economía de la complejidad: Economía dinámica caótica*. McGraw -Hill.

Fernández-Rodríguez, F. et al. (2005): *Testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*. Journal of Applied Econometrics, vol. 20, pp. 911-930.

Fraser, A.M.; Swinney, H.L. (1986): *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*. Physical Review A, vol. 33, n° 2, pp. 1134-1140.

Gencay, R.; Dechert, W.D. (1992): *An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n -dimensional unknown dynamical system*. Physica D, vol. 49, pp. 142-157.

Gilmore, C.G. (2001): *An examination of nonlinear dependence in exchange rates, using recent methods from chaos theory*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 139-151.

Gilmore, C.G. (1993): *A new test for chaos*. Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 22, pp. 209-237.

Gimeno, R. (2000): *Análisis Caótico de Series Temporales Financieras de Alta Frecuencia. El Contrato de Futuro sobre el Bono Nocional a 10 años*. Tesis doctoral.

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2009): *On the Implementation of the 0-1 Test for Chaos*. SIAM Journal on applied dynamical systems, vol. 8, pp. 129-145.

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2009): *On the validity of the 0-1 test for chaos*. Nonlinearity, vol. 22, pp. 1367-1382.

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2008): *Comment on "Reliability of the 0-1 test for chaos"*. Physical Review E, vol. 77, 028201.

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2005): *Testing for Chaos in Deterministic Systems with Noise*. Physica D, vol. 212, n° 1-2, pp. 100-110.

Gottwald, G.A.; Melbourne, I. (2004): *A new test for chaos in deterministic systems*. Proceedings of the Royal Society of London A, vol. 460, pp. 603-611.

Grassberger, P.; Procaccia, I. (1983): *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica D, vol. 9, pp. 189-208.

Guégan, D. (2009): *Chaos in economics and finance*. Annual Reviews in Control, vol. 33, pp. 89-93.

Hegger, R. et al. (1999): *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*. Chaos, vol. 9, pp. 413-435.

Hinich, M.J. (1982): *Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series*. Journal of Time Series Analysis, vol. 3, pp. 169-176.

Hu, J. et al. (2005): *Reliability of the 0-1 test for chaos*. Physical Review E, vol. 72, 056207.

Huang, S.-C. et al. (2010): *Chaos-based support vector regressions for exchange rate forecasting*. Expert Systems with Applications, vol. 37, n° 12, pp. 8590-8598.

Iseri, M. et al. (2008): *A model proposal for the chaotic structure of Istanbul stock exchange*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 36, pp. 1392-1398.

Kaplan, D.T. (1994): *Exceptional events as evidence for determinism*. Physica D, vol. 73, pp. 38-48.

Karakasidis, T.E.; Charakopoulos, A. (2009): *Detection of low-dimensional chaos in wind time series*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 41, pp. 1723-1732.

Kennel, M. et al. (1992): *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*. Physical Review A, vol. 45, pp. 3403-3411.

Kim, B.J.; Choe, G.H. (2010): *High precision numerical estimation of the largest Lyapunov exponent*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, pp. 1378-1384.

Kugiumtzis, D.; Aifantis, C. (2004): *Statistical analysis for long term correlations in the stress time series of jerky flow*. Journal of Mechanical Behaviour of Materials, vol. 15, n° 3, pp. 135-147.

Li, T.-Y.; Yorke, J.A. (1975): *Period three implies chaos*. American Mathematical Monthly, vol. 82, pp. 985-992.

Liangyue, C. (1997): *Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series*. Physica D, vol. 110, pp. 43-50.

Liebert, W.; Schuster, H. (1989): *Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series*. Physics Letters A, vol. 142, n° 2, pp. 107-111.

Lim, T.P.; Puthusserypady, S. (2005): *Postprocessing methods for finding the embedding dimension of chaotic time series*. Physical Review E, vol. 72, 027204.

Lorenz, E.N. (1963): *Deterministic non-periodic flows*. Journal of Atmospheric Sciences, vol. 20: pp. 130-141.

Lyapunov, A.M. (1907): *Problème général de stabilité de mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, vol. 9, pp. 203-475.

Marwan, M.C. et al. (2007): *Recurrence plots for the analysis of complex systems*. Physics Reports, vol. 438, pp. 237-329.

Matilla-García, M.; Marín, M.R. (2010): *A new test for chaos and determinism based on symbolic dynamics*. Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 76, pp. 600-614.

Matilla-García, M. (2007): *A non-parametric test for independence based on symbolic dynamics*. Journal of Economic Dynamics & Control, vol. 31, pp. 3889-3903.

Matilla-García, M. (2007): *Nonlinear Dynamics in Energy Futures*. The Energy Journal, vol. 28, nº 3, pp. 7-29.

Matilla-García, M. et al. (2005): *The BDS test and delay time*. Applied Economics Letters, vol. 12, pp. 109-113.

Matilla-García, M. et al. (2004): *Dimension estimation with the BDS-G statistic*. Applied Economics, vol. 36, pp. 1219-1223.

Matilla-García, M. et al. (2004): *A Generalized BDS Statistic*. Computational Economics, vol. 24, pp. 277-300.

McKenzie, M. (2001): *Chaotic behavior in national stock market indices: new evidence from the close return test*. Global Finance Journal, vol. 12, pp. 35-53.

