Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# ANÀLISI DEL PROBLEMA V DEL LLIBRE *"TRACTAT SOBRE ELS MÈTODES DE LES SÈRIES I FLUXIONS"* D'ISAAC NEWTON

Autor: Adrià Rodríguez Moreso

Director: Dr. Carlos Dorce Polo
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2024

## Abstract

Curvature is a key concept in Differential Geometry and it meas ures the change in direction of the tangent vector. We study how Isaac Newton formally introduces the concept by using the method of fluxions. To see this, we focus at a historical introduction that justifies and grounds Newton's findings. Lastly, we compare Newton's way of calculating the curvature with the notation and formalism proper of the Differential Geometry of plane curves.

## Resum

La curvatura és un concepte cabdal en la Geometria Diferencial i mesura el canvi de direcció del vector tangent. S'estudia com introdueix el concepte de manera formal Isaac Newton emprant el mètode de les fluxions. Per a veure-ho, ens fixem en una introducció històrica que justifica i fonamenta les troballes de Newton. Finalment, es compara la seva forma de calcular la curvatura amb la notació i formalisme propi de la Geometria Diferencial de corbes planes.



2020 Mathematics Subject Classification. 01-11, 26E40, 01A75

## Agraïments

En primer lloc, m'agradaria agrair al tutor d'aquest treball, en Carlos Dorce. Des del primer dia m'ha orientat i aconsellat per seguir el camí adequat en la elaboració i en la concretització del tema escollit. Voldria agrair també l'entusiasme i els coneixements que han estat útils com a font bibliogràfica però també com a font motivacional per fer-me gaudir del món tan apassionant de la història de les matemàtiques.

En segon lloc, agrair a la resta de docents que en menor o major mesura han contribuït en el meu creixement. Els professors universitaris, per transmetre coneixements i passió que m'han permés emmirallar-me i no defallir en els moments de dubtes davant la dificultat de la carrera. I els de l'institut per donar-me les bases i la formació, tant personal com professional, suficients per arribar fins aquí.

En tercer lloc, agrair als meus amics que han entès les hores dedicades en aquest treball i en la carrera en general. Han estat un motiu de descans i gaudi, però sovint de treball conjunt necessaris. Menció especial per "lo valencianet", ell fou el que em va empényer a seguir lluitant i no veure-ho tot perdut a l'inici de la carrera. També agrair-li l'ajuda en tantes i tantes assignatures, i pels riures d'aquests anys.

Finalment, agrair a la meva família per tota l'ajuda i confiança incondicional des del primer moment. A la meva nòvia, per aparèixer en els moments més durs i per ser un gran pilar per mi. Als meus germans, per ésser referents en el meu aprenentatge. I als meus pares, als quals dec tot el que sóc. A la meva mare per escoltar les explicacions esgotadores sobre Newton, fluxions i en general, aquests anys... I al meu pare, per ajudar-me en allò que no comprenia del treball així com també durant la carrera arribar on jo no arribava i lluitar fins que ho fes.

# Índex


**1 Introducció** **1**

1.1 Estructura de la Memòria . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

**2 Breu història del concepte de curvatura fins a Newton** **3**

**3 Llibre i primers problemes** **8**

3.1 Nomenclatura bàsica newtoniana . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

3.2 Transició al mètode de les fluxions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

3.3 Primers problemes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

3.3.1 Problema I . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

3.3.2 Problema II . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

3.3.3 Problema III . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

3.3.4 Problema IV . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

**4 Anàlisi del problema V** **16**

4.1 Idees prèvies . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

4.2 Càlcul de la curvatura . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

4.3 Exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**5 Comparació amb la noció de curvatura actual** **29**

5.1 Introducció . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

5.2 Formalisme de la curvatura segons la Geometria Diferencial . . . . . . . . 30

**6 Conclusions** **35**

# 1 Introducció

El concepte de curvatura és un tema recurrent en les matemàtiques, especialment, en la Geometria Diferencial. La realitat que ens envolta no pot ser descrita únicament mitjançant construccions lineals. Per descriure correctament el món on vivim cal introduir quelcom més complicat que no pas les equacions lineals. Podríem dir que de manera “natural” ha d'aparèixer el concepte de curvatura.

El de la curvatura és un concepte que va més enllà de les matemàtiques. És fonamental en la física, on apareix per exemple observant les lleis de Newton; o en la teoria de la relativitat, en què el camp gravitatori depèn de la *curvatura* de l'espai-temps.

La curvatura pot fer referència a qualsevol dels conceptes relacionats amb la geometria. Habitualment, és un concepte mètric d'objectes matemàtics. En aquest treball, però, es pren la visió de curvatura d'una part de la Geometria Diferencial: la Geometria Diferencial de corbes.

Intuïtivament, la curvatura es podria definir com la quantitat per la qual un objecte, dins d'un espai euclidià, es desvia de ser lineal o pla. Amb un paper es pot construir un con o un cilindre, però és impossible obtenir una esfera sense doblegar, estirar o tallar el paper. El motiu principal és que el con o el cilindre tenen la mateixa curvatura que el pla[2]. En canvi, la curvatura de la esfera és diferent a la del pla. Aquest fet, és el que impedeix construir el mapa perfecte. No hi ha manera de representar la Terra (esfera) en un mapa (pla) sense modificar distàncies, angles o superfícies.

Una idea per entendre sense formalismes la curvatura és que la curvatura d'un cercle petit és molt més gran que la d'un cercle enorme, ja que en el primer la corba és més pronunciada. Una altra manera intuïtiva seria situant-nos en un cotxe. En veure una corba molt pronunciada cal reduir molt la velocitat mentre que, en una corba poc pronunciada, la reducció és menys dràstica. En certa manera, estem prenent una precaució en funció de la curvatura de la corba.

[2]Cal remarcar que estem parlant de la curvatura gaussiana $K$, que és el producte de les curvatures principals ($K = k_1 k_2$). En el cilindre són $k_1 = 0$ i $k_2 = 1/r$ com es pot veure en [14] de la bibliografia. En el treball no es donaran aquests detalls, ja que el càlcul de la curvatura s'ha restrinngit exclusivament a corbes planes i no a superfícies.

## 1.1 Estructura de la Memòria

Aquesta memòria segueix una estructura tot partint d'elements més generals fins a temes més concrets.

En el primer gran bloc, s'exposa una breu història de conceptes previs que acaben en el concepte de curvatura. Tot i que aquest concepte no es formalitza fins al XVII amb Newton (1642-1727) i Leibniz (1646-1716), es remarquen algunes de les contribucions al llarg de la història fins arribar a la contribució fonamental d'Isaac Newton.

En el segon bloc, s'introdueix el llibre que motiva aquest treball, anomenat *Tractatus de methodis serierum et fluxiorum* (Tractat sobre els mètodes de les sèries i les fluxions). En aquest apartat, s'exposen els conceptes bàsics emprats per Newton, especialment el de fluxió. També s'expliquen amb exemples il·lustratius els quatre primers problemes del capítol sobre el mètode de les fluxions, que és el tema principal del treball. Aquests problemes s'introdueixen perquè apareixen càlculs i conceptes que són necessaris directament o indirecta en el problema V, el problema central del treball.

En el tercer bloc, s'explica amb detall el problema a analitzar en aquest treball, el problema V, que consisteix en trobar la curvatura en un punt d'una corba donada. S'explica com solucionar-ho i s'exposen uns exemples complets de com calcular-ho a mode pràctic.

Finalment, en el darrer bloc, s'introdueixen els conceptes i proposicions necessaris de la Geometria Diferencial per a obtenir la fórmula que permet calcular la curvatura plana. En aquest apartat, seguint amb els exemples de l'apartat anterior, es calcula la curvatura amb la nova fórmula tot comparant els resulats.

**Paraules clau:** *centre de curvatura, cercle osculador, corba, curvatura, fluents, fluxions, geometria, infinitesimal, intersecció, Newton, radi de curvatura, recta perpendicular, recta tangent...*

## 2 Breu història del concepte de curvatura fins a Newton

En aquest capítol comentarem l'aparició del concepte de curvatura en diferents èpoques, i apareixeran diversos autors. Tot i que el concepte o definició més formal no apareix fins a Newton, la idea del que actualment es coneix com curvatura apareix abans. La història de la curvatura arriba fins a l'aparició de la geometria diferencial. En aquesta breu introducció històrica, s'arribarà fins a Newton i els seus coetanis. Per això, grans contribucions com les d'Euler s'ometen en aquest treball centrat en Newton i la seva obra.

En l'Antiga Grècia divideixen el moviment en tres tipus: el moviment en línea recta, el moviment en una circumferència i el moviment mixt. La idea era la següent: hi ha corbes que són rectes i corbes que estan curvades. S'adonen, però, que la dificultat del procés està en quantificar com de corbada està una corba. Es podria dir que identifiquen el problema de la curvatura però no el treballen pas.
Una figura a destacar és la d'Apol·loni de Perge (262-190 a.C.), [3] que en la seva obra *Còniques* va sistematitzar els coneixements previs sobre les tres còniques conegudes: paràbola, hipèrbola i el·lipse. També va demostrar que a cada punt d'una cònica hi havia exactament una recta normal. És aquest fet el que temps després esdevindria essencial en el concepte de curvatura. A continuació, detallem com Apol·loni calculava les rectes normals a una el·lipse. En el capítol 5 del seu llibre apareix la següent proposició:
*Si $O$ és qualsevol punt per sota de l'eix $AA'$ d'una el·lipse i $AM > AC$, aleshores sempre es pot dibuixar una normal a la el·lipse que passi per $O$ i tallant l'eix $AC$, però mai més d'una.*

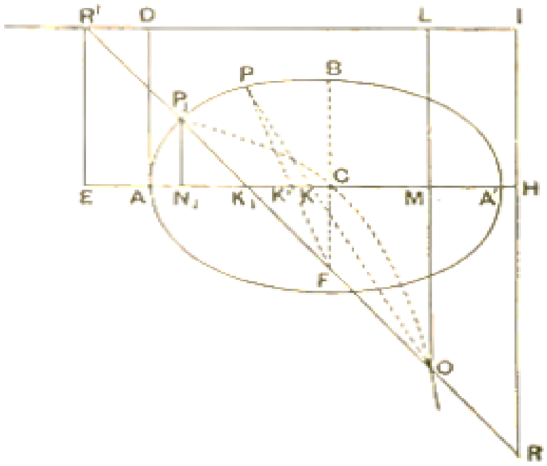



Figura extreta de: *Apollonius of Perga, Treatise on conic sections.*

Aleshores es pren $OM$ a $L$ i $CM$ a $H$ de tal manera que

$$\frac{OL}{LM} = \frac{CH}{HM} = \frac{AA'}{p_a}$$

Dibuixem $LI$ paral·lel al eix i $HI$ perpendicular tal com es veu en el dibuix. Llavors, $IL$ i $HI$ es poden prendre com asímptotes que descriuen una hipèrbola que passa per $O$.

[3] Fou un matemàtic i astrònom grec conegut pel seu treball sobre seccions còniques.

Anomenem $P_1$ al punt d'intersecció entre ambdues. I dibuixem $AD$, la tangent en el punt $A$ que intersecciona amb la recta $LI$ en el punt $D$. Aleshores tindrem:

$$\frac{AH}{HM} > \frac{CH}{HM} > \frac{AA'}{p_a} > \frac{OL}{LM} \Rightarrow \boxed{AH \cdot LM > OL \cdot HM} \tag{2.1}$$

Dibuixem $OP_1$ fins arribar a les asímptotes (recordem que són $LI$ i $HI$) en els punts $R'$ i $R$, respectivament. Per tant, tenim $OR = P_1R'$ i com a conseqüència $EN_1 = MH$.
Per semblança de triangles tenim $\frac{AA'}{P_a} = \frac{OL}{LM} = \frac{ME}{EK_1}$ i també tenim $\frac{AA'}{P_a} = \frac{CH}{HM}$.
Fent servir ara 2.1 i el fet que $EN_1 = MH$ obtenim:

$$\frac{AA'}{P_a} = \frac{ME - CH}{EK_1 - MH} = \frac{CN_1}{N_1K_1}$$

Finalment, s'obté $N_1K_1 = N_1G_1$ i $P_1O$ és la normal.

En la secció 5 del seu llibre, es troben "els inicis del tema de les corbes evolutes i els centres d'osculació". Aquests són conceptes íntimament lligats a la curvatura. Parlem d'una visió molt moderna, evidentment. De fet, ni ho proposa ni ho pensa com una propietat de les corbes. Els seus càlculs són construccions amb segments. En canvi, segons l'historiador D.T. Whiteside, Apol·loni va aplicar mètodes per trobar el radi de curvatura molt semblants als utilitzats per Newton. No obstant, ni Apol·loni ni cap dels seus contemporanis van poder portar les seves idees geomètriques més enllà.

