MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I

MATERIAL DIDÁCTICO DE SOPORTE

González-Vila Puchades, Laura
Ortí Celma, Francesc J.
Sáez Madrid, José B.

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial de la Universitat de Barcelona

PRESENTACIÓN

Tras más de veinte años de docencia universitaria en el Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial de la UB, y siendo autores de varios libros de texto en el campo de las Matemáticas Empresariales y Financieras, creemos que ha llegado el momento de enfocar de otra manera el material didáctico utilizado en nuestras clases.

Varias han sido las razones que nos han llevado a preparar este material en formato electrónico:

- La agilidad que supone poder cambiar curso a curso los contenidos, ejemplos y ejercicios, adaptándolos a los nuevos planes docentes.
- Ofrecer un material de consulta al alumno alternativo al clásico libro de texto.
- Ofrecer un material didáctico que pueda fomentar el dinamismo de las clases y la participación de los alumnos en las mismas.
- Facilitar el que los alumnos estén más atentos a las explicaciones del profesorado que a copiar apuntes, promoviendo una atención más activa.
- Teniendo en cuenta la próxima implantación de los nuevos títulos de grado, adaptados al denominado Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), en que se pretende centrar la atención en el proceso de aprendizaje del alumno, más que en las clases magistrales, facilitar y promover el trabajo autónomo en base a un material homogéneo.

Por tanto, no se trata de un libro al uso, que también podría serlo, sino de un resumen-guía de los conceptos más importantes recogidos en el plan docente de la asignatura Matemáticas Empresariales I de la actual Diplomatura en Ciencias Empresariales. Como consecuencia de este planteamiento, el esquema del material pretende que el alumno disponga de una referencia detallada de los contenidos de las sesiones presenciales de la asignatura, que incluya los conceptos teóricos y también algunos ejemplos y ejercicios relacionados con ellos. Estos conceptos se desarrollarán y explicarán con mayor precisión y amplitud en las clases, con ayuda de la pizarra si fuera necesario, y se complementarán con otros ejemplos y ejercicios que ilustren cada uno de los conceptos teóricos previamente explicados.

Como el alumnado podrá comprobar, en el documento se proponen una serie de ejercicios que, sin estar resueltos, disponen del espacio en blanco necesario para su resolución, dando ciertas pautas, guías o pistas para su correcto tratamiento.

Aprovechando que las aulas de la Facultat d'Economia i Empresa de la UB disponen de ordenador y cañón de proyección, nos hemos servido de la herramienta *PowerPoint®*, conocida por la mayoría de universitarios actuales, para ir resolviendo paso a paso cada ejemplo y/o ejercicio durante el transcurso de la clase. De todas formas, antes de resolverlo, consideramos imprescindible dejar al alumno un tiempo prudencial para que pueda pensar y completar el ejercicio propuesto y sea consciente, de esta manera, hasta qué punto ha comprendido los conceptos explicados.

Consideramos que el uso de animaciones, cuando sea posible, puede ayudar bastante a entender conceptos matemáticos que, a veces, vistos de forma estática, son más difíciles de comprender.

Siguiendo la estructura del plan docente, este material se divide en tres temas:

- El primero de ellos estudia las funciones reales de variable real, y en él se explican los conceptos de límite, continuidad, derivabilidad y optimización de funciones con una sola variable, aplicando los mismos al estudio detallado de las funciones y a problemas económicos de minimización de costes o maximización de ingresos o beneficios.
- El segundo tema trata sobre la integral indefinida, definida e impropia, necesarias para el cálculo de áreas planas delimitadas por funciones.
- Por último, el tercer tema trata sobre el espacio vectorial $\Re^n$, los conceptos de base, aplicación lineal y formas cuadráticas, que, entre otros objetivos, resultarán imprescindibles para el alumno en la asignatura de Matemáticas Empresariales II, ya que se usan para detectar los óptimos de funciones de varias variables.

Aunque es nuestra intención ir mejorando y actualizando cada curso académico el presente material, también queremos dejar claro al alumno que, además de asistir a clase y tomar apuntes, consideramos que es bueno y necesario que se complementen los contenidos con libros y otros materiales de consulta, causa por la cual, cuando lo hemos considerado necesario, hemos hecho referencia a la bibliografía que, desde nuestro punto de vista, mejor puede ayudar al alumno a completar su formación.

LOS AUTORES

ÍNDICE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 1. Función real de una variable

1. Definiciones básicas
2. Límite y continuidad de funciones
3. Derivada de funciones
4. Elasticidad de funciones
5. Optimización de funciones
6. Aplicaciones económicas

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 1. Función real de una variable

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Función real de una variable real

Es cualquier aplicación de la forma

$$\begin{array}{lccc} f: & A \subseteq \Re & \longrightarrow & B \subseteq \Re \\ & \forall x \in A & \longrightarrow & f(x) = y \in B \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{lccc} f: & [0,80] \subseteq \Re & \longrightarrow & \Re \\ & \forall x \in [0,80] & \longrightarrow & f(x) = x^2 + 1 \in \Re \\ & x = 7 & \longrightarrow & f(7) = 7^2 + 1 = 50 \in \Re \end{array}$$

Ejercicio: ¿Cuáles de las siguientes funciones son de una variable?

$$a) \quad 4-2x+\frac{2}{3}x^3$$

$$b) \quad 6xy-e^{\left(x^2+y\right)}$$

$$c) \quad 3\cdot\cos(z)+7z^2$$

$$d) \quad 9t+\frac{5}{z}-\ln(x)$$

Ejercicio: Escribir la función que asigna a cada valor real el cociente entre dicho valor y su cuadrado menos uno

o bien

Si quisiéramos expresar funciones en lenguaje habitual podríamos tener muchas confusiones. El lenguaje matemático es mucho más preciso (aunque más difícil de entender)

Ejercicio: De la segunda de las funciones anteriores, obtener la imagen de los valores reales $x = 2$ y $x = -5$

$$\Re \xrightarrow{f} \Re$$

$$\forall x \in \Re \longrightarrow f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \in \Re$$

$$2 \in \Re \longrightarrow$$

$$-5 \in \Re \longrightarrow$$

En este caso, también se diría que la **antiimagen** de $2/3$ es 2 y la antiimagen de $-5/24$ es -5

Podríamos preguntarnos si todos los elementos del conjunto de salida tienen imagen en el conjunto de llegada

1.2 Dominio de una función

Dominio de una función es el conjunto de valores reales que tienen imagen

$$Dom \quad f = \{x \in \Re / \exists f(x)\} = A$$

1) Si $f(x) = \text{Polinomio}(x) = P(x)$

$$Dom \quad f = A = \Re$$

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = 8x^3 - \tfrac{5}{3}x^2 + 10 \qquad\qquad Dom \quad f = A = \Re$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - \frac{x}{5}$$

2) Si $f(x) = \text{Cociente Polinomios} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$$Dom\ \ f = A = \{x \in \Re \,/\, Q(x) \neq 0\}$$

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{8x+5}{x^2-9}$$

$$Dom\ \ f = A = \{x \in \Re \,/\, x \neq \pm 3\} = \Re - \{-3, +3\}$$

1. Definiciones básicas
1.2 Dominio de una función

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

3) Si $f(x) = \sqrt{P(x)}$ o $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, n par

$$Dom \quad f = A = \{x \in \Re \,/\, P(x) \geq 0\}$$

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$Dom \quad f = A = \{x \in \Re \,/\, x \leq -4 \quad \text{y} \quad x \geq 4\} =$$
$$= \left]-\infty, -4\right] \cup \left[+4, +\infty\right[$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 8}$$

4) Si $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$, n impar

$$Dom\ \ f = A = \Re$$

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$$

$$Dom\ \ f = A = \Re$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt[3]{x-7}$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\sqrt[5]{x^6-8x^3+5x-3}$$

5) Si $f(x) = e^{P(x)}$

$$Dom\ \ f = A = \Re$$

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = e^{2x+8}$$

$$Dom\ \ f = A = \Re$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = 4 \cdot e^{2-x}$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = e^{x^3 - 4x + 8}$$

6) Si $f(x)=\ln P(x)$

$$Dom\ \ f = A = \{x \in \Re / P(x) > 0\}$$

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\ln(2x+6)$$

$$Dom\ \ f = A = \{x \in \Re \ / \ x > -3\} =]-3,+\infty[$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x)=\ln\left(x^2-4\right)$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x)=5\cdot\ln\left(x^3+8\right)$$

1.3 Composición de funciones

Dadas

$$f: A \subseteq \Re \to \Re \quad \text{y} \quad g: B \subseteq \Re \to \Re$$

$$\text{con} \quad f(A) \subseteq B$$

se define la **función compuesta** $g \circ f$ como:

$$\begin{array}{ccccc} A \subseteq \Re & \xrightarrow{f} & B \subseteq \Re & \xrightarrow{g} & \Re \\ \forall x \in A & \longrightarrow & f(x) \in B & \longrightarrow & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in \Re \end{array}$$

$$g \circ f$$

Aunque explícitamente no se diga, casi todas las funciones que utilizamos son compuestas. Algunas funciones que NO lo son:

$$f(x) = x \qquad f(x) = \ln x \qquad f(x) = e^x \qquad \text{etc...}$$

Ejemplo: Expresar la función compuesta $h(x) = \sqrt[5]{x^3 - 2}$ en sus funciones simples

$$\begin{array}{ccccc} A \subseteq \Re & \xrightarrow{f} & B \subseteq \Re & \xrightarrow{g} & \Re \\ \forall x \in A & \longrightarrow & f(x) = x^3 - 2 = y \in B & \longrightarrow & g(y) = \sqrt[5]{y} \in \Re \end{array}$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^3 - 2\right) = \sqrt[5]{x^3 - 2}$$

Ejercicio: Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = \cos x \quad y \quad g(x) = x^3$$

Construir las funciones compuestas:

$$(g \circ f)(x) =$$

$$(f \circ g)(x) =$$

Ejercicio: Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{8x+5}{x^2-9} \quad \text{y} \quad g(x) = e^x$$

Construir las funciones compuestas:

$$(g \circ f)(x) =$$

$$(f \circ g)(x) =$$

El dominio de una función compuesta es la intersección de los dominios de las funciones simples que la componen

Ejemplo: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2 - 16}$$

$$Dom\ f = \{x \in \Re / x \neq \pm 4 \text{ y } x \neq 0\} = \Re - \{-4, 0, 4\}$$

Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \ln\left(\frac{6}{x+5}\right)$$

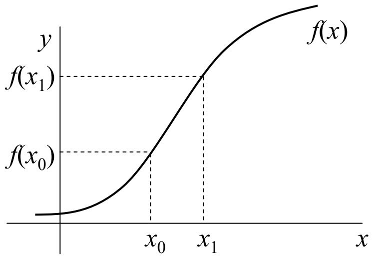
Ejercicio: Obtener el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt[5]{e^{\left(\frac{2}{x-1}\right)}}$$

1.4 Crecimiento y decrecimiento de una función

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$



f es **monótona creciente**

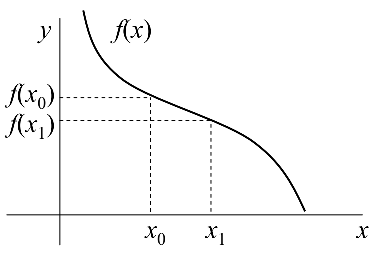
$$\Leftrightarrow \left[\forall x_0, x_1 \in A,\ x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \le f(x_1) \right]$$

f es **estrictamente creciente**

$$\Leftrightarrow \left[\forall x_0, x_1 \in A,\ x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1) \right]$$

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$



f es **monótona decreciente**

$$\Leftrightarrow \left[\forall x_0, x_1 \in A,\ x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) \ge f(x_1) \right]$$

f es **estrictamente decreciente**

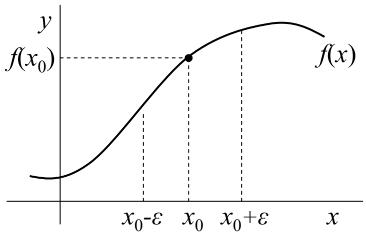
$$\Leftrightarrow \left[\forall x_0, x_1 \in A,\ x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1) \right]$$

1.5 Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$$

$$x_0 \in A$$



f es **creciente** en el punto $x_0 \in A \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\subset A \text{ cumple } \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$$

f es **decreciente** en el punto $x_0 \in A \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\subset A \text{ cumple } \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$$

1.6 Óptimos de una función

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re \qquad x_0 \in A$$

x_0 es un **máximo absoluto** o **global** de f $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A, \ f(x) \leq f(x_0)$$

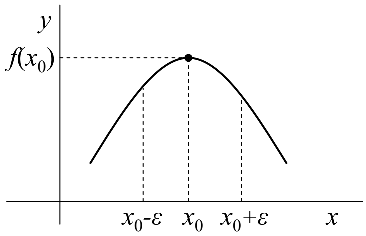
x_0 es un **mínimo absoluto** o **global** de f $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A, \ f(x) \geq f(x_0)$$

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$$

$$x_0 \in A$$



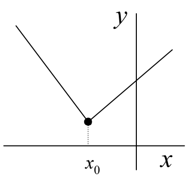
x_0 es un **máximo relativo** o **local** de $\boldsymbol{f}$ $\Leftrightarrow$

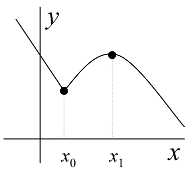
$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\subset A, \ f(x) \leq f(x_0)$$

x_0 es un **mínimo relativo** o **local** de $\boldsymbol{f}$ $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\subset A, \ f(x) \geq f(x_0)$$

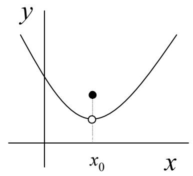
Ejercicios: Indicar en los siguientes puntos de cada función si se trata:
a) De un máximo o mínimo absoluto
b) De un máximo o mínimo relativo
c) Si la función es creciente o decreciente en el punto

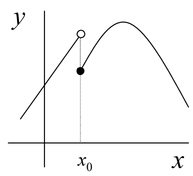




Ejercicios: Indicar en el punto x_0 de cada función si se trata:

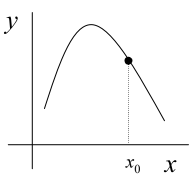
a) De un máximo o mínimo absoluto
b) De un máximo o mínimo relativo
c) Si la función es creciente o decreciente en el punto

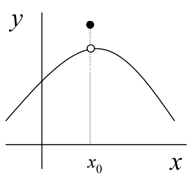




Ejercicios: Indicar en el punto x_0 de cada función si se trata:

a) De un máximo o mínimo absoluto
b) De un máximo o mínimo relativo
c) Si la función es creciente o decreciente en el punto





Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 1. Función real de una variable

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2.1 Definición de límite de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re \qquad x_0 \in \Re \qquad L \in \Re$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \right.$$

$$\left. \forall x \in \left] x_0 - \delta, x_0 + \delta \right[\subset A,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in \left] L - \varepsilon, L + \varepsilon \right[\right)$$

Es el valor al que tiende la función cuando nos aproximamos por la izquierda y la derecha de x_0 con independencia del valor de la función en dicho punto x_0

2.2 Límites laterales de una función en un punto

Dada $f : A \subseteq \Re \to \Re \qquad x_0 \in \Re$

Limite lateral por la izquierda

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$$

Limite lateral por la derecha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$

$$¿L_1 = L_2?$$

SI

$$\textit{Existe } \lim_{x \to x_0} f(x) = L = L_1 = L_2$$

NO

$$\textit{No existe } \lim_{x \to x_0} f(x)$$

TEOREMA:
El límite de una función en un punto, si existe, es ÚNICO

Ejemplo: Dada la siguiente función definida a trozos, calcular el límite de la misma en los puntos $x_0 = -1$ y $x_0 = 5$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < -1 \\ \sqrt{4x+5} & -1 < x \leq 5 \\ E(x) & x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2-2x & & \sqrt{4x+5} & & E(x) \\ \hline x<-1 & x_0=-1 & -1<x\le 5 & x_0=5 & x>5 \end{array}$$

Límite de la función en el punto $x_0 = -1$:

$$L_1 = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(x^2-2x\right) = 3$$

$$L_2 = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{4x+5} = 1$$

Los límites laterales no coinciden y, por tanto, NO EXISTE límite de la función en el punto $x_0 = -1$

$$\begin{array}{ccccc} x^2-2x & & \sqrt{4x+5} & & E(x) \\ \hline x<-1 & x_0=-1 & -1<x\le 5 & x_0=5 & x>5 \end{array}$$

Límite de la función en el punto $x_0 = 5$:

$$L_1 = \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \sqrt{4x+5} = 5$$

$$L_2 = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} E(x) = 5$$

Los límites laterales coinciden y, por tanto, EXISTE límite de la función en el punto $x_0 = 5$ y su valor es $L = 5$

Ejercicio: Dada la siguiente función definida a trozos, calcular el límite de la misma en los puntos $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2\cdot\cos x & x \le 0 \\ 1+e^{x} & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x^3+1} & x > 2 \end{cases}$$

$$2\cdot\cos x \qquad\qquad 1+e^{x} \qquad\qquad \sqrt{x^3+1}$$

$$x \le 0 \quad x_0 = 0 \quad 0 < x < 2 \quad x_0 = 2 \quad x > 2$$

Límite de la función en el punto $x_0 = 0$:

$$L_1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) =$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

Límite de la función en el punto $x_0 = 2$:

$$L_1 = \lim_{x\to 2^-} f(x) =$$

$$L_2 = \lim_{x\to 2^+} f(x) =$$

2.3 Propiedades del límite de una función en un punto

Dadas

$$f : A \subseteq \Re \to \Re \qquad g : B \subseteq \Re \to \Re$$

Si existen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$

a) $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 1} \left[x^4 - \sqrt[3]{x} \right] = \lim_{x \to 1} x^4 - \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x} = 1 - 1 = 0$$

b) $\forall k \in \Re, \ \lim_{x \to x_0} \left[k \cdot f(x) \right] = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} \left[-8 \cdot e^x \right] = (-8) \cdot \lim_{x \to 0} e^x = (-8) \cdot 1 = -8$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

c) $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 4}\left[e^x\cdot\sqrt{x}\right]=\left(\lim_{x\to 4} e^x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 4}\sqrt{x}\right)=e^4\cdot 2$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

d) $\forall x\in A,\quad g(x)\neq 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-9}{(x+3)^2}=\frac{\lim_{x\to -1}(x-9)}{\lim_{x\to -1}(x+3)^2}=\frac{-10}{4}=-2,5$$

e) $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{x^3 - 2} = \left(\lim_{x \to 0} \cos x \right)^{\lim_{x \to 0} \left(x^3 - 2 \right)} = 1^{-2} = 1$$

f) $\lim_{x \to x_0} \log\left[f(x) \right] = \log\left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]$

Ejemplo: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to -3} \ln(2x+7) = \ln\left(\lim_{x \to -3} (2x+7) \right) = \ln 1 = 0$$

Ejercicio: Calcular el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+5x}{\sqrt{x+3}}\cdot \ln(x+1)\right)=$$

Como consecuencia de las operaciones anteriores, pueden aparecer las siguientes expresiones indeterminadas:

$$\infty-\infty$$

$$0\cdot\infty$$

$$\frac{0}{0}\quad,\quad\frac{\infty}{\infty}$$

$$1^{\infty}\quad,\quad 0^{0}\quad,\quad \infty^{0}$$

En estos casos, las indeterminaciones deben resolverse por los métodos conocidos (Pueden consultarse en la Bibliografía de referencia)

Ejemplo: Calcular el límite de las siguientes funciones:

$$\lim_{x\to 1} \frac{0}{x-1} = \lim_{x\to 1} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)}{\lim_{x\to 1}\left(x-1\right)} = \left[\tfrac{0}{0}\right] =$$

Indeterminación

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Ejercicio: Cuáles de los siguientes límites presentan indeterminaciones:

a) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-2}\right)^{x^2}$

b) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}\right)^{x^2}$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

e) $\lim_{x\to+\infty} 1^x$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-3x+1}{2x^3+4x^2}\right)$

h) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}\right)^{x^2-16}$

2.4 Continuidad de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$

$$x_0 \in A$$

$$\boxed{\boldsymbol{f} \textbf{ continua} \text{ en } x_0 \in A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$

$$x_0 \in A$$

$$\boldsymbol{f} \textbf{ continua} \text{ en } x_0 \in A \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \exists f(x_0) \\ 2)\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \\ 3)\ f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$

2.5 Tipos de discontinuidad de una función

Si una función f NO es continua en un punto se dice que es DISCONTINUA

Existen 3 tipos de discontinuidades:

1) Discontinuidad evitable

2) Discontinuidad de primera especie o salto

3) Discontinuidad de segunda especie

¿Existen? $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_2$ — NO → **Discontinuidad de 2ª especie**

SI ↓

¿Son iguales? $¿L_1 = L_2?$ — NO → **Discontinuidad de 1ª especie**

SI ↓

¿Coincide dicho límite con $f(x_0)$? $¿L = f(x_0)?$ — NO → **Discontinuidad evitable**

SI ↓

f **CONTINUA en** x_0

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la siguiente función definida a trozos en el punto $x_0=1$

$$f(x)=\begin{cases} x^3-2 & x\le 1 \\ \sqrt{x+3} & x>1 \end{cases}$$

$$L_1=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^3-2\right)=-1$$

$$L_2=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x+3}=2$$

Los límites laterales NO coinciden y, por tanto, NO EXISTE límite de la función en el punto $x_0=1$

Por tanto, la función NO es CONTINUA en el punto $x_0=1$, existiendo una discontinuidad de PRIMERA ESPECIE, con salto igual a $|L_1-L_2|=|-1-2|=3$

Ejercicio: Estudiar la continuidad de la siguiente función definida a trozos en los puntos $x_0=-4$, $x_0=-1$, $x_0=0$ y $x_0=2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -4 \\ 4-3x & -4<x\le -1 \\ \dfrac{1}{x} & -1<x<0 \\ x+2 & 0\le x<2 \\ E(2x) & x>2 \end{cases}$$

Límite de la función en el punto $x_0 = -4$:

$$L_1 = \lim_{x \to -4^-} f(x) =$$

$$L_2 = \lim_{x \to -4^+} f(x) =$$

2. Límite y continuidad de funciones

2.5 Tipos de discontinuidad de una función

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Límite de la función en el punto $x_0 = -1$:

$$L_1 = \lim_{x \to -1^-} f(x) =$$

$$L_2 = \lim_{x \to -1^+} f(x) =$$

Límite de la función en el punto $x_0 = 0$:

$$L_1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) =$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

Límite de la función en el punto $x_0 = 2$:

$$L_1 = \lim_{x \to 2^-} f(x) =$$

$$L_2 = \lim_{x \to 2^+} f(x) =$$

Ejemplo:

REAL DECRETO LEGISLATIVO 3/2004*, de 5 de marzo, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas. (BOE 10-03-2004)*

Artículo 51. *Reducción por rendimientos del trabajo.*

1. Cuando se obtengan rendimientos netos del trabajo, la base imponible se reducirá en los siguientes importes:

a) Contribuyentes con rendimientos netos del trabajo iguales o inferiores a 8.200 euros: 3.500 euros anuales.

b) Contribuyentes con rendimientos netos del trabajo comprendidos entre 8.200,01 y 13.000 euros: 3.500 euros menos el resultado de multiplicar por 0,2291 la diferencia entre el rendimiento del trabajo y 8.200 euros anuales.

c) Contribuyentes con rendimientos netos del trabajo superiores a 13.000 euros (…): 2.400 euros anuales.

