

PROGRAMA
Y
CUESTIONARIO
DE
ANÁLISIS MATEMÁTICO

(SEGUNDO CURSO)

SEGUIDOS EN LA

FACULTAD DE CIENCIAS

DE LA

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

POR EL CATEDRÁTICO NUMERARIO DE LA ASIGNATURA

D. Miguel Marzal y Bertomeu

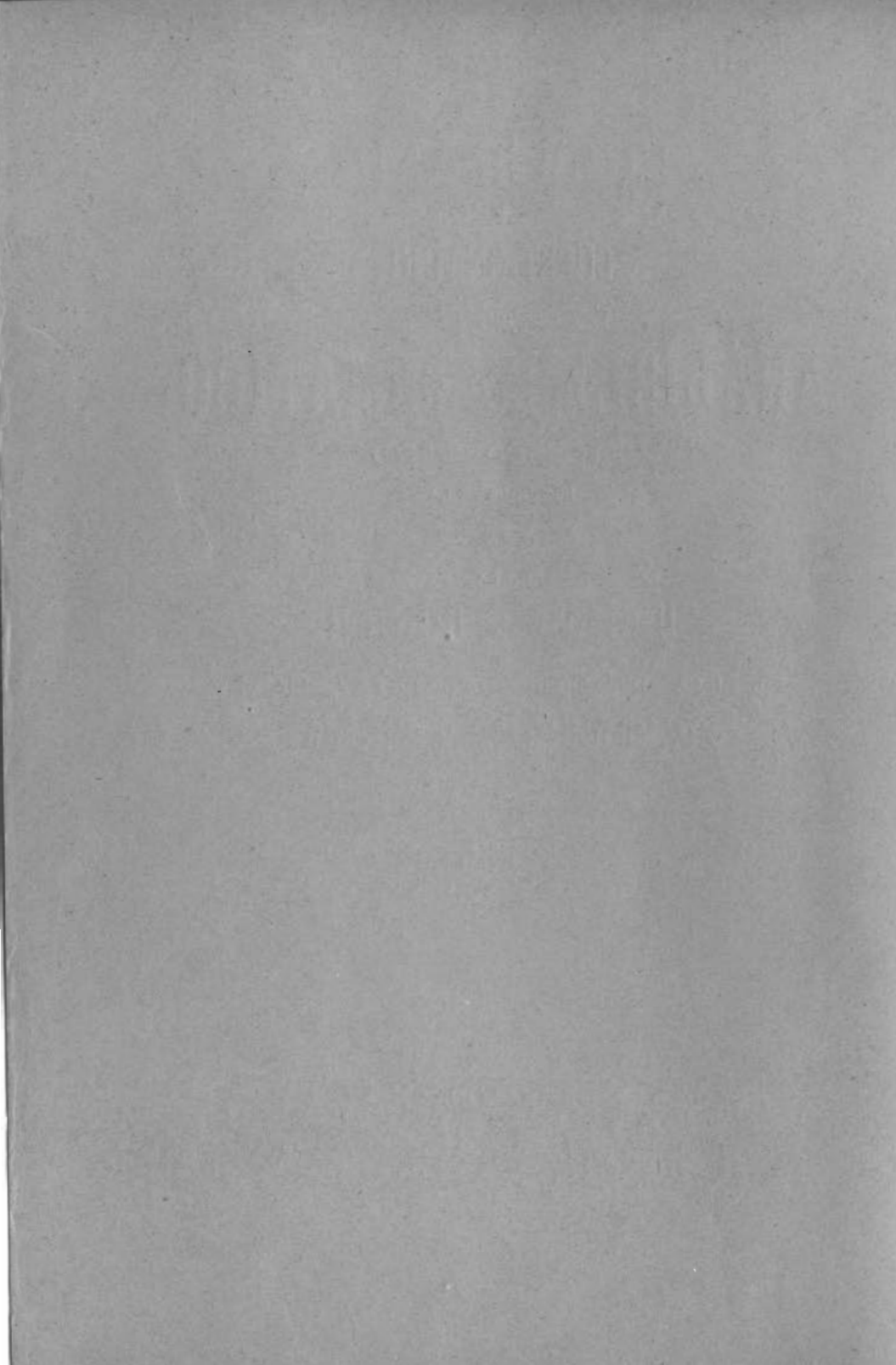


BARCELONA

TIPOGRAFÍA DE LA CASA PROVINCIAL DE CARIDAD

CALLE DE MONTEALEGRE, NÚM. 5

1898



PROGRAMA
Y
CUESTIONARIO
DE
ANÁLISIS MATEMÁTICO

(SEGUNDO CURSO)

SEGUIDOS EN LA
FACULTAD DE CIENCIAS

DE LA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

POR EL CATEDRÁTICO NUMERARIO DE LA ASIGNATURA

D. Miguel Marzal y Bertomeu



BARCELONA

—
TIPOGRAFÍA DE LA CASA PROVINCIAL DE CARIDAD

CALLE DE MONTEALEGRE, NÚM. 5

1898

R. D. de 30 Noviembre de 1877 creando la asignatura de Análisis matemático (1.º y 2.º curso)

ARTÍCULO PRIMERO. *La asignatura de Complemento de Álgebra, Geometría y Trigonometría de la Facultad de Ciencias de las Universidades de Madrid y Barcelona se dividirá en dos, con la denominación de Análisis matemático, primero y segundo curso.*

ART. 2.º *El primer curso comprenderá las teorías de la Aritmética no explicadas en la segunda enseñanza, el Álgebra elemental en toda su extensión y la Trigonometría rectilínea y esférica con el Análisis de las funciones circulares.*

ART. 3.º *Comprenderá el segundo curso el Álgebra superior, con la teoría general de ecuaciones y la introducción al estudio de las teorías modernas del Álgebra.*

PROGRAMA



INTRODUCCION

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

- LECCIÓN 1.^a—Importancia del concepto de continuidad en el Análisis. Estudio de la continuidad en las funciones elementales x^m , a^x , $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$. Continuidad de una función de función. Id. de una función compuesta. Id. de las funciones inversas: continuidad de $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cot} x$, $\operatorname{arc} \sec x$ y $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.
- 2.^a—Continuidad de la suma y del producto de un número finito de funciones continuas. Id. del cociente de dos funciones continuas. Id. de las potencias y raíces de índice entero y positivo de una función continua. Continuidad de las funciones reales de dos ó más variables, y de las imaginarias. Aplicación á la función algebráica racional y entera de una ó más variables, sean éstas reales ó imaginarias. Ejercicios.

Derivadas

- 3.^a—Relación entre las variaciones de una función continua y las de su variable: derivada: su significación analítica y geométrica. Expresión del incremento de una función mediante el incremento de su variable: continuidad de las funciones que tienen derivada finita: sentido de la variación de una función, según el signo de su derivada. Ejemplos.
- 4.^a—Procedimiento general para hallar la derivada de una función continua. Derivada de una constante. Derivada de una variable independiente. Id. del producto de ésta por una constante. Derivada de x^m : límite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando n crece indefinidamente: límite de $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando α tiende á cero: límite de $\frac{(1+h)^m - 1}{h}$ cuando h tiende á cero.

- 5.^a—Derivada de a^x , $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$: estudio de la variación de estas funciones por la consideración de sus derivadas: soluciones de continuidad de $\log x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$.
- 6.^a—Relación entre las derivadas de dos funciones inversas: hallar las derivadas de las funciones circulares inversas $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cot} x$, $\operatorname{arc} \sec x$ y $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$: discusión relativa á los signos de ambigüedad de las derivadas de $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \sec x$ y $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$.
- 7.^a—Derivada de la suma y del producto de un número finito de funciones de la misma variable. Derivada del cociente de dos funciones. Derivada de las potencias y raíces de una función. Ejercicios.
- 8.^a—Derivadas de las funciones de funciones: ejemplos. Derivadas de las funciones de dos ó más variables: notación de las derivadas parciales. Teorema de Euler sobre las funciones homogéneas: modo de hacerlo extensivo á las no homogéneas. Derivadas de las funciones compuestas. Id. de las implícitas. Ejemplos y ejercicios.
- 9.^a—Derivadas de diversos órdenes de las funciones de una sola variable: su notación. Significación geométrica de la derivada segunda: concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la curva que representa á la función. Derivadas sucesivas de las funciones simples: expresiones generales de la derivada n^{ma} de x^m , a^x , $\log x$, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
- 10.—Fórmula de Taylor para las funciones algébricas enteras de una sola variable: fórmula de Mac-Laurin; cálculo abreviado de los coeficientes de la transformada de una función cuando se da á su variable un cierto incremento. Ejercicios.
- 11.—Derivadas de diversos órdenes de las funciones de dos ó más variables: demostrar que la derivación es una operación conmutativa. Derivadas sucesivas de las funciones compuestas y de las implícitas. Extensión del teorema de Taylor á las funciones algébricas enteras de dos ó más variables. Ejemplos.

