Treball de final de grau
Grau de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Nombres p-àdics i aplicacions en física i topologia

Andreu Ferré

Director: Artur Travesa
Departament d'Àlgebra i Geometria. UB
Barcelona, 30 de juny de 2015

Agraïments: M'agradaria agrair la guia donada pel Dr. Travesa al llarg de l'elaboració d'aquest treball, així com totes les discussions que hem tingut, sense les quals aquest no s'hagués pogut dur a terme. Resto agraït també, de tota l'ajuda prestada pels meus amics i el suport constant de la meva família, molt especialment els meus pares.

Índex

Abstract: In this undergraduate thesis we begin by introducing the p-adic numbers and their basic properties, as well as the adeles. We then give an application to particle physics, using adeles extensively, to regularize divergent products through a product formula thereby endowing them of precise meaning. Next we discuss the topological differences between p-adic numbers and real numbers, and show some kind of euclidean models for them. This will prove helpful in the last chapter, where we will prove an equivalence of topological conjectures, which has been one of the goals of the project. Finally, we give a general approach to how the proof by Pardon [17] of the 3-dimensional case of this conjecture, which uses this equivalence, is carried out.

Introducció

La idea per a aquest treball va sorgir després de diverses converses amb el director sobre com podria estar relacionat amb els continguts apresos a Equacions algebraiques i Mètodes algebraics en teoria de nombres. En perfilar el projecte, em va cridar l'atenció l'article de Pardon [17], en el qual es discuteix una conjectura topològica encara oberta i se'n tracta un cas particular fent servir una eina de la qual havíem parlat: els nombres p-àdics. Amb la idea, doncs, de mirar d'entendre aquesta prova, vaig començar l'estudi dels nombres p-àdics.

En el primer capítol de la memòria, s'introdueixen els nombres p-àdics, se'n dóna la seva construcció des de dos punts de vista diferents, i se n'aprenen les seves propietats més bàsiques, introduint el problema que es tractarà com a aplicació.

En el segon capítol, s'introdueixen els adeles com a anell topològic localment compacte, propietat que ens permet de fer-hi anàlisi gràcies al teorema que ens assegura l'existència d'una mesura de Haar (invariant per translació). Gràcies a aquest nou objecte, podem fer l'estudi d'una fórmula del producte donada per Freund i Witten i que és rellevant a la física de partícules, però sense significat clar degut a la seva divergència en tot punt. Aquesta fórmula es pot regularitzar gràcies a un teorema de Tate. De manera similar a altres àrees de la matemàtica, aquestes fórmules de producte permeten extreure informació global a partir d'informació local; en el nostre cas es tractarà d'obtenir informació sobre les amplituds de Veneziano i de Virasoro-Shapiro, que són aproximacions de l'amplitud que podem calcular en col·lisions de taquions en els respectius casos de cordes obertes i tancades, i que, en aquest cas, són més fàcilment calculades en el context p-àdic.

En el capítol tres s'examina el conjunt dels nombres p-àdics com a espai topològic, donant-ne models euclidians, cosa que ens fa entendre en què és especial $\mathbb{Z}_p$ com a grup i que utilitzarem per a veure l'equivalència entre dues conjectures.

En el quart capítol, establim una relació important que permet reduir la conjectura de Hilbert-Smith comentada a veure que no existeixen accions efectives de $\mathbb{Z}_p$ en una varietat diferenciable connexa. Finalment, donem una aproximació general a com es duu a terme la demostració de Pardon [17] de la conjectura en el cas $n = 3$.

Conclusions: Durant la realització d'aquest treball, he pogut adonar-me de la importància dels nombres p-àdics en àmbits tan diferents com la topologia i la física de partícules, fet que originalment me'n va motivar el seu estudi. He pogut veure algunes particularitats de la topologia p-àdica, que es donen perquè l'àlgebra i l'anàlisi hi estan íntimament lligades, fent que en alguns aspectes sigui molt més fàcil que l'arquimediana, com ara pels criteris de convergència de límits i de sèries, així com pel fet que boles puguin ser anells i ideals de $\mathbb{Z}_p$.

D'altra banda, pel que fa a la part de física, he pogut aprendre la importància de les fórmules del producte, que permeten guanyar informació global a partir d'informació local, utilitzant en física un concepte clàssic de matemàtiques. Alhora, hem pogut donar sentit a una fórmula del producte prèvia que divergia a tots els punts, gràcies a un teorema de Tate.

Al llarg de la realització d'aquesta memòria he començat a entendre la importància d'evitar escriure en excés, així com he pogut tenir intercanvis d'opinions sobre l'estil de l'escriptura que m'han resultat de gran utilitat.

Capítol 1

Els nombres p-àdics

En aquest primer capítol comentarem la introducció dels nombres p-àdics des de dos punts de vista diferents, per a posar de manifest com interactuen les diverses estructures a partir de les quals es poden construir.

1.1 Introducció històrica i motivació

Motivació

Els nombres p-àdics varen ser introduïts pel matemàtic alemany Kurt Hensel per primer cop a finals del s.XIX. Aquests nombres donen compte d'una distància a $\mathbb{Q}$ que mesura quantes vegades un nombre racional és divisible per un primer p (incloent exponents negatius). A continuació seguirem l'exposició de [12] que explica les idees fonamentals que ens motiven la construcció dels nombres p-àdics.

Sembla ser que Hensel es va inspirar en la relació de $\mathbb{Z}$ i el seu cos de fraccions $\mathbb{Q}$ i de $\mathbb{C}[X]$ i el seu cos de fraccions $\mathbb{C}(X)$, on va veure l'analogia d'expressió d'un element en forma de fracció; a més, els anells base són DFUs. L'analogia essencial aquí és que $p \in \mathbb{Z}$, primer, s'ha de correspondre amb $X - \alpha$, polinomi lineal de $\mathbb{C}[X]$.

De moment no hem considerat res especial, però si fixem un $\alpha \in \mathbb{C}$ particular, podem expressar un polinomi com:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i (X - \alpha)^i,$$

amb $a_i \in \mathbb{C}$ de la mateixa manera que si $m \in \mathbb{N}$, podem posar $m = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$, on $0 \leq a_i \leq p - 1$ enters. Això ens dóna idea de com de divisible és un nombre per p (si ho és), i de manera similar amb els polinomis.

D'altra banda, podem considerar els desenvolupaments en sèrie de Laurent per a $f(X)$ expressat com a quocient de polinomis, o bé a l'anell de sèries formals, senzillament com a divisió. Això ho resumim dient que existeix $n_0 \in \mathbb{Z}$ amb

$$f(X) = \sum_{n \geq n_0} a_i (X - \alpha)^i.$$

És a dir, que podem desenvolupar en sèrie de potències dels polinomis del tipus $X - \alpha$. Això ens dóna un morfisme d'inclusió de cossos

$$\mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}((X - \alpha))$$

que proporciona informació del comportament local al voltant de α. Ara voldrem fer el mateix, però en una extensió de l'expressió dels enters en base p. Així, considerant la divisió formal i els romanents successius procedirem segons l'exemple següent: posem $p = 3$ i considerem el racional $-\frac{5}{8}$. Aleshores, per a $\frac{a}{b}$ obtenim

$$-\frac{5}{8} = \frac{2+p}{1-p^2} = 2 + p + 2p^2 + p^3 + 2p^4 + p^5 + \cdots = 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 + \cdots .$$

Per a veure que això funciona, senzillament multipliquem a l'altra banda i obtenim $p + 2$ i que les potències superiors van desapareixent; es veu que les potències més grans de p es van movent indefinidament cap a la dreta i recuperem el resultat.

Estem, doncs, recuperant el comportament respecte al primer p de la fracció $\frac{a}{b}$. De fet, podrem expressar tot racional no nul com $x = p^n \frac{a_1}{b_1}$ amb $p \nmid a_1 b_1$, on n serà en general un enter, i la fracció es podrà expressar com a sèrie de potències de p, obtenint així qualsevol racional com una sèrie de Laurent de p (de cua finita), que anomenarem el desenvolupament p-àdic de x. Més endavant veurem que obtenim efectivament un cos: el cos de fraccions dels enters $\mathbb{Z}_p$, que denotarem per $\mathbb{Q}_p$. El desenvolupament p-àdic d'un racional ens dóna un morfisme entre els cossos $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}_p$ i mostrarem que de fet $\mathbb{Q}_p$ conté estrictament $\mathbb{Q}$.

Congruències mòdul p^n

La construcció dels nombres p-àdics està estretament lligada amb la resolució de congruències mòdul potències de p.

Definició 1.1. *Sigui p un primer. Diem que una successió d'enters α_n tal que $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$ és coherent si, per a tot $n \geq 1$, tenim*

$$\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{p^n}.$$

A continuació veurem un exemple de construcció d'una successió coherent per a una solució de l'equació $X^2 = 2$ a $\mathbb{Q}_7$ de manera similar al càlcul estàndard d'aproximacions decimals en $\mathbb{R}$. Això ens diu que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}_7$, ja que senzillament fent el producte (tenint en compte els romanents) de les successions obtingudes, retrobem el 2 esperat. Volem resoldre

$$X^2 \equiv 2 \pmod{7^n},$$

on $n = 1, 2, \dots$ Tenim que 3 i 4 són solucions per a $n = 1$. Com que $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ és un cos, són les úniques. Ara veurem que per a cada n hi ha com a molt dues solucions, de manera que obtenim dues successions coherents que podem mirar com branques d'un arbre. Efectivament, posem $\alpha_{n+1} = \alpha_n + k7^n$ amb $0 \leq k \leq 6$, voldrem que:

$$\alpha_n^2 + 2k7^n \equiv 2 \pmod{7^{n+1}};$$

aprofitant que $\alpha_n = 2 + b7^n$ per hipòtesi, deduïm que

$$7^n(b + 2k) \equiv 0 \pmod{7^{n+1}},$$

de manera que com que $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ és un cos, $b + 2k \equiv 0 \pmod 7$ té solució. Això, juntament amb el fet que partíem de dues solucions, ens fa allargar la successió per a tot n amb només dues branques perquè partim de dues solucions per a α_1. S'obtenen les successions coherents:

$$x_1 = (3, 10, 108, 2166, \dots), \qquad x_2 = (4, 39, 235, 235, \dots).$$

D'altra banda, sempre que $p \neq 2$, podem afirmar que l'equació $X^2 = m$ tindrà solució a $\mathbb{Q}_p$ si i només si m és un residu quadràtic mòdul p, ja que permet començar a construir la successió coherent i el pas següent el fem de manera similar a com ho hem fet per a l'exemple anterior ($p = 7$). D'altra banda això ens diu que $\mathbb{Q}_p$ no és algebraicament tancat si $p \neq 2$, però $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}_p$.

Com és d'esperar, podem completar el resultat per al cas $p = 2$ de manera similar, és a dir: $\mathbb{Q}_2$ no és algebraicament tancat, ja que $X^2 + X + m$ no tindrà solució a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sempre que m sigui senar. D'altra banda, podem trobar solucions per a $X^2 = 17$ anàlogament, o sigui que també és $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}_2$.

1.2 Construcció via compleció i fets bàsics

En aquesta secció construirem els nombres p-àdics com la compleció del valor absolut p-àdic als racionals. Per a fer-ho, seguirem els dos primers capítols de Gouvêa [12], començant per recordar algunes definicions bàsiques de valor absolut i propietats bàsiques menys usuals que es donen en els valors absoluts no arquimedians. A continuació, donarem la construcció en sí per successions de Cauchy i en deduirem algunes propietats.

Valors absoluts en un cos

Definició 1.2. *Direm que una funció*

$$|\ | : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

és un valor absolut si satisfà les condicions següents:

(a) $|x| = 0$ *si i només si* $x = 0$*,*

(b) $|xy| = |x||y|$ *per a qualssevol* $x, y \in K$*,*

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *per a qualssevol* $x, y \in K$*.*

(d) *Encara més, direm que un valor absolut en* K *és* no arquimedià *si satisfà la següent condició addicional:* $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ *per a qualssevol* $x, y \in K$*; si no es compleix aquesta condició, direm que el valor absolut és* arquimedià.

En particular, la condició (d) a vegades es denomina desigualtat ultramètrica. A més, tenim que (d) implica (c), però al revés en general no, cosa que comprovarem en un exemple a continuació, per tant (d) és una condició més forta.

Recordem també que donat un valor absolut $|\ |$, podem definir una distància per $d(x, y) := |x - y|$, donant lloc a un espai mètric amb la topologia determinada per les boles obertes. Com a exemples de valors absolus, recordem el valor absolut usual en $\mathbb{Q}$, que ve definit per $|x| = \max(x, -x)$ i que és arquimedià, el p-àdic, que definirem a sota, i el trivial. Remarquem que en un cos finit l'únic valor absolut és el trivial, ja que només tenim el 0 i arrels de la unitat.

Definició 1.3. *Per a qualsevol* $x \in \mathbb{Q}$*, es defineix el valor absolut* p*-àdic de* x *com*

$$|x|_p = p^{-v_p(x)};$$

notem que si $x = 0$*, agafem la convenció usual que* $p^{-\infty} = 0$*, de manera que això, juntament amb les propietats que hem observat abans, defineix un valor absolut de* $\mathbb{Q}$ *que és* no *arquimedià. Aquí,* v_p *és la valoració* p*-àdica de* $\mathbb{Q}$*, definida com una aplicació*

$$v_p : \mathbb{Q} \to \bar{\mathbb{R}}$$

de manera que $v_p(0) := +\infty$ *i si* $x = \frac{a}{b}$ *i posem* $a = p^{e_a}n'$, $b = p^{e_b}m'$ *amb* $p \nmid n', m'$*, aleshores* $v_p(x) := e_a - e_b$*.*

Es comprova fàcilment que la valoració està ben definida. D'altra banda, podem observar que la constant p a què elevem menys la valoració p-àdica del nostre x és d'entrada arbitrària i es podria reemplaçar per qualsevol $c > 1$, obtenint un valor absolut p-àdic molt similar. El motiu d'aquesta tria es farà aparent quan parlem de la fórmula del producte. Un últim comentari: per a aquest valor absolut, si un nombre enter és divisible per p moltes vegades, aleshores el seu valor absolut p-àdic serà molt petit; en particular, la successió $|p^n|_p$ tendeix a 0.

Un criteri d'arquimedianitat

Teorema 1.1. *Sigui $A \subset K$ la imatge de $\mathbb{Z}$ en K per l'únic morfisme d'anells de $\mathbb{Z}$ en K. Un valor absolut $|\ |$ en K és no arquimedià si i només si $|a| \leq 1$ per a qualsevol $a \in A$. En particular, un valor absolut en $\mathbb{Q}$ serà no arquimedià si, i només si, $|n| \leq 1$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.* $\square$

Topologia no arquimediana

Ja sabem que tot valor absolut ens dóna una distància mitjançant $d(x, y) := |x-y|$. Anem a veure com traduïm això per a una mètrica no arquimediana i quines conseqüències se'n poden derivar. La demostració d'aquestes és molt fàcil i s'obviarà; tornem a citar a [12] com a possible referència. Començarem donant una caracterització dels valors absoluts a partir de la mètrica.

