

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

**Realització d'una calculadora
d'eclipsis i aplicacions**

Marc Capellades Subirana

Director: Daniel Pérez Palau
Realitzat a: Departament de Matemàtica
Aplicada i Anàlisi. UB
Barcelona, 30 de juny de 2015

Abstract

This work makes a study of eclipses, in particular solar eclipses, and how to obtain various data of an eclipse.

Before it does a short introduction to astronomy, particularly the study of the positions of the stars and their movements. This allows us to better understand the movements of the Sun, the Earth and the Moon, the three objects involved in the eclipses studied.

Finally we end with a chapter where we explain the implementation of what we have studied using events generated by JPL (Jet Propulsion Laboratory). Obtaining various data eclipses. Taking advantage of programming we are able to determine data with better accuracy.

Resum

Aquest treball fa un estudi dels eclipsis, en particular dels eclipsis solars i com obtenir les diferents dades d'un eclipsi.

Abans és fa una petita introducció de l'astronomia, en particular de l'estudi de les posicions dels astres i dels seus moviments. Així ens permet conèixer millor els moviments del Sol, la Terra i la Lluna, els tres cossos que intervenen en els eclipsis estudiats.

Finalment acabem amb un capítol on expliquem la implementació de tot el que hem estudiat mitjançant l'ús d'efemèrides generades pel JPL (Jet Propulsion Laboratory). Obtenint les diverses dades d'eclipsis. Aprofitant que amb la programació som capaços de determinar dades amb millor precisió.

Índex

1	Introducció	1
2	Fonaments matemàtics	2
2.1	Polinomis de Txebitxev	2
2.2	Integradors numèrics	4
3	Introducció a l'astronomia	6
3.1	L'esfera celeste	6
3.2	El Sol, i la Lluna.	8
3.2.1	El Sol.	8
3.2.2	La Lluna	8
3.3	Sistemes de coordenades	9
3.3.1	Coordenades horitzontals i horàries	10
3.3.2	Coordenades equatorials i eclíptiques	12
3.4	Terra	13
3.4.1	Coordenades geogràfiques	14
4	Mecànica Celeste	15
4.1	Lleis de l'univers	15
4.1.1	Lleis de Kepler	15
4.1.2	Tres lleis de Newton	16
4.1.3	Llei de la gravitació universal	16
4.2	Elements d'una òrbita	20
4.3	Problema dels N-cossos	20
5	Eclipsis	23
5.1	Introducció	23
5.2	Eclipsi solar	24
5.2.1	Quan apareix un eclipsi solar?	24
5.2.2	Saros	26
5.2.3	Equacions fonamentals	27
5.2.4	Dades generals d'un eclipsi	32
5.2.5	Dades d'un eclipsi en un lloc d'observació	37
5.3	Eclipsi lunar.	40

6	Construcció d'una calculadora d'eclipsis	41
6.1	Posicions del Sol, la Lluna, i la Terra	41
6.1.1	Efemèrides del JPL	41
6.2	Calculadora d'eclipsis	43
7	Conclusions	50
8	Annex	52

1 Introducció

El projecte

L'objectiu del treball és calcular quan hi ha eclipsis solars i lunars, així com extreure la màxima informació possible: quan comença i quan acaba l'eclipsi, el tipus d'eclipsi, els punts on és observat l'eclipsi, Per fer-ho serà necessari saber les posicions dels astres que intervenen: el Sol, la Terra, i la Lluna. Per això farem un petit estudi de com es posicionen els cossos en el cel, i dels seus moviments.

Després, al poder modelar els eclipsis de manera geomètrica. Veurem com a partir de la geometria i una mica d'anàlisi matemàtic obtindrem dades molt aproximades d'un eclipsi. Per la geometria serà important, sobretot, la trigonometria, les rectes, les circumferències i les esferes.

El càlcul de les dades dels eclipsis el fem de manera teòrica, per veure com, sense ordinadors és possible obtenir dades d'eclipsis de manera senzilla. I acabarem calculant-les de forma pràctica, mitjançant l'ús de programari propi.

Al final acabarem sabent quan hi haurà un eclipsi i algunes dades de l'eclipsi. Sent els eclipsis un fet excepcional que, des de l'antiguitat, moltes civilitzacions volien predir. Sobretot per causes divines, quan el cel era considerat diví al tenir menys coneixement físic de l'univers. Pel fet que si dos cossos celestials coincideixen, era considerat de bon auguri o mal auguri. Sent els eclipsis solars extraordinaris pel fet de que els radis aparents del Sol i la Lluna coincideixen a vegades. Enfosquin parts de la Terra, i de vegades deixant totalment a les fosques algun lloc durant aproximadament un minut.

Estructura de la Memòria

Abans d'entrar en la matèria, comencem parlant de les eines matemàtiques que ens seran útils per calcular i predir els moviments dels astres. Després el treball és desglossa en quatre parts:

- L'estudi de les posicions dels astres, més concretament, dels tres que intervenen en els eclipsis que volem estudiar.
- L'estudi del moviment celeste.
- L'estudi dels eclipsis de forma teòrica.
- Com crear una calculadora que permeti calcular les dades d'un eclipsi.

2 Fonaments matemàtics

En aquest capítol, introduïm els resultats matemàtics que seran utilitzats en capítols posteriors. Sobretot, en la part de la mecànica celeste.

2.1 Polinomis de Txebitxev

Definició 2.1. *La interpolació polinòmica consisteix en aproximar una funció continua o un conjunt de punts, a partir d'un polinomi. En el cas d'un conjunt de punts, es busca un polinomi que passi per tots ells.*

Observació 1. Efecte Runge

Quan en una aproximació continua s'agafen punts equidistants, l'error, utilitzant la norma $\|\cdot\|_\infty$, pot augmentar quan augmentem el grau del polinomi interpolador.

Per exemple, si s'interpolava la funció $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ respecte punts equidistants en l'interval $[-1, 1]$. Aleshores en els extrems de l'interval s'observa com l'error de la interpolació creix respecte el grau del polinomi interpolador.

Uns dels polinomis més utilitzats per la interpolació polinòmica són els polinomis de Txebitxev. Ja que, les seves arrels minimitzen amb norma $\|\cdot\|_\infty$ l'aproximació d'una funció continua en l'interval $[-1, 1]$, arreglant l'efecte Runge.

Definició 2.2. Polinomis de Txebitxev: $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$, $\forall x \in [-1, 1]$. Està ben definit, per ser la funció $\arccos$ bijectiva en $[-1, 1]$.

Proposició 1. $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x)$ ($j > 1$)

Demostració (inducció): $T_0(x) = \cos(0) = 1$, $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$,

$$\begin{aligned} T_{j+1}(x) &= \cos((j+1) \arccos x) = \\ &= \cos(j \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(j \arccos x) \sin(\arccos x) = \\ &= T_j(x)x + \sin(j \arccos x) \sin(-\arccos x) = \\ &= xT_j(x) - \cos((j-1) \arccos x) + \cos(j \arccos x) \cos(-\arccos x) = \\ &= 2xT_j(x) - T_{j-1}(x) \end{aligned}$$

Els següents resultats es poden observar fàcilment a partir de la definició 2.2 i la proposició 1.

Corol·lari 1. *El coeficient de x^n pel polinomi T_n és 2^{n-1}*

Corol·lari 2. *T_n té n zeros reals, tots a $[-1, 1]$ donats per $x_k = \cos(\frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2})$, $k = 0, \dots, n-1$, i s'anomenen les abscisses de Txebitxev.*

Corol·lari 3. *$T_n(x) = \pm 1$ pels valors $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ $k \in \{0..n\}$.*

Proposició 2. Sigui $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ un producte escalar entre el conjunt de funcions contínues a l'interval $[-1, 1]$. Aleshores, els polinomis de Tchebitchev són ortogonals entre ells.

Demostració:

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\cos(i \arccos t) \cos(j \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(is) \cos(js)}{\sin s} (-\sin s) ds,$$

on hem fet el canvi $t = \cos s$. Aleshores tenim que

$$\langle T_i, T_j \rangle = - \int_{\pi}^0 \cos(is) \cos(js) ds = \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 (\cos((i+j)s) + \cos((i-j)s)) ds$$

utilitzant que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Finalment, tenim que

$$\langle T_i, T_j \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} [s + s]_0^{\pi} = \pi, & \text{si } i = j = 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((i+j)s)}{i+j} + s \right]_0^{\pi} = \pi/2, & \text{si } i = j \neq 0 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((i+j)s)}{i+j} + \frac{\sin((i-j)s)}{i-j} \right]_0^{\pi} = 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Per tant, $\langle T_i, T_j \rangle = 0$, si $i \neq j$.

Proposició 3. $2^{1-n}T_n$ minimitza $\|\cdot\|_{\infty}$, pel conjunt

$$M_n = \{\text{polinomis monics de grau } n \text{ en l'interval } [-1, 1]\}.$$

Demostració: Tenim que $\|2^{1-n}T_n\|_{\infty} = 2^{1-n}$ per la definició 2.2 i $2^{1-n}T_n \in M_n$ pel corol·lari 1. Suposem que existeix un polinomi $p_n \in M_n$ tal que $|p_n(x)| \leq 2^{1-n} \forall x \in [-1, 1]$.

Siguin x_k $k \in 0, \dots, n$ tals que $T_n(x_k) = (-1)^k$ donats al corol·lari 3. Aleshores

$$\begin{cases} p_n(x_k) \leq 2^{1-n}T_n(x_k), & \text{si } k \text{ és parell} \\ p_n(x_k) \geq 2^{1-n}T_n(x_k), & \text{si } k \text{ és senar} \end{cases}$$

per tant $r_n(x) = p_n(x) - 2^{1-n}T_n(x)$ té n canvis de signe. I com que el grau(r_n) $< n$, tenim que $r_n = 0 \Rightarrow p_n = 2^{1-n}T_n(x)$.

Aleshores per la proposició anterior, tenim que, les abscisses de Tchebitchev minimitzen amb norma $\|\cdot\|_{\infty}$ l'interpolació d'una funció contínua g a l'interval $[-1, 1]$. Això és a causa de que l'error d'interpolació amb grau n és

$$\frac{g^{n+1}(x)}{(n+1)!} (x-x_0) \cdots (x-x_n), \quad x \in [-1, 1].$$

I per tant, $(x-x_0) \cdots (x-x_n)$ es minimitza quan són les abscisses de Tchebitchev.

Proposició 4. Fent el canvi $y = \frac{(b-a)x+a+b}{2}$, passem de l'interval $[-1, 1]$, a l'interval $[a, b]$

Per a més informació vegeu [1].

2.2 Integradors numèrics

Per equacions diferencials ordinàries, s'utilitzen diversos integradors numèrics. Un dels més coneguts són els mètodes de Runge-Kutta. La idea és aproximar mitjançant series de Taylor en t_0 al voltant de la c.i. . Sigui $\dot{y} = \frac{d}{dt}y = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ l'equació diferencial ordinària que volem calcular, aplicant series de Taylor tindrem que

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) + \frac{f(t_0, y_0)^{(1)}}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f(t_0, y_0)^{(2)}}{3!}(t - t_0)^3 + \dots,$$

on $f(t_0, y_0)^{(i-1)} = \frac{d^i}{dt^i}y(t_0, y_0)$.

Sigui h el pas de temps que volem, tindrem que,

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h + \frac{f(t_0, y_0)^{(1)}}{2!}h^2 + \frac{f(t_0, y_0)^{(2)}}{3!}h^3 + \dots.$$

Per tal de trobar una aproximació a temps h ens cal conèixer els valors de $f(t_0, y_0)^{(i)}$ $i = 1, \dots, n - 1$ obtenint un mètode d'ordre n per resoldre equacions diferencials ordinàries amb condició inicial.

Els diferents mètodes de Runge-Kutta obtenen els valors de $f(t_0, y_0)^{(i)}$ utilitzant la funció f . Un dels mètodes de Runge-Kutta més coneguts és el d'ordre 4 (RK4) que ve descrit per les fòrmules:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

on

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i) \\ k_2 = f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2) \\ k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3) \end{cases}$$

Demostració:

Anem a comprovar que té ordre quatre. És a dir, que

$$\frac{d^j}{dt^j}y_{i+1} \big|_{h=0} = \frac{d^j}{dt^j}y(t_i, y_i), \quad j \in \{0, \dots, 3\}.$$

Tenint en compte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}k_1 &= 0, \\ \frac{d}{dt}k_2 &= \frac{\partial}{\partial t}f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2)/2 + \frac{\partial}{\partial y}f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2)k_1/2, \\ \frac{d}{dt}k_3 &= \frac{\partial}{\partial t}f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2)/2 + \frac{\partial}{\partial y}f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2)(k_2 + h\frac{d}{dt}k_2)/2, \\ \frac{d}{dt}k_4 &= \frac{\partial}{\partial t}f(t_i + h, y_i + hk_3) + \frac{\partial}{\partial y}f(t_i + h, y_i + hk_3)(k_3 + h\frac{d}{dt}k_3), \end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}k_1 &= 0, \\ \frac{d}{dt}k_2 \big|_{h=0} &= \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} / 2 + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) / 2, \\ \frac{d}{dt}k_3 \big|_{h=0} &= \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} / 2 + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) / 2, \\ \frac{d}{dt}k_4 \big|_{h=0} &= \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i).\end{aligned}$$

Que $dt = dh$ per ser $h = t - t_i$, i que avaluem per $h = 0$. I per tant, les derivacions d'un factor multiplicat per h es poden reduir. Sabent que una derivació serà per la h .

Finalment calculem els valors de $\frac{d^j}{dt^j} y_{i+1} \big|_{h=0}$ per $j \in \{0, \dots, 3\}$:

$$y_{i+1} \big|_{h=0} = y_i$$

$$\frac{d}{dt} y_{i+1} \big|_{h=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right) \cdot 0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \big|_{h=0} = f(t_i, y_i)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} y_{i+1} \big|_{h=0} &= 2 \frac{1}{6} \frac{d}{dt} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \big|_{h=0} = \frac{1}{3} \left(0 + 2 \left(\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} / 2 + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) / 2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} / 2 + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) / 2 \right) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) \right) = \\ &= \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} f(t_i, y_i) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) = \frac{d}{dt} f(t_i, y_i)\end{aligned}$$

I fent els calculs semblants però una mica més complicats es veu que $\frac{d^3}{dt^3} y_{i+1} \big|_{h=0} = \dots = \frac{d^2}{dt^2} f(t_i, y_i)$

Per tant, és un mètode d'ordre 4, com volíem demostrar.

Per a més informació sobre integradors numèrics vegeu [2].

3 Introducció a l'astronomia

L'astronomia és la ciència que estudia els cossos celestes de l'univers, tant pel que fa en les seves posicions i moviments, com per la seva naturalesa, estructura, i evolució. Nosaltres ens centrarem en les posicions i moviments dels cossos celestes, i més concretament les del Sol i la Lluna. Com es veurà en el capítol d'eclipsis, només ens caldrà saber les posicions dels cossos durant l'eclipsi.

Així que per començar, cal posicionar els diversos astres respecte un observador, en particular el Sol i la Lluna. Per fer això, es crea una esfera imaginària de centre l'observador i radi arbitrari, on es projecten els astres i s'estudien les seves posicions relatives respecte l'observador. Aquesta esfera s'anomena *esfera celeste*.

3.1 L'esfera celeste

El primer que s'observa a l'esfera celeste és el *moviment diürn* que tenen tots els astres. Es tracta d'un moviment de rotació d'est a oest respecte un eix, i que dura aproximadament 23h 56m 4s per la majoria dels astres. Però respecte el Sol, l'astre més important per la Terra, dura aproximadament 24h, i això sabem que és a causa de que la Terra rota en el mateix sentit en que gira respecte el Sol. Fent que aquestes 24h, equivalent a un dia, serveixin com indicador de temps a la humanitat.

A partir de l'eix de rotació, i del propi eix de gravetat de l'observador, es defineixen punts, diàmetres, i cercles, dins l'esfera que permeten posicionar els diferents astres respecte un observador. Però, com estem en una esfera de radi arbitrari, els diàmetres també es poden veure com a rectes, i els cercles com a plans. Aquestes són les diverses particularitats que s'observa a l'esfera celeste:

- *Eix de rotació*: És l'eix respecte del qual gira l'esfera celeste. Varia al llarg del temps, però la seva localització és gairebé fixa. Els punts d'intersecció amb l'esfera celeste, són els *pols celestes*. P pel pol nord, i P' pel pol sud.
- *Equador celeste*: El pla perpendicular a l'eix de rotació que passa per l'observador. Divideix l'esfera en dos hemisferis, l'hemisferi nord, i l'hemisferi sud.
- *La vertical*: És el diàmetre de l'esfera en la direcció de la gravetat de l'observador. Els punts d'intersecció amb l'esfera, són el *zenit* (z) visible per l'observador, i el *nadir* (z') no visible.
- *Horitzó*: El pla perpendicular a la vertical que passa per l'observador. Divideix l'esfera en dos hemisferis, el visible, i l'invisible.
- *Meridià*: El semicercle que passa pels pols, i pel zenit.
- *Punts cardinals* N i S: són els punts d'intersecció entre el meridià vist com un cercle complet, i l'horitzó. Sent els punts en la direcció de P i P' respectivament des del zenit.

- *Latitud del observador*: L'angle ϕ entre l'eix de rotació i la recta que passa pels punts cardinals N i S. El seu complementari s'anomena la *colatitud*.
- *Perpendicular*: És el diàmetre determinat per la intersecció entre l'equador i l'horitzó. La intersecció amb l'esfera dóna els punts cardinals E i W, sent per on apareixen i desapareixen els astres respectivament.

