UB Riskcenter Working Paper Series

University of Barcelona

Research Group on Risk in Insurance and Finance www.ub.edu/riskcenter

Working paper 2015/04 \\ Number of pages 21

Desarrollo metodológico del modelo actuarial de múltiples estados casado – viudo y cálculo actuarial del coste por pensiones de jubilación y viudedad

Estefanía Alaminos y Mercedes Ayuso

Riskcenter

Desarrollo metodológico del modelo actuarial de múltiples estados casado – viudo y cálculo actuarial del coste por pensiones de jubilación y viudedad.

Estefanía Alaminos y Mercedes Ayuso

Department d'econometria, estadística i economia espanyola, Riskcenter-IREA, Universitat de Barcelona, Av. Diagonal, 690, 08034 Barcelona.

Resumen
El objetivo de este trabajo es desarrollar metodológicamente un modelo actuarial de múltiples estados que permita probabilizar la transición entre los estados civiles casado-viudo para individuos de una determinada edad *x*. Dichas probabilidades se utilizarán en el cálculo del valor esperado de los pagos por concurrencia de pensiones para individuos de 65 o más años.
Palabras clave: Estado civil, probabilidades de transición, cadenas de Markov, valor actual actuarial, pensiones, estado civil.

Abstract
In this document we present the methodological approach for a Multiple State Actuarial Model in the marital status context. We obtain transition probabilities between married – widower statuses for an individual aged *x*. Such probabilities are used in the assessment of the expected value for payments related to concurrence of pensions for people aged over 64.
Keywords: Marital Status, transition probabilities, Markov Chains, expected individual cost, pensions.
Title: Methodological Approach of a Multiple State Actuarial Model for the Married - Widower case for the assessment of retirement and widowhood pensions

1. Introducción

En este trabajo se desarrolla metodológicamente un modelo actuarial de múltiples estados para el análisis de los estados puros y transiciones entre estados civiles (casado – viudo). Este modelo es una adaptación del modelo de invalidez visto en Ayuso *et al.* (2007) o del modelo de dependencia desarrollado en Haberman y Pitacco (1999).

Partiendo de la cohorte de individuos casados a la edad de 65 años y bajo los supuestos de que todos ellos tienen derecho a percibir la pensión contributiva de jubilación y, que en caso de fallecer el cónyuge pasarán a ser beneficiarios de la correspondiente pensión de viudedad[1], se obtienen los desarrollos probabilísticos necesarios para calcular el valor actual actuarial del coste que un individuo supondrá al Sistema de la Seguridad Social en caso de que derive en concurrencia de pensiones de jubilación y viudedad[2].

2. Desarrollo

La especificación de un modelo actuarial que considere las transiciones entre los estados civiles casado y viudo, para individuos de edad igual o superior a los 65 años, tendrá en cuenta que a una determinada edad x:

1. El individuo está casado.
2. El individuo está viudo.
3. El individuo fallece.

Aunque la población censada en España en términos de estado civil contempla las situaciones de estar soltero, casado, divorciado, separado y viudo, en nuestra modelización solo contemplamos los estados casado y viudo. El objetivo es desarrollar metológicamente el modelo que nos permita analizar y cuantificar desde un punto de vista actuarial la concurrencia de pensiones de jubilación y viudedad. Aunque las parejas de hecho podrían haber sido incluidas en la modelización, su baja representatividad en los colectivos actuales de personas de 65 o más años nos ha llevado a no incluir de momento dicho estado en la modelización. En la modelización establecemos varias hipótesis de partida. En primer lugar suponemos que el individuo, una vez haya enviudado, no podrá volver a casarse, por lo que no es posible el retorno al estado casado una vez se ha salido de éste (o lo que es lo mismo, la probabilidad de retorno desde viudo a casado es cero).

En el modelo calcularemos, por tanto, dos tipos de probabilidades:

1. Probabilidad de permanecer en un estado (casado o viudo).
2. Probabilidad de transición entre estados (de casado a viudo).

La notación aquí empleada es la utilizada para el caso de invalidez por *Haberman and Pitacco* (1999), adaptada a nuestro modelo de cambio de estado civil.

Como segunda hipótesis establecemos que un individuo casado puede sufrir la contingencia de viudedad en cualquier momento.

---

[1] Ello implica que los cónyuges son independientes económicamente, entendiendo por tal que ambos han participado en el mercado laboral y por tanto, han contribuido al Sistema de la Seguridad Social. En caso de fallecimiento, el cónyuge supérstite será beneficiario de la pensión de viudedad que le corresponda, siempre y cuando tanto causante como beneficiario cumplan con los requisitos legalmente exigidos.

[2] El desarrollo contemplará el supuesto de que el individuo sobreviva toda su vida de jubilado como casado y por tanto no cambie de estado, y la posibilidad de que el individuo enviude en algún momento de su jubilación y sobreviva como tal.

Tenemos por tanto dos subcolectivos, los individuos casados y los individuos viudos, es decir, a una edad determinada *x*, el colectivo inicial está formado por el colectivo de casados y por el colectivo de viudos.

El colectivo de casados no contempla ninguna causa de entrada y admite dos causas de salida: la viudedad y la muerte. Por su parte, en el colectivo de viudos, las entradas sólo se producen desde el colectivo de casados, y la única causa de salida desde este colectivo es la muerte del individuo. De modo esquemático, podemos resumir el modelo según se muestra en la Figura 1.

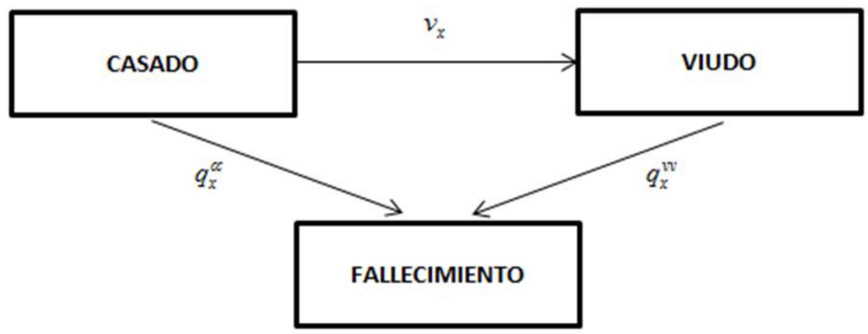

Figura 1. Modelo casado-viudo. Fuente: elaboración propia**.**

Siendo v_x, la probabilidad de que el individuo de edad *x* pase de estar casado al estado de viudedad. q_x^{cc}, es la probabilidad temporal a un año de que un individuo de edad *x* fallezca como casado antes de llegar a la edad *x+1*, y análogamente, q_x^{vv}, es la probabilidad anual de que un individuo viudo de edad *x* fallezca como tal entre las edades *x* y *x+1.*

2.1 Principales funciones biométricas

Para analizar el modelo planteado, estudiaremos en primer lugar las principales funciones biométricas que lo definen.

La **función cohorte** a la edad x, se define como:

$$l_x = l_x^c + l_x^v$$

Siendo l_x el número de individuos vivos a la edad *x*, colectivo formado por el número de individuos casados vivos a la edad *x*, l_x^c, más el número de individuos viudos vivos a la edad *x*, l_x^v.