Lema 1.1. *Sigui $|\ |$ un valor absolut en un cos K definint la mètrica de la manera usual. Aleshores, $|\ |$ és no arquimedià si i només si, per a tot $x, y, z \in K$ tenim*

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}. \ \square$$

Els espais mètrics per als quals se satisfà aquesta desigualtat s'anomenen *ultramètrics.* Anem a estudiar-ne algunes propietats.

Proposició 1.1. *Sigui K un cos i sigui $|\ |$ un valor absolut no arquimedià a K. Si $x, y \in K$ i $|x| \neq |y|$, aleshores:*

$$|x + y| = \max\{|x|, |y|\}.$$

D'aquí deduïm que en un espai ultramètric, tots els triangles són isòsceles. $\square$

Algunes propietats extra es consideraran al capítol següent quan comentem més a fons les diferènies entre la topologia p-àdica i la usual.

Valors absoluts a $\mathbb{Q}$ i fórmula del producte

En aquest apartat trobarem els valors absoluts de $\mathbb{Q}$, dient primer què entenem per valors absoluts equivalents, i provarem la fórmula del producte que, com veurem, inspirarà l'aplicació que donarem a la física.

Definició 1.4. *Direm que dos valors absoluts $|\ |_1$ i $|\ |_2$ en un cos K són equivalents si defineixen la mateixa topologia a K; és a dir, si tot conjunt que és obert respecte d'una topologia, ho és respecte de l'altra.*

Lema 1.2. *Dos valors absoluts en un cos K, $|\ |_1$ i $|\ |_2$, són equivalents si i només si existeix un nombre real positiu α tal que per a tot $x \in K$ tenim $|x|_1 = |x|_2^\alpha$.* $\square$

Corol·lari 1.1. *Si p i q són dos primers diferents, aleshores els valors absoluts p-àdic i q-àdic no són equivalents, així com tampoc no són equivalents un valor absolut p-àdic i el valor absolut $q = \infty$. Un valor absolut equivalent al trivial és el trivial.*

DEMOSTRACIÓ: La primera part és òbvia, donat que $|q|_q = \frac{1}{q} < 1$, però $|q|_p = 1$. La segona també és molt fàcil, ja que $|p|_p = \frac{1}{p} < 1$, però $|p|_\infty = p > 1$. $\square$

Com a generalització clara, si $| \ |_1$ és un valor no arquimedià qualsevol, i $| \ |_2$ n'és un d'arquimedià, mai no podran ser equivalents, ja que prenent un element tal que $|c|_1 < 1$, tindrem per la desigualtat ultramètrica que $|nc| < 1$ per a tot n natural, però $|nc| \geq 1$, per a n prou gran si el valor absolut és arquimedià. Sobre el cos dels nombres racionals, ja tenim tots els valors absoluts, llevat d'equivalència.

Teorema 1.2. (Ostrowski) *Qualsevol valor absolut no trivial $\mathbb{Q}$ és equivalent a un dels valors absoluts $| \ |_p$, on p és un primer, o bé $p = \infty$.* $\square$

Corol·lari 1.2. (Fórmula del producte) *Per a tot $x \in \mathbb{Q}^*$, es té que*

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1,$$

on entenem que $p \leq \infty$ vol dir que prenem el producte sobre tots els primers, i a l'infinit agafem el valor absolut habitual.

DEMOSTRACIÓ: La prova es basa en la factorització de x a $\mathbb{Q}$, que podem mirar com $x = \pm p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ amb els exponents positius o negatius. Aleshores, $|x|_q = 1$ si $q \neq p_i$, $|x|_{p_i} = p_i^{-a_i}$ per a $i = 1, \ldots, k$, i per últim $|x|_\infty = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. Per tant, el resultat és evident. $\square$

Aquesta fórmula ens pot ser molt útil per a determinar el valor absolut d'un $x \in \mathbb{Q}$ si tenim tota la resta menys un. Notem que, degut a la normalització feta dels valors absoluts p-àdics, en el fons el teorema no és sinó una reinterpretació del teorema fonamental de l'aritmètica.

Construcció de $\mathbb{Q}_p$ per compleció i propietats

Comencem per recordar que un cos K és *complet* respecte $| \ |$ quan tota successió de Cauchy en K té un límit, en el benentès que mirem K com a espai topològic induït pel valor absolut del cos.

També sabem ja que $\mathbb{Q}$ no és complet respecte el valor absolut usual ja que podem construir una successió que sigui a $\mathbb{Q}$ i de Cauchy i l'únic candidat a límit sigui $\sqrt{2}$. A continuació veurem que de fet $\mathbb{Q}$ no és complet respecte cap dels seus valors absoluts no trivials. Comencem amb una caracterització més simple de les successions de Cauchy.

Lema 1.3. *Una successió $(x_n)_n$ de nombres racionals és de Cauchy respecte un valor absolut no arquimedià $|\ |$ si i només si* $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$. $\square$

Lema 1.4. $\mathbb{Q}$ *no és complet respecte cap dels seus valors absoluts no trivials.*

DEMOSTRACIÓ: Pel teorema d'Ostrowski, n'hi haurà prou de comprovar-ho per als valors absoluts p-àdics, $|\ |_p$. De fet, en la introducció hem donat la manera de fer-ho, ja que podem prendre un enter a tal que $X^2 - a$ no tingui solució a $\mathbb{Q}$, però sabem que podem construir una successió coherent $(x_n)_n$ sempre que a sigui residu quadràtic a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ per a $p \neq 2$. La successió coherent compleix:

$$|x_{n+1} - x_n|_p = |\lambda p^{n+1}|_p \leq p^{-n-1} \to 0.$$

Això mostra que $\mathbb{Q}$ no és complet respecte cap valor absolut p-àdic amb $p \neq 2$. Si $p = 2$, simplement podem agafar una arrel cúbica i procedir de manera similar. $\square$

Construcció de la compleció p-àdica

Tot seguit donarem les definicions i proposicions que ens permeten fer la construcció de $\mathbb{Q}_p$ a partir de successions de Cauchy. Com que el mètode és essencialment el mateix que es fa a l'hora de provar la completesa de $\mathbb{R}$, remarcarem només les parts en què la no arquimedianitat hi jugui un paper important, obviant la resta de proves.

Convé fer notar que en aquesta construcció no cal tenir construït $\mathbb{R}$ a priori ja que en el fons, el valor absolut definit pren valors a $\mathbb{Q}$. En el cas de la construcció de $\mathbb{R}$, hi ha el perill d'intentar fer la demostració que seguirà, però havent definit el valor absolut sobre els reals es crearia un raonament circular. Per a evitar-lo, cal construir els reals amb una definició de valor absolut restringida sobre els racionals, crear el cos, i estendre a continuació la definició de valor absolut i el valor absolut de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ (de fet, és una de les maneres usuals de procedir); o es pot fer la construcció dels reals d'altres maneres, per exemple, a partir de talls de Dedekind, o axiomàticament.

Definició 1.5. *Sigui $|\ |_p$ el valor absolut no arquimedià p-àdic sobre $\mathbb{Q}$. Posem $\mathcal{C} := \{(x_n)_n : (x_n)_n$ és Cauchy respecte $|\ |_p\}$, el conjunt de successions de Cauchy de $\mathbb{Q}$.*

És clar que amb la definició component a component de les operacions de suma i multiplicació, $\mathcal{C}$ és un anell, però no un cos ja que té divisors de zero. Tenim la inclusió natural de $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{C}$ a través de la successió $(x)_n$, amb $x \in \mathbb{Q}$, ja que és constant, per tant, de Cauchy. En aquest anell però, ens falta identificar les successions amb el mateix límit. Per a fer-ho, considerem el resultat següent.

Lema 1.5. *L'ideal* $\mathcal{N} := \{(x_n)_n : \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\} \subseteq \mathcal{C}$ *és maximal.* $\square$

Definició 1.6. *Es defineix el cos dels nombres p-àdics com el quocient* $\mathbb{Q}_p := \mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Com que dues successions constants diferents no difereixen d'un element de $\mathcal{N}$, veiem que encara tenim la inclusió de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}_p$. Anem a comprovar que efectivament, amb aquesta construcció, $\mathbb{Q}_p$ és el que esperàvem.

Lema 1.6. *Sigui* $(x_n)_n \in \mathcal{C}, (x_n)_n \notin \mathcal{N}$. *Aleshores, existeix* N *de manera que* $|x_n|_p = |x_m|_p$ *per a* $n, m \geq N$.

DEMOSTRACIÓ: Com que la nostra successió és de Cauchy, però no té límit zero, podem trobar c, N_1 i N_2 de manera que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n| \geq c > 0 \quad n, m \geq N_2 \Rightarrow |x_n - x_m| < c.$$

Posant $N = \max\{N_1, N_2\}$ tenim que

$$n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| > \max\{|x_n|, |x_m|\},$$

per tant, $|x_n| = |x_m|$, per ser tots els triangles isòsceles. □

Definició 1.7. *Si* $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ *és un element de* $\mathbb{Q}_p$ *i* $(x_n)_n$ *és qualsevol successió de Cauchy representant* λ, *posarem* $|\lambda|_p := \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$.

Notem que el límit existeix pel lema, i que no depèn del representant, ja que $| \ |_p$ defineix una funció en $\mathcal{C}$ que envia $\mathcal{N}$ al zero i passa al quocient. A més podem observar que el valor absolut serà zero si i només si $\lambda = 0$. A més, $| \ |_p$ definit a $\mathbb{Q}_p$ és un valor absolut no arquimedià de manera que estén el valor absolut p-àdic de $\mathbb{Q}$ i de la definició anterior, veiem que el conjunt de valors que pren són els mateixos que a $\mathbb{Q}$. D'aquí es dedueix que $\mathbb{Q}$ és dens en $\mathbb{Q}_p$ i que $\mathbb{Q}_p$ és complet.

Per últim, notem que podem caracteritzar $\mathbb{Q}_p$ com l'únic cos compleció respecte de $| \ |_p$; és a dir, llevat d'un únic isomorfisme que preserva valors absoluts. Aquesta unicitat ens permet oblidar la construcció i treballar amb les propietats que satisfà.

Propietats bàsiques

A partir d'ara identificarem $\mathbb{Q}$ amb la seva inclusió en $\mathbb{Q}_p$ com a subcòs. Fem notar que la valoració v_p es pot estendre a $\mathbb{Q}_p$ de la manera natural. Ara podem considerar la

Definició 1.8. *L'*anell d'enters p-àdics $\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ *és l'anell de valoració discreta definit com la bola tancada de centre* 0 *i radi* 1 *que també és oberta.*

Proposició 1.2. *L'anell $\mathbb{Z}_p$ d'enters p-àdics és un anell local d'ideal maximal $p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < 1\}$. A més,*

(a) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b\right\}$.

(b) *La inclusió $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ té imatge densa. En particular, donat $x \in \mathbb{Z}_p$ i $n \geq 1$, existeix $\alpha \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$, de manera que $|x - \alpha| \leq p^{-n}$. Aquest α és únic.*

(c) *Per a tot $x \in \mathbb{Z}_p$, existeix una successió de Cauchy $(\alpha_n)_n$ que convergeix a x, de manera que α_n satisfà la condició de (b) i per a tot n tenim $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$. A més, aquesta successió és única.*

Demostració: Com que $\mathbb{Z}_p$ és un anell de valoració és local, ja que fàcilment observem que tot element que sigui a $\mathbb{Z}_p \backslash p\mathbb{Z}_p$ és invertible, ja que $|x|_p = 1$. D'altra banda, també és clar que si $|x|_p < 1$ cal que $x \in p\mathbb{Z}_p$, ja que si no, el seu valor absolut és exactament 1. Com que l'ideal de valoració és maximal i no és el total, tenim l'altra inclusió. Pel que fa a (a), és clar de les definicions del valor absolut p-àdic a $\mathbb{Q}$. Quant a (b), sigui $x \in \mathbb{Z}_p$ i $n \geq 1$. Com que $\mathbb{Q}$ és dens en $\mathbb{Q}_p$, podem trobar $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \leq p^{-n} < 1.$$

Vegem que de fet podem escollir un enter; per la propietat no arquimediana del valor absolut deduïm que

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \max\left\{|x|, \left|x - \frac{a}{b}\right|\right\} \leq 1,$$

de manera que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Per tant b és invertible mòdul p^n. Això implica que $\left|\frac{a}{b} - ab'\right| \leq p^{-n}$. Ara, però observem que podem prendre α l'únic enter tal que

$$0 \leq \alpha \leq p^n - 1 \qquad \alpha \equiv ab' \pmod{p^n}.$$

De manera que $|x - \alpha| \leq p^{-n}$ com volíem. Finalment, (c) se segueix de la construcció que ens proporciona (b) per a qualsevol n, que dóna unicitat també. □

Aquesta proposició ens permet interpretar $\mathbb{Z}_p$ com la compleció de l'anell $\mathbb{Z}$ respecte el valor absolut p-àdic.

Corol·lari 1.3. $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p]$. *L'aplicació donada per $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ $x \mapsto px$ és un homeomorfisme. Els conjunts $p^n\mathbb{Z}_p$ amb $n \in \mathbb{Z}$ formen un sistema fonamental d'entorns de $0 \in \mathbb{Q}_p$ que cobreix tot $\mathbb{Q}_p$.*

Demostració: Si $x \in \mathbb{Q}_p$, podem calcular la seva valoració p-àdica, i si és positiva és de $\mathbb{Z}_p$, però si és negativa $v_p(p^{-v_p(x)}x) = -v_p(x) + v_p(x) = 0$, la qual cosa dóna la primera afirmació. El fet que multiplicar per p és un homeomorfisme ve del fet que les operacions són contínues, cosa que examinarem amb més detall després. $\mathbb{Q}_p = \cup_{m\in\mathbb{Z}} p^m\mathbb{Z}_p$ pels fets anteriors. Per últim, el fet que $|p^n|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ juntament amb el fet que $p^n\mathbb{Z}_p$ es poden descriure com boles obertes, dóna el fet que són sistema fonamental d'entorns del 0. □

Per últim, observem que els ideals principals de $\mathbb{Z}_p$ donats per (p^k) tenen intersecció trivial, ja que un element $a \neq 0$ té un ordre k de manera que $a \notin (p^{k+1})$. A més, tenim la següent

Proposició 1.3. *L'anell $\mathbb{Z}_p$ és un domini d'ideals principals. A més, els seus ideals són $\{0\}$ i $p^k\mathbb{Z}_p$ amb $k \in \mathbb{N}$.*

Demostració: Sigui $I \neq \{0\}$ un ideal no trivial de $\mathbb{Z}_p$ i $0 \neq a \in I$ un element d'ordre minimal, posem $k = v_p(a) < \infty$. Posem $a = p^k u$ amb u una unitat p-àdica. Aleshores, $p^k = u^{-1}a \in I$, de manera que $p^k\mathbb{Z}_p \subseteq I$. Però si tenim un altre element de l'ideal b, aquest té ordre superior a k, per tant:

$$b = p^w u' = p^k p^{w-k} u' \in p^k\mathbb{Z}_p.$$

Això prova l'altra inclusió i acabem. □

Acabem observant que $\mathbb{Q}_p$ també es pot veure com el cos de fraccions de $\mathbb{Z}_p$, que és domini d'integritat amb l'última proposició provada.

1.3 Nocions d'àlgebra topològica

En aquesta secció recordarem uns quants resultats elementals sobre àlgebra topològica i observarem que en particular els nombres p-àdics es comporten bé per a aquestes esctructures.