A partir del texto legal anterior, y denominando *x* al importe de los rendimientos netos del trabajo y *D(x)* a la función que obtiene la reducción por rendimientos netos del trabajo, se pide:

a) Construir la función *D(x)*

b) Indicar si posee algún tipo de discontinuidad a lo largo de su dominio.

a) La función $D(x)$ que obtiene la reducción por rendimientos netos del trabajo es:

$$D(x)=\begin{cases} 3.500 & x\le 8.200 \\ 3.500-0,2291\cdot(x-8.200) & 8.200<x\le 13.000 \\ 2.400 & x>13.000 \end{cases}$$

3.500		$3.500-0,2291\cdot(x-8.200)$		2.400
$x\le 8.200$	$x_0=8.200$	$8.200<x\le 13.000$	$x_0=13.000$	$x>13.000$

b) Como la función $D(x)$ es continua en cada trozo, sólo deberemos analizar si tiene algún tipo de discontinuidad en los puntos x_0=8.200 y x_0=13.000

Límite de la función en el punto x_0=8.200:

$$L_1 = \lim_{x \to 8.200^-} D(x) = \lim_{x \to 8.200^-} 3.500 = 3.500$$

$$L_2 = \lim_{x \to 8.200^+} D(x) = \lim_{x \to 8.200^+} \left(3.500 - 0,2291 \cdot (x - 8.200)\right) = 3.500$$

Los límites laterales coinciden y, por tanto, EXISTE límite de la función en el punto x_0=8.200 y su valor es L=3.500

La imagen de la función en el punto x_0=8.200 es:

$$D(8.200) = 3.500$$

Como la imagen de la función en el punto coincide con el límite, diremos que la función es CONTINUA en el punto x_0=8.200

Límite de la función en el punto x_0=13.000:

$$L_1 = \lim_{x \to 13.000^-} D(x) = \lim_{x \to 13.000^-} \left(3.500 - 0,2291 \cdot (x - 8.200)\right) = 2.400,32$$

$$L_2 = \lim_{x \to 13.000^+} D(x) = \lim_{x \to 13.000^+} 2.400 = 2.400$$

Los límites laterales no coinciden y, por tanto, NO EXISTE límite de la función en el punto x_0=13.000.

Por tanto, la función NO es CONTINUA en el punto x_0=13.000, existiendo una discontinuidad de PRIMERA ESPECIE o de salto.

Ejercicio:

LEY 35/2006*, de 28 de noviembre, del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas. (BOE 29-12-2006)*

Artículo 20. *Reducción por obtención de rendimientos del trabajo.*

1. El rendimiento neto del trabajo se minorará en las siguientes cuantías:

a) Contribuyentes con rendimientos netos del trabajo iguales o inferiores a 9.000 euros: 4.000 euros anuales.

b) Contribuyentes con rendimientos netos del trabajo comprendidos entre 9.000,01 y 13.000 euros: 4.000 euros menos el resultado de multiplicar por 0,35 la diferencia entre el rendimiento del trabajo y 9.000 euros anuales.

c) Contribuyentes con rendimientos netos del trabajo superiores a 13.000 euros (…): 2.600 euros anuales.

A partir del texto legal anterior, y denominando *x* al importe de los rendimientos netos del trabajo y *D(x)* a la función que obtiene la reducción por rendimientos netos del trabajo, se pide:

a) Construir la función *D(x)*

b) Indicar si posee algún tipo de discontinuidad a lo largo de su dominio.

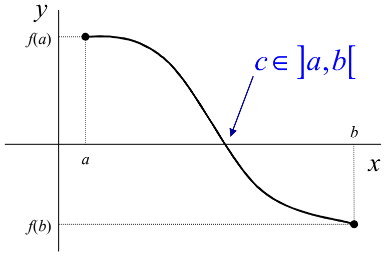
2.6 Teorema de Bolzano

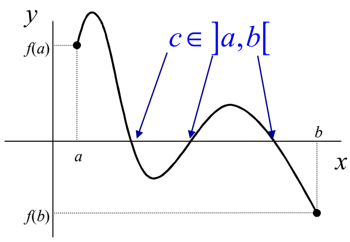
Dada

$$f:[a,b]\subseteq\Re\rightarrow\Re \quad \textbf{CONTINUA}$$

Si $\text{signo}\left[f(a)\right]\neq\text{signo}\left[f(b)\right]$

entonces existe $c\in\left]a,b\right[$ tal que $f(c)=0$





Ejemplo: Comprobar si la función $f(x) = x^2 - 4$ tiene una solución situada entre los valores 0 y 3:

Veamos si se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

1) ¿La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua entre 0 y 3? **SI**

2) ¿El signo de $f(0)$ es diferente del signo de $f(3)$? **SI**

$f(0) = 0^2 - 4 = -4 < 0$ $\qquad$ $f(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$

Por tanto, según el teorema de Bolzano:

$$\exists c \in \left]0,3\right[\quad \text{tal que} \quad f(c) = 0$$

2. Límite y continuidad de funciones
2.6 Teorema de Bolzano

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Si se cumplen las condiciones, el teorema de Bolzano nos indica si la función tiene alguna solución o no en el intervalo solicitado
Otra cosa es encontrarla/s

Ejercicio: Demostrar que la función $f(x) = e^x - \ln(x+10)$ tiene una solución situada entre los valores -2 y 4:

2.6 Teorema de Weierstrass

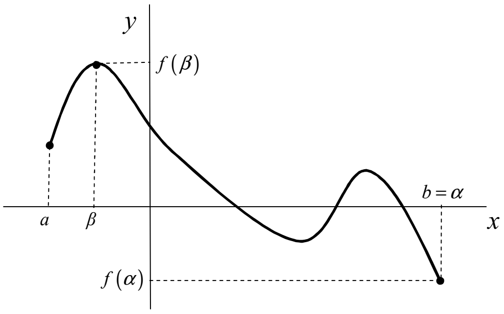
Dada

$$f:[a,b]\subseteq\Re\to\Re \quad \textbf{CONTINUA}$$

existen $\alpha,\beta\in[a,b]$ tales que $\forall x\in[a,b]$

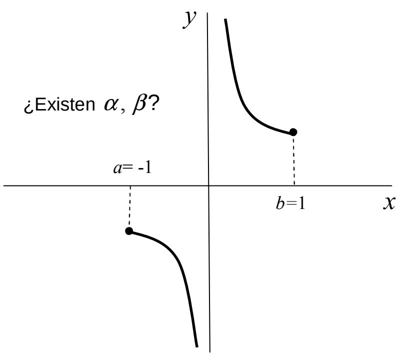
$$f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$$

Toda función CONTINUA definida en un intervalo cerrado y acotado tiene mínimo y máximo absolutos

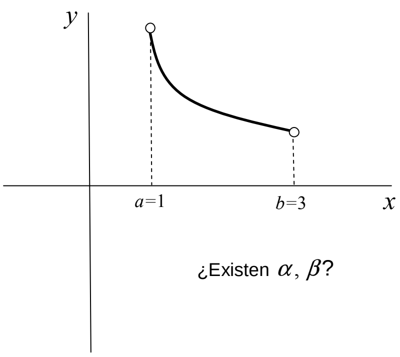


Recordemos que en todo teorema, la conclusión sólo es cierta si se cumplen todas las condiciones

Por ejemplo, si la función NO fuera CONTINUA, no tiene porqué haber máximo y mínimo absolutos



Por ejemplo, si el intervalo NO es CERRADO, no tiene porqué haber máximo y mínimo absolutos



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 1. Función real de una variable

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3.1 Cociente de incrementos

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re \qquad x_0 \in A$$

Denominamos **Incremento de la variable** en x_0

$$\Delta x_0 = x - x_0$$

Denominamos **Incremento de la función** f en x_0

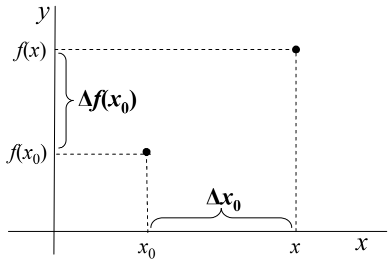
$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

Se denomina **Cociente de incrementos** en x_0

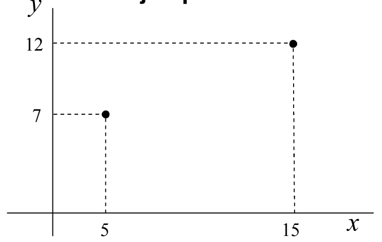
$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

El cociente de incrementos nos permite responder a la pregunta:
¿Cuánto ha variado la función respecto de una variación de la variable?

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Ejemplo:



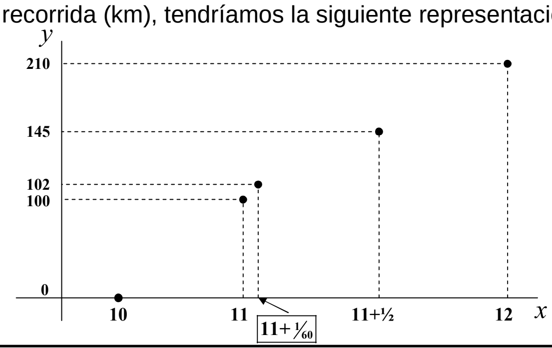
El cociente de incrementos será:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{12-7}{15-5} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Ejercicio: Un coche sale de Barcelona a las 10 h en dirección a Andorra que se encuentra a 210 km y llega a las 12 h. En la siguiente tabla se indica la distancia recorrida hasta cada hora:

Hora	Distancia
10 h	0 km
11 h	100 km
11 h 01'	102 km
11 h 30'	145 km
12 h	210 km

Si representamos en el eje de abcisas (x) la hora y en el eje de ordenadas (y) la distancia recorrida (km), tendríamos la siguiente representación gráfica:



Se pide:

a) Calcule la velocidad media del coche entre las 11 y las 12 h

b) Calcule la velocidad media del coche entre las 11 y las 11 h 30'

c) Calcule la velocidad media del coche entre las 11 y las 11 h 01'

3.2 Definición de derivada de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$

$$x_0 \in A$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Si dicho límite existe se dice que

la función f es derivable en x_0

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: ¿Qué ocurriría en el ejercicio que hemos visto de la velocidad media del coche si tomáramos el límite cuando el incremento de la variable x (hora) tendiera a cero?

Recordando que a las 11h el coche había recorrido 100 km, ¿podríamos saber la velocidad media hasta las 11 horas y 1 segundo si durante ese segundo ha recorrido 20 metros?

$$V_M = \frac{100{,}020-100}{\left(11+\frac{1}{3600}\right)-11} = \frac{0{,}02}{\frac{1}{3600}} = 72 \text{ km/h}$$

¿Y si supiéramos la distancia recorrida en una centésima de segundo?

En definitiva, cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, más que velocidad media podríamos hablar de velocidad instantánea, y ésta, matemáticamente es lo que conocemos como derivada

APLICACIÓN PRÁCTICA: Los radares de la DGT y los velocímetros de los vehículos miden velocidades instantáneas, es decir, derivadas

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Derivada de funciones

3.2 Definición de derivada de una función en un punto

Ejemplo: Aplicando la definición, obtener la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0=4$

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\cdot(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} (x+4) = 8$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la función $f(x) = 5x$ en el punto $x_0=1$

$$f'(1) =$$

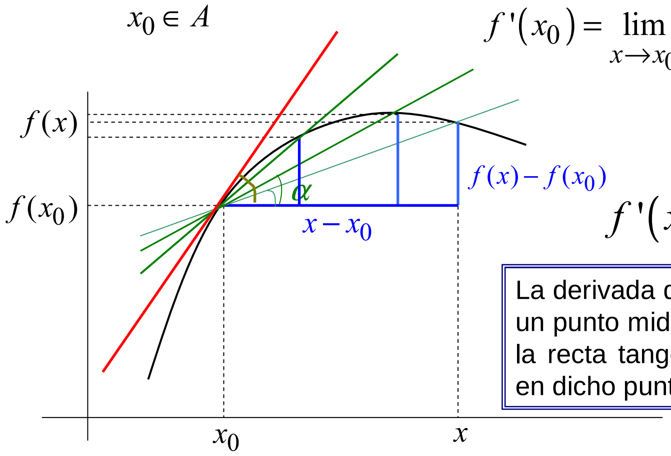
3.3 Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$$

$$x_0 \in A$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

La derivada de una función en un punto mide la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto

3.4 Derivadas laterales de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re \qquad x_0 \in A$$

Derivada lateral por la izquierda

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivada lateral por la derecha

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

¿Existen y $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$?

SI → f es derivable en x_0

NO → f no es derivable en x_0

Ejemplo: Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en el punto x_0=0

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Derivada lateral por la izquierda de la función en el punto x_0=0:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x}=+\infty$$

Derivada lateral por la derecha de la función en el punto x_0=0:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

Como la derivada lateral por la izquierda no existe, la función NO es DERIVABLE en el punto x_0=0

Ejercicio: Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en el punto x_0=1

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & si \quad x<1 \\ x^2-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Derivada lateral por la izquierda de la función en el punto x_0=1:

3.4 Derivadas laterales de una función en un punto

Derivada lateral por la derecha de la función en el punto $x_0=1$:

3.5 Relación entre derivabilidad y continuidad de una función en un punto

TEOREMA:

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$
$$x_0 \in A$$

$$\boxed{f \text{ es derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x_0}$$

Como consecuencia de este teorema, también es cierto que:

$$\boxed{f \text{ NO es continua en } x_0 \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x_0}$$

Demostración del teorema:

f es derivable en $x_0 \in A \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Por otra parte:

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Ejercicio: Estudiar la derivabilidad de la siguiente función definida a trozos en los puntos $x_0 = -4$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le -4 \\ 4 - 3x & -4 < x \le -1 \\ \dfrac{1}{x} & -1 < x < 0 \\ x + 2 & 0 \le x < 2 \\ E(2x) & x > 2 \end{cases}$$

3.5 Relación entre derivabilidad y continuidad de una función en un punto

En los puntos $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$ ya vimos que la función NO es continua. En consecuencia tampoco será derivable

En cambio, en el punto $x_0 = -4$ la función es continua y, por tanto, puede ser derivable. Veamos si lo es calculando las derivadas laterales:

Derivada lateral por la izquierda de la función en el punto $x_0 = -4$:

3.5 Relación entre derivabilidad y continuidad de una función en un punto

Derivada lateral por la derecha de la función en el punto $x_0 = -4$:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

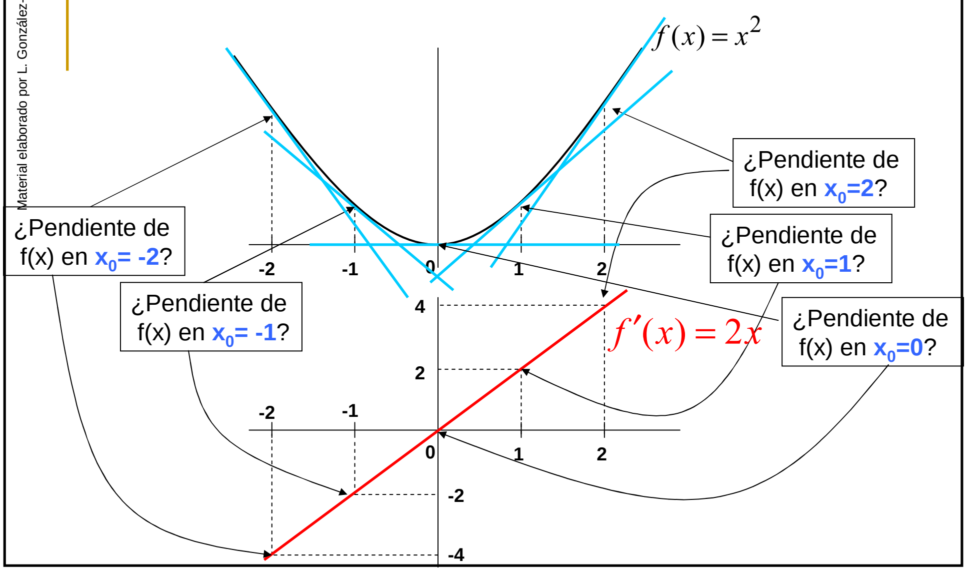
3.6 Función derivada

Dada $f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$ **DERIVABLE** $\forall x \in A$

Se define la **función derivada de *f*** como:

$$\begin{array}{llcl} f\,': & A \subseteq \Re & \longrightarrow & \Re \\ & \forall x \in A & \longrightarrow & f\,'(x) \in \Re \end{array}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez



Ejemplo: Aplicando la definición, obtener la función derivada de la función $\boldsymbol{f(x)=x^2}$ en cualquier punto x_0

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=$$

$$=x_0+x_0=2x_0$$

Aplicando este proceso a cada función obtendremos todas las funciones derivadas que recogemos y resumimos en la siguiente tabla

TABLA DE DERIVADAS

Función	Derivada	Función	Derivada
$y=k\in\Re$	$y'=0$		
$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=[f(x)]^n$	$y'=n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}\cdot f'(x)$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{1}{f(x)}\cdot\log_a e\cdot f'(x)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$y=a^x$; $a>0$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^{f(x)}$; $a>0$	$y'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$

TABLA DE DERIVADAS

Función	Derivada	Función	Derivada
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\sin f(x)$	$y'=\cos[f(x)]\cdot f'(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$y=\cos f(x)$	$y'=-\sin[f(x)]\cdot f'(x)$
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$y=\tan f(x)$	$y'=\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arcsin f(x)$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)$
$y=\arccos x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\arccos f(x)$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$y=\arctan f(x)$	$y'=\frac{1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)$