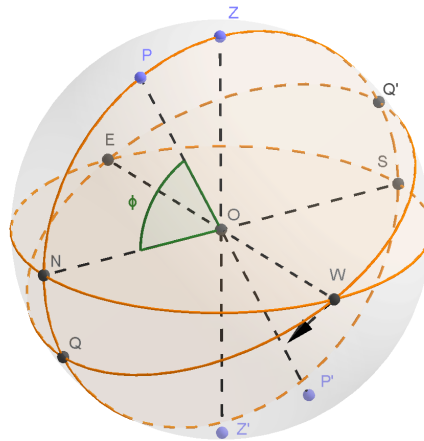


Figura 1: Esfera celeste

L'esfera celeste ens permet tenir la posició relativa dels astres respecte la visió d'un observador. Però ens falta la profunditat, la distància respecte l'observador, per poder posicionar totalment els astres en l'univers. Com veurem en els eclipsis, les distàncies seran molt importants, a més dels radis dels cossos si són considerats esferes.

Obtenir aquestes distàncies ja no és tan fàcil. Abans del segle XX a partir de la trigonometria i amb tecnologies no tan sofisticades eren capaços d'obtenir distàncies aproximades. No ha sigut fins al segle XX i XXI en què amb tecnologies molt més avançades hem aconseguit obtenir les distàncies de manera molt exacta. I per tant, poder ser molt més precisos que a l'antiguitat.

El més interessant és que a partir de l'eclipsi lunar i de la il·luminació del Sol, a l'antiguitat eren capaços d'obtenir els radis aproximats del Sol i la Lluna. I aleshores a partir de l'angle de visió del Sol i la Lluna, obtenir les seves distàncies a l'observador. Però sense considerar la refracció de la llum, i que obtenir els angles de visió no és fàcil si no tens una bona tecnologia. Els hi faltava precisió, per obtenir mesures més exactes.

Un dels més antics que va utilitzar la trigonometria a partir de la il·luminació del Sol per obtenir una aproximació de les distàncies o radis relatius de la Lluna i el Sol va ser Aristarc de Samos (301 aC - 230 aC). I encara que les mides no fossin gaire aproximades, li va permetre entendre millor el Sol i la Lluna.

3.2 El Sol, i la Lluna.

Ara anem a veure varies particularitats de les òrbites del Sol i la Lluna respecte un observador en la superfície terrestre.

3.2.1 El Sol.

El Sol a més del moviment de rotació com els altres astres, si és observat respecte els astres llunyans, es mou aproximadament en un pla, com la resta de planetes del sistema solar. Això és pel moviment de la Terra al voltant del Sol que dura aproximadament 365.25 dies. A partir del pla eclíptic, i de l'equador es defineixen més objectes en l'esfera celeste:

- *Eix de l'eclíptica*: És la recta perpendicular al pla eclíptic. Els seus punts d'intersecció respecte l'esfera celeste són els *pols de l'eclíptica*, nord P_e i sud P'_e , segons la proximitat dels pols celestes nord i sud.
- *Obliquïtat de l'eclíptica* (ε): l'angle entre l'eix de l'eclíptica i l'eix de rotació.
- *Línia dels equinoccis*: La intersecció entre el pla de l'equador i l'eclíptic. Els punts d'intersecció amb l'esfera celeste s'anomenen *punt Aries* (Υ) que és el punt pel qual el Sol passa de l'hemisferi sud al nord. I el *punt Libra* (ϖ), pel qual passa de l'hemisferi nord al sud.
- *Línia dels solsticis*: La perpendicular de la línia dels equinoccis pertanyent al pla eclíptic. Els punts d'intersecció amb l'esfera celeste s'anomenen *punt Càncer* (♋) pel qual el Sol està més al nord. I el *punt Capricorn* (♎), pel qual el Sol està més al sud.
- *Zodiàc*: És la banda de l'esfera celeste, 8.5° amunt i avall respecte l'eclíptica. Dividida en dotze zones de 30° amb el seu símbol del zodiàc. A l'antiguitat les constel·lacions del zodiàc és corresponien amb el seu símbol. Però com que el punt no és del tot fix, es desplaça $50.29''$ per any d'est a oest, fa que a la actualitat és corresponguin amb el símbol següent.

3.2.2 La Lluna

És l'únic satèl·lit no artificial que gira al voltant de la Terra, però no gira com els planetes en el pla eclíptic. Sinó que gira amb una inclinació (I) respecte el pla eclíptic de 5.13° de mitjana, amb un màxim i un mínim de 5.3° i 4.98° respectivament. Els dos punts pels quals l'òrbita de la Lluna creua el pla eclíptic s'anomenen node ascendent i node descendent. Però per causa del Sol i altres factors, l'òrbita no és del tot plana, fent que els nodes es desplacin d'oest a est, amb un període de 6798.3 dies, 18.6 anys aproximadament.

Com tots els astres que giren al voltant del Sol es defineixen dos períodes, el període sideral i el període sinòdic. Són els períodes de l'òrbita respecte les estrelles

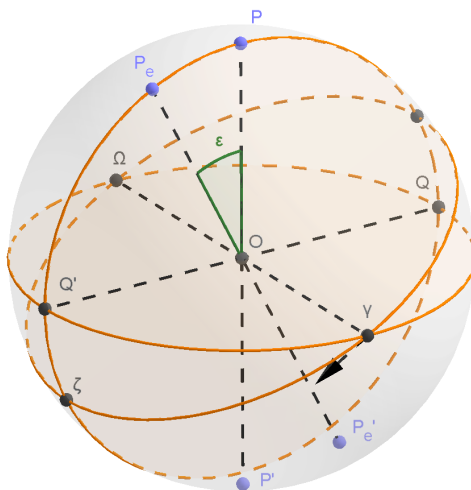


Figura 2: Esfera celeste amb el pla eclíptic

llunyanes, i el Sol respectivament. En el cas de la Lluna té un període sideral de 27.321582 dies, i un període sinòdic de 29.530589 dies. El sinòdic és més gran que el sideral perquè la Lluna gira al voltant de la Terra, en el mateix sentit en que gira la Terra al voltant del Sol.

També es defineix el període draconític, que és el temps que tarda un astre en passar per dos nodes ascendent consecutius. En el cas de la Lluna el seu període draconític és de 27.212220817 dies. S'ha de tenir en compte que tots aquest períodes no són constants però no varien gaire durant segles.

Un altre factor que s'observa per la Lluna és la forma en que es veu il·luminada des de la Terra, són les fases lunars. Hi ha quatre fases principals, seguint l'ordre que seran descrites:

- Lluna nova, gens il·luminada.
- Quart creixent, quant està al 50% il·luminada per la dreta o per l'esquerra depenent de si estàs en l'hemisferi nord o sud, respectivament.
- Lluna plena, il·luminada completament.
- Quart minvant, quant està al 50% il·luminada per l'esquerra o per la dreta depenent de si estàs en l'hemisferi nord o sud, respectivament.

El període entre dos mateixes fases consecutives és el període sinòdic. Igualment s'ha de dir que entre mateixes fases, no són exactament iguals. A causa de la inclinació de l'òrbita de la lluna respecte al pla eclíptic.

3.3 Sistemes de coordenades

Havent vist diverses particularitats de l'esfera celeste, es creen diversos sistemes de coordenades per posicionar els astres en l'esfera. En els diversos sistemes de

coordenades, s'utilitza un sistema de referència trièdric. Depenent d'on s'agafi l'origen de coordenades, direm que les coordenades són *geocèntriques* quant l'origen és el centre de la Terra, o *topocèntriques* quant l'origen és un observador sobre la superfície de la Terra. Els dos tipus de coordenades que s'utilitzen, són les cartesianes i les esfèriques, sent aquestes últimes més adients per posicionar els diferents astres.

S'ha de tenir en compte que l'eix de rotació no és del tot fix, tenint petits moviments, la *precessió* i la *nutació*. Però si no calen càlculs molt aproximats, és suficient considerar l'eix constant.

3.3.1 Coordenades horitzontals i horàries

Aquestes coordenades són *topocèntriques*, i permeten posicionar els diferents astres en l'esfera celeste de l'observador agafant uns eixos fixes per l'observador.

En les **coordenades horitzontals** com podem observar en la figura 3, s'agafa com a eix z , la *vertical* de l'observador. Fent que els altres dos eixos determinin l'horitzó. L'eix x en la direcció del punt cardinal S , i l'eix y en la direcció del punt cardinal W . Per les coordenades esfèriques d'un astre tindrem:

L'*azimut* a , l'angle format pel pla vertical de l'astre i el meridià del observador, en sentit cap a W :

$$0^\circ \leq a \leq 360^\circ$$

I l'*altura* h , l'angle format pel vector posició de l'astre, respecte l'horitzó:

$$-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$$

A més, es defineix la *distància zenital* $z = 90^\circ - h$, l'angle format pel vector posició de l'astre, respecte la vertical.

El pas de coordenades cartesianes a esfèriques, serà

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ a &= \arctan(y/x) \\ h &= \arcsin(z/r) \end{aligned}$$

sent r , el radi arbitrari de l'esfera celeste.

En les **coordenades horàries** com podem observar en la figura 4, s'agafa com a eix z' , la direcció al punt P de l'eix de rotació. Fent que els altres dos eixos determinin el pla paral·lel al pla de l'equador. L'eix x' en la direcció del punt Q , i l'eix y' en la direcció del punt cardinal W . Per les coordenades esfèriques d'un astre tindrem:

L'*angle horari* H , l'angle format pel pla horari de l'astre i el meridià de l'observador, en sentit cap a W :

$$0^h \leq H \leq 24^h$$

I la *declinació* D , l'angle format per el vector posició del astre, respecte el pla de l'equador:

$$-90^\circ \leq D \leq 90^\circ$$

A més, es defineix la *distància polar* $p = 90^\circ - D$, sent l'angle format pel vector posició de l'astre, respecte l'eix de rotació.

El pas de coordenades cartesianes a esfèriques, serà

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$H = \arctan(y'/x')$$

$$D = \arcsin(z'/r)$$

sent r , el radi arbitrari de la esfera celeste.

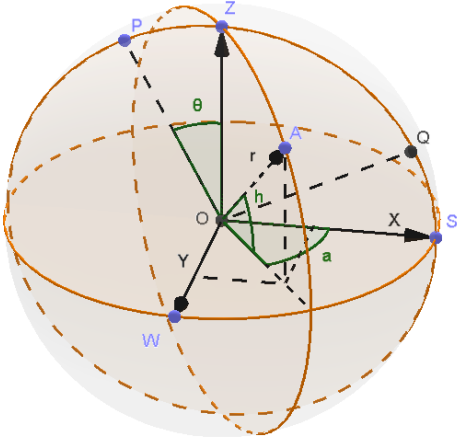


Figura 3: Coordenades horitzontals

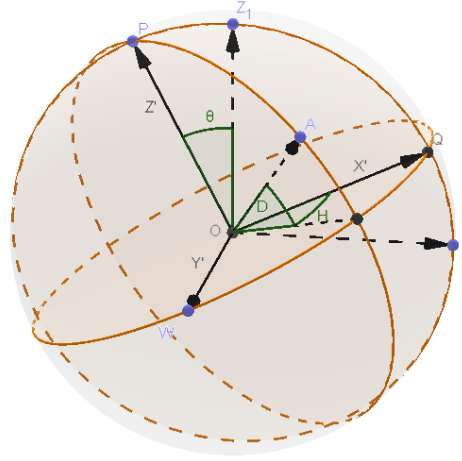


Figura 4: Coordenades horàries

Si es vol passar de coordenades horitzontals a horàries, s'ha de fer una rotació d'angle respecte l'eix y , ja que, l'eix és el mateix pels dos sistemes. Sent l'angle que hi ha entre la vertical de l'observador, i el punt P , és a dir, la *colatitud* θ . El canvi de coordenades seria

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicant la matriu inversa tindrem el canvi de coordenades a la inversa.

3.3.2 Coordenades equatorials i eclíptiques

Aquestes coordenades permeten posicionar els diferents astres en l'esfera celeste independentment de l'observador, utilitzant els punts vernal. També poden ser vistes com a coordenades geocèntriques, utilitzades per posicionar els diversos astres globalment.

En les **coordenades equatorials** com podem observar en la figura 5, s'agafa com a eix x , la direcció del punt $d'Àries$, l'eix z en la direcció de P , i l'eix $y = z \wedge x$. Per les coordenades esfèriques d'un astre tindrem:

L'*Ascensió recta* A , és l'angle format per l'eix x i la projecció del vector posició de l'astre respecte el pla de l'equador, en sentit antihorari respecte el punt P :

$$0^h \leq A \leq 24^h$$

I la *declinació* D i la *distància polar* p , els mateixos que en les coordenades horàries.

En les **coordenades eclíptiques** com podem observar en la figura 6, s'agafa com a eix x' , la direcció del punt $d'Àries$, l'eix z' en la direcció del pol de l'eclíptica P_e , i l'eix $y' = z' \wedge x'$. Per les coordenades esfèriques d'un astre tindrem:

La *longitud celeste* L , és l'angle format per l'eix x' i la projecció del vector posició de l'astre respecte el pla de l'equador, en sentit antihorari respecte el punt P_e :

$$0^\circ \leq L \leq 360^\circ$$

La *latitud celeste* B , és l'angle format pel vector posició de l'astre respecte el pla eclíptic, positiu si es troba en l'hemisferi nord, i negatiu en cas contrari:

$$-90^\circ \leq B \leq 90^\circ$$

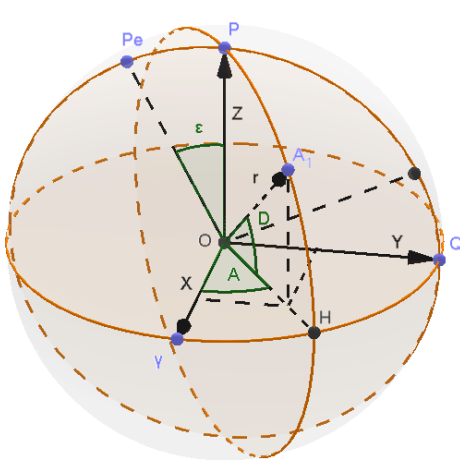


Figura 5: Coordenades equatorials

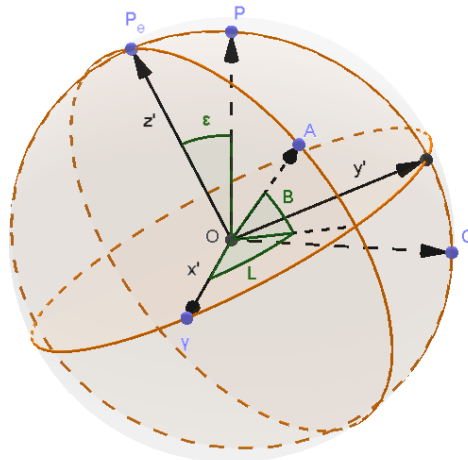


Figura 6: Coordenades eclíptiques

Si es vol passar de coordenades equatorials a eclíptiques, s'ha de fer una rotació d'angle ε respecte l'eix x , ja que, l'eix és el mateix pels dos sistemes. I sent ε l'obliquïtat de l'eclíptica. El canvi de coordenades seria

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicant la matriu inversa tindrem el canvi de coordenades a la inversa.

Canvi de coordenades d'horàries a equatorials

Sigui a l'angle horari del punt d'Àries Υ . Sigui (x, y, z) les coordenades horàries, i (x', y', z') les coordenades equatorials. Aleshores el canvi de coordenades, utilitzant que els dos tenen un eix igual, és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ \sin a & -\cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicant la matriu inversa tindrem el canvi de coordenades a la inversa.

3.4 Terra

Hem vist com es posicionen els diferents cossos celestes en un lloc d'observació, però ara ens cal una superfície que modeli la superfície terrestre, per poder posicionar els diferents punts de la superfície terrestre de forma senzilla. Els diferents models utilitzats són una esfera, un el·lipsoide de revolució, un geoide, En el nostre cas utilitzarem un el·lipsoide de revolució, amb dos eixos iguals. Els dos eixos iguals pertanyents a l'equador, i l'altre eix el de rotació. La Unió Astronòmica Internacional (IAU) el 1976 li va donar aquests valors:

- Radi equatorial: $a = 6378.140$ Km
- Radi polar: $b = 6356.755289$ Km
- Aplanament: $c = \frac{a-b}{a} = 1/298.257$

Aquest aplanament en els pols és a causa de la rotació terrestre. Els cossos celestes són concentracions de masses en que la seva forma minimitza l'energia potencial gravitatòria en si mateixa. La forma esfèrica és la que minimitza aquesta energia. Però a causa de la rotació, es crea una força centrífuga. Que quan més a prop de l'equador s'està, més gran és. Fent que en l'equador hi hagi més energia cinètica que en els pols. I com la natura busca la mínima energia es té que la distància dels pols al centre de la Terra és menor que en l'equador.

Igualment pels eclipsis, es pot utilitzar perfectament una esfera amb un radi adjacent, ja que, la variació serà molt petita, de pocs kilòmetres. En part, en molts moments suposarem la Terra esfèrica, per obtenir una primera aproximació de manera més senzilla. I després considerant la Terra un el·lipsoide, aconseguirem millorar la primera aproximació.