SERIES Y PRODUCTOS INFINITOS

- 12.—Concepto de la serie infinita: su importancia en el Análisis. Término general, suma y resto de una serie: su notación. Clasificación de las series: condiciones generales de convergencia, divergencia y oscilación. Ejemplos.
- 13.—Series de términos reales y positivos: caracteres de convergencia fundados en la comparación de dos series, en el valor de $\lim. nu_n$ y en los de $u_n : u_{n-1}$ y $\sqrt[n]{u_n}$. Demostrar que $\lim. (u_n : u_{n-1}) = \lim. \sqrt[n]{u_n}$. Criterios de convergencia para el caso en que este límite es igual á la unidad. Ejemplos y ejercicios.
- 14.—Serie de términos reales, positivos y negativos: criterio general de convergencia fundado en el cambio de signo de

- los términos negativos: aplicación de los teoremas demostrados para series de términos reales y positivos. Convergencia de las series de términos constantemente decrecientes y con signos alternados: caso en que $\lim. u_n \neq 0$. Ejemplos y ejercicios.
- 15.—Estudio de las leyes asociativa y conmutativa en las series de términos reales: caracteres peculiares de las series absolutamente convergentes y de las condicionalmente convergentes ó semi-convergentes. Ejemplos y ejercicios.
 - 16.—Operaciones con las series de términos reales: su objeto. Teorema de Abel relativo á las series cuyos términos se multiplican por factores positivos que decrecen constantemente: consecuencias de este teorema. Producto de una serie por un número: resultado de multiplicar dos términos de una serie por números diversos que no crezcan indefinidamente. Suma y producto ordenado de dos ó más series. Ejercicios.
 - 17.—Series imaginarias: sus clases. Condición necesaria y suficiente para que una serie imaginaria sea absolutamente convergente: generalización de los teoremas demostrados para series de términos reales. Ejercicios.
 - 18.—Series cuyos términos son funciones de una ó más variables: su campo de convergencia. Series uniformemente convergentes: su continuidad. Caracteres principales de convergencia de las series ordenadas según las potencias ascendentes, de exponente entero y positivo, de una variable: continuidad de las mismas dentro de su círculo de convergencia. Ejemplos.
 - 19.—Productos infinitos: su notación y clasificación. Principales caracteres de convergencia, divergencia ú oscilación de productos infinitos de factores reales. Teoremas relativos á los productos de factores imaginarios. Criterios de convergencia y continuidad de productos cuyos factores son funciones de una ó más variables. Ejemplos y ejercicios.
 - 20.—Sumación de series de evaluación de productos infinitos: su objeto. Término sumatorio de una serie: sus relaciones con el término general. Ejemplos de sumación de series particulares. Evaluación aproximada de series y productos infinitos: limitación del resto. Procedimiento de Hutton para aumentar la convergencia de una serie. Empleo legítimo de series y productos divergentes. Ejemplos y ejercicios.
 - 21.—Consideraciones generales sobre el desarrollo de una función en serie ordenada según las potencias ascendentes, de exponente entero y positivo, de una variable. Desarrollo por división: series recurrentes: escala de estas series. Método de los coeficientes indeterminados: sus fundamentos. Retorno de una serie. Ejemplos.
 - 22.—Series de Taylor y Mac-Laurin: investigación de su resto ó término complementario bajo las formas dadas por Schlömilch, Lagrange y Cauchy. Casos en que las series anteriores no pueden aplicarse al desarrollo de una función. Ejemplos.
 - 23.—Aplicación de la serie de Taylor á la investigación de los má-

máximos y mínimos de las funciones. Determinación de los valores de la variable que convierten á la función en un máximo ó en un mínimo: extensión del procedimiento á las funciones implícitas de una sola variable y á las explícitas é implícitas de dos ó más variables. Ejemplos.

- 24.—**Determinación del verdadero valor** de una función que se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$: regla general: sus fundamentos. Evaluación de funciones que se reducen á la forma $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 ó 1^∞ . Ejemplos.
- 25.—**Serie exponencial:** su campo de convergencia. Demostrar que su límite es el mismo de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ cuando n crece indefinidamente. Sumación de la serie exponencial cuando su variable es real: irracionalidad de e . Significación de e^x cuando x es imaginaria: potencias de exponente imaginario. Ejercicios.
- 26.—Demostrar que $\cos x \pm i \operatorname{sen} x = e^{\pm ix}$: fórmulas que se deducen de esta relación: series del seno y coseno. Funciones circulares de arco imaginario: su significación. Generalización de algunas fórmulas trigonométricas. Funciones circulares hiperbólicas: relaciones entre ellas. Ejercicios.
- 27.—Periodicidad de e^x , $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Expresión abreviada de un número mediante su módulo y argumento. Cálculo de potencias, raíces y logaritmos de números complejos. Dada una línea trigonométrica de valor complejo, hallar la expresión general de su arco. Ejercicios.
- 28.—Investigación de las raíces de la unidad positiva. Idem de la negativa. Discusión de las fórmulas generales. Valores de la raíz n^{ma} de un número: manera de obtenerlos: resolución de la ecuación binomia. Investigación de las raíces de la ecuación trinomia: formas trigonométricas de esta ecuación. Ejercicios.
- 29.—Propiedades principales de las raíces de la unidad: raíces propias de un cierto grado. Raíces comunes á dos ó más grados. Potencias sucesivas de una raíz propia: teoremas que á ellas se refieren. Resultado de multiplicar raíces propias de grados primos entre sí. Aplicación de estas propiedades á la determinación abreviada de las raíces de un número. Ejercicios.
- 30.—Observaciones sobre el **cálculo de radicales algébricos.** Examen de las reglas aritméticas de multiplicación y división de radicales de un mismo índice. Id. de las que se refieren á la potenciación y radicación de un radical y á la multiplicación y división de radicales de distinto índice. Interpretación de algunos resultados de operaciones con cantidades irracionales. Ejercicios.
- 31.—**Serie binómica:** su círculo de convergencia. Generalización de la fórmula de binomio de Newton: aplicación de la serie binómica al cálculo de raíces. Ejercicios.
- 32.—**Serie logarítmica:** su campo de convergencia: su límite ó suma. Series que de ella pueden deducirse: su aplicación al cál-

culo de logaritmos. Serie de un arco en función de su tangente: valor de π . Ejercicios.

FRACCIONES CONTINUAS

- 33.**—Definiciones. Formas ordinaria y general de las fracciones continuas: ecuaciones que las originan. Transformación de una fracción ordinaria en continua: su regla. Procedimiento para convertir en fracción continua una cantidad incommensurable: ejemplos. Ley recurrente de formación de reducidas. Cálculo directo de reducidas por medio de las continuantes de Muir. Ejercicios.
- 34.**—Relación fundamental entre los términos de dos reducidas consecutivas: sus consecuencias inmediatas. Convergencia de las reducidas: límite superior del error que se comete al tomar el valor de una reducida por el de la fracción continua. Demostrar que toda reducida se aproxima más á la fracción continua que cualquier fracción de menores términos.
- 35.**—Fracciones convergentes intermedias: expresión general de las comprendidas entre dos reducidas consecutivas de orden par ó de orden impar: propiedades de dichas fracciones. Hallar la fracción de denominador no mayor que D que más se aproxime por defecto ó por exceso á una cantidad dada. Ejemplos y ejercicios.
- 36.**—Transformación de una fracción continua en serie: convergencia de ésta. Teorema de Lejeune-Dirichlet acerca de la existencia de infinidad de fracciones que difieren de una cantidad incommensurable en menos de la unidad dividida por el cuadrado de su denominador. Resolución de la ecuación de primer grado con dos incógnitas por medio de las fracciones continuas. Id. de la ecuación exponencial $a^x = b$. Ejemplos.
- 37.**—Fracciones continuas periódicas. Desarrollo de las irracionales de segundo grado en fracciones continuas: periodicidad de estas fracciones. Demostrar que toda fracción continua periódica es equivalente á una raíz de una ecuación de segundo grado. Ejercicios.

TEORIA GENERAL DE ECUACIONES

- 38.**—Preliminares. Estudio de la variación de la función algébrica entera de una variable: interpretación de un cambio de signo. Investigación de los límites superior é inferior de los módulos de las raíces de una ecuación algébrica entera. Ejercicios.
- 39.**—Teorema de Cauchy relativo al número de raíces de una ecuación contenidas en el interior de un contorno dado: consecuencias de este teorema. Teorema de Gauss: su demostración.
- 40.**—Transformación de una función algébrica entera en producto de factores lineales: relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación. Propiedad de las raíces imaginarias de una ecuación de coeficientes reales. Determinación de las raíces comunes á dos ecuaciones. Ejercicios.