3.7 Derivación sucesiva

Dada

$f : A \subseteq \Re \to \Re$ **DERIVABLE** $\forall x \in A$

Si la función derivada es, a su vez, derivable en su dominio

se puede definir la **derivada segunda de *f*** como:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

Este proceso puede repetirse sucesivamente

Ejemplo: A partir de la siguiente función, obtener su primera, segunda, tercera y sucesivas derivadas

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$f^{iv}(x) = 24$$
$$f^{v}(x) = 0$$

Ejercicio: A partir de la siguiente función, obtener su primera, segunda, tercera y sucesivas derivadas

$$f(x) = \sin(2x)$$
$$f'(x) =$$
$$f''(x) =$$
$$f'''(x) =$$
$$f^{iv}(x) =$$
$$f^{v}(x) =$$

3.8 Cálculo de derivadas

a) **Derivada de la suma**:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplo: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = x^3 - \cos(x) \qquad h'(x) = 3x^2 + \sin(x)$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \sqrt{x} + \ln(x) \qquad h'(x) =$$

b) **Derivada del producto por constantes**:

$$\forall k \in \Re \qquad (k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

Ejemplo: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \qquad h'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{-2}{3}}$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = 4 \cdot \cos x \qquad h'(x) =$$

c) **Derivada del producto**:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x \qquad h'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}} \cdot \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = e^x \cdot \sin x \qquad h'(x) =$$

d) **Derivada del cociente**: $\forall x \quad g(x) \neq 0 \ y \ g'(x) \neq 0,$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \frac{x^2}{\ln x} \qquad h'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \frac{\ln x}{x^2} \qquad h'(x) =$$

e) **Derivada de la función compuesta** (Regla de la cadena)

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ejemplo: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = (\sin x)^3 \qquad h'(x) = 3 \cdot (\sin x)^2 \cdot \cos x$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \sin\left(x^3\right) \qquad h'(x) =$$

f) **Derivada de funciones exponenciales**:

$$\left[[f(x)]^{g(x)}\right]' = \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right] \cdot [f(x)]^{g(x)}$$

Ejemplo: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = \left(x^3\right)^{\sin x} \qquad \ln h(x) = \ln\left(x^3\right)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln\left(x^3\right)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \cos x \cdot \ln\left(x^3\right) + \sin x \cdot \frac{3x^2}{x^3}$$

$$h'(x) = \left(x^3\right)^{\sin x} \cdot \left[\cos x \cdot \ln\left(x^3\right) + \sin x \cdot \frac{3}{x}\right]$$

Ejercicio: Obtener la derivada de la siguiente función

$$h(x) = (\sin x)^{x^3}$$

3. Derivada de funciones

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3.9 Recta tangente a una función en un punto

Dada

$f : A \subseteq \Re \to \Re$ **DERIVABLE** en $x_0 \in A$

Ecuación de la recta tangente a la función f en el punto x_0

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Ejercicio: Obtener la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 3x^2\text{-}5x$ en el punto $x_0=1$

Ejercicio: Obtener la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2{\cdot}\ln x$ en el punto $x_0=3$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 1. Función real de una variable

1. **Definiciones básicas**
2. **Límite y continuidad de funciones**
3. **Derivada de funciones**
4. **Elasticidad de funciones**
   1. **Cociente de incrementos relativos**
   2. **Definición de elasticidad de una función en un punto**
   3. **Tipos de elasticidad de una función en un punto**
   4. **Función derivada elástica**
5. **Optimización de funciones**
6. **Aplicaciones económicas**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

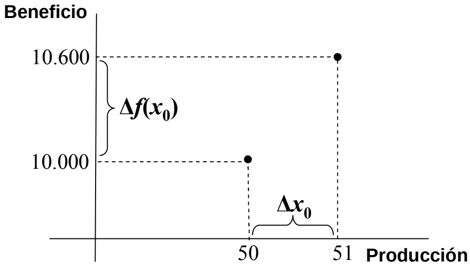
4.1 Cociente de incrementos relativos

Hasta ahora hemos estado trabajando el concepto de **Cociente de incrementos** en el punto x_0

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Con el cociente de incrementos conoceríamos, por ejemplo, cuánto gana de más una empresa por producir una unidad adicional

$$\frac{10.600 - 10.000}{51 - 50} = 600$$

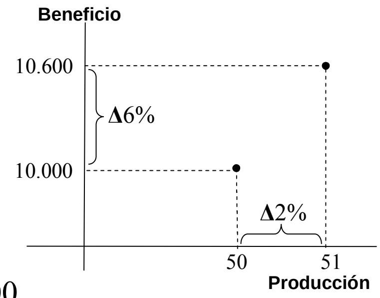


Pero, ¿y si quisiéramos saber en cuánto aumenta el beneficio en términos porcentuales o relativos?

Veámoslo con el ejemplo anterior

1º) Al pasar de una producción de 50 a 51 unidades, ¿en qué porcentaje ha aumentado la producción?

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{51-50}{50} = 0,02 \equiv 2\%$$



2º) Al pasar de un beneficio de 10.000€ a 10.600€, ¿en qué porcentaje ha aumentado el beneficio?

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{10.600 - 10.000}{10.000} = 0,06 \equiv 6\%$$

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re \qquad x_0 \in A$$

Con el concepto de **Cociente de incrementos relativos** en x_0 sabremos en qué porcentaje aumenta el valor de $f(x)$ por cada 1% que aumenta la variable x respecto de x_0

$$\frac{\dfrac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}}{\dfrac{\Delta x_0}{x_0}} = \frac{x_0 \cdot \Delta f(x_0)}{f(x_0) \cdot \Delta x_0}$$

En Economía, una ventaja del cociente de incrementos relativos es que ELIMINA la influencia de las UNIDADES de MEDIDA tanto en la variable como en la función

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Siguiendo con el ejemplo anterior, el cociente de incrementos relativos nos indicará en qué porcentaje habrá aumentado el beneficio por cada 1% que haya aumentado la producción:

Hemos visto que por un 2% de incremento de la producción, el beneficio se incrementaba un 6%. Obsérvese que en este razonamiento, ni hablamos de las unidades de medida de la producción, ni de las unidades de medida del beneficio

Por tanto, por un 1% de incremento de la producción, el beneficio se incrementará un 3%. Este es el valor que nos ofrece el cociente de incrementos relativos. Veámoslo:

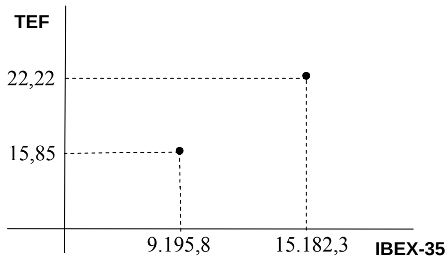
$$\frac{\dfrac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)}}{\dfrac{\Delta x_0}{x_0}} = \frac{\dfrac{600}{10.000}}{\dfrac{1}{50}} = \frac{6\%}{2\%} = 3$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Elasticidad de funciones

4.1 Cociente de incrementos relativos

Ejercicio: Al inicio del año 2008 las acciones de Telefónica (TEF) cotizaban a $22{,}22$€ y acabaron el año en $15{,}85$€. Por su parte, el IBEX-35 empezó el año con un valor de $15.182{,}30$ y acabó en $9.195{,}80$. Averiguar el porcentaje de precio que ha perdido TEF durante el año 2008 por cada punto (1%) que ha perdido el IBEX-35



4.2 Definición de elasticidad de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re \qquad x_0 \in A$$

Se denomina **Elasticidad de una función en un punto (o derivada elástica)**, al límite del cociente de incrementos relativos

$$\boxed{E_x f(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{x_0 \cdot \Delta f(x_0)}{f(x_0) \cdot \Delta x_0} = \frac{x_0}{f(x_0)} \cdot f'(x_0)}$$

El concepto de Elasticidad se utiliza más en Economía que en Matemáticas

Ejemplo: Calcular e interpretar la elasticidad de la siguiente función en el punto $x_0=2$:

$$f(x) = 2x^3 - 5x$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ f(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 = 6 \\ f'(x) = 6x^2 - 5 \\ f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 5 = 19 \end{array}\right\} E_x f(2) = \frac{2}{f(2)} \cdot f'(2) = \frac{2}{6} \cdot 19 = 6{,}33$$

Este valor significa que por cada 1% que aumenta la variable x, en el punto $x_0=2$, la función $f(x)$ aumenta, aproximadamente, un $6{,}33\%$

Ejercicio: Calcular e interpretar la elasticidad de la siguiente función en el punto x_0= -4:

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -4 \\ f(-4) = \\ f'(x) = \\ f'(-4) = \end{array}\right\} E_x f(-4) =$$

4.3 Tipos de elasticidad de una función en un punto

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re \qquad x_0 \in A$$

f tiene **elasticidad unitaria** en $x_0 \Leftrightarrow \left|E_x f(x_0)\right| = 1$

f tiene **elasticidad elástica** en $x_0 \Leftrightarrow \left|E_x f(x_0)\right| > 1$

f tiene **elasticidad rígida o inelástica** en x_0

$$\Updownarrow$$

$$\left|E_x f(x_0)\right| < 1$$

Ejercicio: Calcular y clasificar la elasticidad de la siguiente función en el punto $x_0 = 3$:

$$f(x) = 2 \cdot e^{(x-3)}$$

4.4 Función derivada elástica

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re \quad \textbf{DERIVABLE} \quad \forall x \in A$$

Se define la **función derivada elástica de *f*** como:

$$\begin{aligned} E_x f : \quad A \subseteq \Re & \longrightarrow \quad \Re \\ \forall x \in A & \longrightarrow \quad E_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) \in \Re \end{aligned}$$

Ejemplo: Obtener la función derivada elástica de la función:

$$f(x) = 2x^3 - 5x$$

$$E_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{x}{2x^3 - 5x} \cdot \left(6x^2 - 5\right) = \frac{6x^3 - 5x}{2x^3 - 5x}$$

Ejercicio: Obtener la función derivada elástica de la función:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Tema 1. Función real de una variable

5.1 Polinomio de Taylor

Dada

$$f: A \subseteq \Re \rightarrow \Re \quad \textbf{DERIVABLE} \text{ en } \left]a,b\right[\subseteq A$$

hasta un orden $k > n$ y tomando $x, x_0 \in \left]a,b\right[$

Se denomina **polinomio de Taylor de orden *n*** en el punto x_0

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{n)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Esta expresión permite aproximar la función f en un entorno del punto x_0

$$f(x) \simeq P_n(x)$$

OBJETIVO:

Aproximar el valor de una función en un punto x por el de un polinomio en un entorno del punto x_0

PASOS:

1º) Calcular el valor de f, f', f'', etc. en el punto x_0

2º) Construir el polinomio de Taylor de grado n en x: $P_n(x)$

3º) El valor de $f(x)$ se aproximará por el de $P_n(x)$ si n es elevado

Ejemplo:
Obtener el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \ln x$ en el punto $x_0=1$ y usarlo para aproximar el valor de $\ln 1{,}08$:

1º) Calculamos el valor de f, f', f'', etc. en el punto $x_0=1$

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$f^{iv)}(x) = \frac{-6}{x^4} \qquad f^{iv)}(1) = \frac{-6}{1^4} = -6$$

2º) Construimos el polinomio de Taylor de grado 4 en x: $P_4(x)$

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + f''(1)\cdot\frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1)\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} + f^{iv)}(1)\cdot\frac{(x-1)^4}{4!}$$

$$P_4(x) = 0 + 1\cdot(x-1) - 1\cdot\frac{(x-1)^2}{2!} + 2\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\cdot\frac{(x-1)^4}{4!}$$

$$P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

3º) Calcularemos el valor aproximado de $f(1{,}08)=\ln 1{,}08$ a partir del valor de $P_4(1{,}08)$

$$P_4(1{,}08) = (1{,}08-1) - \frac{(1{,}08-1)^2}{2} + \frac{(1{,}08-1)^3}{3} - \frac{(1{,}08-1)^4}{4}$$

$$P_4(1{,}08) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{0{,}08}_{0{,}08} - \frac{0{,}08^2}{2}}_{0{,}0768} + \frac{0{,}08^3}{3}}_{0{,}07697066} - \frac{0{,}08^4}{4}}_{0{,}076960426}$$

Valor exacto:
ln 1,08=0,076961041

Conforme el orden del polinomio de Taylor fuese mayor, más nos acercaríamos al valor exacto buscado de la función

5.2 Polinomio de Maclaurin

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re \quad \textbf{DERIVABLE en } \left]a,b\right[\subseteq A$$

hasta un orden $k > n$

Se denomina **polinomio de Maclaurin de orden *n*** al polinomio de Taylor cuando $x_0 = 0$

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{n)}(0)\cdot\frac{x^n}{n!}}$$

El valor de f en un entorno del punto x_0=0 será mejor cuantos más términos se tomen en la expresión anterior

Ejercicio:
A partir del polinomio de Maclaurin, calcular el valor de $f(x) = \sin x$ en el punto $x = 0{,}1$

1º) Calculamos el valor de f, f', f'', etc. en el punto x_0=0

$f(x) = \sin x$ $f(0) =$

$f'(x) =$ $f'(0) =$

$f''(x) =$ $f''(0) =$

$f'''(x) =$ $f'''(0) =$

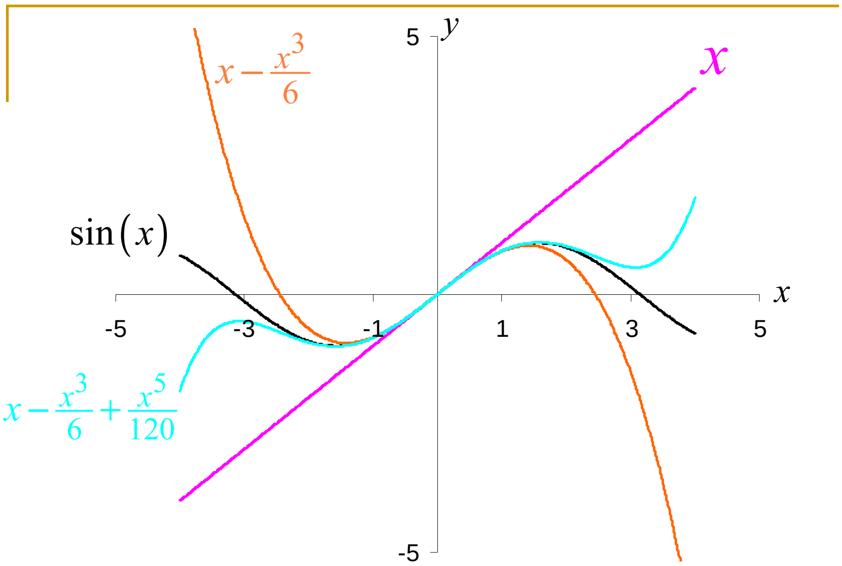
$f^{iv)}(x) =$ $f^{iv)}(0) =$

2º) Construimos el polinomio de Maclaurin de grado 4 en x: $P_4(x)$

Generalizando:

3º) Calcularemos el valor aproximado de $f(0,1)=\sin 0,1$ a partir del valor de $P_7(0,1)$

5.2 Polinomio de Maclaurin



5.3 Crecimiento y decrecimiento de una función

Dada

$f : A \subseteq \Re \to \Re$ **DERIVABLE** en $x_0 \in A$

a) $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en x_0

b) $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en x_0

c) f es creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

d) f es decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Ejemplo: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$$

PRIMER método:

$$f'(x) = 6x - 12$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \quad 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow \quad x > 2 \Rightarrow f$ CRECIENTE

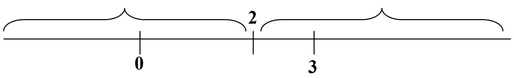
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \quad 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow \quad x < 2 \Rightarrow f$ DECRECIENTE

SEGUNDO método: Se buscan aquellos valores tales que $f'(x)=0$ y aquellos valores que no pertenecen al dominio de la función

$$f'(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \quad x = 2$$

En este caso, todos los valores reales pertenecen al dominio

Por tanto aparecen, en este caso, 2 intervalos:



Seleccionamos un valor de cada intervalo y calculamos su derivada

Del primer intervalo escogemos, por ejemplo, $x=0$:

$f'(0) = 6 \cdot 0 - 12 = -12 < 0 \Rightarrow$ f es DECRECIENTE para $x<2$

Del segundo intervalo escogemos, por ejemplo, $x=3$:

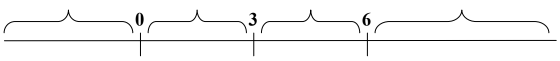
$f'(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ f es CRECIENTE para $x<2$

Ejercicio: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

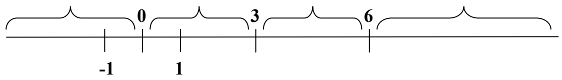
Lo estudiaremos utilizando el SEGUNDO método:

Por tanto aparecen, en este caso, 4 intervalos:



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5.3 Crecimiento y decrecimiento de una función



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5.4 Condición necesaria de óptimo local

Dada

$f : A \subseteq \Re \to \Re$ **DERIVABLE** en $x_0 \in A$

$$x_0 \text{ es óptimo local de } f \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

A los puntos que cumplen esta condición se les denomina puntos **CRITICOS** o puntos **SINGULARES**

No todos los puntos críticos son óptimos de la función

Cuando NO lo son se denominan **PUNTOS DE INFLEXIÓN**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que x_0 es un máximo local de la función (Apdo. 1.6)

x_0 es un máximo relativo o local de f $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[\subset A, \ f(x) \leq f(x_0)$$

Calculamos las derivadas laterales de f en x_0:

$$\left.\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{\leq 0}{>0}\right] \leq 0 \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{\geq 0}{>0}\right] \geq 0 \end{aligned}\right\}$$

Como por hipótesis f es derivable en x_0:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Por tanto: $f'(x_0) = 0$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Buscar los puntos críticos de la función $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ejercicio: Buscar los puntos críticos de la función $g(x) = x^3$

Ejercicio: Buscar los puntos críticos de la función $h(x) = -x^4$

Ejercicio: Buscar los puntos críticos de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

5.5 Condición suficiente de óptimo local

Dada $f : A \subseteq \Re \to \Re$ **DERIVABLE** en $]a,b[\subseteq A$ hasta un orden $k > n$ y $x_0 \in]a,b[$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{n)}(x_0) \neq 0$$

Si ***n*** **par** y $\begin{cases} f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ es un mínimo relativo o local de } f \\ f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ es un máximo relativo o local de } f \end{cases}$

Si ***n*** **impar** y $\begin{cases} f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x_0 \\ f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } x_0 \end{cases}$

Ejemplo: Buscar los óptimos locales de la función $f(x) = x^2$

Punto crítico : $x = 0$

$f''(x) = 2$

$f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow x = 0$ es un **MÍNIMO local**

Ejercicio: Buscar los óptimos locales de la función $g(x) = x^3$

Punto crítico : $x = 0$

$g''(x) =$

$g''(0) =$

Ejercicio: Buscar los óptimos locales de la función $h(x) = -x^4$

Punto crítico : $x = 0$

$h''(x) =$

$h''(0) =$

5. Optimización de funciones

5.5 Condición suficiente de óptimo local

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Buscar los óptimos locales de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

Punto crítico : $x = -2$

$f''(x) =$

Punto crítico : $x = 3$

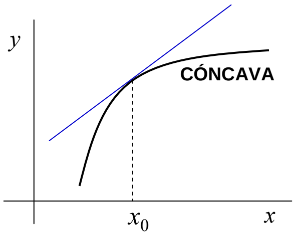
$f''(x) =$

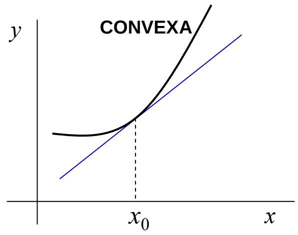
5.6 Curvatura de una función

Dada $f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$ **DERIVABLE** en $x_0 \in A$

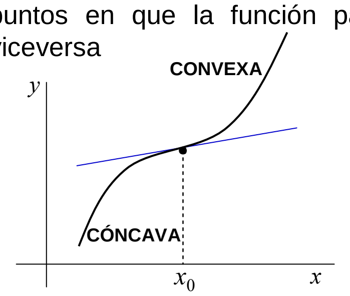
f es **CÓNCAVA** en x_0 $\Leftrightarrow$ En un entorno de x_0 la función toma valores menores que los de la recta tangente a la función en ese punto