3.4.1 Coordenades geogràfiques

Obtingut un model de la Terra, ens cal unes coordenades geocèntriques que permetin determinar la posició en la superfície terrestre. El nostre model és un el·lipsoide de revolució, que és una el·lipse girada respecte un eix, l'eix de rotació. L'excentricitat de la el·lipse e és tal que $e^2 = 1 - (1 - c)^2$ on c és l'aplanament. Si es vol considerar una esfera, aleshores s'agafa com a semieixos de l'el·lipse, per exemple el radi mig entre el radi equatorial i el polar donats a l'apartat anterior.

Els eixos x i y determinen l'equador, i l'eix z el punt P . L'eix x apuntant al meridià de Greenwich, i l'eix y , 90° cap a l'est de l'eix x . A partir dels eixos es defineixen la longitud (ω) i la latitud (φ) per obtenir coordenades esfèriques.

La longitud ω és l'angle entre l'eix x i la projecció a l'equador del vector posició del lloc, sent positiu cap a l'est:

$$-180^\circ \leq \omega \leq 180^\circ.$$

La latitud φ és l'angle entre el pla de l'equador i el vector posició, sent positiu en l'hemisferi nord:

$$-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ.$$

I a partir de φ s'obté la distància del lloc al centre de la Terra (ρ). Utilitzant que el model és una el·lipse de revolució, tenim que $\frac{(\rho \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(\rho \sin \varphi)^2}{b^2} = 1$, ja que, és l'equació d'una el·lipse. On a i b , els semieixos, són el radi equatorial i el radi polar respectivament. Per tant,

$$\rho = \frac{ab}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

Obtenint ρ a partir de la latitud φ .

S'ha de dir que la força de gravetat d'un punt de l'el·lipsoide va en la direcció normal de la superfície en el punt, i no en la direcció al centre de la Terra. Per tant, de vegades s'agafa l'angle entre la normal i el pla de l'equador com a latitud. Però la diferència entre les dos coordenades és de com a molt 2 km, i pels càlculs que volem fer ja ens va bé considerar-les geocèntriques.

4 Mecànica Celeste

La mecànica celeste és l'estudi del moviment dels astres a l'espai i de la seva observació sobre l'esfera celeste. Per intentar predir les posicions dels astres en l'esfera celeste en el futur, a partir d'observacions en el passat. Això és possible per la quasi periodicitat de les òrbites. Es podria dir que els astres estan gairebé en harmonia en l'univers. Fent que aquesta harmonia es vegi en els moviments dels astres i permeti buscar un model matemàtic que modeli el moviment a l'univers.

Des de l'antiguitat, s'han fet varies teories considerant el moviment del Sol i dels planetes del sistema solar. Ja que són els astres en que s'observa millor el seu moviment, per la seva proximitat i la seva magnitud. Les primeres observacions van ser dels planetes Mercuri, Venus, Mart, Júpiter, i Saturn. Observant-se tres particularitats del seu moviment relatiu a les estrelles llunyanes:

- Tots és mouen més o menys en un mateix pla, el pla eclíptic.
- El seu moviment va d'oest a est, però en certs moments, retrocedeixen d'est a oest.
- El seu moviment és periòdic respecte les estrelles llunyanes, anomenat el període sinòdic.

Però fins que Johannes Kepler (1571-1630), gràcies a les millors observacions obtingudes pel seu mestre, Tycho Brahe (1546-1601), no es va crear una teoria capaç d'explicar el moviment dels planetes vigent fins avui dia. Kepler va deduir tres lleis que complien els planetes observats, sense poder explicar les causes.

Posteriorment Newton (1643-1727) va elaborar la llei de la gravitació universal. Juntament amb les lleis del moviment, va crear un model matemàtic per explicar el moviment celeste. I va demostrar que aquest model complia les tres lleis de Kepler però amb algunes modificacions.

La llei de la gravitació universal segueix vigent avui dia, i encara que no explica al 100% el moviment dels astres, l'aproxima bastant. A partir del segle XX, s'han formulat altres teories per explicar millor l'univers. Una d'aquestes teories és la teoria de la relativitat d'Einstein després d'observar que la velocitat de la llum és invariable.

4.1 Lleis de l'univers

4.1.1 Lleis de Kepler

Les tres lleis de Kepler tal i com les va formular són:

- Primera llei (1609): Les òrbites descrites pels planetes són el·lipses, i el Sol ocupa un focus.

- Segona llei (1609): El radi vector que uneix un planeta i el Sol escombra una àrea proporcional al temps transcorregut.
- Tercera llei (1618): El cub del semieix major de l'òrbita d'un planeta (R), és proporcional al quadrat del període orbital (T).

$$T^2 = KR^3,$$

on $K=1 \text{ any}^2/UA^3$ és la constant de Kepler, sent UA la distància del semieix major de l'òrbita de la Terra.

4.1.2 Tres lleis de Newton

Les tres lleis del moviment o d'inèrcia tal i com les va formular Newton. Aquestes lleis són la base del mecànica clàssica:

- Principi d'inèrcia: Tot cos lliure, sobre el qual no actua cap força, manté el seu estat de moviment, ja sigui en repòs, o en moviment rectilini uniforme.
- Llei de força: La variació de moviment ($\vec{a}$) és proporcional a la força rebuda ($\vec{F}$), i en la direcció en la qual és rebuda:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

on m és la massa del cos.

- Principi d'acció i reacció: Per a tota acció hi ha una reacció igual i en sentit contrari:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji},$$

on $\vec{F}_{ij}$ és la força que exerceix un cos i sobre un cos j .

4.1.3 Llei de la gravitació universal

La força d'atracció entre dos cossos de masses m_1 i m_2 és proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància d que els separa:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

on $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

Per tant, siguin $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ les posicions dels dos cossos. Per la segona llei de Newton, tenim que $\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ i $\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ són les forces rebudes pels dos cossos.

Ara anem a observar com es dedueixen les lleis de Kepler a partir de la llei de la gravitació universal i de la segona i tercera llei de Newton. Sigui $\vec{r}$ el moviment relatiu d'un cos de massa m_2 respecte d'un de massa m_1 . Anomenem r al mòdul de $\vec{r}$. Aleshores tenim que:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = G\left(-\frac{m_1}{r^3}\vec{r} - \frac{m_2}{r^3}\vec{r}\right) = \lambda \frac{\vec{r}}{r^3},$$

on $\lambda = -G(m_1 + m_2)$.

- Primera llei de Kepler: Calculem la variació respecte el producte vectorial entre la posició relativa i la velocitat relativa del cos de massa m_2 :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}} = \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{\lambda}{r^3}(\vec{r} \wedge \vec{r}) = \vec{0}.$$

Per tant, s'observa que $\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{c}$ és constant.

Això ens diu que la posició relativa del cos es mou en un pla normal a $\vec{c}$, per la propietat perpendicular del producte vectorial. On $\vec{c}$ és la *integral de les àrees*, i $m_2\vec{c}$ el moment angular del segon cos respecte el primer. Si $\vec{c} = \vec{0}$ aleshores estarem en un moviment rectilini. Per tant, podem suposar que $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Si ara calculem $\frac{d}{dt}(\vec{v} \wedge \vec{c})$ utilitzant que $\vec{c}$ és constant, que $\frac{d}{dt}r^2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}\vec{r}) = 2\vec{r}\dot{\vec{r}} \Rightarrow r\dot{r} = \vec{r}\dot{\vec{r}}$, i la propietat del producte vectorial $a \wedge (b \wedge c) = (ac)b - (ab)c$ tenim que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{v} \wedge \vec{c}) &= \dot{\vec{v}} \wedge \vec{c} = \frac{\lambda}{r^3}\vec{r} \wedge \vec{c} = \frac{\lambda}{r^3}\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \frac{\lambda}{r^3}(r\dot{r}\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}) = \\ &= \frac{\lambda}{r^2}(\dot{r}\vec{r} - r\dot{\vec{r}}) = -\lambda \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \end{aligned}$$

Integrant l'equació anterior ens queda que

$$\vec{v} \wedge \vec{c} = -\lambda\left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e}\right),$$

on $\vec{e}$ és una constant. A més, com $-\lambda(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e})$ és perpendicular a $\vec{c}$, i $\frac{\vec{r}}{r}$ també ho és, vol dir que $\vec{e}$ també és perpendicular a $\vec{c}$.

Calculant ara c^2 utilitzant la propietat de que $a(b \wedge c) = \det(a, b, c)$ tenim que,

$$c^2 = \vec{c}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{r}(\vec{v} \wedge \vec{c}) = -\lambda(r + \vec{r}\vec{e}).$$

Per tant, $r^2 = (p - \vec{r}\vec{e})^2$ on $p = -c^2/\lambda$, obtenint la quàdrica

$$Q : x^2 + y^2 + z^2 = (p - (xe_1 + ye_2 + ze_3))^2,$$

amb $\vec{r} = (x, y, z)$ i $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$.

Com la trajectòria és plana, tallant la quàdrica amb el pla, s'obté una cònica que representa la trajectòria relativa del segon cos respecte del primer. Ara anem a veure com és aquesta cònica.

Com s'ha vist que $\vec{e}$ és perpendicular a $\vec{c}$, ens podem mirar $\vec{e}$ i $\vec{r}$ en el pla de la trajectòria. Sent, V angle entre $\vec{e}$ i $\vec{r}$, tenim que

$$r = p - re \cos V,$$

i aïllant r , tenim que

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V},$$

obtenint l'equació d'una cònica en coordenades polars, de paràmetre p i excentricitat e .

Depenent de l'excentricitat e tindrem diferents tipus de còniques:

- Si $e < 1$ és una el·lipse, en particular serà una circumferència si $e = 0$.
- Si $e = 1$ és una paràbola.
- Si $e > 1$ és una hipèrbola.

Això ens determina que si el segon cos gira al voltant del primer, la seva trajectòria serà un el·lipse. Com és el cas dels planetes que giren al voltant del Sol.

- Segona llei de Kepler: Ara donat un pas petit de temps, calculem la variació de l'àrea. Sigui $\vec{A}$ un vector tal que $\|\vec{A}\|$ sigui l'àrea escombrada que busquem, passat un temps t . Aleshores utilitzant les propietats del producte vectorial, tenim que

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r}.$$

Derivant ens dona que

$$\dot{\vec{A}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{c},$$

i integrant

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{c}t + \vec{c}_2.$$

Per tant, l'àrea escombrada és proporcional al temps transcorregut, com volíem veure. A més, considerem $\vec{c}_2 = \vec{0}$. Ja que a temps 0, no hi ha àrea escombrada.

- Tercera llei de Kepler:

Hem vist que la trajectòria d'un planeta respecte el sol és una el·lipse tal que

$$r = \frac{p}{1 + e \cos V}.$$

Sigui (a) el semieix major, (b) el semieix menor, i d la distància entre el centre de l'el·lipse i un focus. Es té que $d^2 = a^2 - b^2$. Anem a veure, quant valen.

Dos vegades el semieix major és la suma de la distància màxima i mínima de l'el·lipse a un focus. Per tant, tenim que

$$a = \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) / 2 = \frac{p}{1-e^2},$$

d és a menys la distància mínima a un focus. Per tant,

$$d = a - \frac{p}{1+e} = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = \frac{ep}{1-e^2} = ea,$$

aleshores

$$b = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{1 - e^2}a.$$

Finalment, utilitzant la llei de les àrees, coneixent que l'àrea d'una el·lipse és πab , sent T el període orbital, i que $p = -c^2/\lambda$, tenim que:

$$\begin{aligned} \pi ab = cT/2 &\Rightarrow \left(\frac{2ab\pi}{T}\right)^2 = c^2 = -p\lambda \Rightarrow \frac{4a^2(1-e^2)a^2\pi^2}{T^2} = -a(1-e^2)\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = -4\pi^2/\lambda = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Per tant, el cub del semieix major (a) d'una òrbita el·líptica, és proporcional al quadrat del seu període orbital (T) per la suma de les masses dels dos cossos (m_1) i (m_2).

Si considerem les òrbites dels planetes al voltant del Sol. Tenim que la massa del Sol és d'ordre 10^3 més gran que la massa de Júpiter, sent la massa de Júpiter la més gran dels planetes. Això fa que $m_1 + m_2$ sigui aproximadament igual per tots els planetes, sent m_1 la massa del Sol, i m_2 la massa del planeta. Per tant, encara que el quocient entre el període orbital i el semieix major d'un planeta no és igual per tots els planetes, sí que són valors molt pròxims. I per tant respecte les òrbites dels planetes al voltant del Sol, la tercera llei de Kepler és bastant precisa respecte del model newtonià.

Així que, amb el model de Newton, les lleis de Kepler tenen unes petites variacions, quedant d'aquesta manera:

- Primera llei: L'òrbita d'un astre respecte d'un altre, descriu una cònica.
- Segona llei: El radi vector que uneix un planeta i el Sol escombra una àrea proporcional al temps transcorregut.
- Tercera llei: El cub del semieix major (a) d'una òrbita el·líptica, és proporcional al quadrat del seu període orbital (T). On

$$\frac{T^2}{a^3} = -4\pi^2/\lambda = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$

Observacions

S'ha de tenir en compte que hem definit la massa d'un cos i la constant G , però no hem dit com s'obtenen. És evident que no podem pesar els cossos celestes. Aleshores, els valors aproximats s'obtenen a partir de la tercera llei de Kepler, de la llei de gravitació universal, de la força de gravetat d'un cos si es coneix el radi del cos, i amb experiments físics. No entrarem en més detall sobre això, però és important preguntar-se com s'obtenen aquests valors. Nosaltres utilitzarem els valors universals que se'ls hi dona.

4.2 Elements d'una òrbita

Utilitzant el model de Newton, són necessàries set constants per definir l'òrbita d'un astre respecte d'un altre, anomenats *elements orbitals*. D'aquesta manera, es pot obtenir la posició del astre a una època t .

Els tres angles d'Euler, Ω , i , ω , que permeten posicionar l'òrbita respecte un sistema de coordenades amb origen l'astre principal. La intersecció de l'òrbita respecte el pla xy del sistema de referència s'anomena línia dels nodes. El punt en que l'òrbita passa de valors negatius a positius de z , s'anomena node ascendent. I el punt en que l'òrbita passa de valors positius a negatius de z , s'anomena node descendent. És el que hem vist per l'òrbita eclíptica del Sol. Aleshores tenim que:

- Ω és l'angle entre l'eix x i el node ascendent.
- i és la inclinació de l'òrbita respecte el pla xy .
- ω és l'angle entre el node ascendent i el periastre, punt de l'òrbita en que és troba a la distància menor de l'astre principal, o sigui de l'origen.

Les dos constants de la cònica de l'òrbita, a semieix major, e l'excentricitat. I dos constants per posicionar l'astre en l'òrbita respecte el temps. Un temps t_0 en que l'astre es troba al node ascendent, i el període orbital T . Quan se sap la massa de l'astre aleshores no cal el període orbital, ja que, s'obté a partir de la tercera llei de Kepler.

4.3 Problema dels N-cossos

El que hem vist anteriorment seria la relació entre dos cossos, que es va poder deduir de la gran atracció del Sol respecte els demés cossos del sistema solar. Però si tenim un sistema de N cossos, com interactuen? D'aquí el problema dels N-cossos.

Utilitzant la llei de la gravitació universal, tindrem un sistema d'equacions del moviment d'ordre $6n$. Per tant, per poder-l'ho resoldre són necessàries $6n$ constants d'integració. El problema està que només se saben deu constants. Fent que per

$n > 2$ no es pugui resoldre. Les deu constants són les sis del moviment lineal, o agafant un cos com a centre de referència. Les tres del moment angular, i la de la energia.

De vegades es poden reduir les equacions, depenent dels ordres de masses, o de les distàncies entre els cossos. Per exemple, per un satèl·lit es pot considerar de massa nul·la si volem saber com es desplaça respecte un conjunt de cossos amb masses molt més grans. O considerar un grup de cossos com un únic cos de massa la suma de les masses dels cossos. On el grup de cossos estan molt pròxims respecte un cos al que són atrets.

Com no es poden resoldre analíticament, són necessaris integradors numèrics que ens permetin obtenir una aproximació de les òrbites. Com per exemple el RK4 que ens permeti estudiar les trajectòries d'un cert sistema. Això és el que voldríem per trobar posicions aproximades del Sol i la Lluna respecte la Terra pels eclipsis.

El problema està que a més de considerar un munt d'astres que intervenen, la teoria newtoniana és una teoria molt aproximada però no exacta del moviment dels planetes. Havent de considerar altres factors físics. Per això, obtindrem les posicions dels cossos molt aproximats, a partir d'unes efemèrides que veurem en el capítol 6 com utilitzar-les.

Però si que ens ha semblat interessant utilitzar el RK4 per integrar el moviment entre els cossos del Sol, la Lluna i la Terra. I comprovar els resultats a partir de les posicions que ens donen les efemèrides. Per fer-ho, integrem utilitzant el RK4 amb pas d'un minut, el conjunt format pel Sol, els 9 planetes del sistema solar (considerant Plutó el novè planeta), i la Lluna. I creem dos gràfiques a partir de les posicions obtingudes. Una que ens dona la diferència de la rotació d'un planeta al voltant del Sol, entre el RK4 i les efemèrides. I l'altre que ens dona l'error absolut entre les posicions obtingudes del RK4 i del les efemèrides, dividit per la distància del planeta al Sol.