- 41.—Propiedad del máximo común divisor de una función entera y su derivada: procedimiento general para hallar los productos de factores lineales que figuran en una función entera con los mismos exponentes: investigación de raíces múltiples.
- 42.—Funciones simétricas de las raíces de una ecuación algébrica: su clasificación. Expresión de las simples en función de los coeficientes de la ecuación, y de éstos en función de aquéllas. Cálculo de las múltiples en función de las simples: aplicación á la ecuación binomia.
- 43.—Expresar una función simétrica y racional de las raíces de una ecuación por medio de los coeficientes. Suma de los valores que adquiere un función racional y entera de una variable cuando se reemplaza ésta por cada una de las raíces de una ecuación dada: caso en que la función tenga dos ó más variables. Ejemplos.
- 44.—Grado y peso de la función de los coeficientes en que se transforma una función simétrica de las raíces de una ecuación: aplicaciones. Cálculo de una función racional no simétrica de las raíces de una ecuación. Ejercicios.
- 45.—Ecuaciones simultáneas: eliminación. Resultante de dos ecuaciones con una sola incógnita; su determinación por medio de las funciones simétricas: su homogeneidad, grado y peso respecto á los coeficientes de ambas ecuaciones. Ejemplos.
- 46.—Carácter de la resultante cuando los coeficientes son cualesquiera é independientes entre sí: legitimidad de la obtenida por eliminación de la incógnita entre ambas ecuaciones. Método de Bezout: su aplicación á dos ecuaciones del mismo ó de diferente grado.
- 47.—Estudio de la resultante bezoutiana: reglas prácticas para formarla. Método de Cayley: sus fundamentos. Métodos de Euler y de Sylvester. Investigación de la resultante por medio del m. c. d. Ejemplos.
- 48.—Ecuación final de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Investigación de esta ecuación en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: caso en que estas ecuaciones contengan algún factor común dependiente de una ó de las dos incógnitas. Grado de la ecuación final: su determinación en casos particulares. Ejemplos.
- 49.—Método de Bezout para la resolución de un sistema de dos ecuaciones de cualquier grado con dos incógnitas: bezoutianas secundarias. Número de soluciones del sistema. Resolución de un sistema de tres ó más ecuaciones con otras tantas incógnitas: método de Poisson. Ejemplos.
- 50.—Transformación de ecuaciones: su objeto. Transformaciones más sencillas á que puede reducirse una racional. Reglas para hallar la transformada cuyas raíces tengan una diferencia dada con las de la primitiva. Caso en que sea dada la razón entre dichas raíces ó han de ser éstas recíprocas: transformada en $-x$. Ejemplos.
- 51.—Reglas para transformar una ecuación en otra que carezca de uno ó más términos. Cálculo de la ecuación de las diferencias de

las raíces: su grado. Id. de la ecuación de los cuadrados de dichas diferencias. Ejemplos.

- 52.—Procedimiento general para formar una ecuación cuyas raíces sean los valores conjugados de una función irracional. Ejemplos. Formar una ecuación cuyas raíces sean potencias determinadas de las de otra dada: fundamentos del método de Gräffe para determinar los módulos de las raíces.
- 53.—Condición para que una ecuación pueda disminuir de grado. Reducir el de una ecuación cuyas raíces son dos á dos iguales y opuestas. Caracteres de las ecuaciones recíprocas: reducción de su grado: aplicación á la ecuación binomia en algunos casos.

Resolución de las ecuaciones numéricas

- 54.—Preliminares: Investigación de los límites de las raíces reales de una ecuación procedimiento directo y su regla: ejemplos. Método de Newton: sus fundamentos. Ejercicios.
- 55.—Paridad del número de raíces reales comprendidas entre dos límites dados: consecuencias inmediatas. Lema en que se apoya el Teorema de Descartes: enunciado y demostración de este teorema: consecuencias del mismo. Ejemplos.
- 56.—Teorema de Budan-Fourier: su demostración. Límite inferior del número de raíces imaginarias. Observaciones relativas al teorema anterior. Ejemplos.
- 57.—Teorema de Rolle: sus consecuencias inmediatas: ejemplos. Determinación del número de raíces reales de una ecuación trinomia con auxilio del teorema de Rolle.
- 58.—Teorema de Sturm: observaciones relativas á las funciones de Sturm. Aplicación de dicho teorema á las ecuaciones que tengan raíces múltiples. Determinación del número de raíces reales de una ecuación. Ejemplos.
- 59.—Condiciones para que una ecuación tenga todas sus raíces reales y desiguales. Funciones que pueden reemplazar á las de Sturm: sus caracteres. Ejemplos.
- 60.—Separación de raíces. Procedimiento directo para separar las raíces reales: empleo de la ecuación de los cuadrados de las diferencias: observación de Cauchy. Separación de raíces por el método de Sturm. Ejemplos. Separación de raíces imaginarias.
- 61.—Carácter de las raíces conmensurables de una ecuación cuyos coeficientes son enteros, siendo el primero la unidad. Investigación de estas raíces en una ecuación de coeficientes racionales. Caracteres para reconocer si un número entero es raíz de una ecuación de coeficientes enteros. Ejemplos.
- 62.—Aproximación de raíces inconmensurables. Método de Newton: observaciones. Métodos de Lagrange y de Horner. Ejemplos.
- 63.—Método de Gräffe. Teorema fundamental relativo al fraccionamiento de la ecuación: observaciones.
- 64.—Transformación de una ecuación en otra cuyas raíces sean los cuadrados cambiados de signo de las raíces de la primera:

- su regla. Número de transformadas necesarias para separar dos raíces consecutivas. Manera de reconocer si dos raíces consecutivas está separadas. Método general para la resolución numérica completa de una ecuación algébrica cualquiera.
- 65.—Práctica del método de Gräffe. Caracteres para reconocer la naturaleza de las raíces de una ecuación algébrica de coeficientes reales: caso en que las raíces son todas reales y desiguales. Caso en que la ecuación tenga dos ó más raíces reales de igual valor absoluto. Ejemplos.
- 66.—Carácter distintivo de las raíces imaginarias en las ecuaciones algébricas de coeficientes reales: manera de calcular dichas raíces. Ejemplos.
- 67.—Resolución de ecuaciones algébricas de coeficientes imaginarios: ejemplos. Corrección de los valores aproximados de las raíces obtenidas por el método de Gräffe. Ejemplos y observaciones.
- 68.—Resolución de ecuaciones trascendentes. Casos en que las ecuaciones de esta clase pueden reducirse á la forma algébrica. Resolución de sistemas de ecuaciones trascendentes. Ejemplos de ecuaciones de esta clase que no pueden transformarse en algébricas. Resolución de las ecuaciones numéricas, algébricas ó trascendentes por el método de interpolación por partes proporcionales. Ejemplos.
- 69.—Determinación de una función entera por valores particulares de la misma: condiciones para que el problema sea determinado. Hallar la función entera del grado n^{mo} de una sola variable conociendo $n+1$ valores de dicha función correspondientes á otros tantos de la variable: fórmula de Lagrange: caso en que la función sea de dos ó más variables. Ejemplos.
- 70.—Descomposición de una fracción algébrica en fracciones parciales. Fórmula general de la descomposición: demostrar que ésta es única. Regla para calcular el numerador de la fracción parcial correspondiente á una raíz real simple. Ejemplos.
- 71.—Cálculo de los numeradores relativos á las potencias sucesivas de una raíz real múltiple: observaciones. Determinación de las constantes que entran en los numeradores de las fracciones parciales correspondientes á las raíces imaginarias simples y múltiples. Ejemplos.

Resolución algébrica de las ecuaciones

- 72.—Preliminares. Resolución de la ecuación de 3.^{er} grado: formación de la reducida ó resolvente por el método de Hudde: fórmula cardánica. Discusión de la ecuación de 3.^{er} grado de coeficientes reales: caso irreducible. Resolución trigonométrica de la ecuación de 3.^{er} grado. Procedimientos de Lagrange, Tschirnhaus y Euler. Ejemplos y ejercicios.
- 73.—Resolución de la ecuación de 4.^o grado: formación de la reducida ó resolvente por el método de Euler: expresión

y discusión de las las raíces. Procedimientos de Lagrange, Ferrari, Descartes y Tschirnhaus. Ejemplos y ejercicios.

- 74.—**Resolución general de ecuaciones algébricas:** consideraciones sobre diferentes métodos empleados para conseguirla. Procedimiento de Lagrange: resultados de su aplicación. Imposibilidad de resolver algebricamente las ecuaciones generales de grado superior al cuarto.