Al segle XIV apareix la figura de *Nicolau d'Oresme* [4](1323-1382), que escriu l'obra *De configurationibus qualitatum et motuum.*
En aquesta obra, al capítol 14, utilitza el concepte de línea corba per una corba i "*curvitas*" per expressar la seva curvatura. En el capítol 20, reflexionant sobre la naturalesa de les quantitats que es poden representar mitjançant una línia contínua (per exemple el temps) i fent referència a les possibles maneres de parlar sobre la mesura de la curvatura, va afirmar: *No sabem amb què o respecte a què es mesura la intensitat de la curvatura. Per ara sembla que hi ha dues maneres. La primera és que l'increment de la curvatura depèn de l'allunyament de la rectitud. Això és que es mesura per l'angle constituït entre una línia recta i una corba.* [...]
Aquesta visió d'Oresme la podem interpretar, amb els nostres coneixements, de la següent manera: intuïa que la curvatura és allò que mesura quina diferència hi ha entre la corba i la primera aproximació lineal, que és la recta.
En el capítol 21, afirma que la curvatura d'una circumferència és el recíproc del seu radi. Es desconeix com va arribar a aquesta afirmació[5]. L'estudi sobre la curvatura no es va limitar en el de la circumferència, sinó que el va estendre a corbes més generals. Malgrat això, no va proporcionar un procediment per calcular la curvatura d'una corba.
Degut a les guerres i altres circumstàncies de l'època, els escrits d'Oresme van romandre ocults i, molt probablement, no van contribuïr als desenvolupaments de Newton. De fet, al segle XVII, es va interpretar el llibre d'Oresme com un llibre de caire religiós i filosòfic. Amb el temps, però, es pot considerar una primera aproximació al concepte de curvatura.

[4]Intel·lectual francès que realitza activitats matemàtiques, astronòmiques, filosòfiques, teològiques... considerat un dels prinicpals impulsors de la renovació medieval.

[5]De fet en l'article: http://www.ams.org/notices/201509/rnoti-p1030.pdf titulen el misteri com *"A medieval mystery: Nicole Oresme's concept of curvitas"*

Han de passar tres segles per trobar noves aportacions en aquest tema. Al segle XVII, l'any 1609, Johannes Kepler (1571-1630) proposa en el seu llibre *Astronomia Nova* el següent: donat un punt qualsevol sobre una corba, trobar la curvatura és escollir la circumferència que en un entorn petit millor s'aproximi a la corba. Aquesta idea fou crucial anys més tard, en els quals es va introduir la circumferència osculatriu (en llatí "besar") proposada per Leibniz.
En aquest segle, es van plantejar el problema següent: donat un punt d'una corba, cal trobar la recta tangent i la normal. En l'actualitat, es tractaria d'una tasca força senzilla: prendríem la parametrització de la corba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, derivaríem per trobar $\gamma'(t)$ i així obtindríem la recta tangent. Això és possible en un sistema on s'ha definit els eixos de coordenades. És aquí on apareix la figura de René Descartes (1596-1650) i la seva obra *La Geometria*.[6]

Descartes proposa, l'any 1637, un mètode algebraic per trobar tangents i normals en un punt d'una corba donada per $f(x, y) = 0$. Al llibre II de *La Geometria*, Descartes presenta el procediment per trobar-les amb l'anomenat *mètode del cercle*. Sens dubte, és un dels problemes més destacats en l'aplicació del mètode cartesià.

Per trobar la recta tangent, Descartes utilitza el fet que, en qualsevol punt d'una circumferència, la tangent sempre és perpendicular al radi en el mateix punt. Francisco M. Barrios, en la seva xerrada *¿Con qué se come la curvatura?*[7], explica el mètode que empra Descartes. Podríem resumir-ho amb el següent procediment general:

1. **Representació algebraica**: Primer respresenta la corba mitjançant una equació relacionant $x$ i $y$, de la forma $f(x, y) = 0$.
2. **Punt d'interès**: Identificar el punt de la corba on es vol trobar la recta tangent o la normal.
3. **Trobar la pendent de la recta tangent**: Fent servir límits de tases de canvi, el que podríem anomenar com un antecendent de la derivada, es troba la pendent de la recta tangent.
4. **Calcular la pendent de la recta normal**: La pendent de la recta normal és la recíproca i canviada de signe de la pendent de la tangent.
5. **Equació de la recta normal**: Utilitzant l'equació punt-pendent[8] per escriure l'equació de la recta normal.

[6] Aquesta no és l'obra com a tal. És un apèndix del llibre "El Discurs del Mètode".
[7] En les referències és la referència [2].
[8] L'equació de punt-pendent pren $(x_1, y_1)$ les coordenades del punt i $m$ la pendent i s'obté l'equació de la recta: $m(y - y_1) = (x - x_1)$

Seguint l'explicació que presenta en el seu llibre Descartes i recollida en la xerrada de Barrios, prenem $AM = x$, $CM = y$, $PA = v$, $PC = s$ i el punt $A$ com a origen de coordenades (veure figura extreta de la seva obra). Aleshores l'equació de la circumferència centrada en $P$ i radi $PC$ queda: $(v - x)^2 + y^2 = s^2$.

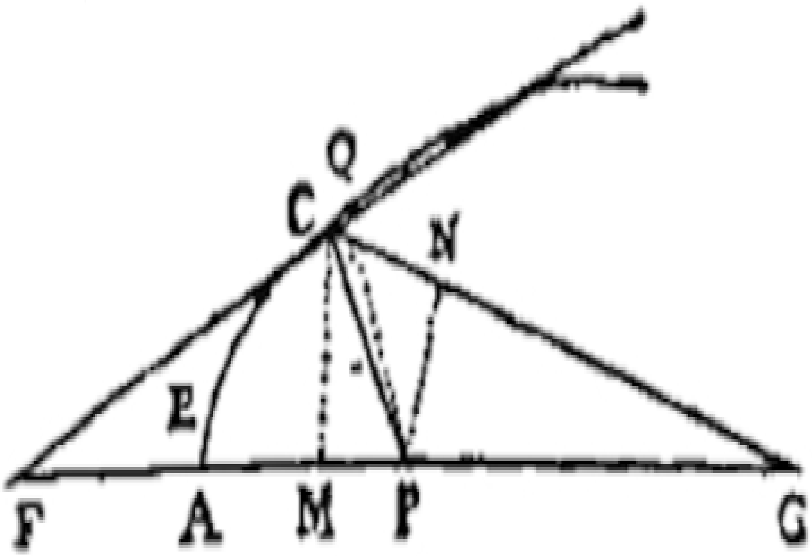



Figura extreta de: *La Geometria*

Com tenim l'equació de la corba $f(x, y) = 0$ i la de la circumferència, podem eliminar $x$ o $y$ i obtenir una equació resultant amb una arrel doble.
A gran escala, segons Barrios, el que feia Descartes era traçar una circumferència que talli la corba $f(x, y) = 0$ en dos punts. Aleshores, obliga a que l'arrel sigui doble passant de tenir 2 punts a un sol punt d'intersecció. D'aquesta manera la recta, abans secant, passa a ser tangent.
Sobre el procediment de trobada de rectes normals, previ al del càlcul de rectes normals, el propi Descartes tenia una gran opinió:
*M'atreveixo a dir que aquest [la determinació de rectes normals] és el problema més útil i el més general, no només dels que jo sàpiga sinó dels que jo hagi desitjat saber en Geometria.*

La primera aproximació del concepte de curvatura, que incialment Newton va anomenar *crookedness*[9], es va fonamentar en la geometria de Descartes. Newton, però, va utilitzar una segona versió del llibre de Descartes publicada al 1659. De fet, quan Newton ingressa a la Universitat de Cambridge, ho fa amb el llibre de Descartes entre els seus llibres de referència.

El naixement de la curvatura d'una corba plana es pot datar a finals del segle XVII, i el concepte presenta una disputa per la seva paternitat entre Leibniz i Newton.

[9]És un terme en anglès que literalment significa "torsió". És a dir, allò que no és recte. De manera figurada, és aquella persona que té falta d'integritat.

La disputa és deguda a què, al 1684, Leibniz publica *Nova methodus pro maximis and minimis*, on mostra el seu nou mètode. Dos anys més tard, l'any 1686, publica *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, on introdueix la circumferència osculatriu tot i que no presenta la forma analítica del seu radi. D'altra banda, Newton, l'any 1671, escriu la seva obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, que no fou publicada fins l'any 1736 (després de la seva mort). Per tant, el debat sobre la paternitat queda tancat. Tots dos van treballar de manera simultània i independent en aquest concepte.

A finals del segle XVII, també apareix la figura de Christiaan Huygens (1629-1695) amb la seva obra *Horologium Oscillatorium* de l'any 1673. A la segona part d'aquesta, demostra que la cicloide és una corba que compleix que un cos, seguint la seva trajectòria, trigarà el mateix temps fins arribar al punt més baix independentment del punt d'inici. Aquest fet el va portar a estudiar, a la tercera part, la teoria de les corbes evolutes.
Aquesta teoria parteix d'una corba $ABC$ a la qual s'enrotlla un fil flexible començant per $A$. Aquest fil es deslliga a partir del punt $B$ de tal forma que la part lliure sempre està estirada. Fent això per tots els punts de la corba, l'extrem del fil segueix una corba $A'B'C'$ que s'anomena *desenvolupada (evoluta)*, mentre que la corba sobre la que s'enrotlla el fil és la *desenvolupant*. Per Huygens, l'objectiu era trobar la corba desenvolupant de la cicloide. Això el portà a estudiar les relacions entre una corba i la seva desenvolupada.
En aprofundir en el tema, en la proposició XI, afirma que tota corba geomètrica còncava té una corba desenvolupada. Aquesta és la que dona de manera implícita un mètode per trobar el radi de curvatura de qualsevol arc còncau donat d'una corba. De manera indirecta, podríem dir que Huygens va determinar la "curvatura" de la cicloide.

# 3 Llibre i primers problemes

El *Tractatus de methodis serierum et fluxiorum* és una obra d'Isaac Newton acabada l'any 1671, tot i que no fou publicada fins 1736, on Newton exposa els fonaments d'un nou tipus de matemàtiques: "*Les primeres raons i últimes quantitats*" tal com ell ho va anomenar. Avui dia, és el que coneixem com a càlcul infinitesimal, ideat simultàniament amb Gotffried Leibniz.

A l'inici de l'obra s'exposen mètodes com el de la reducció dels quocients entre polinomis a sèries infinites o com extreure arrels quadrades dels binomis a partir d'un algorisme. També s'explica com trobar l'arrel d'una certa equació a partir del *mètode del paral·lelogram.* Aquests temes, malgrat ser interessants i importants en el desenvolupament del llibre estan fora de l'objectiu d'aquest treball.

En l'apartat anterior hem vist una breu introducció històrica del concepte de curvatura. En aquest, afegirem un context en l'aparició del concepte en el llibre anteriorment mencionat. Partint del que Newton anomena *fluxió* exposant de manera breu els quatre problemes previs fins arribar al problema V, el que analitzarem en detall. Per contextualitzar, cal però, introduir la nomenclatura bàsica newtoniana.

## 3.1 Nomenclatura bàsica newtoniana

Anomena **fluents** a les quantitats graduals que incrementen indefinidament. Les representa per $v, x, y, z$ i les distingueix de les suposaddament conegudes que les anomena $a, b, c....$ De fet, la notació de les últimes lletres de l'alfabet ja va ser introduïda per Descartes en la seva obra *La Geometria.*

A les velocitats per les quals cada fluent és incrementada pel seu moviment generador ho anomena **fluxions** (tot i que també ho anomenarà velocitats o celeritats). Aquestes fluxions es representen per les lletres amb un puntet a sobre: $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. En la notació actual més habitual es fa servir $\frac{dx}{dt}$.

En la notació newtoniana, un punt$(x, y)$ després d'aplicar-li un petit increment queda com $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$. En la notació actual quedaria: $(x + v_x\Delta t, y + v_y\Delta t)$.

**Exemple 3.1.** $y = x^2$ on $x \longmapsto x + \dot{x}o$ i $y \longmapsto y + \dot{y}o$.
Aleshores tenim: $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2 \Leftrightarrow x^2 + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2 \Leftrightarrow x^2 + \dot{y}o = x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$
Simplificant els termes iguals i dividint tot per $o$ que és diferent de zero obtenim:
$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2o$. Finalment fent tendir $o$ cap a zero: $\dot{y} = 2x\dot{x}$

**Exemple 3.2.** Veiem la regla del producte habitual tal com la va desenvolupar Newton.
Sigui $z = xy$ i com abans, $x \longmapsto x + \dot{x}o$, $y \longmapsto y + \dot{y}o$ i $z \longmapsto z + \dot{z}o$ .
Aleshores tenim: $z + \dot{z}o = (x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) \Leftrightarrow z + \dot{z}o = xy + x\dot{y}o + \dot{x}yo + \dot{x}\dot{y}o^2$.
Simplificant els termes iguals i dividint tot per $o$ que és diferent de zero obtenim:
$\dot{z} = x\dot{y} + \dot{x}y + \dot{x}\dot{y}o$. Finalment fent tendir $o$ cap a zero: $\dot{z} = x\dot{y} + \dot{x}y$.