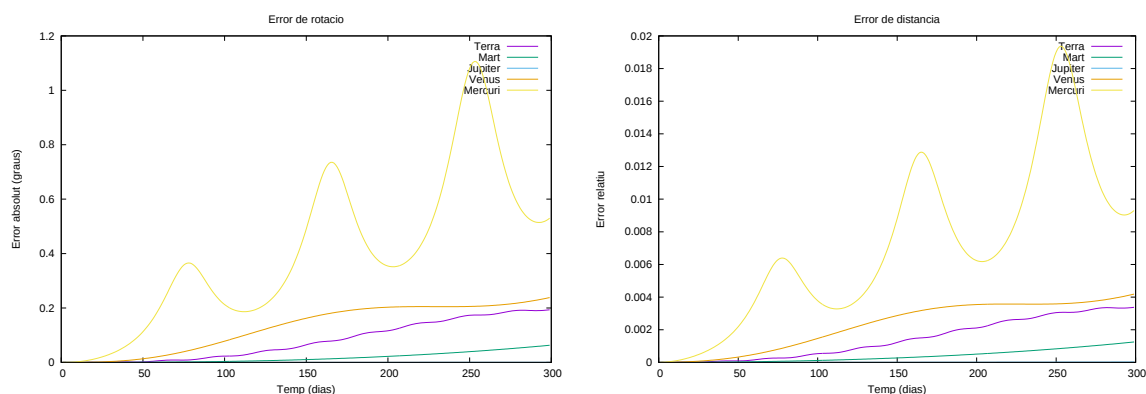


Figura 7: Gràfiques d'error entre un RK4 amb pas de temps d'un minut, i les efemèrides. Observant l'error de rotació i de distància dels cinc planetes més pròxims al Sol, respecte aquest.

El primer que observem és com la variació de rotació es correspon gairebé amb

la diferencia de posicions. Però això té explicació. Observem com el RK4 aproxima molt bé la rotació dels planetes. Aleshores, si la variació de les posicions en l'eix perpendicular al moviment és molt petita, tenim que la variació en la rotació és gairebé proporcional a la distància entre les posicions.

De pas també podem observar com l'òrbita de mercuri és la que té un error més gran comparada amb la resta. Això és a causa de que com més gran és la velocitat d'un cos, més error es comet en un pas d'integració. Com es pot observar en els errors dels diversos planetes.

I encara que hem utilitzat un sistema que només té en compte les atraccions del Sol, dels planetes del sistema solar, i de la Lluna. I un integrador prou senzill amb pas de temps d'un minut. Acabem obtenim una precisió prou bona dels planetes.

Si ara fem el mateix observant el gir de la Lluna al voltant de la Terra.

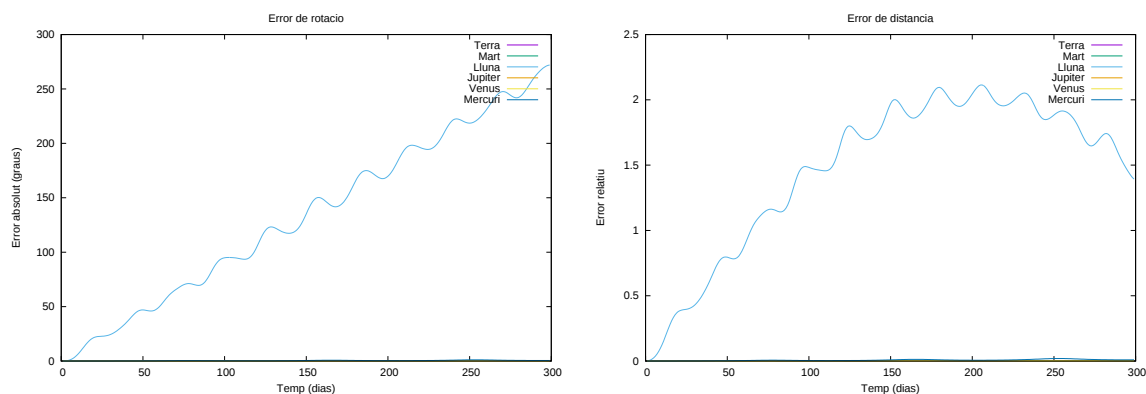


Figura 8: Gràfiques d'error entre un RK4 amb pas de temps d'un minut, i les efemèrides. Afegint l'error del gir de la Lluna al voltant de la Terra.

Observem que no obtenim una posició aproximada de la Lluna com passava amb els planetes. Encara que la trajectòria obtinguda, segueix sent un gir de la Lluna al voltant de la Terra. Una de les cause és que el model newtonià va ser creat a partir dels moviments dels planetes, fet que aquests es modelin molt bé. Però pels demès astres pot haver-hi altres causes que afectin el seu moviment.

Aleshores a partir de la Lluna, s'han observat altres efectes, per aconseguir a més de modelar el moviment dels planetes al voltant del Sol, poder modelar el moviment de la Lluna i altres astres. Això s'ha aconseguit de forma molt aproximada, amb un error suficientment petit, al segle XX.

Seria molt interessant saber com han sigut creades les efemèrides. Però només podem suposar que utilitzin altres teories, com la relativista, altres efectes físics, potser causats per la rotació de la Terra, un millor integrador utilitzant un sistema de cossos més gran i un pas de temps més petit per certs cossos,

5 Eclipsis

5.1 Introducció

Un eclipsi passa quan un cos opac A, s'interposa entre un cos B, i un feix de llum, fent que el cos B s'enfosqueixi. El feix de llum respecte el cos A, projecta dos cons, com s'observa en la figura 9.

- *Con de penombra*, superfície de l'espai parcialment il·luminat a causa del cos opac A. Fent que el cos B s'enfosqueixi parcialment. Un observador dins el con de penombra veurà el feix de llum parcialment tapat pel cos A.
- *Con d'ombra*, superfície de l'espai gens o gairebé gens il·luminat a causa del cos opac A. Fent que el cos B s'enfosqueixi totalment o casi totalment, depenent de si està abans o després del vèrtex V del con. Un observador dins el con d'ombra veurà el feix de llum tapat totalment pel cos A, si està abans del vèrtex V del con. O bé veurà pel cos A totalment dins el feix de llum, si està després del vèrtex V del con.

Per tant, hi ha tres tipus de eclipsis:

- *eclipsi parcial*, quan el cos B està dins del con de penombra.
- *eclipsi total*, quan el cos B està dins del con d'ombra, i abans del vèrtex V .
- *eclipsi anular*, quan el cos B està dins del con d'ombra, i després del vèrtex V .

Com estem tractant els eclipsis entre cossos celestes, tenim que l'esfera és un molt bon model del feix de llum, com el cas del Sol. I també dels cossos opacs, com és el cas de la Lluna o la Terra. Per tant, els dos cossos que intervenen els suposarem esfèrics amb radi adient per poder estudiar millor els eclipsis. En aquest cas si ens mirem els cons en els plans que contenen els dos centres, tenim que les rectes tangents interiors i exteriors són les que generen els cons de penombra i ombra respectivament.

En particular, estudiarem els eclipsis que tenen a veure amb el Sol, la Terra, i la Lluna. Direm que un eclipsi és *solar*, quan la Lluna s'interposa entre la Terra i el Sol, i direm que és *lunar*, quan la Terra s'interposa entre el Sol i la Lluna. Qualsevol altre eclipsi és semblant als estudiats, ja que, geomètricament és el mateix sempre i quan els cossos que intervenen se'ls pugui considerar esfèrics.

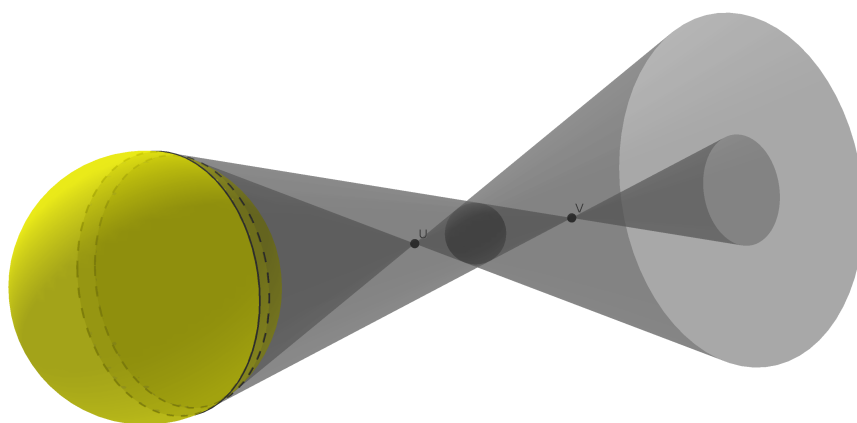


Figura 9: Cons de penombra i d'ombra

5.2 Eclipsi solar

Un eclipsi solar succeeix quan la lluna s'interposa entre el Sol i la Terra, és a dir, quan tenim Lluna nova. En els eclipsis solars poden haver-hi eclipsis total i anulars, i fins i tot poden aparèixer els dos en un mateix eclipsi. Això és a causa de que la distància Terra-Sol i el radi del Sol, és aproximadament 40 vegades més gran que la distància Terra-Lluna i el radi de la Lluna. Gràcies a que la Lluna i el Sol és veuen de grandària semblant, fa que alguns eclipsis totals que tapen només el Sol, permetin poder estudiar millor la corona del Sol.

5.2.1 Quan apareix un eclipsi solar?

Els eclipsis solars es corresponen amb la fase de lluna nova, que és el moment en que la Lluna s'interposa al màxim entre el Sol i la Terra. Però no sempre que hi ha lluna nova tenim eclipsi, i és a causa de que la Lluna no gira en el mateix pla en que gira el Sol. La inclinació de l'òrbita de la lluna respecte l'el·líptica, varia entre $4^{\circ}59'$, i $5^{\circ}18'$. Anem a veure quan hi haurà eclipsi, i quan no.

Per fer-ho, suposem la Terra esfèrica de radi el radi equatorial, sent un bon model per poder estudiar els eclipsis. Ja que així, quan la Terra és tangent a un con, tenim que el pla π que conté els centres del Sol, la Lluna, i la Terra, també conté la recta t a la que és tangent la Terra. Això és a causa de que t pertany al con de penombra o ombra, i per tant és una recta tangent interior o exterior entre el Sol i la Lluna dins un pla π_2 que conté els centres del Sol i la Lluna. I perquè la Terra, que l'hem considerada esfèrica, sigui tangent a la recta t i al con, el centre de la Terra també a de pertànyer al pla π_2 . Fent que $\pi_2 = \pi$.

I hem de dir també que al considerar el radi equatorial tenim una esfera que engloba totalment a la Terra. D'aquesta manera és més fàcil poder estudiar els eclipsis tenint un error acceptable. Més endavant veurem com utilitzar el model de

l'el·lipsoide per ser una mica més precisos.

Aleshores el límit quan hi ha eclipsi, és justament quan el con de penombra és tangent a la Terra. És a dir, quan hi ha una recta t tangent als tres cossos, pertanyent al pla π . I per tant estudiem el problema dintre el pla π que conté tres circumferències de centres S , L i T , i radis R_s , R_l i R_t . Sent els centres i radis del Sol, la Lluna, i la Terra respectivament.

Sigui α l'angle entre $\overline{TS}$, i $\overline{TP}$, on P és el punt de tangència de la recta tangent exterior r entre la Terra i el Sol, pertanyen a la Terra. Sigui β l'angle entre $\overline{TL}$, i $\overline{TQ}$, on Q és el punt de tangència de la recta tangent interior s entre la Terra i la Lluna, pertanyen a la Terra. I sigui γ l'angle entre $\overline{TS}$, i $\overline{TL}$. Aleshores, com s'observa a la figura 10, estarem en el límit de l'eclipsi quan $\gamma + \beta = \alpha$, és a dir, quan $r = s$. I per tant, $\gamma + \beta \leq \alpha$, si, i només si, hi ha eclipsi.

Utilitzant la trigonometria, i mirant les rectes paral·leles a les rectes tangents r i s passant per S i L respectivament, tenim que,

$$\begin{aligned}\cos \alpha' &= \cos(\pi - \alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha = -\cos \alpha \\ \overline{TS} \cos \alpha' &= \overline{PP'} - \overline{PT} = R_s - R_t \Rightarrow \cos \alpha = (R_t - R_s)/\overline{TS} \\ \overline{TL} \cos \beta &= \overline{TQ} + \overline{QQ'} = R_t + R_l \Rightarrow \cos \beta = (R_t + R_l)/\overline{TL}\end{aligned}$$

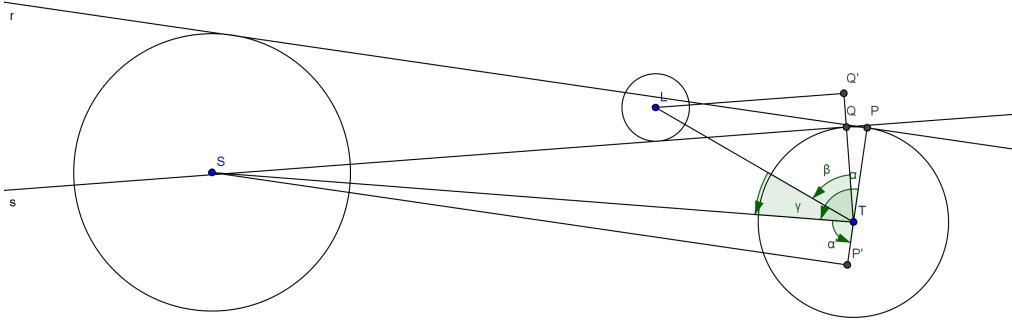


Figura 10: Visualització del pla que conté els centres del Sol, de la Terra i de la Lluna. Amb dos rectes tangents r i s tal que $r = s$, si i només si, estem en el límit de l'eclipsi solar.

Finalment mirem per quins valors de γ ens assegura que hi ha eclipsi sempre, i per quins no hi haurà mai. Utilitzant que el cosinus és decreixent respecte angles entre $[0, \pi]$, i utilitzant els valors de la taula 1.

- Hi haurà eclipsi sempre, quan $\gamma \leq \min(\alpha - \beta) = \min(\alpha) - \max(\beta) \approx 1.395^\circ$
- No hi haurà eclipsi mai, quan $\gamma > \max(\alpha - \beta) = \max(\alpha) - \min(\beta) \approx 1.548^\circ$

S'ha de tenir en compte que en el primer cas es tindria que considerar la Terra esfèrica de radi polar, que és la mínima distància a la que està un punt de la superfície terrestre respecte el seu centre. Però si ho fem, arribarem al mateix valor.

Taula 1: Distàncies mínimes i màximes

	mínim	màxim
Distància entre el Sol i la Terra	147096146.3 km	152103830.8 km
Distància entre la Lluna i la Terra	360894.316 km	411663.483 km

Suposant que tenim la màxima inclinació de l'òrbita de la Lluna, tenim que, aproximadament a 26.287° dels nodes ascendent i descendent, no hi haurà eclipsi. Anem a veure ara quantes fases de lluna nova seguides pot haver-hi eclipsi.

Tenim que el període entre dos passos del mateix node lunar és de 27.2 dies, i el període entre dos fases iguals consecutives és de 29.5, tenint una diferència d'aproximadament 2.3 dies. Això fa que la Lluna s'allunyi $\frac{2.3}{27.2}360^\circ = 30.44^\circ$ aproximadament del node. I comptant els graus de desplaçament del node entre dos fases: $\frac{29.5}{6798.3}360^\circ = 1.56^\circ$. Fa que entre dos fases iguals consecutives, hi hagi $30.44^\circ - 1.56^\circ = 28.88^\circ$ aproximadament de mínim desplaçament respecte l'òrbita de la Lluna.

Per tant, quan el Sol està pròxim a un node lunar, hi haurà un o dos eclipsis consecutius respecte les fase de lluna nova.

5.2.2 Saros

Per la periodicitat de les òrbites, es pot obtenir una periodicitat dels eclipsis. Aquest període s'anomena *saros* T , o cicle de saros. El que ens interessa és estar en les mateixes condicions d'un eclipsi. Així que, la Lluna ha d'estar en la mateixa fase, i el node ascendent en la mateixa posició. Per tant, agafant el període sinòdic i el període draconòtic, el Saros ha de ser múltiple d'aquests dos períodes.

$$T = 29.530589m = 27.212220817n$$

Prenent $m = 223$ i $n = 242$, tenim que $29.531m = 6585.32 \approx 6585.36 = 27.212n$, que és una bona aproximació. Així que el període Saros és de 6585 dies, uns 18 anys i 11 dies. Però passa uns 0.32 dies, és a dir, aproximadament un terç de dia fins que estem exactament en la mateixa fase lunar. Així que, l'eclipsi es veurà 120° al oest respecte a on es va veure l'anterior eclipsi.

A més, com els períodes no coincideixen exactament, aniran apareixen eclipsis per primera vegada. Es diu que un eclipsi neix. En cada cicle de Saros, l'eclipsi va durant més, perquè el Sol s'alinea cada vegada més a prop del node ascendent o descendent. Arriba un moment en que s'alinea completament amb el node ascendent o descendent, arribant al moment àlgid. És l'època en que es veuen els millors eclipsis, sent aquests totals o anulars. Després l'eclipsi comença a durar menys fins que acaba desapareixent, a causa de que el Sol s'allunya del node ascendent o descendent. Es diu que l'eclipsi mor.

Depenent de si l'eclipsi és en el node ascendent o descendent, es té que l'eclipsi vist des de la Terra es veu cada vegada més al nord o més al sud, respectivament.