TEORIA DE LAS «FORMAS» ALGEBRICAS

- 75.—**Preliminares. Discriminantes:** su definición y notación: ejemplos. Propiedades de la discriminante de una «forma» cuadrática de cualquier número de variables. Grado y peso de la discriminante de una «forma» de k variables y de grado n . Ejemplos.
- 76.—**Relación entre la discriminante de una «forma» binaria y la resultante de ésta y una de sus derivadas parciales:** observaciones. Expresión de la discriminante de una «forma» binaria en función de las raíces de esta «forma.» Ejercicios.
- 77.—**Teoremas relativos á la anulación de la discriminante:** su aplicación á la teoría de ecuaciones. Discriminante del producto de dos ó más formas binarias: discriminante de $(x-a) \varphi(x)$. Relación entre las discriminantes de dos formas binarias de grados consecutivos. Ejercicios.
- 78.—**Jacobiana de un sistema de n «formas» con n variables:** su definición y notación: ejemplos. Transformación de la Jacobiana en producto: condiciones para que sea posible. Teoremas relativos á la anulación de la Jacobiana: su aplicación á los sistemas de ecuaciones. Ejercicios.
- 79.—**Hessiana de una «forma»:** su definición y notación: ejemplos. Relación entre la Hessiana y la discriminante de toda «forma» cuadrática. Id. entre la discriminante de una «forma» cúbica binaria y la de su Hessiana. Teoremas relativos á la anulación de la Hessiana. Ejercicios.
- 80.—**Sustituciones lineales:** definiciones: ejemplos. Sustituciones directas é inversas: sistemas de variables cogredientes y contragredientes. Sustitución lineal de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: determinante del sistema transformado. Principales propiedades de la «forma» obtenida de otra por sustitución lineal. Ejercicios.
- 81.—**Relación entre las variables de una sustitución ortogonal:** consecuencias que de ella se deducen respecto á los elementos del módulo situados en la misma columna y á los correspondientes de dos columnas. Valor del módulo: relaciones entre sus elementos de una misma fila y entre los de dos filas. Ejercicios.
- 82.—**Invariantes:** su definición. Objeto principal de la teoría de las «formas»: índice de una invariante: invariante absoluta. Invariante simultánea de un sistema de «formas». Ejemplos. Principales propiedades de las invariantes con relación á los coeficientes de la «forma»: homogeneidad, índice y peso. Ejercicios.

- 83.—Ecuaciones características de las invariantes; suma algébrica de los coeficientes de una invariante: condiciones necesarias y suficientes para que una función de los coeficientes de una «forma» sea invariante. Deducir de una invariante de una «forma» una serie de invariantes de sistemas de «formas» del mismo grado. Ejemplos.
- 84.—Propiedades de las invariantes con relación á las raíces de la «forma»: condición para que una función simétrica de las diferencias de las raíces de una «forma» binaria sea una invariante: ecuaciones á que satisfacen las derivadas parciales de toda invariante de una «forma» binaria cuando se expresa en función de las raíces. Ejemplos.
- 85.—Covariantes: su definición. Índice de una covariante: covariante absoluta. Covariante simultánea. Orden y grado de una covariante. Ejemplos. Propiedades principales de las covariantes con relación á los coeficientes y variables de la «forma» y con relación á las raíces. Ejercicios.
- 86.—Demostrar que son invariantes: 1.º, la determinante de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas; 2.º, la resultante de dos ecuaciones homogéneas; 3.º, la discriminante de una «forma» binaria; 4.º, la Hessiana de una «forma» binaria cuadrática; 5.º, las invariantes de las covariantes de la forma dada. Número de invariantes de las «formas» binarias cuadráticas y cúbicas.
- 87.—Demostrar que son covariantes: 1.º, la Jacobiana de dos «formas» binarias no lineales; 2.º, la Hessiana de una «forma» binaria de grado superior segundo; 3.º, las covariantes de las covariantes de la «forma dada»; 4.º la Jacobiana de dos covariantes de una «forma» binaria.
- 88.—Emanantes de una «forma»: sus propiedades y significación geométrica. Contravariantes y divariantes: evectantes. Definición y propiedades de las intermutantes y de las cataleticantes. Ejemplos.
- 89.—Formación de invariantes y covariantes por el método de las funciones simétricas: ejemplos. Método de las ecuaciones de derivadas parciales y métodos de las emanantes, intermutantes y cataleticantes: su aplicación á «formas» dadas. Ejercicios.
- 90.—Formas canónicas: su definición: observaciones generales acerca del paso de la forma general á la canónica. Reducción de una forma binaria de grado impar á suma de potencias del mismo grado: ecuación canonizante: covariante canónica. Formas canónicas de las binarias de grado par: su determinación por el método de Cayley: ejemplos.
-

CUESTIONARIO DE EXAMEN

Grupo 1.º

- I.—Estudio de la continuidad en las funciones elementales.
- II.—Estudio de la variación de la función algebraica entera de una variable; interpretación de un cambio de signo.
- III.—Determinar los valores de x para los cuales deja de ser continua la función

$$\log. \frac{3x^2 - 5}{4x + 1} + \operatorname{tg}. (2x + 7) + \sqrt{\frac{x^3 + 3x + 2}{2x - 5}}$$

Grupo 2.º

- I.—Continuidad de las funciones de funciones, de las funciones compuestas y de las inversas.
- II.—Investigación de los límites superiores é inferiores de los módulos de las raíces de una ecuación algebraica entera.
- III.—Sabido que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$, hallar las derivadas de $\cos x$, $\operatorname{tg}. x$, $\operatorname{cot}. x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$.

Grupo 3.º

- I.—Continuidad de las sumas, productos, cocientes, potencias y raíces de las funciones continuas.
- II.—Teorema de Cauchy relativo al número de raíces de una ecuación contenidas en el interior de un contorno dado: consecuencias de este teorema.
- III.—Hallar la derivada del producto

$$(4x^3 - \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x})(3e^x - 5 \log. x)(1 - \operatorname{tg}. x).$$

Grupo 4.º

- I.—Derivada de una función: su significación analítica y geométrica.
- II.—Transformación de una función algebraica entera en un producto de factores lineales: relaciones entre las raíces y los coeficientes.
- III.—Hallar la derivada del cociente

$$\frac{2x^3 - \frac{3}{x^2} + 2 \log. x}{\sqrt[3]{x} - 2 \sec x + 1}.$$

Grupo 5.º

- I.—Sentido de la variación de una función, según el signo de la derivada.
- II.—Propiedad de las raíces imaginarias de una ecuación algébrica entera de coeficientes reales. Determinación de raíces comunes á dos ó más ecuaciones.
- III.—Hallar la derivada de

$$\sqrt[5]{(4x^2 - \frac{1}{x} + 4)^3 - 2\sqrt{3x^2 - 5}}.$$

Grupo 6.º

- I.—Límite de $(1 + \frac{1}{n})^n$ cuando n crece indefinidamente: límite de $(1 + \alpha)^\alpha$ cuando α tiende á cero: límite de $\frac{(1+h)^m - 1}{h}$ cuando h tiende á cero.
- II.—Propiedad del m. c. d. de una función entera y su derivada: investigación de raíces múltiples.
- III.—Hallar la derivada de $\log.(x + \sqrt{1+x^2})$ y de $(4x^3 - 2x + 1)\operatorname{sen}(5x - 2)$.

Grupo 7.º

- I.—Derivada de x^m .
- II.—Expresión de las funciones simétricas simples de las raíces de una ecuación algébrica entera mediante los coeficientes, y de éstos en función de aquéllas.
- III.—Hallar la derivada de la función implícita y , dada por la ecuación

$$3 \cos \frac{2x^2 - 1}{3y} + (6y + 5) \log(x - 3) = 0.$$

Grupo 8.º

- I.—Derivada de a^x . Derivada de $a \log. x$.
 - II.—Cálculo de las funciones simétricas múltiples de las raíces de una ecuación algébrica entera mediante las simples: cálculo directo de las mismas en función de los coeficientes.
 - III.—Hallar las derivadas de las funciones implícitas y y z dadas por las ecuaciones.
- $$5 \operatorname{tg}.(x - 2y) + 8(z - 4) + 3 = 0, (2z - 5) \operatorname{arc. tg}.(3z^2 - 5x) + 7xz = 0.$$

Grupo 9.º

- I.—Derivadas de las funciones circulares directas.
- II.—Suma de los valores que adquiere una función algébrica entera de una variable cuando se reemplaza ésta por cada una de

- las raíces de una ecuación dada: caso en que la función tenga dos ó más variables.
- III.—Determinar los puntos más altos y más bajos y los de inflexión de la línea que representa en coordenadas cartesianas la función

$$y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 8.$$

Grupo 10.º

- I.—Derivadas de las funciones circulares inversas.
- II.—Grado y peso de la función de los coeficientes en que se transforma una función simétrica de las raíces de una ecuación.
- III.—Hallar la derivada vigésima de $\frac{1}{\sqrt{px+q}}$.