## 3.2 Transició al mètode de les fluxions

En aquest apartat Newton introdueix els conceptes i les idees necessàries per arribar al tema principal de les *fluxions*.

*Tranſition to the* METHOD OF FLUXIONS.

55. And thus much for the Methods of Computation, of which I ſhall make frequent uſe in what follows. Now it remains, that for an Illuſtration of the Analytick Art, I ſhould give ſome Specimens of Problems, eſpecially ſuch as the nature of Curves will ſupply. But firſt it may be obſerved, that all the difficulties of theſe may be reduced to theſe two Problems only, which I ſhall propoſe concerning a Space deſcribed by local Motion, any how accelerated or retarded.

En el text diu: "[...] *Donaré algunes espècies de problemes, especialment aquells relacionats amb la naturalesa de les corbes. Però primer cal observar que totes les dificultats d'aquests problemes es poden reduir en dos problemes només, els quals proposo relacionats amb l'espai descrit pel moviment local i com s'accelera o com es retarda.*"

Aquests dos problemes els podem expressar com:

1. Donada la longitud de l'espai descrit de manera contínua; trobar la velocitat del moviment en qualsevol temps proposat.
2. Donada la velocitat del moviment de manera contínua; trobar la longitud de l'espai descrit en qualsevol temps proposat.

**Exemple 3.3.** En l'equació $y = xx$, si $y$ representa la longitud de l'espai en qualsevol temps, amb el qual es descriu un altre espai $x$ que augmenta amb una velocitat uniforme $\dot{x}$, aleshores $2\dot{x}x$ representarà la velocitat per la qual l'espai $y$ passa a ser descrit(en el mateix instant).

Finalitzada la introducció cap al mètode de les fluxions juntament amb la nomenclatura necessària podem introduir els primers problemes plantejats per Newton que deriven cap al problema V.

## 3.3 Primers problemes

### 3.3.1 Problema I

El problema 1 diu: **Donada la relació entre les quantitats fluents, determinar les relacions entre les seves fluxions.**

La solució proposada per Newton en el llibre la podríem traduir a llenguatge modern de la següent manera:
Prenem l'equació que presenta la relació entre les quantitats fluents (suposem $x$, per exemple):

$$\sum_k a_k x^k = 0$$

Mutipliquem cada terme $x^k$ per $k$ i després per $\frac{\dot{x}}{x}$ de tal manera que: $x^k \longmapsto k\frac{\dot{x}}{x}x^k$.
Finalement, fem la suma per tots els $k$ i obtenim l'equació requerida per les fluxions:

$$\sum_k a_k k\frac{\dot{x}}{x}x^k = 0$$

**Exemple 3.4.** Prenem la relació entre les quantitats fluents $x$ i $y$ donada per: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.
Treballem els termes amb $x$. Ho fem en forma de taula en la qual mutipliquem la primera fila per la segona donant com a resultat la tercera

$$\begin{array}{cccc} x^3 & -ax^2 & axy & -y^3 \\ 3\frac{\dot{x}}{x} & 2\frac{\dot{x}}{x} & 1\frac{\dot{x}}{x} & 0 \\ \hline 3\dot{x}x^2 & -2a\dot{x}x & ay\dot{x} & 0 \end{array}$$

Fem el mateix amb la variable $y$.

$$\begin{array}{ccc} -y^3 & axy & x^3 - ax^2 \\ 3\frac{\dot{y}}{y} & \frac{\dot{y}}{y} & 0 \\ \hline -3\dot{y}y^2 & a\dot{y}x & 0 \end{array}$$

Per tant, ens queda com a resultat: $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$

### 3.3.2 Problema II

El problema 2 diu: **Donada una equació que inclou les fluxions de les quantitats, trobar les relacions d'aquestes quantitats entre elles.**
En certa manera, aquest problema II seria el problema invers a l'anterior. Cal trobar la relació entre les quantitats fluents donada la relació entre les fluxions. Com cal esperar, la resolució consisteix en la divisó dels termes $x^k$ pel quocient $\frac{\dot{x}}{x}$ i pel nombre de dimensions (suma de l'exponent dels termes de fluxions i les quantitats fluents).

**Exemple 3.5.** Prenem la relació incloent fluxions següent:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0.$$

Calculem l'operació per les x. S'ha d'interpretar la taula com que dividim la primera fila per la segona donant com a resultat la tercera.

$$\begin{array}{ccc} 3\dot{x}x^2 & -2a\dot{x}x & a\dot{x}y \\ 3\frac{x}{x} & 2\frac{x}{x} & 1\frac{x}{x} \\ \hline x^3 & -ax^2 & ayx \end{array}$$

Fem el mateix amb la quantitat fluent $y$.

$$\begin{array}{cc} -3\dot{y}y^2 & a\dot{y}x \\ 3\frac{\dot{y}}{y} & 1\frac{\dot{y}}{y} \\ \hline -y^3 & axy \end{array}$$

Aleshores queda: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

**Observacions 3.6.** El terme $axy$ surt dos cops i no es posa en el recompte final ja que rebutjem el terme redundant. Així quan un terme aparegui dos o més cops s'escriurà només una vegada en el total de la suma.
Un cop obtinguda la relació entre les quantitats fluents podem seguir el mètode del problema I per comprovar que el càlcul sigui correcte. En canvi, si proposem l'equació: $x\dot{x} - \dot{x}y + a\dot{y}x = 0$ amb el mètode que acabem d'explicar obtenim: $\frac{1}{2}x^2 - xy + ay = 0$ i d'aquí pel problema I obtenim: $x\dot{x} - \dot{x}y + \dot{y}x + a\dot{y}x = 0$ que és diferent a l'equació inicial. És per això que Newton proposa un mètode general, lluny de l'objectiu del nostre treball.

### 3.3.3 Problema III

El problema III diu: **Determinar els màxims i mínims de certes quantitats.**
Segons Newton: *Quan una quantitat és la major o menor de totes les possibles, en aquell moment no flueix ni cap endavant ni cap enrere. Si fluís cap endavant, o augmentés, aleshores aquest fet provaria que seria menor i hauria de ser major del que és. Contràriament, si flueix cap enrere o decreix. Per tant, cal trobar la seva fluxió, seguint el problema I, i suposar que és igual a res.*

**Exemple 3.7.** Volem trobar el màxim valor de la quantitat fluent $x$ de l'equació

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Procedim de manera ordenada:

1. A partir del problema I podem trobar la relació entre les fluxions. Per a les $x$:

$$\begin{array}{cccc} x^3 & -ax^2 & axy & -y^3 \\ 3\frac{\dot{x}}{x} & 2\frac{\dot{x}}{x} & 1\frac{\dot{x}}{x} & 0 \\ \hline 3x^2\dot{x} & -2ax\dot{x} & ay\dot{x} & 0. \end{array}$$

   Per a les $y$:

$$\begin{array}{ccc} -y^3 & axy & x^3 - ax^2 \\ 3\frac{\dot{y}}{y} & 1\frac{\dot{y}}{y} & 0 \\ \hline -3y^2\dot{y} & ax\dot{y} & 0. \end{array}$$

   Així tenim: $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0$.

2. Fem $\dot{x} = 0$ i obtenim: $-3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0$.

3. Podem simplificar-ho a $3y^2 = ax \Rightarrow x = \frac{3y^2}{a}$ és el valor màxim de la $x$ que buscàvem.

**Observació 3.8.** Newton proposa una altra manera de resoldre aquest problema. Aquest consisteix en mutiplicar cada terme de l'equació donada per la dimensió de l'altra quantiat fluent $y$. Així en l'exemple anterior tindríem: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \longmapsto 0x^3 - 0ax^2 + 1axy - 3y^3 = 0$. I així s'obté l'equació: $axy - 3y^3 = 0$ com calia esperar. Aquesta forma de resolució és equivalent a la *regla de Hudde*[10] la qual Newton relaciona amb els seus càlculs i a més l'exemplifica de manera detallada.

Newton però assegura que ni la regla de Hudde ni cap altra de les publicades fins aleshores es podien estendre per qualsevol equació. Per a poder aplicar-ho calia fer una reducció com es mostra en el següent exemple

[10] Si una equació té dues arrels iguals i multipliquem l'equació per una progressió aritmètica arbitrària de manera que el primer terme de l'equació queda multiplicat pel primer terme de la progressió i així successivament, llavos el producte obtingut serà una equació que té de nou l'arrel donada. (publicat l'any 1659 en *La Geometria* de Descartes.)

**Exemple 3.9.** Volem determinar el màxim o mínim del fluent $y$ de l'equació

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay+x^2} = 0$$

Buscant les equacions de les fluxions, com sempre amb el procediment del problema I, obtenim la relació següent

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}y^2 + ab\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2} - \frac{4a\dot{x}xy + 6\dot{x}x^3 + a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+x^2}} = 0$$

Suposem $\dot{y} = 0$, ja que busquem la quantitat màxima o mínima del fluent $y$. Així eliminant els termes $\dot{y}$ i dividint per $x\dot{x}$ l'expressió anterior queda

$$3x - \frac{2ay+3x^2}{ay+x^2} = 0$$

Fent la reducció es pot arribar a l'expresió $4ay + 3x^2 = 0$ de la qual es pot obtenir o bé $x$ o bé $y$.

En aquest problema III, Newton acaba concloent que permet donar la solució dels problemes següents:

1. Donat un triangle inscriure el rectangle d'àrea més gran.
2. Dibuixar la recta més gran (o petita) que sigui tangent a una corba passant per un punt donat.
3. D'un punt donat d'una paràbola (o corba arbitrària), dibuixar la recta que talla la paràbola més oblíquament que les altres.
4. Determinar els vèrtexs de corbes
5. Trobar els punts de les corbes on la curvatura és màxima o mínima.
6. Donats quatre punts pels quals passa una el·lipse trobar aquella que s'aproxima més a la circumferència.

### 3.3.4 Problema IV

El problema 4 diu: **Dibuixar tangents a una corba.**

Prenem $BD$ com a ordenada i $AB$ com a abcissa i una corba qualsevol passant per $D$ i $E$. A continuació, incrementem indefinidament l'espai per obtenir la recta $bd$ on l'abcissa s'ha augmentat en $Bb$ (que és igual a $DC$) i l'ordenada s'ha incrementat en $Cd$.
Prenem $Dd$ de tal manera que intersecccioni amb $AB$ en $T$, i aquesta recta toqui la corba en $D$ o $d$. Així el triangle $dCD$ i el triangle $DBT$ seràn semblants. Quan això passi, es complirà $\frac{TB}{BD} = \frac{DC}{Cd}$.

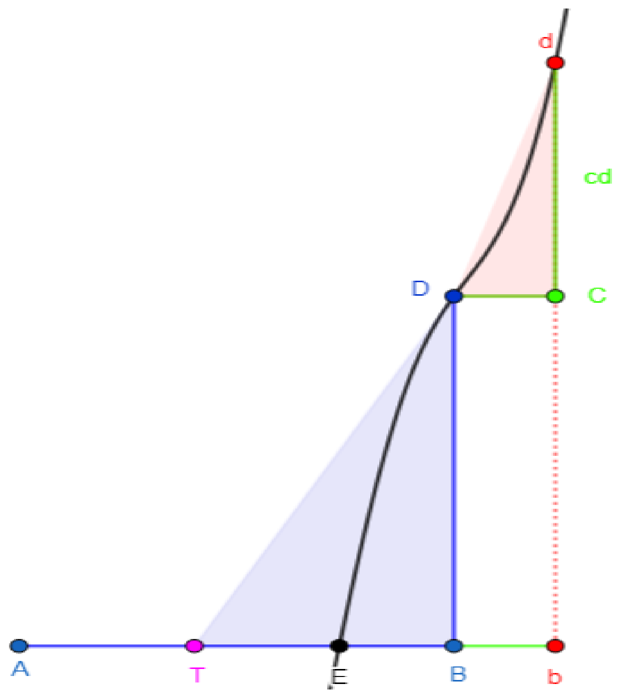



Figura extreta de: Retall GeoGebra [11]

Com la relació entre $Bd$ i $AB$ vindrà donada per l'equació de la corba pertinent, doncs són les quantitats fluents $x$ i $y$, cal cercar la relació entre les fluxions. Estem doncs davant d'un problema ja conegut. Aquest problema ja ha estat presentat en el problema I on coneguda la relació entre les quanitats fluents som capaços d'obtenir les relacions entre les fluxions.
La raó entre $TB$ i $BD$ ha de ser la mateixa que la raó entre la fluxió de $AB$ i la fluxió de $BD$ i $TD$ passarà a ser la recta tangent a la corba en el punt $D$.

