



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

SISTEMES DINÀMICS
CAÒTICS

Autor: Hermini Carreras Caballé

Directora: Dra. Marina Gonchenko

Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 15 de gener de 2026

Abstract

Chaotic motions are unpredictable, and the mathematical foundations in the theory of chaotic dynamical systems are not yet well established. How can we logically understand unpredictability and express it within a mathematical framework?

In this work, the behavior of chaotic dynamical systems is analyzed. To do so, dynamical systems are studied starting from the basic geometric objects associated with them. More specifically, the focus is on dynamical systems with chaotic behavior by studying them through the mathematical theory of chaos. Finally, all these concepts are applied to classical examples of chaotic dynamical systems.

Resum

Els moviments caòtics són impredecibles i els fonaments matemàtics en la teoria dels sistemes dinàmics caòtics encara no estan ben establerts. Com podem entendre lògicament la impredecibilitat i expressar-la en una configuració matemàtica?

En aquest treball, s'analitza el comportament dels sistemes dinàmics caòtics. Per fer-ho, s'estudien els sistemes dinàmics a partir dels objectes bàsics geomètrics que estan associats a ells. Més concretament, s'aprofundeix en els sistemes dinàmics amb comportament caòtic, estudiant-los a partir de la teoria matemàtica del caos. Finalment, s'apliquen tots aquests conceptes en exemples clàssics de sistemes dinàmics caòtics.

Agraïments

M'agradaria començar aquests agraïments reconeixent la valuosa feina de la meva tutora, la Dra. Marina Gonchenko, des del seu guiatge en la definició de l'objecte de recerca, aportació de fonts bibliogràfiques i revisió i tancament del treball. Gràcies a això, m'he sentit acompanyat i segur durant tot el procés de la memòria.

També vull recordar-me de la meva família i amics, per la confiança, el suport i l'escolta necessària durant els mesos de realització del treball amb el qual tanco aquest període acadèmic de la meva vida.

Índex

1	Introducció	1
2	Introducció als sistemes dinàmics	2
2.1	Conceptes previs	2
2.2	Definició i exemples de sistemes dinàmics	3
2.3	Òrbites i retrats de fase	4
2.4	Conjunts invariants	4
2.5	Atracció i repulsió	5
2.6	Equivalència topològica	5
2.7	Classificació topològica dels equilibris i punts fixos genèrics	6
3	Equacions diferencials ordinàries com a sistemes dinàmics	8
3.1	Sistema d'equacions diferencials autònom	8
4	Estabilitat	10
4.1	Estabilitat local dels sistemes unidimensionals	10
4.2	Estabilitat local dels sistemes lineals bidimensionals	12
5	Bifurcacions	14
5.1	Bifurcacions en sistemes unidimensionals	14
5.1.1	Bifurcació Saddle-Node	14
5.1.2	Bifurcacions pitchfork i transcrítica	17
5.2	Bifurcacions en sistemes bidimensionals	20
5.2.1	Bifurcació Saddle-Node	20
5.2.2	Bifurcacions pitchfork i transcrítica	20
5.2.3	Bifurcació de Hopf	22

<i>ÍNDEX</i>	iv
6 Caos	24
6.1 Teoria matemàtica del caos	24
6.2 Fractals	27
6.3 Exponent de Lyapunov	29
7 Exemples de sistemes dinàmics caòtics	35
7.1 Sistema de Lorenz	35
7.2 El mapa logístic	38
7.3 El mapa d'Hénon	40
8 Conclusions	43
Bibliografia	44

Capítol 1

Introducció

L'any 1963, Edward Lorenz, meteoròleg del MIT (Massachusetts Institute of Technology), va establir les bases de la teoria del caos, una branca de les matemàtiques que es dedica a l'estudi de sistemes sensibles a petits canvis de les condicions inicials. Es tracta d'una forma d'il·lustrar la idea que variacions molt petites en les condicions d'un sistema poden provocar grans canvis en els resultats a llarg termini.

El caos, com a fenomen determinista però a la vegada impredecible, representa un dels paradigmes més profunds i contraris a la intuïció descoberts en l'estudi dels sistemes dinàmics. La recerca per comprendre i caracteritzar matemàticament aquesta dicotomia ha estat un motor fonamental en el desenvolupament de la teoria dels sistemes dinàmics al llarg del segle XX i fins als nostres dies.

L'objectiu d'aquest treball és analitzar el comportament d'aquests sistemes partint dels objectes bàsics que els defineixen — com per exemple els espais d'estats, les òrbites i els retrats de fase— per a dirigir-nos cap a les nocions que caracteritzen el caos. Per fer-ho, recorrerem als fonaments de la teoria matemàtica del caos, introduïrem eines quantitatives essencials i aplicarem aquest marc conceptual i analític a l'estudi detallat d'exemples paradigmàtics: el sistema de Lorenz, el mapa logístic i el mapa de Hénon.

Aquest treball aspira a oferir una comprensió integral dels sistemes dinàmics caòtics, connectant la teoria abstracta amb les seves manifestacions concretes, amb la finalitat d'oferir una visió coherent i accessible del fenomen caòtic des d'una perspectiva de sistemes dinàmics.

Capítol 2

Introducció als sistemes dinàmics

2.1 Conceptes previs

Definició 2.1. Tots els possibles estats d'un sistema queden caracteritzats pels punts d'un cert conjunt X . Aquest conjunt s'anomena *espai d'estats* del sistema.

Definició 2.2. L'evolució d'un sistema dinàmic significa un canvi de l'estat del sistema amb el temps $t \in T$, on T és un conjunt numèric. Considerarem dos tipus de sistemes dinàmics:

1. Els de *temps continu* $T \subset \mathbb{R}^1$.
2. Els de *temps discret* $T \subset \mathbb{Z}$.

Definició 2.3. El component principal d'un sistema dinàmic és una llei d'evolució que determina l'estat x_t del sistema en el temps t , donat l'estat inicial x_0 . La manera més general d'especificar aquesta evolució és suposar que, per a cada $t \in T$, hi ha definida una aplicació

$$\varphi^t : X \rightarrow X,$$

que transforma un estat inicial $x_0 \in X$ en un estat $x_t \in X$ al temps t :

$$x_t = \varphi^t(x_0).$$

L'aplicació φ^t s'anomena *operador d'evolució* del sistema dinàmic. Pot ser conegut explícitament; però, en la majoria dels casos, es defineix de manera indirecta i només pot calcular-se aproximadament.

En el cas de temps continu, la família $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ d'operadors d'evolució s'anomena *flux*.

Cal advertir que $\varphi^t(x)$ pot no estar definit per a totes les parelles $(x, t) \in X \times T$.

Els sistemes dinàmics amb operador d'evolució definit tant per $t \geq 0$ com per $t < 0$ s'anomenen *invertibles*.

Els operadors d'evolució posseeixen dues propietats naturals que reflecteixen el caràcter determinista del comportament dels sistemes dinàmics:

1. $\varphi^0 = \text{id}$, on *id* és la identitat sobre X , és a dir, $\text{id}(x) = x$ per a tot $x \in X$.
2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$. Això significa que $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x))$ per a tot $x \in X$ i $t, s \in T$ tals que ambdós costats de l'equació quedin definits.

Definició 2.4. Un sistema de temps discret amb t enter queda completament especificat definint només una aplicació $f = \varphi^1$, anomenada *aplicació d'un pas de temps*.

D'aquesta manera, usant la primera propietat dels operadors d'evolució obtenim el següent:

$\varphi^2 = \varphi^1 \circ \varphi^1 = f \circ f = f^2$, on f^2 és la segona iteració de l'aplicació f .

De manera similar, $\varphi^k = f^k$ per a tot $k > 0$. Si el sistema de temps discret és invertible, aquesta equació també és vàlida per a $k \leq 0$, amb $f^0 = \text{id}$.

Per a molts sistemes, $\varphi^t(x)$ és una funció contínua de $x \in X$; i si $t \in \mathbb{R}^1$, també és contínua en el temps. Aquesta continuïtat s'entén respecte la mètrica o norma corresponent a X .

A més, molts sistemes definits sobre \mathbb{R}^n o sobre varietats suaus dins de \mathbb{R}^n són tals que $\varphi^t x$ és suau com a funció de (x, t) . Aquests sistemes s'anomenen *sistemes dinàmics suaus*.

2.2 Definició i exemples de sistemes dinàmics

Ara ja som capaços de donar una definició formal d'un sistema dinàmic.

Definició 2.5. Un sistema dinàmic és una tripleta $\{T, X, \varphi^t\}$, on T és un conjunt temporal, X és un espai d'estats i $\varphi^t : X \rightarrow X$ és una família d'operadors d'evolució parametritzats per $t \in T$ que satisfan les dues propietats dels operadors d'evolució.

Exemple 2.6. L'exemple més comú dels sistemes dinàmics és el dels sistemes newtonians, governats per la llei del moviment de Newton. Aquesta llei estableix que l'acceleració d'una partícula està determinada per la força per unitat de massa.

La força pot dependre de la velocitat \dot{x} i de la posició x , i per tant, els sistemes newtonians prenen la següent forma:

$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$, on m és la massa i F la força.

Aleshores, l'equació es pot escriure com un sistema de dues equacions diferencials de primer ordre:

$\dot{x} = y, \dot{y} = F(x, y)$.

Aquest sistema es pot interpretar com un sistema dinàmic de dimensió dos en el pla xy , i la seva dinàmica consisteix en un conjunt de trajectòries que descriuen l'evolució temporal del moviment.

Exemple 2.7 (Un sistema lineal pla). Considerem el pla $X = \mathbb{R}^2$ i una família de

transformacions lineals no singulars sobre X donada per la matriu $t \in \mathbb{R}^1$:

$$\varphi^t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

on $\lambda, \mu \neq 0$ són nombres reals. Òbviament, tenim un sistema dinàmic de temps continu sobre X . El sistema és invertible i està definit per a tot (x, t) . És el flux definit pel sistema de les equacions ordinàries $\dot{x} = \lambda x, \dot{y} = \mu y$.

2.3 Òrbites i retrats de fase

En aquesta secció estudiarem els objectes bàsics geomètrics que estan associats a un sistema dinàmic $\{T, X, \varphi^t\}$.

Definició 2.8. Una òrbita que comença en x_0 és un subconjunt ordenat de l'espai d'estats X :

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t(x_0), \text{ per a tot } t \in T \text{ tal que } \varphi^t(x_0) \text{ està ben definit}\}.$$

Les òrbites d'un sistema de temps continu amb un operador d'evolució continu són corbes a l'espai d'estat X , mentre que les òrbites d'un sistema de temps discret són seqüències de punts a l'espai d'estats X numerades amb enters creixents. Les òrbites també s'anomenen *trajectòries*.

Si $y_0 = \varphi^{t_0}(x_0)$ per algun t_0 , aleshores els conjunts $Or(x_0)$ i $Or(y_0)$ coincideixen. Les òrbites més simples són els equilibris.

Definició 2.9. Un punt $x_0 \in X$ s'anomena *equilibri* o *punt fix* si $\varphi^t(x_0) = x_0$ per a tot $t \in T$. Utilitzarem el terme equilibri per als sistemes de temps continu i el terme punt fix per als sistemes de temps discret.

Definició 2.10. Un punt $x_0 \in X$ s'anomena *periòdic* si $\varphi^k(x_0) = x_0$ per a $k > 0$. L'òrbita d'un punt periòdic s'anomena *òrbita periòdica*.

Definició 2.11. El *retrat de fase* d'un sistema dinàmic és la partició de l'espai d'estats en òrbites.

El retrat de fase conté una gran quantitat d'informació sobre el comportament d'un sistema dinàmic. En observar-lo, podem determinar el nombre i el tipus d'estats asimptòtics als quals tendeix el sistema quan $t \rightarrow +\infty$ (i, si és invertible, també quan $t \rightarrow -\infty$).

2.4 Conjunts invariants

Per tal de classificar millor els elements d'un retrat de fase, la següent definició és molt útil.

Definició 2.12. Un *conjunt invariant* d'un sistema dinàmic $\{T, X, \varphi^t\}$ és un subconjunt $S \subset X$ tal que si $x_0 \in S$, aleshores $\varphi^t(x_0) \in S$ per a tot $t \in T$.