Grupo 11.º

- I.—Derivada de la suma y del producto de un número finito de funciones de la misma variable.
- II.—Cálculo de una función racional no simétrica de las raíces de una ecuación algébrica entera.
- III.—Hallar la derivada enésima de la función

$$y = e^{px} \sin qx,$$

introduciendo en la derivada primera un ángulo auxiliar.

Grupo 12.º

- I.—Derivada del cociente de dos funciones de la misma variable.
- II.—Resultante del sistema de dos ecuaciones algébricas enteras con una sola incógnita: su determinación por medio de las funciones simétricas.
- III.—Hallar el desarrollo de $f(x-2)$ siendo

$$f(x) = 3x^7 + 10x^4 + 24x - 5.$$

Grupo 13.º

- I.—Derivadas de las funciones de funciones. Id. de las funciones de dos ó más variables.
- II.—Homogeneidad, grado y peso de la resultante de un sistema de dos ecuaciones algébricas enteras con una sola incógnita.
- III.—Hallar el término general de la derivada enésima de

$$y = a^w \sin x$$

por medio de la fórmula de Leibnitz.

Grupo 14.º

- I.—Teorema de Euler sobre las funciones homogéneas: su extensión á las no homogéneas.
- II.—Método de Bezout para formar la resultante de un sistema de

dos ecuaciones algébricas enteras con una sola incógnita: reglas prácticas para escribir esta resultante.

III.—Hallar por medio de la fórmula de Taylor la transformada de

$$f(x, y) = 3x^4 + 2x^2y^2 - 5y^3 + x - 4y + 7,$$

cuando x se disminuye en 3 é y se aumenta en 1.

Grupo 15.º

I.—Derivadas de las funciones compuestas y de las implícitas.

II.—Formación de la resultante de dos ecuaciones algébricas enteras por el método de Sylvester. Id. por medio del m. c. d.

III.—Demostrar que si la serie de términos reales y positivos.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

es convergente y $u_n \log. n$ tiende á un cierto límite, este debe ser cero.

Grupo 16.º

I.—Derivadas de diversos órdenes de las funciones de una sola variable: relación entre las líneas que representan geométricamente á la función y á las derivadas primera y segunda, ó á tres derivadas cualesquiera de órdenes consecutivos.

II.—Investigación de la ecuación final en un sistema de dos ecuaciones algébricas enteras con dos incógnitas: grado de dicha ecuación.

III.—Ver si son convergentes ó divergentes las series

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} + \frac{2.5}{3.4} + \frac{2.5.8}{3.4.5} + \dots + \frac{2.5.8 \dots (3n+1)}{3.4.5 \dots (n+2)} + \dots \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \dots \\ & + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Grupo 17.º

I.—Derivada enésima de x^m , a^x , $\log. x$, $\sin x$ y $\cos x$.

II.—Método de Bezout para la resolución de un sistema de dos ecuaciones algébricas enteras, no homogéneas, de cualquier grado, con dos incógnitas: bezoutianas secundarias.

III.—Demostrar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{\cos x}{1.2} + \frac{\cos 2x}{2.3} + \frac{\cos 3x}{3.4} + \dots + \frac{\cos nx}{n(n+1)} + \dots,$$

cualquiera que sea el valor de x . Demostrar que es oscilante la serie

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{7} + \frac{8}{9} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{3n-1}{2n+3} + \dots$$

Grupo 18.º

- I.—Fórmula de Taylor para las funciones algébricas enteras de una sola variable: fórmula de Mac-Laurin.
- II.—Resolución de un sistema de tres ó más ecuaciones algébricas enteras, no todas homogéneas, de cualquier grado, con otras tantas incógnitas, por el método de Poisson: propiedades de la resultante de tres ó más ecuaciones, no todas homogéneas, con otras tantas incógnitas menos una.
- III.—Demostrar que la serie semi-convergente

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n \log n} + \dots$$

no cambia de límite cuando se ordenan sus términos de modo que á cada dos positivos siga uno negativo.

Grupo 19.º

- I.—Cálculo abreviado de los coeficientes de la transformada de una función cuando se da á su variable un cierto incremento.
- II.—Reglas para formar una ecuación cuyas raíces tengan una diferencia dada con las de otra.
- III.—Demostrar que es absolutamente convergente la serie

$$a_0 \sin \alpha - a_1 \sin (\alpha + \theta) + a_2 \sin (\alpha + 2 \theta) - \dots + (-1)^{n-1} a_n \sin (\alpha + n \theta) + \dots$$
 cuando $a_0, a_1, a_2, \dots$ son finitas y $\lim. a_n = 0$, no siendo θ de la forma $2k\pi$.

Grupo 20.º

- I.—Derivadas de diversos órdenes de las funciones de dos ó más variables: demostrar que la derivación es una operación conmutativa.
- II.—Regla para formar una ecuación cuyas raíces tengan una razón determinada con las de otra: transformada en $-x$.
- III.—Hallar la corona de convergencia de la serie

$$\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{2!}{4 \cdot 7}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!x^3}\right) + \left(\frac{3!}{4 \cdot 7 \cdot 10}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!x^3}\right) + \dots + \left(\frac{n!}{4 \cdot 7 \dots (3n+1)}x^n + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!x^n}\right) + \dots$$

Grupo 21.º

- I.—Derivadas sucesivas de las funciones compuestas y de las implícitas.
- II.—Reglas para transformar una ecuación que carezca de uno ó más términos: método de Tschirnhaus.
- III.—Examinar la convergencia del producto infinito

$$\frac{x^3 + x}{x^3 + 1} \cdot \frac{x^4 + x}{x^4 + 1} \cdot \frac{x^6 + x}{x^6 + 1} \dots \frac{x^{2n} + x}{x^{2n} + 1} \dots$$

Grupo 22.º

- I.—Fórmula de Taylor y de Mac-Laurin para las funciones algébricas enteras de dos ó más variables: cálculo abreviado de los coeficientes de la transformada de una función algébrica entera de dos ó más variables cuando éstas reciben incrementos determinados.
- II.—Formar la ecuación cuyas raíces sean las diferencias entre las de una ecuación dada: su grado: ecuación de los cuadrados de dichas diferencias.
- III.—Hallar un límite superior y otro inferior del recto de la serie

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Grupo 23.º

- I.—Definición y clasificación de las series infinitas: condiciones generales de convergencia, divergencia y oscilación.
- II.—Procedimiento general para formar una ecuación cuyas raíces sean los valores conjugados de una función irracional dada: función racionalizante y norma de esta irracional.
- III.—Desarrollar la función fraccionaria

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 5}$$

en serie, y determinar el círculo de convergencia de ésta

Grupo 24.º

- I.—Caracteres de convergencia fundados en la comparación de dos series de términos reales y positivos.
- II.—Formar una ecuación cuyas raíces sean potencias de un cierto lado de las de otra dada.
- III.—Hallar por la fórmula de Taylor, hasta donde sea posible, el

desarrollo de $(x_0 + h)^{\frac{10}{8}}$, y determinar los límites de error cuando $x_0 = 2$ y $h = 1$.

Grupo 25.º

- I.—Criterio de convergencia fundado en el valor de $\lim. nu_n$ en las series de términos reales y positivos.
- II.—Condición para que una ecuación pueda disminuir de grado. Reducir el de una ecuación cuyas raíces son dos á dos iguales y opuestas.
- III.—Desarrollar en serie por la fórmula de Mac-Laurin la función $(1 + x)^{-3}$, y determinar el círculo de convergencia de la serie obtenida.

Grupo 26.º

- I.—Caracteres de convergencia derivados de $\lim. (u_n : u_{n-1})$ y $\lim. \sqrt[n]{u_n}$ en las series de términos reales y positivos: demostrar que $\lim. (u_n : u_{n-1}) = \lim. \sqrt[n]{u_n}$.
- II.—Caracteres de las ecuaciones recíprocas: reducción de su grado.
- III.—Hallar los máximos y mínimos de la función
- $$f(x) = 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 + 7.$$

Grupo 27.º

- I.—Criterio general de convergencia de las series de términos reales positivos y negativos: teorema en que se funda.
- II.—Reglas para hallar los límites de las raíces reales de una ecuación mediante los coeficientes.
- III.—Hallar los máximos y mínimos de la función
- $$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (x - y)^2.$$

Grupo 28.º

- I.—Convergencia de las series de términos constante é indefinidamente decrecientes y con signos alternados: caso en que $\lim. u_n \neq 0$.
- II.—Determinación de los límites de las raíces reales de una ecuación por el método de los grupos y por el de Newton.
- III.—Determinar el verdadero valor de la fracción $\frac{2x^3 - 4tg^2 x}{3x^2 + 2\sin^2 x}$ para $x = 0$.