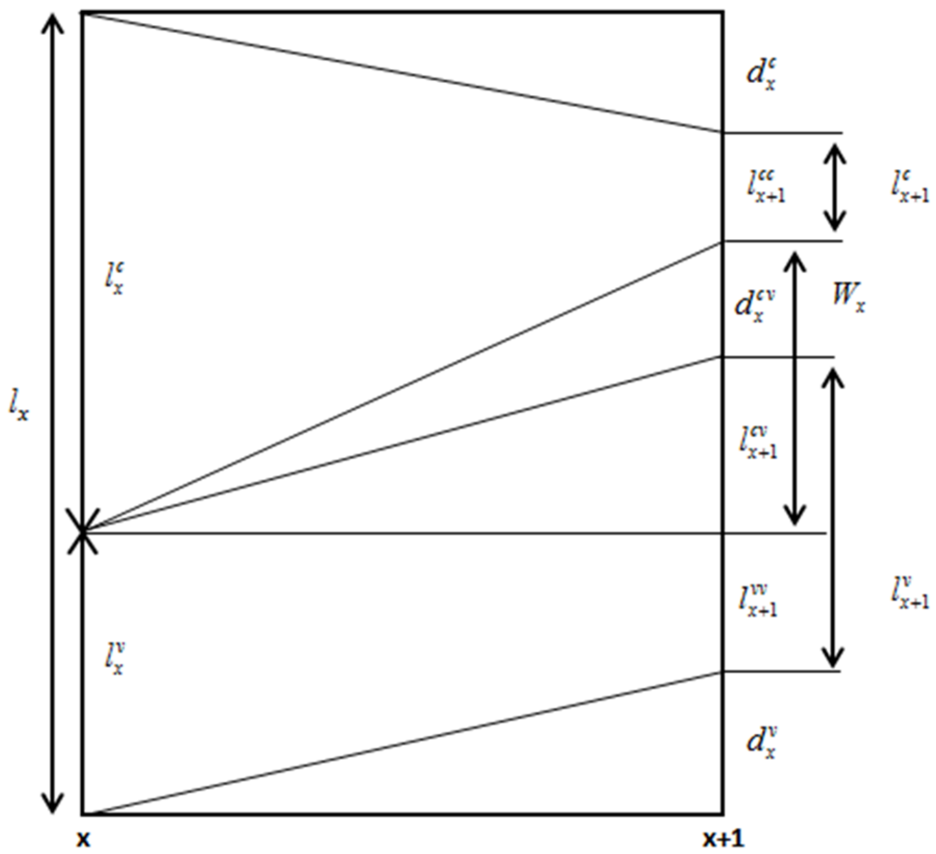

Figura 2. Esquema del modelo casado-viudo. Cambios de estado entre *x* y *x+1*. Fuente: elaboración propia.

Partiendo, en primer lugar, de la función cohorte número de individuos casados vivos a la edad *x*, l_x^c, los individuos pueden pasar a formar parte de tres colectivos a lo largo del año:

- d_x^c : individuos que fallecen en el periodo, manteniéndose como casados al morir.
- W_x : individuos que enviudan.
- l_{x+1}^{cc} : individuos casados que continúan casados al finalizar el periodo.

De este modo, definimos la **función cohorte número de individuos casados vivos a la edad *x***, como:

$$l_x^c = d_x^c + W_x + l_{x+1}^{cc}$$

Por su parte, los individuos casados que enviudan, esto es, que se ven afectados por la contingencia de viudedad, W_x, pueden dividirse en dos subgrupos:

- l_{x+1}^{cv} : individuos casados que enviudan en el transcurso del año, por lo que finalizan el periodo vivos y viudos.

- d_x^{cv} : individuos casados que enviudan durante el año y fallecen como viudos.

Siendo por tanto su expresión la siguiente:

$$W_x = l_{x+1}^{cv} + d_x^{cv}.$$

En segundo lugar, si dividimos la **función cohorte de viudos a la edad *x***, l_x^v, llegamos a dos posibles situaciones finales:

- l_{x+1}^{vv}: individuos que al comienzo del periodo estaban viudos y continúan siéndolo al final del mismo.
- d_x^v :individuos viudos al inicio del periodo y que fallecen durante el mismo como viudos.

Dicho esto, la expresión de la **función número de individuos viudos vivos a la edad *x***, la podemos definir como,

$$l_x^v = l_{x+1}^{vv} + d_x^v$$

En relación a estas expresiones y al esquema gráfico planteado en la figura 2, obtenemos las siguientes expresiones:

1) $l_{x+1}^{cc} = l_x^c - d_x^c - W_x$

   Es decir, el colectivo de supervivientes casados a la edad *x+1*, l_{x+1}^{cc}, es igual al colectivo de supervivientes casados a la edad *x*, menos los fallecidos a lo largo del periodo como casados, d_x^c y menos los individuos que han enviudado durante el periodo, W_x.

   Se considera que $l_{x+1}^{cc} = l_{x+1}^c$.

2) $l_{x+1}^{cc} = l_x^c - d_x^c - W_x = l_x^c - d_x^c - l_{x+1}^{cv} - d_x^{cv}$

   Al considerar el riesgo de enviudar, hemos de contemplar los individuos que estando casados a la edad *x*, han llegado viudos al final del periodo, esto es, a la edad *x+1*, l_{x+1}^{cv}, más los individuos que estaban casados a la edad *x*, y han enviudado durante el periodo y fallecido como viudos al final de éste, d_x^{cv}.

3) $l_{x+1}^{vv} = l_x^v - d_x^v$

   El colectivo de supervivientes viudos a la edad *x+1*, que ya estaban viudos a la edad *x*, l_{x+1}^{vv}, es igual a los individuos viudos a la edad *x*, l_x^v, menos los individuos de este colectivo inicial que han fallecido durante el periodo, d_x^v, y que por tanto, no han llegado con vida a la edad *x+1*.

4) $l_{x+1}^{v} = l_{x+1}^{vv} + l_{x+1}^{cv}$

El colectivo de individuos viudos a la edad *x+1*, es igual a los individuos que ya eran viudos a la edad *x* y lo continúan siendo a la edad *x+1*, l_{x+1}^{vv}, más aquellos individuos que estando casados a la edad *x*, han enviudado durante el periodo y han llegado vivos y viudos a la edad *x+1*, l_{x+1}^{cv}, es decir, individuos que han cambiado de estado durante el periodo anual.

5) $l_{x+1} = l_{x+1}^{c} + l_{x+1}^{v}$

La función de supervivencia a la edad *x+1*, está compuesta por la suma del colectivo de casados a la edad *x+1*, l_{x+1}^{c}, más el colectivo de viudos a la misma edad, l_{x+1}^{v}.

6) $d_x = d_x^{c} + d_x^{cv} + d_x^{v}$

El número de fallecidos entre la edad *x* y *x+1*, d_x, es igual al número de casados de edad *x* que han fallecido entre ambas edades, d_x^{c}, más el número de casados de edad *x* que han enviudado durante el periodo y que han fallecido antes de alcanzar la edad *x+1*, más el número de viudos que han fallecido entre *x* y *x+1*, d_x^{v}.

7) $l_{x+1} = l_x - d_x$

Finalmente, la función cohorte a la edad *x+1*, l_{x+1}, es igual a la diferencia entre la función cohorte a la edad *x*, l_x, y el número de individuos fallecidos a la edad *x*, d_x.