McLeod, A.I.; Li, W.K. (1983): *Diagnostic checking ARMA time series models using squared residuals autocorrelations*. Journal of Time Series Analysis, vol. 4, pp. 269-273.

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press.

Michavila, F. (1986): *Fundamentos de cálculo numérico: Topología métrica*. Reverté, S.A.

Navascués, M.A.; Sebastián, M.V. (2001): *Fórmula fractal de la energía de una señal muestreada*. Margarita Mathematica: Homenaje a J. J. Guadalupe, pp. 37-48.

Nieto, U. (1998): *Historia del tiempo en economía. Predicción, caos y complejidad*. McGraw-Hill.

Nychka, D. et al. (1992): *Finding chaos in noisy systems*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 54, n° 2, pp. 399-426.

Olmedo, E. (2011): *Is there chaos in the Spanish labour market?* Chaos, Solitons & Fractals, vol. 44, pp. 1045-1053.

Orzeszko, W. (2008): *The new method of measuring the effects of noise reduction in chaotic data*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 38, pp. 1355-1368.

Oseledec, V.I. (1968): *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Transactions of the Moskow Mathematical Society, vol. 19, pp. 197-231.

Özer, G.; Ertokatli, C. (2010): *Chaotic processes of common stock index returns: An empirical examination on Istanbul Stock Exchange (ISE)*. African Journal of Business Management, vol. 4, n° 6, pp. 1140-1148.

Paissan, G. (2005): *Métodos de Análisis de Datos Caóticos*. Incertezas experimentales y Teoría de errores, Monografías 2005.

Park, J.Y.; Whang, Y.-J. (2012): *Random walk or chaos: A formal test on the Lyapunov exponent*. Journal of Econometrics, vol. 169, pp. 61-74.

Poincaré, H. (1963): *Ciencia y método*. Espasa-Calpe, 3ª ed.

Reiss, J.D. et al. (2008): *Verification of chaotic behavior in an experimental loudspeaker*. Journal of the Acoustical Society of America, vol. 124, n° 4, pp. 2031-2041.

Resende, M.; Zeidan, R.M. (2008): *Expectations and chaotic dynamics: Empirical evidence on exchange rates*. Economics Letters, vol. 99, pp. 33-35.

Rojo, A.O. (1973): *Álgebra II*. El Ateneo.

Ruelle, D. (1990): *Deterministic chaos: the science and the fiction*. Proceedings of the Royal Society of London A, vol. 427, pp. 241-248.

Schreiber, T.; Schmitz, A. (1996): *Improved surrogate data for nonlinearity tests*. Physical Review Letters, vol. 77, pp. 635-640.

Schuster, H.G. (1988): *Deterministic Chaos: An Introduction*. VCH Verlagsgesellschaft.

Serletis, A.; Shahmoradi, A. (2007): *Chaos, self-organized criticality, and SETAR nonlinearity: An analysis of purchasing power parity between Canada and the United States*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 33, pp. 1437-1444.

Serletis, A.; Shahmoradi, A. (2004): *Absence of chaos and $1/f$ spectra, but evidence of tar nonlinearities, in the Canadian exchange rate*. Macroeconomic Dynamics, vol. 8, pp. 543-551.

Serletis, A.; Shintani, M. (2006): *Chaotic monetary dynamics with confidence*. Journal of Macroeconomics, vol. 28, pp. 228-252.

Serletis, A.; Shintani, M. (2003): *No evidence of chaos but some evidence of dependence in the US stock market*. Chaos, Solitons and Fractals, vol. 17, pp. 449-454.

Shintani, M.; Linton, O. (2004): *Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos*. Journal of Econometrics, vol. 120, pp. 1-33.

Skokos, C. et al. (2004): *Detecting order and chaos in Hamiltonian systems by the SALI method*. Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 37, pp. 6269-6284.

Skokos, C. et al. (2003): *How does the Smaller Alignment Index (SALI) distinguish order from chaos?*. Progress of Theoretical Physics Supplement, n° 150, pp. 439-443.

Skokos, C. et al. (2002): *Smaller Alignment Index (SALI): Detecting order and chaos in conservative dynamical systems*. Proceedings of the 4th GRACM Congress on Computational Mechanics, vol. IV, pp. 1496-1502. Tsahalis.

Soros, G. (2008): *El nuevo paradigma de los mercados financieros. Para entender la crisis económica mundial*. Taurus.

Takens, F. (1981): *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, pp. 366-381. Springer-Verlag.

Theiler, J. (1994): *Two tools to test time series data for evidence of chaos and/or nonlinearity*. Integrative physiological and behavioral science: the official journal of the Pavlovian Society, vol. 29, pp. 211-216.

Theiler, J. et al. (1992): *Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data*. Physica D, vol. 58, pp. 77-94.

Tsay, R.S. (1986): *Nonlinearity tests for time series*. Biometrika, vol. 73, n° 2, pp. 461-466.

Tsonis, A.A.; Elsner, J.B. (1987): *Fractal characterization and simulation of lightning*. Beitrage zur Physik der Atmosphaere (Contributions to Atmospheric Physics), vol. 60, n° 2, pp. 187-192.

Urbanowicz, K. et al. (2004): *Noise reduction in chaotic time series by local projection with nonlinear constraints*. Acta Physica Polonica B, vol. 35, pp. 2175-2197.