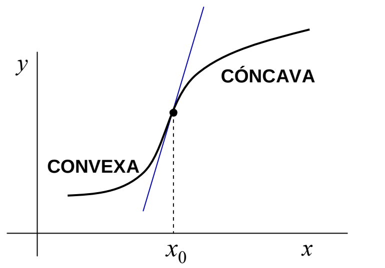
f es **CONVEXA** en x_0 $\Leftrightarrow$ En un entorno de x_0 la función toma valores mayores que los de la recta tangente a la función en ese punto

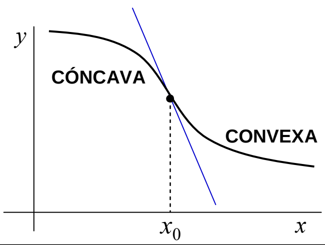


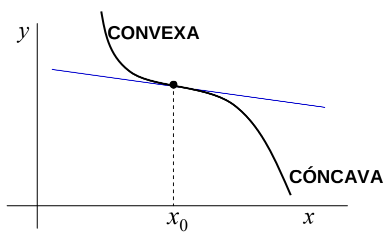


Se denominan **PUNTOS DE INFLEXIÓN** en la curvatura a aquellos puntos en que la función pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa









Dada $f : A \subseteq \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ **DERIVABLE** en $]a,b[\subseteq A$ hasta un orden $k > n$ y $x_0 \in]a,b[$

$$f''(x_0) = \ldots = f^{n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{n)}(x_0) \neq 0$$

Si n **par** y $\begin{cases} f^{n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } x_0 \\ f^{n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } x_0 \end{cases}$

Si n **impar** y $n>1$ $\Rightarrow x_0$ es un punto de inflexión de f

Ejemplo: Estudiar la curvatura de la función $f(x) = x^3 - 4x$ en el punto $x_0 = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$ $\Rightarrow$ En $x_0 = -1$ f es **CÓNCAVA**

Ejercicio: Estudiar la curvatura de la función $f(x) = x^3 - 4x$ en los puntos $x_0=0$ y $x_0=2$

$f''(2) =$

$f''(0) =$

Ejercicio: Estudiar la curvatura de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

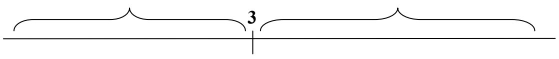
Seguiremos un proceso similar al visto para el crecimiento, pero usando en este caso la segunda derivada:

Valores que no pertenecen al dominio de la función:

Como ya hemos visto que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$

podemos calcular la segunda derivada:

Por tanto aparecen, en este caso, 2 intervalos:



Seleccionamos un valor de cada intervalo y calculamos su derivada segunda:

5.7 Representación gráfica de una función

Dada $f : A \subseteq \Re \rightarrow \Re$

1. Dominio de la función

2. Simetrías:

- Respecto al eje vertical: Cuando $\forall x \in Dom\, f,\ f(-x) = f(x)$
- Respecto al origen: Cuando $\forall x \in Dom\, f,\ f(-x) = -f(x)$

3. Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje horizontal: $x \in Dom\, f \,/\, f(x) = 0$
- Con el eje vertical: Punto $y \in \Re \,/\, y = f(0)$

4. Asíntotas:

- f tiene una asíntota **vertical** en la recta $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- f tiene una asíntota **horizontal** en la recta $y = b$ si:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

- f tiene una asíntota **oblicua** en la recta $y = mx + n$ si:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

5. Crecimiento y decrecimiento
6. Óptimos locales (Máximos y Mínimos)
7. Concavidad y convexidad
8. Puntos de inflexión

Ejercicio: Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$

1. Dominio de la función

2. Simetrías:

- Respecto al eje vertical:
- Respecto al origen:

3. Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje horizontal:

- Con el eje vertical:

4. Asíntotas:

- *A*síntota vertical:

4. Asíntotas:

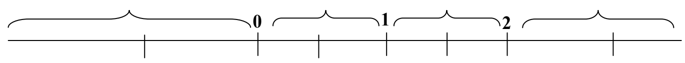
- *A*síntota horizontal:

- *A*síntota oblicua:

5. Crecimiento y decrecimiento

$$f(x)=\frac{2x^2}{x-1} \qquad f'(x)=$$

Si tenemos en cuenta el valor $x=1$ que no pertenece al dominio, dividiremos el eje real en 4 intervalos:



Seleccionamos un valor de cada intervalo y calculamos su derivada

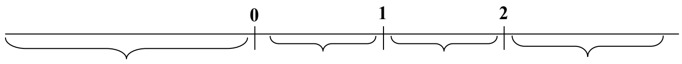
5. Crecimiento y decrecimiento

Del primer intervalo escogemos, por ejemplo, $x= -1$:

Del segundo intervalo escogemos, por ejemplo, $x= 0{,}5$:

Del tercer intervalo escogemos, por ejemplo, $x= 1{,}5$:

Del cuarto intervalo escogemos, por ejemplo, $x= 3$:



6. Óptimos locales

Condición necesaria:

Sabemos que: $f'(x)=\dfrac{2x^2-4x}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Condición suficiente:

$f''(x)=$

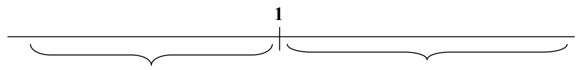
$f''(0)=$

$f''(2)=$

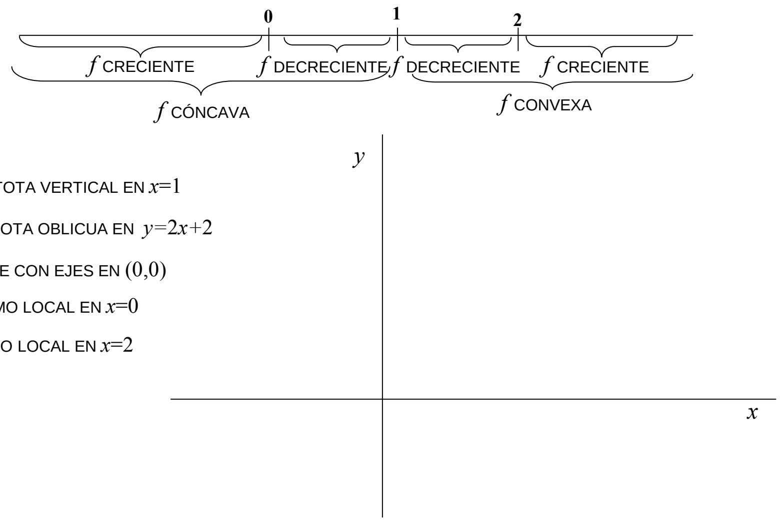
7. Concavidad y convexidad

Sabemos que: $f''(x)=\dfrac{4}{(x-1)^3}$

7. Concavidad y convexidad



8. Puntos de inflexión



ASÍNTOTA VERTICAL EN $x=1$

ASÍNTOTA OBLICUA EN $y=2x+2$

CORTE CON EJES EN $(0,0)$

MÁXIMO LOCAL EN $x=0$

MÍNIMO LOCAL EN $x=2$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 1. Función real de una variable

1. Definiciones básicas
2. Límite y continuidad de funciones
3. Derivada de funciones
4. Elasticidad de funciones
5. Optimización de funciones
6. Aplicaciones económicas
   1. Función de costes
   2. Función de ingresos
   3. Función de beneficios

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

6.1 Función de costes

Generalmente, la función de costes (totales) tiene 2 componentes:

- Función de costes fijos (que no depende del nivel de producción)
- Función de costes variables (que dependen del nivel de producción)

Si se denomina por q al nivel de producción de una empresa, se representa:

Función de costes fijos: $CF(q)$

Función de costes variables: $CV(q)$

Función de costes totales: $CT(q)$

Ejemplo: Mensualmente una empresa tiene unos costes fijos de **8.000€**, y unos costes variables en euros dados por la función $\mathbf{3q^2}$, donde q es el número de unidades producidas. Si actualmente la empresa está produciendo 100 unidades mensuales, se pide:

1) ¿Cuáles son los costes fijos mensuales de esta empresa? $8.000€$

2) ¿Cuáles son los costes variables mensuales de esta empresa?

$$3 \cdot 100^2 = 30.000€$$

3) ¿Cuáles son los costes totales mensuales de esta empresa?

$$8.000 + 30.000 = 38.000€$$

4) ¿Cuál es la función de costes fijos mensuales de esta empresa?

$$CF(q) = 8.000$$

5) ¿Cuál es la función de costes variables mensuales de esta empresa?

$$CV(q) = 3q^2$$

6) ¿Cuál es la función de costes totales mensuales de esta empresa?

$$CT(q) = CF(q) + CV(q) = 8.000 + 3q^2$$

Además de los costes totales de una empresa también nos puede interesar conocer:

- ¿Cuánto nos cuesta **cada** unidad que se produce?
- ¿Cuánto nos costaría producir **una unidad adicional**?

Para responder a la primera pregunta se define la función de **Costes Medios Totales** de la siguiente forma:

$$CMe(q) = \frac{CT(q)}{q}$$

Para responder a la segunda pregunta utilizaríamos el cociente de incrementos, y para incrementos infinitesimales, se define la función de **Costes Marginales** de la siguiente forma:

$$CMa(q) = CT'(q)$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Mensualmente una empresa tiene unos costes fijos de $\mathbf{8.000€}$, y unos costes variables en euros dados por la función $\mathbf{3q^2}$, donde q es el número de unidades producidas. Si actualmente la empresa está produciendo 100 unidades mensuales, se pide:

1) ¿Cuánto nos cuesta actualmente cada unidad producida?

Si en el apartado 3 anterior hemos visto que producir 100 unidades cuesta $38.000€$, significa que cada unidad nos cuesta: $380€$

2) ¿Cuánto nos costaría producir 1 unidad más?

Producir 100 unidades cuesta $38.000€$, y producir 1 unidad más, es decir, 101 unidades tiene un coste total de:

$$CT(101) = 8.000 + 3 \cdot 101^2 = 38.603€$$

Por tanto, producir 1 unidad más cuesta: $\dfrac{38.603 - 38.000}{101 - 100} = 603€$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

6. Aplicaciones económicas

6.1 Función de costes

Ejemplo: Mensualmente una empresa tiene unos costes fijos de $\mathbf{8.000€}$, y unos costes variables en euros dados por la función $\mathbf{3q^2}$, donde q es el número de unidades producidas. Si actualmente la empresa está produciendo 100 unidades mensuales, se pide:

3) ¿Cuál es la función de costes medios de esta empresa?

$$CMe(q) = \frac{CT(q)}{q} = \frac{8.000 + 3q^2}{q} \qquad CMe(100) = 380$$

4) ¿Cuál es la función de costes marginales de esta empresa?

$$CMa(q) = CT'(q) = 6q \qquad CMa(100) = 600$$

El coste de producir 1 unidad adicional es de $603€$ (cociente de incrementos), pero en el límite (en términos infinitesimales) el coste adicional sería de $600€$

6.2 Función de ingresos

Generalmente, la función de ingresos totales depende del número de unidades vendidas y del precio al que se venda cada unidad.

Si como suele ser habitual, suponemos que se venden todas las unidades producidas, utilizaremos también la variable q para representar el número de unidades vendidas.

Respecto del precio de venta p pueden ocurrir 2 casos:

- Que el precio sea **constante** e independiente de las unidades vendidas.
- Que el precio sea **variable** según el número de unidades vendidas. En este caso, a la función $p=f(q)$ se la denomina **función de demanda**.

Por tanto, la función de ingresos totales se define como:

$$IT(q) = p \cdot q$$

Ejemplo: La función de demanda de la empresa del ejemplo anterior es $p = 5.400 - 15q$. Si actualmente la empresa está vendiendo las 100 unidades mensuales que produce, se pide:

1) ¿A qué precio está vendiendo actualmente cada unidad?

$$p = 5.400 - 15 \cdot 100 = 3.900€$$

2) ¿Cuáles son los ingresos totales mensuales de esta empresa?

$$3.900 \cdot 100 = 390.000€$$

3) ¿Cuál es la función de ingresos totales mensuales de esta empresa?

$$IT(q) = p \cdot q = (5.400 - 15q) \cdot q = 5.400q - 15q^2$$

4) ¿Tendría más ingresos esta empresa si vendiese el triple de unidades, es decir, 300?

$$IT(300) = p \cdot q = (5.400 - 15 \cdot 300) \cdot 300 = 900 \cdot 300 = 270.000€$$

Además de los ingresos totales de una empresa también nos puede interesar conocer:

- ¿Cuánto ingresamos por **cada** unidad que se vende?
- ¿Cuánto ingresaríamos por vender **una unidad adicional**?

Para responder a la primera pregunta se define la función de **Ingresos Medios Totales** de la siguiente forma:

$$IMe(q)=\frac{IT(q)}{q}=\frac{p\cdot q}{q}=p$$

Para responder a la segunda pregunta utilizaríamos el cociente de incrementos, y para incrementos infinitesimales, se define la función de **Ingresos Marginales** de la siguiente forma:

$$IMa(q)=IT'(q)$$

Ejemplo: La función de demanda de la empresa del ejemplo anterior es $\boldsymbol{p = 5.400 - 15q}$. Si actualmente la empresa está vendiendo las 100 unidades mensuales que produce, se pide:

1) ¿Cuánto ingresamos actualmente por cada unidad vendida?

Si en el apartado 2 anterior hemos visto que por vender 100 unidades ingresamos 390.000€, significa que por cada unidad ingresamos: 3.900€ (que es el precio unitario de venta)

2) ¿Cuánto ingresaríamos por vender 1 unidad más?

Por vender 100 unidades ingresamos 390.000€, y por vender 1 unidad más, es decir, 101 unidades ingresaríamos:

$$IT(101)=p\cdot q=(5.400-15\cdot 101)\cdot 101=3.885\cdot 101=392.385€$$

Por tanto, vendiendo 1 unidad más ingresaríamos: $\dfrac{392.385-390.000}{101-100}=2.385€$

Ejemplo: La función de demanda de la empresa del ejemplo anterior es $p = 5.400 - 15q$. Si actualmente la empresa está vendiendo las 100 unidades mensuales que produce, se pide:

3) ¿Cuál es la función de ingresos medios totales de esta empresa?

$$IMe(q) = \frac{IT(q)}{q} = \frac{(5.400 - 15q) \cdot q}{q} = 5.400 - 15q \qquad IMe(100) = 3.900$$

4) ¿Cuál es la función de ingresos marginales de esta empresa?

$$IMa(q) = IT'(q) = 5.400 - 30q \qquad IMa(100) = 2.400$$

Por vender 1 unidad adicional ingresamos 2.385€ (cociente de incrementos), pero en el límite (en términos infinitesimales) el ingreso adicional sería de 2.400€

6.3 Función de beneficios

La función de beneficios totales es la diferencia entre las funciones de ingresos y costes totales

Por tanto, la función de beneficios totales se define como:

$$B(q) = IT(q) - CT(q)$$

Se denomina **Umbral de Rentabilidad** a aquel nivel de producción a partir del cual el beneficio es positivo

SI definimos la función **Beneficio Marginal** como la derivada de la función beneficio total, se demuestra que el nivel de producción que maximiza el beneficio total coincide con el nivel de producción que anula la función Beneficio Marginal

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Mensualmente una empresa tiene unos costes fijos de **8.000€**, y unos costes variables en euros dados por la función $\mathbf{3q^2}$, donde q es el número de unidades producidas. La función de demanda de la empresa es $\mathbf{p = 5.400 - 15q}$. Si actualmente la empresa está produciendo y vendiendo 100 unidades mensuales, se pide:

1) ¿Qué beneficio mensual está obteniendo actualmente esta empresa?

$$\left.\begin{array}{l} IT(100) = 390.000€ \\ CT(100) = 38.000€ \end{array}\right\} \quad B(100) = 352.000€$$

2) ¿Cuál es la función de beneficios totales de esta empresa?

$$IT(q) = p \cdot q = (5.400 - 15q) \cdot q = 5.400q - 15q^2$$

$$CT(q) = CF(q) + CV(q) = 8.000 + 3q^2$$

$$B(q) = IT(q) - CT(q) = 5.400q - 15q^2 - \left(8.000 + 3q^2\right)$$

$$B(q) = -18q^2 + 5.400q - 8.000$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Mensualmente una empresa tiene unos costes fijos de **8.000€**, y unos costes variables en euros dados por la función $\mathbf{3q^2}$, donde q es el número de unidades producidas. La función de demanda de la empresa es $\mathbf{p = 5.400 - 15q}$. Si actualmente la empresa está produciendo y vendiendo 100 unidades mensuales, se pide:

3) Determinar el umbral de rentabilidad mensual de esta empresa, es decir, el número mínimo de unidades que deben venderse para obtener beneficio positivo

$$B(q) = -18q^2 + 5.400q - 8.000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1,49} \\ x = 298,51 \end{cases}$$

El beneficio empieza a ser positivo a partir de vender 1,49 unidades, pero tampoco deberían sobrepasarse las 298,51

4) Determinar el nivel de producción que minimiza los Costes totales

$$CT(q) = 8.000 + 3q^2$$

$$CT'(q) = 6q = 0 \Leftrightarrow \boxed{q = 0} \qquad CT''(q) = 6 \text{ y } CT''(0) = 6 > 0$$

Ejemplo: Mensualmente una empresa tiene unos costes fijos de **8.000€**, y unos costes variables en euros dados por la función $3q^2$, donde q es el número de unidades producidas. La función de demanda de la empresa es $p = 5.400 - 15q$. Si actualmente la empresa está produciendo y vendiendo 100 unidades mensuales, se pide:

5) Determinar el nivel de producción que maximiza los Ingresos totales

$$IT(q) = p \cdot q = (5.400 - 15q) \cdot q = 5.400q - 15q^2$$

$$IT'(q) = 5.400 - 30q = 0 \Leftrightarrow \boxed{q = 180}$$

$$IT''(q) = -30 \quad \text{y} \quad IT''(180) = -30 < 0$$

6) Determinar el nivel de producción que maximiza los Beneficios totales

$$B(q) = -18q^2 + 5.400q - 8.000$$

$$B'(q) = -36q + 5.400 = 0 \Leftrightarrow \boxed{q = 150}$$

$$B''(q) = -36 \quad \text{y} \quad B''(150) = -36 < 0$$

Ejercicio: Un fabricante sabe que, cuando vende un cierto producto por p miles de euros, vende $x = 380 - 20p$ unidades. A este nivel de producción, el coste medio unitario es $A(x) = 5 + \frac{x}{50}$
Se pide:
a) Obtener las funciones de ingresos, de coste total y de beneficios, expresadas en función de x.
b) Calcular el precio con el que se obtendría el máximo beneficio. ¿Cuál es el beneficio máximo?

a) Función de ingresos totales (en función de x):

Función de costes totales (en función de x):

Función de beneficios totales (en función de x):

b) Obtención del máximo beneficio:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 2. Integral de una función real

1. Integral indefinida

2. Integral definida

3. Integral impropia

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 2. Integral de una función real

1. Integral indefinida

1. Definición. Función primitiva
2. Propiedades
3. Métodos elementales de integración
   - 3.1 Integrales inmediatas
   - 3.2 Integrales de funciones racionales polinómicas
   - 3.3 Integración por partes
   - 3.4 Integración por cambio de variable

2. Integral definida

3. Integral impropia

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Definición. Función primitiva

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$

Se define **integral indefinida** de dicha función, y se simboliza por

$$\int f(x) \cdot dx$$

como otra función $F(x)$ que verifica:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

La función $F(x)$ se denomina **función primitiva** de $f(x)$

Ejemplo: Obtener la siguiente integral indefinida

$$\int 5 \cdot dx \quad = \begin{cases} 5x \\ 5x+6 \\ 5x-12 \\ \dots \end{cases}$$

Ejercicio: Encontrar la función primitiva de $f(x) = e^x$

$$\int e^x \cdot dx$$

1.2 Propiedades

Dada

$$f : A \subseteq \Re \to \Re$$

1. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también lo son:

$$F(x) + K, \ \forall K \in \Re$$

Por tanto: $\boxed{\int f(x) \cdot dx = F(x) + K}$

2. $\forall c_1, c_2 \in \Re$

$$\int \left[c_1 \cdot f(x) \pm c_2 \cdot g(x) \right] \cdot dx = c_1 \cdot \int f(x) \cdot dx \pm c_2 \cdot \int g(x) \cdot dx$$

Ejemplo: Obtener la siguiente integral indefinida

$$\int\left(3\cdot\cos x-\frac{8}{x}\right)\cdot dx=\int 3\cdot\cos x\cdot dx-\int\frac{8}{x}\cdot dx=$$

$$=3\cdot\int\cos x\cdot dx-8\cdot\int\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=3\cdot\sin x-8\cdot\ln x+K$$