Utilitzant el programa que hem creat per obtenir dades d'un eclipsi i que es veurà en el capítol 6, veiem un cicle d'eclipsis. On els punts de contacte a l'inici i final de l'eclipsi estan donats en longitud i latitud geogràfica.

Taula 2: Un cicle d'eclipsis

Tipus	Temps inicial			Temps final		Lloc inicial		Lloc final	
Total	14/ 1/1907	5:16	14/ 1/1907	7:01	39.52	50.48	128.45	56.15	
Total	24/ 1/1925	14: 6	24/ 1/1925	15:50	262.45	48.48	-4.92	60.29	
Total	4/ 2/1943	22:50	5/ 2/1943	0:35	125.78	47.28	-136.42	64.29	
Total	15/ 2/1961	7:34	15/ 2/1961	9:19	-8.93	46.83	96.55	67.97	
Total	26/ 2/1979	16:12	26/ 2/1979	17:42	217.04	47.60	-36.27	76.51	
Total	9/ 3/1997	0:46	9/ 3/1997	2:16	84.49	49.71	-147.66	78.31	
Total	20/ 3/2015	9:15	20/ 3/2015	10:30	-47.97	53.86	107.05	84.06	

A partir de la taula podem observar el temps de cicle, 18 anys 11.33 dies aproximadament. Com els punts de contacte inicial i final de l'eclipsi cada vegada són un mica més al nord, observant les seves latituds. Com en cada cicle, l'eclipsi es desplaça una mica més de 120° cap a l'oest, observant les hores o les latituds. I si mirem el temps que duren els eclipsis totals, podem dir que el cicle d'eclipsis està morint.

5.2.3 Equacions fonamentals

Anem a crear un sistema d'equacions, que ens permetrà saber dades aproximades d'un eclipsi en un lloc en concret, donades les posicions del Sol i la Lluna en el dia de l'eclipsi. Per fer això, creem un sistema de coordenades cartesià geocèntric fonamental o de Bessel. Sent l'eix $\tilde{z}$ paral·lel a l'eix d'ombra, direcció Lluna-Sol, i l'eix $\tilde{x}$ pertanyent al pla de l'equador, direcció est. Això ens permetrà simplificar els càlculs, ja que, l'eix $\tilde{z}$ no afectarà en la distància a l'eix d'ombra.

Donat un sistema de referència cartesià equatorial geocèntric, tal que, (α, δ, r) i (α', δ', r') siguin las coordenades esfèriques de la Lluna, i el Sol, respectivament. Ens interessa saber les coordenades dels eixos que volem, en el sistema equatorial. Sent $\vec{u} = (a, d, G)$ el vector Lluna-Sol en el sistema equatorial en coordenades esfèriques. Primer calculem el canvi de coordenades del sistema equatorial al fonamental, i després calcularem a , d , i G .

Com ens interessa que l'eix x es mantingui pertanyent a l'equador, el canvi de coordenades seran dos rotacions. Fent que l'eix z apunti en la direcció al vector $\vec{u}$.

Primer fem una rotació respecte l'eix z d'angle $a + \pi/2$ perquè $\vec{u}$ estigui en el pla yz , i l'eix x apunti cap a l'est respecte $\vec{u}$. I finalment una rotació respecte l'eix x d'angle $d - \pi/2$. Per tant, el canvi de coordenades és

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d - \pi/2) & \sin(d - \pi/2) \\ 0 & -\sin(d - \pi/2) & \cos(d - \pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(a + \pi/2) & \sin(a + \pi/2) & 0 \\ -\sin(a + \pi/2) & \cos(a + \pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin d & \cos d \\ 0 & -\cos d & \sin d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin a & \cos a & 0 \\ -\cos a & -\sin a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin a & \cos a & 0 \\ -\sin d \cos a & -\sin d \sin a & \cos d \\ \cos d \cos a & \cos d \sin a & \sin d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

I aplicant les rotacions inverses, tindrem el canvi de coordenades a la inversa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ -\cos a & \sin a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin d & \cos d \\ 0 & -\cos d & -\sin d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin a & -\cos a & 0 \\ -\sin d \cos a & -\sin d \sin a & -\cos d \\ \cos d \cos a & \cos d \sin a & -\sin d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per tant, sigui (r, A, D) les coordenades esfèriques d'un punt en el sistema equatorial, aleshores, les coordenades en el sistema fonamental, seran

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos D \sin(A - a) \\ r(\sin D \cos d - \cos D \sin d \cos(A - a)) \\ r(\sin D \sin d + \cos D \cos d \cos(A - a)) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Finalment calculem els valors de a , i d , que seran aproximats, però suficients a la pràctica. Igualant vectors, tenim que

$$\begin{aligned} G \cos d \cos a &= r' \cos \delta' \cos \alpha' - r \cos \delta \cos \alpha \\ G \cos d \sin a &= r' \cos \delta' \sin \alpha' - r \cos \delta \sin \alpha \\ G \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Fent una rotació de $-\alpha'$ en l'eix z , és a dir, multiplicant per $\begin{bmatrix} \cos \alpha' & \sin \alpha' & 0 \\ -\sin \alpha' & \cos \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tenim que,

$$\begin{aligned}
G \cos d \cos(a - \alpha') &= r' \cos \delta' - r \cos \delta \cos(\alpha - \alpha') \\
G \cos d \sin(a - \alpha') &= -r \cos \delta \sin(\alpha - \alpha') \\
G \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Com que només ens interessin les equacions en el dia del eclipsi, tenim que, $a \approx \alpha'$ i $\alpha' \approx \alpha$, i per tant, $\sin(a - \alpha') \approx a - \alpha'$, $\sin(\alpha - \alpha') \approx \alpha - \alpha'$, $\cos(a - \alpha') \approx 1$, i $\cos(\alpha - \alpha') \approx 1$. Aplicant-ho a les equacions, tenim que

$$\begin{aligned}
G \cos d &= r' \cos \delta' - r \cos \delta \\
G \cos d(a - \alpha') &= -r \cos \delta(\alpha - \alpha') \\
G \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta
\end{aligned} \tag{5.4}$$

D'on obtenim que,

$$(r' \cos \delta' - r \cos \delta)(a - \alpha') = -r \cos \delta(\alpha - \alpha') \Rightarrow a - \alpha' = \frac{\alpha' - \alpha}{\frac{r' \cos \delta'}{r \cos \delta} - 1}$$

I com passa amb les longituds, les latituds també són pròximes, fent que, $a - \alpha' = \frac{\alpha' - \alpha}{r'/r - 1}$.

En el 5.3, fent una rotació de δ' en l'eix y, és a dir, multiplicant per $\begin{bmatrix} \cos \delta' & 0 & \sin \delta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta' & 0 & \cos \delta' \end{bmatrix}$, tenim que,

$$\begin{aligned}
G \cos(d - \delta') &= r' - r \cos(\delta - \delta') \\
G \cos d(a - \alpha') &= -r \cos \delta(\alpha - \alpha') \\
G \sin(d - \delta') &= -r \sin(\delta - \delta')
\end{aligned} \tag{5.5}$$

I aproximant de la primera i segona equació, tenim que,

$$\begin{aligned}
G &= r' - r \\
G(d - \delta') &= -r(\delta - \delta')
\end{aligned} \tag{5.6}$$

I per tant, $d - \delta' = \frac{\delta' - \delta}{r'/r - 1}$.

Distància a l'eix d'ombra

Siguin (ξ, η, ζ) , (x, y, z) les coordenades del lloc d'observació, i de la lluna, en el sistema fonamental, respectivament. Aleshores,

$$\Delta^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

determina la distància al eix d'ombra, per com està construït el sistema de coordenades, i perquè la Lluna està a distància zero de l'eix. Ara veurem quina és la distància Δ a l'eix d'ombra pels punts del cons que tinguin alçada ζ . Utilitzant que els punts del con a alçada ζ estan equidistants de l'eix d'ombra. Això ens permetrà saber quan s'està dins o fora dels cons de penombra o d'ombra.

Primer, calculem l'angle dels cons, és a dir, l'angle que hi ha entre les rectes generatrius dels cons respecte l'eix d'ombra. Com veiem en la figura 11, tenim que els angles f_1 i f_2 , en els cons de penombra i d'ombra respectivament, són tals que

$$\overline{ST} \sin f = R_s \pm R_l \Rightarrow \sin f = \frac{R_s \pm R_l}{z' - z},$$

on hem utilitzat la trigonometria en els triangles NSL i QSL , sent z' l'alçada del Sol. I que f representa els dos angles.

Ara tenim que, les alçades de V i U , són $c_1 = \overline{VA} = z - R_l / \sin f_2$ i $c_2 = \overline{UA} = z + R_l / \sin f_1$ respectivament. Aleshores, la distància L d'un punt del con de penombra o d'ombra a l'alçada ζ respecte l'eix d'ombra, serà

$$L = (c - \zeta) \tan f,$$

on c representa c_1 i c_2 depenent de quin con estem utilitzant.

Sigui $i = \tan f$ i $l = c \tan f$ la distància pels punts d'alçada 0. Aleshores ens queda que

$$L = l - i\zeta.$$

S'ha de tenir en compte que si L és negatiu, és que estem en un eclipsi total.

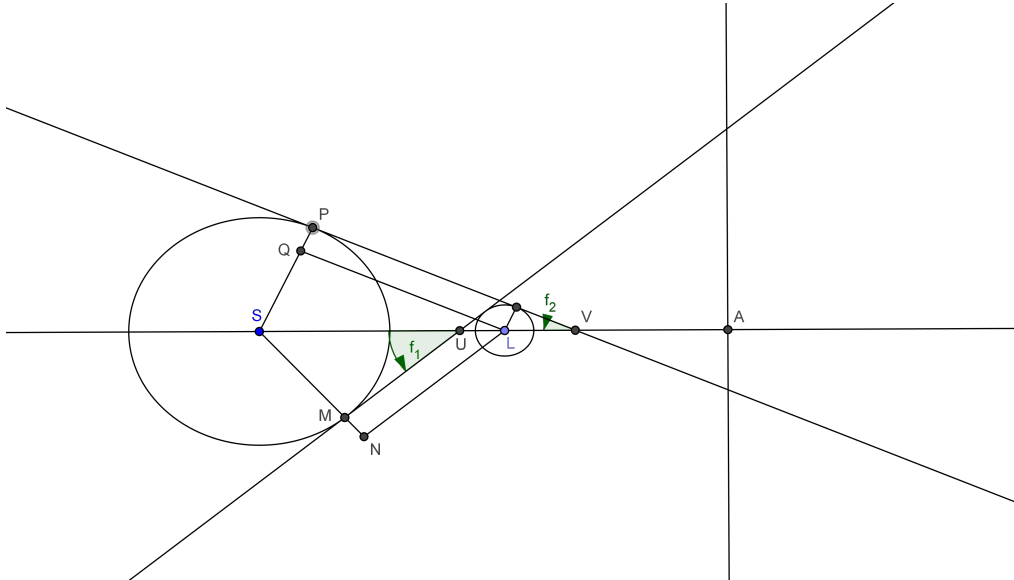


Figura 11: Visualització dels vèrtexs i angles dels cons de penombra i d'ombra, en un pla qualsevol que contingui els centres del Sol i la Lluna.

Finalment podem dir que en un punt començara o acabara un eclipsi, quan

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = (l - i\zeta)^2 = L^2.$$

Que es pot posar millor, parametritzant en coordenades polars

$$\begin{aligned}\xi &= x + (l - i\zeta) \cos Q, \\ \eta &= y + (l - i\zeta) \sin Q.\end{aligned}$$

Grau d'enfosquiment

Definim el grau d'enfosquiment G , a la fracció de diàmetre aparent del Sol que està ocult per l'observador, a causa de la Lluna. Considerant el diàmetre pertanyent a la recta entre els centres del Sol i la Lluna vist per l'observador. Amb molta aproximació tindrem que

$$G = \frac{L_1 - \Delta}{L_1 + L_2},$$

on L_1 i L_2 són les distàncies del con de penombra i del con d'ombra, a l'eix d'ombra a l'alçada de l'observador. Sabent que $L_2 < 0$ pels eclipsis totals. I quan l'observador està veient un eclipsi anular, és a dir que $\Delta < L_2$, aleshores $G = \frac{L_1 - \Delta}{L_1 + L_2} - \frac{\Delta}{L_1 + L_2}$, traient part de l'enfosquiment que es veu a l'altre cantó del diàmetre.

Per exemple, si $\Delta = L_1$, aleshores $G = 0$. Si $\Delta = -L_2$ en un eclipsi total, aleshores $G = 1$, justament quan es deixa de veure l'eclipsi. Si $\Delta = 0$ en un eclipsi anular, aleshores $G = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$, no arribant a 1, ja que estan en l'eix d'ombra, encara es veu una part petita del Sol. S'ha de tenir en compte que en l'eclipsi anular, quan $\Delta < L_2$, aleshores $G = \frac{L_1 + \Delta}{L_1 + L_2}$ ens dona el grau d'enfosquiment que apareix per l'altre costat del diàmetre.

Les variables d'un eclipsi

Hi ha dos tipus de variables, les independents a l'observador i les que no.

Les variables independents al observador són anomenats *elements Besselians*, que són els valors de a , d , x , y , l , e i , vistos anteriorment. Sent x i y les dues primeres coordenades de la Lluna en el sistema fonamental. Per obtenir els valors dels *elements Besselians*, es fa una previsió de les òrbites i es calculen els valors cada cert temps. Normalment es tenen unes efemèrides, taules de dades, dels valors desitjats per certs temps. Després, interpolant es poden obtenir valors aproximats per un temps t donat.

Les variables que depenen de l'observador, són:

- (μ, φ, ρ) : Les coordenades del observador en el sistema de coordenades equatorial. φ és la latitud geogràfica del lloc d'observació, i ρ la distància de l'observador al centre de la Terra que depèn de φ .

- $\theta = \mu - a$: Ascensió recta de l'observador respecte l'eix z del sistema fonamental. Sigui μ_1 l'ascensió recta del meridià de Greenwich en el sistema equatorial. Aleshores $\omega = \mu - \mu_1$, on ω és la longitud geogràfica del lloc d'observació.
- ξ, η, ζ : les coordenades del lloc d'observació en el sistema fonamental.
- Q : el paràmetre pertanyen a l'interval $[0, 2\pi]$, i que serveix per parametritzar els punts respecte l'eix d'ombra. Sent Q l'angle entre el vector $(\xi - x, \eta - y)$ i l'eix x .

També s'ha de tenir en compte les variacions respecte el temps de les variables. Sent les variacions molt constants pel fet de que els moviments són bastant uniformes. Sigui A una variable, A' serà la variació respecte el temps.

Obtingudes les variables besselianes, les seves variacions respecte el temps, i les equacions:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} &= P \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \xi - x &= \Delta \cos Q, \\ \eta - y &= \Delta \sin Q, \\ L &= l - i\zeta. \end{aligned}$$

on P és la matriu de canvi de coordenades del sistema equatorial al sistema fonamental. I siguin m i M tals que $x = m \cos M$ i $y = m \sin M$, les coordenades polars del punt (x, y) en el pla fonamental xy .

Ara ja estem preparats per obtenir les diverses dades d'un eclipsi.

5.2.4 Dades generals d'un eclipsi

Anem a veure quines són les diferents dades generals que es poden obtenir d'un eclipsi. Per no treballar amb valors molt grans es pot agafar el radi equatorial de la Terra R_t com a unitat.

Per facilitar els càlculs, observem tres fets:

- La distància d'un punt de la superfície terrestre respecte al centre de la Terra no varia gaire, i per tant agafarem $\rho = R_t$ el radi equatorial. D'aquesta manera tindrem una esfera que englobi tota la Terra. I quan trobem la latitud φ per un cert problema, resoldrem el problema un altre cop amb la ρ que es correspongui amb φ
- La distància d'un punt del con de penombra respecte l'eix d'ombra a prop de la Terra tampoc varia gaire el dia de l'eclipsi. Per tant agafarem $L = l$. I quan trobem ζ per un cert problema, resoldrem el problema un altre cop amb $L = l - i\zeta$.

- El dia de l'eclipsi, agafarem $\zeta = 0$ pels punts en que es veu el Sol a l'horitzó. Ja que l'angle entre l'eix d'ombra i l'eix del Sol al lloc d'observació és suficientment petit.

1. Límit temporal de l'eclipsi

Ens interessa saber en quin moment comença i acaba l'eclipsi. Serà quan el con de penombra sigui tangent a l'el·lipsoide. En aquest cas, estarem en l'horitzó i podem considera $\zeta = 0$.

Per tant, començara o acabara l'eclipsi quan $l + \rho = m$. És a dir, quan la circumferència del con de penombra sigui tangent a la circumferència de la Terra en $\zeta = 0$.

Les variacions de l , x' , i y' en el dia de l'eclipsi són molt petites, i per tant, les podem considerar constants per poder calcular uns límits temporals aproximats. Per fer-ho, aproximem per Taylor x i y respecte el temps, agafant un instant intermedi T_0 :

$$\begin{aligned}x &= m_0 \cos M_0 + (n \cos N)t \\y &= m_0 \sin M_0 + (n \sin N)t\end{aligned}$$

on $m_0 \cos M_0 = x_0$, $m_0 \sin M_0 = y_0$, $n \cos N = x'$, i $n \sin N = y'$. I aplicant-ho a les equacions que han de complir, tenim que:

$$\begin{aligned}(\rho + l) \cos M &= m_0 \cos M_0 + (n \cos N)t \\(\rho + l) \sin M &= m_0 \sin M_0 + (n \sin N)t\end{aligned}$$

Aplicant una rotació d'angle N tenim que:

$$\begin{aligned}(\rho + l) \cos(M - N) &= m_0 \cos(M_0 - N) + nt \\(\rho + l) \sin(M - N) &= m_0 \sin(M_0 - N)\end{aligned}$$

Quedant les equacions

$$\begin{aligned}\sin \Psi &= \frac{m_0}{\rho + l} \sin(M_0 - N) \\t &= \frac{\rho + l}{n} \cos \Psi - \frac{m_0}{n} \cos(M_0 - N)\end{aligned}$$

on $\Psi = M - N$.