2.2 Cálculo de probabilidades para cada estado y probabilidades de transición

Las probabilidades del modelo se exponen a continuación. En primer lugar definiremos la notación que emplearemos para un **individuo casado de edad *x***:

- p_x^{cc}: probabilidad de que un individuo casado de edad *x*, sobreviva como casado a la edad *x+1*.
- q_x^{cc}: probabilidad de que un individuo casado de edad *x*, fallezca como casado entre las edades *x* y *x+1*.
- p_x^{cv}: probabilidad de que un individuo casado de edad *x*, pase a viudo y llegue vivo a la edad *x+1*.
- q_x^{cv}: probabilidad de que un individuo casado pase a viudo entre las edades *x* y *x+1*, y fallezca como tal durante el periodo.
- p_x^{c}: probabilidad anual de supervivencia de un individuo casado de edad *x*.
- q_x^{c}: probabilidad anual de fallecimiento de un individuo casado de edad x.
- v_x: probabilidad anual de enviudar de un individuo casado de edad *x*.

Notar que p_x^c y q_x^c son probabilidades complementarias, de forma que la probabilidad de supervivencia se puede calcular como: $p_x^c = 1 - q_x^c$.

Para un **individuo viudo a la edad *x***, la notación empleada será la siguiente:

- p_x^{vv} : probabilidad anual de que un individuo viudo de edad *x*, llegue vivo como viudo a la edad *x+1*.
- q_x^{vv} : probabilidad anual de que un individuo viudo de edad *x* fallezca como viudo entre las edades *x* y *x+1*.
- p_x^{vc} : probabilidad anual de supervivencia de un individuo viudo de edad x, que se vuelve a casar durante el periodo anual. En nuestro modelo, como se ha especificado anteriormente, esa probabilidad es nula.
- q_x^{vc} : probabilidad anual de fallecimiento de un individuo viudo de edad *x,* que se vuelve a casar antes del fallecimiento. Asumimos que esa probabilidad es nula pues no contemplamos la reversión de viudo a casado en nuestro modelo.
- p_x^v: probabilidad anual de que un individuo viudo de edad *x,* sobreviva como viudo a la edad *x+1*.
- q_x^v : probabilidad anual de fallecimiento de un viudo de edad *x*.
- r_x : probabilidad anual de retorno de un viudo de edad x, a casado. En nuestro modelo, esta probabilidad es cero dado que no contemplamos la transición desde el estado de viudedad al estado casado.

De nuevo, destacar que p_x^v y q_x^v son probabilidades complementarias, de forma que la probabilidad de supervivencia se puede calcular como: $p_x^v = 1 - q_x^v$. Esta condición se demostrará más adelante.

A continuación formalizaremos las probabilidades descritas anteriormente. Para ello analizaremos las posibles situaciones en las que puede encontrarse el individuo a la edad inicial *x*, considerando su pertenencia al colectivo de casados o al colectivo de viudos.

(A) El individuo está casado a la edad inicial *x*.

i. Supervivencia como casado.

En primer lugar, contemplamos la posibilidad de que el individuo esté casado a la edad inicial *x*. En el transcurso de un periodo, éste puede encontrarse en distintas situaciones, excluyentes entre sí. Estas situaciones son:

- Puede continuar formando parte del colectivo de casados l_{x+1}^{cc} (o l_{x+1}^{c}).
- Puede fallecer durante el periodo manteniendo su condición de casado, d_x^c .
- Puede haber enviudado durante el periodo, W_x . Condición que da lugar a dos posibles escenarios: que sobreviva a como viudo, l_{x+1}^{cv} , o que fallezca como viudo, d_x^{cv} .

A continuación, calcularemos las probabilidades asociadas a cada uno de los sucesos planteados.

Con el fin de obtener la primera probabilidad propuesta, p_x^{cc} , partimos de la función cohorte para un casado a la edad *x+1* que hemos obtenido anteriormente,

$$l_{x+1}^{cc} = l_x^c - d_x^c - W_x = l_x^c - d_x^c - l_{x+1}^{cv} - d_x^{cv}$$

A partir de esta expresión, obtendremos la probabilidad de supervivencia de un casado de edad *x* como casado, dividiendo la función cohorte para individuos casados de edad *x+1* por la misma función, pero para casados de edad *x*, de modo que,

$$p_x^{cc} = \frac{l_{x+1}^{cc}}{l_x^c} = \frac{l_x^c - d_x^c - W_x}{l_x^c} = 1 - \frac{d_x^c}{l_x^c} - \frac{W_x}{l_x^c} = 1 - q_x^{cc} - v_x$$

Dónde:

- $q_x^{cc} = \dfrac{d_x^c}{l_x^c}$: es la probabilidad de fallecimiento de un casado de edad *x*, que fallece como casado, la cual se calcula como el cociente entre el número de casados que han fallecido durante el periodo, d_x^c ,. y la función cohorte de los individuos casados a la edad *x*, l_x^c .
- $v_x = \dfrac{W_x}{l_x^c}$: es la probabilidad de enviudar de un casado de edad *x*, que se obtiene como el cociente entre el número de individuos que se han visto afectados por la contingencia de viudedad entre las edades *x* y *x+1*, W_x , y la función cohorte de los individuos casados a la edad *x*, l_x^c .

De este modo, podemos reescribir la probabilidad anual de supervivencia de un individuo casado de edad *x* como casado,

$$p_x^{cc} = 1 - q_x^{cc} - v_x$$

Lo que significa, que la suma de las tres probabilidades, es decir, la suma de la probabilidad anual de supervivencia de un casado de edad *x*, como casado, p_x^{cc} , más la probabilidad anual de fallecimiento de un casado de edad *x,* como casado, q_x^{cc} , más la probabilidad de que un casado de edad *x*, enviude entre las edades *x* y *x+1*, v_x , debe de ser igual a la unidad.

$$p_x^{cc} + q_x^{cc} + v_x = 1.$$

De este modo podremos expresar la función de supervivencia de un individuo casado de edad *x+1* como sigue,

$$l_{x+1}^{c} = l_x^{c} \cdot p_x^{cc} = l_x^{c}\left(1 - q_x^{cc} - v_x\right)$$

Es decir, el número de supervivientes casados a la edad *x+1*, l_{x+1}^{c}, se puede calcular como el producto del número de supervivientes casados a la edad *x*, l_x^{c}, por la probabilidad anual de supervivencia de un individuo casado de edad x como casado, p_x^{cc}. O como indica el último miembro de la igualdad, multiplicando el número de casados a la edad *x*, l_x^{c}, por la probabilidad complementaria a la probabilidad de que un casado de edad *x* sobreviva como casado a la edad *x+1*, p_x^{cc} (es decir, la unidad menos la probabilidad anual de que un casado de edad *x* fallezca como casado, q_x^{cc} menos la probabilidad de que un casado de edad *x*, enviude, v_x).

ii. Contingencia de viudedad.

En lo que a la contingencia de viudedad respecta, se presentan dos posibles situaciones:

- El individuo casado de edad *x* puede enviudar y continuar vivo al final del periodo, l_{x+1}^{cv}.
- El individuo casado puede enviudar y fallecer como viudo antes de cumplir la edad *x+1*, d_x^{cv}.