[11] Geogebra construït per il·lustrar millor els passos a seguir així com l'opció de comprovar els càlculs de manera gràfica per fer-los més entenedors.
Enllaç: https://www.geogebra.org/calculator/w4yjceej

**Exemple 3.10.** Anomenem $x = AB$ i $y = BD$ i prenenem la relació entre els fluents com:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

Aquesta relació és la mateixa que s'ha escollit en l'exemple del problema I on s'ha vist que la relació entre les fluxions és:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0.$$

Tenim doncs:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{BD}{BT} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{BT} \Rightarrow BT = \frac{\dot{x}y}{\dot{y}}$$

De la relació entre les fluxions obtenim:

$$\dot{x} = \frac{3\dot{y}y^2 - a\dot{y}x}{3x^2 - 2ax + ay} \Rightarrow BT = \frac{3\dot{y}y^2 - a\dot{y}x}{3x^2 - 2ax + ay}\frac{y}{\dot{y}} \Rightarrow BT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$$

Aleshores, donat el punt $D$ de la corba ($D(x, y)$ per remarcar que depèn dels fluents $x, y$.) es pot determinar els valors de $AB$ $(= x)$ i el de $DB$ $(= y)$ i així la longitud $BT$ pot ser trobada i per tant, la tangent **TD** queda determinada.

# 4 Anàlisi del problema V

El problema V del llibre *Tractat sobre els mètodes de les sèries i les fluxions* diu:
***Trobar la curvatura de qualsevol corba en un punt donat* .**

Newton ja va remarcar que aquest problema tenia una "marca d'elegància excepcional" i que seria "de gran utilitat en la ciència de les corbes".

## 4.1 Idees prèvies

Per construir les bases d'aquest problema, Newton aclareix que són necessàries unes generalitats prèvies que cal tenir en consideració:

1. Un mateix cercle té a tot arreu la mateixa curvatura, i la curvatura de cercles diferents són inversament proporcionals als seus diàmetres [...]

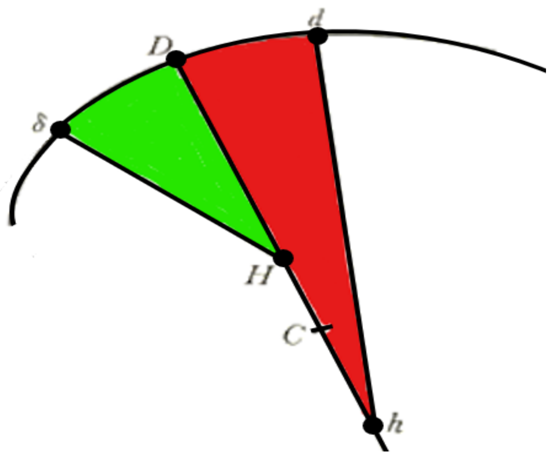
2. Si un cercle toca la corba en la seva zona còncava, en un punt donat, i és de tal magnitud que no hi ha cap altre cercle tangent que es pugui dibuixar en els angles de contacte veïns a aquest punt, aleshores el cercle té la mateixa curvatura que la corba en el punt de contacte.[...]

3. El *centre de curvatura* en algun punt d'una corba és el centre d'un cercle igualment corbat. D'aquesta manera el *radi de curvatura* és la porció de la normal que acaba al centre.

4. La relació de curvatura en els diferents punts s'obté de la porció de curvatura de cercles igualment corbats o de la inversa del radi de curvatura.

El problema V es reduiex a aquest punt 4. És a dir, cal trobar o bé el radi de curvatura o bé el centre de curvatura.

Prenem tres punts $\delta, D$ i $d$ d'una corba tal com es mostra en el dibuix. Prenem les rectes normals i anomenen $H$ la intersecció entre la recta normal de $D$ i $\delta$. D'igual forma anomenem $h$ a la intersecció entre la recta normal de $d$ i la de $D$.
Si la curvatura de la zona $D\delta$ és més gran que la de $Dd$ aleshores $\delta H < dh$. Com més a prop siguin les normals $\delta H$ i $dh$ a la del mig, menys distància hi haurà entre $h$ i $H$.
Finalment, quan coincideixen les longituds de les normals, aleshores $H = h$ i el punt coincident l'anomenem $C$ que serà el *centre de curvatura.*



El punt $C$ té diverses condicions de definició que permeten determinar-lo:

1. El punt que fa coincidir les normals a distàncies indefinidament petites de $DC$ en qualsevol de les dues bandes.
2. El punt que separa les interseccions de les normals en un petit entorn finit en una zona i una altra, de tal manera que en la zona més corbada $D\delta$ s'arrriba més ràpidament a $H$, mentre que a l'altra zona, $Dd$ ho fa més lentament cap a $h$.
3. Si prenem $DC$ movent-se mentre continua en posició normal a la corba, el punt $C$ no es mourà en absolut, sinó que tindrà la naturalesa d'un centre de moviment.
4. Sigui un cercle amb centre $C$ i radi $DC$, no hi haurà cap altre cercle descrit que reposi en l'entorn del punt de contacte.
5. Si el centre d'algun altre cercle tangent s'aproxima gradualment al centre $C$ fins arribar a coincidir, aleshores algun dels punts en els que el cercle anterior talla la corba coincidirà amb el punt de contacte $D$.

De les 5 definicions aquí esmentades ens quedarem amb la primera ja que és la més simple.

## 4.2 Càlcul de la curvatura

Per calcular la posició del punt C, abans esmentat cal seguir els passos que hem elaborat en un GeoGebra [12] per tal de fer-ho més entenedor i dibuixant per passos el que es recull en el següent paràgraf:

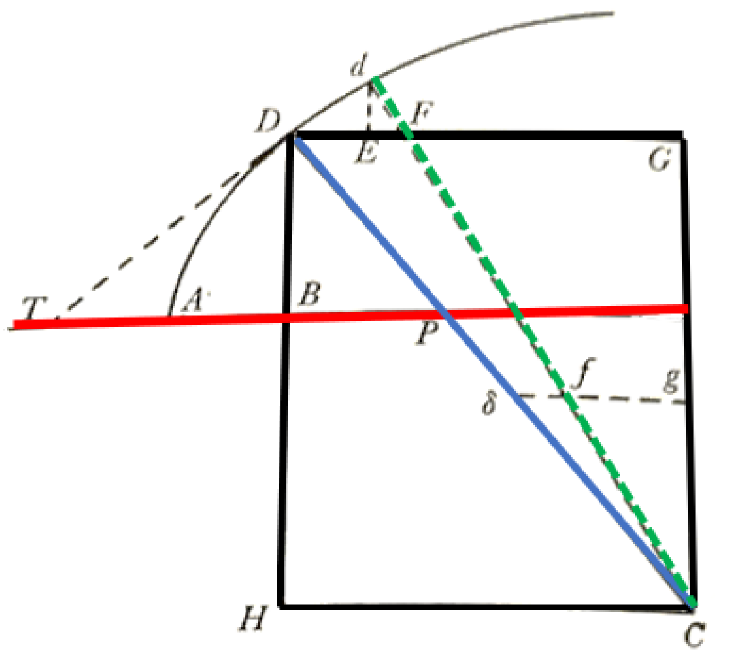
> At any point $D$ you please of the curve let $DT$ be tangent, $DC$ normal and $C$ the curvature centre, as before. Again, let $AB$ be the base to which $DB$ is applied at right angles[280] and which is met by $DC$ in $P$. Draw $DG$ parallel to $AB$ and $CG$ perpendicular, taking in it $Cg$ of any given size, and raise the perpendicular $g\delta$ till it meets $DC$ in $\delta$: then will there be $Cg{:}g\delta(=TB{:}BD)$ the ratio of the fluxion of the base to that of the ordinate.[281] Imagine, furthermore, that the point $D$ advances through the infinitely small distance $Dd$ and draw $dE$ perpendicular to $DG$ and $Cd$ normal to the curve, the latter meeting $DG$ in $F$ and $\delta g$ in $f$: then will $DE$ be the moment of the base, $dE$ that of the ordinate and $\delta f$ the contemporaneous moment of the straight line $g\delta$. Also
>
> $$DF = DE + dE^2/DE.^{(282)}$$
>
> Accordingly, when the ratios of these moments—or, what is the same, those of the generating fluxions—are had, there will be obtained the ratio of $GC$ to the given quantity $gC$ (seeing that this is that of $DF$ to $\delta f$) and by this the point $C$ will be determined.

Aquest és un retall extret del llibre: *The mathematical papers of Isaac Newton Volum III* (1670-1673).

El GeoGebra té unes instruccions que cal seguir en ordre. En primer lloc, partim d'un punt $D$ i una corba qualsevol i dibuixem un punt $d$ a una distància $\varepsilon$ de $D$ que utilitzarem més endavant.

[12] Link del GeoGebra: https://www.geogebra.org/calculator/xeffcswe

1. Dibuixem la recta $DT$ tangent al punt $D$.
2. Dibuixem el cercle osculador [13] ja que així $C$ serà el centre de curvatura. (Newton ho calcularia com en la secció anterior.) També dibuixem la recta $DC$ normal a la recta tangent $DT$.
3. Prenem un punt qualsevol de la corba, $A$. Definim la ecta $h$ com la recta perpendicular a $AT$ que passa per $D$. Aquesta recta será doncs la recta $BD$. I anomenem $B$ al punt d'intersecció de $AB(= AT)$ i $h(= BD)$.
4. Dibuixem $P$ que és la intersecció de $AB(= AT)$ i $DC$.
5. Prenem $DG$ paral·lela a $AB(= AT)$ i $CG$ perpendicular a aquesta, tot dibuixant $G$ com a intersecció de les dues.
6. Prenem $g$ com un punt qualsevol de $CG$ (es pot modificar arrosegant el punt. Per defecte pren $g = G$). Aleshores tracem $g\delta$ perpendicular a $CG$ passant per $g$ i que talli $DC$ en el punt $\delta$.
7. Comprovació de que efecitvament es compleix $Cg : g\delta(= TB : BD)$.
8. Partint del punt pròxim a $D$, el punt $d$, dibuixem la recta perpendicular a $DG$ que l'anomenem $dE$ on $E$ és el punt que talla amb la recta $DG$.
9. Dibuixem $Cd$ i anomenem $f$ la intersecció de $\delta d$ i $F$ a la intersecció amb $DG$.
10. Finalment, tenim que $DE$ serà el moment de les abscisses, $dE$ será el de les ordenades i $\delta f$ el moment contemporani de la recta $g\delta$. Per tant, $DF = DE + \frac{dE^2}{DE}$.

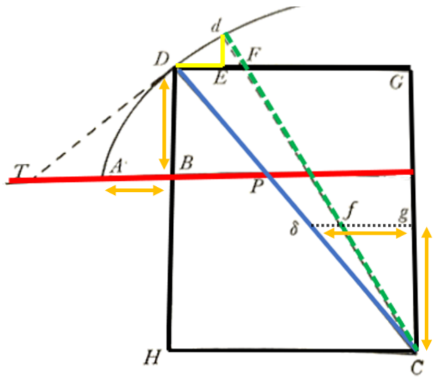



[13] El cercle osculador és el que el centre es troba sobre la recta normal a la corba i té la mateixa curvatura que la corba donada. El seu radi és el *radi de curvatura* i el seu centre, el *centre de curvatura.*

Arribats a aquest punt, tenim la relació entre les fluxions generadores. A partir d'aquesta es podrà obtenir el valor $GC$ donada $gC$ inicialment. Aquesta raó és la mateixa que entre $DF$ i $\delta f$. Amb aquestes relacions el punt $C$ podrà ser determinat. Veiem un procediment a seguir de manera general.
Anomenem $AB = x$, $BD = y$, $Cg = 1$ i $g\delta = z$ (marcats amb doble fletxa en el dibuix adjunt). Aleshores:

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}} \tag{4.1}$$

Al moment de $z$ l'anomenem $\delta f = \dot{z}o$ , el moment de $DE = \dot{x}o$ i el moment $dE = \dot{y}o$ (els tres moments s'han marcat amb groc). Pel fet que $DF = DE + \frac{dE^2}{DE} \Rightarrow DF = \dot{x}o + \frac{(\dot{y}o)^2}{\dot{x}o} \Rightarrow DF = \dot{x}o + \frac{\dot{y}^2 o}{\dot{x}}$




Per tant tenim $\frac{Cg(=1)}{CG} = \frac{\delta f}{DF} = \frac{\dot{z}o}{\dot{x}o + \frac{\dot{y}^2 o}{\dot{x}}}$. I d'aquí arribem a la conclusió que $CG = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}$

Degut a la llibertat d'escollir la "velocitat"en l'eix $x$ podem prendre, sense pèrdua de generalitat $\dot{x} = 1$. Això fa que per 4.1 tinguem $z = \dot{y}$ i per tant, $CG = \frac{1+\dot{y}^2}{\dot{z}}$

$$\boxed{CG = \frac{1 + z^2}{\dot{z}}} \tag{4.2}$$

Per semblança de triangles tenim $\frac{CG}{DG} = \frac{Cg}{\delta g} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow DG = zCG$. És a dir:

$$\boxed{DG = \frac{z + z^3}{\dot{z}}} \tag{4.3}$$

D'aquí pel teorema de Pitàgores obtenim $DC = \sqrt{(DG)^2 + (CG)^2} \Leftrightarrow DC = \sqrt{\frac{(z+z^3)^2}{\dot{z}^2} + \frac{(1+z^2)^2}{\dot{z}^2}}$ d'on:

$$\boxed{DC = \frac{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}}{\dot{z}}} \tag{4.4}$$

## 4.3 Exemples

En aquest capítol treballarem alguns exemples per mostrar el càlcul a l'estil newtonià de la "quantitat de curvatura".