Grupo 29.º

- I.—Caracteres peculiares de las series absolutamente convergentes y de las condicionalmente convergentes ó semiconvergentes.
- II.—Paridad del número de raíces reales de una ecuación comprendida entre dos números dados: consecuencias inmediatas.
- III.—Verdadero valor de $\frac{1}{\log. x} - \frac{3}{x^3 - 1}$ para $x = 1 \pm 0$.

Grupo 30.º

- I.—Teorema de Abel relativo á las series cuyos términos se multiplican por factores positivos que decrecen constantemente: consecuencias de este teorema.
- II.—Teorema de Descartes acerca del número de raíces reales de una ecuación: consecuencias del mismo.

- III.—Verdadero valor de $\left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right)^e - \frac{1}{x}$ para $x = \pm 0$.

Grupo 31.º

- I.—Suma y producto ordenado de dos ó más series.
- II.—Teorema de Budan-Fourier acerca del número de raíces reales de una ecuación: observaciones relativas al mismo.
- III.—Hallar la expresión general de los logaritmos vulgares de $1 - \sqrt{-1}$. Resolver la ecuación

$$x = \arccos(1 + 2\sqrt{-1}).$$

Grupo 32.º

- I.—Condición necesaria y suficiente para que una serie imaginaria sea absolutamente convergente.
- II.—Teorema de Rolle: sus consecuencias inmediatas.
- III.—Resolver la ecuación trinomia

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0.$$

Grupo 33.º

- I.—Extender á las series imaginarias los teoremas demostrados para las series de términos reales.
- II.—Teorema de Sturm: observaciones relativas á las funciones de este mismo nombre.
- III.—Determinar las raíces propias del grado 12º de la unidad positiva, y averiguar de qué grado son propias las restantes raíces de dicho grado.

Grupo 34.º

- I.—Series cuyos términos son funciones de una ó más variables: su campo de convergencia: continuidad de las series uniformemente convergentes.
- II.—Determinación del número de raíces reales de una ecuación por el método Sturm: condiciones para que una ecuación tenga todas sus raíces reales y desiguales.
- III.—Reducir á un solo radical el producto

$$\sqrt[5]{4 + \frac{2}{3}\sqrt{-1}} \times \sqrt[10]{-1} \times \sqrt{-3\sqrt{-1}},$$

y hallar su valor cuando cada uno de sus factores se considera con su menor argumento.

Grupo 35.º

- I.—Caracteres principales de convergencia de las series ordenadas según las potencias de exponente entero y positivo de una variable: continuidad de las mismas dentro de su círculo de convergencia.
- II.—Procedimiento directo para separar las raíces reales de una ecuación algébrica entera: empleo de la ecuación de los cuadrados de las diferencias.

III.—Calcular el valor de $\sqrt[3]{2}$ con error menor que 10^{-6} por medio de la serie binómica.

Grupo 36.º

- I.—Principales caracteres de convergencia, divergencia ú oscilación de productos infinitos de factores reales.
- II.—Separación de raíces reales de una ecuación algébrica entera por el método de Sturm: Id. de las imaginarias.
- III.—Calcular el logaritmo neperiano de 1,03 con error menor que una millonésima con auxilio de la serie logarítmica.

Grupo 37.º

- I.—Teoremas relativos á la convergencia de los productos infinitos de factores imaginarios.
- II.—Investigación de raíces conmensurables en una ecuación de coeficientes racionales.
- III.—Transformar en fracción continua el número inconmensurable $\frac{4 + \sqrt{6}}{5}$, y calcular su valor por medio de ella con error menor que media diezmilésima.

Grupo 38.º

- I.—Criterios de convergencia y continuidad de productos cuyos factores son funciones de una ó más variables.
- II.—Caracteres para reconocer si un número entero es raíz de una ecuación de coeficientes enteros.
- III.—Hallar la fracción de denominador no superior á 300 que más se aproxime á $\sqrt{11}$ por defecto ó por exceso.

Grupo 39.º

- I.—Sumación de series y evaluación de productos infinitos: término sumatorio de una serie: sus relaciones con el término general.
- II.—Procedimiento directo para aproximar las raíces inconmensurables de una ecuación. Método de Newton: observaciones.
- III.—Resolver por medio de las fracciones continuas la ecuación $3^x = \frac{1}{2}$, hallando los valores de x con dos cifras exactas.

Grupo 40.º

- I.—Sumación de las series

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} + \dots,$$

$$\frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)} + \dots$$

- II.—Métodos de Lagrange y de Horner para la aproximación de las raíces inconmensurables de una ecuación.
 III.—Hallar el límite de la fracción continua periódica para cuyo período es 1, 3, 5, 2.

Grupo 41.º

- I.—Sumación de la serie

$$1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\beta(\beta + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} + \dots$$

$$+ \frac{\beta(\beta + 1) \dots (\beta + n - 2)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) \dots (\alpha + \beta + n - 2)} + \dots$$

- II.—Idea del método de Gräffe para la resolución de las ecuaciones algébricas enteras de coeficientes numéricos: teorema fundamental relativo al fraccionamiento de la ecuación.
 III.—Hallar la ecuación algébrica entera cuyas raíces son -3 , $2 + i$, $2 - i$ y 1.

Grupo 42.º

- I.—Evaluación aproximada de series y productos infinitos: limitación del resto.
 II.—Transformación de una ecuación en otra cuyas raíces sean los cuadrados cambiados de signo de las raíces de la primera: su regla.
 III.—Hallar las raíces comunes á las ecuaciones
 $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$ y $x^5 - x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 8x - 3 = 0$.

Grupo 43.º

- I.—Consideraciones generales sobre el desarrollo de una función en serie: desarrollo de $\frac{1}{1-x}$.
 II.—Manera de reconocer en el procedimiento de Gräffe si dos raíces consecutivas de una transformada están separadas: número de transformaciones necesarias para lograr esta separación.
 III.—Hallar las condiciones á que han de satisfacer a y b para que las ecuaciones
 $x^4 - 2x^3 + 5a = 0$ y $x^3 - 2bx - 1 = 0$
 tengan dos raíces comunes.

Grupo 44.º

- I.—Desarrollo en serie de la fracción $\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$: series recurrentes: escala de estas series.
 II.—Marcha general para la resolución numérica completa de una ecuación algébrica cualquiera por el método de Gräffe.
 III.—Determinar el valor que debe tener el coeficiente a para que la ecuación
 $x^3 + 3x^2 - ax + 28 = 0$,
 tenga una raíz doble.

Grupo 45.^o

- I.—Método de los coeficientes indeterminados: sus fundamentos: retorno de una serie.
- II.—Caracteres para reconocer en las ecuaciones transformadas del método de Gräffe la naturaleza de las raíces de una ecuación algébrica de coeficientes reales: caso en que las raíces son todas reales y desiguales.
- III.—Hallar las ecuaciones cuyas raíces sean las simples, dobles, triples, de la ecuación

$$x^5 - 9x^4 + 30x^3 - 46x^2 + 33x - 9 = 0.$$

Grupo 46.^o

- I.—Series de Taylor y Mac-Laurin para funciones de una sola variable: investigación de su resto ó término complementario bajo las formas dadas por Schlömilch, Lagrange y Cauchy.
- II.—Manera de reconocer en las ecuaciones transformadas del método de Gräffe la existencia de raíces de igual módulo en la ecuación primitiva: cálculo de las mismas en el caso de ser reales.
- III.—Hallar la suma de los cubos de las raíces de la ecuación

$$2x^4 - x^3 + x - 3 = 0,$$

sin resolverla.

Grupo 47.^o

- I.—Series de Taylor y Mac-Laurin para funciones de dos ó más variables.
- II.—Manera de reconocer en las ecuaciones transformadas del método de Gräffe la existencia de raíces imaginarias en las ecuaciones algébricas de coeficientes reales: cálculo de dichas raíces.
- III.—Hallar el valor de $\sum x_p x_q^2$ en la ecuación

$$3x^5 - 2x^3 + x - 6 = 0.$$

Grupo 48.^o

- I.—Investigación de los máximos y mínimos de las funciones explícitas de una sola variable: su regla.
- II.—Resolución de ecuaciones algébricas de coeficientes imaginarios por el método de Gräffe.
- III.—Hallar la suma de los valores que recibiría la función

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 1$$

si se reemplazara x por cada una de las raíces de la ecuación

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8 = 0.$$

Grupo 49.^o

- I.—Investigación de los máximos y mínimos de las funciones implícitas de una sola variable y de las explícitas é implícitas de dos ó más variables.