Grups i anells topològics

Definició 1.9. *Un* grup topològic *és un grup G amb una topologia de manera que l'aplicació $\varphi : G \times G \to G$ donada per $\varphi(x, y) := xy^{-1}$ és contínua.*

En aquesta definició, observem que l'aplicació pas a l'invers: $x \mapsto x^{-1}$ és un homeomorfisme i les translacions també. Notem que un subgrup d'un grup topològic és un grup topològic amb la topologia induïda.

Veiem que $(\mathbb{Z}_p, +)$ és un grup topològic observant que

$$|x - a| \leq p^{-n},\ |y - b| \leq p^{-n} \Rightarrow |(x - y) - (a - b)| \leq p^{-n},$$

cosa que prova que l'aplicació $(x, y) \mapsto x - y$ és contínua a qualsevol punt (a, b).

Anàlogament, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ és un grup topològic considerant el sistema fonamental d'entorns de 1:

$$1 + p\mathbb{Z}_p \supseteq \cdots \supseteq 1 + p^n\mathbb{Z}_p \supseteq \dots .$$

Si un grup topològic té un entorn compacte d'un punt, aleshores és localment compacte. Si és metritzable, aleshores és Hausdorff i el neutre té un sistema fonamental d'entorns numerable. Aquestes condicions es poden invertir per a veure que són suficients per a donar metritzabilitat. Un grup metritzable sempre es pot completar.

Tenim a més, els següents resultats sobre grups topològics, la prova dels quals és senzilla i es pot trobar a [21].

Proposició 1.4. *Sigui G un grup topològic i H un subgrup de G.*

(a) *$\bar{H}$ és subgrup de G.*

(b) *G és Hausdorff si i només si el neutre és un tancat.*

D'altra banda, si H conté un entorn del neutre, aleshores H és alhora obert i tancat. □

Deduïm que $p^n\mathbb{Z}_p (n \geq 0)$ són subgrups oberts i tancats de $\mathbb{Z}_p$ i $1+p^n\mathbb{Z}_p (n \geq 1)$ són subgrups oberts i tancats del subgrup multiplicatiu $1 + p\mathbb{Z}_p$.

Proposició 1.5. *Els subgrups tancats de $(\mathbb{Z}_p, +)$ són ideals i són $\{0\}$ i $p^m\mathbb{Z}_p$, per a $m \in \mathbb{N}$.*

Demostració: Observem que la multiplicació a $\mathbb{Z}_p$ és contínua, és a dir:

$$|x'a - xa| = |a||x' - x| \to 0 \quad (x' \to 0).$$

Si $H \subseteq \mathbb{Z}_p$ és un subgrup tancat, per a tot $h \in H$ és:

$$\mathbb{Z}H \subseteq H \Rightarrow \mathbb{Z}_p h \subseteq \overline{\mathbb{Z}h} \subseteq \overline{H} = H.$$

Això ens diu que H és un ideal de $\mathbb{Z}_p$. El resultat se segueix de la caracterització obtinguda per als ideals de $\mathbb{Z}_p$. □

Aleshores, els quocients de $\mathbb{Z}_p$ per un subgrup tancat $H \neq \{0\}$ són discrets. A més, com que els subgrups discrets són tancats, tenim que l'únic subgrup discret de $(\mathbb{Z}_p, +)$ és el trivial.

Similarment a com hem fet per a grups topològics, un *anell topològic A* és un anell amb una topologia de manera que les aplicacions

$$\varphi, \psi : A \times A \to A, \quad \varphi(x, y) := x + y \quad \psi(x, y) := x \cdot y,$$

són contínues. Observem que posant $x = -1$ en ψ obtenim que $(A, +)$ és un grup topològic, però en general, el grup de les unitats no és un grup topològic, ja que $x \mapsto x^{-1}$ no té perquè ser contínua amb la topologia induïda. A continuació provem que $\mathbb{Z}_p$ és un anell topològic en la

Proposició 1.6. *Amb la mètrica p-àdica, l'anell $\mathbb{Z}_p$ és un anell topològic i és complet i compacte, de manera que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ és compleció de $\mathbb{Z}$ amb la topologia induïda.*

DEMOSTRACIÓ: Com que $\mathbb{Z}_p$ és un grup topològic per un resultat previ, només cal veure que la multiplicació és contínua. Posem $a, b \in \mathbb{Z}_p$ i posem $x = a + h$, $y = b + k$ elements de $\mathbb{Z}_p$. Aleshores,

$$|xy-ab| = |(a+h)(b+k)-ab| = |ak+hb-hk| \leq \max(|a|,|b|)(|h|+|k|)+|h||k| \to 0,$$

quan fem $|h|$ i $|k|$ tendir a 0. Aleshores, la multiplicació és contínua en qualsevol punt $(a, b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Notem a més que donat un nombre p-àdic, $x = \sum_{i\geq 0} a_i p^i$, la successió $(x_n)_n$ donada per $x_n = \sum_{0\leq i\leq n-1} a_i p^i \in \mathbb{N}$ i és de Cauchy convergint a x. $\square$

1.4 Successions coherents

En aquesta secció veurem una construcció purament algebraica/categòrica dels nombres p-àdics. És la construcció obtinguda a partir de límits projectius d'un sistema dirigit. Seguirem la construcció donada a [21]. Es tracta de veure que les successions coherents dins el producte cartesià formen el límit projectiu.

Introducció i definició formal

Si posem $x = \sum_{k\geq 0} a_k p^k$, un enter p-àdic, podem definir la reducció módul p^n via l'homomorfisme

$$\varepsilon_k = \sum_{k<n} a_k p^k \pmod{p^n} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

per a tot n natural. Com que les sumes parcials convergeixen a l'enter p-àdic x, voldríem aconseguir un anàleg per als quocients $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Aquí aprofitem que les projeccions canòniques que denotem per φ_n ens donen un diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[dd, "\varphi_n"] \\
\mathbb{Z}_p \arrow[ur, "\varepsilon_{n+1}"] \arrow[dr, "\varepsilon_n"'] & \\
 & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.
\end{tikzcd}$$

Això ens fa veure els enters p-àdics com un objecte universal respecte les reduccions $\pi_{n,m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, amb $m \geq n$, com a morfismes de transició. Això motiva la següent definició que només donem en un cas particular.

Definició 1.10. *Una successió* $(E_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$ *de conjunts i aplicacions* $\varphi_n : E_{n+1} \to E_n$ $(n \geq 0)$ *s'anomena* sistema projectiu. *Un conjunt* E *i una col·lecció d'aplicacions* $\psi_n : E \to E_n$ *tals que* $\psi_n = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$ $(n \geq 0)$ *s'anomena* límit projectiu *de la successió* $(E_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$ *si se satisfà la següent condició: per a qualsevol conjunt* X *i aplicacions* $f_n : X \to E_n$ *que satisfan* $f_n = \varphi_n \circ f_{n+1}$ $(n \geq 0)$ *hi ha una factorització única* f *de* f_n *a través de* E *segons*

$$f_n = \psi_n \circ f : X \to E \to E_n \quad (n \geq 0)$$

Usualment a $E_0 \leftarrow E_1 \leftarrow \cdots \leftarrow E_n \leftarrow \cdots$ se l'anomena *sistema invers* i es denota al límit projectiu com $E = \varprojlim E_n$ que s'acostuma a posar al final del sistema de manera que es visualitza més fàcilment com factoritza $(X, f_n)_{n\geq 0}$ a través de f. Els límits projectius no depenen dels primers termes de la successió.

Existència

Teorema 1.3. *Per a tot sistema projectiu* $(E_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$ *de conjunts hi ha un límit projectiu* $E = \varprojlim E_n \subseteq \prod_{n\geq 0} E_N$ *amb aplicacions* ψ_n *donades per les restriccions de les projeccions. A més, si* $(E', \psi'_n)_{n\geq 0}$ *és un altre límit projectiu de la mateixa successió, aleshores hi ha una bijecció única,* $f : E' \to E$ *tal que* $\psi'_n = \psi_n \circ f$*.*

DEMOSTRACIÓ: Vegem primer l'existència. Definim

$$E = \{(x_n)_n : \varphi_n(x_{n+1}) = x_n \ \forall n \geq 0\} \subseteq \prod_{n\geq 0} E_n.$$

Ja hem comentat que aquests elements són les anomenades *successions coherents* al producte. Aleshores, si considerem les restriccions de les projeccions p_n a E i les anomenem ψ_n, aleshores, $\varphi_n \circ \psi_{n+1} = \psi_n$. Provem ara la propietat universal requerida. Sigui E' un altre conjunt tal que amb les aplicacions $\psi'_n : E' \to E_n$ compleix $\varphi_n \circ \psi'_{n+1} = \psi'_n$. Podem definir una aplicació

$$(\psi'_n)_n : E' \to \prod_{n\geq 0} E_n, \quad y \mapsto (\psi'_n(y))_n.$$

Tenim que la imatge és dins de E. Per tant hi ha una única aplicació $f : E' \to E$ que compleix $\psi'_n = \psi_n \circ f$, que és senzillament $(\psi'_n)_n$. Pel que fa a la unicitat, si $(E, (\psi_n)_n))$ i $(E', (\psi'_n))$ compleixen la propietat universal, aleshores trobem que existeix una única aplicació $f : E \to E'$ amb $\psi_n = \psi'_n \circ f'$, però aleshores:

$$\psi'_n = \psi_n \circ f = \psi'_n \circ f' \circ f$$

de manera que $f' \circ f$ factoritza la identitat, però com que estem assumint que $(E', (\psi'_n)_n)$ té factorització única, aleshores $f' \circ f = \mathrm{id}_{E'}$, similarment es prova que $f \circ f' = \mathrm{id}_E$. $\square$

La construcció ens dóna fàcilment el següent

Corol·lari 1.4. *Si totes les aplicacions φ_n són exhaustives en el sistema projectiu $(E_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$ aleshores, el límit projectiu $(E, (\psi_n)_n)$ també té aplicacions exhaustives ψ_n i en particular E és no buit.* $\square$

Límits projectius d'espais topològics, grups topològics i anells topològics

Si el sistema projectiu $(E_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$ està format per espais topològics, aleshores el límit projectiu és un espai topològic i les projeccions són aplicacions contínues. Relacionant-ho amb el que hem vist, tot espai topològic que actuï com a límit projectiu, factoritza a través d'aquest mitjançant una aplicació contínua. Si els E_n són Hausdorff, $\varprojlim E_n$ és tancat per ser intersecció de conjunts tancats (definits a través d'una igualtat).

Proposició 1.7. *Un límit projectiu d'espais compactes no buits és no buit i compacte.*

Demostració: Sigui $(K_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$ un sistema projectiu d'espais compactes. Aleshores, $\prod_n K_n$ és compacte pel teorema de Tychonoff. Aleshores, $\varprojlim E_n$ n'és un tancat, i per tant compacte. Posem

$$K_n' = \varphi_n(K_{n+1}) \supseteq K_n'' = \varphi_n(\varphi_{n+1}(K_{n+2})) \subseteq \cdots .$$

Aquests subconjunts són compactes i no buits. Aleshores, la seva intersecció L_n serà no buida a K_n. A més, tenim que $\varphi_n(L_{n+1}) = L_n$, de manera que la restricció de les aplicacions φ_n a L_n defineix un sistema projectiu on aquestes seran exhaustives. Aleshores, pel corol·lari anterior, el sistema té límit projectiu no buit. Observant que $\varprojlim L_n \subseteq \varprojlim K_n$ la prova acaba. $\square$

Una conseqüència molt important d'aquest fet és que el límit projectiu de conjunts finits és no buit.

Si tenim un sistema projectiu de grups $(G_n, \varphi_n)_{n\geq 0}$, aleshores clarament el límit projectiu $G = \varprojlim G_n$ és no buit perquè la successió $(e)_n$ formada per l'element neutre hi pertany. De fet, aquest element n'és l'element neutre que fa que sigui un grup, a més, $\psi_n : G \to G_n$ són homomorfismes de grups. Similarment, la propietat de factorització única es manté a la categoria de grups.

És important remarcar que tot grup topològic que admet un sistema d'entorns numerable de l'element neutre és metritzable, ja que un cas usual és prendre una successió decreixent de grups normals $(H_n)_n$ a G un grup que no necessàriament té topologia, els subgrups discrets topològics $G_n = G/H_n$ formen un sistema projectiu amb límit projectiu tal que la imatge de G és densa en ell, de manera que n'és una compleció i els grups $\hat{H}_i$ formen una base d'entorns del neutre de $\hat{G}$.

Per acabar, considerarem límits projectius d'anells topològics. Si A és un anell commutatiu i tenim una successió decreixent d'ideals $(I_n)_n$ i els homomorfismes canònics $\varphi_n : A/I_{n+1} \to A/I_n$, el límit projectiu $\hat{A} = \varprojlim A/I_n$ és un anell topològic amb projeccions contínues: $\psi_n : \hat{A} \to A/I_n$, i aleshores per la propietat universal obtenim un homomorfisme canònic $A \hookrightarrow \hat{A}$ injectiu quan $\cap I_n = \{0\}$ i aleshores podem veure'l com la compleció de A per la topologia amb I_n com a sistema fonamental d'entorns de 0.

$\mathbb{Z}_p$ com a límit projectiu

Apliquem això que acabem de veure a l'anell $\mathbb{Z}$ i la successió d'ideals $I_n = p^n\mathbb{Z}$ amb les projeccions canòniques. Obtenim la presentació que havíem promès dels enters p-àdics a l'entrada del primer capítol.

Teorema 1.4. *L'aplicació $\mathbb{Z}_p \to \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ que associa a cada nombre p-àdic $x = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ la successió coherent $(x_n)_{n \geq 1}$ de sumes parcials, $x_n = \sum_{i<n} a_i p^i \pmod{p^n}$ és un isomorfisme d'anells topològics.*

DEMOSTRACIÓ: Com que φ_n ve donat per

$$\sum_{i \leq n} a_i p^i \pmod{p^{n+1}} \mapsto \sum_{i<n} a_i p^i \pmod{p^n},$$

les successions coherents del producte $\prod_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, són les donades per sumes parcials: els p-àdics. Tenim relacions

$$x_1 = a_0, \quad x_2 = a_0 + a_1 p, \quad x_3 = a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \quad \ldots$$

i similarment pels a_i en funció dels x_i, que ens mostren que l'aplicació és bijectiva, per tant un isomorfisme algebraic. Com que l'aplicació és contínua entre dos espais compactes, és un homeomorfisme i hem acabat. □

L'aplicació $\sum_{i<n} a_i p^i \pmod{p^n} \mapsto \sum_{i<n} a_i p^i \pmod{p^n\mathbb{Z}_p}$ defineix un isomorfisme, de manera que $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Aquesta presentació ens permet agafar qualsevol sistema de representants de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ i donar una expansió per a qualsevol $x \in \mathbb{Z}_p$ de la forma $x = \sum_i s_i p^i$ amb s_i del sistema de representants, on normalment se sol incloure el 0.

Hem obtingut doncs, una visió més algebraica dels enters p-àdics.