Webel, K. (2012): *Chaos in German stock returns - New evidence from the 0-1 test*. Economics Letters, vol. 115, pp. 487-489.

Whang, Y.-J.; Linton, O. (1999): *The asymptotic distribution of nonparametric estimates of the Lyapunov exponent for stochastic time series*. Journal of Econometrics, vol. 91, pp. 1-42.

White, H. (1989): *An Additional Hidden Unit Test for Neglected Nonlinearity in Multilayer Feedforward Networks*. Proceedings of The International Joint Conference on Neural Networks II, pp. 451-455.

Whitney, H. (1936): *Differentiable Manifolds*. The Annals of Mathematics, vol. 37, n° 3, pp. 645-680.

Wiberg, D.M. (1971): *Teoría y problemas de espacio de estado y sistemas lineales*. McGraw-Hill.

Wolf, A. et al. (1985): *Determining Lyapunov exponents from a time series*. *Physica D*, vol. 16, pp. 285-317.

Yamaguti, M. et al. (1997): *Mathematics of Fractals*. American Mathematical Society, serie *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 167.

Yousefpoor, P. et al. (2008): *Looking for systematic approach to select chaos tests*. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 198, pp. 73-91.

Capítulo 9

Anexo: programas

9.1. Programa diseñado para la elección de la dimensión de inmersión

```
#===== Parámetros fundamentales =====  
k<-8 # nº de la serie  
#1=DAX 2=DJIA 3=FTSE 4=HS 5=ibex35 6=NASDAQ 7=NIKKEI 8=SP  
sel<-2 # valores del parámetro "sel"  
# 1=serie inicial; 2=serie actual  
#===== Librerías =====  
library(odesolve)  
library(tseriesChaos)  
library(scatterplot3d)  
#===== Datos =====  
if (sel==1){nomf<-c("DAX", "DJIA", "FTSE", "HS", "ibex35", "NASDAQ",  
"NIKKEI", "SP")  
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series/"),nomf,c(".txt"),sep="")
```

```

inic<-c(3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000)}
if (sel==2){nomf<-c("DAX act","DJIA act","FTSE act","HS act","ibex35
act","NASDAQ act","NIKKEI act","SP act")
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series act/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(1,1,1,1,1,1,1,1)}
#===== Lecturas y parámetros =====
x <- read.table(fich[k])
z <- x[[1]] # copia como un vector numérico a z
v<-z[(length(z)-inic[k]):length(z)]
n <-length(v) # n° de observaciones
nm<-max(v)-min(v) # longitud del intervalo
maxm<-15 # n° máximo de confinamientos a simular
maxd<-100 # máximo retardo a simular
l<-as.integer(log10(nm)/log10(2))+3 # exponente binario
eps<-(nm/(2^l)) # amplitud del intervalo
h<-2^l # n° de intervalos
#===== Hace los confinamientos =====
i2<-0;w<-array(0,dim=c((maxm*maxd),2))
d<-array(0,(maxm*maxd));c<-array(0,(maxm*maxd))
for (i in 2:maxm){for (j in 1:maxd){i2<-i2+1;w[i2,1]<-i;w[i2,2]<-j
# m la dimensión de la inmersión y d es el retardo
u<-embedd(v, m=i, d=j)/eps;lu<-length(u)/i;su<-0
for (j1 in 1:(lu-1)){su<-su+(sum(abs(u[j1+1,]-u[j1,])))}
d[i2]<-log10(su)/log10(h); c[i2]<-((i-(2*d[i2])))}
#===== Plotea =====
par(mfrow=c(1,2))
plot(d[1:i2],main=nomf[k],xlab="n° de iteraciones",ylab="Dimensión Fractal

```

(u")

```

plot(c[1:i2],main=nomf[k],xlab="n° de iteraciones",ylab="m-2u")
linea_1<-array(0,dim=c(i2))
lines(linea_1,type="l",col="green")
}
#===== Final =====

```

9.2. Programa diseñado para la elección del retardo

```

#===== Parámetros fundamentales =====
k<-8 # n° de la serie
#1=DAX 2=DJIA 3=FTSE 4=HS 5=ibex35 6=NASDAQ 7=NIKKEI 8=SP
sel<-2 # valores del parámetro "sel"
# 1=serie inicial; 2=serie actual
sel_1<-1 # valores del parámetro "sel_1"para contraste
# 1=serie original; 2=serie contraste
#===== Librerías =====
library(odesolve)
library(tseriesChaos)
library(scatterplot3d)
library(lattice)
library(cwhmisc)
library(PolynomialF)
#===== Datos =====
if (sel==1){nomf<-c("DAX", "DJIA", "FTSE", "HS", "ibex35", "NASDAQ",
"NIKKEI", "SP")}