- II.—Corrección de los valores aproximados de las raíces obtenidas por el método de Gräffe.
 III.—Escribir la resultante bezoutiana de las ecuaciones
- $$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad \text{y} \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Grupo 50.^o

- I.—Determinación del verdadero valor de una función que se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$: regla general: sus fundamentos.
 II.—Resolución de ecuaciones trascendentes: casos en que las ecuaciones de esta clase pueden reducirse á la forma algébrica.
 III.—Formar por el método de Sylvester la resultante de las ecuaciones
- $$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad \text{y} \quad b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0.$$

Grupo 51.^o

- I.—Verdadero valor de una función que se reduce á una de las formas $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .
 II.—Resolución de sistemas de ecuaciones trascendentes.
 III.—Averiguar por medio de la resultante bezoutiana si las ecuaciones
- $$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0 \quad \text{y} \quad 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$$
- tienen una ó más raíces comunes, y calcular el valor de éstas.

Grupo 52.^o

- I.—Serie exponencial: su campo de convergencia: demostrar que su límite es el mismo de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ cuando n crece indefinidamente.
 II.—Resolución de las ecuaciones numéricas, algébricas ó trascendentes, por el método de interpolación por partes proporcionales.
 III.—Resolver por el método de Bezout el sistema
- $$\begin{cases} x^3 - 3(y-1)x^2 + (3y^2 - 6y - 1)x - (y^3 - 3y^2 - y + 3) = 0 \\ 3x^2 + (y^2 - 2y - 3) = 0. \end{cases}$$

Grupo 53.^o

- I.—Sumación de la serie exponencial cuando su variable es real: irracionalidad de e .
 II.—Resolución de una ecuación cuyo 1.^{er} miembro es una serie infinita ordenada según las potencias de exponente entero de la incógnita.
 III.—Hallar las soluciones infinitas del sistema
- $$(y-2)x^2 + 4x - (5y-6) = 0 \quad , \quad yx^2 + 18x - 10y = 0.$$

Grupo 54.º

- I.—Significación de e^x cuando x es imaginaria: potencias de exponente imaginario.
- II.—Determinación de una función entera por valores particulares de la misma: condiciones para que el problema sea determinado.
- III.—Dada la ecuación

$$3x^6 - 2x^4 + 8x - 5 = 0,$$

hallar otra cuyas raíces excedan á las de ésta en 0,5.

Grupo 55.º

- I.—Demostrar que $\cos x \pm i \sin ix = e^{\pm ix}$: fórmulas que se deducen de esta relación: series del seno y del coseno.
- II.—Hallar la función entera de grado n^{mo} de una sola variable conociendo $n + 1$ valores de dicha función correspondientes á otros tantos de la variable: fórmula de Lagrange: caso en que la función sea de dos ó más variables.
- III.—Dada la ecuación

$$7x^8 - 4x^6 - 2x^3 + 5x^2 - 11 = 0,$$

hallar su transformada en $-x$ y la que tenga sus raíces recíprocas de las de la misma.

Grupo 56.º

- I.—Funciones circulares de arco imaginario: demostrar las relaciones
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
 para valores imaginarios de x é y .
- II.—Fórmula general de la descomposición de una fracción algébrica en fracciones parciales: demostrar que esta descomposición es única.
- III.—Dada la ecuación

$$5x^6 - 7x^5 + 11x^3 - x + 14 = 0,$$

hallar otra cuyas raíces sean las mitades de las de ésta, aumentada cada mitad en una unidad.

Grupo 57.º

- I.—Funciones circulares hiperbólicas: relaciones entre ellas.
- II.—Regla para calcular el numerador de la fracción parcial correspondiente á una raíz real simple.
- III.—Hacer desaparecer el 3.º término en la ecuación

$$2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x + 7 = 0.$$

Grupo 58.º

- I.—Periodicidad de e^x , $\sin x$ y $\cos x$.
- II.—Cálculo de los numeradores relativos á las potencias sucesivas de una raíz real múltiple: observaciones.

III.—Hallar la norma y el factor racionalizante de la función

$$f(x) = 4 - 2\sqrt[4]{x} + 5\sqrt[4]{x^3}.$$

Grupo 59.º

- I.—Expresión abreviada de un número mediante su módulo y argumento: cálculo de potencias, raíces y logaritmos de números complejos.
- II.—Determinación de los constantes que entran en los numeradores de las fracciones parciales correspondientes á las raíces imaginarias simples y múltiples.
- III.—Racionalizar y resolver la ecuación

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+2} - 1 = 0.$$

Grupo 60.º

- I.—Dado un coseno imaginario, hallar la expresión general de su arco.
- II.—Resolución de la ecuación de 3.º grado: fórmula cardánica.
- III.—Resolver por reducción de grado la ecuación

$$6x^{13} - 5x^9 + 3x^5 - 4x = 0.$$

Grupo 61.º

- I.—Investigación de las raíces de la unidad positiva.
- II.—Discusión de la ecuación de 3.º grado: caso irreducible.
- III.—Resolver la ecuación recíproca

$$6x^9 - x^8 - 55x^7 + 45x^6 + 93x^5 - 93x^4 - 45x^3 + 55x^2 + x - 6 = 0.$$

Grupo 62.º

- I.—Investigación de las raíces de la unidad negativa.
- II.—Resolución trigonométrica de la ecuación de 3.º grado en el caso irreducible.
- III.—Hallar límites superiores é inferiores de las raíces reales positivas y negativas de la ecuación

$$7x^5 - 40x^4 + 3x^3 - 25x - 28 = 0.$$

Grupo 63.º

- I.—Resolución trigonométrica de la ecuación binomia.
- II.—Resolución de la ecuación de 3.º grado con auxilio de las tablas de senos y cosenos hiperbólicos.
- III.—Sabido que la ecuación

$$6x^5 - 5x^4 - 33x^3 - 21x^2 + 7x + 6 = 0$$

tiene todas sus raíces reales, determinar por el teorema de Descartes el número de las positivas, el de las negativas y el de las comprendidas entre -1 y 2 .

Grupo 64.º

- I.—Investigación de las raíces de la ecuación trinomia: formas trigonométricas de esta ecuación.

- II.—Resolución de la ecuación de 4.º grado: expresión de sus raíces.
- III.—Hallar con auxilio del teorema de Budan-Fourier el número de raíces reales de la ecuación
- $$12x^5 - 29x^4 + 11x^3 + 23x^2 - 23x + 6 = 0$$
- comprendidas entre -1 y 1 .

Grupo 65.º

- I.—Raíces de la unidad *propias* de un cierto grado: raíces comunes á dos ó más grados.
- II.—Discusión de la ecuación de 4.º grado.
- III.—Separación de las raíces reales de la ecuación
- $$x^4 - 15x^2 + 12x - 2 = 0.$$

Grupo 66.º

- I.—Potencias sucesivas de una raíz *propia* de un cierto grado de la unidad: teoremas que á ellas se refieren.
- II.—Resolución general de ecuaciones algébricas: consideraciones sobre los diferentes métodos empleados para conseguirla.
- III.—Hallar las raíces enteras de la ecuación
- $$x^4 - 27x^2 - 14x + 120 = 0.$$

Grupo 67.º

- I.—Resultado de multiplicar raíces de la unidad *propias* de grados primos entre sí. Id. de multiplicar cada una de las raíces de un grado por cada una de las de otro.
- II.—Procedimiento general de Lagrange para la resolución de las ecuaciones algébricas: resultados de su aplicación.
- III.—Hallar las raíces conmensurables de la ecuación
- $$24x^6 - 26x^5 - 127x^4 - 51x^3 + 49x^2 + 17x - 6 = 0.$$

Grupo 68.º

- I.—Generalización de las reglas aritméticas de multiplicación y división de radicales de un mismo índice.
- II.—Imposibilidad de resolver algébricamente las ecuaciones generales de grado superior al 4.º
- III.—Hallar por el método de aproximación de Newton, por el de Lagrange, por el de Horner ó por el de interpolación por partes proporcionales, la raíz de la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

comprendida entre 1,6 y 1,7, calculándola con error menor que 0,001.

Grupo 69.º

- I.—Reglas generales de potenciación y radicación de un radical y de multiplicación y división de radicales de distinto índice.
- II.—Objeto de la teoría de las «formas» algébricas. Relaciones entre las raíces y los coeficientes de una «forma» algébrica

binaria de grado cualquiera: resultante de dos «formas» de esta clase y, en general, de n «formas» con n incógnitas.

III.—Resolver por el método de Gräffe la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0,$$

calculando sus raíces con dos cifras exactas.