Capítol 2

Una aplicació a la física de partícules

En aquest capítol, començarem amb la construcció de l'anell d'adeles, que com veurem serà un anell topològic localment compacte, de manera que hi tindrem una mesura de Haar i hi podrem fer anàlisi. Gràcies a aquesta construcció, i propietats prèviament vistes de p-àdics, podrem centrar-nos en l'estudi de la regularització d'un producte proposat per Freund i Witten en [9] seguint el paper de Vladimirov [27]. D'aquesta manera, veurem una manera d'emprar totes les eines construïdes en la física de partícules.

Aprofitem també aquesta introducció al capítol per a explicar breument que la teoria de cordes és una de les teories més potents de la física moderna que intenta unificar les quatre interaccions elementals en un sol marc quàntic. Aquesta teoria ha sigut capaç de donar-nos informació molt rellevant i fer avançar camps com la física de partícules i la cosmologia, alhora que ha construït ponts molt importants de la física a les matemàtiques suggerint nous camps de recerca. Aquí aixecarem la restricció de cordes arquimedianes per a considerar cordes p-àdiques, que com veurem ens ajudaran a trobar més informació sobre les arquimedianes a través de la fórmula del producte. Per a trobar més informació d'aquests fets, cf. [24], [5], [4] i [8].

Aquesta fórmula del producte intenta recuperar informació sobre l'amplitud de Veneziano i Virasoro-Shapiro en termes de les seves anàlogues p-àdiques, que estan, com veurem, estretament relacionades amb les funcions Γ i B per a diversos cossos. Aquestes amplituds són aproximacions que pretenen calcular invariants per a la col·lisió de taquions i es fan servir en teoria de cordes. Ens fixarem en el cas de l'amplitud de Veneziano, que és la corresponent a cordes obertes.

2.1 Adeles

En aquesta secció farem una primera aproximació als adeles d'un cos global K, tot i que ens interessarà sobretot el cas en què K és un cos de nombres, ja que serà el cas que farem servir en l'aplicació a la física dels nombres p-àdics.

2.1.1 Motivació

Ens plantegem l'estudi de cossos globals a partir de les seves complecions localment compactes. És molt usual l'estudi del pas de propietats locals a globals i viceversa, per tant, sembla natural de considerar la construcció d'un objecte anàleg a un cos localment compacte K, ja que aquest té el subgrup additiu i multiplicatiu localment compactes i abelians, permetent mètodes d'anàlisi de Fourier i altres bones propietats.

Així doncs, volem trobar un anàleg global per a aquestes propietats, és a dir: donat un cos global K (nosaltres ens fixarem en cossos de nombres), volem construir un anell topològic commutatiu $\mathbb{A}_K$, l'**anell dels adeles**, que serà localment compacte. Això ens permetrà de tenir una mesura de Haar definida, que utilitzarem a l'aplicació de què parlarem a continuació, i en general permet treballar amb mètodes d'anàlisi harmònica. Cal notar que a més, amb la topologia adequada, el grup d'unitats és el **grup d'ideles** $\mathbb{I}_K$, que també és un grup abelià localment compacte.

Tindrem, també embeddings canònics $K \hookrightarrow \mathbb{A}_K$ i $K^* \hookrightarrow \mathbb{I}_K$, on K serà en el primer cas un subgrup discret, per tant, tancat i de quocient compacte.

2.1.2 Un mètode de construcció

Sabem que per a tot $\mathfrak{p}$, la compleció $K_\mathfrak{p}$ és un cos localment compacte, però el producte cartesià $\prod_\mathfrak{p} K_\mathfrak{p}$ no. Necessitarem el següent lema, la demostració del qual es pot trobar a [2], per tal d'arribar a la construcció que volem.

Lema 2.1. *Si un producte $\prod_{i\in I} X_i$ és localment compacte (I una família no buida d'índexs), aleshores X_i és localment compacte per a tot $i \in I$ i el conjunt $\{i : X_i$ no és compacte$\}$ és finit.* $\square$

Podríem considerar el producte de les complecions arquimedianes pels subanells de valoració compactes de les no arquimedianes. Això no funcionaria perquè voldríem tenir l'embedding de K en $\mathbb{A}_K$, i aquest anell no compleix això, ja que, si ens fixem en $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ fet d'aquesta manera, només hi podríem posar els racionals que fossin enters, ja que caldria $|x|_p \geq 0$ per a tot primer p, de manera que no podria ser un nombre racional. Aquest fet no impedeix, però que sigui una bona compleció de $\mathbb{Z}$, i de fet és la que s'agafa usualment: $\hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$ seria l'objecte obtingut d'aquesta manera, on $\hat{\mathbb{Z}}$ és l'anell de Prüfer que es pot veure com el producte de tots els anells d'enters p-àdics.

Aquestes consideracions, en el cas de $\mathbb{Q}$, ens porten a pensar en el següent: donat S un subconjunt de primers finit, podem agafar

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S) := \mathbb{R} \times \prod_{\ell \in S} \mathbb{Q}_\ell \times \prod_{\ell \notin S} \mathbb{Z}_\ell.$$

Aquest anell contindrà uns quants racionals, i continuarà sent localment compacte. Això clarament no és suficient perquè hem triat només un conjunt finit de primers S. Tot i això, observem que podem definir una inclusió natural de manera que si $S \subseteq S'$ tindrem l'embedding $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S) \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S')$. Això ens proporciona un sistema dirigit a través de la inclusió natural de subconjunts finits de primers de manera que podem definir

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_{S} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S),$$

el límit directe d'aquests anells localment compactes que podem visualitzar com el subconjunt de $\prod_\ell \mathbb{Q}_\ell$ de famílies $\{x_\ell\}_\ell$, considerant $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ que és notació que emprarem més endavant; de manera que $x_\ell \in \mathbb{Z}_\ell$ excepte un nombre finit de primers ℓ.

La topologia de què dotem aquest nou anell és la final, que és la que s'empra sovint en límits directes, és a dir, la més fina que fa contínua les aplicacions $f_i : X_i \to X$, on X és el límit directe, i X_i els objectes dirigits. En el nostre cas serien les inclusions per a cada subconjunt finit S de la forma $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S) \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$. És a dir, fem que totes aquestes siguin contínues.

D'aquesta manera, com que la topologia és la més fina, tindrem que U és un obert de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ si i només si la preimatge ho és en cada component, cosa que ens dóna que $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ és un obert, ja que al fer la preimatge en qualsevol subconjunt S, obtenim un altre conjunt del tipus $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S')$ per a un S' convenient, de manera que són oberts de la topologia subespai de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}(S)$. A més, notem que són localment compactes, ja que per a tot x podrem trobar un entorn compacte de la forma

$$\prod_{\ell \notin S} \mathbb{Z}_\ell \times \prod_{\ell \in S} \mathbb{Z}_\ell p^{n_\ell} \times [a_x, b_x],$$

amb n_ℓ, a_x i b_x convenients, on ara és clar que tenen interior no buit. De manera immediata obtenim que un element de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ té un entorn compacte, de manera que l'anell obtingut és localment compacte.

Es tracta ara de generalitzar aquesta construcció prèvia a qualsevol cos global K. Caldrà considerar el **producte directe restringit**.

Suposem que ens donen les següents dades: I un conjunt d'índexs no buit, $G_i, i \in I$ grups topològics i H_i subgrups de G_i per a tot i, direm que el producte directe restringit és el subconjunt de $\prod_i G_i$, de manera que les tuples $(g_i)_{i\in I}$ tenen tots els elements excepte un conjunt finit en els subgrups H_i. Notem que normalment s'agafen els G_i localment compactes i els H_i subgrups oberts compactes de G_i.

Podem observar que la topologia subespai del producte que hereta G, el producte directe restringit és la mateixa que té el límit directe de grups G^J formats amb $J \subset I$ un subconjunt finit de manera que $G^J = \prod_{i\in J} G_i \times \prod_{i\notin J} H_i$ és la mateixa que la del producte directe restringit.

Tindrem a més, que si G_i són tots localment compactes i H_i són compactes excepte un conjunt finit L i H_i subgrups oberts, aleshores, G és localment compacte. Això és cert perquè donat $x \in G$, podem afirmar que existeix un subconjunt finit $J \subset I$ de manera que $x \in G^J$. Per tant, podem donar un compacte com

$$\prod_{i\notin J\setminus L} H_i \times \prod_{i\in L} K_i \cap H_i \times \prod_{i\in J} K_i,$$

ja que un subgrup obert és tancat, i l'existència dels K_i ens ve del fet que els G_i són localment compactes i observem que no té interior buit. Estem en condicions de donar la definició en general.

Definició 2.1. *Sigui K un cos global. Definim l'**anell dels adeles** $\mathbb{A}_K$, com el producte restringit dels grups topològics $G_{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}$, escollint els subgrups de manera que $H_{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}$ si la compleció és arquimediana, i agafem l'anell de valoració en cas que sigui no arquimediana, que és compacte.*

Amb el que hem vist, $\mathbb{A}_K$ és un anell topològic localment compacte amb un embedding natural de K en aquest.

2.2 Esbós de les eines emprades

Al llarg de tot aquesta part utilitzarem sense demostrar-ne la construcció l'existència d'una mesura de Haar en grups topològics localment compactes. N'especificarem, però, en cada cas, la condició de normalització emprada i suggerim com a text que n'exposa la construcció [7]. Treballarem sobretot en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ i extensions quadràtiques d'aquests, així com els seus anells adèlics. Suposant que D és un enter lliure de quadrats i tenint en compte les lleis de descomposició en cossos quadràtics, definim el mòdul del cos $\mathbb{Q}_p(\sqrt{D})$ segons

$$\begin{cases} q_{D,2} = 2, & \text{si } D \not\equiv 5 \pmod 8, \\ q_{D,2} = 2^2, & \text{si } D \equiv 5 \pmod 8, \\ q_{D,p} = p, & \text{si } D \in \mathbb{Q}_p^{*2} \text{ o } |D|_p = \frac{1}{p},\ p \neq 2, \\ q_{D,p} = p^2, & \text{si } D \notin \mathbb{Q}_p^{*2} \text{ i } |D|_p = 1,\ p \neq 2. \end{cases}$$

Similarment, definim v com a 2 si D és lliure de quadrats en $\mathbb{Q}_p$ i 1 altrament. A més, si $\alpha \in \mathbb{C}$ posem

$$\rho_{D,p}(\alpha) := \begin{cases} 1, & \text{si } |D|_p = 1, p \neq 2 \text{ o } D \equiv 1 \pmod 4 \text{ quan } p = 2, \\ p^{\alpha-\frac{1}{2}}, & \text{si } |D|_p = \frac{1}{p}, p \neq 2, \\ 2^{2\alpha-1}, & \text{si } D \equiv 3 \pmod 4), p = 2, \\ 2^{3\alpha-\frac{3}{2}}, & \text{si } |D|_2 = \frac{1}{2}, p = 2. \end{cases}$$

Utilitzarem força vegades el principi d'extensió analítica après a Anàlisi complexa i com que, per a estendre funcions, ens interessa la seva equació funcional; voldrem que aquesta sigui tan senzilla com sigui possible. Amb aquesta motivació considerem les següents funcions Gamma a $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$:

$$\Gamma_\infty(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-1} \exp(-2i\pi x)dx,$$

Aquesta Gamma de Gel'fand-Graev, compleix $\Gamma_\infty(\alpha)\Gamma_\infty(1-\alpha) = 1$. Similarment, definim la Gamma de Gel'fand-Graev del cos $\mathbb{C}$ com

$$\Gamma_\infty^-(\alpha) := 2\int_{\mathbb{C}} (N(z))^{\alpha-1} \exp(-2i\pi \mathrm{Tr}(z))|dz \wedge d\bar{z}|.$$

En aquest cas, també tenim $\Gamma_\infty^-(\alpha)\Gamma_\infty^-(1-\alpha) = 1$.

Fet aquest preliminar, ara ens movem a definir una nova funció Gamma sobre $\mathbb{Q}_p$, de manera que ens ajudarà a poder tenir fórmules del producte. A tal efecte considerem

Definició 2.2. *El caràcter additiu de $\mathbb{Q}_p$ que farem servir és donat per $\chi_p(t) := \exp(2i\pi\{t\}_p)$, que és trivial a $\mathbb{Z}_p$, ja que $\{t\}_p$ simbolitza la part fraccionària de $t \in \mathbb{Q}_p$ i que compleix $\chi_p(t+r) = \chi_p(t)\chi_p(r)$, per a tot $r, t \in \mathbb{Q}_p$.*

A més, considerarem la mesura de Haar de $\mathbb{Q}_p$ $d\mu_p$ amb la condició de normalització $\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$, ja que la mesura d'un compacte determina completament la mesura de Haar en un grup topològic localment compacte. Mostrarem a continuació com és el càlcul d'una integral p-àdica en la següent Definició/Proposició.

Proposició 2.1. *Definim la Gamma p-àdica per a un primer p com*

$$\Gamma_p(\alpha) := \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)d\mu_p = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}},$$

afirmant la segona igualtat.

DEMOSTRACIÓ: Simplificarem els càlculs substancialment observant el següent fet:

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)d\mu_p = \int_{\biguplus_{m=-\infty}^{m=\infty} p^m\mathbb{Z}_p\setminus p^{m+1}\mathbb{Z}_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)d\mu_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p^{(1-\alpha)m}\int_{p^m\mathbb{Z}_p\setminus p^{m+1}\mathbb{Z}_p}\chi_p(x)d\mu_p.$$

Ara observem que fent, un canvi de variable i per la invariança per translacions de la mesura de Haar, tindrem que per a $m \leq -2$ les integrals s'anul·len totes, obtenint una nova simplificació.

Notant que en aquest cas $p^m\mathbb{Z}_p \setminus p^{m+1}\mathbb{Z}_p = \frac{1}{p} + p^m\mathbb{Z}_p \setminus p^{m+1}\mathbb{Z}_p$ el canvi de variable ens condueix a

$$\int_{p^m\mathbb{Z}_p\setminus p^{m+1}\mathbb{Z}_p}\chi_p(x)d\mu_p(x) = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\int_{p^m\mathbb{Z}_p\setminus p^{m+1}\mathbb{Z}_p}\chi_p(y)d\mu_p(y),$$

Això justifica l'afirmació anterior, i notem que en el cas $m = -1$, com que podem posar la integral com a resta sobre els dos conjunts involucrats, en un serà zero tornant a invocar la invariància de la mesura de Haar i en l'altre, per definició i ser el caràcter trivial, serà $-p^{\alpha-1}$.

En els casos $m \geq 0$, el caràcter serà trivial com ja hem comentat, de manera que obtindrem la mesura del conjunt, que és $\frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^{m+1}}$.

Obtenim, doncs, la suma

$$-p^{\alpha-1} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{m=0}^{\infty} p^{-\alpha m} = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}},$$

que és precisament el que volíem veure. □

Hom pot trobar més informació sobre integrals p-àdiques a les següents referències: [3] [18].

Ara resulta fàcil de veure que es compleix $\Gamma_p(\alpha)\Gamma_p(1-\alpha) = 1$, la qual cosa confirma que la definició emprada està en el mateix esperit que les de Gel'fand-Graev anteriors. També necessitarem la definició d'una transformada de Fourier d'una funció test a $\mathbb{Q}_p$, que vindrà donada per

$$\tilde{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{Q}_p}\varphi(x)\chi_p(x\xi)d\mu_p.$$

La transformada inversa de Fourier es definiria anàlogament amb un canvi de signe, com és habitual.