```

```

fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000)}
if (sel==2){nomf<-c("DAX act", "DJIA act", "FTSE act", "HS act", "ibex35
act", "NASDAQ act", "NIKKEI act", "SP act")}
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series act/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(1,1,1,1,1,1,1,1)}

#===== Lecturas y parámetros =====
z <- read.table(fich[k])
w <- z[[1]] # copia como un vector numérico a w
n <-3 # dimensión del inmersión
d1 <-120# retardo máximo
if (sel_1==1){v<-w[(length(w)-inic[k]):length(w)]}
if (sel_1==2){v<-c(runif(1500)*1000,rnorm(h-1500)*1000)}
h <-length(v) # h = número de observaciones (dimensión de v)

#===== Algoritmo =====
ang<-array(0,dim=c(d1))# ángulos
indice<-array(0,dim=c(d1))# índices
#..... Confinamientos y cálculo de ángulos .....
for (i3 in 1:d1){y <- embedd(v, m=n, d=i3);h1<-(length(y))/n
for (i in 2:h1){ang[i3]<-ang[i3]+(lengths.angle(y[1,],y[i,]))[[4]]}
ang[i3]<-ang[i3]/(h1-1);indice[i3]<-i3}
#..... Calcula la función de densidad .....
n_ang<-100 # n° de particiones para la densidad de los ángulos
md<-array(0,dim=c(n_ang)) # densidad de los ángulos
ind_den<-array(0,dim=c(n_ang))# índices de la función de densidad
min_ang<-min(ang);max_ang<-max(ang);#print(min_ang);print(max_ang)
esc<-((max_ang-min_ang)/n_ang)

```

```

for (j in 1:i3){d2<-as.integer((ang[j]-min_ang)/esc)
md[d2]<-md[d2]+1};ind_den<-c(1:n_ang)
#..... Ajusta densidad/índice e índice/ángulo .....
orden<-10;coefpol<-array(0,dim=c(orden))
ajuste<-lm(c(md) ~1+c(ind_den)+I(c(ind_den)^2)+I(c(ind_den)^3)
+I(c(ind_den)^4)+I(c(ind_den)^5)+I(c(ind_den)^6)+I(c(ind_den)^7)
+I(c(ind_den)^8)+I(c(ind_den)^9))
for (i in 1:orden){coefpol[i]<-coef(ajuste)[[i]]}
hh<-array(0,dim=c(n_ang))
for (j in 1:n_ang){for (j1 in 1:orden){hh[j]<-hh[j]+coefpol[j1]*(j^(j1-1))};
if(hh[j]<0){hh[j]<-0}}
ang_max<-min_ang+((which.max(hh))*esc) # ángulo máximo
print (paste(c("Ángulo Máximo =",(ang_max)),sep=))
uu<-0;polin<-function(u){for (j1 in 1:orden){uu<-uu+coefpol[j1]*(u^(j1-1))}}
print ("polin=");print (polin(1))
coef_ang<-array(0,dim=c(orden))
ajust_ang<-lm(c(ang) ~1+c(indice)+I(c(indice)^2)+I(c(indice)^3)+I(c(indice)^4)
+I(c(indice)^5)+I(c(indice)^6)+I(c(indice)^7)+I(c(indice)^8)+I(c(indice)^9))
for (i in 1:orden){coef_ang[i]<-coef(ajust_ang)[[i]]}
uu<-0;pol_ang<-function(u){for (j1 in 1:orden){uu<-uu+coef_ang[j1]*(u^(j1-
1))}}
coef_ind<-array(0,dim=c(orden))
ajust_ind<-lm(c(indice) ~1+c(ang)+I(c(ang)^2)+I(c(ang)^3)+I(c(ang)^4)
+I(c(ang)^5)+I(c(ang)^6)+I(c(ang)^7)+I(c(ang)^8)+I(c(ang)^9))
for (i in 1:orden){coef_ind[i]<-coef(ajust_ind)[[i]]}
uu<-0;pol_ind<-function(u){for (j1 in 1:orden){uu<-uu+coef_ind[j1]*(u^(j1-
1))}}

```

```

print("Óptimo Ángulo Máx=");print(pol_ind(ang_max))
#..... Polinomios y raíces.....
x <- polynom();H <- polylist()
raices<-array(0,dim=c(orden-2))
retardos<-array(0,dim=c(orden-2))
calc<-0;n_ret<-0;n_rai_real<-0
H[[1]]<-(coefpol[1]+coefpol[2]*x+coefpol[3]*x^2+coefpol[4]*x^3+coefpol[5]*x^4
+coefpol[6]*x^5+coefpol[7]*x^6+coefpol[8]*x^7+coefpol[9]*x^8+coefpol[10]*x^9)
raic<-solve(deriv(H)) # localiza los puntos críticos
deriv2<-coef(deriv(deriv(H)))
uu<-0;pol_d2<-function(u){for (j1 in 1:(orden-2)){uu<-uu+deriv2[j1]*(u^(j1-
1))}}
for (j in 1:(orden-2)){if (abs(Im(raic[[1]][j]))<10^(-10)){n_rai_real<-n_rai_real+1
raices[n_rai_real]<-Re(raic[[1]][j])}}
for (j in 1:(n_rai_real)){calc<-pol_ind(min_ang+(raices[j]*esc))
if(calc>0&calc<d1&pol_d2(raices[j])<0){n_ret<-n_ret+1;retardos[n_ret]<-
as.integer(calc+.5)}}
print(Retardos Óptimos=");print(paste(c(retardos[1:n_ret])))
#===== Plotea =====
par(mfrow=c(1,2))
#..... Plotea después de cada iteración de la secuencia .....
dang<-seq(min(ang[1:i3]),max(ang[1:i3]),by=.01)
plot(ang[1:i3],ylab="Ángulo medio",xlab="Retardo",main=nomf[k,]);
lines(pol_ang(c(1:d1)),col="red")
plot(hh,main="Frecuencia absoluta",xlab="Partición ángulo",ylab="Frecuencia
absoluta",type="l",col="green",)
#===== Final =====