Grupo 70.^o

- I.—Serie binómica: su círculo de convergencia: generalización de la fórmula del binomio de Newton.
- II.—Definición de la discriminante: propiedades principales de la de una «forma» cuadrática de cualquier número de variables.
- III.—Separar las raíces de la ecuación trascendente

$$x - \cos x = 0$$

por medio del teorema de Rolle: cálculo de la primera raíz con error menor que 0,01.

Grupo 71.^o

- I.—Aplicación de la serie binómica al cálculo de raíces con aproximación dada.
- II.—Grado y peso de la discriminante de una «forma» de k variables del grado n^{mo} .
- III.—Aproximar con tres cifras exactas por el método de Newton la raíz comprendida entre 3 y 4 de la ecuación trascendente

$$e^x - e^{-x} - 12x = 0.$$

Grupo 72.^o

- I.—Serie logarítmica: su campo de convergencia: su límite ó suma.
- II.—Relación entre la discriminante de una forma binaria y la resultante de ésta y una de sus derivadas parciales: observaciones.
- III.—Resolución de la ecuación trascendente

$$\frac{1}{6} \log \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc. cot.} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Grupo 73.^o

- I.—Series deducidas de la logarítmica: su aplicación al cálculo de logaritmos.
- II.—Expresión de la discriminante de una «forma» binaria en función de las raíces de esta «forma»: consecuencias.
- III.—Resolución de la ecuación trascendente

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} + \dots + \frac{x^{2+3(n-1)}}{2+3(n-1)} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Grupo 74.^o

- I.—Serie de un arco en función de su tangente: valor de π .
- II.—Discriminante del producto de dos ó más «formas» binarias: discriminante de $(x - a) x (x)$.
- III.—Hallar por la fórmula de Lagrange la función algebraica entera que recibe los valores $-5, 3, -3$ y -11 cuando se dan á su variable respectivamente los valores $-1, 0, 1$ y 2 .

Grupo 75.^o

- I.—Formas ordinaria y general de las fracciones continuas: ecuaciones que las originan.
- II.—Jacobiana de un sistema de n «formas» con n variables: su transformación en producto: condiciones para que ésta sea posible.
- III.—Descomponer en fracciones simples la fracción algebraica

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}$$

Grupo 76.^o

- I.—Transformación de una fracción ordinaria en continua: su regla.
- II.—Teoremas relativos á la anulacion de la Jacobiana: su aplicacion á los sistemas de ecuaciones.
- III.—Descomponer en fracciones parciales la fracción

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x + 4}$$

sabiendo que su denominador tiene las raíces dobles -1 y $1 \pm \sqrt{-1}$.

Grupo 77.^o

- I.—Procedimiento para convertir en fracción continua una cantidad inconmensurable.
- II.—Hessiana de una «forma»: relación entre la de una «forma» cuadrática y la discriminante de la misma.
- III.—Resolver con auxilio de la fórmula de Cardán la ecuación de 3.^{er} grado.

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Grupo 78.^o

- I.—Ley recurrente de formación de reducidas de una fracción continua.
- II.—Teoremas relativos á la anulacion de la Hessiana.
- III.—Hallar trigonómicamente las raíces de la ecuación de 3.^{er} grado.

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Grupo 79.º

- I.—Cálculo directo de las reducidas de una fracción continua por medio de las continuantes de Muir.
- II.—Sustitución lineal en un sistema de n funciones lineales homogéneas n variables: determinante del sistema transformado.
- III.—Resolver la ecuación de 4.º grado.

$$x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = 0.$$

Grupo 80.º

- I.—Relación fundamental entre los términos de dos reducidas consecutivas: sus consecuencias inmediatas.
- II.—Propiedades de las sustituciones ortogonales.
- III.—Formar la discriminante de la «forma» binaria cúbica

$$U = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Grupo 81.º

- I.—Convergencia de las reducidas de una fracción continua: diversos límites superiores del error que se comete al tomar el valor de una reducida por el de la fracción continua.
- II.—Invariantes: sus principales propiedades con relación á los coeficientes de las «formas»: su homogeneidad: grado y peso.
- III.—Hallar por medio de la discriminante la condición para que existan raíces iguales en la ecuación de 3.º grado

$$x^3 + p x + q = 0.$$

Grupo 82.º

- I.—Demostrar que toda reducida se aproxima más á la fracción continua que cualquier fracción de menores términos.
- II.—Ecuaciones características de las invariantes: suma general de los coeficientes dé una invariante: condiciones necesarias y suficientes para que una función de los coeficientes de una «forma» sea invariante.
- III.—Hallar la Jacobiana de las dos formas binarias cuadráticas.

$$U = a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2, \quad V = b_0 x^2 + 2 b_1 x y + b_2 y^2.$$

Grupo 83.º

- I.—Fracciones convergentes intermedias: expresión general de las comprendidas entre dos reducidas consecutivas de orden par ó de orden impar: propiedades de dichas fracciones.
- II.—Propiedades principales de las invariantes con relación á las raíces de una «forma» algébrica.
- III.—Hallar la Hessiana de la forma binaria cúbica.

$$U = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Grupo 84.º

- I.—Hallar la fracción de denominador no mayor que D que más se aproxime por defecto ó por exceso á una cantidad dada.
- II.—Covariantes: sus propiedades principales con relación á los coeficientes y variables de la «forma», y respecto de las raíces.
- III.—Hallar las dos primeras emanantes de la «forma» binaria bi-cuadrática.

$$U = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Grupo 85.º

- I.—Transformación de una fracción continua en serie: convergencia de ésta.
- II.—Demostrar que son invariantes la determinante de un sistema de funciones lineales homogéneas, la resultante de dos ecuaciones homogéneas y la discriminante de una «forma» binaria.
- III.—Hallar por el método de las ecuaciones de derivadas parciales una invariante de 4.º grado de la forma binaria cúbica.

$$U = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Grupo 86.º

- I.—Teorema de Lejeune-Dirichlet acerca de la existencia de infinidad de fracciones que difieren de una cantidad inconmensurable en menos de la unidad dividida por el cuadrado de su denominador.
- II.—Demostrar que son invariantes la Hessiana de una «forma» binaria cuadrática y las invariantes de las covariantes de una «forma.»
- III.—Hallar por el método de las ecuaciones de derivadas parciales una covariante de 2.º orden y 2.º grado de la forma binaria cúbica.

$$U = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Grupo 87.º

- I.—Resolución en números enteros de la ecuación de 1.º grado con dos incógnitas por medio de las fracciones continuas.
- II.—Demostrar que son covariantes la Jacobiana de dos formas binarias no lineales, la Hessiana de una forma binaria de grado superior al 2.º y las covariantes de las covariantes de una «forma.»
- III.—Hallar la covariante.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} x_1^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} x_1 x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} x_2^2$$

de la forma binaria cúbica

$$U = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3.$$

Grupo 88.º

- I.—Resolución de la ecuación exponencial $a^x = b$ por medio de las fracciones continuas.
- II.—Definición y propiedades de las emanantes, contravariantes, divariantes, intermutantes y cataleticantes.
- III.—Hallar la invariante

$$\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2$$

de la forma binaria cuadrática

$$\alpha_0 x^2 + 2 \alpha_1 x y + \alpha_2 y^2$$

por el método de las intermutantes y por el de las cataleticantes.

Grupo 89.º

- I.—Desarrollo de las irracionales de 2.º grado en fracciones continuas: periodicidad de estas fracciones.
- II.—Formación de invariantes y covariantes por el método de las funciones simétricas. Id. por medio de emanantes, intermutantes y cataleticantes.
- III.—Formar una covariante de la forma quintica binaria.

$$U = \alpha_0 x^5 + 5 \alpha_1 x^4 y + 10 \alpha_2 x^3 y^2 + 10 \alpha_3 x^2 y^3 + 5 \alpha_4 x y^4 + \alpha_5 y^5$$

con auxilio de la cataleticante

$$\begin{vmatrix} U^{IV}_{\alpha^4} & U^{IV}_{\alpha^3 y} & U^{IV}_{\alpha^2 y^2} \\ U^{IV}_{\alpha^2 y} & U^{IV}_{\alpha y^2} & U^{IV}_{\alpha y^3} \\ U^{IV}_{\alpha^2 y^2} & U^{IV}_{\alpha y^3} & U^{IV}_{y^4} \end{vmatrix}$$

Grupo 90.º

- I.—Demostrar que toda fracción continua periódica es equivalente á una raíz de una ecuación de 2.º grado.
- II.—Reducción de funciones homogéneas binarias á su forma canónica: ecuación canonizante y covariante canónica de las de grado impar.
- III.—Reducir á su forma canónica la binaria cúbica.

$$U = \alpha_0 x^3 + 3 \alpha_1 x^2 y + 3 \alpha_2 x y^2 + \alpha_3 y^3.$$

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA



0701724898