Aquesta definició significa que $\varphi^t(S) \subseteq S$ per a tot $t \in T$. És evident que un conjunt invariant S està compost per òrbites del sistema dinàmic. Qualsevol òrbita individual $Or(x_0)$ és un conjunt invariant.

Sempre podem restringir l'operador d'evolució φ^t del sistema al seu conjunt invariant S i considerar-hi un nou sistema dinàmic $\{T, X, \psi^t\}$, on $\psi^t : S \rightarrow S$ és la restricció induïda de φ^t sobre S . Per simplificar, utilitzarem el símbol φ^t per referir-nos a aquesta restricció.

2.5 Atracció i repulsió

Els conjunts invariants poden tenir diferents tipus de comportament asimptòtic respecte de les òrbites properes.

Definició 2.13. Un conjunt invariant tancat $A \subset X$ s'anomena *atractor* si existeix un obert $U \subset A$ tal que, per a tot $x_0 \in U$:

$$\text{dist}(\varphi^t(x_0), A) \rightarrow 0 \text{ quan } t \rightarrow +\infty.$$

El conjunt U s'anomena *bassa d'atracció* d' A .

És a dir, totes les òrbites que comencen dins d' U acaben per aproximar-se asimptòticament a A . En canvi, si la propietat anterior es compleix quan $t \rightarrow -\infty$, diem que el conjunt invariant A s'anomena *repulsor*.

2.6 Equivalència topològica

El concepte d'equivalència topològica permet classificar sistemes dinàmics segons la seva estructura geomètrica global. Intuïtivament, dos sistemes dinàmics són topològicament equivalents si un pot obtenir-se a partir de l'altre mitjançant una deformació contínua que preserva la correspondència de les òrbites.

Definició 2.14. Siguin $\{T, X, \varphi^t\}$ i $\{T, Y, \psi^t\}$ dos sistemes dinàmics. Aquests sistemes s'anomenen *topològicament equivalents* si existeix un homeomorfisme $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x))$, per a tot $x \in X$ i $t \in T$.

També ho podem escriure de la següent manera: $h \circ \varphi^t = \psi^t \circ h$.

La correspondència h s'anomena *correspondència topològica* i es diu que els sistemes són conjugats. La figura següent il·lustra la relació:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi^t} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\psi^t} & Y \end{array}$$

Definició 2.15. Un sistema dinàmic $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ s'anomena *localment topològicament equivalent* prop d'un punt d'equilibri x_0 a un altre sistema dinàmic $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ prop d'un equilibri y_0 si existeix un homeomorfisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

1. Està definit en un petit entorn $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 .
2. Compleix $y_0 = h(x_0)$.
3. Envia les òrbites del primer sistema dins U sobre les òrbites del segon sistema dins $V = h(U) \subset \mathbb{R}^n$, preservant la direcció del temps.

Si U és un entorn obert de x_0 , aleshores V és un entorn obert de y_0 . Cal destacar també que les posicions d'equilibri x_0 i y_0 , així com les regions U i V , poden coincidir.

2.7 Classificació topològica dels equilibris i punts fixos genèrics

En aquesta secció, estudiarem la geometria del retrat de fase prop dels punts d'equilibri genèrics, és a dir, hiperbòlics, en sistemes dinàmics de temps continu i discret, i en presentarem la classificació topològica.

Considerem un sistema dinàmic de temps continu de la següent forma: $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, on f és suau. Sigui $x_0 = 0$ un equilibri del sistema ($f(x_0) = 0$) i sigui A la matriu jacobiana $\frac{df}{dx}$ avaluada en x_0 . Designem per n_- , n_0 i n_+ el nombre de valors propis d' A (comptant multiplicitats) amb part real negativa, nula i positiva respectivament.

Definició 2.16. Un equilibri s'anomena *hiperbòlic* si $n_0 = 0$; és a dir, si no hi ha valors propis sobre l'eix imaginari. Un equilibri hiperbòlic s'anomena *sella hiperbòlica* si $n_- n_+ \neq 0$.

Ara estudiarem la geometria del retrat de fase prop d'un equilibri hiperbòlic.

Per a un equilibri (no necessàriament hiperbòlic), introduïm dos conjunts invariants:

$W^s(x_0) = \{x : \varphi^t x \rightarrow x_0, t \rightarrow +\infty\}$, $W^u(x_0) = \{x : \varphi^t x \rightarrow x_0, t \rightarrow -\infty\}$, on φ^t és el flux associat del sistema.

Definició 2.17. $W^s(x_0)$ s'anomena la *varietat estable* de x_0 , mentre que $W^u(x_0)$ s'anomena la *varietat inestable* de x_0 .

Teorema 2.18 (Varietat estable local). Sigui x_0 un equilibri hiperbòlic ($n_0 = 0$ i $n_- + n_+ = n$). Aleshores les interseccions de $W^s(x_0)$ i $W^u(x_0)$ amb un entorn prou petit de x_0 contenen subvarietats suaus $W_{loc}^s(x_0)$ i $W_{loc}^u(x_0)$ de dimensió n_- i n_+ respectivament. A més, $W_{loc}^s(x_0)(W_{loc}^u(x_0))$ és tangent en x_0 a $T_s(T_u)$, on $T_s(T_u)$ és el subespai generalitzat propi corresponent a la unió de tots els valors propis de A amb $\text{Re } \lambda < 0$ ($\text{Re } \lambda > 0$).

2.7. CLASSIFICACIÓ TOPOLÒGICA DELS EQUILIBRIS I PUNTS FIXOS GENÈRICS 7

Definició 2.19. Donada una matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podem dividir els seus valors propis en tres grups a partir del signe de la part real: σ_s , σ_u i σ_c . D'aquesta manera:

1. $\lambda \in \sigma_s$ si $Re(\lambda) < 0$.
2. $\lambda \in \sigma_u$ si $Re(\lambda) > 0$.
3. $\lambda \in \sigma_c$ si $Re(\lambda) = 0$.

El subespai generat pels vectors propis associats als valors propis que pertanyen a σ_s s'anomena *subespai estable* E_s , el generat pels vectors propis associats als valors propis que pertanyen a σ_u s'anomena *subespai inestable* E_u , i el generat pels vectors propis associats als valors propis que pertanyen a σ_c és el subespai centrat E_c . Es compleix que $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u \oplus E_c$.

Veiem què passa quan $n = 2$. Sigui $\dot{X} = AX$ i siguin Δ el determinant de A i σ la traça de A amb $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Aleshores:

1. Si $\Delta > 0$ i $\sigma = 0 \Rightarrow$ Centre.
2. Si $\Delta > 0$ i $\sigma^2 - 4\Delta \geq 0 \Rightarrow$ Node. Si $\sigma < 0$, el node és estable, i si $\sigma > 0$, inestable.
3. Si $\Delta > 0$ i $\sigma^2 - 4\Delta < 0 \Rightarrow$ Focus. Si $\sigma < 0$, el focus és estable, i si $\sigma > 0$, inestable.
4. Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ Punt de sella.

Exemple 2.20 (Equilibris genèrics de sistemes plans). Considerem un sistema bidimensional $\dot{x} = f(x)$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, amb f suau. Suposem que $x = 0$ és un equilibri ($f(0) = 0$), i sigui

$$A = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

la seva matriu jacobiana. La matriu A té dos valors propis λ_1 i λ_2 , que són les arrels de l'equació característica següent: $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta$, on σ és la traça de A i Δ és el determinant de A . Hi ha tres classes topològiques d'equilibris en el pla: *nodes estables*(focus), *punts de sella* i *nodes inestables*(focus).

Els nodes i els focus (amb la seva estabilitat corresponent) són topològicament equivalents però es poden identificar mitjançant els valors propis com ja hem explicat anteriorment.

Els punts estables tenen varietats estables de dimensió 2 i no tenen varietats inestables. En el cas dels equilibris inestables, a l'inrevés. Els punts de sella tenen varietats estables i inestables, totes dues de dimensió 1 (que anomenem com a *separatrius*).

Definició 2.21. Els nodes i els focus s'anomenen *antiselles*.

Capítol 3

Equacions diferencials ordinàries com a sistemes dinàmics

En molts casos, un sistema dinàmic de temps continu s'introdueix de manera natural com un sistema d'equacions diferencials ordinàries (EDO).

En aquest capítol, veurem que les equacions diferencials es poden considerar com a definicions concretes del flux φ_t en un espai d'estats apropiat.

3.1 Sistema d'equacions diferencials autònom

Definició 3.1. Considerem el sistema d'equacions diferencials ordinàries de la següent forma:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

on la funció $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és suficientment suau (normalment, de classe C^r , amb $r \geq 1$). Aquest sistema s'anomena *autònom* ja que la funció de la dreta de l'equació no depèn explícitament de t .

Donat un estat inicial $x_0 = x(0)$, el sistema anterior genera una solució $x(t)$ definida (com a mínim localment) per a t en un cert interval obert que conté 0. El teorema fonamental de Cauchy-Lipschitz (Picard-Lindelöf) garanteix que, sota condicions de Lipschitz per a $f(x)$, aquesta solució és única.

Definim ara l'operador d'evolució: $\varphi^t(x_0) = x(t)$ on $x(t)$ és la solució del sistema anterior amb condició inicial $x(0) = x_0$.

Teorema 3.2 (Existència, unicitat i dependència suau). Considerem un sistema d'equacions diferencials ordinàries: $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, on $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és suau en una regió oberta $U \subset \mathbb{R}^n$. Llavors existeix una funció única $x = x(t, x_0)$, $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que és suau en (t, x) i satisfà, per a cada $x_0 \in U$, les següents condicions:

1. $x(0, x_0) = x_0$;

2. Existeix un interval $J = (-\delta_1, \delta_2)$, on $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$, tal que, per a tot $t \in J$, $y(t) = x(t, x_0) \in U$, i $\dot{y}(t) = f(y(t))$.

El grau de suavitat de $x(t, x_0)$ respecte a x_0 és el mateix que el de f com a funció de x . La funció $x = x(t, x_0)$, considerada com a funció del temps t , s'anomena *solució que comença a x_0* . Aquesta defineix, per a cada $x_0 \in U$, dos objectes:

1. Una *corba solució* $C_r(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
2. Una òrbita, que és la projecció de $C_r(x_0)$ sobre l'espai d'estats, $Or(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R}^n$.

Ambdues corbes estan parametritzades pel temps t i orientades segons la direcció de l'avanç del temps. Un vector no nul $f(x_0)$ és tangent a l'òrbita $Or(x_0)$ en x_0 . Hi ha una única òrbita que passa per un punt $x_0 \in U$.

Sota les condicions del teorema, l'òrbita o bé surt de U en $t = -\delta_1$ (i/o $t = \delta_2$), o bé roman a U indefinidament; en aquest darrer cas, podem prendre $J = (-\infty, +\infty)$. Ara podem definir l'operador d'evolució $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ amb la fórmula següent: $\varphi^t x_0 = x(t, x_0)$, que assigna a x_0 un punt de l'òrbita a través de x_0 que s'haurà recorregut després de t unitats de temps.

Clarament, $\{\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ és un sistema dinàmic de temps continu. Aquest sistema és invertible. Cada operador d'evolució φ^t està definit per $x \in U$ i $t \in J$, on J depèn de x_0 i és suau respecte de x .

Teorema 3.3 (Lyapunov). Considerem un sistema dinàmic definit per $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, on f és suau. Suposem que el sistema té un punt d'equilibri en x_0 i designem per A la matriu jacobiana de $f(x)$ avaluada en l'equilibri: $A = f_x(x_0)$. Aleshores, x_0 és estable si tots els valors propis d' A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ satisfan que $Re\lambda < 0$.

Una de les tasques principals de la teoria dels sistemes dinàmics és analitzar el comportament d'un sistema dinàmic definit per EDOs. L'aspecte més útil és que podem predir algunes característiques del retrat de fases d'un sistema definit per EDOs sense necessitat de resoldre el sistema.

Capítol 4

Estabilitat

4.1 Estabilitat local dels sistemes unidimensionals

En aquesta secció, veurem la definició d'estabilitat d'un punt fix i veurem un criteri que ens serveix per comprovar si un punt fix és estable o inestable.