S'obtenen dos valors de Ψ que permeten obtenir els dos valors de t desitjats. Sent $T = t + T_0$ els valors d'inici i final de l'eclipsi. Aleshores calculem x i y en l'instant T . De tal manera que $(\rho \cos M, \rho \sin M, 0)$ seran les coordenades del punt de contacte. Utilitzant la matriu P^{-1} de canvi de coordenades, trobarem les coordenades en el sistema equatorial, i per tant, la latitud φ .

Finalment com hem comentat anteriorment, iterem per la ρ de la latitud trobada. Trobant uns temps d'inici i final de l'eclipsi gairebé iguals, però més

aproximat. I els punts de contacte a l'inici i final. I amb aquest segon pas els valors trobats ja els podem considerar com a bons.

2. Corba de contacte amb l'horitzó

Són els punts en que comença o acaba l'eclipsi, i l'eclipsi es veu a l'horitzó. Per tant, són punts tals que $\zeta = 0$, i $\Delta = l$. Tenim que

$$\begin{aligned}\xi - x &= l \cos Q, \\ \eta - y &= l \sin Q \\ \rho^2 &= \xi^2 + \eta^2.\end{aligned}$$

És a dir, suposant la Terra esfèrica de radi equatorial, són els punts A_1 i A_2 d'intersecció entre dos circumferències en el pla $\zeta = 0$, com es veu en la figura 12. La del con de penombra amb radi l , i la de centre la Terra i radi ρ . Sent la distància entre els centres $m = r + s$. Considerant que $\rho > l$, no hi haurà punts de contacte quan $l + \rho < m$ o $l + m < \rho$. En el primer cas no hi ha eclipsi, i en el segon cas tenim eclipsi total o anular, amb el con de penombra totalment en contacte amb la Terra.

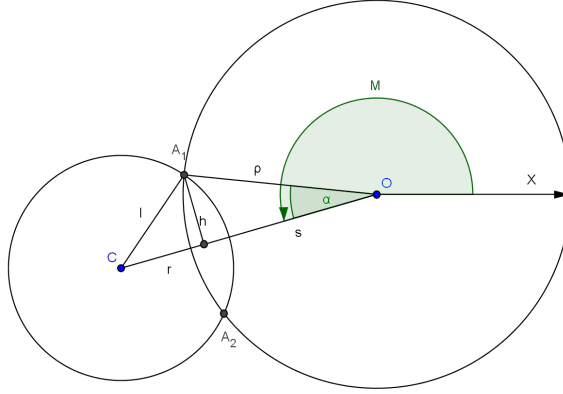


Figura 12: El pla $\zeta = 0$ on podem observar per quines rectes del con, representades per Q tindran contacte amb la Terra. I per quins punts que tenen el Sol a l'horitzó veu l'eclipsi.

Aleshores, utilitzant la trigonometria tenim que,

$$h^2 = l^2 - r^2 = \rho^2 - s^2 \Rightarrow l^2 - m^2 - s^2 + 2ms = \rho^2 - s^2 \Rightarrow s = \frac{l^2 + m^2 - \rho^2}{2m}.$$

Fent que l'angle $\alpha = \widehat{A_iOC} = \arccos(s/l) \in (0, \pi)$. I per tant els punts d'intersecció són els punts $(\rho \cos(M \pm \alpha), \rho \sin(M \pm \alpha), 0)$ en el sistema de

coordenades fonamental. Aleshores fent els mateixos passos que en límit temporal de l'eclipsi, acabem obtenint els punt desitjats.

A partir α podem obtenir tots els punts a l'horitzó en el que es veu l'eclipsi. Seran els punts $(\rho \cos(M + \beta), \rho \sin(M + \beta), 0)$ tal que $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$. Agafant ρ el radi equatorial, i iterant un cop respecte ρ per obtenir una millor aproximació.

Si volem saber si l'eclipsi comença o acaba pels lloc obtinguts, mirem la variació de $L - \Delta$, on L és la distància del con a l'eix d'ombra a l'alçada ζ , i Δ és la distància del observador a l'eix d'ombra. Començara l'eclipsi si la variació és positiva, i acabara si la variació és negativa.

Utilitzant que $(\Delta^2)' = 2\Delta\Delta' = 2(\xi - x)(\xi' - x') + 2(\eta - y)(\eta' - y') = 2(\Delta \cos Q)(\xi' - x') + 2(\Delta \sin Q)(\eta' - y')$, tenim que

$$(L - \Delta)' = (l' - i(\zeta + i\zeta')) - ((\xi' - x') \cos Q + (\eta' - y') \sin Q)$$

Les úniques variacions que s'han de calcular són les de ξ , η , i ζ , les altres ja les tenim. Les seves variacions seran

$$\begin{aligned}\xi' &= \theta' \rho \cos \varphi \cos \theta, \\ \eta' &= -d' \rho \sin \varphi \sin d - \rho \cos \varphi (d' \cos d \cos \theta - \theta' \sin d \sin \theta), \\ \zeta' &= d' \rho \sin \varphi \cos d - \rho \cos \varphi (d' \sin d \cos \theta + \theta' \sin d \sin \theta),\end{aligned}$$

tenint en compte que ni φ , ni ρ varien.

3. Intersecció del con amb la superfície terrestre

Ens interessa obtenir els punts (ξ, η, ζ) en que comença o acaba l'eclipsi en un instant t . Per tant els punts desitjats seran aquells que $\Delta = L$. Hi ha varies formes de calcular-los, variant el valor de Q . Que utilitzant el que hem vist en la corba de contacte amb l'horitzó, és fàcil calcular els valors de Q pels quals hi ha intersecció. Veiem tres possibilitats:

- Obtenir la parametrització de les rectes del con de penombra, obtenint els punts que pertanyen a l'esfera de radi ρ amb centre la Terra. És a dir, els punts que tinguin mòdul ρ . Agafant el punt en que es veu l'eclipsi s'obté una millor aproximació de ρ . I tornant-ho a fer, acabem obtenint una molt bona aproximació del punt desitjat.

Si tenim la parametrització de la recta en el sistema equatorial, aleshores també tenim la parametrització de l'el·lipsoide de forma senzilla. De tal manera que podem obtenir el punt d'intersecció amb un sol pas.

- Resoldre de forma analítica el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned}
\xi &= \rho \cos \varphi \sin \theta, \\
\eta &= \rho \sin \varphi \cos d - \rho \cos \varphi \sin d \cos \theta, \\
\zeta &= \rho \sin \varphi \sin d + \rho \cos \varphi \cos d \cos \theta, \\
\xi - x &= L \cos Q, \\
\eta - y &= L \sin Q,
\end{aligned}$$

- Utilitzant que L no varia gaire, iterant respecte $L = l$. Començant pel punt $(\xi, \eta, \zeta) = (x + l \cos Q, y + l \sin Q, \sqrt{\rho^2 - \xi^2 - \eta^2})$ en el sistema de coordenades fonamental. Trobem una aproximació de ρ i ζ , i ho tornem a calcular a partir de $L = l - i\zeta$. Obtenint una molt bona aproximació del punt desitjat.

4. Corba màxima foscor

Conté els punts en que és màxima la foscor de l'eclipsi en cada instant de temps. A menys que hi hagi un eclipsi total on el punt (x, y, ζ) seria el de màxima foscor, podem suposar que estarà en l'horitzó. Sent el punt $(\rho \cos M, \rho \sin M, 0)$ el més pròxim a l'eix d'ombra. Aleshores com hem fet anteriorment iterem per ρ , i acabem obtenint el punt desitjat.

5. Corbes nord i sud

Són les corbes que limiten els llocs en que es veu part d'un eclipsi i dels que no el veuen. Pel moviment respecte el Sol i la Terra, són dos corbes aproximadament al nord i al sud de l'eclipsi. D'aquí el seus noms. De tal manera que el con de penombra es mou respecte aquestes corbes de manera bastant rectilínia. S'ha de dir que no sempre tenim les dos corbes, a vegades només n'hi ha una, si l'eclipsi passa molt al nord o molt al sud.

Aleshores els punts que busquem en cada instant de temps, seran aquells que pertanyen al con de penombra però no arriben a entrar. Seran dos que limitaran els punts pels quals comença l'eclipsi, i pels quals acaba. És a dir $\Delta = L$, i $(\Delta - L)' = 0$. Per tant les equacions que ens interessa són

$$\begin{aligned}
\xi - x &= L \cos Q, \\
\eta - y &= L \sin Q, \\
\xi &= \rho \cos \varphi \sin \theta, \\
\eta &= \rho \sin \varphi \cos d - \rho \cos \varphi \sin d \cos \theta, \\
\zeta &= \rho \sin \varphi \sin d + \rho \cos \varphi \cos d \cos \theta, \\
0 &= l' - (i'\zeta + i\zeta') - (x' - \xi') \sin Q + (y' - \eta') \cos Q \\
\xi' &= \theta' \rho \cos \varphi \cos \theta, \\
\eta' &= -d' \rho \sin \varphi \sin d + \rho \cos \varphi (\theta' \sin d \sin \theta - d' \cos d \cos \theta), \\
\zeta' &= d' \rho \sin \varphi \cos d - \rho \cos \varphi (\theta' \cos d \sin \theta + d' \sin d \cos \theta),
\end{aligned}$$

El problema està en que és difícil obtenir els punts que compleixen les equacions. La millor manera és donar-li un valor adient a Q respecte al nord i al sud. A partir de Q s'obté el lloc i la variació de $(\Delta - L)$. I aleshores variant Q , és busca el lloc tal que $(\Delta - L)'$ sigui la més pròxima a 0. Observant els canvis de signe de $(\Delta - L)'$ respecte Q .

Una Q adient per començar, és aquella que està a 90° de l'angle del vector moviment de l'eix d'ombra (x', y') . Siguin (n, N) les coordenades polars, és a dir, tals que $x' = n \cos N$ i $y' = n \sin N$. Aleshores les Q adients són $Q = N \pm \pi/2$. A més si utilitzem el que hem vist en els punts de contacte a l'horitzó, podem saber el rang de les Q en que no hi ha intersecció amb la Terra.

De manera semblant podríem intentar obtenir les corbes nord i sud per un cert grau d'enfosquiment. Les corbes anteriors es correspondrien amb un grau d'enfosquiment 0.

Hem obtingut les diferents dades respecte el con de penombra, de manera molt similar s'obtenen les dades respecte el con d'ombra. Però s'ha de tenir en compte alguns canvis de signe, que determinen els eclipsis totals o anulars.

I que la L del con d'ombra no la podem aproximar per l del con. Però com que és un valor molt petit, es busca el contacte de l'eix d'ombra amb la Terra. Obtenint la ζ del punt. I a partir de la ζ , calculem els punts que es desitgin, agafant $L = l - i\zeta$.

5.2.5 Dades d'un eclipsi en un lloc d'observació

Ara ens interessa saber dades d'un eclipsi per un lloc en concret, sent ω i φ la longitud i la latitud geogràfica del lloc.

1. Límit temporal de l'eclipsi

Sigui (ξ, η, ζ) les coordenades del lloc d'observació en el sistema fonamental en un instant T , ens interessa saber quan comença i quan acaba l'eclipsi per l'observador. És a dir, l'instant T tal que

$$\begin{aligned}\xi - x &= L \cos Q, \\ \eta - y &= L \sin Q,\end{aligned}$$

Donat un temps T_0 aproximat a partir de les dades generals de l'eclipsi. Aproximem les incògnites respecte el temps:

$$\begin{aligned}L \cos Q &= (\xi_0 - x_0) + (\xi' - x')t, \\ L \sin Q &= (\eta_0 - y_0) + (\eta' - y')t.\end{aligned}$$

Siguin m, M, n , i N tals que $m_0 \cos M_0 = \xi_0 - x_0$, $m_0 \sin M_0 = \eta_0 - y_0$, $n \cos N = \xi' - x'$, i $n \sin N = \eta' - y'$. Aleshores, com hem fet en el límit temporal de l'eclipsi en les dades generals, obtenim els instants de temps en que comença i acaba l'eclipsi per l'observador.

2. Màxim de l'eclipsi

Serà quan el grau d'enfosquiment del punt sigui màxim. És a dir, quan $G' = 0$. Però tenint en compte que L del con de penombra no varia gaire, i que L del con de penombra és bastant petit. Podem aproximar el temps per quan $\Delta' = 0$.

Utilitzant el que hem vist en límit temporal de l'eclipsi, sent $\Psi = Q - N$, aleshores tindrem que

$$\begin{aligned}\Delta \cos \Psi &= m_0 \cos(M_0 - N) + nt, \\ \Delta \sin \Psi &= m_0 \sin(M_0 - N).\end{aligned}$$

De tal manera que $\Delta^2 = m_0^2 \sin^2(M_0 - N) + (m_0 \cos(M_0 - N) + nt)^2$. Al ser m_0 i M_0 constants, i al varia molt poc N , podem considerar $m_0^2 \sin^2(M_0 - N)$ constant. Fent que tinguem Δ mínima quan $|m_0 \cos(M_0 - N) + nt|$ sigui mínim. És a dir, quan $t = -\frac{m_0 \cos(M_0 - N)}{n}$. On $\Delta = |m_0 \sin(M_0 - N)|$ serà el valor mínim que tindrà a temps $T_0 + t$.

Si es vol millor precisió, aleshores podem mirar els valors de G pròxims a $T_0 + t$.

3. Visió de l'eclipsi

Ens interessa saber com es veurà l'eclipsi en un moment donat des d'un lloc d'observació. Per fer-ho, necessitarem un pla definit per dos eixos e_1 i e_2 , que representi la posició del Sol i la Lluna vistes per l'observador. De tal manera, que l'origen sigui el centre del Sol.

Els radis del Sol i la Lluna representaran angle de visió del Sol i la Lluna. Aleshores agafem com a unitat, una que representi la visió del Sol a una certa distancia. Aleshores calculant els angles de visió dels radis del Sol i de la Lluna, i l'angle entre els centres del Sol i la Lluna. I obtenint l'angle del centre de la Lluna respecte l'eix e_1 , es tenen totes les dades per representar la visió de l'eclipsi en un temps donat.

Anem a veure com obtenir una representació aproximada, a partir dels sistema fonamental. Tenint les alçades del lloc d'observació ζ , de la Lluna r , i del Sol r' . Aleshores tenim les distàncies entre ells de forma molt aproximada. Sent $\arcsin(R_l/r)$ i $\arcsin(R_s/r')$, els angles de visió de la Lluna i del Sol respectivament.

Agafem com a eixos e_1 i e_2 , els dos primers eixos del sistema fonamental. Sigui Q tal que

$$\begin{aligned}\xi - x &= \Delta \cos Q, \\ \eta - y &= \Delta \sin Q.\end{aligned}$$

Aleshores $Q + \pi$ determina l'angle entre l'eix e_1 i el vector posició del centre de la Lluna, de manera molt aproximada.

I finalment el grau d'enfosquiment G permet dibuixar la circumferència de la Lluna de tal manera, que l'eix Sol-Lluna quedarà ocult amb la fracció que tinguem de G .

5.3 Eclipsi lunar.

Els eclipsis lunars apareixen quan la Terra s'interposa entre el Sol i la Lluna, apareixent en la fase de lluna nova. Hi han tres tipus d'eclipsis:

- *Eclipsi penombra* quan la Lluna entra en el con de penombra de la Terra.
- *Eclipsi parcial* quan la Lluna està parcialment en el con d'ombra.
- *Eclipsi total* quan la Lluna està totalment dins el con d'ombra.

No hi ha eclipsis anulars com en el cas dels eclipsis solars. Això és a causa de que el con d'ombra de la Terra és més gran que el de la Lluna, suficient perquè el vèrtex del con d'ombra estigui sempre més lluny que la Lluna.

No entrarem en més detall en els eclipsis de Lluna, ja que, geomètricament és com l'eclipsi de Sol que ja hem vist. La diferència important és que el lloc d'observació és independent. Ja que els que estiguin en la zona de nit veuran la Lluna de forma semblant.

Però sí que s'ha de tenir en compte que a causa de l'atmosfera terrestre, la Lluna és il·luminada encara que es produeixi un eclipsi total. Això és a causa de la refracció per l'atmosfera terrestre, fent que els raigs de llum es desviïn quan arriben a la Terra. De tal manera que el vèrtex del con d'ombra estigui més a prop del que tindria que estar si els rajos de llum no es desviessin. Permetent veure la Lluna d'un color roig fosc.

6 Construcció d'una calculadora d'eclipsis

L'objectiu d'aquesta secció és crear el cos de la calculadora d'eclipsis. És a dir, un conjunt de programes que permetin obtenir les diferents dades d'un eclipsi solar o lunar. Sense entrar en la part d'interacció amb l'usuari, o gestió de fitxers. On seria una part més d'informàtica.

S'ha de dir que si es volgués una calculadora d'altres tipus d'eclipsis, fent petites modificacions es podria obtenir una calculadora per aquests eclipsis. A causa de que geomètricament és gairebé igual.