Dicho esto, la expresión de la probabilidad anual de enviudar de un casado de edad *x*, viene dada por:

$$v_x = \frac{W_x}{l_x^{c}} = \frac{l_{x+1}^{cv}}{l_x^{c}} + \frac{d_x^{cv}}{l_x^{c}} = p_x^{cv} + q_x^{cv}$$

Donde,

- $p_x^{cv} = \dfrac{l_{x+1}^{cv}}{l_x^{c}}$: es la probabilidad anual de supervivencia de un casado de edad *x* que enviuda durante el periodo, la cual se calcula como el cociente entre el colectivo de supervivientes viudos a la edad *x+1* que estaban casados a la edad *x*, l_{x+1}^{cv}, y el colectivo de supervivientes casados a la edad *x*, l_x^{c}.
- $q_x^{cv} = \dfrac{d_x^{cv}}{l_x^{c}}$: es la probabilidad anual de fallecimiento de un casado de edad *x* que ha enviudado antes del fallecimiento. Se calcula como el cociente entre el número de

individuos casados a la edad *x*, que han enviudado durante el periodo, y al final del mismo han fallecido, d_x^{cv}, y el colectivo de supervivientes casados a la edad *x*, l_x^c.

Se demuestra por tanto que la probabilidad de enviudar de un casado de edad *x*, es la suma de la probabilidad de supervivencia de un casado de edad *x* que enviuda durante el periodo, p_x^{cv}, y la probabilidad de fallecimiento de un casado de edad *x*, que enviuda antes de fallecer, q_x^{cv}:

$$v_x = p_x^{cv} + q_x^{cv}.$$

Llegados a este punto, podemos definir la probabilidad de supervivencia de un casado de edad *x*, p_x^c, como la probabilidad de que dicho individuo de edad *x* llegue vivo a la edad *x+1*, tanto casado como viudo. Definimos esta probabilidad como la suma de las dos probabilidades obtenidas anteriormente:

$$p_x^c = p_x^{cc} + p_x^{cv}.$$

Además, la probabilidad de fallecimiento de un casado de edad *x*, es la probabilidad de que dicho individuo fallezca antes de cumplir la edad *x+1*, estando casado o viudo. Dicha probabilidad es la suma de otras dos probabilidades también conocidas:

$$q_x^c = q_x^{cc} + q_x^{cv}$$

Consecuentemente, la suma de ambas probabilidades debe ser uno,

$$p_x^c + q_x^c = 1.$$

La demostración de la relación obtenida es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&1 = p_x^c + q_x^c = p_x^{cc} + p_x^{cv} + q_x^{cc} + q_x^{cv} \\
&p_x^{cc} = 1 - q_x^{cc} - v_x \\
&v_x = p_x^{cv} + q_x^{cv} \\
&p_x^c + q_x^c = 1 - q_x^{cc} - p_x^{cv} - q_x^{cv} + p_x^{cv} + q_x^{cc} + q_x^{cv} = 1
\end{aligned}$$

Resumiendo, las principales relaciones obtenidas para un individuo de edad *x*, son las siguientes:

1) $p_x^{cc} + q_x^{cc} + v_x = 1$
2) $v_x = p_x^{cv} + q_x^{cv}$
3) $p_x^c + q_x^c = 1$.

(B) El individuo está viudo a la edad inicial x.

En este apartado suponemos que el individuo se encuentra viudo a la edad *x*. En el transcurso de un periodo, al individuo se le pueden presentar dos situaciones diferentes:

- Puede continuar formando parte del colectivo de viudos al finalizar el periodo, esto es, a la edad *x+1*, l_{x+1}^{vv}.
- Puede fallecer durante el periodo considerado sin llegar a alcanzar la edad *x+1*, d_x^v.

Pasemos ahora a calcular las probabilidades de supervivencia de un individuo viudo de edad *x*. Para ello, partimos de la función cohorte de viudos a la edad *x+1*, que ya estaban viudos en *x*,

$$l_{x+1}^{vv} = l_x^v - d_x^v$$

Si dividimos dicha función por la función cohorte del colectivo de viudos a la edad *x*, obtenemos la probabilidad anual de supervivencia de un individuo viudo de edad *x*,

$$p_x^v = \frac{l_{x+1}^{vv}}{l_x^v} = \frac{l_x^v - d_x^v}{l_x^v} = 1 - \frac{d_x^v}{l_x^v} = 1 - q_x^v$$

De modo que hemos demostrado que $p_x^v = 1 - q_x^v$.

(C) Transición entre estados: casado en *x* y viudo en *x+1*.

El cálculo de probabilidades ha de incluir también las probabilidades de transición, que en nuestro modelo representan la probabilidad de que un individuo pase de estar casado a estar viudo durante el periodo de tiempo considerado. En esta situación establecemos dos hipótesis:

- La contingencia de viudedad sigue una distribución uniforme en el intervalo [*x, x+1*], (distribución uniforme de viudedad).
- Las personas que enviudan a lo largo de un periodo están sometidas a la misma probabilidad de fallecimiento que las que se encontraban viudas al comienzo del mismo.

La primera hipótesis contemplada supone considerar que los cambios de estado de casado a viudo se producen a mitad de año, de modo que cada uno de los individuos que enviudan a la edad *x*, W_x, sufre el riesgo de fallecer durante la restante mitad de año. El esquema temporal del proceso se ilustra en la figura 3.

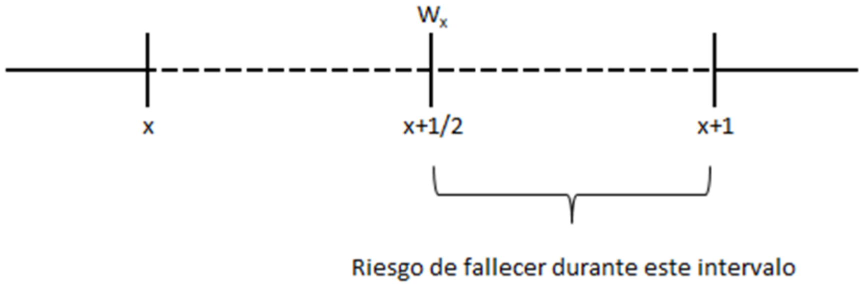

Figura 3. Esquema temporal de cambio de estado de casado a viudo. Fuente: elaboración propia.

A la vista del esquema temporal presentado queda claro que la función cohorte para los individuos que estando casados en *x* continúan vivos y viudos en *x+1*, vendrá determinada por la siguiente expresión:

$$l_{x+1}^{cv} = W_x \cdot {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{v}$$

Es decir, el número de individuos que estando casados en *x* continúan vivos y viudos en *x+1*, es igual al número de individuos que se ven afectados por la contingencia de viudedad a la edad *x+1/2*, por la probabilidad temporal ½ de supervivencia para un individuo viudo de edad *x+1/2*.