Definició 4.1. Sigui x_0 un punt fix d'una funció $f(x)$. Aleshores, diem que x_0 és *estable* si existeix un obert U de x_0 tal que si $y \in U$, $f^n(y) \in U$ per qualsevol n i $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x_0$.

D'altra banda, diem que x_0 és *inestable* si per cada y d'un entorn U de x_0 amb $y \neq x_0$, tenim que $f^n(y) \notin U$ per algun n .

Tenim un criteri molt més senzill per determinar si un punt fix x_0 és estable o inestable.

Proposició 4.2. Sigui $f(x)$ una funció de classe C^1 i sigui x_0 un punt fix de $f(x)$. Aleshores:

1. x_0 és atractor(o estable) si $|f'(x_0)| < 1$.
2. x_0 és repulsor(o inestable) si $|f'(x_0)| > 1$.

Demostració. Com que $f(x)$ és de classe C^1 , $f'(x_0)$ està ben definida i ve donada per

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4.1.1)$$

Per tant,

$$|f'(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|. \quad (4.1.2)$$

1. Suposem que $|f'(x_0)| < 1$. Llavors existeix un punt $a \in \mathbb{R}$ amb $0 < a < 1$ tal que $|f'(x_0)| < a < 1$. Com que $f'(x)$ és contínua en $x = x_0$, existeix un $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < a \quad (4.1.3)$$

quan $|x - x_0| < \epsilon$. Així, sempre que $|x - x_0| < \epsilon$,

$$|f(x) - f(x_0)| < a|x - x_0|. \quad (4.1.4)$$

Ara,

$$|f^2(x) - f^2(x_0)| = |f(f(x)) - f(f(x_0))| < a|f(x) - f(x_0)| < a^2|x - x_0|. \quad (4.1.5)$$

De manera similar, utilitzant inducció:

$$|f^n(x) - f^n(x_0)| < a^n|x - x_0|. \quad (4.1.6)$$

Com que $0 < a < 1$, $a^n \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. A més, que x_0 sigui un punt fix de $f(x)$ implica que $f^n(x_0) = x_0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, de la desigualtat anterior obtenim

$$|f^n(x) - x_0| \rightarrow 0 \quad (4.1.7)$$

quan $n \rightarrow \infty$, sempre que $x \in N_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Així, per definició, x_0 és un atractor.

2. Suposem que $|f'(x_0)| > 1$. Llavors existeix un punt $a \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x_0)| > a > 1$ i, per tant, existeix un $\epsilon > 0$ tal que per a tot $x \in N_\epsilon(x_0)$,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > a \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > a|x - x_0|. \quad (4.1.8)$$

Ara,

$$|f^2(x) - f^2(x_0)| = |f(f(x)) - f(f(x_0))| > a|f(x) - f(x_0)| > a^2|x - x_0|. \quad (4.1.9)$$

De manera similar, $|f^n(x) - f^n(x_0)| > a^n|x - x_0|$. Com que $a > 1$, $a^n \rightarrow \infty$ quan $n \rightarrow \infty$. Un cop més, com que x_0 és un punt fix de $f(x)$, tenim que $f^n(x_0) = x_0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant,

$$|f^n(x) - x_0| \rightarrow \infty \quad (4.1.10)$$

quan $n \rightarrow \infty$, sempre que $x \in N_\epsilon(x_0) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Això demostra que x_0 és un punt fix repulsor de $f(x)$. I amb això queda completada la demostració.

□

4.2 Estabilitat local dels sistemes lineals bidimensionals

L'equació característica de la matriu A associada al sistema $\dot{x} = Ax$, on $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ és la següent:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \quad (4.2.2)$$

on $\sigma = a + d$ i $\Delta = ad - bc$. Siguin λ_1 i λ_2 els valors propis de A . Aleshores,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{D}}{2}, \quad (4.2.3)$$

on $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$, $\Delta = \lambda_1\lambda_2$ i $D = \sigma^2 - 4\Delta$. A la definició 2.19 ja vam fer una classificació dels punts fixos a partir d'aquestes condicions. En aquest cas, veiem quins són els criteris d'estabilitat:

1. Estable si $\sigma < 0$ i $\Delta > 0$.
2. Inestable si $\sigma > 0$ i $\Delta > 0$.
3. Inestable(punt de sella) si $\Delta < 0$.

Depenent dels signes dels valors propis λ_1, λ_2 de la matriu A , el caràcter d'estabilitat dels punts fixos es pot enunciar de la següent manera:

1. Si els valors propis són reals i diferents:
 - (a) Punt de sella si λ_1 i λ_2 tenen signes oposats.
 - (b) Node inestable si λ_1 i λ_2 tenen ambdós signes positius.
 - (c) Node estable si λ_1 i λ_2 tenen ambdós signes negatius.
2. Si els valors propis són reals i iguals($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$):
 - (a) Node estel·lar inestable si $\lambda > 0$.
 - (b) Node estel·lar estable si $\lambda < 0$.
 - (c) Node impròpiament inestable si $\lambda > 0$.
 - (d) Node impròpiament estable si $\lambda < 0$.

Els dos primers casos es donen quan $A = \lambda I$, sent I la matriu identitat.

3. Si els valors propis són complexos($\alpha \pm i\beta$); $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
 - (a) Espiral o focus inestable si $\alpha > 0$.
 - (b) Espiral o focus estable si $\alpha < 0$.

4.2. ESTABILITAT LOCAL DELS SISTEMES LINEALS BIDIMENSIONALS 13

(c) Centre neutrament estable si $\alpha = 0$.

Per visualitzar aquestes classificacions, tenim el diagrama del sistema lineal en dues dimensions:

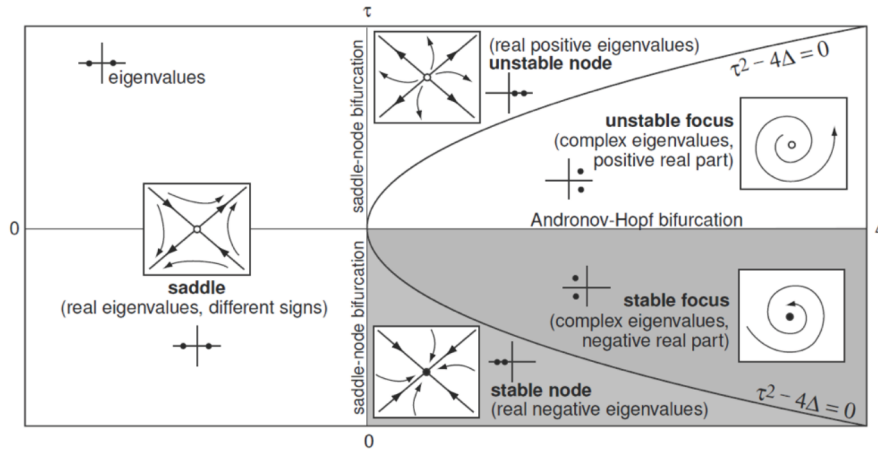


Figura 4.1: Diagrama d'estabilitat per a sistemes lineals bidimensionals.

Capítol 5

Bifurcacions

5.1 Bifurcacions en sistemes unidimensionals

Considerem un sistema continu unidimensional

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu); x, \mu \in \mathbb{R}, \quad (5.1.1)$$

que depèn del paràmetre μ , on $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció suau de x i μ . Aleshores, els punts d'equilibri són les solucions de l'equació $f(x, \mu) = 0$.

Aquesta equació ens indica clarament que tots els punts d'equilibri del sistema depenen del paràmetre μ , i poden canviar la seva estabilitat a mesura que μ varia. Per tant, les bifurcacions d'un sistema unidimensional s'associen a les estabilitats dels seus punts d'equilibri.

Primer establim la condició per a la bifurcació saddle-node.

5.1.1 Bifurcació Saddle-Node

Considerem el sistema unidimensional

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu) = \mu + x^2, x \in \mathbb{R} \quad (5.1.2)$$

amb μ com a paràmetre. Els punts d'equilibri s'obtenen de

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow \mu + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -\mu. \quad (5.1.3)$$

Depenent del signe de paràmetre μ , tenim tres possibilitats. Quan $\mu < 0$, el sistema té dos punts fixos, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\mu}$. Aquests es fusionen en $\mu = \mu_0 = 0$ i desapareixen quan $\mu > 0$.

Suposem ara que $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$. Aleshores, pel teorema de la funció implícita, existeix una única funció suau $\mu = \mu(x)$ amb $\mu(x_0) = \mu_0$, en un entorn de (x_0, μ_0) tal que $f(x, \mu(x)) = 0$.

Diferenciant l'equació $f(x, \mu(x)) = 0$ respecte de x , tenim:

$$0 = \frac{df}{dx}(x, \mu(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x)$$

Per tant, usant que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0$ obtenim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \frac{d\mu}{dx}(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{d\mu}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)} \Rightarrow \frac{d\mu}{dx}(x_0) = 0$$

De nou, diferenciant l'equació $f(x, \mu(x)) = 0$ respecte a x dues vegades, obtenim:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 f}{dx^2}(x, \mu(x)) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x, \mu(x)) \left(\frac{d\mu}{dx}(x) \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d^2 \mu}{dx^2}(x). \end{aligned}$$

Per tant, en (x_0, μ_0) ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \frac{d^2 \mu}{dx^2}(x_0) = 0 \quad (5.1.4)$$

Aleshores, pel sistema 5.1.2, l'única corba $\{x = \mu^2\}$ de punts fixos que passa per $(0, 0)$ es troba completament en un costat del punt de bifurcació $\mu = 0$.

Això només serà possible si $\frac{d^2 \mu}{dx^2} \neq 0$ en un entorn de $(x, \mu) = (0, 0)$. En comparació amb això, prenem el següent: $\frac{d^2 \mu}{dx^2}(x_0) \neq 0$. Aleshores, a partir de 5.1.4, veiem que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0. \quad (5.1.5)$$

Enunciem el resultat en el teorema següent.

Teorema 5.1 (Bifurcació saddle-node). Suposem que el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu), \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (5.1.6)$$

té un punt d'equilibri $x = x_0$ en $\mu = \mu_0$ que satisfà les condicions:

$$f(x_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0. \quad (5.1.7)$$

Si $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0$, aleshores el sistema té una bifurcació saddle-node en (x_0, μ_0) .

Ara trobarem la forma normal de la bifurcació saddle-node. Per forma normal d'un sistema entenem la forma matemàtica més simplificada des de la qual es pot entendre fàcilment el tipus de bifurcacions que ocorren en el sistema.

Proposició 5.2 (Forma normal de la bifurcació saddle-node). Suposem que el sistema 5.1.6 té un punt d'equilibri en $x = x_0$ per a $\mu = \mu_0$ per al qual es compleixen totes les condicions de saddle-node, és a dir,

$$f(x_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0 \quad (5.1.8)$$

i

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0. \quad (5.1.9)$$

Expandint $f(x, \mu)$ en una sèrie de Taylor en un entorn de (x_0, μ_0) , tenim:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \mu) \\ &= f(x_0, \mu_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) + (\mu - \mu_0) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + (x - x_0)(\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x_0, \mu_0) + \dots \\ &= (\mu - \mu_0) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + \dots \\ &= \alpha(\mu - \mu_0) + \beta(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

on $\alpha = \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0)$ i $\beta = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)$ són reals no nuls. L'equació 5.1.10 es refereix a la forma normal de la bifurcació saddle-node. Això representa un gran avantatge per determinar la bifurcació que experimenta un sistema.

Exemple 5.3. Descriu la bifurcació del sistema $\dot{x} = x^3 - 5x^2 - (\mu - 8)x + \mu - 4$.

Demostració. Sigui $f(x, \mu) = x^3 - 5x^2 - (\mu - 8)x + \mu - 4$. Els punts d'equilibri es donen per:

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 - (\mu - 8)x + \mu - 4 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - \mu + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Clarament, $x = 1$ és un punt fix del sistema per a tots els valors de μ . Els altres dos punts fixos són $x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{\mu}$, que són reals i diferents per a $\mu > 0$. Coincideixen amb el punt fix $x = 2$ per a $\mu = 0$ i desapareixen quan $\mu < 0$. Per tant, el sistema té bifurcació saddle-node a $x = 2$ amb $\mu = 0$ com a punt de bifurcació.