Per fer-ho primer veurem com obtenir les posicions del Sol, la Lluna i la Terra. Tot seguit donarem els detalls tècnics de la nostra implementació. I finalment algunes dades que podem obtenir dels programes creats.

6.1 Posicions del Sol, la Lluna, i la Terra

Primer de tot ens interessa saber les posicions dels cossos celestes que intervenen. En el nostre cas són la Terra, el Sol, i la Lluna. Per fer això utilitzarem les efemèrides creades pel JPL (Jet Propulsion Laboratory), per les seves pròpies missions espacials. Les podem trobar "<http://ssd.jpl.nasa.gov>". Són d'ordre públic i ens permeten tenir una molt bona aproximació de les posicions del Sol, els planetes i la Lluna. Això ens permetrà poder calcular els eclipsis passats i futurs. I la millor manera de comprovar la precisió de les efemèrides, és que els eclipsis passats que calcularem es corresponguin amb el succeïts. I d'igual manera pels futurs quan succeeixin.

6.1.1 Efemèrides del JPL

Clàssicament unes efemèrides eren taules que contenien la posició diària d'astres de l'esfera celeste. Creades a partir de moltes observacions. A més de servir per poder estudiar el cel, els hi era útil per exemple per la navegació.

Ara són taules de certes dades. En el cas de les del JPL són taules de coeficients de polinomis en l'espai vectorial dels polinomis de Tchebitchev. Els polinomis interpolen les posicions dels diferents astres, en un cert sistema de referència. S'ha de dir que els polinomis prenen valors en l'interval $[-1, 1]$. Per tant, si estem en l'interval de temps $[a, b]$ cal fer el corresponent canvi de temps. En el cas que es vulgui la velocitat o l'acceleració es pot derivar el polinomi per obtenir-la.

Normalment l'interval de temps de les taules és de 32 dies, i per cada cos donen g polinomis de n coeficients. Els g polinomis interpolen $32/g$ dies de forma consecutiva. Els valors de n i g s'obtenen d'un fitxer capçalera, que a més d'aquesta informació també dona les constants amb les que ha treballat i un valor c per cada cos. On c representa l'inici dels coeficients del cos en una taula de 32 dies.

Hi ha varies efemèrides en fitxers ASCII o en fitxers binari de diferents sistemes operatius. Es poden trobar a “http://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_eph_export” com a DE***. Cada cert temps s’actualitzen amb les noves observacions que es fan perquè siguin més exactes en el futur. Algunes tenen variacions en les constants utilitzades, per ser d’èpoques diferents, com pot ser l’obliqüetat de l’eclíptica. Algunes a més, afegixen les nutacions i libracions de l’eix de rotació, les seves petites variacions al llarg del temps. Les que hem usat, són les DE405 que van des del 9 de desembre de 1599, fins al 20 de febrer de 2201. Però també n’hi ha que van fins el -3000 si es volen estudiar eclipsis més antics. El DE405 utilitza un sistema de referència equatorial. Sent el centre el baricentre del sistema solar pels planetes i el baricentre del sistema Terra-Lluna. I el baricentre del sistema Terra-Lluna com a centre per la Lluna.

També es dona codi públic per treballar amb elles. Permetent convertir els fitxers en binari, llegir els fitxers, unir fitxers d’èpoques consecutives, Es poden trobar a “<http://www.projectpluto.com>”.

Els fitxers útils per crear un fitxer en binari d’efemèrides són:

- `ephem_util.c`, `ephem_util.h` i `ephem_types`: Són els fitxers secundaris. Serveixen per crear les estructures necessàries per treballar millor amb les dades. A més d’algunes funcions secundaries.
- `convert.c`: Permet convertir un fitxer ASCII a binari. Posant-les en una estructura per poder obtenir-les més fàcilment. Necessita el fitxer `header.***` per tenir la informació de com estan construïdes les taules del DE***.
- `append.c`: A partir de dos fitxers en binari, amb taules consecutives. És a dir, la última taula de dades d’un fitxer és la primera taula de dades del segon fitxer. Crea un nou fitxer binari encadenant les dades dels dos fitxers. D’aquesta manera, podem tenir un sol fitxer binari amb tota la informació.
- `ephem_read.c` i `ephem_read.h`: Són els fitxers secundaris que hem de tenir sempre per poder obtenir les posicions d’un planeta, del Sol, o de la Lluna. Les funcions que usarem són:

– **int** Initialize_Ephemeris(**char** *fileName);

Inicialitza les efemèrides a partir del fitxer en binari que tinguem.

– **void** Interpolate_Position(**double** Time, **int** Target , **double** Position[3]);

A partir d’un temps donat en calendari Julià, el temps universal, d’un enter que representa el cos que volem, ens dona la posició del cos. Per fer-ho obté els valors de C , G , i N del cos. A partir del temps, de C i G obté els N coeficients del polinomi interpolador. Passa el temps al valor de l’interval $[-1, 1]$ que li correspon, on és necessari G que determina el temps utilitzat per interpolat. Finalment, calcula la posició del planeta construint els polinomis de Tchebitchev de forma recursiva multiplicats pels coeficients obtinguts, i avaluats amb el temps corresponent.

- `void Interpolate_State(double Time, int Target, stateType *Planet)`

El mateix que l'anterior, però utilitzant la derivada del polinomi interpolador, ens dóna la velocitat del cos.

Si es treballa amb Windows, s'ha de modificar el codi. Ja que al obrir els fitxers en binari, en lloc d'obrir-los amb les opcions "r" i "w", s'han d'obrir amb les opcions "rb" o "wb". Si no es posa la *b* no llegirà ni escriurà correctament per Windows.

6.2 Calculadora d'eclipsis

Ara que hem vist com obtenir les posicions del Sol, la Terra i la Lluna, ja es pot construir la calculadora d'eclipsis, i obtenir les dades que es desitgin. Usarem el que hem vist en la part teòrica, aprofitarem l'avantatge de la programació en certs casos. Sobretot el fet que l'ordinador pot fer moltíssims càlculs en pocs segons.

Veiem quins fitxers hem creat i quina informació ens donen:

- `temps.c` i `temps.h`: Les funcions per canviar de temps gregorià a temps julià, i a la inversa. S'ha usat les funcions del JPL amb alguna petita modificació.
- `eclipsi.h`: Una estructura per guardar la informació d'un eclipsi en concret. S'hi guarda els temps en què comencen els diferents tipus d'eclipsis (parcial, total, o anular), i quan acaba l'eclipsi. A més també emmagatzema els tipus, els llocs en què comencen i acaben, i el temps en què és màxim l'eclipsi.
- `funcions_posició.c`: A més d'una funció per obtenir les posicions del Sol, la Terra, i la Lluna, també hi ha funcions bàsiques de vectors, més dues funcions per passar de coordenades equatorials, a coordenades geogràfiques, i a la inversa. Hem utilitzat que el Sol passa aproximadament pel meridià de Greenwich al migdia. Necessita el fitxer *ephem_read.c*.
 - Diverses funcions secundàries que operen amb vectors de l'espai. La distància entre dos vectors, la norma d'un vector, la normalització d'un vector, el producte escalar vectorial entre dos vectors, el producte vectorial entre dos vectors, obtenció d'un vector unitari de direcció marcada per dos punts, i la rotació d'un vector a partir d'un eix.
 - `void pos_STL(double Time, double S[3], double T[3], double L[3]);`

entrada: temps $t = \text{Time}$ en Julià.

sortida: les posicions del Sol S , la Terra T , i la Lluna L a l'instant t , en el sistema equatorial cartesià de centre el baricentre del sistema solar. A partir de les ephemerides del JPL s'obtenen les tres posicions.

– **void** state_sist_solar(**double** Time, stateType P[]);

Semblant a l'anterior, però obtenint les posicions i velocitats dels planetes, el Sol, i la Lluna. L'hem fet servir per comprovar el moviment dels cossos a partir del RK4.

– **void** coord_ec_ge(**double** X[3], **double** ang, **double** Time);

entrada: coordenades X en el sistema equatorial cartesià de centre la Terra, que volem convertir en coordenades geogràfiques. L'angle *ang* entre el Sol i l'eix *x* que marca el punt àries, respecte l'equador. *Time*, l'instant de temps en el que estem.

sortida: coordenades en el sistema geogràfic: distància, longitud, i latitud.

– **void** coord_ge_ec(**double** X[3], **double** ang, **double** Time);

Obtenim el canvi invers.

- **funcions_eclipsis.c:** Les funcions per obtenir dades dels eclipsis. Necessita els fitxers *funcions_posicio.c*, *eclises.h*, *temps.c*.

Hem agafat l'esfera com model de la Terra, agafant com a radi el radi equatorial. Si es volgués ser més precís, es podria partir de les dades obtingudes i fer un pas més agafant com a radi el de la latitud obtinguda en el punt de contacte. Com hem vist en el capítol anterior. Però s'ha de dir que, agafant com a radi el radi polar, els temps varien uns 30 segons, i els punts de contacte en menys de mig grau. Podem considerar que són aproximacions prou bones pels nostres objectius.

– **int** eclipse_solar(**double** Time);

Dóna el tipus de l'eclipsi solar en un moment donat. Per fer-ho utilitzem que el límit entre un tipus d'eclipsi i un altre, es correspon amb el moment en què el con de penombra o d'ombra és tangent a la Terra. Moment en el qual, en el pla π que conté els tres centres, una recta és tangent als tres cossos. I depenent del tipus de tangència, interior o exterior entre el Sol i la Lluna, i entre el Sol i la Terra, podem saber com és la tangència de la Terra en els cons.

Per tant, el que hem fet ha sigut mirar el problema dintre el pla π . Obtenint una determinada dada de referencia per cada recta tangent, i comparar-les adientment per trobar el tipus del eclipsi. La dada ha sigut l'angle d'obertura entre el punt *Q* de la circumferència del Sol, i el punt de tangència. On *Q* pertany al segment entre els dos centres de les circumferències. L'angle ha sigut calculat a partir de la trigonometria, com hem vist en el capítol d'eclipsis. Finalment, calculant l'angle entre els tres centres, on el centre del Sol és el vèrtex, tenim tota la informació per comparar els angles. Obtenint fàcilment el tipus.

– **int** eclipse_lunar(**double** Time);

De forma semblant a l'anterior, però ara obtenint els tipus que ens interessa per l'eclipsi lunar. On els papers de la Terra i la Lluna s'intercanvien.

– **void** contacte_eclip(**double** Time, **double** P[3], **int** t);

Dóna les coordenades geogràfiques del punt de contacte en el temps *Time* en el què hi ha un canvi del tipus d'eclipsi solar. O bé el vèrtex del con d'ombra quan està a la superfície de la Terra. És a dir, quan es passa d'eclipsi total a anular, o la inversa. L'enter *t* dóna el tipus de canvi.

Per fer-ho, utilitzem la trigonometria per obtenir el punt de tangència de la recta corresponent, o bé el vèrtex del con d'ombra.

– eclipse_dades_eclipse_solar(**int** any, **int** mes, **int** dia);

Donat un dia en que hi ha eclipsi, iterem cada 15 minuts per trobar els canvis dels diferents tipus d'eclipsi. Quan hi ha un canvi, iterem cada 0.1 minuts per trobar l'instant exacte i obtenir el punt de contacte corresponent. D'aquesta manera recopilem la informació bàsica de l'eclipsi que guardem a l'estructura *eclipse*.

El temps d'iteració podria ser un altre depenent de si es vol ser més o menys precís.

– eclipse_dades_eclipse_lunar(**int** any, **int** mes, **int** dia);

De forma semblant a l'anterior, però ara utilitzant els tipus de l'eclipsi lunar.

– **int** contacte_horitzo(**double** Time, **double** P[3][3], **int** tipus);

Obtenim els dos punts de contacte *P* del con de penombra o del con d'ombra amb l'horitzó de la Terra, i el punt de l'horitzó més pròxim al con. On el *tipus* determina el con, i el *Time* serveix per obtenir els punt en coordenades geogràfiques. L'obtenció dels punts la fem com s'ha vist en la teoria d'eclipsis. I l'enter retornat, determina si hi ha punts (0), o no n'hi ha (-1).

– **int** eclipsi_horitzo(**double** Time, **int** n, **double** P[][3], **int** tipus);

De manera semblant a l'anterior, però obtenint els punts a l'horitzó dintre del con que volem. On $2\pi/n$ determina l'angle al que estan distanciats respecte al centre de la Terra. L'enter retornat determina el nombre de punts trobats.

– **int** punts_contacte(**double** Time, **int** n, **double** punts[][3], **int** tipus);

Obtenim una llista de n punts, dels punts de contacte entre les n rectes equidistants del con amb la Terra. On $2\pi/n$ determina l'angle al que estan distanciats, i el *tipus* determina el con. L'enter retornat determina el nombre de punts trobats.

Per fer-ho intersequem la recta tangent corresponent amb la Terra per obtenir els punts de contacte si n'hi ha, quedant-nos amb el que veu l'eclipsi. Aprofitem que és fàcil obtenir una parametrització de les rectes tangents, i de l'el·lipsoide.

- **int** eclipse_solar_lloc(**double** Time, **double** P[3]);

A partir d'unes coordenades geocèntriques de l'observador i un temps donat, obtenim el tipus d'eclipsi vist per l'observador. Ho fem a partir de comparar angles. L'angle que formen les rectes dels cons amb l'eix d'ombra. I l'angle entre l'eix d'ombra i el vector determinat pel vèrtex d'un con i el lloc de l'observador.

- **double** eclipse_eclip_lloc(**double** any, **double** mes, **double** dia, **double** P[]);

A partir d'un dia d'eclipsi, i d'unes coordenades geocèntriques de l'observador, obtenim les dades d'un eclipsi per l'observador. Semblant al que hem vist de forma general, però ara per un lloc donat. En aquest cas hem volgut ser més precisos, i el pas de temps agafat és d'un segon.

- **void** visio_eclipsi(**double** Time, **double** P[3], **double** info[4], **int** tipus);

A partir d'unes coordenades geocèntriques de l'observador i un temps donat, obtenim la informació necessari per saber com serà la visió de l'eclipsi en el temps donat. On el *tipus* ens determina quin eix x volem, pertanyent a l'horitzó o a l'equador. Les quatre dades obtingudes són els angles de visió dels radis del Sol i la Lluna, i entre els centres dels dos cossos. I l'angle de posició de la Lluna respecte l'eix x .

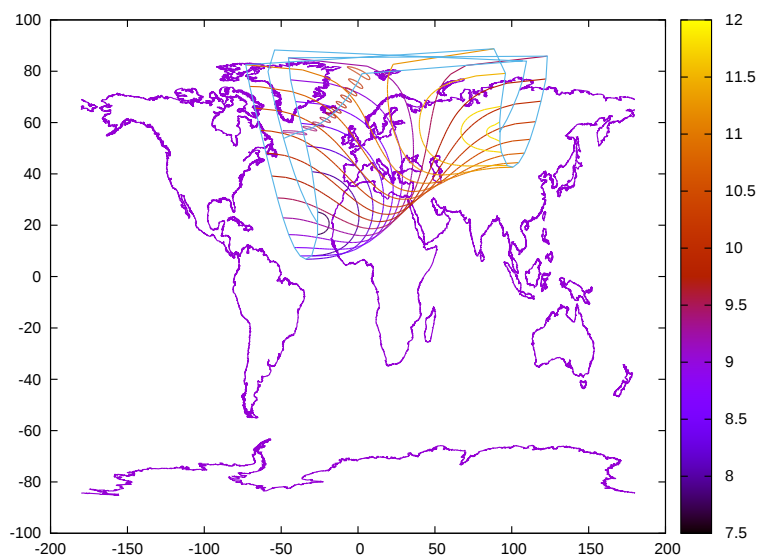
- I els programes principals que necessiten el fitxer *funcions_eclipses.c*:

- eclipses: La funció principal que ens permet obtenir una taula de dades d'eclipsis solars o lunars, entre un any inicial, i un any final. Ens dona el tipus d'eclipsi, quan comença i quan acaba, i els llocs pels quals es comença i s'acaba veient. Les coordenades, són les coordenades geogràfiques, longitud i latitud. Per fer-ho, iterem cada 15 minuts per buscar quan comença un eclipsi. Obtenim les dades de l'eclipsi del dia en el que estem, i després seguim iterant.
- punts_contacte_eclipse.c i mapa_contacte.c: El primera programa escriu els punts de contacte del con de penombra i del con d'ombra d'un eclipsi en un fitxer. Determinats per la longitud i la latitud, a més de l'hora universal en què hi ha el contacte. A més, també escriu en un altre fitxer, la corba de l'eix d'ombra, les corbes de contacte del con de penombra

El segon programa, a partir de les dades escrites pel primer, crea el mapa on podem veure les zones de l'eclipsi. A partir d'un fitxer coords.txt que dóna els punts de la costa, i dels dos fitxers creats per visualitzar l'eclipsi.

- I el segon programa, enlloc de donar les dades, dibuixa com es veurà l'eclipsi solar a l'inici, al final, i en el moment de màxim eclipsi. On el Sol és el que queda tapat, amb el seu centre a l'origen.