Siendo la probabilidad temporal de fallecimiento para el individuo viudo de edad *x+1/2* la complementaria correspondiente:

$${}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{2}}^{v} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{v}$$

La segunda hipótesis contemplada establece que el colectivo de personas que enviudan durante el periodo está sometido a la misma mortalidad que los individuos que ya eran viudos al comienzo del periodo. Además, si tenemos en cuenta que la contingencia de viudedad se produce a mitad de año, esto es, a la edad *x+1/2*, tenemos que para el resto del periodo hasta llegar a *x+1*, el colectivo de viudos no admitirá nuevas entradas y únicamente contemplará como causa de salida la muerte del individuo. En base a todo ello, la probabilidad temporal de supervivencia para el viudo será:

$${}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{2}}^{v} = \frac{l_{x+1}^{v}}{l_{x+\frac{1}{2}}^{v}}$$

Es decir, la probabilidad temporal de supervivencia de un individuo viudo de edad *x+1/2*, es igual al cociente entre la función cohorte de los individuos viudos a la edad *x+1* y la función cohorte de los individuos viudos a la edad *x+1/2*.

Resta ahora aproximar mediante interpolación lineal, el tamaño del colectivo de viudos a mitad de año mediante la relación:

$$l^v_{x+\frac{1}{2}} = l^v_x - \frac{1}{2} d^v_x = l^v_x - \frac{1}{2}\left(l^v_x - l^v_{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(l^v_x + l^v_{x+1}\right).$$

Por tanto, la función cohorte de viudos a mitad de año es igual a una media aritmética ponderada de l^v_x y l^v_{x+1}, con pesos igual a un medio,

$$l^v_{x+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}\left(l^v_x + l^v_{x+1}\right)$$

Calculemos ahora la probabilidad temporal de fallecimiento de un individuo viudo en *x+1/2*:

$${}_{\frac{1}{2}}q^v_{x+\frac{1}{2}} = \frac{l^v_{x+\frac{1}{2}} - l^v_{x+1}}{l^v_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{\left(l^v_x - \frac{1}{2} d^v_x\right) - \left(l^v_x - d^v_x\right)}{l^v_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} d^v_x}{l^v_{x+\frac{1}{2}}}$$

Y dividiendo numerador y denominador por la función cohorte del número de individuos viudos a la edad *x*, teniendo en cuenta la distribución uniforme para los fallecimientos, obtenemos:

$${}_{\frac{1}{2}}q^v_{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{d^v_x}{l^v_x}}{\frac{l^v_{x+\frac{1}{2}}}{l^v_x}} = \left\{ \frac{l^v_{x+\frac{1}{2}}}{l^v_x} = {}_{\frac{1}{2}}p^v_x = 1 - {}_{\frac{1}{2}}q^v_x = 1 - \frac{1}{2}q^v_x \right\} = \frac{\frac{1}{2}q^v_x}{1 - \frac{1}{2}q^v_x}.$$

La probabilidad temporal de supervivencia de un individuo viudo de edad *x+1/2* la podemos obtener como la complementaria de la probabilidad temporal de fallecimiento:

$${}_{\frac{1}{2}}p^v_{x+\frac{1}{2}} = 1 - {}_{\frac{1}{2}}q^v_{x+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}q^v_x}{1 - \frac{1}{2}q^v_x} = \frac{1 - q^v_x}{1 - \frac{1}{2}q^v_x}.$$

También podemos obtener el número de individuos casados de edad *x* que enviudan durante el transcurso del periodo, y fallecen como viudos antes de alcanzar la edad *x+1*:

$$d^{cv}_x = W_x \cdot {}_{\frac{1}{2}}q^v_{x+\frac{1}{2}}.$$

Dado que hemos asumido la hipótesis de distribución uniforme, suponemos que los individuos que han enviudado a la edad *x*, lo han hecho a mitad de año, y en caso de que les acaezca la contingencia de muerte, fallecerán durante la mitad restante de año. Es por esto, por lo que multiplicamos el número de casados que han enviudado a la edad *x*, por la probabilidad temporal de fallecer de un viudo de edad *x+1/2*.

3. Cálculo actuarial del coste por pensiones de jubilación y viudedad

Con la finalidad de utilizar el modelo actuarial de múltiples estados desarrollado en la obtención del coste esperado por pensiones concurrentes de jubilación y viudedad, obtendremos en primer lugar las probabilidades del modelo mediante cadenas de Markov no homogéneas en tiempo discreto.

Recordemos que nuestro colectivo de personas está formado por dos subgrupos, los individuos casados y los individuos viudos a una determinada edad. Tenemos en cuenta aquellos individuos con edades comprendidas desde los 65 años en adelante, que se encuentran percibiendo la correspondiente pensión de jubilación, procedente de las pensiones contributivas del Sistema de Seguridad Social. Además, aquellos que estén viudos, estarán siendo beneficiarios también, de la pensión contributiva de viudedad que les haya sido reconocida por fallecimiento del cónyuge.

Pasemos a establecer las bases para definir las cadenas de Markov en tiempo discreto que utilizaremos en el desarrollo.

Sea el proceso $\{S(y); y = x, x+1, ...\}$ una cadena de Markov no homogénea discreta, donde *x* es la edad ordinaria de jubilación. Los estados que aquí se contemplan son tres:

c = casado

v = viudo

d = fallecido.

A continuación se presentan las probabilidades de transición en un paso (en nuestro caso, un paso se interpreta como un periodo anual) desde el estado *i* al estado *j* en el instante *y+1*.

- Consideraremos la probabilidad anual de que un individuo de edad *y* casado sobreviva como casado a la edad *y+1* (probabilidad de que sobreviva sin cambiar de estado):

  $$p_y^{cc} = \Pr\{S(y+1) = c \mid S(y) = c\}.$$

  Es decir, la probabilidad anual de supervivencia de un casado de edad *y* como casado, es la probabilidad condicionada de que el individuo sobreviva como casado a la edad *y+1*.

- Probabilidad temporal un año de que un individuo casado a la edad *y* pase a estar viudo a la edad *y+1*, es decir, probabilidad de supervivencia de un casado de edad *y* que enviuda durante el periodo (probabilidad de cambio de estado casado-viudo o probabilidad de transición de casado a viudo y supervivencia):

  $$p_y^{cv} = \Pr\{S(y+1) = v \mid S(y) = c\}.$$

  Es decir, probabilidad de que habiendo sobrevivido a la edad *y* como casado, sobreviva a la edad *y+1* como viudo.

- Probabilidad de que un individuo viudo a la edad *y*, continúe como viudo a la edad *y+1* (es decir, sobreviva en el mismo estado).

$$p_y^{vv} = \Pr\left\{S\left(y+1\right) = v \mid S\left(y\right) = v\right\}.$$

  Por tanto, probabilidad condicionada de que el individuo sobreviva como viudo a la edad *y+1*, si ha sobrevivido como viudo a la edad *y*.

- Probabilidad de fallecimiento de un individuo casado de edad *y*.

$$q_y^{c} = \Pr\left\{S\left(y+1\right) = d \mid S\left(y\right) = c\right\},$$

  es decir, probabilidad condicionada de que un individuo que está casado en la edad *y* fallezca antes de llegar a la edad *y+1*. Como hemos visto anteriormente, esta probabilidad recoge la posibilidad de que fallezca como casado habiendo estado casado en *y*, o la probabilidad de que fallezca como viudo habiendo estado casado en *y*, es decir, $q_x^{c} = q_x^{cc} + q_x^{cv}$.