L'exemple general anterior ens dona una manera de procedir . Donada la relació entre $x = AB$ i $y = BD$ que ve donada per l'equació de la corba, el primer que cal cercar és la relació entre $\dot{x}$ i $\dot{y}$ mitjançant el problema I. En segon lloc, subsituir $\dot{x} = 1$ i $\dot{y} = z$. En tercer lloc, calcular, de nou pel problema I, la relació entre $\dot{x}, \dot{y}$ i $\dot{z}$ substituint de nou $\dot{x} = 1$ i $\dot{y} = z$. Finalment, amb els valors de $z$ i $\dot{z}$ es pot determinar $CG = \frac{1+z^2}{\dot{z}}$.

**Exemple 4.1.** Prenem l'equació $ax + bx^2 - y^2 = 0$ que correspon a l'equació d'una hipèrbola en la qual $a$ és el que s'anomena *latus rectum* [14] i es mostra en la gràfica següent.

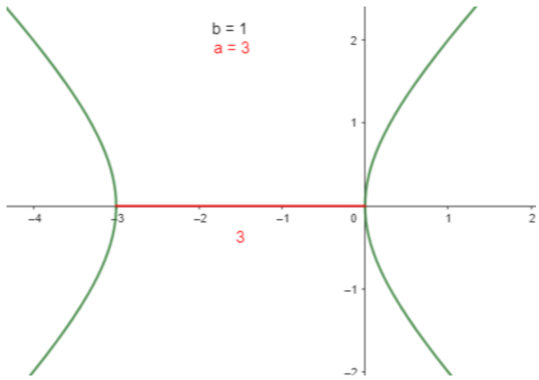



Figura extreta d'un retall de GeoGebra prenent $a = 3$ i $b = 1$ en l'equació inicial.

Aplicarem el mètode explicat a l'inici del capítol. Per això cal trobar la relació entre les fluxions emprant el sistema ja explicat en el problema I:
Per a les $x$:

$$\begin{array}{ccc} ax & bx^2 & -y^2 \\ \frac{\dot{x}}{x} & 2\frac{\dot{x}}{x} & 0 \\ \hline a\dot{x} & 2b\dot{x}x & 0 \end{array}$$

Per a les $y$:

$$\begin{array}{cc} ax + bx^2 & -y^2 \\ 0 & 2\frac{\dot{y}}{y} \\ \hline 0 & -2\dot{y}y \end{array}$$

Queda doncs l'expressió: $a\dot{x} + 2b\dot{x}x - 2\dot{y}y = 0 \Leftrightarrow \boxed{a + 2bx - 2zy = 0}$ on s'ha substituït $\dot{x} = 1$ i $\dot{y} = z$.

[14] Es tracta d'un segment de línea que passa a través dels focus de la cònica, és perpendicular al eix major i té els punts finals en la corba. Va ser explícitament introduït per Apol·loni malgrat que va ser Arquímedes (287-212 a.C) qui primer va calcular-ho en la seva obra: *Tractat sobre conoides i esfereoides*.

Calculem, de nou mitjantçant el problema I, per aquesta nova expressió trobada, la expressió per les fluxions.

Per a les $x$:

$$\begin{array}{cc} 2bx & a-2zy \\ \frac{\dot{x}}{x} & 0 \\ \hline 2b\dot{x} & 0 \end{array}$$

Per a les $y$:

$$\begin{array}{cc} -2zy & a+2bx \\ \frac{\dot{y}}{y} & 0 \\ \hline -2z\dot{y} & 0 \end{array}$$

Per a les $z$:

$$\begin{array}{cc} -2zy & a+2bx \\ \frac{\dot{z}}{z} & 0 \\ \hline -2y\dot{z} & 0 \end{array}$$

Queda doncs l'expressió: $-2z\dot{y} - 2y\dot{z} + 2b\dot{x} = 0 \Leftrightarrow -z^2 - y\dot{z} + b = 0$ on s'ha substituït $\dot{x} = 1$ i $\dot{y} = z$ de nou. Per tant obtenim l'equació:

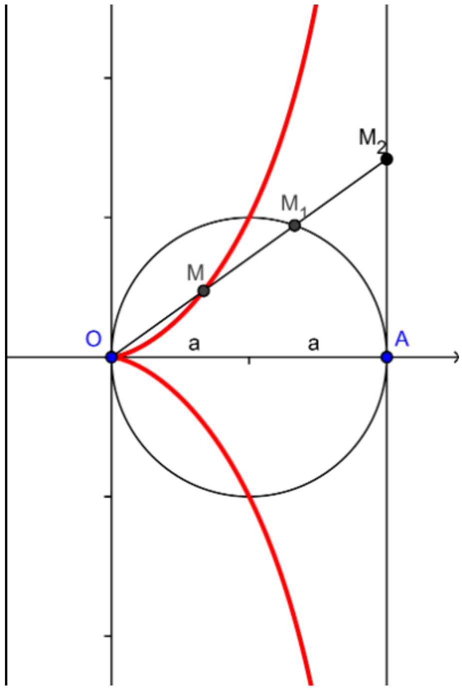
$$\boxed{\dot{z} = \frac{b - z^2}{y}}$$

Finalment, donat qualsevol punt $D$ de la corba, és a dir, els valors $x$ i $y$ podrem obtenir els valors de $z$ i $\dot{z}$. Aleshores de l'equació 4.2 obtenim $GC(\equiv DH)$ i podem dibuixar $HC$ que és perpendicular.

Si prenem $a = 3$ i $b = 1$, aleshores la hipèrbola queda $3x + x^2 = y^2$. Triem $x = 1 \Rightarrow y = 2$. I per tant, de l'equació de la primera part de l'exercici obtenim $z = \frac{5}{4}$ i de la segona, $\dot{z} = \frac{-9}{32}$. Per tant, de 4.2 tenim $CG = |\frac{1+(\frac{5}{4})^2}{\frac{-9}{32}}| = \frac{82}{9}$. De 4.3, obtenim $DG = \frac{205}{18}$ i així obtenim, seguint 4.4, el valor del radi de curvatura:

$$\boxed{DC = \sqrt{\frac{68921}{324}} \simeq 14.585}$$

**Exemple 4.2.** Prenem l'equació entre les fluents $x^3 = ay^2 - xy^2$, que és l'equació del que s'anomena *cissoide de Diocles*[15]. Mostrem la seva gràfica.




Calculem primer la relació entre les fluxions seguint el model del problema I. Per fer això ho fem per cada variable.

Per a les x:

$$\begin{array}{ccc} x^3 & xy^2 & -ay^2 \\ \frac{3\dot{x}}{x} & \frac{\dot{x}}{x} & 0 \\ \hline 3x^2\dot{x} & y^2\dot{x} & 0 \end{array}$$

Per a les y:

$$\begin{array}{cc} (x-a)y^2 & x^3 \\ \frac{2\dot{y}}{y} & 0 \\ \hline 2(x-a)y\dot{y} & 0 \end{array}$$

Per tant, agrupant els termes i igualant a zero de manera habitual, s'obté l'expressió $3x^2\dot{x} + y^2\dot{x} + 2(x-a)y\dot{y} = 0$, que és la relació entre les fluxions.
Ara substituint $\dot{x} = 1$ i $\dot{y} = z$, com anteriorment, ens queda l'expressió $\boxed{3x^2 + y^2 + 2(x-a)yz = 0}$

De nou cal aplicar el problema I a les 3 variables de l'equació que s'acaba d'obtenir. Procedim variable a variable.

[15] Corba generada pel vector posició d'una recta paral·lela a l'eix $OY$, que passa pel punt $(2a, 0) \equiv A$(en la gràfica), a la qual se li resta el radi vector d'una circumferència de radi i centre en $(a, 0)$. En cada punt $M$ es compleix que $OM = M_1M_2$.

Per a les x:

$$\begin{array}{ccc}
3x^2 & 2xyz & y^2-2ayz \\
\frac{2\dot{x}}{x} & \frac{\dot{x}}{x} & 0 \\
\hline
6x\dot{x} & 2yz\dot{x} & 0
\end{array}$$

Per a les y:

$$\begin{array}{ccc}
y^2 & 2(x-a)yz & 3x^2 \\
\frac{2\dot{y}}{y} & \frac{\dot{y}}{y} & 0 \\
\hline
2y\dot{y} & 2(x-a)z\dot{y} & 0
\end{array}$$

Per a les z:

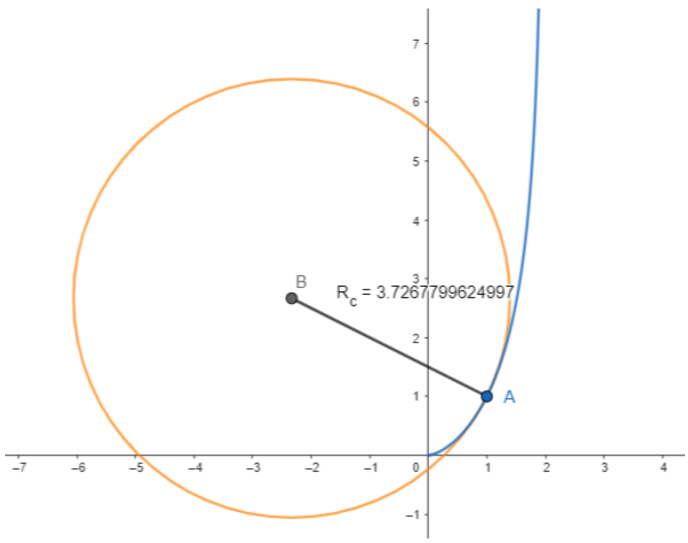
$$\begin{array}{cc}
2(x-a)yz & 3x^2+y^2 \\
\frac{\dot{z}}{z} & 0 \\
\hline
2(x-a)y\dot{z} & 0
\end{array}$$

Per tant queda l'expressió $6x\dot{x}+2yz\dot{x}+2y\dot{y}+2(x-a)z\dot{y}+2(x-a)y\dot{z}=0$ que substituint de nou $\dot{x}=1$ i $\dot{y}=z$ obtenim $6x+2yz+2yz+2(x-a)zz+2(x-a)y\dot{z}=0 \Leftrightarrow 6x+4yz+2(x-a)z^2+2(x-a)y\dot{z}=0$. Queden doncs les següents expressions:

$$\boxed{z=\frac{3x^2+y^2}{2ay-2xy}} \text{ i } \boxed{\dot{z}=\frac{3x-az^2+2zy+xz^2}{ay-xy}}$$

Aleshores, donat qualsevol punt de la cissoide podrem trobar $z$ i després $\dot{z}$ que ens permet calcular $DC$ gràcies a la fórmula 4.4.

Prenem per exemple $a=2$ i volem calcular el radi de curvatura en el punt $(1,1)$ per facilitar els càlculs. Amb aquests valors tenim $z=2 \Rightarrow \dot{z}=3$ i aleshores per 4.4 tenim que $DC=\frac{1}{3}\sqrt{5^3}=\frac{5\sqrt{5}}{3}\simeq 3.726$.



En aquest dibuix es mostra un retall d'un GeoGebra que s'ha fet servir a mode de comprovació. S'ha dibuixat la part positiva de la cissoide, el punt $A = (1, 1)$ i s'ha demanat que calculi la circumferència oscultatriu en aquell punt. Finalment, es mostra el valor del radi obtenint així el mateix valor que el radi de curvatura.