També ho podem verificar usant el teorema 3.1. Prenem $x_0 = 2$ i $\mu_0 = 0$. Ara, calculem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = 3x^2 - 10x + 8 - \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu) = -x + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \mu) = 6x - 10.$$

Veiem que:

$$f(2, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(2, 0) = -1 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) = 2 \neq 0.$$

Per tant, segons el teorema 3.1, el sistema té una bifurcació saddle-node a (x_0, μ_0) , on $x_0 = 2$ i $\mu_0 = 0$.

□

5.1.2 Bifurcacions pitchfork i transcítica

Ara discutim la bifurcació pitchfork en un sistema unidimensional, que apareix quan el sistema té simetria entre les direccions esquerra i dreta. Per exemple, considerem el sistema unidimensional

$$\dot{x}(t) = f(x, \mu) = \mu x - x^3, x, \mu \in \mathbb{R}. \quad (5.1.11)$$

Si substituïm x per $-x$, obtenim

$$-\dot{x} = -\mu x + x^3 = -(\mu x - x^3) \Rightarrow \dot{x} = \mu x - x^3. \quad (5.1.12)$$

Per tant, el sistema és invariant sota la transformació $x \mapsto -x$. Els punts d'equilibri del sistema s'obtenen com

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow \mu x - x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{\mu}. \quad (5.1.13)$$

En el cas de la bifurcació transcítica, els caràcters d'estabilitat dels punts fixos canvien per a valors variables dels paràmetres. Considerem el sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, x \in \mathbb{R} \quad (5.1.14)$$

amb $\mu \in \mathbb{R}$ com a paràmetre. Els punts d'equilibri d'aquest sistema s'obtenen com

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow \mu x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \mu. \quad (5.1.15)$$

Teorema 5.4 (Bifurcació pitchfork i transcítica). Suposem que el sistema 5.1.6 té un punt d'equilibri $x = x_0$ a $\mu = \mu_0$ que satisfà les condicions 5.1.7.

1. Si $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$, aleshores el sistema té una bifurcació transcítica a (x_0, μ_0) .
2. Si $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0$ i $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) \neq 0$, aleshores el sistema té una bifurcació pitchfork a (x_0, μ_0) . Aquesta bifurcació serà:
 - (a) Supercrítica si $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) < 0$.
 - (b) Subcrítica si $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) > 0$.

Ara derivem les formes normals d'aquestes bifurcacions en sistemes unidimensionals.

Proposició 5.5 (Forma normal de la bifurcació pitchfork). Suposem que el sistema 5.1.6 té un punt d'equilibri $x = x_0$ a $\mu = \mu_0$, que satisfà les condicions donades al teorema 3.4. Ara expandim la funció (x, μ) en un entorn de (x_0, μ_0) mitjançant la

sèrie de Taylor, tal com es presenta a continuació:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, \mu) \\
&= f(x_0, \mu_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) + (\mu - \mu_0) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + (x - x_0)(\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x_0, \mu_0) \\
&\quad + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2(\mu - \mu_0) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial \mu}(x_0, \mu_0) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x - x_0)(\mu - \mu_0)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial \mu^2}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{6}(\mu - \mu_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \mu^3}(x_0, \mu_0) + \dots \\
&= (x - x_0)(\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) + \dots \\
&= \alpha(x - x_0)(\mu - \mu_0) + \beta(x - x_0)^3 + \dots
\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

on $\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0)$ i $\beta = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0)$ són reals no nuls. Aquesta és la forma normal de la bifurcació pitchfork.

Proposició 5.6 (Forma normal de la bifurcació transcítica). Suposem que el sistema 5.1.6 té un punt d'equilibri $x = x_0$ a $\mu = \mu_0$ per al qual es compleixen les condicions de bifurcació transcítica, tal com es dona en el teorema 3.4. Utilitzant l'expansió de Taylor de $f(x, \mu)$ en un entorn de (x_0, μ_0) , tenim:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, \mu) \\
&= f(x_0, \mu_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) + (\mu - \mu_0) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + (x - x_0)(\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}(\mu - \mu_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x_0, \mu_0) + \dots \\
&= (x - x_0)(\mu - \mu_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) + \dots \\
&= \alpha(x - x_0)(\mu - \mu_0) + \beta(x - x_0)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

on $\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x_0, \mu_0)$ i $\beta = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0)$. L'equació 5.1.17 es refereix a la forma normal de la bifurcació transcítica.

Exemple 5.7. Demuestra que el sistema $\dot{x} = \mu x - x^3$ presenta una bifurcació pitchfork a $x = 0$ i per a tot $\mu \in \mathbb{R}$.

Demostració. Els equilibris es troben resolent $f(x, \mu) = 0$:

$$\mu x - x^3 = 0 \Rightarrow x(\mu - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\mu}. \quad (5.1.18)$$

Volem centrar-nos en el punt fix $x = 0$. Comprovem les condicions per a què el punt $x = 0$ tingui una bifurcació pitchfork:

1. $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, \mu_0) = 0$ per a tot $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \mu_0) = 0$ per a tot $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, \mu_0) = 1 \neq 0$ per a tot $\mu_0 \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, \mu_0) = -6 \neq 0$ per tot $x_0 \in \mathbb{R}$.

Per tant, el sistema experimenta una bifurcació pitchfork a $x = 0$. □

Exemple 5.8. Demuestra que el sistema $\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$ experimenta una bifurcació transcítica a $x = 0$ quan els paràmetres a i b satisfan una relació específica que s'ha de determinar.

Demostració. És evident que $x = 0$ és un punt d'equilibri del sistema donat per a tots els valors dels paràmetres a i b . Veiem si el sistema presenta una bifurcació transcítica. Per a valors de x petits, el desenvolupament en sèrie de e^{-bx} és el següent:

$$e^{-bx} = 1 - bx + \frac{b^2 x^2}{2!} - O(x^3).$$

$$\text{Per tant, } \dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx}) = x(1 - x^2) - a\left(bx - \frac{b^2 x^2}{2!} + O(x^3)\right) = (1 - ab)x + \frac{1}{2}ab^2 x^2 \text{ (ometent les potències cúbiques i superiors de } x)$$

Per a una bifurcació transcítica a $x = 0$, s'ha de complir que $1 - ab = 0$; és a dir, $ab = 1$. Per tant, el sistema experimenta una bifurcació transcítica a $x = 0$ quan $ab = 1$. □

Exemple 5.9. Considerem el sistema $\dot{x} = x^3 - \mu$; $x, \mu \in \mathbb{R}$. Veiem que si el sistema presenta alguna bifurcació en un entorn dels seus punts fixos.

$$f(x, \mu) = 0 \Rightarrow x^3 - \mu = 0 \Rightarrow x = \mu^{\frac{1}{3}}.$$

Calculem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) = 3x^2; \text{ per tant } \frac{\partial f}{\partial x}(\mu^{\frac{1}{3}}, \mu) = 3\mu^{\frac{2}{3}}.$$

El comportament qualitatiu del sistema no canvia amb la variació del paràmetre μ . Per tant, no es produeix cap bifurcació en un entorn dels seus punts fixos.

5.2 Bifurcacions en sistemes bidimensionals

5.2.1 Bifurcació Saddle-Node

Considerem un sistema bidimensional depenent d'un paràmetre

$$\dot{x} = \mu - x^2, \dot{y} = -y; \mu \in \mathbb{R} \quad (5.2.1)$$

Els punts fixos del sistema són les solucions de les equacions

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0 \quad (5.2.2)$$

que donen

$$\mu - x^2 = 0, y = 0. \quad (5.2.3)$$

Per a $\mu > 0$, l'equació 5.2.1 té dos punts fixos diferents a $(\sqrt{\mu}, 0)$ i $(-\sqrt{\mu}, 0)$. Aquests dos punts fixos es fusionen a l'origen $(0, 0)$ quan $\mu = 0$ i desapareixen quan $\mu < 0$.

Ara determinarem l'estabilitat dels punts fixos. Això requereix avaluar la matriu jacobiana del sistema per al comportament d'estabilitat local, que ve donada per

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

Considerem primer el cas $\mu > 0$. Aquí el sistema té dos punts fixos $(\sqrt{\mu}, 0)$ i $(-\sqrt{\mu}, 0)$. El jacobià

$$J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

té dos valors propis $(-2\sqrt{\mu})$ i -1 , que són reals, diferents entre ells i negatius si $\mu \neq \frac{1}{4}$. Per tant, $(\sqrt{\mu}, 0)$ és un node estable. De manera anàloga, calculant els valors propis de $J(-\sqrt{\mu}, 0)$ podem demostrar que el punt fix $(-\sqrt{\mu}, 0)$ és un punt de sella.

Considerem el cas $\mu = 0$. En aquest cas, el sistema només té un punt fix $(0, 0)$. La matriu jacobiana a $(0, 0)$ és

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

amb valors propis 0 i -1 . Això indica que el punt fix $(0, 0)$ és semiestable. Per a $\mu < 0$, el sistema no té punts fixos.

5.2.2 Bifurcacions pitchfork i transcítica

Comencem estudiant la bifurcació pitchfork supercrítica. Considerem un sistema bidimensional representat per

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \dot{y} = -y; \quad (5.2.7)$$

amb $\mu \in \mathbb{R}$ com a paràmetre. Per a $\mu < 0$, el sistema només té un punt fix a l'origen. La matriu jacobiana en aquest punt fix ve donada per

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Els valors propis de $J(0,0)$ són μ i (-1) , demostrant que el punt fix a l'origen és un node estable. Per a $\mu > 0$, el sistema té tres punts fixos $(0,0)$, $(\sqrt{\mu},0)$ i $(-\sqrt{\mu},0)$. La matriu jacobiana de 5.2.7 calculada en aquests punts fixos ve donada per

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J(\sqrt{\mu},0) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J(-\sqrt{\mu},0) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.9)$$

Els valors propis de $J(0,0)$ són μ i (-1) , que en aquest cas tenen signes oposats. Per tant, el punt $(0,0)$ és un punt de sella per a $\mu > 0$. Procedint de manera anàloga obtenim que els altres dos punts fixos són nodes estables.

En el cas de la bifurcació pitchfork subcrítica, considerem el sistema bidimensional següent:

$$\dot{x} = \mu x + x^3, \dot{y} = -y; \quad (5.2.10)$$

amb el paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$. Quan $\mu < 0$, el sistema 5.2.10 té tres punts fixos diferents, concretament $(0,0)$, $(\sqrt{\mu},0)$ i $(-\sqrt{\mu},0)$. Els jacobians del sistema avaluats en aquests punts fixos venen donats per

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J(\sqrt{\mu},0) = \begin{pmatrix} 4\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J(-\sqrt{\mu},0) = \begin{pmatrix} 4\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.11)$$

Els valors propis de $J(0,0)$ són μ i -1 , que tenen el mateix signe. Per tant, el punt fix origen és un node estable per a $\mu < 0$.

De manera similar, calculant els valors propis de les altres dues matrius jacobianes del sistema es pot veure que els punts fixos $(\pm\sqrt{\mu},0)$ són punts de sella. Per a $\mu > 0$, el sistema té un únic punt fix a l'origen, que és una sella.

Finalment, anem a analitzar la bifurcació transcítica. Considerem un sistema bidimensional expressat per

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \dot{y} = -y; \quad (5.2.12)$$

amb paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$. Aquest sistema té sempre dos punts fixos diferents $(0,0)$ o $(\mu,0)$ per a $\mu \neq 0$. Per a $\mu = 0$, aquests dos punts fixos es fusionen a $(0,0)$. La matriu jacobiana del sistema 5.2.12 ve donada per

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2.13)$$

En el punt $(0,0)$,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2.14)$$

que té valors propis μ i -1 . Per tant, el punt fix $(0, 0)$ del sistema és un node estable si $\mu < 0$ i és un punt de sella si $\mu > 0$. Per a $\mu = 0$, el punt fix és semiestable. De nou, en $(\mu, 0)$,

$$J(\mu, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.15)$$

Els valors propis de $J(\mu, 0)$ són $(-\mu)$ i -1 ; i això implica que el punt fix $(\mu, 0)$ és un node estable si $\mu > 0$, i un punt de sella si $\mu < 0$.

5.2.3 Bifurcació de Hopf

Fins ara hem discutit bifurcacions de sistemes amb valors propis reals, ja siguin positius o negatius, de la matriu jacobiana corresponent avaluada en els punts fixos del sistema corresponent.