- Probabilidad de fallecimiento de un viudo de edad *y*.

$$q_y^{v} = \Pr\left\{S\left(y+1\right) = d \mid S\left(y\right) = v\right\},$$

  es decir, probabilidad condicionada de que un individuo viudo en la edad *y* fallezca antes de alzar la edad *y+1*.

La **matriz de probabilidades anuales de transición** del proceso se ilustra en la figura 4 (matriz triangular superior).

	c	**v**	**d**
c	p^{cc}_y	p^{cv}_y	q^{c}_y
v	0	p^{vv}_y	q^{v}_y
d	0	0	1

Figura 4. Matriz de probabilidades anuales de transición. Fuente: elaboración propia.

Como hemos comentado anteriormente, en nuestro modelo no se considera la posible reversión de estado, es decir, una vez que el individuo ha quedado viudo, no volverá a estar casado. Es decir, en este caso, la probabilidad anual de que un individuo viudo en *y*, sobreviva a la edad *y+1* como casado, y la probabilidad anual de que un individuo viudo en *y*, fallezca como casado antes de alcanzar la edad *y+1* son cero:

- $p_y^{vc} = \Pr\left\{S(y+1) = c \mid S(y) = v\right\} = 0$
- $q_x^{vc} = 0$.

3.1 Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

De manera genérica obtendremos las probabilidades de transición para periodos superiores al anual, *h* (es decir para *h = 1, 2, 3, … años)*.

Antes de pasar a demostrar las relaciones que nos llevan a la obtención de las probabilidades de transición, recordemos la propiedad de escindibilidad que se demuestra para la probabilidad de supervivencia, y que vamos a utilizar en nuestros desarrollos. Para cualesquiera *k* y *h* (periodos no necesariamente enteros) con *k* < *h*, se demuestra la propiedad de escindibilidad como:

$$_h p_x = {_k p_x} \cdot {_{h-k} p_{x+k}},$$

es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x esté vivo en *x+h* es igual a la probabilidad de que dicho individuo esté vivo en *x+k* multiplicado por la probabilidad de estando vivo en *x+k* llegue vivo a *x+h*.

Dicho esto, las probabilidades temporales de cambio de estado necesarias para definir nuestro proceso son:

- **Probabilidad temporal de supervivencia de un individuo casado de edad *y* como casado**

  $$_h p_y^{cc} = {_{h-1} p_y^{cc}} \, p_{y+h-1}^{cc}.$$

  Es decir, la probabilidad de que un individuo casado de edad *y,* alcance la edad *y+h* sin perder la condición de casado, $_h p_y^{cc}$, se calcula como el producto de la probabilidad temporal de que habiendo sobrevivido como casado a la edad *y*, el individuo sobreviva sin perder la condición de casado a la edad *y+h-1*, $_{h-1} p_y^{cc}$, por la probabilidad anual de que el individuo sobreviva como casado a la edad *y+h-1* y llegue vivo, también casado, a la edad *y+h*, p_{y+h-1}^{cc}.

- **Probabilidad temporal de supervivencia de un individuo viudo de edad *y* como viudo**

  $$_h p_y^{vv} = {_{h-1} p_y^{vv}} \, p_{y+h-1}^{vv}.$$

  Por tanto, la probabilidad de que un individuo que haya sobrevivido como viudo a la edad *y*, llegue vivo sin cambiar de estado a la edad *y+h*, $_h p_y^{vv}$, se calcula como el producto de la probabilidad temporal de que un viudo de edad *y*, sobreviva a la edad *y+h-1,* sin perder la condición de viudedad, $_{h-1} p_y^{vv}$, por la probabilidad anual de supervivencia sin cambiar de estado de un individuo viudo de edad *y+h-1*, p_{y+h-1}^{vv}.

- **Probabilidad temporal de transición de casado a viudo en *h* años**

$$ {}_{h}p_{y}^{cv} = {}_{h-1}p_{y}^{cv}\, p_{y+h-1}^{vv} + {}_{h-1}p_{y}^{cc}\, p_{y+h-1}^{cv} = \sum_{r=1}^{h}\left({}_{h-r}p_{y}^{cc}\, p_{y+h-r}^{cv} \prod_{g=1}^{r-1} p_{y+h-r+g}^{vv} \right) $$

Donde $r = 1,2,...,h$ y $g = 1,2,...,r-1$.

Probabilidad que se calcula como la suma de dos productos. Por un lado, la probabilidad temporal de que un individuo casado de edad *y*, llegue vivo como viudo a la edad *y+h-1*, ${}_{h-1}p_{y}^{cv}$, por la probabilidad anual de supervivencia de un individuo viudo de edad *y+h-1* como viudo, p_{y+h-1}^{vv}. Por otro, la probabilidad temporal de que un individuo casado de edad *y* sobreviva como casado a la edad *y+h-1*, ${}_{h-1}p_{y}^{cc}$, por la probabilidad anual de supervivencia de un individuo casado de edad *y+h-1* como viudo, p_{y+h-1}^{cv}. De forma menos técnica, podemos decir que esta probabilidad se compone de dos sucesos excluyentes, esto es, que el individuo casado cambie de estado durante los *h-1* primeros años y sobreviva el año restante como viudo, o la probabilidad de que el individuo sobreviva como casado durante los *h-1* primeros años y cambie de estado y sobreviva como viudo en el último año.

En el último miembro de la igualdad, vemos que es posible calcular esta probabilidad temporal como un sumatorio, el cual tendrá tantos sumandos como largo sea nuestro horizonte temporal, *h*. Dicho sumatorio es la suma del producto de la probabilidad temporal de supervivencia, de que un individuo casado de edad *y*, llegue vivo y casado a la edad *y+h-r*, ${}_{h-r}p_{y}^{cc}$, por la probabilidad anual de supervivencia de un individuo casado de edad *y+h+r*, como viudo, p_{y+h-r}^{cv}, por el productorio de las probabilidades anuales de superviviencia de un individuo viudo de edad *y+h-r+g,* $\prod_{g=1}^{r-1} p_{y+h-r+g}^{vv}$.

Esta última probabilidad será la utilizada en el cálculo de la concurrencia de pensiones, esto es, la probabilidad de que un individuo cobre simultáneamente las pensiones de jubilación y viudedad.

A continuación, demostraremos la primera igualdad de la relación expuesta:

$$ {}_{h}p_{y}^{cv} = {}_{h-1}p_{y}^{cc}\, p_{y+h-1}^{cv} + {}_{h-1}p_{y}^{cv}\, p_{y+h-1}^{vv} $$

$$ {}_{h}p_{y}^{cv} = p_{y}^{cv} + \left(p_{y}^{cc}\, p_{y+1}^{cv} + p_{y}^{cv}\, p_{y+1}^{vv} \right) + \left({}_{2}p_{y}^{cc}\, p_{y+2}^{cv} + p_{y}^{cc}\, {}_{2}p_{y+1}^{cv} + p_{y}^{cv}\, {}_{2}p_{y+1}^{vv} \right) + $$

$$ + \left({}_{3}p_{y}^{cc}\, p_{y+3}^{cv} + {}_{2}p_{y}^{cc}\, {}_{2}p_{y+2}^{cv} + p_{y}^{cc}\, {}_{3}p_{y+1}^{cv} + p_{y}^{cv}\, {}_{3}p_{y+1}^{vv} \right) + ... = \sum_{h=1}^{\omega} {}_{h}p_{y}^{cv} $$