1.3 Métodos elementales de integración

Dada $f: A\subseteq\Re\to\Re$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$\int C\cdot dx=Cx+K$	
$\int x^n\cdot dx=\{si\ n\neq -1\}=\frac{x^{n+1}}{n+1}+K$	$\int\left[f(x)\right]^n\cdot f'(x)\cdot dx=\{\text{si } n\neq -1\}=\frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+K$
$\int\frac{1}{x}\cdot dx=\ln x+K$	$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx=\ln\left[f(x)\right]+K$
$\int e^x\cdot dx=e^x+K$	$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot dx=e^{f(x)}+K$
$\int a^x\cdot dx=\frac{a^x}{\ln a}+K$	$\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+K$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + K$	$\int \sin\left[f(x)\right] \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos\left[f(x)\right] + K$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + K$	$\int \cos\left[f(x)\right] \cdot f'(x) \cdot dx = \sin\left[f(x)\right] + K$
$\int \tan x \cdot dx = -\ln(\cos x) + K$	$\int \tan\left[f(x)\right] \cdot f'(x) \cdot dx = -\ln\left[\cos f(x)\right] + K$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2\left[f(x)\right]} \cdot dx = \tan\left[f(x)\right] + K$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}} \cdot dx = \arcsin\left[f(x)\right] + K$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arccos x + K$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x)\right]^2}} \cdot dx = \arccos\left[f(x)\right] + K$
$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctan x + K$	$\int \frac{f'(x)}{1+\left[f(x)\right]^2} \cdot dx = \arctan\left[f(x)\right] + K$

1. Integral indefinida
1.3 Métodos elementales de integración

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. INTEGRALES INMEDIATAS

Ejemplo: Resolver las siguientes integrales indefinidas inmediatas

$$\int -3 \cdot dx = -3x + K \qquad \int \sin x \cdot dx = -\cos x + K$$

Ejercicio: Resolver las siguientes integrales indefinidas inmediatas

$$\int 2 \cdot e^x \cdot dx \qquad \int 4 \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\int e^{2x} \cdot dx \qquad \int \frac{5}{x} \cdot dx$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int x^2 \cdot dx \qquad \int \sin(6x) \cdot dx$$

$$\int \sqrt{x} \cdot dx \qquad \int 4^x \cdot dx$$

$$\int 20 \cdot e^{5x} \cdot dx \qquad \int \sqrt[3]{x^5} \cdot dx$$

Ejercicio: Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{1+x^2} \right) \cdot dx =$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int \left[f(x) \right]^n \cdot f'(x) \cdot dx = \{ si \quad n \neq -1 \} = \frac{\left[f(x) \right]^{n+1}}{n+1} + K$$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida inmediata

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\sin^3 x}{3} + K$$

Ejercicio: Resolver las siguientes integrales indefinidas inmediatas

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} \cdot dx$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int (x+5)^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{-3}{(x+5)^2} \cdot dx$$

$$\int (3x-1) \cdot \left(3x^2 - 2x\right)^4 \cdot dx$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln f(x) + K}$$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida inmediata

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5} \cdot dx \quad = \ln\left(x^3+5\right) + K$$

Ejercicio: Resolver las siguientes integrales indefinidas inmediatas

$$\int \frac{x^2}{x^3+5} \cdot dx$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$\int \frac{2 \cdot \sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{x-3} \cdot dx$$

$$\int \frac{6}{2x-5} \cdot dx$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\boxed{\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + K}$$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida inmediata

$$\int -5 \cdot e^{-5x} \cdot dx \quad = e^{-5x} + K$$

Ejercicio: Resolver las siguientes integrales indefinidas inmediatas

$$\int 2 \cdot e^{-5 \cdot x} \cdot dx$$

1. INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int -\sin x \cdot e^{\cos x} \cdot dx$$

$$\int \cos x \cdot e^{3 \cdot \sin x} \cdot dx$$

$$\int 5x^4 \cdot e^{x^5} \cdot dx$$

$$\int \left(2x^3 - 5x\right) \cdot e^{x^4 - 5x^2} \cdot dx$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Son del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Para resolver una integral racional polinómica comenzaremos por comparar los grados de los polinomios de numerador y denominador

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx}$$

Si grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$

Se hace la división

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx = \int C(x) \cdot dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} \cdot dx}$$

Integral inmediata

Si grado $P(x) <$ grado $Q(x)$

Se determinan las raíces de $Q(x)$ y se descompone el cociente en sumas de fracciones simples

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida racional polinómica

$$\int \frac{x^4-4}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx$$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, realizaremos la división entre polinomios:

$$\frac{x^4-4}{x^3+4x^2+4x} = x-4+\frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Por tanto la integral inicial se descompone en:

$$\int \frac{x^4-4}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx = \int (x-4) \cdot dx + \int \frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx$$

$$\int (x-4) \cdot dx = \frac{x^2}{2} - 4x$$

$$\int \frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx$$

Esta integral racional polinómica ya tiene el grado del numerador menor que el grado del denominador

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Si grado $P(x) < $ grado $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow$$ **Se calculan las raíces de $Q(x)$**

Por CADA raíz real simple x_0 se asigna una fracción del tipo

$$\frac{A}{x-x_0}$$

A es un número real a determinar

Por CADA raíz real múltiple x_0 de multiplicidad r se asignan r fracciones del tipo

$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-x_0)^r}$$

$A_1, A_2, \ldots A_r$ son números reales a determinar

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Para resolver la siguiente integral hemos de obtener las raíces del denominador

$$\int \frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x}\cdot dx$$

$$x^3+4x^2+4x = x\cdot\left(x^2+4x+4\right) = x\cdot(x+2)^2$$

Este polinomio tiene una raíz real simple en $x = 0$ y una raíz real múltiple en $x = -2$ (con multiplicidad 2)

Por la raíz real simple $x_0=0$ se asigna una fracción del tipo $\longrightarrow$ $$\frac{A}{x-0}=\frac{A}{x}$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Por la raíz real múltiple x_0=-2 de multiplicidad 2 se asignan 2 fracciones del tipo → $\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}$

Por tanto:

$$\frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}$$

A continuación reduciremos a común denominador para obtener los valores de A, A_1 y A_2

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

$$\frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x}=\frac{A\cdot(x+2)^2+A_1\cdot x\cdot(x+2)+A_2\cdot x}{x\cdot(x+2)^2}$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores también deberán serlo para cualquier valor de x. Normalmente tomaremos los más sencillos para obtener los valores de A, A_1 y A_2

Si $x = 0$, entonces: $-4 = A\cdot 4 \Rightarrow A=-1$

Si x = -2, entonces: $48-32-4=-2\cdot A_2 \Rightarrow A_2=-6$

Si $x = 1$, entonces: $12+16-4=9\cdot A+3\cdot A_1+A_2$

$$24=-9+3\cdot A_1-6\Rightarrow A_1=13$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Una vez obtenidos todos los coeficientes reales A_j se calculan las integrales de cada una de las fracciones simples

$$\int \frac{A}{x-x_0}\cdot dx = A\cdot \ln\left(x-x_0\right)$$

$$\int \frac{A_r}{\left(x-x_0\right)^r}\cdot dx = \left\{r\neq 1\right\} = A_r\cdot \frac{\left(x-x_0\right)^{-r+1}}{-r+1}$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Recordemos que:

$$\frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x}+\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{\left(x+2\right)^2}$$

Sustituimos los valores encontrados:

$$\frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{-1}{x}+\frac{13}{x+2}+\frac{-6}{\left(x+2\right)^2}$$

Hemos descompuesto la fracción inicial en 3 fracciones más sencillas para poderse integrar.

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Por tanto:

$$\int \frac{12x^2+16x-4}{x^3+4x^2+4x}\cdot dx = \int \frac{-1}{x}\cdot dx + \int \frac{13}{x+2}\cdot dx + \int \frac{-6}{(x+2)^2}\cdot dx$$

$$\int \frac{-1}{x}\cdot dx = -\ln x$$

$$\int \frac{13}{x+2}\cdot dx = 13\cdot \ln(x+2)$$

$$\int \frac{-6}{(x+2)^2}\cdot dx = \frac{6}{x+2}$$

Finalmente obtendremos como solución a la integral propuesta:

$$\int \frac{x^4-4}{x^3+4x^2+4x}\cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x \; - \ln x \; + 13\cdot \ln(x+2) + \frac{6}{x+2} + K$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Ejercicio: Resolver la siguiente integral indefinida racional polinómica

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2 \cdot (x-3)} \cdot dx$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Por la raíz real múltiple x_0=-1 de multiplicidad 2 se asignan 2 fracciones del tipo →

Por la raíz real simple x_0=3 se asigna una fracción del tipo →

Por tanto:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2 \cdot (x-3)} =$$

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

A continuación reduciremos a común denominador para obtener los valores de *A, B* y *C*

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2\cdot(x-3)}=$$

Igualando los numeradores

2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POLINÓMICAS

Sustituyendo los valores encontrados:

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2\cdot(x-3)}\cdot dx=$$

Finalmente se obtiene:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2\cdot(x-3)}\cdot dx =$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Algunos integrales que se resuelven mediante este método:

a) $\int P_n(x)\cdot \ln x\cdot dx$

$$u = \ln x$$

$$dv = P_n(x)\cdot dx$$

Polinomio de grado n

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \longrightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3 \cdot dx & \longrightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} \cdot dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{4} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{16} \cdot x^4 + K$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejercicio: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int \ln x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \\ dv = \end{array} \right.$$

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

b) $\int P_n(x) \cdot \begin{Bmatrix} e^x \\ a^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \cdot dx$

Polinomio de grado n

$$u = P_n(x)$$

$$dv = \begin{Bmatrix} e^x \\ a^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \cdot dx$$

Este proceso se repite n veces.

1. Integral indefinida
1.3 Métodos elementales de integración

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int 4x \cdot e^x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 4x & \longrightarrow du = 4 \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx & \longrightarrow v = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= 4x \cdot e^x - \int 4 \cdot e^x \cdot dx = 4x \cdot e^x - 4 \cdot e^x + K$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejercicio: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = \begin{cases} u = \\ dv = \end{cases}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. Integral indefinida
1.3 Métodos elementales de integración

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

c) $\int e^x \cdot \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \cdot dx$

Pueden tomarse las partes de cualquier forma

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{lll} u = \sin x & \longrightarrow & du = \cos x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx & \longrightarrow & v = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{lll} u = \cos x & \longrightarrow & du = -\sin x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx & \longrightarrow & v = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cdot \cos x - \int -e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Por tanto:

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx + \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + K$$

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

d) $$\int P_n(x)\cdot\begin{Bmatrix}\arcsin\ x\\ \arccos\ x\\ \arctan\ x\end{Bmatrix}\cdot dx$$

$$u=\begin{Bmatrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ \arctan x\end{Bmatrix}$$

$$dv=P_n(x)\cdot dx$$

Polinomio de grado n

1. Integral indefinida

1.3 Métodos elementales de integración

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int \arctan\ x\cdot dx=\left\{\begin{array}{l} u=\arctan x \longrightarrow du=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot dx\\ dv=\ dx \longrightarrow v=x\end{array}\right\}=$$

$$=x\cdot\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\cdot dx=x\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)+K$$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)\cdot dx \qquad = F\left(g\left(x\right)\right)+K$$

$$g\left(x\right)=t$$

$$x=h\left(t\right)$$

$$dx=h'\left(t\right)\cdot dt$$

Se deshace el cambio

$$t=g\left(x\right)$$

$$\int f\left(t\right)\cdot h'\left(t\right)\cdot dt$$

Se calcula esta integral

$$F\left(t\right)$$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

1º) Se trata de asociar a una función de x la variable t

2º) Se debe calcular el valor del diferencial de x (dx) en función del diferencial de t (dt)

3º) Tras la sustitución de la función de x y del diferencial de x, debe quedar una integral que sólo dependerá de la variable t, y que debe ser más fácil de integrar

4º) Una vez obtenida la integral en función de t se deshará el cambio inicial para obtener la primitiva en función de x

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Algunos de los cambios de variable más usados son:

a) Integrales del tipo $\int F\left(e^{x}\right)\cdot dx$ $\Longrightarrow$ Cambio: $t=e^{x}$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{2\cdot e^{x}}{1+e^{x}}\cdot dx=\left\{\begin{array}{l} t=e^{x} \\ x=\ln t \\ dx=\frac{1}{t}\cdot dt \end{array}\right\}=\int \frac{2t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt=$$

$$=\int \frac{2}{1+t}dt=2\cdot\ln(1+t)+K=2\cdot\ln\left(1+e^{x}\right)+K$$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejercicio: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}\cdot dx=\left\{\begin{array}{l} t=e^{x} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Es decir:

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 3} \cdot dx =$$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

b) Integrales del tipo *(a, $b > 0$):*

Cambio:

$$\int F\left(x, \sqrt{b - ax^2}\right) \cdot dx \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \operatorname{sen} t \quad \text{o} \quad x = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \cos t$$

y se usa la relación: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Ejercicio: Resolver la siguiente integral indefinida

$$\int x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx = \left\{ \begin{array}{c} x = 2 \cdot \sin t \\ dx = 2 \cdot \cos t \cdot dt \end{array} \right\}$$

$$= \int 2 \cdot \sin t \cdot \sqrt{4-(2 \cdot \sin t)^2} \cdot 2 \cdot \cos t \cdot dt =$$

$$= \int 2 \cdot \sin t \cdot \sqrt{4 \cdot \left(1-\sin^2 t\right)} \cdot 2 \cdot \cos t \cdot dt =$$

$$= \int 2 \cdot \sin t \cdot \sqrt{4 \cdot \cos^2 t} \cdot 2 \cdot \cos t \cdot dt =$$

1. Integral indefinida
1.3 Métodos elementales de integración

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

$$= \int 8 \cdot \sin t \cdot \cos^2 t \cdot dt = -8 \cdot \frac{\cos^3 t}{3} + K$$

Deshacemos el cambio:

$$x = 2 \cdot \sin t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}$$

$$\int x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx = \frac{-8}{3} \cdot \cos^3 \left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + K$$

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Esta integral indefinida también puede resolverse de forma inmediata:

$$\int x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot dx = \int x \cdot \left(4-x^2\right)^{1/2} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{-2} \cdot \int -2x \cdot \left(4-x^2\right)^{1/2} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(4-x^2\right)^{3/2}}{3/2} + K =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \left(4-x^2\right)^{3/2} + K$$

¿Cúal de las dos primitivas obtenidas es la correcta?

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez
1. Integral indefinida
1.3 Métodos elementales de integración

3. INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 2. Integral de una función real

1. Integral indefinida

2. Integral definida

1. Definición de integral definida
2. Propiedades de la integral definida
3. Regla de Barrow
4. Cálculo de áreas planas

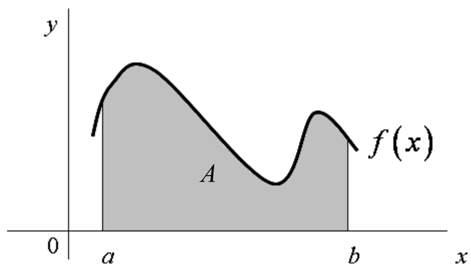
3. Integral impropia

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

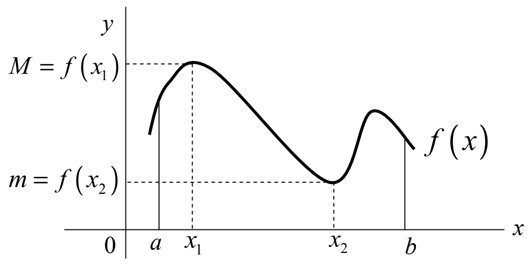
2.1 Definición de integral definida

El concepto de integral definida surge al tratar de calcular el área de cualquier tipo de figura plana. Empezamos por figuras determinadas por funciones reales de variable real y el eje horizontal.

La idea gráfica del problema consiste en determinar el área de una figura del tipo:

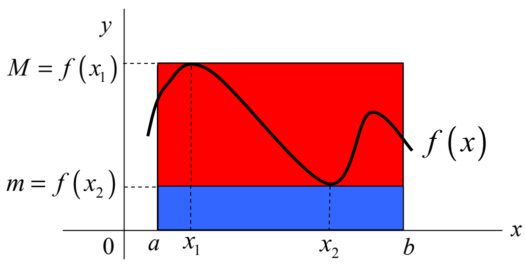


En general, para simplificar, consideramos una función continua que tome valores positivos.
Entonces, por el teorema de Weierstrass, esta función tiene, en el intervalo $[a,b]$, un valor máximo y un valor mínimo que denotamos por M y m, respectivamente. Gráficamente:



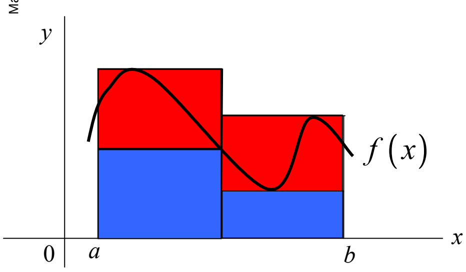
Una primera aproximación, **por exceso**, al cálculo del área buscada sería la obtenida al considerar el rectángulo de base b-a y altura M=$f(x_1)$

Otra aproximación al área buscada sería, **por defecto**, la obtenida al considerar el rectángulo de base b-a y altura m=$f(x_2)$

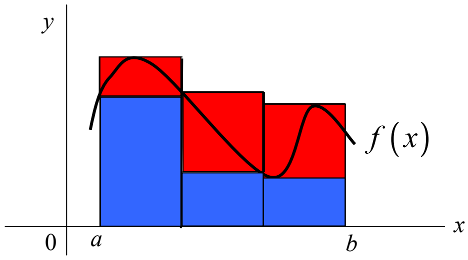


Obviamente: $m\cdot(b-a)\leq A\leq M\cdot(b-a)$

Podemos observar que, si dividimos el intervalo $[a,b]$ en subintervalos, que tendrán una menor amplitud que el intervalo inicial, y tomando el máximo y el mínimo de la función dentro de cada uno de los subintervalos, ganaríamos precisión en el cálculo del área bucada A. En efecto:



Dos subintervalos



Tres subintervalos

2. Integral definida

2.1 Definición de integral definida

Por tanto, se trataría de ir reduciendo sucesivamente la amplitud de los subintervalos de $[a,b]$, para que la aproximación sea lo más exacta posible

Puede demostrarse que, cuando la amplitud de los subintervalos tiende a cero, las áreas por exceso y defecto tienden a coincidir con el área buscada. Este proceso de paso al límite es el que permite definir la denominada integral definida

Es decir:

Dada $f:[a,b]\subset\Re\to\Re^{+}$ continua en $[a,b]$ se define la **integral definida** de la función f en el intervalo $[a,b]$ y se denota por $\int_a^b f(x)\cdot dx$ como:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = A$$

Como más adelante se verá, no es necesario que la función sea positiva para poder calcular su área mediante la integral definida

2.2 Propiedades de la integral definida

1. $\forall c\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$$

2. $\forall c_1,c_2\in\Re$

$$\int_a^b \left[c_1\cdot f(x)\pm c_2\cdot g(x)\right]\cdot dx = c_1\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx \pm c_2\cdot\int_a^b g(x)\cdot dx$$

3. $$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

4. $$Si \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot dx \geq 0$$

$$Si \quad f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot dx \leq 0$$

2.3 Regla de Barrow

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo: Resolver la siguiente integral definida

$$\int_1^4 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 8 - 0{,}5 = 7{,}5$$

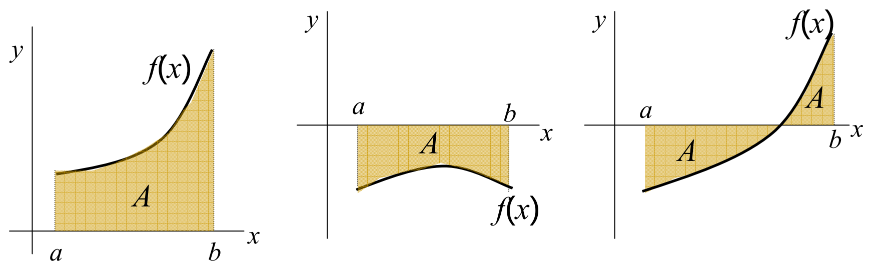
Ejercicio: Resolver las siguientes integrales definidas