Finalment, a mode de comprovació general s'ha realitzat un Geogebra[16] més complet en el que s'ha dibuixat la cissoide amb una $a$ general que es pot variar amb un cursor i s'ha pres un punt $A$ de corba genèric, que també es pot variar. Aleshores s'ha dibuixat la circumferència osculatriu (opció existent en el GeoGebra) i s'ha calculat el valor del seu radi.
Per altra banda, s'ha calculat l'expressió de $z$ ($s$ en el GeoGebra) en funció del punt $A$, a partir d'aquest $\dot{z}$ ($b$ en el GeoGebra) i amb els dos, amb l'expressió 4.4 s'ha calculat $DC$ ($r$ en el GeoGebra). Aleshores s'ha representat la recta $x = DC = r$ per mostrar el seu valor i comprovar que coincideix amb el valor del radi calculat anteriorment.

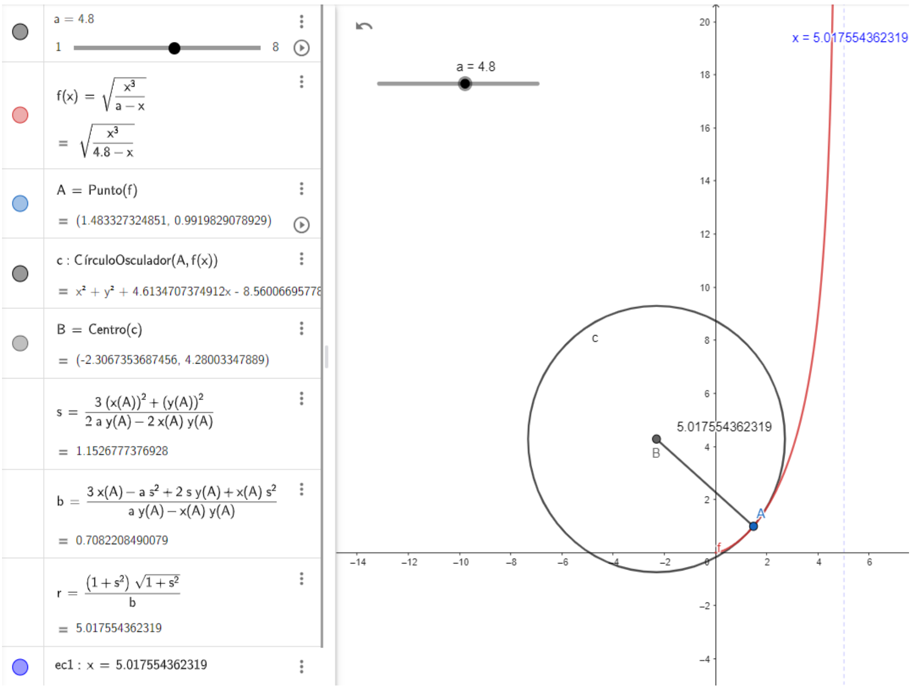
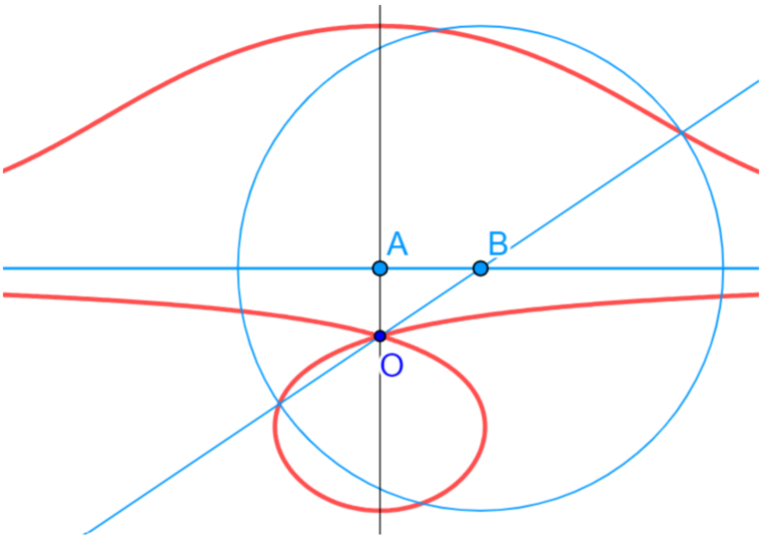



Figura: Retall GeoGebra amb $a = 4.8$ i el punt $A = (1.48333, 0.99198)$

[16]Enllaç: https://www.geogebra.org/calculator/jgvbak7s

**Exemple 4.3.** Prenem la corba $(b+y)\sqrt{c^2-y^2}=xy$ que és la equació d'una *concoide*[17]. Veiem la seva gràfica general.




Anomenem $v=\sqrt{c^2-y^2}$ i així tenim $bv+yv=xy$. Cal parar atenció al fet que $v^2=c^2-y^2 \Rightarrow 2v\dot{v}=-2yz$

Pel problema I [18], obtenim la relació entre les fluxions $b\dot{v}+\dot{y}v+y\dot{v}=\dot{x}y+\dot{y}x=0 \Leftrightarrow$ $\boxed{b\dot{v}+zv+y\dot{v}=y+zx=0}$. D'aquí podem determinar el valor de $z$.

Per determinar $\dot{z}$ el·liminem la fluxió $\dot{v}$ subsituint $\dot{v}=-\frac{yz}{v}$ en l'equació de les fluxions. Queda doncs $-\frac{byz}{v}-\frac{y^2z}{v}+zv=y+xz$. Primer dividint per $z$ i després, de nou pel problema I, es pot obtenir $\boxed{-\dfrac{bz}{v}+\dfrac{by\dot{v}}{v^2}-\dfrac{2yz}{v^2}+\dfrac{y^2\dot{v}}{v^2}+\dot{v}=2-\dfrac{y\dot{z}}{z^2}}$

Finalment, d'aquestes dues expressions es pot obtenir $z$ i $\dot{z}$ que permet gràcies a 4.2 calcular $GC$, i d'aquí trobar DC (el radi de curvatura), gràcies a 4.4.

**Observació 4.4.** El càlcul de la curvatura de la concoide es pot trobar de manera més senzilla. Cal elevar al quadrat i dividir l'equació de la concoide per $y^2$. Així queda l'equació $\frac{b^2c^2}{y^2}+\frac{2bc^2}{y}+(c^2-b^2)-2by-y^2=x^2$.
Aleshores, pel problema I, obtenim $-\frac{2b^2c^2z}{y^3}-\frac{2bc^2z}{y^2}-2bz-2yz=2x \Leftrightarrow$ $\boxed{\dfrac{-b^2c^2}{y^3}-\dfrac{bc^2}{y^2}-b-y=\dfrac{x}{z}}$ D'aquí, de nou seguint el problema I, tenim $\boxed{\dfrac{3b^2c^2z}{y^4}+\dfrac{2bc^2z}{y^3}-z=\dfrac{1}{z}-\dfrac{x\dot{z}}{z^2}}$.

Per tant, de la primera obtenim el valor de $z$ i de la segona el de $\dot{z}$ que ens permet trobar $GC$ gràcies a 4.2.

[17] Cissoide en que la segona corba és una circumferència centrada a l'origen.
[18] No realitzarem els càlculs habituals per ser repetitius. Sempre substituirem $\dot{x}=1$ i $\dot{y}=z$.

Si prenem $b = 4$ i $c = 5$ tenim $(4 + y)\sqrt{25 - y^2} = xy$. Volem calcular la curvatura en el punt $(6, 4)$, per no complicar excessivament els càlculs. Calculem la seva curvatura a partir de l'observació anterior.

En primer lloc, calculem $z$ gràcies a la primera fórmula. Tenim:

$$\frac{-b^2c^2}{y^3} - \frac{bc^2}{y^2} - b - y = \frac{x}{z} \Leftrightarrow \frac{-4^2 \cdot 5^2}{4^3} - \frac{4 \cdot 5^2}{4^2} - 4 - 4 = \frac{6}{z} \Leftrightarrow (-\frac{25}{2} - 8)z = 6 \Leftrightarrow \boxed{z = -\frac{12}{41}}$$

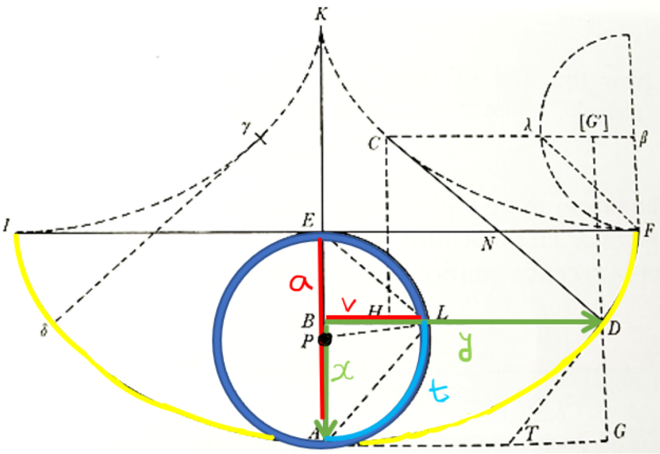
En segon lloc, calculem $\dot{z}$ gràcies a la segona fórmula de l'observació. Tenim:

$$\frac{3b^2c^2z}{y^4} + \frac{2bc^2z}{y^3} - z = \frac{1}{z} - \frac{x\dot{z}}{z^2} \Leftrightarrow -\frac{3 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 12}{4^4 \cdot 41} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 12}{4^3 \cdot 41} + \frac{12}{41} + \frac{41}{12} = -\frac{6 \cdot 41^2}{12^2}\dot{z} \Leftrightarrow \boxed{\dot{z} - \frac{1400}{68921}}$$

Aleshores, utilitzem l'equació 4.4 que ens permet determinar el radi de curvatura directament.

$$|DC| = \frac{(1 + \frac{12^2}{41^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1400}{68921}} \approx 55.68$$

**Exemple 4.5.** Sigui $IADF$ una *cicloide*[19] que pertany al cercle $ALE$ amb diàmetre $AE$. Prenem $BD$ com l'eix de les ordenades que talla el cercle en $L$. Anomenem $x = AB$, $y = BD$, $a = AE$, $v = BL$ i a l'arc $AL = t$. Per tant, a la fluxió d'aquest arc l'anomenarem $\dot{t}$. Veiem tot això en la representació següent.




Dibuixem el radi de la circumferència, $PL$, i aleshores tenim la relació següent: $\frac{\dot{x}}{\dot{t}} = \frac{BL}{PL} = \frac{v}{\frac{1}{2}a}$. Aleshores, fent de manera habitual $\dot{x} = 1$, obtenim:

$$\dot{t} = \frac{a}{2v} \tag{4.5}$$

Com la circumferència està centrada en $P = (\frac{a}{2}, 0)$ i té de radi $\frac{a}{2}$ tenim l'equació de la circumferència $(x - \frac{a}{2})^2 + (v - 0)^2 = (\frac{a}{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + v^2 - xa = 0$. Aquesta expressió, pel problema I, queda $2x\dot{x} + 2v\dot{v} - a\dot{x} = 0$ que fent $\dot{x} = 1$ obtenim $2x + 2v\dot{v} - a = 0$ que queda:

$$\dot{v} = \frac{a - 2x}{2v} \tag{4.6}$$

De la naturalesa de la cicloide[20] tenim que $LD = arc(AL) = t$. Així, $y = v + LD = v + t$, cosa que implica que $\dot{v} + \dot{t} = \dot{y}$ i que fent com habitualment $\dot{y} = z$, tenim $z = \dot{v} + \dot{t}$
Ara, substituint els valors de $\dot{t}$ i $\dot{v}$ obtinguts en 4.5 i en 4.6 a l'expressió $z = \dot{v} + \dot{t}$ tenim $z = \frac{a-2x}{2v} + \frac{a}{2v} \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{a - x}{v}}$. Aquesta expressió aplicant el problema I queda $\boxed{\dot{z} = -\frac{(a - x)\dot{v}}{v^2} - \frac{1}{v}}$

Finalment, arribats a aquest punt, ja tenim l'expressió de $\dot{z}$ i sabem que $CG = DH$ en el càlcul trobat de forma general.[21] Com sabem del càlcul genèric per 4.2, tenim $DH = \frac{1+z^2}{\dot{z}}$ i d'aquí coneixent $z$ i $\dot{z}$ podem trobar $DH$ subsituint els valors. Aleshores, es pot traçar la perpendicular $CH$ i el centre de curvatura serà $C$.