De esta forma, la probabilidad de que un individuo casado de edad *y*, sobreviva como viudo a la edad *y+h*, se calculará como la suma de las probabilidades temporales de supervivencia, donde *h* indica la temporalidad y se define desde 1 hasta el infinito actuarial, ω. Esta probabilidad puede ser generalizada, desagregándola en todas las posibles relaciones según los valores que tome *h*. Dicho esto, cuando *h* sea igual a un año, la probabilidad anual de cambio de estado será igual a , p_y^{cv}. Cuando *h* tome el valor de dos periodos, la probabilidad de que un individuo casado de edad *y*, sobreviva a la edad *y+2* en la condición de viudo, ${}_2 p_y^{cv}$, es igual a suma productos de probabilidades, es decir, la probabilidad de que sobreviva como casado el primer año, p_y^{cc}, por la probabilidad de que estando casado a la edad *y+1*, sobreviva como viudo a la edad *y+2*, p_{y+1}^{cv}, más la probabilidad de que estando casado a la edad *y*, llegue vivo a la edad *y+1,* habiendo pasado a la condición de viudo, p_y^{cv}, por la probabilidad de que estando viudo a la edad *y+*1, sobreviva un año más como viudo, p_{y+1}^{vv}. Y así sucesivamente para todos los posibles valores de *h*. De esta forma, calcularemos dicha probabilidad, según el individuo casado adquiera la condición de viudo en el primer año del estudio, o en alguno de los periodos sucesivos.

Demostramos a continuación la segunda igualdad de la relación:

$$ {}_h p_y^{cv} = \sum_{r=1}^{h} \left({}_{h-r} p_y^{cc}\, p_{y+h-r}^{cv} \prod_{g=1}^{r-1} p_{y+h-r+g}^{vv} \right) $$

$$ \cdot h = 1 \rightarrow p_y^{cv} = p_y^{cv} $$

$$ \cdot h = 2 \rightarrow \sum_{r=1}^{2} \left({}_{2-r} p_y^{cc}\, p_{y+2-r}^{cv} \prod_{g=1}^{r-1} p_{y+2-r+g}^{vv} \right) = p_y^{cc} \cdot p_{y+1}^{cv} + p_y^{cv} \cdot p_{y+1}^{vv} $$

$$ \cdot h = 3 \rightarrow \sum_{r=1}^{3} \left({}_{3-r} p_y^{cc}\, p_{y+3-r}^{cv} \prod_{g=1}^{r-1} p_{y+3-r+g}^{vv} \right) = {}_2 p_y^{cc} \cdot p_{y+2}^{cv} + p_y^{cc} \cdot p_{y+1}^{cv} \cdot p_{y+2}^{vv} + p_y^{cv} \cdot {}_2 p_{y+1}^{vv} $$

$$ \cdot h = 4 \rightarrow \sum_{r=1}^{4} \left({}_{4-r} p_y^{cc}\, p_{y+4-r}^{cv} \prod_{g=1}^{r-1} p_{y+4-r+g}^{vv} \right) = {}_3 p_y^{cc} \cdot p_{y+3}^{cv} + {}_2 p_y^{cc} \cdot p_{y+2}^{cv} \cdot p_{y+3}^{vv} + p_y^{cc} \cdot p_{y+1}^{cv} \cdot {}_2 p_{y+2}^{vv} + p_y^{cv} \cdot {}_3 p_{y+1}^{vv} $$

$$ \cdot h = 5 \rightarrow \sum_{r=1}^{5} \left({}_{5-r} p_y^{cc}\, p_{y+5-r}^{cv} \prod_{g=1}^{r-1} p_{y+5-r+g}^{vv} \right) = $$

$$ = {}_4 p_y^{cc} \cdot p_{y+4}^{cv} + {}_3 p_y^{cc} \cdot p_{y+3}^{cv} \cdot p_{y+4}^{vv} + {}_2 p_y^{cc} \cdot p_{y+2}^{cv} \cdot {}_2 p_{y+3}^{vv} + p_y^{cc} \cdot p_{y+1}^{cv} \cdot {}_3 p_{y+2}^{vv} + p_y^{cv} \cdot {}_4 p_{y+1}^{vv} $$

...

Esta segunda relación muestra que es posible calcular la probabilidad de cambio de estado como el sumatorio del producto de las probabilidades que reflejan la supervivencia del individuo según las posibles situaciones por las que puede pasar hasta llegar a sobrevivir en la condición de viudo.

3.2 Coste esperado del pago conjunto de pensiones de jubilación y viudedad

Sea *a* la pensión media de jubilación en su modalidad contributiva que percibe un individuo de edad *y*, y sea ***b*****,** la pensión media de viudedad que es susceptible de recibir el mismo individuo por la contingencia de fallecimiento del cónyuge. El coste total esperado por pluripensionista (C) [3] hasta el infinito actuarial se calcula obteniendo el valor actual actuarial de los costes por pensiones pospagables, esto es, llevadas al final de cada año natural, para un individuo de edad *y*, que puede estar o no viudo. El cálculo del valor actual actuarial del coste en pensiones está condicionado a que el individuo esté jubilado, es decir, a la supervivencia del individuo de edad *y* como jubilado.

$$C_j(0,\omega)=\sum_{h=1}^{\omega}\left[aq^{h-1}{}_h p_y^{cc} v^h+(a+b)q^{h-1}{}_h p_y^{cv} v^h\right]=$$
$$=\sum_{h=1}^{\omega}\left[aq^{h-1}{}_h p_y^{cc} v^h+(a+b)q^{h-1}\sum_{r=1}^{h}\left({}_{h-r} p_y^{cc}\, p_{y+h-r}^{cv}\prod_{g=1}^{r-1} p_{y+h-r+g}^{vv}\right)v^h\right]$$

Donde, como ya hemos explicado en el apartado metodológico, v^h es el factor de actualización financiero ($v=(1+i)^{-1}$), siendo *i*, el tipo de interés técnico o de actualización. Cabe recordar que las cuantías de las pensiones medias por jubilación y por viudedad, *a* y *b* no son rentas constantes, sino que evolucionarán anualmente según la revalorización establecida para las pensiones contributivas del sistema de la Seguridad Social, en la Ley de Presupuestos Generales del Estado del ejercicio correspondiente. Por tanto, los pagos por pensiones son rentas variables en progresión geométrica a razón *q* (porcentaje de revalorización establecido), inmediatas (su valoración coincide con el momento inicial de los pagos), vitalicias (su duración está ligada a la supervivencia del individuo beneficiario de la pensión), y pospagables (los términos vencen al final del periodo).

4. Conclusiones

En este trabajo se ha concluido el desarrollo metodológico a seguir para calcular las probabilidades de transición entre los estados civiles casado – viudo, fundamentales en la obtención del coste esperado asociado a concurrencia de pensiones contributivas de jubilación y viudedad. En el desarrollo correspondiente se contempla la posibilidad de que el individuo casado sobreviva desde la edad *x* (edad legal de jubilación) hasta su fallecimiento como casado, o que por el contrario enviude en algún momento de su jubilación y sobreviva como viudo, pasando por tanto a cobrar simultáneamente la pensión de jubilación y la de viudedad.

Para ello hemos calculado dos tipos de probabilidades. La probabilidad de que el individuo permanezca en los estados puros (partiendo del estado civil casado sobreviva como casado, o partiendo del estado de viudedad sobreviva como viudo), y las probabilidades de transición, es decir, que pase del estado civil casado al estado civil viudo. Estas probabilidades (anuales) se han obtenido mediante cadenas de Markov no homogéneas en tiempo discreto, y las

[3] Nótese que este cálculo contempla la probabilidad de que el pensionista pueda permanecer casado durante toda su jubilación, percibiendo por tanto sólo la pensión de jubilación y la probabilidad de que estando casado pueda enviudar en algún momento pasando a percibir las pensiones de jubilación y viudedad conjuntamente.

probabilidades temporales las hemos obtenido de manera genérica mediante las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov pertinentes.

Referencias

Albarran, I., Ayuso, M., Guillén, M. and Monteverde, M. (2006) “A multiple state model for disability using descomposition of death probabilities and cross-sectional data”. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 34: 9 – 10, 2063 – 2075, DOI: 10.1080/03610920500203752.

Artís, M., Ayuso. M., Guillén, M.y Monteverde, M. (2007). “Una estimación actuarial del coste individual de la dependencia en la población de mayor edad en España''. Estadística española. Vol. 49. 373-402.

Ayuso, M., Corrales, H., Guillén, M., Pérez-Marín, A.M. y Rojo, J.L. (2007). “Estadística actuarial vida”. Ediciones Universitat de Barcelona.

D’Amico, G. (2011) “Age-usage semi-Markov models”. Appplied Mathematical Modelling. 35: 4354-4366.

D’Amico, G., Guillén, M. and Manca, R. (2009) “Full backward non-homogeneous semi-Markov processes for disability insurance models: A Catalunya real data application”. Insurance Mathematics and Economics, 45: 173-179.

Ferraz Cordeiro, I.M. (2002) “A multiple state model for the analysis of permanent health insurance claims by cause of disability”. Insurance: Mathematics and Economics, 30:167-186.

Haberman, S. and Pitacco, E. (1999). “Actuarial Models for Disability Insurance''. Chaperman and Hall. London.

Janssen, J. and Manca, R. (2006) “Applied Semi-Markov Processes”. Springer.

Janssen, J. and Manca, R (2007) “Semi-Markov Risk Models for Finance, Insurance and Reliability”. Springer.

Lin, X. and Liu, X.S. (2007) “Markov aging process and phase-type law of mortality”. North American Actuarial Journal, 11:92-109.

Liu, X.S. and Lin, X. (2012) “A Subordinated Markov Model for Stochastic Mortality”. European Actuarial Journal, 2012(2):105-127.

Meira-Machado, L., De Uña-Álvarez, J., Cardaso-Suárez, C. and Andersen, P.K. (2009) “Multi-state models for the analysis of time-to-event data”. Statistical Methods in Medical Research, 18(2), 195-222.

Meira-Machado, L., De Uña-Álvarez, J. and Cardaso-Suárez (2006) “Nonparametric estimation of transition probabilities in a non-Markov illness–death model”. Lifetime Data Anal, 12:325–344.

Millimet, D., Nieswiadomy, M. and Slottje, D. (2010) "Detailed Estimation of Worklife Expectancy for the Measurement of Human Capital: Accounting for Marriage and Children". Journal of Economic Surveys, 24(2), 339-361.

Nurminen, M. (2012) "Working-life expectancy in Finland: trends and differentials 2000–2015. A multistate regression modeling approach". Finnish Centre for Pensions, Reports 03/2012

Pitacco, E. (2003) "Survival models in actuarial mathematics: from Halley to longevity risk", Quad. No. 2/2003 del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali, Università di Trieste.

Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. and Olivien, A. (2009) "Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business". Oxford University Press.

Shoen, R. and Land, K.C. (1979) "General Algorithm for Estimating a Markov-Generated Increment-Decrement Life Table with Applications to Marital-Status Patterns". Journal of the American Statistical Association, 74(368), 761-776.

Su, S. and Sherris, M. (2012) "Heterogeneity of Australian population mortality and implications for a viable life annuity market" Insurance: Mathematics and Economics, 51(2), 322-332.

Van der Hout, A., Ogurtsova, E., Gampe, J. and Matthews, F.E. (2014) "Investigating healthy life expectancy using a multi-state model in the presence of missing data and misclassification". Demographic Research, 30(42): 1219-1244.

Willekens,F. (2014) "Multistate Analysis of Life Histories with R". Springer.

Willekens,F., I. Shah, I., Shah, J.M. and Ramachandran, P. (1982) "Multi-state Analysis of Marital Status Life Tables: Theory and Application". Population Studies, 36(1), 129-144.

UB·Riskcenter Working Paper Series

List of Published Working Papers

[WP 2014/01]. Bolancé, C., Guillén, M. and Pitt, D. (2014) "Non-parametric models for univariate claim severity distributions – an approach using R", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-01.

[WP 2014/02]. Mari del Cristo, L. and Gómez-Puig, M. (2014) "Dollarization and the relationship between EMBI and fundamentals in Latin American countries", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-02.

[WP 2014/03]. Gómez-Puig, M. and Sosvilla-Rivero, S. (2014) "Causality and contagion in EMU sovereign debt markets", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-03.

[WP 2014/04]. Gómez-Puig, M., Sosvilla-Rivero, S. and Ramos-Herrera M.C. "An update on EMU sovereign yield spread drivers in time of crisis: A panel data analysis", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-04.

[WP 2014/05]. Alemany, R., Bolancé, C. and Guillén, M. (2014) "Accounting for severity of risk when pricing insurance products", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-05.

[WP 2014/06]. Guelman, L., Guillén, M. and Pérez-Marín, A.M. (2014) "Optimal personalized treatment rules for marketing interventions: A reviewof methods, a new proposal, and an insurance case study.", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-06.

[WP 2014/07]. Piulachs, X., Alemany, R. and Guillén, M. (2014) "A joint longitudinal and survival model with health care usage for insured elderly", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-07.

[WP 2014/08]. Abad, P and Chuliá, H. (2014) "European government bond market integration in turbulent times", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-08.

[WP 2014/09]. Belles-Sampera, J., Guillén, M. and Santolino, M. (2014) "The use of flexible quantile-based measures in risk assessment", UB Riskcenter Working Papers Series 2014-09.

[WP 2015/01]. Bolancé C., Guillén, M. and Padilla, A. (2015) "Estimación del riesgo mediante el ajuste de cópulas", UB Riskcenter Working Papers Series 2015-01.

[WP 2015/02]. Donnelly, C., Gerrard, R., Guillén, M. and Nielsen, J.P. (2015) "Less is more: increasing retirement gains by using an upside terminal wealth constrait", UB Riskcenter Working Papers Series 2015-02.

[WP 2015/03]. Chuliá, H., Guillén, G. and Uribe (2015) "Mortality and longevity risks in the United Kingdom: Dynamic factor models and copula-functions", UB Riskcenter Working Paper Series 2015-03.

[WP 2015/04]. Alaminos, E. and Ayuso, M. (2015) "Desarrollo metodológico del modelo actuarial de múltiples estados casado – viudo y cálculo actuarial del coste por pensiones de jubilación y viudedad", UB Riskcenter Working Paper Series 2015-04.