```

9.3. Programa diseñado para testar la contractividad

```

#===== Parámetros fundamentales =====
l<-8 # n° de la serie
#1=DAX 2=DJIA 3=FTSE 4=HS 5=ibex35 6=NASDAQ 7=NIKKEI 8=SP
sel<-2 # valores del parámetro "sel"
# 1=serie inicial; 2=serie actual
#===== Librerías =====
library(odesolve)
library(tseriesChaos)
library(scatterplot3d)
library(lattice) # para la distancia y ángulo
library(cwhmisc) # para la distancia y ángulo
library(polydect) # para la distancia de Hausdorff
library(robustbase) # para el filtrado
library(MASS) # para el filtrado
library(robfilter) # para el filtrado
library(p spline) # para el alisado
#===== Datos =====
if (sel==1){nomf<-c("DAX", "DJIA", "FTSE", "HS", "ibex35", "NASDAQ",
"NIKKEI", "SP")}
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000)
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(66,59,95,53,89,92,83,99)}

```

```

if (sel==2){nomf<-c("DAX act", "DJIA act", "FTSE act", "HS act", "ibex35
act", "NASDAQ act", "NIKKEI act", "SP act")
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series act/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(1,1,1,1,1,1,1,1)}
inmer<-c(3,3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(108,109,106,105,53,101,79,105)}
#===== Lecturas, parámetros y filtraje =====
z <- read.table(fich[l])
z0 <- z[[1]] # copia como un vector numérico a z0
n <- inmer[l] # dimensión del inmersión
r <- retard[l] # retardo
v <- robust.filter(z0, width=23)# copia y filtrado del vector z0 a v
w0<-v$level # extracción de los datos filtrados
w<-w0[(length(w0)-inic[l]+1):length(w0)]}
h <- length(w) # h es el número de observaciones
#===== Confinamiento =====
y <- embedd(w, m=n, d=r)
k<- length(y)/n # n° de confinamientos
#===== Análisis Espectral Singular =====
x <- array(dim=c(n,n))
x <- t(y) %* %y
ev <- eigen(x,TRUE, only.values = FALSE, EISPACK = FALSE)
val<-ev$val # lista los valores propios
vec<-ev$vec # lista los vectores propios
y<-y %* %vec #cambia la coordenadas
#===== Parámetros para la convergencia de Cauchy =====
nc0<-100 # n° inicial para comprobar la c.C.

```

```

nci<-10 # intervalo final en el debe darse la c.C.
epsil<-10^(-4) # valor de épsilon
eps_max<-2*epsil # asignación inicial del máximo en la c.C. dentro de "nci"
n_iter<-10000 # n° máximo de iteraciones-simulaciones
j<-0 # asignación inicial al contador de iteraciones-simulaciones
indic<-(1:(k-1)) # vector de índices
lypsi<-array(0,dim=c(n_iter))
media_lypsi<-array(0,dim=c(n_iter))
linea_1<-array(1,dim=c(n_iter))
#=====
par(mfrow=c(1,2))
while (j<n_iter | eps_max>epsil){
j<-j+1 # contador
ind0<-sample(indic)
n0<-as.integer(runif(1,1,k))
w0<-array(0,dim=c(n0,n));Tw0<-array(0,dim=c(n0,n))
for (i in 1:n0){w0[i,]<-y[ind0[i],];Tw0[i,]<-y[(ind0[i]+1),]}
ind1<-sample(indic)
n1<-as.integer(runif(1,1,k))
w1<-array(0,dim=c(n1,n));Tw1<-array(0,dim=c(n1,n))
for (i in 1:n1){w1[i,]<-y[ind1[i],];Tw1[i,]<-y[(ind1[i]+1),]}
if (j>nc0){eps_max<-max(mean(lypsi[(j-nci):j]))-min(mean(lypsi[(j-nci):j]))}
lypsi[j]<-(HD(Tw0,Tw1)/HD(w0,w1))
media_lypsi[j]<-mean(lypsi[1:j])
print(j);print (lypsi[j])
print(mean(lypsi[1:j]))
print (—————")

```

```

if (j>4){
plot(media_lypsi[1:j],ylab="Media del Coeficiente Lipchisiano",
xlab="Simulaciones",main=paste(c("Indice:",nomf[1]),type="1")
lines(linea_1,type="1",col="green")
plot(density(lypsi[1:j]))}
}
#===== Final =====

```

9.4. Programa diseñado para testar la presencia de órbitas densas

```

#===== Parámetros fundamentales =====
k<-8 # n° de la serie
# 1=DAX 2=DJIA 3=FTSE 4=HS 5=ibex35 6=NASDAQ 7=NIKKEI 8=SP
sel<-2 # valores del parámetro "sel"
# 1=serie inicial; 2=serie actual
#===== Librerías =====
library(odesolve)
library(tseriesChaos)
library(scatterplot3d)
library(lattice)
library(cwhmisc)
library(PolynomF)
library(lattice)
library(graphics)
#===== Datos =====
if (sel==1){nomf<-c("DAX", "DJIA", "FTSE", "HS", "ibex35", "NASDAQ",