[19] S'anomena cicloide a la trajectòria que segueix un punt de la circumferència quan aquesta gira sobre una recta sense lliscar.
[20] La cicloide es genera fent girar la circumferència sobre una recta. Aleshores, el que es desplaça sobre aquesta recta és igual a l'arc de la circumferència.
[21] En el dibuix del càlcul general ja havíem arribat a aquesta conclusió. En la cicloide cal veure la gràfica superior per trobar el paral·lelisme amb la gràfica genèrica. En aquest cas es pot trobar $DH$.

El que ve a continuació ja són deduccions lògiques, conseqüències del que acabem de demostrar.
Per veure els resultats cal subsituir els valors que s'acaben de trobar $z$ i $\dot{z}$ i simplificar les expressions.

1. Tenim $DH = 2BL = 2v$ i $CH = 2BE$. Això és equivalent a veure que $EF$ talla el radi de curvatura en $N$.

2. Com a conseqüència, la corba $FCK$ és una corba congruent amb $IADF$ i té els vèrtexs adjacents als de la primera.
   Dibuixem ara el cercle $F\lambda$ amb radi $\lambda\beta$ de manera similar a com s'ha situat $ALE$.[22]
   Aleshores, dibuixem $C\beta$ paral·lel a $EF$ que intersequi amb el cercle en $\lambda$. Aleshores, $arc(F\lambda) = C\lambda$.

3. El segment $CD$ amb angle recte respecte la corba $IADF$, interseca amb la cicloide $IFK$ en $C$.

4. Invertint les cicloides, a la cúspide $K$ de la cicloide superior ens podem imaginar que suporta un pes penjant per un fil, una distància $KA = 2EA = 2a$. A mesura que el pes oscil·li, el fill s'enrotllarà sobre si mateix al llarg de les parts $KF$ i $KI$ de la cicloide.

5. La longitud total del fil $KA$ és igual al perímetre de la cicloide $KCF$, i la part $CD$ és igual a la porció $CF$ d'aquest perímetre.

6. Com el fil gira al voltant del punt mòbil $C$ com a centre mentre oscil·la. La superfíce sobre la qual passa de forma contínua la recta $CD$ serà aquella per la que simultàniament recorre la seva part $CN$ situada a sobre de la recta $IF$ com $CD^2$ a $CN^2$, és a dir, com 4 a 1. Respectivament, $Area(CFN) = \frac{1}{4}Area(CFD)$ i també $Area(KCNE) = \frac{1}{4}Area(ACDB)$.

[22]Veure la part superior dreta del dibuix on apareix el semicercle que s'esmenta.

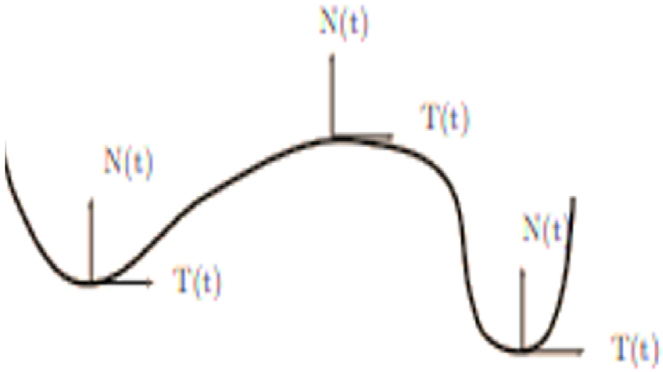
# 5 Comparació amb la noció de curvatura actual

## 5.1 Introducció

Per comparar la noció de curvatura newtoniana amb l'actual cal centrar-nos en el càlcul del radi de curvatura per corbes planes en la geometria diferencial.

Suposem una corba parametritzada en $\mathbb{R}^2$ pel paràmetre $t$, per exemple pel temps. Així tenim $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.
El vector velocitat (o vector tangent) és $T(t) = (x'(t), y'(t))$. El podem considerar, per simplicitat, que té velocitat constant. És a dir, $||T(t)|| = 1 \Leftrightarrow (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$.
El vector acceleració, l'anomenem, $A(t) = T'(t) = (x''(t), y''(t))$.

Derivant i simplificant, s'obté: $x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0 \Leftrightarrow < T(t), A(t) >= 0$ on $<,>$ marca el producte escalar.
Sigui $\{T(t), N(t)\}$ una base ortonormal al llarg d'una corba parametritzada $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ tal com es mostra en la figura següent.




La **curvatura** $k(t)$ de la corba parametritzada $c$ en un punt genèric $c(t)$ és:

$$\boxed{k(t) =< A(t), N(t) >=< (x''(t), y''(t)), N(t) >}$$

**Observacions 5.1.** Cal parar atenció al fet que:

1. El signe de $k(t)$ depèn de l'elecció de $N(t)$.
2. El valor de l'acceleració és $|k(t)| = \sqrt{x''(t)^2 + y''(t)^2}$

Aquesta introducció al concepte de curvatura cal formalitzar-la a partir de definicions més concretes, tot arribant a fórmules generals que permetin calcular el radi de curvatura. Malgrat que les demostracions i la teoria no s'escauen als objectius reals del treball, és un gran complement per al lector fer-ho. En aquest capítol, només es busca entendre de forma intuitiva, sense cap derivació matemàtica, els resultats actuals i comparar-los amb els de caire més geomètric obtinguts emprant el problema V de Newton.

## 5.2 Formalisme de la curvatura segons la Geometria Diferencial

En aquesta secció es seguiran processos propis de la Geometria Diferencial per tal de definir amb rigorositat els conceptes fonamentals que permetin la comparació amb els resultats obtinguts seguint el mètode de les fluxions de Newton. En primer lloc, treballarem amb un espacial euclidià general de dimensió $n$ i després obtindrem la fórmula per un espai $n = 2$.

**Definició 5.2.** *El **radi de curvatura** és una magnitud que medeix la curvatura d'un objecte geomètric com ara una corba, una superfície o de manera més general d'una varietat diferenciable.*

**Definició 5.3.** *Direm que una corba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ està **parametritzada per l'arc** si $|\alpha'(s)| = 1$ per tot $s \in I$.*

**Definició 5.4.** *Sigui $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una corba parametritzada per l'arc. Definim la **curvatura de $\alpha$ al punt** $t \in I$ com*

$$k_\alpha(t) = |\alpha''(t)|$$

**Comentari.** Es pot entendre la curvatura com aquell objecte matemàtic que mesura l'acceleració d'una partícula en un punt $t \in I$ que es mou per l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ seguint una corba $\alpha$ a velocitat constant igual a 1.

L'objectiu ara és estendre la definició de curvatura a corbes més generals, les habituals, sense necessitat que estiguin parametritzades per l'arc. Per això cal definir un tipus de corbes que permetin una reparametrització per l'arc.

**Definició 5.5.** *Sigui $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ una corba i sigui $t \in I$. Direm que $\beta$ és una **corba 1-regular** si tots els punts de $I$ són 1-regulars, és a dir, si $\beta'(t) \neq 0$.*

**Comentari.** Per un lema, que no demostrarem, les corbes parametritzades per l'arc són equivalents a les corbes 1-regulars.

**Lema 5.6.** *La curvatura és invariant sota canvis de paràmetre.* [23]
*És a dir, si $f : H \to I$ és un canvi de paràmetre, $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ una corba 1-regular i $\gamma = \beta \circ f$, aleshores la corba $\gamma$ és 1-regular i per a tot $s \in H$ se satisfà:*

$$k_\gamma(s) = k_\beta(f(s))$$

Prenem $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una corba 1-regular. Sigui $\rho : I \to \mathbb{R}$, un paràmetre d'arc de $\alpha$. Anomenem $J$ a la imatge $\rho(I)$ i $h : J \to I$ la inversa de $\rho$. Així $\beta = \alpha \circ h$, és una corba parametritzada per l'arc.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho=h^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \\ J \subset \mathbb{R} \arrow[ur, "\beta=\alpha\circ h"'] & \end{tikzcd}$$

[23] Consultar qualsevol dels apunts de la bibliografia (o bé Mundet [19] o bé en do Cormo [8] per a veure la demostració.

L'objectiu és escriure $|\beta''(s)|$ en funció de $\alpha$ i les seves derivades en $t = h(s)$.
Per a poder continuar, cal primer enunciar el següent lema.

**Lema 5.7.** *Siguin $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dues corbes i suposem que $|f(t)| = 1$ per tot $t \in I$. Aleshores se satisfà:*

$$< f(t), f'(t) >= 0 \text{ per tot } t \in I.$$

**Demostració.** El fet que $|f(t)| = 1$ es pot reescriure com $< f(t), f(t) >= 1$. Aleshores pel fet que el producte escalar verifica la regla de Leibniz tenim:

$$0 =< f, f >' (t) =< f'(t), f(t) > + < f(t), f'(t) >= 2 < f(t), f'(t) > \ ^{24}$$

Aleshores, s'ha obtingut $< f(t), f'(t) >= 0$. □

Degut al fet que $\beta$ està parametritzada per l'arc, s'observa que:

$$< \beta'(s), \beta'(s) >= 1 \text{ per tot } s \in J.$$

Aplicant el lema anterior, s'obté que:

$$< \beta'(s), \beta''(s) >= 0 \text{ per tot } s \in J.$$

D'altra banda, aplicant la regla de la cadena diverses vegades s'obté:

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s)$$
$$\beta''(s) = \alpha''(h(s)) \cdot (h'(s))^2 + \alpha'(h(s)) \cdot h''(s)$$

Aleshores s'observa que $\beta'(s)$ és paral·lel a $\alpha'(h(s))$ i que $\beta''(s)$ és una combinació lineal de $\alpha'(h(s))$ i $\alpha''(h(s))$.
També sabem que $\beta'(s)$ i $\beta''(s)$ són perpendiculars. Aleshores, $\beta''(s)$ és la projecció ortogonal de $\alpha''(h(s)) \cdot (h'(s))^2$ continguda dins del pla engendrat per $\alpha'(h(s))$ i $\alpha''(h(s))$ i perpendicular al vector $\alpha'(h(s))$.
Denotem $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre els vectors $\alpha'(h(s))$ i $\alpha''((t))$[25] aleshores se satisfà:

$$k_\alpha(t) = k_\beta(s) = |\alpha''(h(s))| \cdot (h'(s))^2 \cdot \sin\theta$$

Tenint en compte que $\rho(t) = |\alpha'(t)|$, podem reescriure la fórmula anterior com

$$k_\alpha(t) = \frac{|\alpha''(t)| \sin\theta}{|\alpha'(t)|^2}$$

o equivalentment:

$$\boxed{k_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t)||\alpha''(t)| \sin\theta}{|\alpha'(t)|^3}} \tag{5.1}$$

Ara trobarem la fórmula per la curvatura per $n = 2$. Per això primer cal un lema previ que ens permetrà escriure el numerador de 5.1 d'una manera més compacta.

[24] En la tercera igualtat s'ha fet servir el fet que el producte escalar és simètric.
[25] Recordem que $t = h(s)$

**Lema 5.8.** *Per a qualsevol $u$, $v \in \mathbb{R}^2$, diferents de 0 se satisfà:*

$$|det(u,v)| = \sin\theta \cdot |u| \cdot |v|$$

*on $\theta \in [0,\pi]$ denota l'angle entre u i v.*

**Demostració.** Cal tenir present la fórmula $| < u, v > | = \cos\theta \cdot |u| \cdot |v|$. Aleshores tenim $|det(u,v)|^2 + < u, v >^2 = |u|^2 \cdot |v|^2$. Anomenem $u = (x_u, y_u)$ i $v = (x_v, y_v)$.

$$|det(u,v)|^2 = (x_u y_v - x_v y_u)^2 = x_u^2 y_v^2 + x_v^2 y_u^2 - 2x_u x_v y_u y_v \ ,$$

$$< u, v >^2 = (x_u x_v + y_u y_v)^2 = x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + 2x_u x_v y_u y_v.$$

Finalment, sumant obtenim $x_u^2 y_v^2 + x_v^2 y_u^2 + x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 = |u|^2 \cdot |v|^2$. $\square$

Aleshores, sigui una corba 1-regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, combinant la fórmula general obtinguda en 5.1 i el lema anterior obtenim la fórmula de la curvatura:

$$k_\alpha(t) = \frac{|det(\alpha'(t), \alpha''(t))|}{|\alpha'(t)|^3} \tag{5.2}$$

A continuació donarem la fórmula del radi de curvatura per corbes planes parametritzades per un paràmetre. Sabem que el radi de curvatura es defineix com $R_c = \frac{1}{k_\alpha}$.