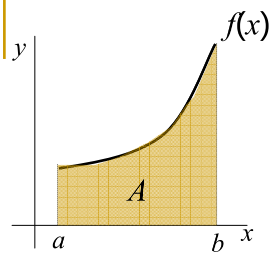
$$\int_0^3 2x^3 \cdot dx =$$

$$\int_{-5}^1 x \cdot dx =$$

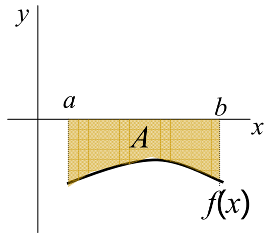
2.4 Cálculo de áreas planas

Para calcular el **área delimitada por una función** $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ y el **eje de abcisas** se utilizarán los conocimientos adquiridos en la integral definida, teniendo en cuenta las propiedades vistas





$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

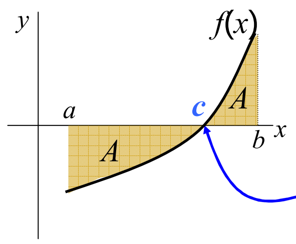


$$A = -\int_a^b f(x) \cdot dx = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|$$

2. Integral definida

2.4 Cálculo de áreas planas

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez



En primer lugar deben encontrarse los puntos de corte de la función con el eje de abcisas; es decir, los valores ***c*** tales que $f(c)=0$

$$A = \left| \int_a^c f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_c^b f(x) \cdot dx \right|$$

En general, para el cálculo de áreas planas podemos utilizar siempre la siguiente metodología:

1º) Buscar, si existen, los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje de abcisas

2º) Descomponer la integral definida teniendo en cuenta esos puntos de corte según la propiedad 1

3º) Calcular el valor absoluto de las integrales anteriores

Ejemplo: Calcular el área comprendida entre la función $f(x)=x^2-9$ y el eje de abcisas en el intervalo $[-1,4]$

1º) Buscar, si existen, los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje de abcisas

$$f(x) = x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

2º) Descomponer la integral definida teniendo en cuenta esos puntos de corte según la propiedad 1

$$\int_{-1}^{4} \left(x^2 - 9\right) \cdot dx = \int_{-1}^{3} \left(x^2 - 9\right) \cdot dx + \int_{3}^{4} \left(x^2 - 9\right) \cdot dx$$

3º) Calcular el valor absoluto de las integrales anteriores

$$Área = \left|\int_{-1}^{3}\left(x^2-9\right)\cdot dx\right| + \left|\int_{3}^{4}\left(x^2-9\right)\cdot dx\right| = 26,\widehat{6}+3,\widehat{3} = 30$$

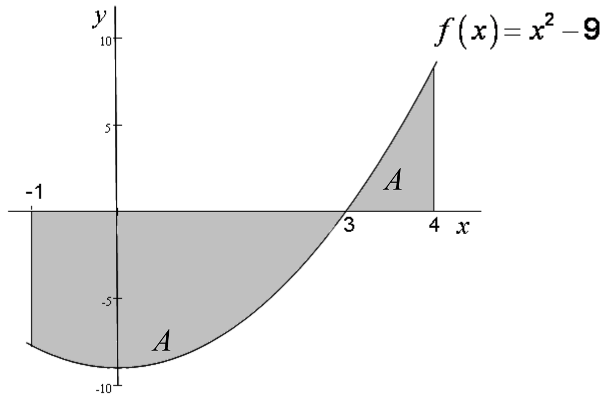
$$\left|\int_{-1}^{3}\left(x^2-9\right)\cdot dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{-1}^{3}\right| = \left|\left(\frac{3^3}{3}-9\cdot 3\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-9\cdot(-1)\right)\right| = \left|-18-\left(\frac{26}{3}\right)\right| = 26,\widehat{6}$$

$$\left|\int_{3}^{4}\left(x^2-9\right)\cdot dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{3}^{4}\right| = \left|\left(\frac{4^3}{3}-9\cdot 4\right)-\left(\frac{3^3}{3}-9\cdot 3\right)\right| = \left|-14,\widehat{6}-(-18)\right| = 3,\widehat{3}$$

2. Integral definida

2.4 Cálculo de áreas planas

Gráficamente el área buscada es:



Obsérvese que:

$$\int_{-1}^{4}\left(x^2-9\right)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{-1}^{4} = \frac{4^3}{3}-9\cdot 4-\left(\frac{(-1)^3}{3}-9\cdot(-1)\right) = -23,\widehat{3}$$

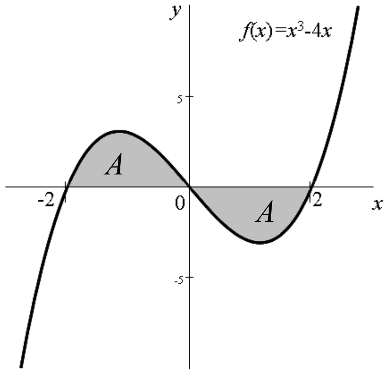
Ejercicio: Calcular el área que delimita la función $f(x)=x^3-4x$ con el eje de abcisas

1º) Buscar, si existen, los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje de abcisas

2º) Descomponer la integral definida teniendo en cuenta esos puntos de corte según la propiedad 1

3º) Calcular el valor absoluto de las integrales anteriores

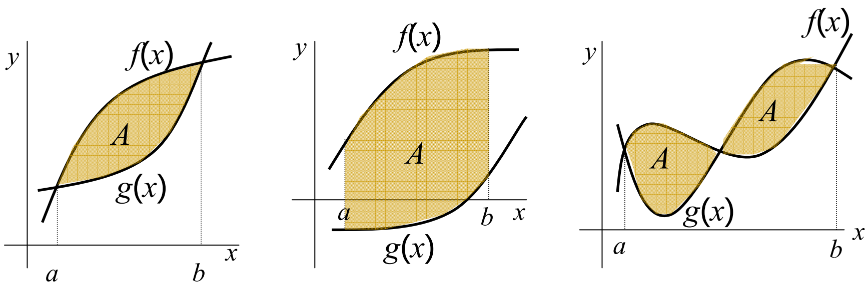
El área obtenida es, gráficamente:



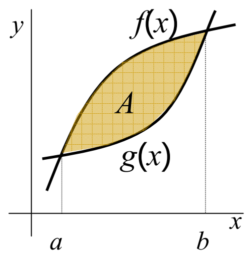
Obsérvese que:

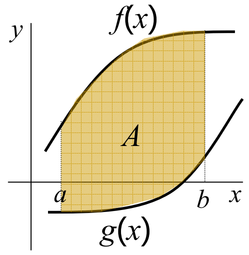
$$\int_{-2}^{2}\left(x^3-4x\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{2}=\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2-\left(\frac{(-2)^4}{4}-2\cdot(-2)^2\right)=0$$

Para calcular el **área delimitada entre dos funciones** ***f*(*x*)** y ***g*(*x*)** utilizando el concepto de integral definida se debe saber el intervalo en que se desea hallar el área y, además, es necesario buscar los posibles puntos de corte entre ellas



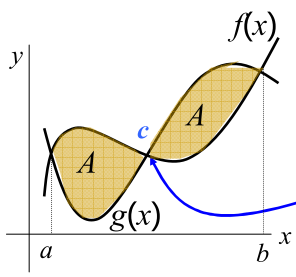
Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez





$$A=\left|\int_a^b \left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\cdot dx\right|$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez



Cuando en el intervalo considerado se cortan las dos funciones, deben encontrarse en primer lugar los puntos de corte entre ambas, es decir, los valores $\boldsymbol{c}$ tales que $f(c)=g(c)$

$$A=\left|\int_a^c \left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\cdot dx\right|+\left|\int_c^b \left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\cdot dx\right|$$

En general, podemos utilizar la siguiente metodología:

1º) Buscar, si existen, los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

2º) Descomponer la integral de la resta de las funciones según los puntos de corte a partir de la propiedad 1

3º) Calcular el valor absoluto de las integrales anteriores

Ejemplo: Calcular el área comprendida entre las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^3$

1º) Buscar, si existen, los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=x^3 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x\cdot\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

2º) Descomponer la integral de la resta de las funciones según los puntos de corte a partir de la propiedad 1

$$\int_{-1}^{1}\left(x-x^3\right)\cdot dx=\int_{-1}^{0}\left(x-x^3\right)\cdot dx+\int_{0}^{1}\left(x-x^3\right)\cdot dx$$

3º) Calcular el valor absoluto de las integrales anteriores

$$\acute{A}rea=\left|\int_{-1}^{0}\left(x-x^3\right)\cdot dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x-x^3\right)\cdot dx\right|$$

$$\left|\int_{-1}^{0}\left(x-x^3\right)\cdot dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}\right| = \left|0-\left(\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^4}{4}\right)\right| = \left|0-\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

$$\left|\int_{0}^{1}\left(x-x^3\right)\cdot dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}\right| = \left|\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{4}\right)-0\right| = \left|\left(\frac{1}{4}\right)-0\right| = \frac{1}{4}$$

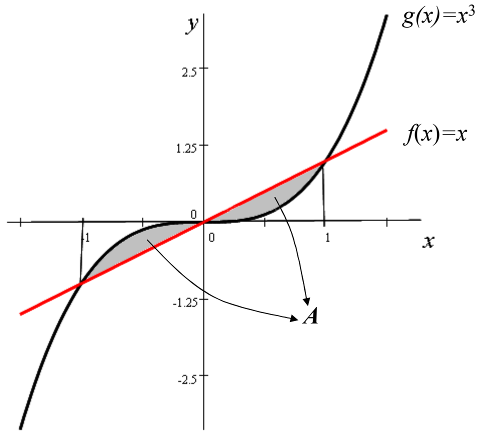
$$\acute{A}rea = \left|\int_{-1}^{0}\left(x-x^3\right)\cdot dx\right| + \left|\int_{0}^{1}\left(x-x^3\right)\cdot dx\right| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Integral definida

2.4 Cálculo de áreas planas

Gráficamente el área buscada es:



Ejercicio: Calcular el área comprendida entre la curva $f(x)=3x^2 -3x$ y la recta $g(x)=-2x+2$ en el intervalo $[0,2]$

1º) Buscar, si existen, los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

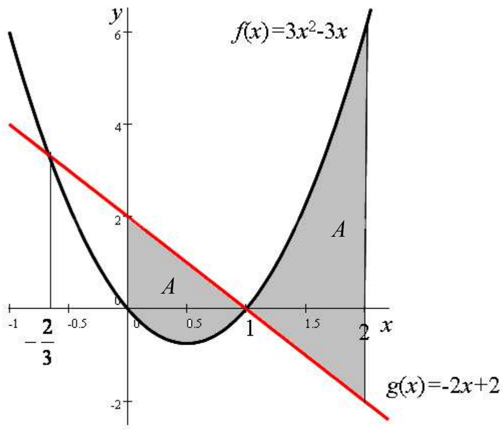
2º) Descomponer la integral de la resta de las funciones según los puntos de corte a partir de la propiedad 1

3º) Calcular el valor absoluto de las integrales anteriores

$$Área =$$

$$Área =$$

Gráficamente el área buscada es:



Tema 2. Integral de una función real

3.1 Definición de integral impropia

Existen dos tipos de integrales impropias:

- De primera especie
- De segunda especie

En este curso SÓLO veremos las integrales impropias de primera especie

Una integral es **impropia de primera especie** cuando el intervalo de integración no está acotado

3.2 Formas del intervalo de integración

Las distintas posibilidades que pueden aparecer son:

a) El intervalo de integración es de la forma $[a,+\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx$$

b) El intervalo de integración es de la forma $]-\infty,b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\cdot dx$$

c) El intervalo de integración es de la forma $]-\infty,+\infty[$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx$$

3.3 Convergencia de la integral

a) El intervalo de integración es de la forma $[a,+\infty[$

La integral $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx$ es **convergente** si existe el límite:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^{k} f(x)\cdot dx$$

En este caso,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^{k} f(x)\cdot dx}$$

Ejemplo: Calcular la siguiente integral impropia

$$\int_{0}^{+\infty} 4\cdot e^{-x}\cdot dx \;= 4$$

$$\int_{0}^{+\infty} 4\cdot e^{-x}\cdot dx \;=\; \lim_{k\to+\infty}\int_{0}^{k} 4\cdot e^{-x}\cdot dx$$

$$\int_{0}^{k} 4\cdot e^{-x}\cdot dx = \left[-4\cdot e^{-x}\right]_{0}^{k} = -4\cdot e^{-k} + 4\cdot e^{0} = -4\cdot e^{-k} + 4$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{0}^{k} 4\cdot e^{-x}\cdot dx = \lim_{k\to+\infty}\left(-4\cdot e^{-k} + 4\right) = 0 + 4 = 4$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Integral impropia

3.3 Convergencia de la integral

Ejercicio: Calcular la siguiente integral impropia

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^{2}}\cdot dx$$

b) El intervalo de integración es de la forma $]-\infty, b]$

La integral $\int_{-\infty}^{b} f(x) \cdot dx$ es **convergente** si existe el límite:

$$\lim_{k \to -\infty} \int_{k}^{b} f(x) \cdot dx$$

En este caso,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x) \cdot dx = \lim_{k \to -\infty} \int_{k}^{b} f(x) \cdot dx}$$

Ejemplo: Calcular la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot dx \quad = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot dx \quad = \lim_{k \to -\infty} \int_{k}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

$$\int_{k}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_k^{-1} = \left[\frac{-1}{x} \right]_k^{-1} = \frac{-1}{-1} - \frac{-1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k \to -\infty} \int_{k}^{-1} \frac{1}{x^2} \cdot dx = \lim_{k \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = 1 + 0 = 1$$

Ejercicio: Calcular la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{2} x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

c) El intervalo de integración es de la forma $]-\infty,+\infty[$

La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx$ es **convergente** si existe el límite:

$$\lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{a} f(x) \cdot dx + \lim_{m\to+\infty} \int_{a}^{m} f(x) \cdot dx$$

siendo $f(x)$ continua en $a \in \Re$

En este caso,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{a} f(x) \cdot dx + \lim_{m\to+\infty} \int_{a}^{m} f(x) \cdot dx}$$

Ejemplo: Calcular la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \lim_{k \to -\infty} \int_k^0 x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx + \lim_{m \to +\infty} \int_0^m x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx$$

$$\int_k^0 x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \left[\frac{1}{3} \cdot e^{x^3}\right]_k^0 = \frac{1}{3} \cdot e^{0^3} - \frac{1}{3} \cdot e^{k^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{k^3}$$

$$\lim_{k \to -\infty} \int_k^0 x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \lim_{k \to -\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{k^3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^m x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \left[\frac{1}{3} \cdot e^{x^3}\right]_0^m = \frac{1}{3} \cdot e^{m^3} - \frac{1}{3} \cdot e^{0^3} = \frac{1}{3} \cdot e^{m^3} - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^m x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot e^{m^3} - \frac{1}{3}\right) = \infty - \frac{1}{3} = \infty$$

Finalmente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \frac{1}{3} + \infty = \infty$$

Ejercicio: Calcular la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

Finalmente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

1. Vectores y operaciones en $\Re^n$
2. Base y dimensión de $\Re^n$
3. Aplicaciones lineales
4. Valores y vectores propios
5. Formas cuadráticas
6. Espacio euclídeo $\Re^n$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Definición de $\Re^n$

Consideremos el conjunto:

$$\Re^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,/\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Re\}$$

Los elementos del conjunto $\Re^n$ se denominan **VECTORES**

Ejemplos:

$$8{,}51 \in \Re \qquad \left(\frac{5}{3}, \pi, -6\right) \in \Re^3$$

$$(4, -2) \in \Re^2 \qquad \left(4, \sqrt{7}, 0, \frac{-1}{5}\right) \in \Re^4$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.2 Operación interna o suma en $\Re^n$

Definimos:

$$\begin{array}{ccc} \Re^n \times \Re^n & \overset{+}{\longrightarrow} & \Re^n \\ (\vec{u},\vec{v}) & \longrightarrow & \vec{u}+\vec{v} \in \Re^n \end{array}$$

que se calcula:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Re^n$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \Re^n$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n) \in \Re^n$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Sumar los siguientes vectores

$$\vec{u} = (3,0,-2) \in \Re^3 \qquad \vec{v} = (8,-5,10) \in \Re^3$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (3+8, 0+(-5), -2+10) = (11,-5,8) \in \Re^3$$

Ejercicio: Sumar los siguientes vectores

$$\vec{u} = (-1,2) \in \Re^2 \qquad \vec{v} = (6,-5) \in \Re^2$$

$$\vec{u}+\vec{v} =$$

1.3 Operación externa o producto por escalares

Definimos:

$$\begin{array}{ccc} \Re \times \Re^n & \xrightarrow{\bullet} & \Re^n \\ (\lambda, \vec{u}) & \rightarrow & \lambda \cdot \vec{u} \in \Re^n \end{array}$$

que se calcula:

$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Re^n$ ⟹ Se denominan **VECTORES**

$\lambda \in \Re$ ⟹ Se denominan **ESCALARES**

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \ldots, \lambda \cdot u_n) \in \Re^n$$

Ejemplo: Multiplicar el siguiente vector por el escalar $\lambda = -2$

$$\vec{u} = (4, -6, 0, -2) \in \Re^4$$

$$\lambda \cdot \vec{u} = -2 \cdot (4, -6, 0, -2) = (-8, 12, 0, 4) \in \Re^4$$

Ejercicio: Multiplicar el siguiente vector por el escalar $\lambda = 5$

$$\vec{u} = (2, 0, -3) \in \Re^3$$

$$\lambda \cdot \vec{u} =$$

1.4 Propiedades del espacio $\Re^n$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Re^n, \quad \forall \lambda, \mu \in \Re$$

1. Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

2. Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

3. Existencia de elemento neutro:

$\exists \vec{0} \in \Re^n$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Re^n, \quad \forall \lambda, \mu \in \Re$$

4. Existencia de elemento simétrico:

$\exists (-\vec{u}) \in \Re^n$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

5. Existencia de elemento unidad:

$\exists 1 \in \Re$ tal que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot 1 = \vec{u}$

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Re^n, \quad \forall \lambda, \mu \in \Re$$

6. "Asociatividad":

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$$

7. "Distributividad":

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

1. Vectores y operaciones en $\Re^n$
2. Base y dimensión de $\Re^n$
   1. Combinación lineal de vectores
   2. Dependencia e independencia lineal de vectores
   3. Sistema de generadores de $\Re^n$
   4. Base de $\Re^n$
   5. Dimensión de $\Re^n$
   6. Propiedades de las bases de $\Re^n$
3. Aplicaciones lineales
4. Valores y vectores propios
5. Formas cuadráticas
6. Espacio euclídeo $\Re^n$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2.1 Combinación lineal de vectores

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \Re^n$

Diremos que $\vec{v} \in \Re^n$ es **COMBINACIÓN LINEAL** de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$

$\Updownarrow$

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Re$ tales que $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{u}_m$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u}_1 = (3,5) \in \Re^2$

$\vec{u}_2 = (0,-1) \in \Re^2$

Averiguar si el vector $\vec{v} = (-3,2) \in \Re^2$ se puede poner como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

Veamos si existen 2 escalares λ_1, λ_2 tales que:

$$(-3,2) = \lambda_1 \cdot (3,5) + \lambda_2 \cdot (0,-1)$$

$$(-3,2) = \lambda_1 \cdot (3,5) + \lambda_2 \cdot (0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} -3 = 3\lambda_1 \\ 2 = 5\lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1}$$

$$2 = 5 \cdot (-1) - \lambda_2 \rightarrow \boxed{\lambda_2 = -7}$$

Conclusión: Puesto que hemos encontrado los escalares λ_1, λ_2 podemos afirmar que el vector (-3,2) lo podemos poner como combinación lineal de los vectores (3,5) y (0,-1)

Ejercicio: Dados los vectores $\vec{u}_1 = (1,1) \in \Re^2$

$\vec{u}_2 = (-2,-2) \in \Re^2$

Averiguar si el vector $\vec{v} = (-3,2) \in \Re^2$ se puede poner como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

Veamos si existen 2 escalares λ_1, λ_2 tales que:

2. Base y dimensión de $\Re^n$
2.1 Combinación lineal de vectores

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

$$(-3,2) = \lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (-2,-2)$$

Conclusión:

Ejercicio: Dados los vectores $\vec{u}_1 = (1,-1,4) \in \Re^3$
$\vec{u}_2 = (1,0,-5) \in \Re^3$
$\vec{u}_3 = (0,0,7) \in \Re^3$

Averiguar si el vector $\vec{v} = (5,-2,6) \in \Re^3$ se puede poner como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

$$(5,-2,6) = \lambda_1 \cdot (1,-1,4) + \lambda_2 \cdot (1,0,-5) + \lambda_3 \cdot (0,0,7)$$