```

9.4. PROGRAMA DISEÑADO PARA TESTAR LA PRESENCIA DE
ÓRBITAS DENSAS

```

“NIKKEI”, “SP”)
fich<-paste(c(“C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series/”),nomf,c(“.txt”),sep=“”)
inic<-c(3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000)
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(66,59,95,53,89,92,83,99)
epsil<-c(2896,3332,1792,8650,5202,1323,7744,402)}
if (sel==2){nomf<-c(“DAX act”, “DJIA act”, “FTSE act”, “HS act”, “ibex35
act”, “NASDAQ act”, “NIKKEI act”, “SP act”)
fich<-paste(c(“C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series act/”),nomf,c(“.txt”),sep=“”)
inic<-c(1,1,1,1,1,1,1,1)}
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(108,109,106,105,53,101,79,105)
epsil<-c(2134,2533,1228,5703,4363,902,5440,381)}
#===== Lecturas y parámetros =====
z <- read.table(fich[k])
w <- z[[1]] # copia como un vector numérico a w
n <-inner[k] # dimensión del inmersión
r <-retard[k] # retardo
epsilon<-(1/5)*epsil[k]
v<-w[(length(w)-inic[k]):length(w)]
h <-length(v) # h es el número de observaciones (dimensión de v)
v<-runif(h,0,epsil[k]*2)# Simulación para una iid
y <- embedd(v,n,r);hy<-(length(y))/n
#dist(y)
#===== Análisis Espectral Singular =====
x <- array(dim=c(n,n))
x <- t(y) %* %y

```

```

ev <- eigen(x,TRUE, only.values = FALSE, EISPACK = FALSE)
val<-ev$val # lista los valores propios
vec<-ev$vec # lista los vectores propios
y<-y %*% vec #cambia la coordenadas
#===== Algoritmo =====
vecindad<-array(0,dim=c(hy))
dens_vec<-array(0,dim=c(hy))
pr_vecindad<-array(0,dim=c(hy))
n_vecindad<-array(0,dim=c(hy)) # reconstrucción de la vecindad
sum_ind<-0
for (i3 in 1:(hy-1)){print (c(i3))
for (i in 1:(hy-i3)){d<-1
for (j in 1:n){if (abs(y[i,j]-y[i+i3,j])>epsilon){d<-0}}
vecindad[i3]<-vecindad[i3]+d}
sum_ind<-sum_ind+(hy-i3)
pr_vecindad[i3]<-vecindad[i3]/(hy-i3)
n_vecindad[i3]<-pr_vecindad[i3]*(hy-1)}
xic<-0
dens_vec<-vecindad/sum_ind
#pr<-sum(vecindad)/sum_ind
pr<-sum(n_vecindad)/((hy-1)^2)
media<-mean(n_vecindad) # media
xic<-sum((n_vecindad-media)^2)
xic<-xic/(h*pr*(1-pr))
print (c("Valor Xi_Cuadrado=",xic))
chisq.test(n_vecindad)
plot (n_vecindad,type="l",main=c("Test: Orbitas Densas",nomf[k]),

```

```
xlab="Periodo",ylab="Frecuencia Absoluta",col="blue")
#===== Final =====
```

9.5. Programa diseñado para testar la transitividad topológica

```
#===== Parámetros fundamentales =====
l<-8 # n° de la serie
# 1=DAX 2=DJIA 3=FTSE 4=HS 5=ibex35 6=NASDAQ 7=NIKKEI 8=SP
sel<-2 # valores del parámetro "sel"
# 1=serie inicial; 2=serie actual; 3=conglomerado
#===== Librerías =====
library(odesolve)
library(tseriesChaos)
library(scatterplot3d)
library(lattice)
library(cwhmisc)
library(stats)
#===== Datos =====
if (sel==1){nomf<-c("DAX", "DJIA", "FTSE", "HS", "ibex35", "NASDAQ",
"NIKKEI", "SP")
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000)
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(66,59,95,53,89,92,83,99)}
if (sel==2){nomf<-c("DAX act", "DJIA act", "FTSE act", "HS act", "ibex35
act", "NASDAQ act", "NIKKEI act", "SP act")
```

```

fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series act/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(1,1,1,1,1,1,1)}
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(108,109,106,105,53,101,79,105)}
#===== Lecturas y parámetros =====
z <- read.table(fich[l])
w <- z[[1]] # copia como un vector numérico a w
n <-inner[l] # dimensión del inmersión
r <-retard[l] # retardo
v<-w[(length(w)-inic[l]):length(w)]
h <-length(v) # h es el número de observaciones (dimensión de v)
tit_1<-nomf[l] # título de la serie
#===== Confinamiento =====
y <- embedd(v/sqrt(h), m=n, d=r)
k<- length(y)/n # n° de confinamientos
#===== Análisis Espectral Singular =====
w <- array(dim=c(n,n))
w <- t(y) %* %y
ev <- eigen(w,TRUE, only.values = FALSE, EISPACK = FALSE)
val<-ev$val # lista los valores propios
vec<-ev$vec # lista los vectores propios
u<-y %* %vec #cambia la coordenadas
#===== Serie de contraste =====
u_u<-array(0,dim=c(k,n))
for (i in 1:n){ mx<-max(u[,i]);mn<-min(u[,i]);u_u[,i]<-runif(k,mn,mx)}
if (sel==3){u<-u_u}
#===== Análisis de la transitividad =====