**Proposició 5.9.** *Una corba plana que es pot escriure, en coordenades cartesianes, com $x = x(t), y = y(t)$ on $t$ és un paràmetre arbitrari, el seu radi de curvatura es calcula com*

$$R_c = \frac{[(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2]^{\frac{3}{2}}}{|\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}|} \tag{5.3}$$

**Demostració.** Tenim la corba $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ i les seves dues primeres derivades $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ i $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$. Aleshores cal trobar el numerador i el denomidor de la fórmula 5.2 per trobar la curvatura.
El numerador, $|det(\alpha'(t), \alpha''(t))| = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = |x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|$

El denominador, $|\alpha'(t)|^3 = (\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ )^3 = [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{3}{2}}$
Per tant, aplicant el fet que $R_c = \frac{1}{k_\alpha}$ i el que acabem d'obtenir obtenim la fórmula buscada:

$$R_c = \frac{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|} \qquad \square$$

**Corol·lari 5.10.** *Si la corba es pot expressar com $y = f(x)$, de tal manera que per cada punt de la corba existeix un únic valor de $x$, aleshores l'expressió del radi queda*

$$R_c = \frac{[1 + (\frac{df}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{|\frac{d^2f}{dx^2}|} \tag{5.4}$$

**Demostració.** Igual que la proposició anterior però amb el cas particular en que la corba és $\alpha(x) = (x, f(x))$.

**Observació 5.11.** L'expressió 5.4 és idèntica a l'equació 4.4 del capítol anterior. L'expressió 4.4 obtinguda a partir del model de Newton, permet escriure $DC$ en termes de $z$ i $\dot{z}$. Recordant que $z = \dot{y}$, tenim que

$$DC = \frac{(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{y}}$$

Aleshores, reescrivint en termes de derivades actuals obtenim justament l'expressió 5.4.

A continuació exposarem algun dels exemples treballats en l'apartat anterior seguint el model de Newton i els treballarem amb els resultats acabats de trobar. L'objectiu és mostrar que els dos mètodes són equivalents tal com acabem de deduir, de forma general, en l'observació.

**Exemple 5.12.** L'exemple de *l'hipèrbola* $ax + bx^2 - y^2 = 0$ amb $a = 3$ i $b = 1$ el podem calcular a partir del corol·lari que acabem d'esmentar. Podem expressar-ho com una funció depenent del paràmetre x, així queda $y = f(x) = \sqrt{3x + x^2}$. Calculem les dues primeres derivades.

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{9}{4\left(x^2+3x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ara prenent $x = 1$ tenim $\frac{df}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{4}$ i $\frac{d^2f}{dx^2} = -\dfrac{9}{4(4)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{9}{2^5}$

Per tant, de l'equació 5.4 tenim $\boxed{R_c} = \frac{(1+\frac{25}{16})^{\frac{3}{2}}}{\frac{9}{2^5}} \simeq \boxed{14.585}$ com ja havíem trobat mitjançant el mètode de Newton.

**Exemple 5.13.** L'exemple de la *cissoide* $x^3 + xy^2 - ay^2 = 0$ es pot reescriure com $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$. Volem trobar la curvatura en el punt $(1, 1)$ i prenent $a = 2$. Seguint la fórmula del corol·lari, calculem les dues primeres derivades.

$$\frac{df}{dx} = -\frac{x^2\left(2x-3a\right)}{2\left(x-a\right)^2\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}}$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{3a^2x^4}{4\left(x-a\right)^4\cdot\left(\frac{x^3}{a-x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Aleshores per 5.4, substituint aquests valors ens les derivades tenim $\boxed{R_c = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}}$ com ja havíem demostrat en el capítol anterior.

**Exemple 5.14.** L'exemple de la *concoide* prenent $b = 4$ i $c = 5$ tenim l'equacció: $(4+y)\sqrt{25-y^2} = xy$. Volem trobar la curvatura en el punt $(6,4)$.

En aquest cas podem tractar la corba parametritzada per $y$. És a dir, la corba seria $c(y) = (f(y), y)$ amb $f(y) = \frac{4+y}{y}\sqrt{25-y^2}$. Aquest cas és el mateix que la parametrització $(x, f(x))$ però ara la funció apareix en el primer terme. Per això, es pot aplicar el corol·lari amb la fórmula 5.4 sense problema.
Cal trobar les derivades respecte a y:

$$\frac{df}{dy} = -\frac{(y+4)\sqrt{25-y^2}}{y^2} + \frac{\sqrt{25-y^2}}{y} - \frac{y+4}{\sqrt{25-y^2}} = -\frac{y^3+100}{y^2\sqrt{25-y^2}}$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = -\frac{3}{\sqrt{25-y^2}} + \frac{2\left(y^3+100\right)}{y^3\sqrt{25-y^2}} - \frac{y^3+100}{y\cdot(25-y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{25y^3+300y^2-5000}{y^3\cdot(25-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ara cal subtituir $y$ pel seu valor $y = 4$. Aleshores:

$$\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=4} = -\frac{4^3+100}{4^2\sqrt{25-4^2}} = -\frac{41}{12}$$

$$\left.\frac{d^2f}{dy^2}\right|_{y=4} = \frac{25\cdot4^3+300\cdot4^2-5000}{4^3\cdot(25-4^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{175}{216}$$

A continuació, aplicarem la fórmula 5.4 que permet trobar el radi de curvatura. En aquest cas, la fórmula s'expressa com

$$R_c = \frac{[(\frac{df}{dy})^2+1]^{\frac{3}{2}}}{|\frac{d^2f}{dy^2}|}$$

Finalment, substituint els valors s'obté $\boxed{R_c} = \frac{[(\frac{41}{12})^2+1]^{\frac{3}{2}}}{|\frac{175}{216}|} \approx \boxed{55.68}$ com ja havíem obtingut mitjançant el mètode emprat per Newton.

# 6 Conclusions

En la primera part de la memòria s'ha proporcionat un context històric sobre l'aparició, de manera indirecta, del concepte de curvatura: concepte imprescindible en la geometria que introdueixen per separat tant Newton com Leibniz recollint les diverses troballes d'altres autors previs. En aquest apartat, s'ha vist com les contribucions en l'àmbit científic s'atribueixen habitualment a un o dos autors quan en realitat aquests s'han impregnat de conclusions d'altres. Com va dir Perelman en rebutjar el premi que el reconeixia com el que va trobar la solució a un problema: "*Crec que la contribució a la solució d'aquest problema pel matemàtic americà Hamilton no és menys que la meva*". Doncs en aquest cas, sense els matemàtics grecs Kepler i Descartes, la feina de Newton no hagués estat possible.

En la segona part de la memòria s'ha introduït la nomenclatura que fa sevir Newton en el seu llibre. Després s'ha explicat el mètode de les fluxions seguint els quatre primers problemes. La primera gran conclusió d'aquest apartat és que Newton introdueix el concepte fluxió de manera molt natural. És cert, però, que ho fa des d'un punt de vista principalment físic, ja que ho interpreta com la velocitat de cada fluent. A més, resumeix tots els problemes que presenta en aquest mètode en dos d'ells: el de trobar la velocitat donat l'espai i el de trobar l'espai donada la velocitat. De nou, introdueix el càlcul diferencial de manera natural.
Respecte als quatre primers problemes, podríem concloure que els dos primers són el resum de tot i els altres dos són aplicacions dels anteriors. En els dos primers dona un mètode per passar de la derivada a la primitiva i viceversa. Cal observar aquí que Newton, en fer el que en l'actualitat anomenaríem *una integral*, s'adona que amb el seu mètode no es pot arribar a la primitiva amb total seguretat (en el fons és una integral impròpia). Finalment, en aquest apartat, en els problemes III i IV realitza dues aplicacions habituals de la derivada: el càlcul d'extrems i el de la recta tangent. De nou, quan tot just s'està elaborant el càlcul infinitesimal, trobem dues aplicacions rellevants en aquest àmbit.
En l'actualitat, en la forma d'explicar les matemàtiques, encara es segueix aquesta visió. Primerament s'introdueix el concepte de derivada amb la seva definició, es treballen les derivades com a eina matemàtica amb poc context i a continuació s'exposen les seves aplicacions: càlcul de la recta tangent, trobar màxims i mínims, concavitat i convexitat... El fet que tants anys després encara es mantingui aquest procediment per explicar-ho reafirma que les deduccions i troballes de Newton són, a part de correctes, molt didàctiques.

En la tercera part de la memòria s'analitza el problema V, en què s'introdueix per primer cop el concepte de curvatura en el llibre de Newton. La conclusió principal és que es pot enfocar el problema des de punts de vista diversos, tots igual de vàlids. Per Newton, però, la idea fonamental que hi ha rere el concepte és aquell punt (el centre de curvatura) que uneix les dues rectes normals de dos punts infinitesimalment propers al punt en què es vol calcular la curvatura. També és remarcable que, en la introducció d'aquest problema, Newton ja prediu que aquest esdevindrà essencial en la teoria de les corbes. A part de trobar una forma de caire geomètric per trobar la curvatura de corbes planes, deixa la via oberta per a què futurs autors puguin seguir treballant-ho tot deixant clara la seva importància.

En la quarta part, es formalitza el concepte amb una introducció a la geometria diferencial. Durant aquest apartat es pot anar comparant el que s'ha trobat amb el mètode de les fluxions de Newton per trobar el radi de curvatura amb la fórmula que s'obté a partir del formalisme de la geometria diferencial. Per fer-ho, es fan servir les fórmules modernes del càlcul del radi de curvatura d'una corba plana. S'arriba a la conclusió que el que estableix Newton no és una aproximació força bona, sinó que exactament són dues fórmules idèntiques a les quals s'hi ha arribat des de punts de vista diferents.

Finalment, la principal conclusió d'aquest treball és que, malgrat la curvatura és un concepte formalitzat gràcies a la Geometria Diferencial, Newton, des d'un punt de vista geomètric i seguint el seu desenvolupament del càlcul diferencial, és capaç d'establir el centre de curvatura d'un punt d'una corba donada.

## Referències


[1] Baron, M.E.: *The origins of the infinitesimal calculus, 1969.*

[2] Barrios, F.M.: *La historia de un invariante: ¿Con qué se come la curvatura?, Facultad de Ciencias UNAM, 2018.*

[3] Berenguer, J.: *El càlcul diferencial al segle XVIII en una classe de Matemàtiques. Actes XV jornada sobre Història de la Ciència i l'Ensenyament, 2017.*

[4] Bosch, M.:*Huygens, Newton, i el radi de curvatura.*

[5] Boyer, C.B.: *The history of the calculus and its conceptual development. Dover Publications, New York, 1959.*

[6] Cisneros, J.L.: *Un recorrido por el concepto de curvatura. Universidad Nacional de México, 2021.*

[7] Clay, C.J.: *Apollonius of Perga: Treatise on conics sections. Cambridge University Press Warhouse.*

[8] do Cormo, M.: *Differential geometry of curves and surfaces. Instituto de Matemática pura e aplicada, 1976.*

[9] Dajczer, M. : *Una introducción elemental al concepto de curvatura, 2015.*

[10] Dorce, C.: *Història de la matemàtica. Des del segle XVII fins a l'inici de lèpoca contemporània. Publicacions UB, 2014.*

[11] González, P.M.U.: *La geometría de Descartes, Text xtec.*

[12] Heath, T. : *A history of Greek mathematics. Oxford, 1921.*

[13] Jantzen, R.: *History of curvature. Villanova University.*

[14] López, R.: *Cálculo de las curvaturas principales en un cilindro, Universidad de Granada, 2015.*

[15] Lucas, P.: *Breve historia de la curvatura. Academia de Ciencias de la Región de Murcia, 2019.*

[16] Martínez, A.: *La curvatura de Riemann a través de la historia. Universidad de Valencia, 2007.*

[17] Mathoma: *Newton's Infinitesimal Calculus (4): Calculating Fluxions/Derivatives (Vídeo), 2016. YouTube.https://www.youtube.com/watch?v=i5TFXyI4UMM*

[18] Montesinos, J, L.: *Fluxiones, infinitesimales y fuerzas vivas. Un panorama leibniziano. Thémata, Revista de filosofía, 2009*

[19] Mundet, I.: *Geometria diferencial de corbes i superfícies. Apunts UB, 2020.*

[20] Serrano, I. i Suceava, B.: *A medieval mystery: Nicole Oresme's concept of curvitas. Notices of the AMS, Volume 62, Number 9.*

[21] Newton, I.: *Methods of fluxions and infinite series. Edició en anglès de l'any 1736.*

[22] Wikipedia: *Col·laboradors de Wikipedia. Radi de curvatura. Wikipedia, la enciclopedia libre, 2023. https://es.wikipedia.org/wiki/Radio_de_curvatura*

[23] Wikipedia: *Col·laboradors de Wikipedia. Curvatura. Wikipedia, la enciclopedia libre, 2023. https://es.wikipedia.org/wiki/Curvatura*

[24] Whiteside D.T.: *The mathematical papers of Isaac Newton III 1670-1673. University of Cambridge.*