Si per exemple mirem el mapa de contacte per l'eclipsi del dia 20 de març del 2015 creat a partir de *punts_contacte_eclipse.c* i *mapa_contacte.c*, tenim que



Podem observar la corba sud, sense haver-la creat. On per aquest eclipsi no hi ha corba nord. Si ara observem el mapa de l'eclipsi de la NASA

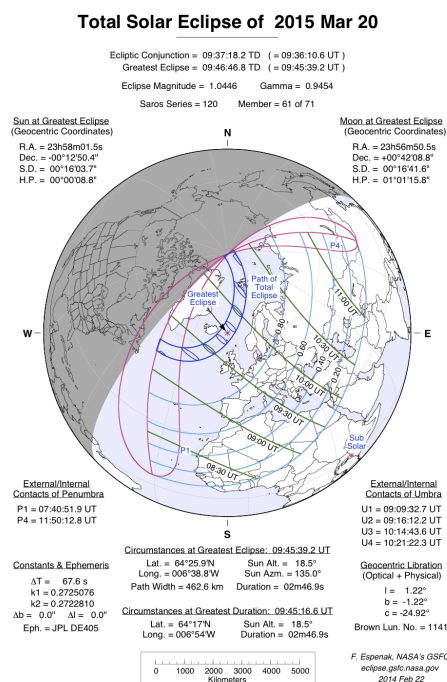


Figura 14: Visualització de l'eclipsi del dia 20 de març del 2015 donat per la NASA

Podem observar com la corba sud es correspon en els dos gràfics, i també la zona d'eclipsi total aproximadament. A més de les corbes de l'horitzó. I els temps d'inici i final veiem com es corresponen gairebé, amb alguns minuts de diferència.

De pas observem quina és la informació d'un eclipsi que donen normalment en un mapa. Donant les línies en que s'arriba a un cert màxim grau d'enfosquiment. I les corbes formades pels llocs en que es veu el màxim de l'eclipsi per un temps en concret. Són millores que es podrien fer en el programa, calculant aquests tipus de corbes.

Aprofitant que ja tenim una funció en que ens dona les posicions dels cossos. Només necessitaríem obtenir les velocitats del Sol i la Lluna, per tenir una aproximació dels punts desitjats. I buscar aquells punts en un temps en concret tals que, estiguin a un cert grau d'enfosquiment G i sigui màxim. A partir del lloc aproximat i amb un pas petit de temps, endavant i endarrere, podríem arribar a trobar aquests punts. I amb els diferents punts dibuixar les diverses corbes.

Si es volen veure altres eclipsis calculats amb el programa, els podeu trobar a l'annex comparats amb els de la NASA.

Finalment observem com es va veure l'eclipsi des de Barcelona, utilitzant el programa de visió d'eclipsis. On el Sol és el que està centrat a l'origen. Agafant com a eix x , l'horitzó cap a l'oest.

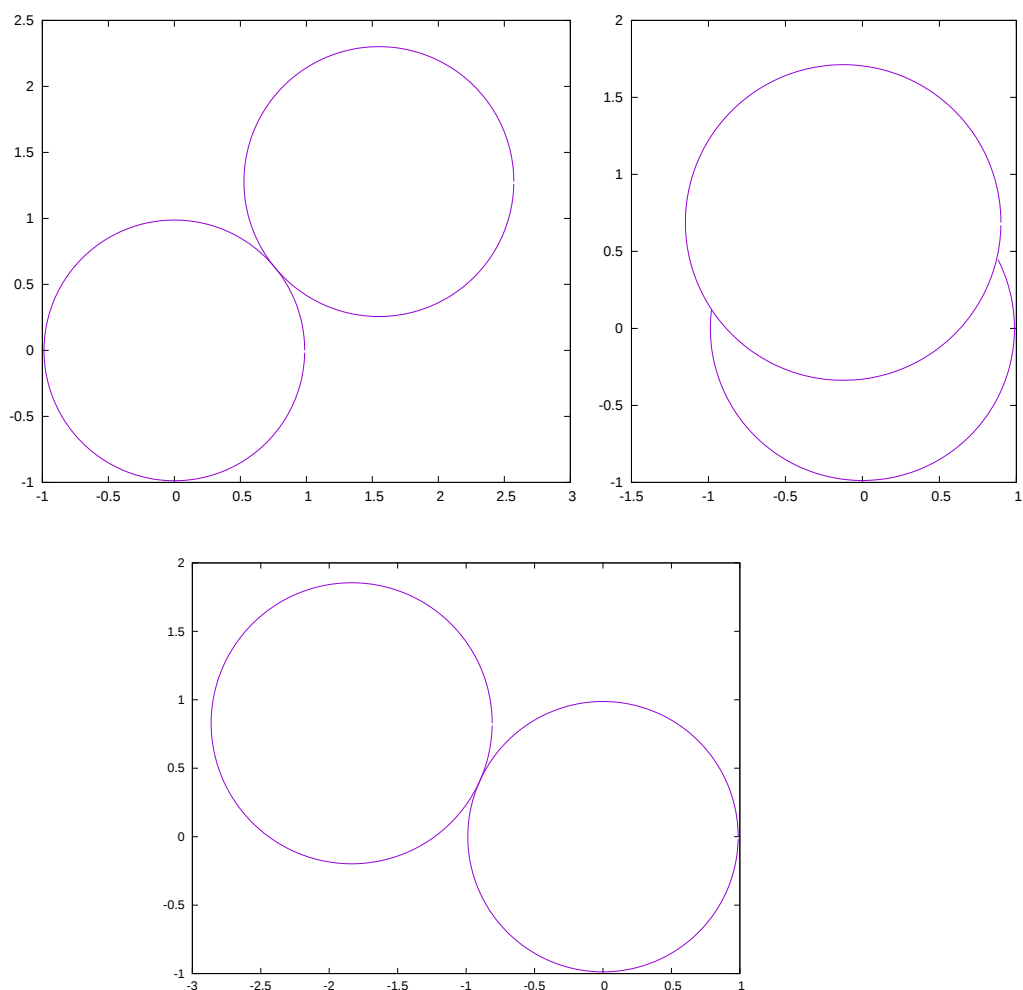


Figura 15: Visió de l'eclipsi vist a Barcelona el dia 20 de març de 2015. D'esquerra a dreta i de dalt a baix, l'inici, el moment màxim i el final de l'eclipsi.

El què hem aconseguit ha sigut crear diversos programes per obtenir totes les dades que ens interessa d'un eclipsi. Ara només caldria ajuntar-ho tot, millorant algunes petites coses, per acabar creant una calculadora d'eclipsis. On es podria afegir les corbes nord i sud amb un cert grau d'enfosquiment.

Aquesta part ja seria més de programació sobretot la part d'interacció amb l'usuari, i un sistema per treballar amb els diversos fitxers. Per exemple, en la visió d'un eclipsi en un lloc es podria fer una animació. O una animació d'un eclipsi a la Terra, veient-se les diverses zones. La de dia i de nit, la zona d'eclipsi parcial, i la zona d'eclipsi total o anular.

7 Conclusions

Gràcies a les efemèrides del JPL, hem sigut capaços d'obtenir dades d'un eclipsi de forma senzilla. On s'ha de dir que les efemèrides amaguen un gran treball. Mirant les dades dels eclipsis observats i de les dades obtingudes a partir dels programes, arribem a la conclusió que la precisió de les efemèrides del JPL, i que els nostres programes funcionen correctament. Tenint gran mèrit la precisió aconseguida en les efemèrides, permetent així poder estudiar molt millor el sistema solar.

Poden haver petits errors en el temps i posició quan s'intenten obtenir certes dades d'eclipsis. Aquestes poden ser degudes a la falta de precisió en alguns càlculs, per haver aproximat algunes dades, utilitzat un cert model per la Terra, o per un error de les efemèrides utilitzades. Però s'ha de dir que els petits errors no són gaire importants. Només en el cas d'eclipsis totals o anulars, hem de ser més rigorosos si volem trobar amb la millor precisió possible la zona de l'eclipsi total o anular.

També s'ha pogut observar el cicle de Saros. Observant la periodicitat dels moviments del Sol i la Lluna, al menys per un temps gran pels humans.

Hem de dir que si no fos per les efemèrides del JPL, i la programació no seria gens fàcil. Això ens mostra el gran mèrit de l'antiguitat, què amb tecnologies menors fossin capaços d'estudiar els moviments dels astres i dels eclipsis. Fins i tot de predir-los, encara que la periodicitat ajudava bastant.

També hem de dir que el sistema fonamental és molt útil per obtenir dades d'un eclipsi amb pocs càlculs. Per això va ser desenvolupat al segle XIX quan no hi havia la programació.

Referències

- [1] Aubanell, Anton; Benseny, Antoni; Delshams, Amadeu: Eines bàsiques de càlcul numèric, (pàg 201-...)
- [2] Dahlquist, G. ; Björck, A. Numerical Methods. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1974.
- [3] de Orús, Juan José; Català, Maria Asunción; Núñez, Jorge: Astronomía esférica y mecánica celeste,
- [4] Gil, F. Javier: Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos
- [5] Abad, Alberto; Docobo, José Ángel; Elipe Antonio: Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos
- [6] Vincent, J. Martínez; Miralles; Joan A.; Marco, Enric: Astronomia fonamental
- [7] <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>

8 Annex

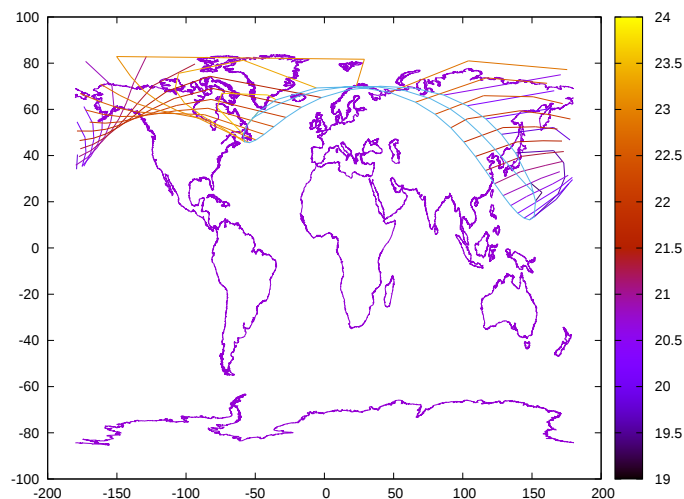


Figura 16: Visualització de l'eclipsi del dia 19 de maig de 1985 creat amb el nostre programa. Comença l'eclipsi a les 19:19 i acaba a les 23:42.

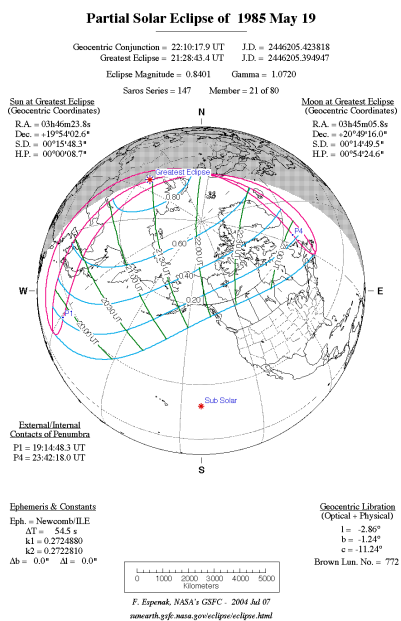


Figura 17: Visualització de l'eclipsi del dia 19 de maig de 1985 donat per la NASA.

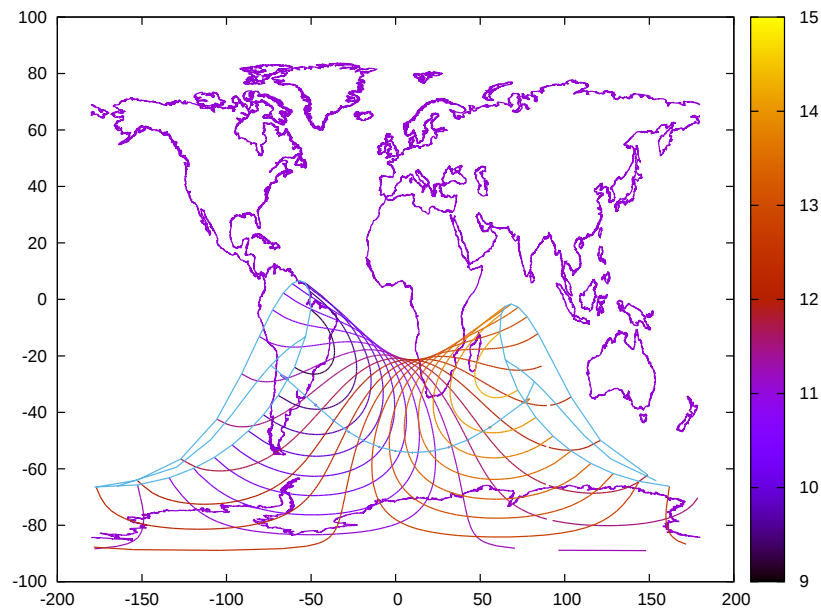


Figura 18: Visualització de l'eclipsi del dia 23 de desembre de 1908 creat amb el nostre programa. Comença l'eclipsi a les 9:09 i acaba a les 14:21. Hi ha eclipsi anular, començant a les 10:13 i acabant a les 13:28.

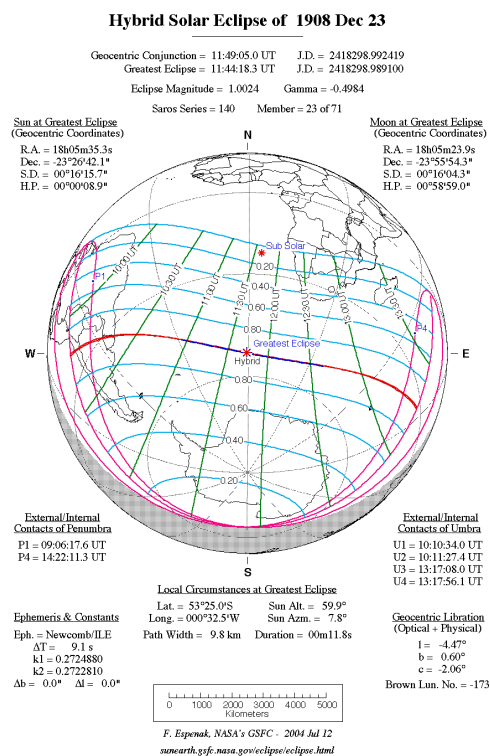


Figura 19: Visualització de l'eclipsi del dia 23 de desembre de 1908 donat per la NASA.

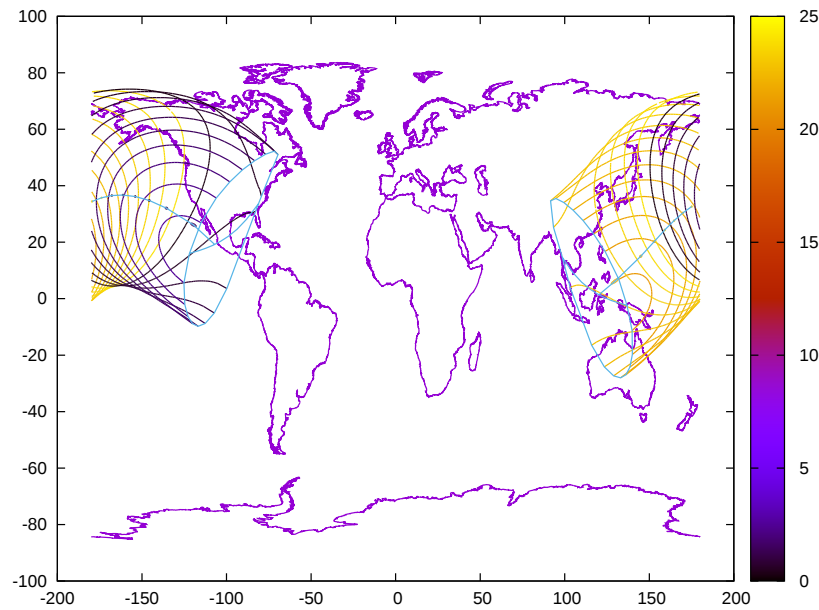


Figura 20: Visualització de l'eclipsi del dia 10 de juny de 2002 creat amb el nostre programa. Comença l'eclipsi a les 20:55 i acaba a les 2:37. Hi ha eclipsi anular, començant a les 21:57 i acabant a la 1:42.

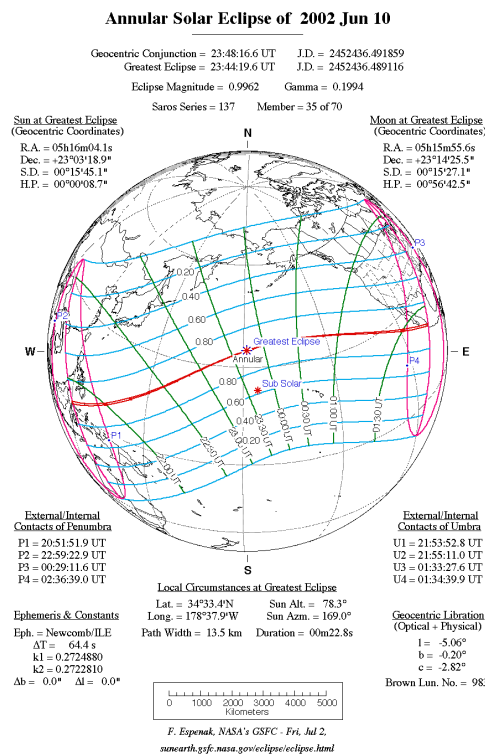


Figura 21: Visualització de l'eclipsi del dia 10 de juny de 2002 donat per la NASA.