```

```

#..... Definiciones .....
i2<-0 # Reset del puntero
ind_per<-sample(c(1:k)) # índice permutado=ind_per
u_p<-array(dim=c(k,n))
up_u<-array(dim=c(k,n)) #uniforme
d<-as.integer(((k*k)/2)-k)
mod<-array(0,dim=c(d))# distancias
mod_u<-array(0,dim=c(d)) # distancias dist.uniforme
#..... Coloca el conglomerado .....
por_con<-20 # % de puntos en el conglomerado
if (sel==3){n_congl<- as.integer(k*por_con/100)# n° de conglomerados
mx<-max(u[,,]);mn<-min(u[,,])
for (j in 1:n_congl){for (i in 1:n){u_u[j,i]<-c(((mx+mn)/2)+(rnorm(1)))}}
}
#..... Distribución uniforme de la serie .....
for (i in 1:k){for (j in 1:n){
u_p[i,j]<-u[ind_per[i],j];up_u[i,j]<-u_u[ind_per[i],j]}
#u_p #vector u() permutado por ind_per
#..... Secuenciación .....
mc<-100 # amplitud del intervalo
d1<-(k/mc); if (d1!=as.integer(d1)){d1<-as.integer(d1)+1}
m_c<-array(0,dim=c(2,d1))
m_c[1,]<-seq(1,k,by=mc);for (j in 1:(d1-1)){m_c[2,j]<-m_c[1,(j+1)]-1}
m_c[2,j+1]<-k
#..... Cálculo de las distancias .....
n_par<-100 # n° de particiones(para la f.densidad)
eps<-(-5) # épsilon para la convergencia de Cauchy
    
```

```

c_mod<-array(1,dim=c(n_par)) # copia de d_mod para convergencia
d_mod<-array(0,dim=c(n_par)) # frecuencias relativas = función de densidad
i3<-0
if ((sum((c_mod-d_mod)^2))>(10^eps)){i3<-i3+1;if(i3<d1){
for (i in m_c[1,i3):(m_c[2,i3])){
for (i1 in (i+1):k){mod[i2+1]<-sqrt(sum((u_p[i,]-u_p[i1,])^2))
mod_u[i2+1]<-sqrt(sum((up_u[i,]-up_u[i1,])^2))
i2<-i2+1}
}
#..... Ajuste de las funciones de densidad .....
den_mod<-density(mod[1:i2])
den_mod_u<-density(mod_u[1:i2])
#..... Cálculo las funciones de densidad .....
dmod<-seq(0,i2)
n_mod<-array(0,dim=c(i2)) # para la serie normalizada
n_mod_u<-array(0,dim=c(i2)) # para la serie de contraste
d_mod_u<-array(0,dim=c(n_par))# para la serie de contraste
c_mod<-d_mod # copia antes, para la convergencia
n_mod<-(mod[1:i2]-mean(mod[1:i2]))/sqrt(var(mod[1:i2])) # normalización de
las distancias
s_mod<-(max(n_mod[1:i2])-min(n_mod[1:i2]))/n_par
d_mod<-table(factor(cut(n_mod[1:i2],b=min(n_mod[1:i2])+s_mod*(0:n_par))))/i2
n_mod_u<-(mod_u[1:i2]-mean(mod_u[1:i2]))/sqrt(var(mod_u[1:i2])) #nor-
malización de las distancias
s_mod_u<-(max(n_mod_u[1:i2])-min(n_mod_u[1:i2]))/n_par
d_mod_u<-table(factor(cut(n_mod_u[1:i2],
b=min(n_mod_u[1:i2])+s_mod_u*(0:n_par))))/i2

```

```

}}
for (j in 1:n_par){ if (is.na(d_mod_u[j])== "TRUE"){d_mod_u[j]<-0}
if (is.na(d_mod[j])== "TRUE"){d_mod[j]<-0}}
#===== Plotea =====
op<-par(mfrow=c(1,2))
#sc<-scatterplot3d(u,type="l",main=paste("Serie:",nomf[l]))
#sc$points3d(u,pch=".")
t1<-as.integer(min(n_mod[])*100)/100;t3<-as.integer(max(n_mod[])*100)/100
t2<-as.integer(min(n_mod_u[])*100)/100;t4<-as.integer(max(n_mod_u[]
*100)/100
t5<-min(t1,t2) ; t6<-max(t3,t4)
if (max(d_mod[])>max(d_mod_u[])){
plot (d_mod[],type="n",ylab="density function",main=paste("Density:",tit_1),
sub=c(paste("Interval:["t5, ",",t6,"] /",n_par,-",(t6-t5)/n_par)))}else
{plot (d_mod_u[],type="n",ylab="density function",main=paste("Density:",
tit_1),sub=c(paste("Interval:["t5, ",",t6,"] /",n_par,-",(t6-t5)/n_par))
)} #para imponer las escalas
lines (d_mod[],type="l",col="forestgreen")
lines (d_mod_u[],type="l",col="blue")
#===== Funciones de distribución y test de Kolmogorov-Smirnov =====
dis_0<-array(0,dim=c(n_par)) # inicialización de la 1ª distr.de frecuencias
dis_1<-array(0,dim=c(n_par)) # inicialización de la 2ª distr.de frecuencias
epsil<-(-5) # épsilon para la convergencia
dis_0[1]<-d_mod[[1]];dis_1[1]<-d_mod_u[[1]]
for (j in 2:n_par){dis_0[j]<-dis_0[[j-1]]+d_mod[[j]]
dis_1[[j]]<-dis_1[[j-1]]+d_mod_u[[j]]
if (abs(dis_0[[j]]-1)>10^(epsil)){d0<-j}