Ara discutirem un fenomen de bifurcació periòdica molt interessant per a un sistema bidimensional on els valors propis són complexos. Aquest tipus de bifurcació s'anomena bifurcació de Hopf. Hi ha dos tipus de bifurcacions de Hopf, concretament, les bifurcacions de Hopf supercrítiques i subcrítiques.

En el cas de les bifurcacions de Hopf supercrítiques, considerem un sistema bidimensional amb paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \quad (5.2.16)$$

El sistema té un únic punt fix a l'origen. En coordenades polars, el sistema es pot escriure com

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \dot{\theta} = 1, \quad (5.2.17)$$

i, d'aquesta forma, és més fàcil d'analitzar. Quan $\mu < 0$, el punt fix a l'origen ($r = 0$) és un espiral estable. Per a $\mu = 0$, l'origen segueix sent una espiral estable. Per a $\mu > 0$, l'origen és una espiral inestable.

Ara ens interessa veure com es comporten els valors propis quan varia el paràmetre. La matriu jacobiana en el punt fix a l'origen es calcula com

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \quad (5.2.18)$$

que té per valors propis $\lambda \pm i$. Per tant, l'origen és una espiral estable quan $\mu < 0$ i una espiral inestable quan $\mu > 0$.

En el cas de les bifurcacions de Hopf subcrítiques, considerem un sistema bidimensional representat per

$$\dot{x} = \mu x - y + x(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2)^2; \quad (5.2.19)$$

$$\dot{y} = x + \mu y + y(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2)^2; \quad (5.2.20)$$

on $\mu \in \mathbb{R}$ és el paràmetre. En coordenades polars, el sistema és pot transformar com

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5, \dot{\theta} = 1. \quad (5.2.21)$$

Aquest sistema té un únic punt fix a l'origen. Quan $\mu > 0$, el punt fix a l'origen ($r = 0$) és una espiral estable i per a $\mu < 0$, és una espiral inestable.

Teorema 5.10 (Bifurcació de Hopf). Sigui (x_0, y_0) un punt d'equilibri d'un sistema autònom planar

$$\dot{x} = f(x, y, \mu), \dot{y} = g(x, y, \mu) \quad (5.2.22)$$

depenent d'algun paràmetre $\mu \in \mathbb{R}$, i sigui

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.2.23)$$

la matriu jacobiana del sistema avaluada en el punt d'equilibri que té valors propis purament imaginaris $\lambda_+(\mu) = iw, \lambda_-(\mu) = -iw, w \neq 0$ amb $\mu = \mu_0$. Si

1. $\frac{d}{d\mu}(Re\lambda(\mu)) = \frac{1}{2} > 0$ a $\mu = 0$,
2. $(f_{\mu x} + g_{\mu y}) = 1 \neq 0$,
3. $a = -\frac{\mu}{8} \neq 0$ per a $\mu \neq 0$,

on $a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + g_{xxy} + f_{xyy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16w}\{f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\}$ és avaluada en el punt d'equilibri, aleshores una solució periòdica bifurca des del punt d'equilibri (x_0, y_0) cap a $\mu < \mu_0$ si $a(f_{\mu x} + g_{\mu y}) > 0$ o cap a $\mu > \mu_0$ si $a(f_{\mu x} + g_{\mu y}) < 0$.

En tots dos casos, la solució periòdica és estable(respectivament inestable) si el punt d'equilibri és inestable(respectivament estable) en el costat de $\mu = \mu_0$.

Capítol 6

Caos

El caos és un fenomen determinísticament impredecible. En l'evolució d'una òrbita caòtica, hi ha trajectòries que no s'estabilitzen en punts fixos, òrbites periòdiques o quasi periòdiques a mesura que el temps tendeix a infinit.

La definició matemàtica del caos introdueix dues nocions: la propietat topològica transitiva, que reflecteix la capacitat del sistema per barrejar-se, i la propietat mètrica, que serveix per quantificar les distàncies dins del sistema. Les òrbites caòtiques poden descriure's sovint mitjançant estructures fractals.

Naturalment, una forma d'entendre el caos és buscar mesures qualitatives i quantitatives que siguin aplicables a alguns sistemes. Estudiarem algunes d'elles com l'exponent de Lyapunov.

6.1 Teoria matemàtica del caos

Un sistema dinàmic $\{T, X, \varphi^t\}$ es pot considerar com un parell (X, f) , on $f : X \rightarrow X$ és una funció de l'espai topològic (o espai mètric) X en si mateix.

Definició 6.1. Sigui (X, f) un sistema dinàmic discret. Es diu que un subconjunt A de X és un conjunt *positivament invariant* si $f(A) \subseteq A$. Si $f(A) = A$, aleshores és *estrictament positivament invariant*.

Definició 6.2. En un espai topològic (X, τ) , es diu que un subconjunt A de X és un conjunt *dens* si $\overline{A} = X$.

En altres paraules, es diu que A és un subconjunt dens de X si per a qualsevol $x \in X$, qualsevol entorn de x conté almenys un punt de A .

Un atribut d'un sistema caòtic és exhibir separació exponencialment ràpida de trajectòries properes per a condicions inicials canviades infinitesimalment. Això matemàticament es pot expressar en (X, f) de la següent manera:

Definició 6.3. Es diu que una aplicació $f : X \rightarrow X$ té la propietat de *dependència sensible de les condicions inicials* (DSCI) si existeix un $\delta > 0$ tal que per a qualsevol

$x \in X$ i qualsevol entorn $N_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ de x , existeix un $y \in N_\epsilon(x)$ i un enter $k > 0$ tal que es compleix la propietat $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Exemple 6.4. L'aplicació de duplicació $g : S \rightarrow S$ en el cercle unitari S es defineix per $g(\theta) = 2\theta$. Sigui $\theta_1 \in S$ i $N_\epsilon(\theta_1) = (\theta_1 - \epsilon, \theta_1 + \epsilon)$ un entorn de θ_1 . Sigui $\delta > 0$, aleshores existeix $\theta_2 \in N_\epsilon(\theta_1)$ i $k > 0$ tal que $|g^k(\theta_1) - g^k(\theta_2)| = |2^k\theta_1 - 2^k\theta_2| = 2^k|\theta_1 - \theta_2| \forall \theta_1, \theta_2 \in N_\epsilon(\theta_1)$. Això implica que que l'aplicació g té dependència sensible.

La transitivitat és una de les propietats fonamentals en la teoria matemàtica del caos.

Definició 6.5. Es diu que una aplicació $f : X \rightarrow X$ és *topològicament transitiva* en X si per a dos conjunts oberts qualssevol $U, V \subset X$ existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definició 6.6. Un sistema dinàmic discret (X, f) és *indescomponible* si i només si no es pot expressar com la unió de dos subconjunts de X no buits, tancats i positivament invariants.

D'aquesta manera, la transitivitat topològica implica indescomponibilitat.

Centrem-nos ara en algunes propietats de les aplicacions transitives que són essencials per estudiar el caos sota el marc de les matemàtiques.

Proposició 6.7. Un sistema dinàmic (X, f) és topològicament transitiu si i només si per a qualsevol subconjunt obert no buit A de X , el conjunt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A)$ és dens en X .

Proposició 6.8. En un sistema topològicament transitiu (X, f) , el conjunt X es pot expressar com $X = \overline{f(X)}$.

Proposició 6.9. En un espai topològicament transitiu (X, f) , si l'espai mètric (X, d) és compacte; és a dir, si tot recobriment obert de l'espai (X, d) té un subrecobriment finit, aleshores $X = \overline{f(X)}$.

Proposició 6.10. En un espai compacte, la transitivitat topològica és equivalent a l'existència d'una òrbita densa.

Proposició 6.11. Sigui (X, f) un sistema dinàmic on el conjunt X és compacte. Aleshores les propietats següents són equivalents:

1. (X, f) és topològicament transitiu.
2. Per a tots els conjunts oberts no buits $U, V \subseteq X$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$, $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
3. Per a tot conjunt obert no buit $A \subset X$, $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(A)} = X$.

Definició 6.12. La mescla topològica és una noció més forta que la propietat de transitivitat topològica. Es diu que una aplicació $f : X \rightarrow X$ és *fortament transitiva* si per a tots $x, y \in X$ i per a tot real $r > 0$, existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $z \in (x - r, x + r)$ tal que $f^n(z) = y$. Si X és compacte, podem demostrar fàcilment que la transitivitat topològica i la transitivitat forta són equivalents.

Es diu que una aplicació $f : X \rightarrow X$ és *topològicament mescladora* en X si per a dos conjunts oberts qualssevol $U, V \subset X$ amb $U \cap V = \emptyset$, existeix un enter positiu N tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \forall n \geq N$.

Definició 6.13. Es diu que una aplicació $f : X \rightarrow X$ (X és un espai topològic o un espai mètric) és una *aplicació caòtica* en un subconjunt invariant $A \subseteq X$ si es compleixen les següents condicions:

1. La funció f té dependència sensible de les condicions inicials en A .
2. f és topològicament transitiva en A .
3. Els punts periòdics de f són densos en A .

Exemple 6.14. Demuestra que l'aplicació de duplicació $g : S \rightarrow S$ definida per $g(\theta) = 2\theta, \theta \in S$, és caòtica en el cercle unitari S .

Demostració. Com s'ha mostrat anteriorment, l'aplicació g és sensible a les condicions inicials. Per demostrar la propietat de transitivitat topològica, considerem un arc obert A del centre unitari S de longitud l . Atès que l'aplicació g duplica un punt en S , podem trobar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(A)$ cobrirà tota la circumferència del cercle S . Per tant, per a dos conjunts oberts qualssevol U i V de S , s'ha de trobar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Per tant, g és topològicament transitiva en S .

Ara busquem els punts periòdics de període n . Segons la definició, obtenim:

$$g^n(\theta) = \theta = \theta + 2k\pi \quad (6.1.1)$$

$$\Rightarrow 2^n\theta = \theta + 2k\pi \quad (6.1.2)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2^n. \quad (6.1.3)$$

Aquesta relació ens indica que els punts periòdics de període n de l'aplicació g són les arrels $(2^n - 1)$ -èsimes de la unitat. Per a n gran, el conjunt de punts n -periòdics forma un subconjunt dens de S . Així, segons la definició de caos, l'aplicació g és caòtica en el conjunt invariant S . \square

Proposició 6.15. Sigui $f : X \rightarrow X$ una aplicació contínua en un espai mètric X de dimensió infinita. Si f és caòtica, aleshores té dependència sensible de les condicions inicials.

Proposició 6.16. Sigui $f : X \rightarrow X$ una aplicació contínua. Aleshores f és caòtica si i només si per a dos subconjunts oberts qualssevol U i V de X existeix un punt periòdic $x \in U$ i un enter positiu n tal que $f^n(x) \in V$.

Proposició 6.17. Supposem que $g : Y \rightarrow Y$ és conjugada a $f : X \rightarrow X$. Aleshores, g és caòtica en Y si i només si f és caòtica en X .

6.2 Fractals

La natura posseeix objectes que són irregulars i erràtics en la seva forma. L'any 1975, es va introduir una nova branca de la geometria coneguda com a geometria fractal, que troba ordre en formes i processos caòtics. Més específicament, la geometria fractal descriu els fractals, que són estructures geomètriques complexes prevalents en les ciències naturals i físiques.

Els fractals no tenen una definició pròpia, però existeixen algunes propietats que ajuden a identificar i analitzar objectes fractals. A continuació, descriurem les principals propietats dels objectes fractals:

1. Els fractals es presenten amb cert grau d'autosemblança, és a dir, els objectes fractals es podrien dividir en peces encara més petites que tenen les mateixes característiques que l'original.
2. La dimensió topològica dels objectes fractals sempre és menor que la dimensió fractal. La dimensió d'un objecte fractal no sol ser un enter, sinó fraccionària.
3. Normalment, el perímetre i l'àrea d'un objecte fractal no estan definits, amb valors que canvien depenent de la resolució que es prengui per mesurar-los.
4. La geometria fractal es pot representar mitjançant un algorisme iteratiu; per exemple, el conjunt de Mandelbrot és el conjunt de punts (diguem z_0 en el pla complex per als quals la iteració donada per $z_{n+1} = z_n^2 + z_0$ es manté fitada. Un altre exemple és el conjunt de Julia representat per la funció $f(z) = z^2 + c$.

Ara donarem alguns exemples de construcció de fractals matemàtics. Els fractals matemàtics es poden dissenyar mitjançant funcions matemàtiques i les seves composicions.

1. *Conjunt de Cantor*

El conjunt de Cantor va ser inventat pel matemàtic alemany Georg Cantor (1845-1918) l'any 1883. És un conjunt infinit de punts en l'interval unitat $[0, 1]$. Tot i no semblar un fractal, és el més important de tots i va servir d'exemple per a molts altres fractals, com el conjunt de Julia. Es construeix de la següent manera:

Considerem l'interval unitat $S_0 = [0, 1]$. Dividim l'interval en tres terços i traiem el terç del mig; és a dir, l'interval obert $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ i ens quedem amb els punts externs. Això ens deixa amb dos intervals tancats tal i com es mostra a continuació:

$$S_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]. \quad (6.2.1)$$

A continuació, tornem a dividir els dos intervals tancats que hem obtingut al pas anterior en terços i eliminem els del mig de cada interval. En aquest cas, obtenim

$$S_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]. \quad (6.2.2)$$

Repetim aquest procés de manera successiva. El conjunt límit $C = S_\infty$ s'anomena conjunt de Cantor del terç mig o simplement conjunt de Cantor.

És difícil visualitzar el conjunt de Cantor, però consisteix en un nombre infinit de trossos infinitesimals, separats per buits de diverses mides.

La longitud L del conjunt de Cantor és 1 al pas 0, al primer pas és $\frac{2}{3}$, al segon pas tenim que és $(\frac{2}{3})^2$ i, per tant, al pas n -èsim serà $(\frac{2}{3})^n$, que tendeix a 0 quan $n \rightarrow \infty$. Així doncs, el conjunt de Cantor té mesura zero.

Els punts de $[0, 1]$ que pertanyen al conjunt de Cantor es poden representar mitjançant expressions triàdiques, és a dir, nombres que tenen la següent forma:

$$x = 0 \cdot a_1 a_2 a_3 \dots = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots \quad (6.2.3)$$

on els nombres a_1, a_2, a_3 prenen valors del conjunt $\{0, 1, 2\}$.

Generalment, la construcció de fractals autosimilars es pot relacionar amb la transformació afí $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma $T : x \rightarrow a_i x + b_i$, on a_i és una transformació lineal en \mathbb{R}^n i b_i pertany a algun subconjunt d'un espai vectorial.

Per a la construcció del conjunt de Cantor, tenim la transformació afí $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a_i és una transformació afí en \mathbb{R} i $b_i \in [0, 1]$.

Les transformacions es defineixen com

$$T_1 : x \rightarrow \frac{x}{3}, T_2 : x \rightarrow \frac{x}{3} + \frac{2}{3}. \quad (6.2.4)$$

Si comencem amb l'interval tancat i fitat $A_0 = [0, 1]$, llavors sobre aquestes transformacions tindrem que

$$A_1 = T_1[0, 1] \cup T_2[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]. \quad (6.2.5)$$

Aplicant aquestes transformacions una altra vegada a cadascun dels intervals anteriors, s'obté

$$A_2 = T_1[0, \frac{1}{3}] \cup T_2[0, \frac{1}{3}] \cup T_1[\frac{2}{3}, 1] \cup T_2[\frac{2}{3}, 1] = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \quad (6.2.6)$$

tal i com volíem.

2. Conjunt de Julia

El conjunt de Julia va ser descobert per Gaston Julia (1893-1975) l'any 1918. El conjunt de Julia representa la funció de transformació, que és un polinomi complex o una funció racional complexa.

S'obté iterant la funció quadràtica següent:

$$f(z) = z^2 + c \quad (6.2.7)$$

per a un valor inicial complex, diguem-ne z_0 , on c és una constant complexa fixa arbitrària. Així, fixant el valor de c i prenent un valor inicial z_0 per a z , s'obtéindrà

$$f(z) = z_0^2 + c \quad (6.2.8)$$

després de la primera iteració. La iteració següent donarà

$$f(z) = (z_0^2 + c)^2 + c, \quad (6.2.9)$$

i així successivament. En realitat, el conjunt de Julia és un conjunt frontera entre dos conjunts matemàticament diferents, el conjunt d'escapament, diguem-ne E , i el conjunt de presoners, diguem-ne P .

Matemàticament, el conjunt d'escapament i el conjunt de presoners es poden definir de la següent manera:

$$E_c = \{z_0 : |z_n| \rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty\}. \quad (6.2.10)$$

$$P_c = \{z_0 : z_0 \notin E_c\}. \quad (6.2.11)$$

Per exemple, si D denota un disc amb centre 0 i radi 1 i E és la regió exterior al disc, aleshores la frontera entre D i E és la circumferència unitat.

3. Conjunt de Mandelbrot

El conjunt de Mandelbrot s'atribueix a Benoit Mandelbrot, qui va descobrir aquest conjunt l'any 1979. El conjunt de Mandelbrot és la regió del pla complex que comprèn els valors de c per als quals les trajectòries definides per

$$z_{k+1} = z_k^2 + c; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2.12)$$

roman fitades quan $k \rightarrow \infty$.

La diferència entre aquest conjunt i el de Julia és el seu valor inicial. En el cas de Julia, el valor inicial és z_0 , mentre que en el de Mandelbrot és c .

També podríem dir que el conjunt de Mandelbrot consta d'aquells valors de c per als quals el conjunt de Julia (J_c) és connex; és a dir,

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ és connex}\}. \quad (6.2.13)$$

El conjunt de Mandelbrot conté una quantitat enorme d'informació sobre l'estructura del conjunt de Julia, ja que quan s'amplien els límits de M , es revelen estructures infinites de J_c per a alguns valors de c .

6.3 Exponent de Lyapunov

L'exponent de Lyapunov d'una aplicació és una mesura quantitativa important per ser caòtica. La idea bàsica de Lyapunov és que la velocitat d'atracció o repulsió de trajectòries properes a un punt fix o a qualsevol altre punt és exponencialment ràpida.

Això dona una mesura mitjana de la velocitat exponencial a la qual les òrbites properes d'una aplicació $f : X \rightarrow X$ se separen. D'aquesta manera, un valor positiu de l'exponent de Lyapunov és un indicatiu de caos.

Definició 6.18. Sigui f un mapa suau de la recta real \mathbb{R} . El *nombre de Lyapunov* d'una òrbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es defineix com $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_1)| \cdots |f'(x_n)|)^{1/n}$ si aquest límit existeix.

Ara anem a veure un mètode per calcular l'exponent de Lyapunov λ en un punt x per a una funció general $f(x)$. Aquest mètode es basarà en la definició de λ de la següent equació:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x)| \quad (6.3.1)$$

En primer lloc, considerem que x , el punt en què volem calcular λ , sigui el punt inicial x_0 del procés d'iteració:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (6.3.2)$$

amb $n \geq 0$ i $x_0 = x$.

De l'equació 6.3.1, deduïm que:

$$\ln |(f^n)'(x)| = \ln |(f^n)'(x_0)| \quad (6.3.3)$$

Anem a calcular les derivades de composicions de la funció $f(x)$:

En el cas de $n = 2$,

$$f^2(x) = f(f(x)), \quad (6.3.4)$$

de manera que, per la regla de la cadena,

$$(f^2)'(x) = f'(f(x))f'(x). \quad (6.3.5)$$

Però recordant que $x = x_0$:

$$(f^2)'(x) = f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0). \quad (6.3.6)$$

En el cas de $n = 3$,

$$f^3(x) = f(f(f(x))), \quad (6.3.7)$$

de manera que, tornant a aplicar la regla de la cadena,

$$(f^3)'(x) = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x). \quad (6.3.8)$$

Recordant que $x = x_0$:

$$(f^3)'(x_0) = f'(f(f(x_0)))f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_2)f'(x_1)f'(x_0). \quad (6.3.9)$$

Veiem que, en general per $n \geq 1$,

$$(f^n)'(x_0) = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \cdots f'(x_1)f'(x_0) = \prod_{k=1}^n f'(x_k). \quad (6.3.10)$$

(aquesta fórmula es pot acabar de demostrar per inducció de manera fàcil).

De l'equació 6.3.3, prenem els logaritmes naturals dels valors absoluts de tots dos costats de l'equació 6.3.10:

$$\ln|(f^n)'(x_0)| = \ln\left|\prod_{k=0}^{n-1} f'(x_k)\right| = \ln\prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \ln|f'(x_k)|. \quad (6.3.11)$$

Si substituïm aquesta expressió a l'equació 6.3.1, obtenim el següent resultat:

Definició 6.19. *L'exponent de Lyapunov* es defineix com $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_n)|]$ si aquest límit existeix.

Cal observar que λ existeix si i només si L existeix i és no nul, i que $\ln L = \lambda$.

També cal recalcar que els nombres i exponents de Lyapunov no estan definits per a algunes òrbites. En particular, una òrbita que contingui un punt x_i amb $f'(x_i) = 0$ fa que l'exponent de Lyapunov no estigui definit.

Proposició 6.20. Un exponent de Lyapunov positiu indica sensibilitat a les condicions inicials i que el sistema pot ser caòtic.

Fins ara hem discutit la tècnica per calcular exponents de Lyapunov per a aplicacions unidimensionals. El nostre proper objectiu és determinar els exponents de Lyapunov per a sistemes de dimensions superiors.

Considerem un sistema n-dimensional representat per:

$$x_{n+1} = f(x_n); x_n \in \mathbb{R}^n. \quad (6.3.12)$$

Prenem un punt x_0 en l'espai de fases del sistema. Sigui $N(x_0)$ un entorn petit de x_0 . Triem un altre punt $x_0 + \Delta x_0$ en $N(x_0)$, on Δx_0 representa la separació dels dos punts x_0 i $x_0 + \Delta x_0$.

Siguin els punts successius en les òrbites $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ i $x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n, \dots$ respectivament, on $x_i = f(x_{i-1})$ i $x_i + \Delta x_i = x_{i-1} + \Delta x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Per tant, les separacions entre punts successius en les òrbites són les següents:

$$\Delta x_1 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \simeq Df(x_0)\Delta x_0,$$

$$\Delta x_2 = f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1) \simeq Df(x_1)\Delta x_1,$$

...

$$\Delta x_N = f(x_{N-1} + \Delta x_{N-1}) - f(x_{N-1}) \simeq Df(x_{N-1})\Delta x_{N-1}$$

on $Df(x_i)$ representa la matriu jacobiana n x n de l'aplicació f en el punt x_i . Per tant, podem determinar fàcilment la separació Δx_N en la iteració N-èsima de la següent manera:

$$\Delta x_N = Df(x_{N-1})Df(x_{N-2})\dots Df(x_1)Df(x_0)\Delta x_0 = D_N\Delta x_0 \quad (6.3.13)$$

on $D_N = Df(x_{N-1})Df(x_{N-2})\dots Df(x_1)Df(x_0)$, una matriu $n \times n$ que depèn tant de N com de x_0 .

D'aquesta discussió, es dedueix que la separació de dues òrbites veïnes en la iteració N -èsima està completament determinada per la matriu D_N i la separació inicial Δx_0 .

Com que l'espai de fases és multidimensional, hem d'introduir els vectors propis de la matriu D_N com a base natural per a la descomposició dels vectors en l'espai de fases. Els vectors propis $e_i(N)$ de la matriu D_N s'obtenen de la relació:

$$D_N e_i(N) = v_i(N) e_i(N), i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3.14)$$

on tant $v_i(N)$ com $e_i(N)$ depenen de N . Els vectors propis generalment es trien ortonormals. Si no ho són, els fem ortonormals utilitzant la tècnica d'ortonormalització de Gram-Schmidt. Les quantitats $v_i(N)$ es coneixen com a valors propis de la matriu D_N i es determinen a partir de l'equació característica:

$$\det(D_N - v(N)I) = 0 \quad (6.3.15)$$

on I és la matriu identitat d'ordre n . Suposem que, en termes dels vectors base (vectors propis) $e_i(N)$, la separació inicial Δx_0 s'expressa com:

$$\Delta x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i(N), \quad (6.3.16)$$

on els c_i són les coordenades de Δx_0 en base $e_i(N)$. Si substituïm 6.3.16 a 6.3.13 obtenim:

$$\Delta x_N = D_N \sum_{i=1}^n c_i e_i(N) = \sum_{i=1}^n c_i D_N e_i(N) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(N) e_i(N). \quad (6.3.17)$$

A partir de 6.3.16 i 6.3.17 queda clar que la separació de les òrbites al llarg de la direcció i -èsima està caracteritzada pel valor propi $v_i(N)$ de la matriu de coeficients D_N . La taxa exponencial de separació de les òrbites condueix als exponents de Lyapunov. Sigui λ_i l'exponent de Lyapunov al llarg de la direcció i -èsima. Llavors:

$$|v_i(N)| \approx e^{\lambda_i N}, \quad (6.3.18)$$

per a N gran. Això implica que:

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln(|v_i(N)|), i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3.19)$$

Aquesta equació dona una estimació dels exponents de Lyapunov per a sistemes multidimensionals.

Exemple 6.21 (Càlcul de l'exponent de Lyapunov en una dimensió). Considerem l'aplicació següent en l'interval $[0, 1]$ que es coneix com "Tent Map":

$$T(x) = \begin{cases} 2rx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2r(1-x), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.3.20)$$

Veiem que $|T'(x)| = 2r$ per tot $x \in [0, 1]$ excepte per $x = \frac{1}{2}$, el punt de no derivabilitat. Aquí el paràmetre r es troba en l'interval $[0, 1]$. Aleshores, l'exponent de Lyapunov del "Tent Map" ve donat per

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |T'(x_k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln 2r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} n \ln 2r = \ln 2r. \quad (6.3.21)$$

Com que $\lambda > 0$ quan $2r > 1$; és a dir, quan $r > \frac{1}{2}$, el "Tent Map" és caòtic per a $r > \frac{1}{2}$. És no caòtic per a $r \leq \frac{1}{2}$.

Exemple 6.22 (Càlcul de l'exponent de Lyapunov en dues dimensions). Només en aquest exemple denotarem els exponents de Lyapunov com $\bar{\lambda}$ per a no confondre'ns amb la notació dels valors propis λ .

Considerem un mapa lineal en el torus bidimensional, definit per:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (6.3.22)$$

La matriu del sistema és constant:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.3.23)$$

Aleshores, per a un mapa lineal amb matriu constant A , els exponents de Lyapunov són els logaritmes dels valors propis en mòdul. Calculem els valors propis de A .

Polinomi característic:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (6.3.24)$$

Resolem l'equació de segon grau i ens dona la següent solució:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (6.3.25)$$

Els valors propis són:

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382 \quad (6.3.26)$$

Com que el mapa és en el torus (mòdul 1), però la dinàmica lineal és considerada en \mathbb{R}^2 , els exponents de Lyapunov són:

$$\bar{\lambda}_1 = \ln \lambda_1 = \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.9624 \quad (6.3.27)$$

$$\bar{\lambda}_2 = \ln \lambda_2 = \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.9624 \quad (6.3.28)$$

Així doncs, tenim un exponent positiu i un de negatiu, amb la mateixa magnitud (sistema conservatiu).

Definició 6.23. Sigui f una aplicació suau. Una òrbita $\{x_1, x_2, x_n, \dots\}$ s'anomena *asimptòticament periòdica* si convergeix a una òrbita periòdica quan $n \rightarrow \infty$; això significa que existeix una òrbita periòdica $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$.

Teorema 6.24. Sigui f una aplicació de la recta real \mathbb{R} . Si l'òrbita $\{x_1, x_2, \dots\}$ de f satisfà que $f'(x_i) \neq 0$ per a tot i i és asimptòticament periòdica a l'òrbita periòdica $\{y_1, y_2, \dots\}$, aleshores les dues òrbites tenen els mateixos exponents de Lyapunov, suposant que ambedós existeixen.

Demostració. Utilitzem el fet que la mitjana d'una successió convergeix al límit de la successió; és a dir, si $\{s_n\}$ és una successió infinita de nombres amb $\lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n\} = s$, aleshores:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i = s.$$

Suposem que $k = 1$ per començar, de manera que y_1 és un punt fix. Com que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_1$, el fet que la derivada f' sigui una funció contínua implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f' \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \right) = f'(y_1).$$

A més, com que $\ln |x|$ és una funció contínua per a x positius,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |f'(x_n)| = \ln \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) \right| = \ln |f'(y_1)|.$$

Aquesta equació ens dona el límit d'una successió infinita. Fent servir el fet que la mitjana de la successió convergeix al límit de la successió, veiem que:

$$\lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| = \ln |f'(y_1)| = \lambda_y.$$

Ara suposem que $k > 1$, de manera que y_1 no és necessàriament un punt fix. Aleshores, y_1 és un punt fix per a f^k , i l'òrbita de x_1 sota f^k és asimptòticament periòdica a l'òrbita de y_1 .

Pel que hem demostrat anteriorment, l'exponent de Lyapunov de l'òrbita de x_1 sota f^k és $\ln |(f^k)'(y_1)|$ i l'exponent de Lyapunov de x_1 sota f és $(1/k) \ln |(f^k)'(y_1)| = \lambda_y$.

□

Capítol 7

Exemples de sistemes dinàmics caòtics

7.1 Sistema de Lorenz

Un dels exemples més importants dels sistemes dinàmics caòtics és el sistema de Lorenz.

El meteoròleg Edward Norton Lorenz va derivar un sistema tridimensional a partir d'un model molt simplificat dels corrents de convecció en el flux atmosfèric. El model simplificat pot escriure's de manera simplificada de la manera següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

on $\sigma, r, b > 0$ són paràmetres. En el paper original, Lorenz va considerar $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$.

El sistema conté dos termes no lineals senzills xz i xy a la segona i tercera equacions respectivament. Lorenz va descobrir que aquest sistema aparentment simple podia tenir dinàmiques extremadament erràtiques o complexes per a un ampli rang de valors dels paràmetres.

Quan Lorenz va representar les trajectòries en tres dimensions, va descobrir un nou concepte dins la teoria dels sistemes dinàmics: *l'atractor estrany*, una figura que no és un punt, ni una corba, ni una superfície, sinó un fractal amb dimensió fraccionària entre 2 i 3.

Anem a estudiar-lo fixant-nos amb les seves propietats:

1. *Simetria*.

El sistema de Lorenz és simètric respecte dels eixos x i y . Si substituïm (x, y, z) per $(-x, -y, z)$ el sistema roman invariant. Per tant, si $(x(t), y(t), z(t))$ és solució, aleshores $(-x(t), -y(t), z(t))$ també ho és.

2. *Invariància de l'eix z.*

Si inicialment prenem $x = y = 0$, aleshores el sistema es redueix a $\dot{z} = -bz \Rightarrow z(t) = z(0)e^{-bt} \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow +\infty$. Així doncs, l'eix z (on $x = y = 0$) és un conjunt invariant i totes les solucions que hi comencen tendeixen a $(0, 0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$.

3. *Bifurcacions*

Els punts fixos es troben resolent:

$$\sigma(y - x) = 0, rx - y - xz = 0, xy - bz = 0, \quad (7.1.1)$$

que acaben donant la solució $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ i per a $r > 1$: $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, z = (r-1)$. Aquests dos últims punts fixos els podem definir de la següent manera:

$$c^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)) \quad (7.1.2)$$

$$c^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1)) \quad (7.1.3)$$

Ens interessa entendre la formació de l'atractor estrany de Lorenz mitjançant les bifurcacions. Fixem $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ i estudiem el comportament dinàmic al variar $r > 0$.

- (a) Si $r < 1$, aleshores l'origen és un node atractor i és l'únic punt fix.
- (b) Si $r = 1$, aleshores tenim una bifurcació pitchfork i c^+, c^- són nodes atractors (si $r \gtrsim 1$). L'origen és un punt de sella que té una varietat inestable amb dimensió 1 i una varietat estable amb dimensió 2.
- (c) Si $r \approx 1,3456$, aleshores tenim una transició a node-focus de $c^{+, -}$. Tenim dos valors propis reals i negatius que col·lisionen i es tornen complexos amb part real negativa.
- (d) Si $r = r_h = \frac{470}{16} \approx 24.74$, aleshores tenim una bifurcació de Hopf. Els punts es tornen punts de sella - focus repulsor (amb una varietat estable de dimensió 1 i una varietat inestable de dimensió 2, aquesta associada a valors propis complexos amb part real positiva) i les òrbites periòdiques desapareixen.
- (e) Per a $r > r_h$ es crea l'atractor de Lorenz, que té una estructura molt complicada. Per a $r \gtrsim 31.01$, es destrueix.

4. *Anàlisi de l'estabilitat lineal a l'origen*

La forma linealitzada del sistema de Lorenz al voltant del punt fix a l'origen és donada per:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y \\ \dot{z} = -bz \end{cases}$$

D'aquesta manera, tenim que $\dot{z} = -bz \Rightarrow z(t) = z(0)e^{-bt} \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow +\infty$. Les altres dues equacions es poden escriure com:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per tant, la suma dels elements de la diagonal de la matriu és $\tau = -\sigma - 1 = -(\sigma + 1) < 0$ i el seu determinant és $\Delta = (-\sigma)(-1) - \sigma r = \sigma(1 - r)$. Si $r > 1$, aleshores $\Delta < 0$ i el punt fix a l'origen és una sella. Si $r < 1$, aleshores $\Delta > 0$ i el punt fix a l'origen és un node estable.

5. Anàlisi de l'estabilitat lineal dels punts fixos c^\pm

Els valors propis de la matriu Jacobiana als punts crítics c^\pm del sistema de Lorenz satisfan l'equació:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2ab(r - 1) = 0. \quad (7.1.4)$$

Per a $1 < r < r_H$, les tres arrels de l'equació cúbica anterior tenen les parts reals negatives, on:

$$r_H = \frac{\sigma(b + \sigma + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (7.1.5)$$

Si $r = r_H$, dos dels valors propis són purament imaginaris, i per tant té lloc una bifurcació de Hopf. Per a $r < r_H$, existeixen dues solucions periòdiques inestables corresponents a dos valors crítics dels punts fixos. Per a $r > r_H$, cadascun dels dos punts crítics té un valor propi real negatiu i dos valors propis amb part real positiva, cosa que dona lloc a una solució inestable.

6. El sistema de Lorenz té un atractor global

Volem veure que el sistema de Lorenz té un atractor global. Això es dedueix de l'existència d'una regió de captura que conté l'atractor de Lorenz. D'aquesta manera, les òrbites no divergeixen cap a l'infinit i el sistema té estabilitat global. Per demostrar aquest fet, utilitzem la funció següent:

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2). \quad (7.1.6)$$

Cal notar que:

- (a) $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable respecte a totes les variables.
- (b) $V \geq 0$ per a tot $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (c) $\frac{dV}{dt}(x(t), y(t), z(t)) = xx' + yy' + (z - \sigma - r)z' = -\sigma x^2 - y^2 - bz^2 + b(\sigma + r)z$, on $(x(t), y(t), z(t))$ és una solució de les equacions de Lorenz.

Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{dV(x,y,z)}{dt} \geq 0\}$ una regió acotada i sigui

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sigma x^2 + y^2 + bz^2 = b(\sigma + r)z\} \subset S, \quad (7.1.7)$$

un el·lipsoide acotat. Llavors,

$$x \notin S \Rightarrow \frac{dV}{dt} < 0. \quad (7.1.8)$$

De fet, tenim que $\frac{dV(x)}{dt} \leq -\delta$ per a algun $\delta > 0$ petit. Per tant, V disminueix estrictament fins que $(x(t), y(t), z(t))$ entra a S amb les condicions inicials $(x(0), y(0), z(0)) = (x, y, z)$.

Com que S és un conjunt no buit, acotat i positivament invariant, qualsevol òrbita que entri a S hi romandrà a mesura que el sistema evoluciona. Així doncs, S és una regió de captura. Per tant, el flux de Lorenz està definit per a tot t .

7.2 El mapa logístic

En aquesta secció estudiarem l'equació logística, que ve donada per la següent expressió:

$$f(x) = rx(1 - x) \quad (7.2.1)$$

Centrarem el nostre anàlisi en el cas $0 < r \leq 4$. Per a $r = 4$, sabem que el mapa logístic exhibeix caos. Anem a estudiar aquesta equació analitzant les seves propietats:

1. Punts fixos

Per a calcular els punts fixos de f a partir de 7.2.1 hem de resoldre

$$x = xr(1 - x) \Rightarrow rx^2 + (1 - r)x = 0 \Rightarrow x(rx + (1 - r)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 1 - \frac{1}{r}. \end{cases} \quad (7.2.2)$$

Per tant, f té dos punts fixos : $x_1 = 0$ i $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$.

2. Estabilitat

Ara anem a veure per quins valors de r tenim estabilitat. Com ja hem vist anteriorment, cal comprovar que es compleixi el següent:

$|f'(x_i)| = |r - 2rx_i| = |r(1 - 2x_i)| < 1$. Per a $x_1 = 0$, tenim el següent resultat:

$|f'(x_1)| = r$. Per tant, x_1 és estable quan $r < 1$. Per a $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$,

$|f'(x_2)| = |-r + 2|$, i volem que $|-r + 2| < 1$, així que ens queda que $1 < r < 3$.

Ens falta determinar la naturalesa dels punts fixos per a $r = 1$ i $r = 3$. Per a $r = 3$, tenim que $|f'(x_1)| = 3 > 1$ i, per tant, $x_1 = 0$ és inestable; i $|f'(x_2)| = 1$, així que el criteri no ens aporta informació.

Per a $r = 1$, tenim un únic punt fix ja que $x_1 = x_2 = 0$. En aquest cas, $|f'(x_1)| = 1$ i, per tant, el criteri tampoc ens aporta informació.

3. Anàlisi de bifurcació

Com ja hem dit, quan $r = 1$, tenim un únic punt fix $x_1 = 0$. Anem a veure que es compleixen les condicions de bifurcació transcítica a $x_1 = 0$ i $r = 1$. Primer, fem els càlculs pertinents.

$$\frac{\partial f}{\partial r}(x_0, r) = x_0(1 - x_0) \quad (7.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, r) = -2r \quad (7.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x_0, r) = 1 - 2x_0 \quad (7.2.5)$$

Ara substituïm els valors de x_0 i r i mirem si es compleixen les condicions.

- (a) $\frac{\partial f}{\partial r}(0, 1) = 0$ per a tot r .
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = -2 \neq 0$.
- (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(0, 1) = 1 \neq 0$.

Com que els resultats són correctes, acabem de comprovar que el mapa logístic té una bifurcació transcítica a $(x_0, r) = (0, 1)$.

4. Càlcul de l'exponent de Lyapunov

Com ja sabem, el mapa logístic s'expressa com $f(x) = rx(1 - x)$, amb $0 \leq r \leq 4$ i $x \in [0, 1]$. Tenim que $f'(x) = r(1 - 2x)$. Per tant, l'exponent de Lyapunov s'obté com:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |r(1 - 2x_i)| \quad (7.2.6)$$

Prenent el punt inicial x_0 i les iteracions $x_{n+1} = f(x_n)$ amb $n = 0, 1, 2, \dots$, es pot calcular l'exponent de Lyapunov del mapa logístic per a diferents valors del paràmetre r .

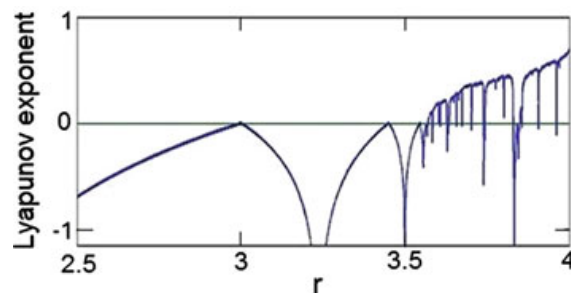


Figura 7.1: Càlcul de l'exponent de Lyapunov del mapa logístic per a $2.5 \leq r \leq 4$

La figura 7.1 representa l'exponent de Lyapunov del mapa logístic per a $2.5 \leq r \leq 4$, prenent 1000 iteracions i $x_0 = 0.2$ com a punt inicial. Per exemple, per a $r = 4$, l'exponent de Lyapunov és $\ln 2$. Els punts on la gràfica toca l'eix x representen els punts de bifurcació.

7.3 El mapa d'Hénon

Michel Hénon va buscar recapitular la geometria de l'atractor de Lorenz en dues dimensions. Per derivar un model simplificat del sistema de Lorenz i el seu atractor, Hénon va considerar tres passos.

El primer pas va ser la consideració del mapa de Poincaré de l'atractor de Lorenz, que és una aplicació que relaciona les interseccions successives d'una trajectòria amb un hiperplà. Això redueix la dinàmica del sistema continu tridimensional a la d'un sistema discret bidimensional.

El segon pas va ser considerar que definir una aplicació explícita simplificaria significativament el càlcul. A més, s'espera que aquesta aplicació emuli algunes de les propietats desitjades també observades en el sistema de Lorenz. L'últim pas consisteix en la construcció explícita d'aquesta aplicació.

L'aplicació es construeix com la composició de tres aplicacions, on cada aplicació pretén emular una propietat observada en el sistema de Lorenz. La primera aplicació és la següent:

$$H'(x, y) = (x, y + 1 - ax^2), \quad (7.3.1)$$

on a és un cert paràmetre. La segona aplicació és una contracció al llarg de l'eix x :

$$H''(x, y) = (bx, y), \quad (7.3.2)$$

amb $-1 < b < 1$ un paràmetre de contracció i, finalment, una reflexió donada per

$$H'''(x, y) = (y, x). \quad (7.3.3)$$

Aleshores, la composició $H_{a,b}(x, y) = H''' \circ H'' \circ H'(x, y)$ ve donada llavors per

$$H_{a,b}(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx), \quad (7.3.4)$$

que és el que més endavant es va anomenar com mapa de Hénon.

Veiem que el mapa depèn de dos paràmetres, a i b , els quals tenen valors de $a = 1.4$ i $b = 0.3$ per al mapa clàssic de Hénon. Per als valors clàssics, el mapa de Hénon és caòtic.

Anem a analitzar el mapa de Hénon mitjançant les seves propietats:

1. *Punts fixos* El mapa té dos punts fixos donats per

$$x_+ = \frac{-(1-b) + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_+ = bx_+. \quad (7.3.5)$$

i

$$x_- = \frac{-(1-b) - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_- = bx_-. \quad (7.3.6)$$

on x_+ i x_- són les arrels del polinomi $-ax^2 - (1+b)x + 1$. Això es comparable al sistema de Lorenz, que també té dos punts d'equilibri quan $r > 1$.

Per tant, aquests punts d'equilibri són reals si

$$(1 - b)^2 + 4a > 0. \quad (7.3.7)$$

Per als valors clàssics $a = 1.4$ i $b = 0.3$, els dos punts fixos són

$$x_1 \approx 0.631, \quad y_1 \approx 0.189 \quad (7.3.8)$$

$$x_2 \approx -1.131, \quad y_2 \approx -0.339 \quad (7.3.9)$$

2. Inversa

La matriu jacobiana de $H_{a,b}$ ve donada per

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3.10)$$

Això dona els valors propis següents:

$$\lambda = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b} \quad (7.3.11)$$

El determinant del jacobiana del mapa de Hénon és constant i ve donat per $\det(J) = -b$. Per tant, el mapa de Hénon és invertible si i només si $b \neq 0$, i la inversa ve donada per:

$$H_{a,b}^{-1}(x, y) = \left(\frac{b}{y}, x - 1 + a \left(\frac{b}{y} \right)^2 \right), \quad (7.3.12)$$

per $b \neq 0$.

Per als paràmetres clàssics $a = 1.4$, $b = 0.3$, el determinant és -0.3 , de manera que el mapa contrau les àrees a una taxa constant. Cada iteració redueix les àrees en un factor de 0.3.

3. Estabilitat

L'estabilitat local es determina pels valors propis de la matriu jacobiana en els punts d'equilibri. Per tant, pel que fa al primer punt fix (x_1, y_1) , només cal substituir els valors clàssics $a = 1.4$, $b = 0.3$ i $x_1 = 0.631$, $y_1 = 0.189$ a l'equació 7.3.11:

$\lambda = -1.4 \cdot 0.631 \pm \sqrt{(1.4 \cdot 0.631)^2 + 0.3} = -0.8834 \pm \sqrt{0.780 + 0.3} = -0.8834 \pm \sqrt{1.08}$ i tenim que $\sqrt{1.08} \approx 1.039$. D'aquesta manera,

$$\lambda_1 \approx 0.1556 \quad (7.3.13)$$

$$\lambda_2 \approx -1.922 \quad (7.3.14)$$

Com que els dos valors propis són reals, diferents entre ells i tenen signes oposats, aleshores (x_1, y_1) és un punt de sella.

Per al punt fix (x_2, y_2) , procedirem de manera anàloga. Substituïm els valors clàssics $a = 1.4, b = 0.3$ i $x_2 = -1.131, y_2 = -0.339$ a l'equació 7.3.11:

$$\lambda = -1.4 \cdot (-1.131) \pm \sqrt{(1.4 \cdot (-1.131))^2 + 0.3} = 1.5834 \pm \sqrt{(1.5834)^2 + 0.3} = 1.5834 \pm \sqrt{2.507 + 0.3} = 1.5834 \pm \sqrt{2.807} \approx 1.5834 \pm 1.675$$
 Així doncs, tenim

$$\lambda_1 \approx 3.258 \tag{7.3.15}$$

$$\lambda_2 = -0.0916 \tag{7.3.16}$$

De la mateixa manera que en el cas anterior, com que els dos valors propis són reals, diferents entre ells i de signe contrari, tenim que (x_2, y_2) també és un punt de sella.

Capítol 8

Conclusions

En aquest treball hem abordat l'estudi dels sistemes dinàmics caòtics des d'una doble perspectiva: teòrica i aplicada. Mitjançant un recorregut estructurat, hem explorat els fonaments matemàtics que defineixen el caos, les seves propietats característiques i les eines per a la seva anàlisi i quantificació, per finalment aplicar aquest marc conceptual a tres sistemes paradigmàtics.

Hem introduït i analitzat els conceptes fonamentals necessaris per a la comprensió del caos, com ara les propietats de dependència sensible a les condicions inicials, la transitivitat topològica o la densitat de punts periòdics.

La investigació ens ha confirmat que eines com l'exponent de Lyapunov són indispensables per quantificar el caos. Un exponent positiu constitueix un indicador robust de comportament caòtic. Així mateix, ens ha mostrat com la geometria fractal proporciona el llenguatge natural per descriure l'estructura complexa i moltes vegades estranya dels atractors caòtics.

L'estudi de sistemes concrets, com el sistema de Lorenz, el mapa logístic i el mapa d'Hénon, ens ha permès il·lustrar de manera clara com els conceptes teòrics es manifesten en models reals:

1. L'estudi del sistema de Lorenz ens ha revelat l'aparició del caos a través d'una seqüència de bifurcacions (pitchfork, Hopf).
2. El mapa logístic ens ha servit com a model discret fonamental per entendre la ruta cap al caos. El càlcul del seu exponent de Lyapunov per al paràmetre $r = 4$, donant $\ln 2$, confirma la seva naturalesa caòtica en aquest règim.
3. L'estructura, els punts fixos de tipus sella i la propietat de contracció d'àrees converteixen el mapa de Hénon en un anàleg discret essencial de l'atractor de Lorenz.

Finalment, podem afirmar que aquest treball constitueix un punt de partida per a la comprensió de la complexitat del món que ens envolta; una àmplia varietat de fenòmens naturals i artificials, des de la dinàmica atmosfèrica fins a processos biològics, econòmics i tecnològics.

Bibliografia

- [1] Kuznetsov, Y. A.: Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [2] Alligood, K. T., Sauer, T. D., Yorke, J. A.: Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] Layek, G. C.: An Introduction to Dynamical Systems and Chaos, Springer, New Delhi, 2015.
- [4] Chacono C.: Ordinary Differential Equations with Applications, Springer New York, 1999.
- [5] R.L.Devaney: An introduction to chaotic dynamical systems, 1989.
- [6] E.M. Bollt: Controlling the chaotic logistic map, Primus, 1997.