Conclusión:

Ejercicio: Dado el vector $\vec{u}_1 = (3, -1, 2) \in \Re^3$

Averiguar si el vector $\vec{v} = (6, -3, 2) \in \Re^3$ se puede poner como combinación lineal del vector $\vec{u}_1$

Conclusión:

Ejercicio: Dado el vector $\vec{u}_1 = (3, -1, 2) \in \Re^3$

Determinar los valores de ***a*** y ***b*** para que el vector $\vec{v} = (6, a, b) \in \Re^3$ sea combinación lineal del vector $\vec{u}_1$

Conclusión:

2.2 Dependencia e independencia lineal de vectores

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \Re^n$

Son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES** **o** Son **LINEALMENTE DEPENDIENTES**

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \Re^n$

son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES (L.I.)**

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{u}_m = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

Es decir, si al poner el vector **NULO** como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ la **ÚNICA** posibilidad es que **TODOS** los escalares sean 0

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \Re^n$

son **LINEALMENTE DEPENDIENTES (L.D.)**

$\Updownarrow$

$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{u}_m = \vec{0} \Rightarrow$ algún $\lambda_j \neq 0$

Es decir, si al poner el vector **NULO** como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ **ALGÚN** escalar puede ser diferente de 0

Ejemplo: Averiguar si los siguientes vectores son linealmente independientes

$$\vec{u}_1 = (0,-1,6) \in \Re^3$$
$$\vec{u}_2 = (4,0,0) \in \Re^3$$
$$\vec{u}_3 = (3,-8,0) \in \Re^3$$

Se debe comprobar si la solución del sistema de ecuaciones

$$(0,0,0) = \lambda_1 \cdot (0,-1,6) + \lambda_2 \cdot (4,0,0) + \lambda_3 \cdot (3,-8,0)$$

es únicamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$(0,0,0)=\lambda_1\cdot(0,-1,6)+\lambda_2\cdot(4,0,0)+\lambda_3\cdot(3,-8,0)$$

$$\left.\begin{aligned}0&=4\lambda_2+3\lambda_3\\0&=-\lambda_1-8\lambda_3\\0&=6\lambda_1\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\lambda_1=0}$$

$$0=-8\lambda_3$$

$$\boxed{\lambda_3=0}$$

$$0=4\lambda_2$$

$$\boxed{\lambda_2=0}$$

Conclusión: Por tanto, los vectores son **linealmente independientes**

Ejercicio: Averiguar si los siguientes vectores son linealmente independientes

$$\vec{u}_1=(4,0)\in\Re^2$$

$$\vec{u}_2=(1,-1)\in\Re^2$$

$$\vec{u}_3=(2,6)\in\Re^2$$

$$\left(0,0\right)=\lambda_1\cdot\left(4,0\right)+\lambda_2\cdot\left(1,-1\right)+\lambda_3\cdot\left(2,6\right)$$

Conclusión:

Propiedad 1:

Los vectores $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m\in\Re^n$

son **LINEALMENTE DEPENDIENTES**

$\Updownarrow$

ALGUNO de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes

Ejercicio: Como hemos visto que los vectores siguientes son linealmente dependientes

$$\vec{u}_1 = (4,0) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (1,-1) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_3 = (2,6) \in \Re^2$$

comprobar que alguno de ellos es combinación lineal de los restantes

$$(4,0) = \lambda_1 \cdot (1,-1) + \lambda_2 \cdot (2,6)$$

Conclusión:

Ejercicio: Dados los vectores

$$\vec{u}_1 = (4,2) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (2,1) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_3 = (3,5) \in \Re^2$$

a) Comprobar si son linealmente dependientes o independientes

b) ¿Es posible escribir cualquiera de ellos como combinación lineal de los restantes?

a)

b) En cambio, comprobemos si

$$(3,5) = \lambda_1 \cdot (4,2) + \lambda_2 \cdot (2,1)$$

Conclusión:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Propiedad 2:

El vector nulo de $\Re^n$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores, pues siempre:

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 \ldots + 0 \cdot \vec{u}_m$$

Por tanto, y como consecuencia de la propiedad 1, **cualquier conjunto de vectores que incluya el vector nulo es linealmente dependiente**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2.3 Sistema de generadores de $\Re^n$

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \Re^n$

son **UN SISTEMA GENERADOR** de $\Re^n$

$\Updownarrow$

$$\forall \vec{v} \in \Re^n \quad \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_m \cdot \vec{u}_m$$

Es decir, cuando **CUALQUIER** vector de $\Re^n$ se pueda poner como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$

Ejemplo: Averiguar si los siguientes vectores forman un sistema generador de $\Re^2$

$$\vec{u}_1 = (1,1) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (1,-1) \in \Re^2$$

Se debe comprobar si **cualquier** vector $\vec{v} = (x, y)$ se puede poner como combinación lineal de dichos vectores:

$$(x, y) = \lambda_1 \cdot (1,1) + \lambda_2 \cdot (1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = x - \lambda_2$$

$$y = x - 2\lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{x-y}{2}}$$

$$\lambda_1 = x - \lambda_2 = x - \frac{x-y}{2} = \frac{2x-(x-y)}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{x+y}{2}}$$

Conclusión: Puesto que hemos encontrado los escalares λ_1, λ_2 podemos afirmar que cualquier vector del espacio lo podemos poner como combinación lineal de los vectores (1,1) y (1,-1)

Ejercicio: Determinar los escalares que permiten escribir el vector (3,2) como combinación lineal de los vectores

$$\vec{u}_1 = (1,1) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (1,-1) \in \Re^2$$

Ejemplo: Averiguar si los siguientes vectores forman un sistema generador de $\Re^2$

$$\vec{u}_1 = (3,0) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (2,-2) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_3 = (0,6) \in \Re^2$$

Se debe comprobar si **cualquier** vector $\vec{v} = (x, y)$ se puede poner como combinación lineal de dichos vectores:

$$(x, y) = \lambda_1 \cdot (3,0) + \lambda_2 \cdot (2,-2) + \lambda_3 \cdot (0,6)$$

$$(x,y)=\lambda_1\cdot(3,0)+\lambda_2\cdot(2,-2)+\lambda_3\cdot(0,6)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3\lambda_1+2\lambda_2 \\ y=-2\lambda_2+6\lambda_3 \end{array}\right\}$$

$$\lambda_2=\frac{6\lambda_3-y}{2} \qquad x=3\lambda_1+2\cdot\left(\frac{6\lambda_3-y}{2}\right)$$

$$x=3\lambda_1+6\lambda_3-y$$

$$\lambda_1=\frac{x-6\lambda_3+y}{3}$$

Conclusión: Los vectores forman un **sistema generador** del espacio pues los valores de λ_1,λ_2 dependen del valor de x,y,λ_3

Ejercicio: Determinar los escalares que permiten escribir el vector $(3,2)$ como combinación lineal de los vectores

$$\vec{u}_1=(3,0)\in\Re^2$$
$$\vec{u}_2=(2,-2)\in\Re^2$$
$$\vec{u}_3=(0,6)\in\Re^2$$

Ejercicio: Averiguar si los siguientes vectores forman un sistema generador de $\Re^3$

$$\vec{u}_1 = (3,0,-1) \in \Re^3$$

$$\vec{u}_2 = (0,-2,8) \in \Re^3$$

2. Base y dimensión de $\Re^n$
2.3 Sistema de generadores de $\Re^n$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

$$(x,y,z) = \lambda_1 \cdot (3,0,-1) + \lambda_2 \cdot (0,-2,8)$$

Conclusión:

Ejercicio: Determinar, si existen, los escalares que permiten escribir el vector $(3,2,0)$ como combinación lineal de los vectores

$$\vec{u}_1 = (3,0,-1) \in \Re^3 \,, \quad \vec{u}_2 = (0,-2,8) \in \Re^3$$

Conclusión:

2.4 Base de $\Re^n$

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in \Re^n$

son **UNA BASE** de $\Re^n$

$$\Updownarrow$$

1) Son vectores linealmente independientes
2) Son un sistema generador de $\Re^n$

Ejemplo: Averiguar si los siguientes vectores forman una base del espacio vectorial $\Re^2$

$$\vec{u}_1 = (4,0) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (1,-2) \in \Re^2$$

Se debe comprobar si:

1) Son vectores linealmente independientes
2) Forman un sistema generador de $\Re^2$

2. Base y dimensión de $\Re^n$
<u>**2.4 Base de $\Re^n$**</u>

1) Los vectores serán L.I. si la solución del sistema de ecuaciones

$$(0,0) = \lambda_1 \cdot (4,0) + \lambda_2 \cdot (1,-2)$$

es únicamente $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 4\lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = -2\lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 4\lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 0}$$

Por tanto, los vectores son **linealmente independientes**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2) Comprobamos si forman un sistema generador de $\Re^2$

¿**Cualquier** vector $\vec{v}=(x,y)$ se puede poner como combinación lineal de ellos?

$$(x,y)=\lambda_1\cdot(4,0)+\lambda_2\cdot(1,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=4\lambda_1+\lambda_2 \\ y=-2\lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2=\frac{-y}{2} \Rightarrow x=4\lambda_1-\frac{y}{2}$$

$$2x=8\lambda_1-y$$

$$\lambda_1=\frac{2x+y}{8}$$

Los vectores forman un **sistema generador** del espacio pues los valores de λ_1,λ_2 dependen del valor de x, y

Conclusión: Los vectores $(4,0)$ y $(1,-2)$ forman una **base** del espacio vectorial $\Re^2$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Se denomina **BASE CANÓNICA** del espacio vectorial $\Re^n$ al conjunto de n vectores cada uno de los cuales tiene un 1 en alguna componente y 0 en el resto. Se representa por

$$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\in\Re^n$$

Ejemplo: La base canónica del espacio $\Re^2$ está formada por los vectores:

$$\vec{e}_1=(1,0) \qquad \vec{e}_2=(0,1)$$

Ejercicio: La base canónica del espacio $\Re^3$ está formada por los vectores:

2.5 Dimensión de $\mathfrak{R}^n$

Todas las bases del espacio $\mathfrak{R}^n$ tienen el mismo número de vectores

Se denomina **dimensión** del espacio $\mathfrak{R}^n$ al **número de vectores** de una cualquiera de sus bases

$$\boxed{\dim\left(\mathfrak{R}^n\right) = n}$$

Por tanto, todas las bases del espacio $\mathfrak{R}^2$ tendrán 2 vectores

Todas las bases del espacio $\mathfrak{R}^3$ tendrán 3 vectores. Y así sucesivamente

2.6 Propiedades de las bases de $\mathfrak{R}^n$

Propiedad 1:

Si los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son **UNA BASE** de $\mathfrak{R}^n$

$$\Downarrow$$

$\forall \vec{v} \in \mathfrak{R}^n,\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ÚNICOS tales que

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$$

Si los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ son una base de $\Re^n$
y $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$

el vector $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

se denomina **VECTOR DE COMPONENTES** de $\vec{v} \in \Re^n$

en la base formada por los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$

Ejemplo: Obtener las componentes del vector $\vec{v} = (2,1) \in \Re^2$ en la base formada por los vectores:

$$\vec{u}_1 = (3,0) \in \Re^2$$
$$\vec{u}_2 = (1,-5) \in \Re^2$$

Buscamos los 2 escalares λ_1, λ_2 tales que:

$$(2,1) = \lambda_1 \cdot (3,0) + \lambda_2 \cdot (1,-5)$$

$$(2,1)=\lambda_1\cdot(3,0)+\lambda_2\cdot(1,-5)$$

$$\left.\begin{array}{l}2=3\lambda_1+\lambda_2\\ 1=-5\lambda_2\end{array}\right\} \quad \boxed{\lambda_2=\frac{-1}{5}}$$

$$2=3\lambda_1-\tfrac{1}{5}$$

$$\tfrac{11}{5}=3\lambda_1$$

$$\boxed{\lambda_1=\frac{11}{15}}$$

Conclusión: Las componentes del vector $(2,1)$ en la base formada por los vectores $(3,0)$ y $(1,-5)$ son:

$$(\lambda_1,\lambda_2)=\left(\tfrac{11}{15},\tfrac{-1}{5}\right)$$

Ejercicio: Obtener las componentes del vector $\vec{v}=(2,1)\in\Re^2$ en los vectores de la base canónica.

Conclusión:

Propiedad 2: Un conjunto de ***n*** vectores de $\Re^n$

Forman una base de $\Re^n$

$\Updownarrow$

se satisface
una cualquiera de las dos condiciones
de la definición de base

Propiedad 3:

Si $\dim\left(\Re^n\right) = n$ se cumple que:

Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$

son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES** $\Rightarrow m \leq n$

Si $m > n \Rightarrow$ **NO** son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**

son **UN SISTEMA GENERADOR** de $\Re^n \Rightarrow m \geq n$

Si $m < n \Rightarrow$ **NO** son **SISTEMA GENERADOR de** $\Re^n$

Ejemplo: Averiguar si los siguientes vectores forman un sistema generador de $\Re^3$

$$\vec{u}_1 = (3,0,-1) \in \Re^3$$
$$\vec{u}_2 = (0,-2,8) \in \Re^3$$

Conclusión: NO pueden formar un sistema generador de $\Re^3$, porque para que lo pueda ser se necesitan, por lo menos, 3 vectores

2. Base y dimensión de $\Re^n$
2.3 Sistema de generadores de $\Re^n$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Averiguar si los siguientes vectores forman un sistema generador de $\Re^3$

$$\vec{u}_1 = (3,0,-1) \in \Re^3 \quad , \quad \vec{u}_2 = (0,-2,8) \in \Re^3$$
$$\vec{u}_3 = (6,0,-2) \in \Re^3 \quad , \quad \vec{u}_4 = (3,-2,7) \in \Re^3$$

Sí pueden formar un sistema generador, porque para que lo pueda ser se necesitan, por lo menos, 3 vectores. Pero eso no asegura que lo sea. Habría que comprobarlo:

$$\vec{u}_3 = (6,0,-2) = 2 \cdot (3,0,-1) \qquad \vec{u}_4 = (3,-2,7) = (3,0,-1) + (0,-2,8)$$

Conclusión: Sólo hay dos vectores linealmente independientes. Como dos vectores no pueden formar una base de $\Re^3$, estos vectores NO forman un sistema generador

Ejercicio: Averiguar si los siguientes vectores de $\Re^3$ son linealmente independientes

$$\vec{u}_1 = (3,0,-1) \in \Re^3 \quad , \quad \vec{u}_2 = (0,-2,8) \in \Re^3$$
$$\vec{u}_3 = (5,0,-8) \in \Re^3 \quad , \quad \vec{u}_4 = (3,-1,4) \in \Re^3$$

Conclusión:

Ejercicio: Averiguar si los siguientes vectores de $\Re^3$ son linealmente independientes

$$\vec{u}_1 = (3,0,-1) \in \Re^3 \quad , \quad \vec{u}_2 = (6,0,-2) \in \Re^3$$

Conclusión:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

1. **Vectores y operaciones en $\Re^n$**
2. **Base y dimensión de $\Re^n$**
3. **Aplicaciones lineales**
   1. **Definición**
   2. **Propiedad**
   3. **Endomorfismo**
   4. **Matriz asociada a una aplicación lineal**
4. **Valores y vectores propios**
5. **Formas cuadráticas**
6. **Espacio euclídeo $\Re^n$**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3.1 Definición

Diremos que una aplicación $f:\Re^n \to \Re^m$

es una **aplicación lineal** entre los espacios vectoriales $\Re^n$ y $\Re^m$

$\Updownarrow$

$$\text{a) } \forall \vec{u},\vec{v} \in \Re^n,\ \ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$\text{b) } \forall \lambda \in \Re,\ \forall \vec{u} \in \Re^n,\ \ f(\lambda\cdot\vec{u}) = \lambda\cdot f(\vec{u})$$

Ejemplo: Demostrar si la siguiente aplicación es lineal

$$f: \Re^2 \rightarrow \Re^3$$
$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = (x+y, 3x-y, y)$$

Tomemos 2 vectores de $\Re^2$ y comprobemos si se cumple la 1ª condición:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}$$

$$f(\vec{u}) = f(u_1,u_2) = (u_1+u_2, 3u_1-u_2, u_2)$$
$$f(\vec{v}) = f(v_1,v_2) = (v_1+v_2, 3v_1-v_2, v_2)$$
$$f(\vec{u})+f(\vec{v}) = (u_1+u_2+v_1+v_2, 3u_1-u_2+3v_1-v_2, u_2+v_2)$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = (u_1+v_1+u_2+v_2, 3u_1+3v_1-u_2-v_2, u_2+v_2)$$

¿son iguales? SI

Tomemos un vector de $\Re^2$ y un escalar y comprobemos si se cumple la 2ª condición:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \lambda\in\Re\end{array}\right\}$$

$$f(\vec{u}) = f(u_1,u_2) = (u_1+u_2, 3u_1-u_2, u_2)$$
$$\lambda\cdot f(\vec{u}) = (\lambda\cdot u_1+\lambda\cdot u_2, \lambda\cdot 3u_1-\lambda\cdot u_2, \lambda\cdot u_2)$$

$$\lambda\cdot\vec{u} = (\lambda\cdot u_1, \lambda\cdot u_2)$$

$$f(\lambda\cdot\vec{u}) = (\lambda\cdot u_1+\lambda\cdot u_2, 3\cdot\lambda\cdot u_1-\lambda\cdot u_2, \lambda\cdot u_2)$$

¿son iguales? SI

Conclusión: Queda demostrado que ***f*** es una aplicación lineal

Ejercicio: Para la aplicación lineal anterior

$$\begin{array}{cccc} f: & \Re^2 & \to & \Re^3 \\ & (x,y) & \to & f(x,y)=(x+y,3x-y,y) \end{array}$$

determinar la imagen del vector $(1,5)$ y la antiimagen del vector $(1,2,3)$

Conclusión:

Ejercicio: Demostrar si la siguiente aplicación es lineal

$$\begin{array}{cccc} f: & \Re^3 & \to & \Re^2 \\ & (x,y,z) & \to & f(x,y,z)=(x-z,y+2) \end{array}$$

Conclusión:

3.2 Propiedad

$f : \Re^n \rightarrow \Re^m$ es aplicación lineal $\Rightarrow f\left(\vec{0}_{\Re^n}\right) = \vec{0}_{\Re^m}$

Si $f\left(\vec{0}_{\Re^n}\right) \neq \vec{0}_{\Re^m} \Rightarrow f$ **NO** es **APLICACIÓN LINEAL**

Ejemplo: Demostrar si la siguiente aplicación es lineal

$$\begin{array}{llll} f: & \Re^3 & \rightarrow & \Re^4 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & f(x,y,z) = (4x-y, x+z-1, y+2z, xy) \end{array}$$

Aplicando esta propiedad: $f(0,0,0) = (0,-1,0,0) \neq (0,0,0,0)$

Conclusión: f NO es una aplicación lineal

Ejercicio: Demostrar si la siguiente aplicación es lineal

$$\begin{array}{llll} f: & \Re^2 & \rightarrow & \Re^2 \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y) = \left(x, \sqrt{x+y}\right) \end{array}$$

Comprobemos si cumple esta propiedad:

$f(0,0) =$

Conclusión:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}$$

$f(\vec{u})=f(u_1,u_2)=$

$f(\vec{v})=f(v_1,v_2)=$

$f(\vec{u})+f(\vec{v})=$

$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$

¿son iguales?