```

```

if (abs(dis_1[[j]]-1)>10^(epsil)){d3<-j}
d4<-min(d0,d3)
plot (dis_0,type="l",col="forestgreen",ylab="distribution function",main=paste
("Distribution:",tit_1),sub=c(paste("Interval:[",t5," ",t6,"] /",n_par,"-",
(t6-t5)/n_par)))
lines (dis_1,col="blue")
a<-dis_0[1:d4]
b<-dis_1[1:d4]
test_KS<-ks.test(a,b) # test de Kolmogorov-Smirnov
test_KS
#===== Final =====

```

9.6. Programa diseñado para testar la sensibilidad a las condiciones iniciales

```

#===== Parámetros fundamentales =====
k<-8 # n° de la serie
# 1=DAX 2=DJIA 3=FTSE 4=HS 5=ibex35 6=NASDAQ 7=NIKKEI 8=SP
sel<-2 # valores del parámetro "sel"
# 1=serie inicial; 2=serie actual
#===== Librerías =====
library(odesolve)library(tseriesChaos)
library(scatterplot3d)
library(cwhmisc)
library(lattice)
library(PolynomF)
library(pspline) # para el alisado

```

9.6. PROGRAMA DISEÑADO PARA TESTAR LA SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES

```
#===== Datos =====
if (sel==1){nomf<-c("DAX", "DJIA", "FTSE", "HS", "ibex35", "NASDAQ",
"NIKKEI", "SP")
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000)
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(66,59,95,53,89,92,83,99)}
if (sel==2){nomf<-c("DAX act", "DJIA act", "FTSE act", "HS act", "ibex35
act", "NASDAQ act", "NIKKEI act", "SP act")
fich<-paste(c("C:/Users/Portatil Hp/Desktop/series act/"),nomf,c(".txt"),sep="")
inic<-c(1,1,1,1,1,1,1,1)}
inner<-c(3,3,3,3,3,3,3,3)
retard<-c(108,109,106,105,53,101,79,105)}
#===== Lecturas y parámetros =====
z <- read.table(fich[k])
x <- z[[1]] # copia como un vector numérico a x
n <- inner[k] # dimensión del inmersión
r <- retard[k] # retardo
v<-x[(length(x)-inic[k]):length(x)]
h0 <-length(v) # n° de observaciones
#===== Confinamiento =====
y <- embedd(v, m=n, d=r)
h<- length(y)/n # n° de confinamientos
#===== Análisis Espectral Singular =====
w <- array(dim=c(n,n))
w <- t(y) %* %y
ev <- eigen(w,TRUE, only.values = FALSE, EISPACK = FALSE)
```

```

val<-ev$val # lista los valores propios
vec<-ev$vec # lista los vectores propios
u<-y %* %vec #cambia la coordenadas
#===== Cálculos =====
m<-0
A<-array(0,dim=c(n,n))
AI<-array(0,dim=c(n,n))
AF<-array(0,dim=c(n,n))
B<-array(0,dim=c((h-n+1),n))
C<-array(0,dim=c((h-n+1),n))
VAPS<-array(0,dim=c((h-n-1),n))
Max_VAPS<-array(0,dim=c((h-n-1)))
LOGV<-array(0,dim=c((h-n-1)))
linea_1<-array(0,dim=c((h-n-1)))
for (j in 1:(h-n+1)){linea_1[j]<-1}
for (i in 1:(n-1)){B[i,]<-u[i,];C[i,]<-u[(i+1),]}
for (i in n:(h-n+1)){B[i,]<-u[i,];C[i,]<-u[(i+1),]}
A<-(t(C) %* %B) %* %((t(B) %* %B)^(-1))
ev <- eigen(A,TRUE, only.values = FALSE, EISPACK = FALSE)
m<-m+1;VAPS[m,]<-ev$val # lista los valores propios
for (j in 1:n){if (abs(VAPS[m,j])<1){print (m);print (VAPS[m,]);print ()}}
Max_VAPS[m]<-max(abs(VAPS[m,]))
if (Max_VAPS[m]>=1){LOGV[m]<-(1+log(Max_VAPS[m]))}
if (Max_VAPS[m]<1){LOGV[m]<-(Max_VAPS[m])}
}
#===== Plotea =====

```

9.6. PROGRAMA DISEÑADO PARA TESTAR LA SENSIBILIDAD A LAS
CONDICIONES INICIALES

```
plot(LOGV,xlab="n° confinamiento",ylab="Máximo módulo de valores pro-  
pios",main=paste(c("Indice:",nomf[k])),type="n")  
alisado.spl <- sm.spline((1:m),LOGV)  
lines(alisado.spl,col="blue")  
lines(sm.spline((1:m),LOGV, df=10), lty=2, col = red")  
lines(linea_1,type="l",col="green")  
lines(-linea_1,type="l",col="blue")  
#===== Final =====
```