Considerem ara les extensions quadràtiques $\mathbb{Q}_p(\sqrt{D})$ amb D lliure de quadrats. La normalització de la mesura de Haar aquí vindrà donada, tornant a atendre les lleis de descomposició de primers en extensions de cossos quadràtics, per

$$\int_{|z\bar{z}|_p\leq 1} d\mu_p = \delta_{D,p} = \begin{cases} 1, & p = 2, D \equiv 5 \pmod 8, \\ 2, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquí, $\bar{z}$ denota la conjugació galoisiana de $z = x + y\sqrt{D}$. La transformada de Fourier ara ve donada per

$$\tilde{\varphi}(\theta) := \sqrt{|4D|_p} \int_{\mathbb{Q}_p(\sqrt{D})} \varphi(z)\chi_p(\mathrm{Tr}(z\theta))d\mu_p(z).$$

Similarment a com hem comentat es definirà la transformada de Fourier inversa i per últim, la funció Gamma de $\mathbb{Q}_p(\sqrt{D})$ serà:

$$\Gamma_p^{(D)}(\alpha) := \sqrt{|4D|_p} \int_{\mathbb{Q}_p(\sqrt{D})} (N(z))^{\alpha-1}\chi_p(\mathrm{Tr}(z))d\mu_p(z).$$

Es pot comprovar que també compleix $\Gamma_p^{(D)}(\alpha)\Gamma_p^{(D)}(1-\alpha) = 1$.

Pel que fa als adeles, que era l'objectiu que perseguíem inicialment, per tal de poder entendre el teorema de Tate, farem servir la mesura $d\mu_D$ per a l'adele $\mathbb{A}_D$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Aquesta la podem interpretar com

$$d\mu_D(z) = d\mu_{D,\infty}(z_\infty) \prod_{p=2}^{\infty} d\mu_{D,p}(z_p).$$

La normalització escollida és

$$\int_{\mathbb{A}_D^0} d\mu_D(z) = \begin{cases} 2, & \text{si } D \equiv 5 \pmod 8, \\ 1, & \text{si } D \not\equiv 5 \pmod 8, \end{cases}$$

on $\mathbb{A}_D^0$ és el conjunt d'adeles compacte amb $0 \leq x_\infty, x'_\infty \leq 1$ si $D > 0$ i $z_\infty \bar{z}_\infty \leq \frac{1}{2\pi}$ si $D < 0$ i $x_p, x'_p \in \mathbb{Z}_p$ per a $p \in P_D^+$ i $z_p \in \mathbb{Z}_p(\sqrt{D})$ si $p \in P_D^-$. Les definicions d'aquestes particions de primers es poden trobar especificades a [27].

La qual cosa ens fa veure que aprendre a fer integrals en cada component, tot i que en general no seria suficient, en el nostre cas servirà perquè tractarem només funcions estàndard sobre $\mathbb{A}_D$, que podem definir com combinacions lineals finites de productes en cada p de distribucions integrables sobre cada espai corresponent, per a les quals existeix un P primer de manera que si $p > P$ aquestes són, $\phi_p(x_p) = \phi_p(x'_p) = \Omega(|x|_p)$ i $\varphi_p(z_p) = \Omega(|z_p\bar{z}_p|_p)$, amb $\Omega(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, assegurant que tots els elements del producte infinit excepte un conjunt finit siguin 1.

Això permet definir la transformada de Fourier com

$$\tilde{\varphi}(\zeta) := \frac{1}{2\sqrt{|D|}} \int_{\mathbb{A}_D^0} \varphi(z)\chi_D(z\zeta)d\mu_D(z),$$

on el caràcter $\chi_D(z)$ es defineix pel producte

$$\left.\begin{array}{ll} \chi_\infty(x_\infty)\chi_\infty(x'_\infty), & D > 0 \\ \chi_\infty(z_\infty + \bar{z}_\infty), & D < 0 \end{array}\right\} \prod_{p \in P_D^+} \chi_p(x_p)\chi_p(x'_p) \prod_{p \in P_D^-} \chi_p(z_p + \bar{z}_p).$$

Conseqüentment, podem passar a definir la transformada de Mellin que ens permetrà concloure la secció amb el teorema de Tate que només enunciarem i usarem a la regularització. Per a Re $\alpha > 0$, definim la **transformada de Mellin** d'una distribució integrable complexa definida en $\mathbb{R}$ com

$$\Phi_\infty(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)|x|^{\alpha-1}dx,$$

i la seva continuació analítica per a $\alpha \notin -2\mathbb{N}$ i zero. Tenim que es compleix $\Phi_\infty = \Gamma_\infty(\alpha)\tilde{\Phi}(1-\alpha)$, cf [27]. En el cas complex, es defineix com

$$\Phi_\infty^-(\alpha) := \int_{\mathbb{C}} \varphi(z)(N(z))^{\alpha-1}|dz \wedge d\bar{z}|,$$

tenint també que $\Phi_\infty^-(\alpha) = \Gamma_\infty^-(\alpha)\tilde{\Phi}_\infty^-(1-\alpha)$, sempre que $\alpha \notin -\mathbb{N}$. Per al cas p-àdic, la definim com

$$\Phi_p(\alpha) := \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)|x|_p^{\alpha-1}d\mu_p(x).$$

Per últim, per a extensions quadràtiques de $\mathbb{Q}_p$, per a una funció complexa allà definida, la transformada de Mellin es posa com

$$\Phi_p^{(D)}(\alpha) := \frac{1}{\delta(1-q^{-1})} \int_{\mathbb{Q}_p(\sqrt{D})} \varphi_D(z)(N(z))^{\alpha-1}d\mu_p(z).$$

on també es té que $\Phi_p^{(D)}(\alpha) = \Gamma_p^{(D)}\tilde{\Phi}_p^{(D)}(1-\alpha)$, cosa que permet definir la transformada de Mellin per a una funció estàndard de $\mathbb{A}_D$ com

$$\Phi(\alpha) := \int_{\mathbb{A}_D^*} \varphi(z)|z|_D^{\alpha-1}d\mu_D(z).$$

Finalment, tenim

Teorema 2.1. (Teorema de Tate). *La funció $\Phi(\alpha)$ pot ser continuada analíticament a tot $\mathbb{C}$ excepte pols simples en $\alpha = 0, 1$, amb residus $\varphi(0)$ i $\tilde{\varphi}(0)$ respectivament. A més, tenim la relació funcional*

$$\Phi(\alpha) = \tilde{\Phi}(1-\alpha), \quad \alpha \neq 0, 1. \ \square$$

Ara, donarem dues fórmules adèliques que es poden provar amb el teorema de Tate i permeten la regularització desitjada del producte.

La primera d'elles ens diu que, per a tot $P = \infty, 2, 3, \ldots$ és

$$\Gamma_p(\alpha)\mathrm{AC}\prod_{p>P}\frac{1}{1-p^{-\alpha}} = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(1-\alpha)}\mathrm{AC}\prod_{p>P}\frac{1}{1-p^{\alpha-1}}.$$

DEMOSTRACIÓ: De fet, donarem les guies de la demostració: la igualtat es compleix evidentment sense continuació analítica per a $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$, però podem obtenir aquesta igualtat a través de l'aplicació de la transformada de Mellin d'una funció estàndard, de manera que aplicant el teorema de Tate citat anteriorment acabem.

Pel que fa a la segona fórmula adèlica, hem de recordar primer la definició de la funció zeta de Dedekind del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ que és

$$\zeta_D(\alpha) := \prod_{p=2}^{\infty}(1 - q^{-\alpha})^{-v}.$$

Reorganitzant aquesta fórmula convenientment seguint la notació indicada anteriorment i el mateix procediment que la primera, podem afirmar que per a tot $P = 2, 3, \ldots$ tenim

$$\prod_{p=2}^{P}\Gamma_q^v(\alpha)\mathrm{AC}\prod_{p>P}(1 - q^{-\alpha})^{-v} = \frac{\zeta_D(\alpha)}{\zeta_D(1-\alpha)}\mathrm{AC}\prod_{p>P}(1 - q^{\alpha-1})^{-v}.$$

Ara posant Δ_D el discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ i tenint en compte que $\prod_{p\in P_D^-}\rho_{D,p}(\alpha) = |\Delta_D|^{\alpha-\frac{1}{2}}$ arribem a

$$|\Delta_D|^{\frac{1}{2}-\alpha}\mathrm{AC}\prod_{p>P}(1 - q^{\alpha-1})^{-v} = \prod_{p=2}^{P}\Gamma_q^v(\alpha)\mathrm{AC}\prod_{p>P}(1 - q^{-\alpha})^{-v}\begin{cases}\Gamma_\infty^2(\alpha), & D > 0,\\ \Gamma_\infty^-(\alpha), & D < 0.\end{cases} \quad (1)$$

2.3 La regularització del producte

Denotarem per $A(s,t,u)$ l'amplitud de Veneziano com a objecte que calculem en un experiment de dispersió; ve donada per $A(s,t,u) = B_\infty(-\alpha(s), -\alpha(t))$. Les seves anàlogues p-àdiques, també per a cordes obertes són

$$A_p(s,t,u) = B_p(-\alpha(s), -\alpha(t)), \quad p = 2, 3, \ldots.$$

La funció $B_p(\alpha, \beta)$ simbolitza la funció beta dels cossos $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$ i $\mathbb{Q}_p$ per a tot primer p amb la definició ja donada, i les variables de Mandelstam s, t, u de manera que $s + t + u = -8$ i $\alpha(s) = 1 + \frac{s}{2}$ i $-\alpha(s) - \alpha(t) - \alpha(u) = 1$.

Gràcies a la segona fórmula adèlica (1) obtinguda prèviament, fent P tendir a infinit obtenim la fórmula:

$$|\Delta_D|^{\frac{1}{2}-\alpha} = \lim_{P\to\infty}\prod_{p=2}^{P}\Gamma_q^v(\alpha)\mathrm{AC}\prod_{p>P}(1 - q^{-\alpha})^{-v}\begin{cases}\Gamma_\infty^2(\alpha), & D > 0,\\ \Gamma_\infty^-(\alpha), & D < 0.\end{cases}$$

Això ens permet definir la regularització del producte següent:

$$\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_q^v(\alpha)=\lim_{P\to\infty}\prod_{p=2}^{P}\Gamma_q^v(\alpha)\mathrm{AC}\prod_{p>P}(1-q^{-\alpha})^{-v},$$

i la seva continuació analítica per als α per als quals aquesta expressió divergeix. Això permet deduir que

$$|\Delta_D|^{\frac{1}{2}-\alpha}=\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_q^v(\alpha)\begin{cases}\Gamma_\infty^2(\alpha), & D>0,\\ \Gamma_\infty^-(\alpha), & D<0.\end{cases}$$

Gràcies a això, podem estendre la regularització a les funcions amplitud segons

$$\left.\begin{array}{ll} D>0, & A^2(s,t,u)\\ D<0, & A^-(s,t,u)\end{array}\right\}\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}A_p^v(s,t,u)=\sqrt{|\Delta_D|}.$$

Ara, doncs, podem donar sentit a l'expressió suggerida per Freund i Witten

$$A(s,t,u)\prod_{p=2}^{\infty}A_p(s,t,u)=1,$$

substituint a la regularització $D=1$, recuperant

$$A(s,t,u)\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}A_p(s,t,u)=1.$$

Amb aquest resultat cloem l'exemple discutit.

Capítol 3

Propietats topològiques de $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Q}_p$

En aquest capítol donarem algunes propietats topològiques dels p-àdics que després ens serviran per a obtenir-ne models de Cantor que estendrem a models euclidians en general; donarem alguns exemples i imatges que en mostraran el comportament fractal però sense entrar en tot detall en dimensions de Hausdorff. Bàsicament seguirem l'article [25], tot i que molta informació també es pot trobar a [21].

Gràcies a la feina que veurem en aquest capítol, serem capaços de veure al següent capítol la part següent d'una equivalència de conjectures: si la conjectura de Hilbert-Smith és certa, aleshores $\mathbb{Z}_p$ no pot actuar de manera efectiva sobre una varietat diferenciable connexa.

3.1 Topologia de $\mathbb{Z}_p$ i de $\mathbb{Q}_p$

Remarquem que donat que treballarem amb els valors absoluts p-àdics, n'hi haurà prou de considerar les boles de radis p^n per a cert n. Donarem un seguit de propietats fàcils de provar, la demostració de les quals es troba a [25] que es compleixen en forma de proposicions amb un exemple per a visualitzar què ocorre en els oberts.

Lema 3.1. (a) *L'esfera $S(a,r) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = r\}$ és un obert de $\mathbb{Q}_p$.*

(b) *Les boles obertes de $\mathbb{Q}_p$ són tancades i per tant no tenen frontera.*

(c) *Dues boles de $\mathbb{Q}_p$ tenen intersecció no buida si i només si una està continguda dins l'altra.*

(d) *Tenim la descomposició per a $x \in \mathbb{Z}_p$ i $k \in \mathbb{N}$:*

$$B(x, p^{-k}) = \bigcup_{j=0}^{p-1} B(x + jp^{k+1}, p^{-(k+1)}).$$

(e) *L'esfera $S(a, r)$ és oberta i tancada*

(f) *$\mathbb{Z}_p$ és compacte i $\mathbb{Q}_p$ és localment compacte.*

Proposició 3.1. *$\mathbb{Q}_p$ és totalment disconnex.*

DEMOSTRACIÓ: Mostrarem que el component connex d'un $x \in \mathbb{Q}_p$ és $\{x\}$. Suposem que no fos així i que existís un natural de manera que $B(x, p^{-n}) \cap C_a \neq C_a$. Aleshores tenim

$$C_a = (B(a, p^{-n}) \cap C_a) \cup ((\mathbb{Q}_p \setminus B(a, p^{-n}) \cap C_a).$$

D'on C_a no és connex, de manera que obtenim el resultat. □

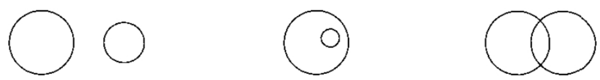

Figura 3.1: Configuracions de les boles en topologia no arquimediana: les imatges de l'esquerra i del centre estan permeses, però la de la dreta no!

3.2 Models de Cantor de $\mathbb{Z}_p$

En aquesta secció definirem el conjunt de Cantor usual $C \subset [0, 1]$ i en recordarem propietats bàsiques vistes a Anàlisi real i funcional. A partir d'aquí veurem que $\mathbb{Z}_2$ és homeomorf a C de manera natural, i que per a $p > 2$, tenim un homeomorfisme amb un conjunt $C^{(p)} \subset [0, 1]$ construït de manera similar per a cada p i veurem que C i $C^{(p)}$ són homeomorfs, de manera que $\mathbb{Z}_p$ és homeomorf al conjunt de Cantor C per a qualsevol p.

Definició 3.1. *Donat $A = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k, 2k+1]$ i $C_0 = [0, 1]$ definim inductivament $C_n := C_{n-1} \cap (3^{-n}A)$. Això ens permet definir el conjunt ternari de Cantor C com*

$$C := \bigcap_{n\geq 0} C_n.$$

Lema 3.2. *El conjunt de Cantor C satisfà les següents propietats:*

(a) *C és compacte.*

(b) *C té mesura de Lebesgue 0.*

(c) *C és un conjunt perfecte.*

(d) *C no és numerable.* $\square$

Amb això ja podem donar l'homeomorfisme entre $\mathbb{Z}_2$ i C.

Teorema 3.1. *$(\mathbb{Z}_2, |\ |_2)$ és homeomorf a C amb la norma del valor absolut. Un homemorfimse explícit és*

$$\Phi : \mathbb{Z}_2 \to C \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n 3^{-(n+1)}.$$

Demostració: De les consideracions que hem fet fins ara observem que Φ és bijectiva. Posem $x, y \in \mathbb{Z}_2$, aleshores

$$|x-y|_2 \leq 2^{-k} \Leftrightarrow x_n = y_n \text{ quan } n \leq k \Leftrightarrow |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq 3^{-k}.$$

Això mostra que Φ és contínua i d'inversa contínua, acabant així la prova. $\square$

A continuació establirem els conjunts de Cantor modificats i l'homeomorfisme anàleg al del cas $p = 2$ ja establert.

Definició 3.2. *De manera similar al conjunt de Cantor, donat $p > 2$ un primer, posem $A = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k, 2k+1]$, $C_0^{(p)} := [0,1]$ i definim inductivament $C_n^{(p)} := C_{n-1}^{(p)} \cap ((2p-1)^{-n}A)$ de manera que*

$$C^{(p)} := \bigcap_{n\geq 0} C_n^{(p)}.$$

Aquest nou conjunt de Cantor consisteix en $\left(\frac{2p-1}{2}\right)^n$ intervals disjunts de longitud $(2p-1)^{-n}$ i el pas següent els subdivideix en $2p-1$ subintervals eliminant-ne després l'interval obert cada 2.

Aquest conjunt satisfà propietats molt similars al de Cantor usual que posem en forma de lema sense explicitar-ne la prova ja que és senzillament calcar els passos que ja s'han fet per a C.

Lema 3.3. *El conjunt de Cantor modificat $C^{(p)}$ satisfà les propietats següents:*

(a) *$C^{(p)}$ és un conjunt compacte, perfecte, de mesura de Lebesgue nul·la, i no numerable.*

(b) *$x \in C^{(p)}$ si i només si la seva expansió $2p-1$-àdica només conté digits parells.* $\square$

Teorema 3.2. *$(\mathbb{Z}_p, |\ |_p)$ és homeomorf a $C^{(p)}$ amb la norma del valor absolut. Un homemorfisme explícit és:*

$$\Phi_p : \mathbb{Z}_p \to C^{(p)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (2p-1)^{-(n+1)}.$$

Demostració: La prova també és anàloga al cas $p = 2$: torna a ser clar que Φ_p és bijectiva per a tot p i similarment és

$$|x-y|_p \leq p^{-k} \Leftrightarrow x_n = y_n \text{ si } n \leq k \Leftrightarrow |\Phi_p(x) - \Phi_p(y)| \leq (2p-1)^{-k}.$$

Així tenim que Φ_p és un homeomorfisme per a tot $p > 2$ com volíem. □

Per últim veurem que $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_p$ són homeomorfs en el següent

Teorema 3.3. *Tot subconjunt compacte, perfecte i totalment disconnex de la recta real és homeomorf al conjunt de Cantor C.*

Demostració: Posarem $m := \inf E$ i $M := \sup E$. Donarem una aplicació $F : [m, M] \to [0, 1]$ de manera que apliqui E homeomòrficament en C. La funció es construirà en els complements $[m, M]\setminus E$ i $[0, 1]\setminus C$, ja que són reunions numerables d'oberts amb què ens serà més fàcil de treballar i després podrem estendre la funció a f per continuïtat ja que aquests són densos.

Considerem $\mathcal{I}$ la col·lecció de tots els intervals la reunió dels quals és $[m, M]\setminus E$ i $\mathcal{J}$ de manera similar per a $[0, 1] \setminus C$. Definim una bijecció

$$\Theta : \mathcal{I} \to \mathcal{J}.$$

Aquesta bijecció ve donada per enviar l'interval I_1 de $\mathcal{I}$ de longitud màxima a $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, els dos següents de longitud màxima a $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ fins a definir-ho a tot $\mathcal{I}$. Això ho podem fer perquè $\mathcal{I}$ només conté un nombre finit de conjunts de longitud més gran que un cert $\varepsilon > 0$ fixat i com que E i C són perfectes, tenen diferents punts delimitadors. Per construcció, Θ és bijectiva i preserva l'ordre en el sentit que si I és a l'esquerra de I', també ho seran les imatges. Ara, per a $I \in \mathcal{I}$ posem $F|_I : I \to \Theta(I)$ com l'única aplicació lineal creixent que aplica de manera bijectiva I a $\Theta(I)$. Ara, com que E i C són totalment disconnexos, no són densos enlloc i existeix doncs una única continuació $F : [m, M] \to [0, 1]$. De la construcció podem dir que aquesta continuació ve donada per

$$F(x) = \sup \left\{F(y) : y \notin E, y \leq x\right\}.$$

Definim $f := F|_E$. Aleshores, $f : E \to C$ és monòtona creixent, bijectiva i contínua; ens cal veure que $g := f^{-1}$ és contínua. A més, és monòtonament creixent. Sigui $x \in C$ i $x_n \to x$ una successió que hi convergeix. Prenent-ne una parcial si cal, podem suposar sense perdre generalitat que $(x_n)_n$ és monòtonament creixent. Aleshores:

$$y := \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \sup_{n\geq 1} g(x_n) \leq g(x).$$

Suposem que $y < g(x)$. Com que E és tancat, $y \in E$ i $g^{-1}(y) < x$. Això implica que $g^{-1}(y) < x_n$ per a n prou gran i per monotonia $y < g(x_n)$ contradient així la definició de y. Per tant, tenim igualtat, cosa que diu que g és contínua i tenim establert l'homeomorfisme que volíem. □

3.3 Models euclidians

3.3.1 Models euclidians de $\mathbb{Z}_p$

Definició 3.3. *Un subconjunt X de $\mathbb{R}^n$ de manera que $X \cong \mathbb{Z}_p$ és un model euclidià de $\mathbb{Z}_p$. Direm que el model és **lineal** si $n = 1$.*

Començarem amb models lineals de $\mathbb{Z}_p$. A tal efecte, considerarem l'aplicació

$$\psi_{b,p} : \mathbb{Z}_p \to [0,1] \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_i p^i \longmapsto \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}}, \; (1)$$

escollint α de manera que $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \psi_{b,p}(x) = 1$, i on l'expressió de $[0,1]$ en forma de suma és l'expansió en base $b > 1$. Aleshores tenim la

Proposició 3.2. *Sigui $\psi_{b,p} : \mathbb{Z}_p \to [0,1]$ definida com en (1) amb $b > 1$ i sigui p un nombre primer. Aleshores*

(a) $\alpha = \frac{b-1}{p-1}$

(b) *$\psi_{b,p}$ i la seva inversa són contínues per a tot b, p.*

(c) *$\psi_{b,p}$ és injectiva si $b > p$, i en aquest cas és homeomorfa amb la seva imatge, $\psi_{b,p}(\mathbb{Z}_p)$.*

Demostració: Per la definició dels a_i, el màxim s'assoleix quan $a_i = p - 1$ per a tot i, de manera que fent la suma geomètrica i aïllant obtenim que $\alpha = \frac{b-1}{p-1}$ com volíem.

Per a (b), senzillament es tracta de copiar la demostració feta per a veure que $\mathbb{Z}_p \cong C^{(p)}$ i canviar $2p - 1$ per b senzillament.

Per últim, notem que per tal que sigui injectiva, necessitarem que les imatges de p^k i $\sum_{i>k}(p-1)p^i$ siguin diferents, de manera que la segona sigui més petita que la primera. Així, aplicant la definició de $\psi_{b,p}$ i fent les sumes, directament obtenim que es dóna la injectivitat quan $b > p$. $\square$

Notem que $C^{(p)}$ és el cas $b = 2p - 1$.

Ara parlarem de la generalització de les aplicacions $\psi_{b,p}$ però a un espai vectorial finit V sobre $\mathbb{R}$ amb producte interior definit positiu. Vegem com construir una generalizació de $\psi_{b,p}$ amb els paràmetres adequats.

Sigui $\nu : S := \{0, \dots, p-1\} \hookrightarrow V$ una aplicació injectiva. Posem $V \supset \Sigma := \nu(S)$ i definim

$$\psi_{\nu,b,p} : \mathbb{Z}_p \to V \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \longmapsto \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu(a_i)}{b^{i+1}}.$$

Vegem com s'aplica $\mathbb{Z}_p$ sota $\psi_{\nu,b,p}$:

$$\psi_{\nu,b,p}\left(\biguplus_{a\in S} a+p\mathbb{Z}_p\right)=\bigcup_{a\in S}\psi_{\nu,b,p}\left(a\right)+\psi_{\nu,b,p}(p\mathbb{Z}_p)=\bigcup_{v\in\Sigma}\frac{\alpha v}{b}+\frac{1}{b}\psi_{\nu,b,p}(\mathbb{Z}_p).$$

Observem que la unió pot haver deixat de ser disjunta, però per a b prou gran ho continuarà sent, per a la qual l'aplicació és injectiva i un homeomorfisme amb la imatge i té una imatge fractal. Vegem quin α és l'adient.

Lema 3.4. *Posant $\alpha = b-1$, $\psi_{\nu,b,p}(\mathbb{Z}_p)$ es manté en l'envolvent convex de Σ.*

Demostració: Prenent $\lambda : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $\lambda \leq 1$ a Σ i exactament 1 per a alguns v de Σ, aleshores, aplicant λ a la imatge d'un element qualsevol i la cota que tenim, la suma geomètrica que queda dóna 1 si posem $\alpha = b-1$. Així, el fractal $\psi_{\nu,b,p}(\mathbb{Z}_p)$ queda en l'envolvent convex de σ. $\square$

Abans de fer un exemple molt conegut de fractal que podem obtenir a partir d'aquesta aplicació, notem que $\psi_{\nu,b,p}(\mathbb{Z}_p)$ és la intersecció de conjunts compactes si fem $\tilde{\Sigma} =: K_0$ l'envolvent convex de Σ i definim inductivament

$$K_n := \bigcup_{v\in\Sigma}\alpha\frac{v}{b}+\frac{K_{n-1}}{b} \text{ per a qualsevol } n,$$

ens duu a la representació

$$\psi_{\nu,b,p}(\mathbb{Z}_p)=\bigcap_{n\geq 0}K_n.$$

Exemple 3.1. *El **triangle de Sierpinski**. Posem $p=3$, $V=\mathbb{R}^2$, prenem la base $e_1=(1,0), e_2=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $b>1, \alpha=b-1$ i definim:*

$$\nu(k) := \begin{cases} 0, & si\ k=0, \\ e_1, & si\ k=1, \\ e_2, & si\ k=2. \end{cases}$$

Aleshores, amb l'aplicació $\psi_{\nu,b,p}$ definida com abans, veiem que tindrem injectivitat per a $b>2$, però si posem $b=2$ obtenim el conegut triangle de Sierpinski i podem observar fàcilment que hem perdut la injectivitat, cosa que fa que la imatge sigui connexa. De fet, es pot veure més en general que prenent el b per al qual comencem a deixar de tenir injectivitat, obtenim fractals, que òbviament també es poden obtenir a l'espai i representar-los, i en dimensions superiors.

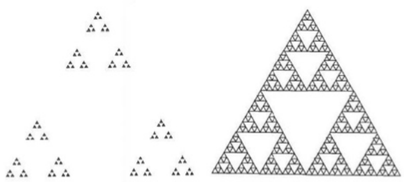

Figura 3.2: Model de $\mathbb{Z}_3$ i model del triangle de Sierpinski

3.3.2 Models euclidians de $\mathbb{Q}_p$

Sabem que podem expressar $\mathbb{Q}_p$ com la unió

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{m \geq 0} p^{-m}\mathbb{Z}_p.$$

Observant que hem vist que un model de $p\mathbb{Z}_p$ no és sinó una contracció per b del model de $\mathbb{Z}_p$, un model de $\frac{1}{p}\mathbb{Z}_p$ no serà sinó una expansió per b del model de $\mathbb{Z}_p$. Així, treballant per inducció amb l'aplicació definida prèviament podem definir l'homeomorfisme

$$\psi_{\nu,b,p} : \mathbb{Q}_p \to V \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_i p^i \longmapsto \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\nu(a_i)}{b^{i+1}},$$

on farem les mateixes assumpcions de les b, α que hem fet anteriorment. Vegem com funciona el model iteratiu en el cas de $p = 7$ en una figura:

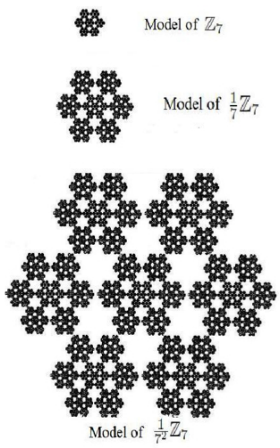

Figura 3.3: Model de com es faria la construcció de $\mathbb{Q}_7$ a partir de $\mathbb{Z}_7$, $\frac{1}{7}\mathbb{Z}_7$, etc.

Capítol 4

Una aplicació a la topologia

En aquest capítol discutirem com s'apliquen els nombres p-àdics ($\mathbb{Z}_p$), per a atacar la conjectura de Hilbert-Smith. Situarem el problema en el context històric i veurem com és equivalent demostrar una conjectura relacionada amb accions de $\mathbb{Z}_p$ en una varietat diferenciable de dimensió finita, i explicarem quina estratègia duu a terme Pardon en l'article [17] en què demostra la conjectura per al cas $n = 3$. D'aquesta manera, culminarem el capítol anterior de topologia anant una mica més enllà, motivant també l'estudi fet dels nombres p-àdics a la primera part del treball, alhora que en veurem un ús important en aquesta branca. Per a la primera part utilitzarem el llibre de Tao [23] on s'explica l'equivalència de les dues conjectures.

4.1 L'equivalència de conjectures

Repassarem a continuació uns quants conceptes bàsics que intervindran al llarg d'aquesta secció.

Definició 4.1. *Un espai topològic M es dirà* localment euclidià de dimensió n *si per a cada punt $x \in M$ existeix un obert U que el conté un entorn homeomorf a un obert U de $\mathbb{R}^n$. A un parell (U, φ) amb $U \subset M$ un obert connex i φ un homeomorfisme de l'obert a un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ se l'anomena carta. En un M amb aquestes propietats, hi definim una estructura diferenciable $\mathcal{F}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ com un conjunt de cartes $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ complint*

(a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

(b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ *és $\mathcal{C}^\infty$ per tot $\alpha, \beta \in A$.*

(c) *La col·lecció $\mathcal{F}$ és maximal respecte de (b).*

Això permet definir una varietat diferenciable M de dimensió n i classe $\mathcal{C}^\infty$ *com un parell* $(M, \mathcal{F})$*, on* M *és un espai localment euclidià de dimensió* n*, Hausdorff i que compleix el segon axioma de numerabilitat, on* $\mathcal{F}$ *és una estructura diferenciable de* M*.*

Gràcies a això, podem ara veure quina definició farem servir per a grup de Lie real i de dimensió finita. Cal remarcar que farem servir específicament aquesta definició quan parlem de grups de Lie ja que n'existeixen generalitzacions que contradirien les afirmacions que farem.

Definició 4.2. *Direm que* G *és un* grup de Lie *quan és una varietat diferenciable real de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *amb estructura de grup tal que l'aplicació* $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *és de classe* $\mathcal{C}^\infty$*.*

Inicialment, el cinquè problema de Hilbert, que va ser demostrat el 1952 per Gleason i Montgomery-Zippin a [11] i [13] respectivament, era el següent.

Teorema 4.1. *Sigui* G *un grup topològic localment euclidià. Aleshores,* G *és isomorf a un grup de Lie.*

Una demostració d'aquest teorema es pot trobar al mateix llibre [23]. Però existeix una generalització d'aquest teorema que està oberta que s'anomena la *conjectura de Hilbert-Smith*.

Conjectura 4.1. (Hilbert-Smith) *Sigui* G *un grup topològic localment compacte que actua de manera contínua i efectiva en una varietat diferenciable connexa i de dimensió finita. Aleshores* G *és isomorf a un grup de Lie.*

Observem en primer lloc que la conjectura implica el teorema 3.1, ja que podem considerar G°, el component connex que conté l'element neutre (es pot veure que és un subgrup normal i tancat) i considerar l'acció $G^\circ \times G^\circ \to G^\circ$ donada per $(g, h) \mapsto gh$ que clarament és fidel. Si assumim que la conjectura 3.1 és certa, aleshores, adonant-nos del fet que un grup topològic localment euclidià és localment compacte, el seu component connex del neutre, G°, serà una varietat diferenciable connexa, i tenim que G° és isomorf a un grup de Lie. Amb això podem concloure que G és isomorf a un grup de Lie. Aquest fet està explicat a la secció 1.2 de [23] on veiem que ser Lie local implica ser Lie global.

Notem que la hipòtesi que l'acció sigui efectiva, és a dir, que tot element diferent de la identitat actuï de manera no trivial en X, no es pot treure perquè tot grup G actua trivialment sobre qualsevol varietat diferenciable X.

Que G sigui localment compacte també és una hipòtesi necessària, ja que el grup de difeomorfismes sobre la circumferència, $\mathrm{Diff}(S^1)$ actua sobre S^1, però no és localment compacte. En conseqüència, no pot ser un grup de Lie amb la definició donada, ja que si ho fos, seria localment euclidià, cosa que implica compacitat local.

Per tal de veure que no és un grup localment compacte, podem veure que el podem dotar de la topologia provinent de la mètrica del suprem, que estarà ben definida per la compacitat de S^1. Aleshores, en tenim suficient amb veure que una bola centrada a la unitat d'un cert radi tancada no és compacta. Per a fer-ho, podem construir una successió de funcions que no és de Cauchy, la qual cosa prova l'afirmació.

Per últim, que X sigui connex també es important, ja que el tor infinit, $G = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ amb la topologia producte és compacte, i per tant, localment compacte, actua de manera efectiva i contínua sobre la varietat disconnexa $X := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ segons:

$$(g_n)_n(\theta, m) := (\theta + g_m, m).$$

La conjectura en general resta oberta, però hi ha resultats parcials de Montgomery-Zippin [14] que diuen que la conjectura val per a accions transitives; això també està explicat a [23]. Com ja comentarem a la secció següent, el cas $n = 3$ ha estat resolt recentment per Pardon en [17].

A continuació enunciarem el resultat d'equivalència a la conjectura en el cas p-àdic que serà provat en la resta de secció.

Conjectura 4.2. (Conjectura de Hilbert-Smith per a accions p-àdiques contínues) *No hi pot haver una acció efectiva i contínua del grup $\mathbb{Z}_p$ en una varietat connexa i de dimensió finita.*

La reducció al cas p-àdic se seguirà del teorema estructural de Gleason-Yamabe i resultats de Newman que es poden trobar a [15]. Començarem amb l'estudi d'accions periòdiques en una varietat diferenciable X, $T : X \to X$, d'ordre primer p: $T^p = \mathrm{id}$. Veurem en el següent teorema de [15] que tenim rigidesa en el sentit que una acció periòdica no pot estar molt aprop de la identitat sense ser-la.

Teorema 4.2. (Primer teorema de Newman) *Sigui U un subconjunt obert de $\mathbb{R}^n$ que conté la bola unitat tancada B i sigui $T : U \to U$ un homeomorfisme de període primer p. Assumint que per a tot $x \in U$ l'òrbita $\{T^n x : n = 0, \dots, p-1\}$ té diàmetre estrictament menor que* 1, *tenim que* $T(0) = 0$.

En primer lloc, observem que un resultat d'aquest tipus és necessari si esperem establir la conjectura de Hilbert-Smith. Si suposem que poguéssim trobar una transformació T no trivial de període primer p en la bola unitat B que preservés la frontera, aleshores, podríem construir una acció efectiva de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}^n$ de la manera següent: considerem a $\mathbb{R}^n$ una col·lecció infinita de còpies de la bola unitat tancada $(\mathcal{B}_n)_n$ i per la hipòtesi feta, podem considerar l'acció de T o alguna potència de T en cada $\mathcal{B}_n$, i la identitat fora d'aquesta, obtenint així una acció ben definida i efectiva del grup $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}^n$. Clarament, aquest producte infinit no és un grup de Lie en el sentit considerat i contradiria la conjectura.

Per a la prova que donarem i referències quan siguin necessàries, emprarem teoria elemental del grau. Gràcies al *teorema de Sard*, donada una aplicació diferenciable $\Phi : B \to \mathbb{R}^n$, sabem que per a gairebé tot punt $x \in \mathbb{R}^n$, aquest és regular. És a dir, la preimatge $\Phi^{-1}(\{x\})$ és finita i no interseca la frontera ∂B de B i el jacobià és no degenerat a cada x.

Podem definir el *grau* de Φ en el punt regular x com el nombre de preimatges tals que $\Delta\Phi$ preserva l'orientació menys els que la canvien. Es pot veure que el grau s'estén a una funció amb valors enters en cada component connex de $\mathbb{R}^n \setminus \Phi(\partial B)$. A més, es pot definir allà de manera analítica, fent que sigui definible per funcions que siguin només contínues i no contínues diferenciables.

Demostració: Raonem per absurd. Suposem que $T(0) \neq 0$ i farem un argument d'amitjanament. Considerem $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ l'aplicació

$$\Phi(x) := \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1} T^n x.$$

Per la construcció feta, Φ és contínua i T-invariant, és a dir, que $\Phi(x) = \Phi(Tx)$ per a tot $x \in U$. Fent servir la hipòtesi sobre el diàmetre arribem a

$$|\Phi(x) - x| = \left|\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1}(T^n x - x)\right| \leq \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1}|T^n x - x| < 1,$$

per a tot $x \in U$. Notem que en particular, això impica que $0 \notin \Phi(\partial B)$, ja que si no contradiríem l'afirmació prèvia. Notem que tenim la següent homotopia definida a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $F_t(x) := (1-t)\Phi(x) + tx$. Ja sabem que la 0 no és de la imatge de ∂B per Φ, però a més, tenim que $0 \notin F_t(\partial B)$, donat que si $|x| = 1$, per a un t arbitrari tenim

$$(1-t)\Phi(x) + tx = 0 \Rightarrow (1-t)(\Phi(x) - x) = -x \Rightarrow 1 < |1-t|,$$

on $t \in [0, 1]$, de manera que arribem a contradicció, havent fet servir la desigualtat anterior. Estem en condicions d'aplicar el Teorema 1.2.6, p. 27, de [16], que ens permet afirmar que el grau de Φ en B al voltant de l'origen és 1, ja que és el mateix que la identitat en B.

Repetint l'argument que hem fet, però ara per a T enlloc de per a Φ, podem deduir que T té grau 1 en B sobre l'origen ja que estem suposant que $T(0) \neq 0$, i veiem que T, doncs, preserva l'orientació.

D'altra banda, es pot mostrar que el grau de Φ ha de ser múltiple de p, la qual cosa dóna la contradicció desitjada. En cas que Φ sigui contínuament diferenciable, pel teorema de Sard, podem trobar un punt regular x arbitràriament proper a 0 (ja que els no regulars tenen mesura de Lebesgue nul·la). D'altra banda, estem suposant que $T(0) \neq 0$, de manera que x no és un punt fix de T si suposem que x és prou proper a 0. Conseqüentment, com que T té període p, tots els elements de la preimatge $\Phi^{-1}(\{x\})$ tampoc són punts fixos de T, perquè de la definició, observem que si $\Phi(y) = x$, fos tal que $Ty = y$, aleshores tindríem $y = x$ contradient el fet que $Tx \neq x$. Ara, podem considerar les òrbites disjuntes de cardinal p de la preimatge $\Phi^{-1}(x)$, que seran de l'estil $y, \ldots, T^{p-1}y$. Aleshores, cadascuna d'aquestes òrbites contribueix $\pm p$ al grau, de manera que l'afirmació se segueix.

En el cas en què Φ no és contínuament diferenciable és més difícil com és natural, perquè el grau no és tan fàcil de calcular. Una manera de fer-ho és pertorbar T per a ser lineal a trossos al voltant de la preimatge del 0 sense perdre la periodicitat de T per a poder calcular el grau. Aquest argument desenvolupat es pot trobar a [15]. Alternativament, es pot fer usant homologia singular com es pot veure a [22]. □

Es pot observar que l'argument anterior ens ha dit que T ha de fixar un entorn obert de l'origen fent una lleugera translació de B. De fet el resultat és més fort i és el que anomenarem segon teorema de Newman.

Teorema 4.3. (Segon teorema de Newman) *Sigui X una varietat connexa, i sigui $T : X \to X$ un homeomorfisme d'ordre primer p que fixa un obert no buit U. Aleshores T és la identitat.*

Demostració: Tornarem a raonar per reducció a l'absurd, és a dir, que T no fixa tot X. Per continuïtat i aplicant si cal un canvi de variables homeomorf, podem trobar una carta que conté la bola B i T fixa els $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$ amb $x_1 \leq 0$, però que no fixa els $x \in B$ amb $x_1 > 0$. Contraient la bola si és convenient, podem assumir que la seva òrbita es queda dins de la carta i ens ho podem mirar dins de $\mathbb{R}^n$.

Podem, doncs, definir l'aplicació Φ igual que hem fet amb el primer teorema de Newman, de manera que Φ és la identitat a l'hemisferi esquerre, $\{x \in B : x_1 \leq 0\}$. D'altra banda, per a l'hemisferi $x_1 > 0$, es té que per a x suficientment petit, la seva òrbita s'ha de mantenir en l'hemisferi dret, ja que la imatge ha de ser en B i no pot entrar a l'hemisferi esquerre on T és la identitat. D'aquí deduïm, per analogia amb els arguments anteriors, que Φ té grau 1 al voltant del 0 en una bola petita al voltant de l'origen, però igualment, podem veure que el grau de Φ ha de ser múltiple de p, obtenint la contradicció desitjada. Per tant, T és la identitat com volíem veure. □

Estem ja en condicions, de provar que la conjectura per al cas p-àdic (3.2) implica la conjectura de Hilbert-Smith (3.1), permetent-nos, doncs, reduir-nos a aquest cas.

Teorema 4.4. (Reducció al cas p-àdic) *Afirmem que suposant la conjectura 4.2 certa, si G és un grup localment compacte que actua de manera contínua i efectiva sobre una varietat diferenciable i connexa X, aleshores G és un grup de Lie.*

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc, farem reduccions per tal d'abordar-la més fàcilment. Gràcies a un resultat de Gleason [10], sabem que l'extensió d'un grup de Lie a través d'un altre grup de Lie és isomorfa a un grup de Lie.

El teorema 1.1.17 [23], de Gleason-Yamabe, tot grup localment compacte G conté un subgrup obert que és extensió d'un grup de Lie per un subgrup compacte de G. Aleshores, com ja hem comentat abans i també es pot trobar a [23], Lie local implica Lie global, i per tant, G seria de Lie en aquestes condicions. L'afirmació prèvia deguda a Gleason, ens porta a poder suposar que G és compacte sense perdre generalitat. Això implica que les òrbites de G en X són compactes.

Sigui B una bola prou petita en una carta de X centrada en un cert origen x_0. Per ser l'acció contínua, podem trobar un entorn obert U del neutre de G, de manera que $x_0 \in gB$ per a tot $g \in U$. Emprant el teorema de Peter-Weyl [23], existeix un subgrup normal compacte G' de G en U amb G/G' de Lie. Notem que el conjunt $G'B$ és una varietat G'-invariant, precompacta i connexa, ja que per hipòtesi, gB són connexos i comparteixen un punt en comú.

Posem G'' el subgrup de G' que fixa $G'B$. Aleshores, G'' és un subgrup normal i compacte de G' i G'/G'' actua de manera eficient sobre $G'B$. Ara, si U és prou petit, pel primer teorema de Newman, G'/G'' no pot contenir cap element d'ordre primer i en conseqüència, no pot tenir elements periòdics no trivials. Afegint a més, la hipòtesi de la conjectura 3.2, veiem que tampoc pot contenir a través d'un embedding una còpia de $\mathbb{Z}_p$ per a cap p. Afirmem que això força que G'/G'' sigui trivial.

Com que $G'B$ és precompacte, veiem que l'espai de les aplicacions contínues $C(\overline{G'B} \to \overline{G'B})$ amb la topologia usual compleix el primer aixoma de numerabilitat. Això fa que G'/G'' compleixi també l'axioma I de numerabilitat ja que G'/G'' és homeomorf a un subespai de $C(\overline{G'B} \to \overline{G'B})$.

Ara, veient el lema prèviament citat, podrem acabar la prova.

Lema 4.1. *Sigui G un grup compacte que compleix l'axioma I de numerabilitat i tal que no conté elements periòdics no trivials, o una còpia a través d'un embedding continu de $\mathbb{Z}_p$ per a cap p. Aleshores, G és trivial.*

Notem que per a cada $g \in G$, aquest està contingut en un subgrup abelià compacte de G: $\overline{\langle g \rangle}$, de manera que podem assumir sense perdre generalitat que G és abelià.

Un altre resultat de [23], ens permet afirmar que G es pot escriure com el límit invers, $\varprojlim_n G_n$ d'una successió numerable de grups compactes abelians i de Lie G_n, amb homomorfismes continus de transició $\pi_{n+1,n} : G_{n+1} \to G_n$ exhaustius. Aquí, el primer axioma és important, perquè si no l'assumim, topem amb el contraexemple de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{R}}$.

Suposarem per a arribar a contradicció que G_1 és no trivial. Per [1], sabem que tot grup compacte abelià de Lie és isomorf al producte directe d'un tor i un grup finit. En particular, pensant en els punts del tor del tipus $\exp\left(2\pi i\frac{p}{q}\right)$ amb $p, q \in \mathbb{Z}$, notem que els punts periòdics (d'ordre finit) són densos. Conseqüentment, existeix un element $g_1 \in G_1$ d'ordre finit i no trivial. Elevant si convé a una potència adequada, podem assumir que g_1 té ordre primer p per a algun p.

Ara afirmem per inducció que per a tot $n = 1, 2, \ldots$, aquest g_1 pot ser aixecat a un element $g_n \in G_n$ d'ordre p^{k_n}, amb $1 = k_1 \leq k_2 \leq \ldots$ una successió no decreixent d'enters. Efectivament, suposem que per inducció tenim el g_1 aixecat fins a un $g_n \in G_n$ d'ordre p^{k_n}. La preimatge de g_n en G_{n+1} és un subconjunt dens de la preimatge de $\langle g_n \rangle$, que és un grup compacte abelià i de Lie, de manera que com hem raonat abans, conté un element g'_{n+1} d'ordre finit. Com que g_n té ordre p^{k_n}, g'_{n+1} té ordre divisible per p^{k_n}, posem $p^{k_{n+1}}q$, amb $(p, q) = 1$ i $k_{n+1} \geq k_n$. Elevant g'_{n+1} a un múltiple de q que sigui 1 mòdul p^{k_n}, podem eliminar 1 i obtenir la preimatge g_{n+1} que compleix les propietats requerides.

Distingim ara dos casos:

(a) La successió k_n es queda acotada, de manera que convergeix a un límit, posem k. En conseqüència, el límit invers dels g_n és un element $g \in G$ d'ordre finit p^k, la qual cosa és contradictòria.

(b) La successió k_n no està acotada, de manera que G conté una còpia a través d'un embedding continu del límit projectiu $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^{k_n}\mathbb{Z}$ que com hem vist és $\mathbb{Z}_p$, que contradiu la conjectura 3.2.

Hem acabat, doncs, la prova del lema. □

Ara bé, com que G'/G'' i G/G' són grups de Lie, G/G'' és un grup de Lie també. D'aquí treiem que és suficient mostrar que G'' és de Lie, de manera que sense perdre generalitat, podem substituir G per G'' i assumir que B és fix per G.

Fixem Σ la clausura de l'interior dels punts fixos de G. Clarament, Σ és no buit i també tancat. Afirmem que, a més, Σ és obert, de manera que com que X és connex, trobem que $\Sigma = X$, la qual cosa, per ser G un grup que actua de manera eficient, tenim que G és trivial, com volíem.

Comprovem l'afirmació que Σ és un obert: sigui $x \in \Sigma$ i B una bola oberta prou petita que el contingui.

Com hem vist abans, GB és G-invariant, connex i σ-compacte, i si ara tornem a prendre G' el subgrup de G que fixa GB, trobem que G/G' és un grup de Lie compacte que actua eficientment sobre GB i fixant-ne un subconjunt obert no trivial. Pel teorema de Newman i per la conjectura 3.2 combinats amb el lema, deduïm que G/G' és trivial, de manera que G fixa tot B, cosa que ens fa obtenir el fet que Σ és obert.

Havent vist això, el teorema se segueix dels comentaris previs. $\square$

Nota: Sembla ser que per a accions p-àdiques en varietats diferenciables connexes no es pot analitzar suficientment bé amb teoria del grau, i hom ha de recórrer a eines més sofisticades del tipus homològic. Això es deu al problema de les preimatges infinites dels anàlegs de l'aplicació Φ que dificulten la comprensió d'una noció de grau. Malgrat això, imposant més hipòtesis de regularitat, s'han obtingut alguns resultats, per exemple el de [20].

A continuació donem com a lema l'argument que prova que les conjectures són, de fet, equivalents.

Lema 4.2. *La conjectura de Hilbert-Smith implica que no pot existir una acció no efectiva de $\mathbb{Z}_p$ en una varietat diferenciable connexa.*

DEMOSTRACIÓ: Suposant que la conjectura de Hilbert-Smith és certa, el fet que $\mathbb{Z}_p$ és compacte implica que és localment compacte, i si actués de manera efectiva sobre una varietat diferenciable connexa, aleshores tindríem que $\mathbb{Z}_p$ seria un grup de Lie. Però com hem vist al tercer capítol, $\mathbb{Z}_p \cong C$, on C és el conjunt de Cantor, fet que prova que no pot ser un grup de Lie en el sentit especificat. $\square$

4.2 L'estratègia per al cas $n = 3$

En aquesta secció farem un breu esbós de l'estratègia general de la demostració de Pardon a [17] de la conjectura de Hilbert-Smith per al cas $n = 3$: donarem unes idees generals sobre l'estratègia que s'hi empra.

En primer lloc, gràcies al treball de la secció prèvia, l'autor es redueix a provar que no hi ha acció fidel de $\mathbb{Z}_p$ en una varietat diferenciable connexa de dimensió 3 i ho fa per reducció a l'absurd. A continuació fa la següent simplificació: com que $p^k\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$, podem substituir $\mathbb{Z}_p$ per un d'aquests subgrups. Com que per a k prou gran, convergeixen a l'acció trivial en M i prenent una carta adient de M, ens reduïm al cas en què M és un subconjunt obert de $\mathbb{R}^3$ i l'acció de $\mathbb{Z}_p$ és molt propera a la identitat. El motiu per aquest tipus de consideracions és la caracterització de grups de Lie de grups topològics localment compactes que no tenen subgrups 'petits'.

A continuació, es construeix un subconjunt compacte connex, $\mathbb{Z}_p$-invariant, $Z \subseteq M$, tal que

(a) A gran escala, Z és una superfície de gènere 2.

(b) L'acció de $\mathbb{Z}_p$ en $H^1(Z)$ no és trivial.

Es considera aquest conjunt per tal d'intentar fer un argument de reducció de dimensió, ja que si veiem que la frontera ∂Z és una superfície tancada amb acció fidel de $\mathbb{Z}_p$ contradiria el cas conegut $n = 2$ de la conjectura; òbviament s'han de resoldre els problemes tècnics que sorgeixen de fer aquestes consideracions. A partir d'aquesta costrucció, la contradicció vindrà de combinar les dues propietats.

Per tal de construir Z el procediment que se segueix és el següent: es considera l'òrbita de la superfície tancada de gènere 2 i s'hi enganxa un petit llaç que connecti dos punts de la frontera. Aquesta construcció requereix de la comprovació de certes propietats de connexió per a diferents conjunts d'òrbites i l'autor comenta que és la part més obscura de la prova.

Aleshores, es considera un obert U definit aproximadament com $N_\epsilon(Z) \setminus Z$, ja que cal assegurar que sigui $\mathbb{Z}_p$-invariant i $H_2(U) = \mathbb{Z}$. El conjunt de classes d'isotopia de superfícies incompressibles en U que representa un generador de $H_2(U)$ forma un reticle que permet trobar la superfície incompressible F en U que és fixa per isotopia per $\mathbb{Z}_p$. Aquesta serà la frontera aproximada de Z. Es tindrà un homomorfisme natural de $\mathbb{Z}_p \to \mathrm{MCG}(F)$ (MCG representa el grup de classes d'aplicacions) amb imatge finita. Es traslladen les dues propietats de l'acció de $\mathbb{Z}_p$ segons

(a) Existeix un submòdul de $H_1(F)$ fix per $\mathbb{Z}_p$ en què la forma d'intersecció és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) L'acció de $\mathbb{Z}_p$ en $H_1(F)$ no és trivial.

Això implica que es té un grup cíclic dins de $\mathrm{MCG}(F)$ amb $H_1(F)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ tenint submòdul de forma intersecció com s'ha especificat, cosa que contradiu el teorema de classificació de subgrups cíclics del grup de classes d'aplicacions de Nielsen. Aquesta contradicció acaba la demostració.

En la segona secció de l'article s'explica el reticle de superfícies incompressibles i es defineixen els quasicilindres. El resultat principal és el lema 2.19 en què es prova que si M és un quasicilindre dirigit, aleshores el subconjunt ordenat $(\mathcal{S}(M), \leq)$ és un reticle. $\mathcal{S}(M)$ denota el conjunt d'embeddings de superfícies π_1-injectius en M que generen $H_2(M)$ mòdul homotopia.

A la següent part es donen les eines que s'utilitzen en el tractament de subconjunts oberts o tancats de varietats arbitràries. Aquests són: la cohomologia de Čech, la dualitat d'Alexander i una operació que consisteix a trobar la intersecció dels subconjunts oberts que contenen X amb $H_2(U) = 0$.

En la quarta secció es procedeix a la prova del teorema en un conjunt de passos. En primera instància, es fa la reducció a $\mathbb{R}^3$ ja comentada, i de fet, per la condició d'actuació de $\mathbb{Z}_p$ es pot suposar a més, que es té, posant $\eta = 2^{-10}$:

(a) $B(1) \subseteq M \subseteq B(1+\eta)$

(b) $|x - \alpha x| \leq \eta$ per a tot $x \in M$ i $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.

(c) Cap subgrup de la forma $p^k\mathbb{Z}_p$ deixa fix un entorn obert de 0.

Aquesta reducció està justificada per un teorema de Newman. En el següent pas defineix una mètrica $\mathbb{Z}_p$-invariant; així, es demostra que amb l'anterior definició, X^+ és invariant si ho és X.

En el pas 3, es construeix un conjunt compacte $Z \subseteq M$ com s'ha comentat abans. Sigui K l'òrbita sota $\mathbb{Z}_p$ de la superfície de gènere 2 i construïm un conjunt L com l'òrbita sota $\mathbb{Z}_p$ s'un arc petit connectant dos punts de la frontera de K. Es posa $Z = K \cup L$ i aquí és on s'han de fer les comprovacions pertinents, per tal que no hi hagi problemes amb el conjunt K. S'escull un element $x_0 \in B(\eta) \setminus \mathrm{Fix}\, \mathbb{Z}_p$ que podem assegurar que existeix. Aleshores definirem $K := (\mathbb{Z}_p K_0)^+$, on K_0 és contingut a $B(1)$ i una superfície tancada de gènere 2, essent x_0 el seu punt de coordenada z més baixa.

Estudiant la connectivitat a través d'uns quants lemes podem construir $L = (\mathbb{Z}_p L_0)^+$ seguint el lema 4.5. Acte seguit, es calcula la cohomologia de Z fent ús de la successió exacta de Mayer-Vietoris i es fixa $\epsilon \in (0, \eta)$ tal que l'acció de $\mathbb{Z}_p$ en la imatge de l'aplicació $H^1(N_\epsilon^{\mathrm{inv}}) \to \check{\mathrm{H}}^1(Z)$ no és trivial. Definim $(N_\epsilon^{\mathrm{inv}}(Z)^+)_0$ el component connex que conté Z i $U = (N_\epsilon^{\mathrm{inv}}(Z)^+)_0 \setminus Z$, que és $\mathbb{Z}_p$-invariant per un lema anterior.

En l'última secció es veu que existeix un element $\mathcal{F} \in \mathcal{S}(U)$ fix per $\mathbb{Z}_p$, es fixa una superfície $F \subseteq U$ π_1-injectiva i lineal a trossos, tal que $[F] \in \mathcal{S}(U)$ és fix per $\mathbb{Z}_p$. Gràcies a dos lemes anteriors, es pot provar el resultat principal de la secció, que és l'existència d'un submòdul de rang 4 de $H_1(F)^{\mathbb{Z}_p}$ en què la forma intersecció és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalment, com s'ha comentat, això mostra la contradicció desitjada amb el teorema de classificació de Nielsen.

En la secció final es dóna una prova de per quin motiu la forma d'intersecció trobada no pot existir.

Bibliografia

[1] Bröcker, T.; tom Dieck, T.: *Representations of Compact Lie Groups*, GTM Vol. 98, Springer 1985.

[2] Clark, P.L.: *Adeles and ideles,* capítol 6 d'unes notes on-line a http://math.uga.edu/~pete/MATH8410.html.

[3] Conrad, K.: *Some p-adic integrals*, text on-line a http://www.math.uconn.edu/~kconrad/math321/padicintegral.pdf.

[4] Cottrell, W.J.: *p-adic Strings and Tachyon Condensation*, text on-line a http://jfi.uchicago.edu/~tten/teaching/Phys.291/Cottrell_Freund_2002.pdf, 22 April 2002.

[5] Dragovich, B.: Towards effective Lagrangians for adelic strings, arXiv: 0902.0295v1 [hep-th] 2 Feb 2009.

[6] Dragovich, B.; Khrennikov, A.Y.; Jozyrev, S.V.; Volovich, I.V.: On p-adic Mathematical Physics, arXiv: 0904.4205v1 [math-ph] 27 Apr 2009.

[7] Folland, G.B.: *Real Analysis. Modern tecniques and Their Applications.* Second Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1999.

[8] Freund, P.G.O.: p-adic Strings and their Applications, arXiv:hep-th/0510192 v2, 27 Oct 2005.

[9] Freund, P.G.O.; Witten, E.: Adelic string amplitudes, *Phys. Lett. B* **199** (1987), 191-194. MR **89d:81095**.

[10] Gleason, A.M.: The structure of locally compact groups, *Duke Math. J.* **18** (1951), 85-104.

[11] Gleason, A.M.: *Groups without small subgroups*, Ann. of Math. **56** (1952), 193-212.

[12] Gouvêa, F.Q.: *p-adic Numbers. An introduction.* Universitext, Springer.

[13] Montgomery, D.; Zippin, L.: Small subgroups of finite-dimensional groups, *Ann. of Math.* **56** (1952), 213-241.

[14] Montgomery, D.; Zippin, L.: *Topological transformation groups.* Reprint of the 1955 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, NY, 1974. xi+289 pp.

[15] Newman, M.H.A.: A theorem on periodic transformations of spaces, *Quart. J. Math.* **2** (1931), 1-9.

[16] O'Reagan, D.; Je Cho, Y.; Chen, Y.Q.: *Topological Degree Theory and Applications,* Series in Mathematical Analysis and Applications, 2006.

[17] Pardon, J.: The Hilbert-Smith conjecture for three-manifolds, on-line article, 22 January 2013 revision.

[18] Popa, M.: *p-adic integration,* text on-line a http://homepages.math.uic.edu/∼mpopa/571/chapter3.pdf.

[19] Remmert, R.; Kay, L.D. (traductor): *Classical Topics in Complex Function Theory.* Springer, 2006.

[20] Repovš, D.; Šcepin, E.: A proof of the Hilbert-Smith conjecture for actions by Lipschitz maps, *Math. Ann.* **308** (1997), no. 2, 361-364.

[21] Robert, A.M.: *A course in p-adic Analysis*, GTM Springer-Verlag, 2000.

[22] Smith, P.A.: Transformations of finite period. III. Newman's theorem, *Ann. of Math.* **42** (1941), 446-458.

[23] Tao, T.: *Hilbert's fifth problem and related topics*, text on-line a https://terrytao.files.wordpress.com/2012/03/hilbert-book.pdf, 2012.

[24] Tong, D.: *Lectures on String Theory*, text on-line a http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string.html.

[25] Trautwein, S.; Röder, E.; Barozzi, G.: *Topological properties of* $\mathbb{Z}_p$ *and* $\mathbb{Q}_p$ *and Euclidean models.* text on-line a http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/hs2011/p-adic/report5.pdf, 2011.

[26] Travesa, A.: *Teoria de Nombres,* text electrònic 1991-92 a https://atlas.mat.ub.edu/personals/travesa/TN.pdf.

[27] Vladimirov, V.S.: Freund-Witten adelic formulae for Veneziano and Virasoro-Shapiro amplitudes, *Uspekhi Mat. Nauk* **48**:6 (1993), 3-38, *Russian Math. Surveys* **48**:6 (1993), 1-39.