$f(\vec{u}+\vec{v})=$

Conclusión:

3.3 Endomorfismo

Es una aplicación lineal en que los espacios vectoriales de salida y llegada tienen la misma dimensión

$$f:\Re^n \to \Re^n$$

Ejemplo: Demostrar si la siguiente aplicación es un endomorfismo

$$\begin{array}{llll} f: & \Re^2 & \to & \Re^3 \\ & (x,y) & \to & f(x,y)=(x+y,3x-y,y)\end{array}$$

Conclusión: Como hemos visto anteriormente f es aplicación lineal, pero NO es un endomorfismo pues la dimensión del espacio de salida (2) es diferente de la dimensión del espacio de llegada (3)

Ejercicio: Demostrar si la siguiente aplicación es un endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \Re^2 & \to & \Re^2 \\ & (x,y) & \to & f(x,y)=(x+y,3x-y) \end{array}$$

Conclusión:

3.4 Matriz asociada a una aplicación lineal

Dada una aplicación lineal $f:\Re^n \to \Re^m$

La matriz asociada a f en las bases canónicas, A, se obtiene escribiendo **en columnas** las componentes de las imágenes de los vectores de la base canónica de $\Re^n$

Esta matriz tiene m filas y n columnas (orden mxn)

La imagen por la aplicación lineal de cualquier vector $\vec{v} \in \Re^n$ se obtiene a partir de $f(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$

Ejemplo: Obtener la matriz asociada a la siguiente aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & \Re^2 & \rightarrow & \Re^3 \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y)=(x+y,3x-y,y) \end{array}$$

La matriz asociada a esta aplicación lineal tendrá orden: **3 x 2**

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1,0) & f(0,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} f(1,0) = (1,3,0) \\ f(0,1) = (1,-1,1) \end{array}$$

Ejemplo: Dada la siguiente aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & \Re^2 & \rightarrow & \Re^3 \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y)=(x+y,3x-y,y) \end{array}$$

Obtener el valor de $f(-2,5)$ utilizando la matriz asociada a esta aplicación lineal:

$$f(-2,5)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \Re^2 & \rightarrow & \Re^3 \\ & (-2,5) & \rightarrow & f(-2,5)=(3,-11,5) \end{array}$$

Ejercicio: Obtener la matriz asociada a la siguiente aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & \Re^3 & \rightarrow & \Re^2 \\ & (x,y,z) & \rightarrow & f(x,y,z) = (x+2z, z-2y) \end{array}$$

La matriz asociada a esta aplicación lineal tendrá orden:

$$\begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$f(1,0,0) =$

$f(0,1,0) =$

$f(0,0,1) =$

Ejercicio: Buscar la expresión analítica de la aplicación lineal cuya matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la expresión analítica debemos calcular: $f(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$

$f(x, y, z) =$

Por tanto:

Dado un endomorfismo $f : \Re^n \to \Re^n$

y siendo A su matriz asociada, se puede calcular el **determinante** de esta matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n}$

Si $\boldsymbol{n}=2$:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$$

$+$ $-$

Ejemplo: Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - 5\cdot 2 = -3 - 10 = -13$$

Ejercicio: Determinar el valor de $\boldsymbol{a}$ para que el determinante sea nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

Si $\boldsymbol{n}$=3: Se puede usar la **Regla de Sarrus**

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= a\cdot e\cdot i + c\cdot d\cdot h + b\cdot f\cdot g - c\cdot e\cdot g - b\cdot d\cdot i - a\cdot f\cdot h$$

3. Aplicaciones lineales
3.4 Matriz asociada a una aplicación lineal

Ejemplo: Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-5) + 4\cdot 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-1)\cdot 3$$
$$-2\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot 1\cdot 1 - (-3)\cdot 4\cdot(-5) =$$

$$= 0 + 8 + 9 - 0 + 1 - 60 = -50$$

Para calcular determinantes de orden $n>3$, no hay una regla directa

La única alternativa es aplicar las propiedades de los determinantes, que pueden consultarse en la Bibliografía de referencia

Propiedad:

Un conjunto de n vectores es **LINEALMENTE INDEPENDIENTE**

$$\Updownarrow$$

la matriz formada con los vectores contiene una submatriz de orden n con determinante **DISTINTO** de 0

Ejemplo: Estudiar si son linealmente independientes los vectores

$$(1,4,3),(-3,0,1) \quad \text{y} \quad (2,-1,-5)$$

Como hemos visto que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$$

podemos asegurar que los tres vectores son linealmente independientes

Ejercicio: Estudiar si son linealmente independientes los vectores

$$(1,-1,0,3),(2,2,-1,1) \quad \text{y} \quad (3,1,-1,5)$$

La matriz que podemos formar con estos vectores es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculemos determinantes de submatrices cuadradas de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

Calculemos otros determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

Conclusión:

Ejercicio: Determinar el valor de ***a*** para que los vectores formen una base de $\Re^3$

$$(1,4,3),(-3,0,1) \quad \text{y} \quad (2,a,-1)$$

Conclusión:

3. Aplicaciones lineales
3.4 Matriz asociada a una aplicación lineal

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

1. **Vectores y operaciones en $\Re^n$**
2. **Base y dimensión de $\Re^n$**
3. **Aplicaciones lineales**
4. **Valores y vectores propios**
   1. Valor y vector propio
   2. Cálculo de valores propios
   3. Cálculo de vectores propios
5. **Formas cuadráticas**
6. **Espacio euclídeo $\Re^n$**

4.1 Valor y vector propio

Dado el endomorfismo $f : \Re^n \rightarrow \Re^n$

Un vector $\vec{v} \in \Re^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ es **vector propio** de ***f***

$$\Updownarrow$$

$\exists \lambda \in \Re$ tal que $f\left(\vec{v}\right) = \lambda \cdot \vec{v}$

Se denomina **valor propio** asociado al vector propio $\vec{v}$

Ejercicio: Calcular las imágenes de los siguientes vectores según el endomorfismo. ¿Alguno de ellos es vector propio de f?

$$\begin{array}{lccc} f: & \Re^2 & \rightarrow & \Re^2 \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y) = (3x+2y, 2x) \end{array}$$

$$(1,3) \rightarrow f(1,3) =$$

$$(-2,4) \rightarrow f(-2,4) =$$

Conclusión:

4.2 Cálculo de valores propios

Si el endomorfismo f tiene matriz asociada A, se tiene:

$$f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, para que el anterior sistema tenga solución no trivial, se debe cumplir:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = |A - \lambda \cdot I| = 0$$

La expresión $\left|A-\lambda\cdot I\right|=P_n\left(\lambda\right)$

se denomina **POLINOMIO CARACTERÍSTICO**

Las soluciones de la **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA**

$$P_n\left(\lambda\right)=\left|A-\lambda\cdot I\right|=0$$

son los **VALORES PROPIOS** del endomorfismo

4. Valores y vectores propios
4.2 Cálculo de valores propios

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Calcular los valores propios asociados al siguiente endomorfismo:

$$\begin{array}{llll} f: & \Re^2 & \to & \Re^2 \\ & \left(x,y\right) & \to & f\left(x,y\right)=\left(3x+2y,2x\right) \end{array}$$

La matriz asociada a este endomorfismo es:

$$\begin{array}{l} f\left(1,0\right)=\left(3,2\right) \\ f\left(0,1\right)=\left(2,0\right) \end{array} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El Polinomio Característico asociado a esta matriz es: $\left|A-\lambda\cdot I\right|$

$$\left|\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot(-\lambda)-4=\lambda^2-3\lambda-4$$

Las soluciones de la ecuación característica serán los **VALORES PROPIOS**

$$\lambda^2-3\lambda-4=0$$

$$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\begin{cases}\lambda=4\\ \lambda=-1\end{cases}$$

4.3 Cálculo de vectores propios

Cada **valor propio** está asociado a un conjunto de **vectores propios**

Para calcular los vectores propios $\vec{v}_k$ asociados al valor propio λ_k se resuelve el sistema compatible indeterminado:

$$\left(A-\lambda_k\cdot I\right)\cdot\vec{v}_k=\vec{0}$$

Ejemplo: Calcular los vectores propios asociados a los valores propios del siguiente endomorfismo:

$$\begin{array}{rccl} f: & \Re^2 & \to & \Re^2 \\ & (x,y) & \to & f(x,y)=(3x+2y,2x) \end{array}$$

Ya sabemos que los valores propios asociados a este endomorfismo son:

$$\lambda = 4 \quad \text{y} \quad \lambda = -1$$

Primero buscaremos el vector propio asociado al valor propio $\lambda = 4$ resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(A-\lambda_k \cdot I)\cdot \vec{v}_k = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

$$2\cdot(2v_2) - 4v_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Por tanto, todos los vectores que cumplen esta condición serán los vectores propios asociados al valor propio 4

$$\boxed{(v_1, v_2) = (2v_2, v_2) = v_2\cdot(2,1)}$$

Esto significa que la imagen de cualquier vector proporcional al $(2,1)$ será ese mismo vector multiplicado por 4, que es su valor propio. Veámoslo con algunos ejemplos.

$$\begin{array}{rccc} f: & \Re^2 & \rightarrow & \Re^2 \\ & (x,y) & \rightarrow & f(x,y)=(3x+2y,2x) \end{array}$$

$$(2,1) \rightarrow f(2,1) = (8,4) = 4\cdot(2,1)$$

$$(6,3) \rightarrow f(6,3) = (24,12) = 4\cdot(6,3)$$

$$(-4,-2) \rightarrow f(-4,-2) = (-16,-8) = 4\cdot(-4,-2)$$

En cambio: $(2,2) \rightarrow f(2,2) = (10,4) \neq 4\cdot(2,2)$

Ejercicio: Buscar los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -1$

Ejercicio: Calcular los valores y vectores propios asociados al endomorfismo cuya matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El Polinomio Característico asociado a esta matriz es: $|A - \lambda \cdot I|$

Por tanto, los valores propios asociados al endomorfismo son:

Ahora buscaremos los vectores propios asociados a cada valor propio resolviendo cada sistema de ecuaciones

Buscaremos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 2$

Buscaremos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 5$

Buscaremos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 8$

4. Valores y vectores propios
4.3 Cálculo de vectores propios

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

1. Vectores y operaciones en $\Re^n$
2. Base y dimensión de $\Re^n$
3. Aplicaciones lineales
4. Valores y vectores propios
5. Formas cuadráticas
   1. Definición
   2. Clasificación de las formas cuadráticas
   3. Determinación del signo de una forma cuadrática
6. Espacio euclídeo $\Re^n$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5.1 Definición

Dado el espacio vectorial $\Re^n$
y una matriz simétrica $A \in M_n$

Se denomina **forma cuadrática** de matriz asociada $\boldsymbol{A}$ en las bases canónicas a la aplicación:

$$\begin{array}{llll} f: & \Re^n & \rightarrow & \Re \\ & \forall \vec{u} \in \Re^n & \rightarrow & f(\vec{u}) = \vec{u}\,' \cdot A \cdot \vec{u} \in \Re \end{array}$$

Ejemplo: Obtener la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Según la definición, se tiene que:

$$f: \quad \Re^3 \quad \to \quad \Re$$

$$\vec{u}=(x,y,z)\in\Re^3 \quad \to \quad f(\vec{u})=(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\Re$$

Desarrollamos el producto:

$$f(\vec{u})=f(x,y,z)=(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z)= (5x+4y-z, 4x+7y+2z, -x+2y-4z)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z)= 5x^2+4xy-xz+4xy+7y^2+2yz-xz+2yz-4z^2 =$$

$$=5x^2+7y^2-4z^2+8xy-2xz+4yz$$

Veamos una forma más directa de llegar al resultado final:

$$f(\vec{u}) = f(x,y,z) = (x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = 5x^2 + 7y^2 - 4z^2 + 8xy - 2xz + 4yz$$

Ejercicio: Obtener la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) =$$

Y a partir de una forma cuadrática dada, ¿cómo obtendríamos su matriz asociada?

Ejemplo: Obtener la matriz asociada a la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y) = 9x^2 - 2y^2 - 6xy$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Obtener la forma cuadrática asociada a la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) =$$

Ejercicio: Obtener la matriz asociada a la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y,z) = x^2 - 2z^2 + 8xz - 5yz$$

$$A = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

5.2 Clasificación de las formas cuadráticas

Una forma cuadrática $f:\Re^n \rightarrow \Re$ es

- **Definida positiva** $\Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \Re^n,\ \vec{u} \neq 0,\ f(\vec{u}) > 0$
- **Definida negativa** $\Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \Re^n,\ \vec{u} \neq 0,\ f(\vec{u}) < 0$
- **Semidefinida positiva**

  $\Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \Re^n,\ f(\vec{u}) \geq 0$ y $\exists \vec{v} \neq 0$ tal que $f(\vec{v}) = 0$
- **Semidefinida negativa**

  $\Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \Re^n,\ f(\vec{u}) \leq 0$ y $\exists \vec{v} \neq 0$ tal que $f(\vec{v}) = 0$
- **Indefinida**: En el resto de casos Es decir:

$\exists \vec{u} \in \Re^n$ con $f(\vec{u}) > 0$ y $\exists \vec{v} \in \Re^n$ con $f(\vec{v}) < 0$

Ejemplo: Clasificar las formas cuadráticas siguientes:

$$f:\Re^2 \rightarrow \Re$$

$$f(x,y) = 6x^2 + 3y^2$$

$$\forall \vec{u} = (x,y) \neq (0,0) \in \Re^2 \Rightarrow f(x,y) > 0$$

Conclusión: f es una forma cuadrática **DEFINIDA POSITIVA**

$$f(x,y) = -2x^2 - 5y^2$$

$$\forall \vec{u} = (x,y) \neq (0,0) \in \Re^2 \Rightarrow f(x,y) < 0$$

Conclusión: f es una forma cuadrática **DEFINIDA NEGATIVA**

$f(x,y) = 5x^2$

$\forall \vec{u} = (x,y) \in \Re^2 \Rightarrow f(x,y) \geq 0$

y $\exists \vec{v} = (x,y) \neq (0,0) \in \Re^2$ tal que $f(x,y) = 0$

$\vec{v} = (0,2) \in \Re^2$

Conclusión: f es una forma cuadrática **SEMIDEFINIDA POSITIVA**

$f(x,y) = -10y^2$

$\forall \vec{u} = (x,y) \in \Re^2 \Rightarrow f(x,y) \leq 0$

y $\exists \vec{v} = (x,y) \neq (0,0) \in \Re^2$ tal que $f(x,y) = 0$

$\vec{v} = (4,0) \in \Re^2$

Conclusión: f es una forma cuadrática **SEMIDEFINIDA NEGATIVA**

$f(x,y) = 2x^2 - 8y^2$

$\exists \vec{u} = (x,y) \in \Re^2$ tal que $f(x,y) > 0$

$\vec{u} = (5,1) \in \Re^2$

$\exists \vec{u} = (x,y) \in \Re^2$ tal que $f(x,y) < 0$

$\vec{u} = (0,2) \in \Re^2$

Conclusión: f es una forma cuadrática **INDEFINIDA**

5.3 Determinación del signo de una forma cuadrática

1. Por el método de los MENORES PRINCIPALES

Sea $|A_i|$ el menor principal de orden i de la matriz A asociada a la forma cuadrática f

- f es **definida positiva** $\Leftrightarrow |A_i| > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$
- f es **definida negativa** $\Leftrightarrow \begin{cases} |A_i| < 0, & \forall i \text{ impar} \\ |A_i| > 0, & \forall i \text{ par} \end{cases}$

Ejercicio: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y) = 6x^2 + 3y^2 - 4xy$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

Sus menores principales son:

Conclusión:

Ejercicio: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y,z)=5x^2+5y^2+2z^2-6xz$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

Sus menores principales son:

Conclusión:

Ejercicio: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y,z)=-6x^2-2y^2-z^2+6xy+xz$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

Conclusión:

2. Por el método de los VALORES PROPIOS

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$,

- $\boldsymbol{f}$ es **definida positiva** $\Leftrightarrow \lambda_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$
- $\boldsymbol{f}$ es **definida negativa** $\Leftrightarrow \lambda_i < 0, \forall i = 1, \ldots, n$
- $\boldsymbol{f}$ es **semidefinida positiva**
  $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$ y $\exists \lambda_j = 0$
- $\boldsymbol{f}$ es **semidefinida negativa**
  $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0, \forall i = 1, \ldots, n$ y $\exists \lambda_j = 0$
- $\boldsymbol{f}$ es **indefinida**: En el resto de casos Es decir:
  $\Leftrightarrow \exists \lambda_i < 0$ y $\exists \lambda_j > 0$

Ejemplo: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Los valores propios asociados a esta matriz son:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{cases} \lambda = 4{,}41 > 0 \\ \lambda = 1{,}59 > 0 \end{cases}$$

Conclusión: $\boldsymbol{f}$ es una forma cuadrática **DEFINIDA POSITIVA**

Ejercicio: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y) = -5x^2 - 4y^2 + 4xy$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

Los valores propios asociados a esta matriz son:

Conclusión:

Ejercicio: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 4xz$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

Los valores propios asociados a esta matriz son:

$$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 8\lambda = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 + 6\lambda + 8\right) = 0$$

Conclusión:

Ejercicio: Clasificar la siguiente forma cuadrática:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 6xy + 2y^2 - z^2$$

La matriz asociada a la forma cuadrática es:

Los valores propios asociados a esta matriz son:

$$(-1-\lambda)\cdot\left[(2-\lambda)^2-9\right]=0$$

Conclusión:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Tema 3. Álgebra lineal

1. **Vectores y operaciones en $\Re^n$**
2. **Base y dimensión de $\Re^n$**
3. **Aplicaciones lineales**
4. **Valores y vectores propios**
5. **Formas cuadráticas**
6. **Espacio euclídeo $\Re^n$**
   1. **Definición**
   2. **Norma euclídea**
   3. **Propiedades de la norma**
   4. **Distancia entre vectores**
   5. **Propiedades de la distancia**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

6.1 Definición

Dado el espacio vectorial $\Re^n$

Se denomina **producto interior o escalar** habitual de vectores, y lo representamos por $\langle \, , \rangle$ a la aplicación:

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \, , \rangle : \Re^n \times \Re^n & \rightarrow & \Re \\
(\vec{u}, \vec{v}) & \rightarrow & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} \in \Re
\end{array}
$$

Desarrollando la expresión, se obtiene:

$$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = (u_1,\dots,u_n)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + \cdots + u_n\cdot v_n = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Se denomina **ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO** al espacio vectorial $\Re^n$ cuando éste está dotado de un producto interior o escalar de vectores

Ejemplo: Obtener el producto interior entre los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (3,0,-2)\in\Re^3 \qquad \vec{v} = (1,-5,-3)\in\Re^3$$

$$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = (3,0,-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\cdot 1 + 0\cdot(-5) + (-2)\cdot(-3) = 9$$

Ejercicio: Obtener el producto escalar entre los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (-1,4)\in\Re^2 \qquad \vec{v} = (6,-2)\in\Re^2$$

6.2 Norma euclídea

Dado el espacio vectorial $\Re^n$

Se denomina **norma de un vector** $\vec{u} \in \Re^n$ y lo representamos por $\|\vec{u}\|$ a:

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \in \Re^+$$

En $\Re^2$ sería: $\|\vec{u}\| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Ejemplo: Obtener la norma euclídea del vector: $\vec{u} = (3, -1) \in \Re^2$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = (3, -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) = 3^2 + (-1)^2 = 10$$

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{10}$$

Ejercicio: Obtener la norma euclídea del vector: $\vec{u} = (1, 5, -4) \in \Re^3$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle =$$

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} =$$

6.3 Propiedades de la norma euclídea

1. $\forall \vec{u} \in \Re^n, \|\vec{u}\| \geq 0$. Además $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
2. $\forall \vec{u} \in \Re^n, \forall \lambda \in \Re, \|\lambda \cdot \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$
3. Se dice que $\vec{u} \in \Re^n$ es **unitario** $\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$:

$$\forall \vec{u} \in \Re^n, \vec{u} \neq \vec{0}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \text{ es unitario}$$

4. Desigualdad triangular:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \Re^n, \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

6.4 Distancia entre vectores

Dado el espacio vectorial $\Re^n$

Se denomina **distancia entre dos vectores** $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ y lo representamos por $d(\vec{u}, \vec{v})$ a:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| \in \Re^+$$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2} \in \Re^+$$

Ejemplo: Obtener la distancia entre los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (5,1) \in \Re^2 \qquad \vec{v} = (2,-3) \in \Re^2$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (5,1) - (2,-3) = (3,4)$$

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = +\sqrt{3^2 + 4^2} = +\sqrt{25} = 5$$

Ejercicio: Obtener la distancia entre los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (4,0,-2) \in \Re^3 \qquad \vec{v} = (8,-2,3) \in \Re^3$$

$$\vec{u} - \vec{v} =$$

$$d(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| =$$

6.5 Propiedades de la distancia

1. $\forall \vec{u},\vec{v} \in \Re^n, d(\vec{u},\vec{v}) \geq 0.$

   Además $d(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

2. $\forall \vec{u},\vec{v} \in \Re^n, d(\vec{u},\vec{v}) = d(\vec{v},\vec{u})$

3. Desigualdad triangular:

   $$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \Re^n, d(\vec{u},\vec{w}) \leq d(\vec{u},\vec{v}) + d(\vec{v},\vec{w})$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

BIBLIOGRAFÍA DE REFERENCIA

MATEMÁTICAS EMPRESARIALES

P. Alegre, L. González, F. Ortí, G. Rodríguez, J. Sáez, T. Sancho
Ed. AC, Madrid, 2005

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez